❖ 선형변환의 의미

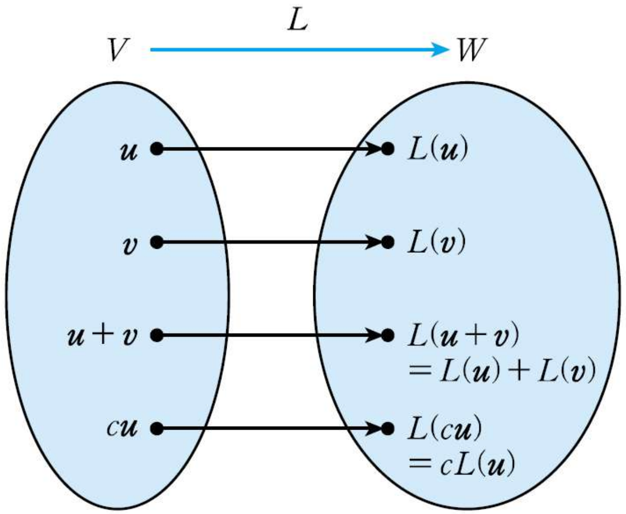
정의 7-1 선형변환

벡터공간 V에서 벡터공간 W로 가는 사상 $L: V \to W$가 다음 두 조건을 만족하면, 이를 **선형변환**linear transformation 또는 **선형사상**linear mapping이라 한다.

(1) $L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$

(2) $L(c\boldsymbol{u}) = cL(\boldsymbol{u})$

여기서 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 V에 속한 임의의 벡터이고, c는 임의의 스칼라이다.

