선형대수학

이양민(Yang Min Lee)
manson23@nate.com
S03-301-01호실
카카오ID: yanwenry

프로그래밍 실습

1. 다음과 같이 방향과 크기가 주어진 $\mathbb{R}^2$ 공간의 두 힘을 결합한 힘의 방향과 크기를 구하라.

연계 : 6.1절

30° 방향으로 100N의 힘

60° 방향으로 120N의 힘

```python
import numpy as np

2 usages
def getVector(mag, deg): # 주어진 크기와 방향에 대응하는 벡터
    vec = np.zeros(2)
    vec[0] = mag*np.cos(deg*2*np.pi/360)
    vec[1] = mag*np.sin(deg*2*np.pi/360)
    return vec

1 usage
def getMagDeg(vec): # 벡터의 크기와 방향 계산
    mag = np.sqrt(vec[0]*vec[0]+vec[1]*vec[1])
    deg = np.arctan(vec[1]/vec[0]) * 360/(2*np.pi)
    return mag, deg

F1 = getVector( mag: 100,  deg: 30) # 크기 100N, 방향 30°인 
F2 = getVector( mag: 120,  deg: 60) # 크기 120N, 방향 60°인 
Fsum = F1 + F2
magn, angle = getMagDeg(Fsum)
print("결합한 힘의 크기 : ", magn)
print("결합한 힘의 방향 : ", angle)
```

프로그래밍 실습

2. 다음 벡터 A, B의 사잇각과, A의 B 위로의 정사영을 구하라. 연계 : 6.3절

$$A=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
1 usage
def angle2vectors(v, w): # 두 벡터의 사잇각 계산
    vnorm = np.linalg.norm(v)
    wnorm = np.linalg.norm(w)
    vwdot = np.dot(v.T, w)
    angle = np.arctan(vwdot/(vnorm*wnorm))*360/np.pi
    return angle

1 usage
def orthProj(u, x): # 정사영 계산
    xu_dot = np.dot(x.T, u)
    uu_dot = np.dot(u.T, u)
    projux = (xu_dot/uu_dot)*u
    return projux

A = np.array([[2], [4], [1]])
B = np.array([[1], [-1], [3]])
angle = angle2vectors(A, B)
projAB = orthProj(B, A)
print("A와 B의 사잇각 : ", angle)
print("A의 B 위로의 정사영 : \n", projAB)
```

프로그래밍 실습

3. 다음의 네 점 A, B, C, D에 대해, 선분 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$로 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하라. 연계 : 6.4절

$$A = (1,\ 2,\ 3),\quad B = (0,\ 5,\ 2),\quad C = (2,\ 2,\ 4),\quad D = (2,\ 4,\ 1)$$

```python
import numpy as np
1 usage
def tripleProduct(u, v, w): # 스칼라
    M = np.zeros((3,3))
    M[0:] = u
    M[1:] = v
    M[2:] = w
    val = np.linalg.det(M) # 행벡터가
    return val

A = np.array([1, 2, 3])
B = np.array([0, 5, 2])
C = np.array([2, 2, 4])
D = np.array([2, 4, 1])
u = B-A
v = C-A
w = D-A
val = tripleProduct(u, v, w)
print("부피 : ", np.absolute(val))
```

프로그래밍 실습

4. 다음과 같은 점 A를 포함하고 법선벡터가 W인 평면과 점 P 사이의 거리를 계산하라.

연계 : 6.5절

$$A = (2,3,4),\ W = (1,2,3),\ P = (0,1,2)$$

```python
import numpy as np
1 usage
def distPt2Pl(A, W, P): # 거리 계산
    num = np.dot((P-A).T, W)
    deno = np.linalg.norm(W)
    val = np.absolute(num)/deno
    return val

