정리 4-1 기본행렬과 행 연산

행렬방정식의 양변에 기본행렬을 곱하는 것은 동치인 연립선형방정식을 만드는 연산을 하는 것과 같다.

예제 4-1 기본행렬

4×4 행렬에 대하여, 다음 행 연산에 대응하는 기본행렬을 구하라.

(a) 1행과 3행을 교환하는 연산

(b) 3행을 3배로 만드는 연산

(c) 1행의 2배를 3행에 더하여 3행을 교체하는 연산

Tip

행을 교환하는 연산은 단위행렬의 행을 교환하고, 행을 상수배하는 연산은 단위행렬의 해당 행을 상수배하고, 행을 상수배하여 더하는 연산은 단위행렬의 한 행을 상수배하여 다른 행에 더하면 된다.

풀이

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

예제 4-2 기본행렬의 역행렬

다음 기본행렬의 역행렬을 구하라.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip

직접 계산하지 않고, [정리 4-2]의 증명을 참고하여 바로 구한다.

예제 4-3 행 동치

행렬 A와 B가 행 동치인지 보여라.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 15\\ 2 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Tip

A를 B로 변환하는 일련의 기본행렬을 찾는다.

풀이

$$E_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 15\\ 2 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

예제 4-4 기본행렬의 곱을 이용한 역행렬 계산

다음 기본행렬 E_1, E_2, E_3, E_4를 순서대로 행렬 A의 앞에 곱한 다음, A의 역행렬을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip

기본행렬을 순서대로 행렬 A에 곱한 결과가 단위행렬인 것을 확인하면, 이들 기본행렬의 곱이 A의 역행렬이다.

예제 4-5 **참가행렬의 행 연산을 통한 역행렬 계산**

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$에 행 연산을 하여 역행렬을 구하라.

Tip

$[A \mid I]$ 형태의 첨가행렬로 표현한 다음, A가 단위행렬 I가 되도록 행 연산을 한다.

예제 4-6 역행렬을 이용한 연립선형방정식의 풀이

역행렬을 이용해 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_3 = -8 \end{cases}$$

Tip

연립선형방정식을 행렬방정식으로 표현한 다음, 계수행렬의 역행렬을 구해서 해를 구한다.

예제 4-7 역행렬을 이용한 행렬방정식의 풀이

행렬 A와 C가 다음과 같이 주어질 때, $AB = C$를 만족하는 행렬 B를 A의 역행렬을 사용하여 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip

역행렬을 구해 행렬방정식의 양변 앞에 곱한다.

풀이

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & -22 & -55 \\ 9 & 8 & 19 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

예제 4-8 비가역행렬에 대한 행렬방정식의 해

행렬 A와 C가 다음과 같이 주어질 때, $AB=C$를 만족하는 행렬 B가 존재하는지 A의 역행렬을 사용하여 확인하라.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

Tip

행렬 A의 역행렬의 존재 유무를 확인한다.

예제 4-9 **동차 연립선형방정식의 해**

다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Tip

연립선형방정식을 행렬방정식으로 표현한 다음, 계수행렬의 역행렬을 구해 행렬방정식의 양변 앞에 곱한다.

정리 4-7 비자명해를 갖는 동차 연립선형방정식

미지수의 개수가 선형방정식의 개수보다 많은 동차 연립선형방정식 $A\boldsymbol{x}=0$는 비자명해를 갖는다.

예제 4-10 비자명해를 갖는 동차 연립선형방정식

다음 동차 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Tip

행 연산을 통해 첨가행렬을 기약행 사다리꼴 행렬로 변환하여 해를 구한다.

예제 4-11 기본행렬을 이용한 LU 분해

기본행렬을 이용하여 다음 행렬 A를 LU 분해하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\0&4&2\end{bmatrix}$$

Tip

행 연산에 해당하는 기본 행렬을 순차적으로 적용한다.