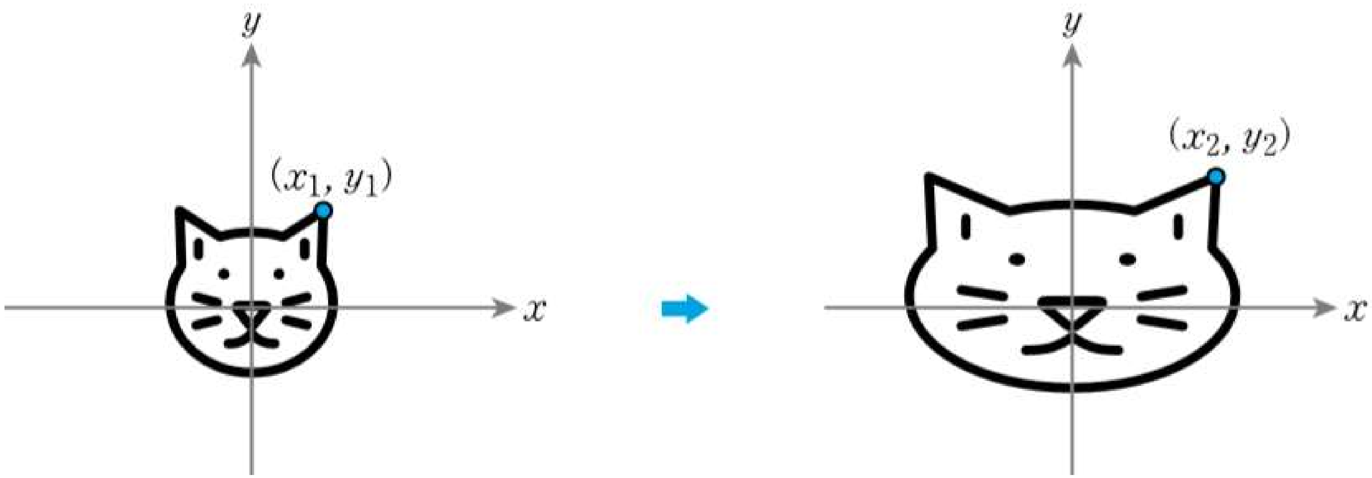


[그림 7-1] 선형변환

❖ $\mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$ 공간의 선형변환

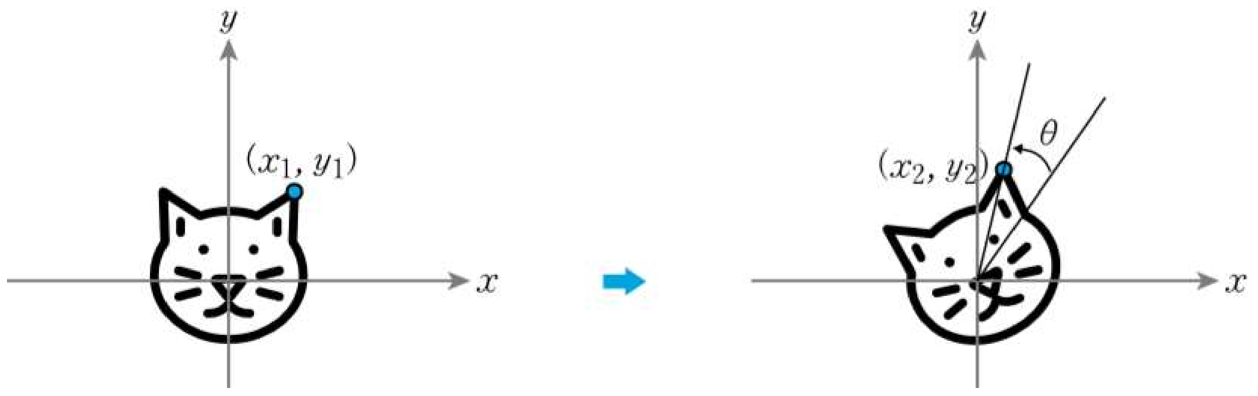
- **확대변환과 축소변환**

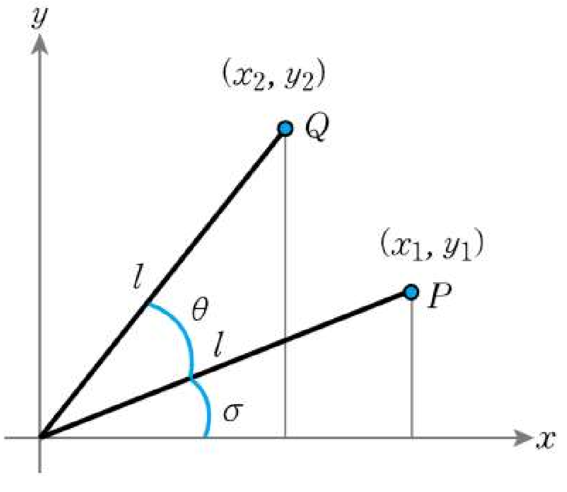
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_2 &= \alpha x_1 \\ y_2 &= \beta y_1 \end{aligned}$$



- **회전변환**