A = np.array([2, 3, 4])
W = np.array([1, 2, 3])
P = np.array([0, 1, 2])
print("거리 : ", distPt2Pl(A, W, P))
```

3. 벡터 $u=(1, -2, 3)$, $v=(-2, 5, 3)$, $w=(4, 2, 7)$에 대해 다음 벡터를 구하라.

(a) $3u+2v$

(b) $-4u+2v+3w$

(c) $5u-4w$

(d) $2u+3v=4w+x$일 때 x

(e) $4u+2(-3v+5w)$

8. 다항식 $f(x)=2+3x-x^2$을 기저 $\{1, 1+x, (1+x)^2\}$의 선형결합으로 표현하라.

9. 벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$을 기저 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$의 선형결합으로 표현하라.

10. 다음 벡터들이 각각 $\mathbb{R}^2$ 공간의 기저가 될 수 있는지 확인하라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

12. 벡터 b가 벡터 a_1과 a_2의 선형결합이 되도록 하는 a의 값을 구하라.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

13. 벡터 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$과 $a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$가 있을 때, 두 벡터가 $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$를 생성하도록 하는 h 값을 구하라.

14. 벡터 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$와 $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$이 있을 때, 두 벡터가 $y = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$를 생성하도록 하는 h 값을 구하라.

15. 다음 벡터방정식을 연립선형방정식으로 나타내라.

(a) $x_1\begin{bmatrix}3\\-2\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}5\\0\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\8\end{bmatrix}$ (b) $x_1\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

16. 다음 연립선형방정식을 벡터방정식으로 나타내라.

(a) $\begin{cases} x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+6x_2-x_3=0 \\ -x_1+3x_2-8x_3=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=3 \\ -2x_1-7x_2+5x_3=1 \\ 5x_1+4x_2-3x_3=2 \end{cases}$

17. 다음 벡터집합 S가 생성하는 공간의 기저를 찾으라.

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$$

연습 문제

21. 다음 벡터의 노름을 계산하라.

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

22. 주어진 두 벡터의 내적을 구하라.

(a) $\boldsymbol{u} = (2,\ -2)$, $\boldsymbol{v} = (1,\ 3)$

(b) $\boldsymbol{u} = (2,\ -2,\ 3)$, $\boldsymbol{v} = (-2,\ 1,\ 3)$

(c) $\boldsymbol{u} = (1,\ 2,\ -1,\ 3)$, $\boldsymbol{v} = (2,\ -3,\ 1,\ 4)$

(d) $\boldsymbol{u} = (2,\ -2,\ 4)$, $\boldsymbol{v} = (-1,\ 1,\ 1)$

23. 다음 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$를 구하라.

(a) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

24. 벡터 $\boldsymbol{u}$의 벡터 $\boldsymbol{v}$ 위로의 정사영을 구하라.

(a) $\boldsymbol{u} = (2,\ -1)$, $\boldsymbol{v} = (1,\ 3)$

(b) $\boldsymbol{u} = (2,\ -2,\ 4)$, $\boldsymbol{v} = (-1,\ 1,\ 2)$

(c) $\boldsymbol{u} = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $\boldsymbol{v} = (1,\ -3,\ 3,\ 2)$

(d) $\boldsymbol{u} = (2,\ -2,\ 4)$, $\boldsymbol{v} = (-1,\ 1,\ 1)$

연습 문제

26. 벡터 $(x^2-1,\ 2,\ x+1)$이 두 벡터 $(x-2,\ -5,\ -6x-1)$, $(x+25,\ 35x,\ -36x-11)$와 직교할 때의 x 값을 구하라.

27. $\boldsymbol{u}=(2,\ 3)$과 $\boldsymbol{v}=(x,\ 2)$에 대해, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$와 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$가 직교할 때의 실수 x 값을 구하라.

28. $\boldsymbol{u}=(2,\ 3)$과 $\boldsymbol{v}=(x,\ -6)$이 서로 평행할 때의 x 값을 구하라.

29. 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않고, $x+y<0$이다. $\boldsymbol{u}=(x,\ y)$와 $\boldsymbol{v}=(1,\ 2)$의 사잇각이 θ라고 할 때 $\cos\theta$를 구하라.

30. $\|\boldsymbol{u}\|=2$, $\|\boldsymbol{v}\|=1$이고, 이들 벡터의 사잇각이 60°일 때, $(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\cdot(2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$를 구하라.