풀이

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad E_1A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\0&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&4&2\end{bmatrix}$$

$$E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad E_2E_1A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&0&\frac{22}{3}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&0&\frac{22}{3}\end{bmatrix}$$

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\0&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&0&\frac{22}{3}\end{bmatrix}}$$

예제 4-12 LU 분해

다음 행렬 A를 LU 분해하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Tip

[정리 4-10]을 이용하여 각 삼각행렬의 성분을 구한다.

풀이

$$u_{11} = a_{11} = 1$$

$$u_{12} = a_{12} = 2$$

$$u_{13} = a_{13} = 3$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = 1$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 5 - 1 \cdot 3 = 2$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{5 - 1 \cdot 2}{1} = 3$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 12 - 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 3$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 4-13 LU 분해를 이용한 역행렬 계산

LU 분해를 이용하여 주어진 행렬 A의 역행렬 A^{-1}를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&2&1\end{bmatrix}$$

Tip

3개의 행렬방정식 문제로 나타내고 LU 분해를 이용하여 해결한다.

풀이

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} \qquad Ac_1=A\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad Ac_2=A\begin{bmatrix}c_{12}\\c_{22}\\c_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad Ac_3=A\begin{bmatrix}c_{13}\\c_{23}\\c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

- **A의 LU 분해**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- **c_1의 계산**

$$[L \mid i_1]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\2&1&0&0\\4&6&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&8\end{array}\right]=[I_3 \mid y_1]$$

$$\Rightarrow \quad [U \mid y_1]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&1&8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&-14\\0&0&1&8\end{array}\right]=[I_3 \mid c_1]$$

$$\Rightarrow \quad c_1=\begin{bmatrix}5\\-14\\8\end{bmatrix}$$

예제 4-14 **블록 상삼각행렬의 역행렬 계산**

다음 행렬 A의 역행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5&2\\3&5&-7&-3\\0&0&1&3\\0&0&4&11\end{bmatrix}$$

Tip
[정리 4-11]을 이용한다.

풀이

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}5&2\\-7&-3\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}1&3\\4&11\end{bmatrix},\quad \mathbf{0}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\\mathbf{0}&A_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix},\qquad A_{12}^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\-7&-5\end{bmatrix},\qquad A_{22}^{-1}=\begin{bmatrix}-11&3\\4&-1\end{bmatrix}$$

$$-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}=-\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2\\-7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11&3\\4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-365&101\\206&-57\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\\mathbf{0}&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&2&-365&101\\3&-1&206&-57\\0&0&-11&3\\0&0&4&-1\end{bmatrix}$$

예제 4-15 블록 대각행렬의 역행렬 계산

다음 행렬 A의 역행렬을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Tip

[정리 4-12]를 이용한다.

풀이

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

예제 4-16 슈어 보수행렬 계산

다음과 같은 부분행렬 A, B, C, D로 구성된 블록행렬 M에 대하여, D의 슈어 보수행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5 & 2\\-7 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 11\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 2\\3 & 5 & -7 & -3\\1 & 0 & 1 & 3\\0 & 1 & 4 & 11\end{bmatrix}$$

Tip
슈어 보수행렬의 정의를 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned}A-BD^{-1}C&=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 2\\-7 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 11\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 2\\-7 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 3\\4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-47 & 13\\65 & -18\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}48 & -11\\-62 & 23\end{bmatrix}\end{aligned}$$

예제 4-17 블록행렬의 역행렬 계산

다음 행렬 M을 2×2 부분행렬로 구성된 블록행렬로 간주하여 역행렬을 구하라.

Tip [정리 4-13]을 이용한다.

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&2\\2&1&0&1\\2&0&1&4\end{bmatrix}$$

풀이

$$M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&1\\1&4\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}-4&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$BD^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$A-BD^{-1}C=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&4\end{bmatrix}$$

$$(A-BD^{-1}C)^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-0.5\\1&0.5\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}C=\begin{bmatrix}-4&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-4\\2&1\end{bmatrix}$$