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_2 &= x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ y_2 &= x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{aligned}$$





$$x_1 = l\cos\sigma$$

$$y_1 = l\sin\sigma$$

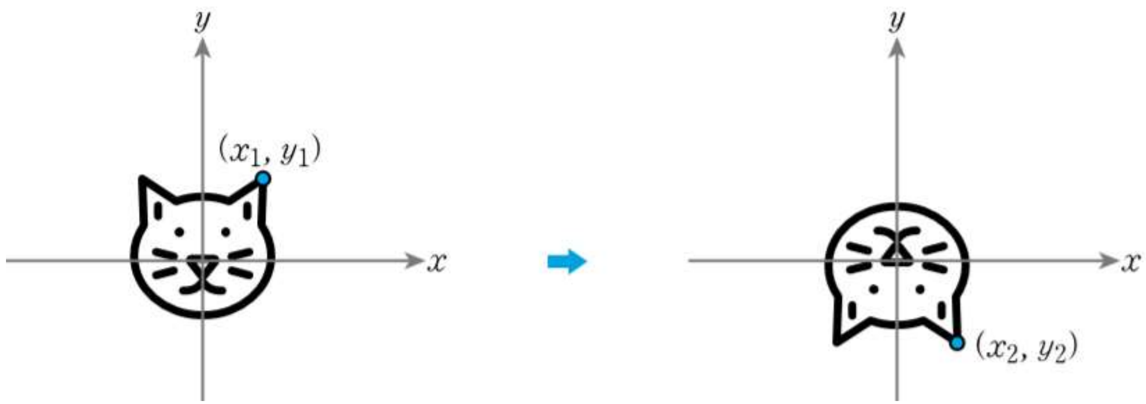
$$x_2 = l\cos(\theta+\sigma) = l\cos\theta\cos\sigma - l\sin\theta\sin\sigma = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$$