연습 문제

31. 구간 $[-\pi, \pi]$에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 내적을 다음과 같이 정의한다고 하자.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

이때 서로 다른 양의 정수 m과 n에 대하여, 함수 $\sin mx$와 $\cos nx$의 내적을 계산하고 각 함수의 노름을 구하라.

32. 정육면체에서 한 꼭짓점과 가장 멀리 떨어진 꼭짓점을 연결한 직선과 정육면체의 한 면이 이루는 각 θ에 대해 $\cos\theta$를 구하라.

33. 벡터공간 P_2가 실수 계수를 갖는 2차 이하의 다항식들로 구성된 벡터공간이라 하고, 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대한 내적은 $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$로 정의된다고 하자.

(a) 다항식 1과 x가 직교함을 보여라.

(b) 다항식 x의 노름을 구하라.

(c) 다항식 $x-1$의 다항식 x 위로의 정사영을 구하라.

34. 집합 $\{(a, b, c, d), (1, 0, 1, 2), (1, 1, -1, 0), (1, -2, -1, 0)\}$의 벡터들이 서로 직교할 때, (a, b, c, d)를 구하라.

연습 문제

35. $u=(x, y, z)$가 벡터 $a=(1, 4, 5)$와 $b=(-1, -2, -3)$에 대하여 $(u-a)\cdot(u-b)=0$을 만족할 때, 벡터 u를 구하라.

36. $u=(1, 3, 2)$, $v=(x, 1, 0)$, $w=(0, x, 1)$이 선형종속일 때의 x 값을 구하라.

37. 항구에서 배가 동쪽에서 30° 방향으로 40 km를 항해한 다음, 동쪽 방향으로 30 km를 항해하였다. 이 위치에서 항구까지의 거리를 구하라.

38. 진흙에 빠진 트럭을 견인 트럭 두 대가 각각 30° 방향으로 100 N, 60° 방향으로 120 N의 힘으로 견인할 경우, 진흙에 빠진 트럭에 실제 작용하는 힘의 크기와 방향을 구하라.

연습 문제

44. 네 점 $O=(0, 0, 0)$, $A=(1, 1, 0)$, $B=(0, 1, 1)$, $C=(1, 2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형의 넓이를 구하라.

45. 네 점 $O=(0, 0, 0)$, $A=(4, 2, 1)$, $B=(1, 3, 2)$, $C=(2, 2, 5)$에 대해, 선분 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$로 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하라.

46. 네 점 $O=(0, 0, 0)$, $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 1, 5)$, $C=(-1, 1, 3)$에 대해, 선분 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$로 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하라.

47. 다음 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$에 대해, $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$를 계산하라.

(a) $\boldsymbol{u}=(2, 0, 3)$, $\boldsymbol{v}=(0, 6, 2)$, $\boldsymbol{w}=(3, 3, 0)$

(b) $\boldsymbol{u}=(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}=(-1, 0, 1)$, $\boldsymbol{w}=(2, 3, 4)$

(c) $\boldsymbol{u}=(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{w}=(0, 0, 0)$

(d) $\boldsymbol{u}=(0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}=(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{w}=(2, 3, 4)$

연습 문제

51. 벡터 $(1,\ 0,\ -2)$와 직교하면서, 점 $(1,\ 1,\ 3)$을 지나는 평면의 방정식을 구하라.

52. 벡터 $(2,\ 3,\ -1)$과 직교하면서, 점 $(1,\ 1,\ 1)$을 지나는 평면의 방정식을 구하라.

53. 평면 $x+y+z=3$에 직교하는 단위벡터를 구하라.

54. 점 $(3,\ -2,\ 4)$를 지나고 평면 $2x+y-3z-4=0$과 평행인 평면의 방정식을 구하라.

55. $\mathbb{R}^3$ 공간에서 벡터 $(1,\ 2,\ 4)$의 방향코사인들을 구하라.

56. 점 $A,\ B,\ C$에 대하여, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}$의 중점을 D라 하자. $\overrightarrow{BD}$를 $3:1$로 내분하는 점을 F라고 할 때, $\overrightarrow{AF}$를 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$로 나타내라.

57. 점 $(3,\ 2,\ 5)$를 지나고 법선벡터가 $(1,\ -2,\ 4)$인 평면과 점 $(1,\ 0,\ 2)$ 사이의 거리를 구하라.

연습 문제

59. 함수 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$의 그래디언트 ∇f를 구하고, $(1,2)$에서의 그래디언트를 계산하라.

60. 벡터함수 $F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 \\ 4x_1x_2^2 + x_2^2 \end{bmatrix}$의 야코비안 행렬 J_F를 구하고, $(1,2)$에서의 야코비안 행렬을 계산하라.

61. 다변수함수 $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_1 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_2 + 4$의 헤시안 행렬 $H(f)$를 구하고, $(2,1)$에서의 헤시안 행렬을 계산하라.