$$y_2 = l\sin(\theta+\sigma) = l\sin\theta\cos\sigma + l\cos\theta\sin\sigma = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$$

▪ 반사변환

- x축 기준으로 반사

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= -y_1 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



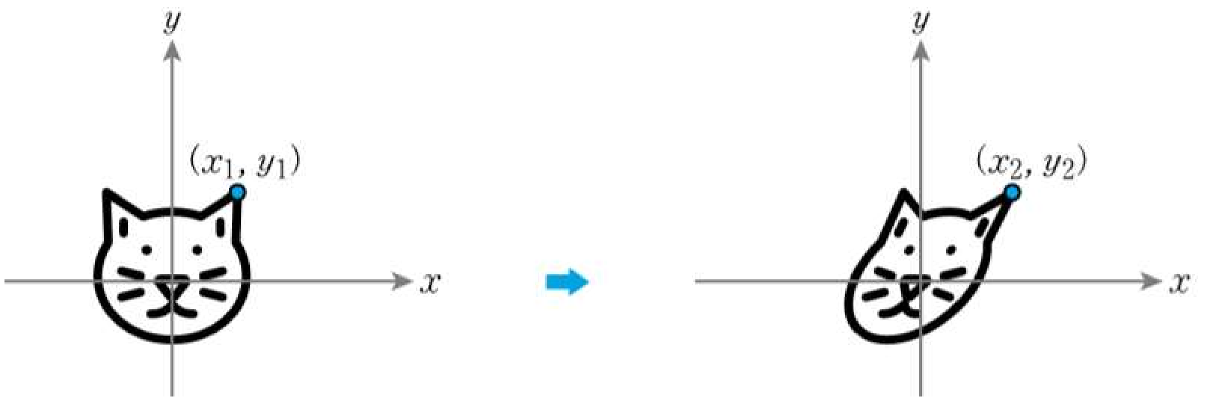
- y축 기준으로 반사

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ 층밀림변환

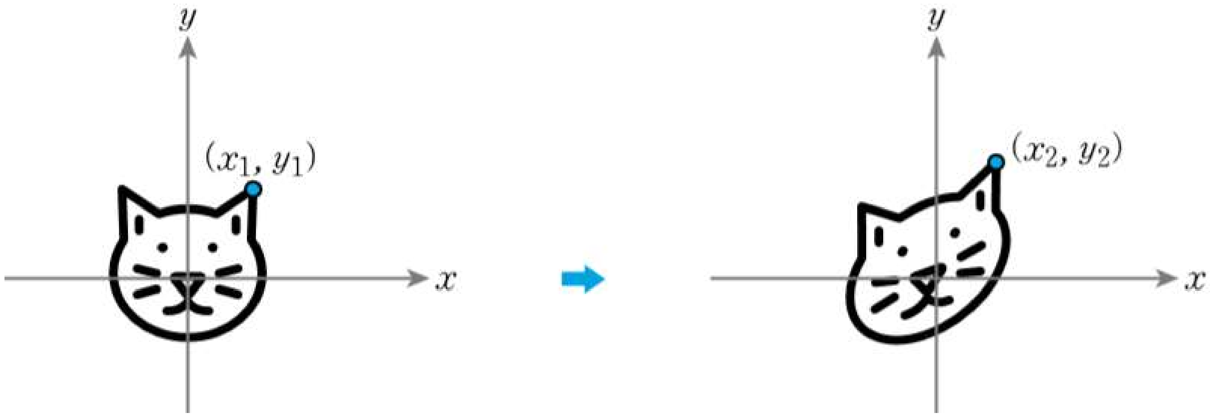
- x축 방향으로 y의 k배만큼 층밀림

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 + ky_1 \\ y_2 &= y_1 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

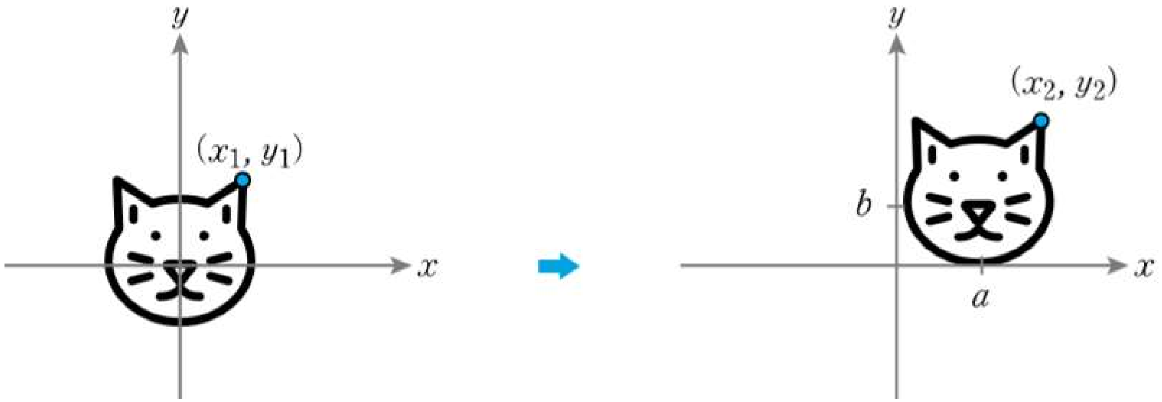


- y축 방향으로 x의 k배만큼 층밀림

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



- **선형변환이 아닌 이동변환**



$$\begin{cases} x_2 = x_1 + a \\ y_2 = y_1 + b \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

▪ $\mathbb{R}^2$ 공간의 벡터에 대한 표준행렬의 동차 표현

- **확대변환과 축소변환**

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **회전변환**

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **반사변환**

x축에 대한 반사 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y축에 대한 반사 : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **층밀림변환**

x축 방향의 층밀림 : $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y축 방향의 층밀림 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **선형변환이 아닌 이동변환**

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a \\ y_2 &= y_1 + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ $\mathbb{R}^3$ 공간의 벡터에 대한 표준행렬의 동차 표현

• 확대변환과 축소변환

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 회전변환

x축 방향의 θ 각도 회전 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y축 방향의 θ 각도 회전 : $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

z축 방향의 θ 각도 회전 : $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **반사변환**

$$xy\text{평면에 대한 반사 : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$xz\text{평면에 대한 반사 : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$yz\text{평면에 대한 반사 : } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **층밀림변환**

x축 방향의 층밀림 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y축 방향의 층밀림 : $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

z축 방향의 층밀림 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **아핀변환인 이동변환**

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a \\ y_2 &= y_1 + b \\ z_2 &= z_1 + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

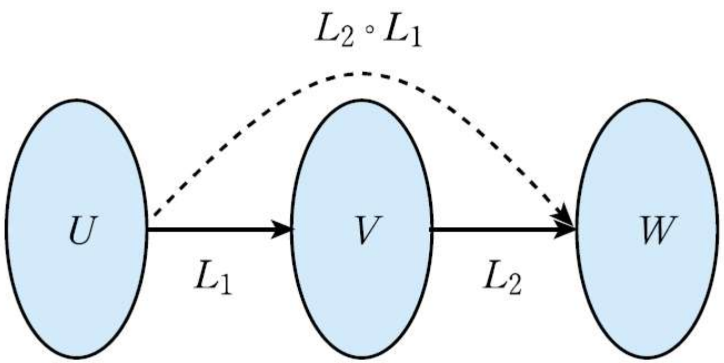
❖ 선형변환의 합성과 역변환

정의 7-3 선형변환의 합성

$L_1 : U \to V$와 $L_2 : V \to W$가 선형변환일 때, L_1을 사용하여 벡터공간 U의 벡터 $\boldsymbol{u}$를 벡터공간 V의 벡터 $\boldsymbol{v}$로 변환한 다음, L_2를 사용하여 $\boldsymbol{v}$를 벡터공간 W의 벡터 $\boldsymbol{w}$로 변환하는 것을 **L_2와 L_1의 합성**composition of L2 with L1이라 하고, $L_2 \circ L_1$로 나타낸다.

$$L_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}) = L_2(L_1(\boldsymbol{u}))$$

$L_2(L_1(\boldsymbol{u}))$는 $\boldsymbol{u}$에 선형변환 L_1을 적용한 결과에 다시 선형변환 L_2를 적용함을 의미한다.



[그림 7-9] 선형변환의 합성 $L_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}) = L_2(L_1(\boldsymbol{u}))$

정리 7-3 선형변환의 합성의 선형성

$L_1 : U \to V$와 $L_2 : V \to W$가 선형변환일 때, 두 선형변환의 합성 $L_2 \circ L_1$은 벡터공간 U의 벡터를 벡터공간 W의 벡터로 변환하는 선형변환이다.

$$L_2 \circ L_1 : U \to W$$

$$\begin{aligned}(1)\ L_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) &= L_2(L_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)) = L_2(L_1(\boldsymbol{u}_1) + L_1(\boldsymbol{u}_2)) \\ &= L_2(L_1(\boldsymbol{u}_1)) + L_2(L_1(\boldsymbol{u}_2)) = L_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}_1) + L_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ L_2 \circ L_1(c\boldsymbol{u}_1) &= L_2(L_1(c\boldsymbol{u}_1)) = L_2(cL_1(\boldsymbol{u}_1)) = cL_2(L_1(\boldsymbol{u}_1)) \\ &= cL_2 \circ L_1(\boldsymbol{u}_1)\end{aligned}$$

❖ 선형연산자

정의 7-6 선형연산자

선형변환 $L: V \to W$에서 벡터공간 V와 W가 같으면, 즉 $V = W$이면, 이 선형변환 L을 **선형연산자** linear operator라 한다.

정의 7-7 직교연산자

선형연산자 $L: V \to V$가 모든 벡터 $x, y \in V$에 대해 다음 성질을 만족하면 **직교연산자** orthogonal operator라 한다.

$$L(x) \cdot L(y) = x \cdot y$$

정리 7-6 노름보존 선형연산자

선형연산자 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$에 대해서 다음 두 문장은 서로 동치이다.

(1) 모든 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$에 대해서 $\|L(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$이다.

(2) 모든 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$에 대해서 $L(\boldsymbol{x}) \cdot L(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$이다.

이러한 성질을 만족하는 선형연산자를 **노름보존 선형연산자** norm-preserving linear operator라 한다.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right) \qquad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right) &= \frac{1}{4}\{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \\
&= \frac{1}{4}\{(\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2) - (\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2)\} \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

정리 7-7 직교연산자와 노름보존 선형연산자

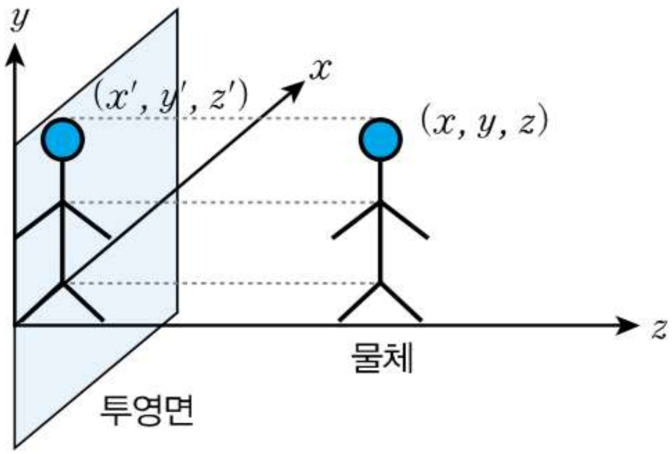
직교연산자는 노름보존 선형연산자이다.

정리 7-8 행렬로 표현되는 직교연산자

증명

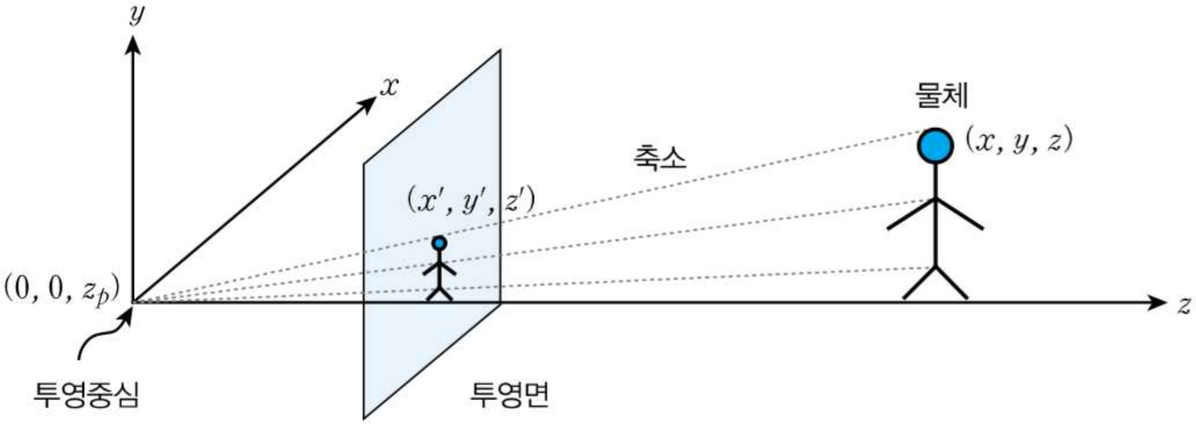
직교연산자 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$을 나타내는 행렬 A의 열벡터는 서로 직교하는 단위벡터이다.

- **직교투영**
  - 3차원 공간의 좌표 (x, y, z)를 $z = 0$인 평면에 수직으로 투영하는 것



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **원근투영**
  - 원근법에 따라 멀리 있는 것은 작게, 가까이 있는 것은 상대적으로 크게 투영하는 방법



$$x : x' = z - z_p : z' - z_p \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{(z' - z_p)x}{z - z_p}$$

$$y : y' = z - z_p : z' - z_p \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(z' - z_p)y}{z - z_p}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z' - z_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z' - z_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z' & -z' z_p \\ 0 & 0 & 1 & -z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = (z' - z_p)x, \quad \tilde{y} = (z' - z_p)y, \quad \tilde{z} = z'(z - z_p), \quad w = z - z_p$$

$$\boxed{x' = \frac{\tilde{x}}{w} = \frac{(z' - z_p)x}{z - z_p}, \quad y' = \frac{\tilde{y}}{w} = \frac{(z' - z_p)y}{z - z_p}, \quad z' = \frac{\tilde{z}}{w} = \frac{z'(z - z_p)}{z - z_p}}$$