

응용이 보이는 선형대수학



파이썬과 함께하는 선형대수학 이론과 응용

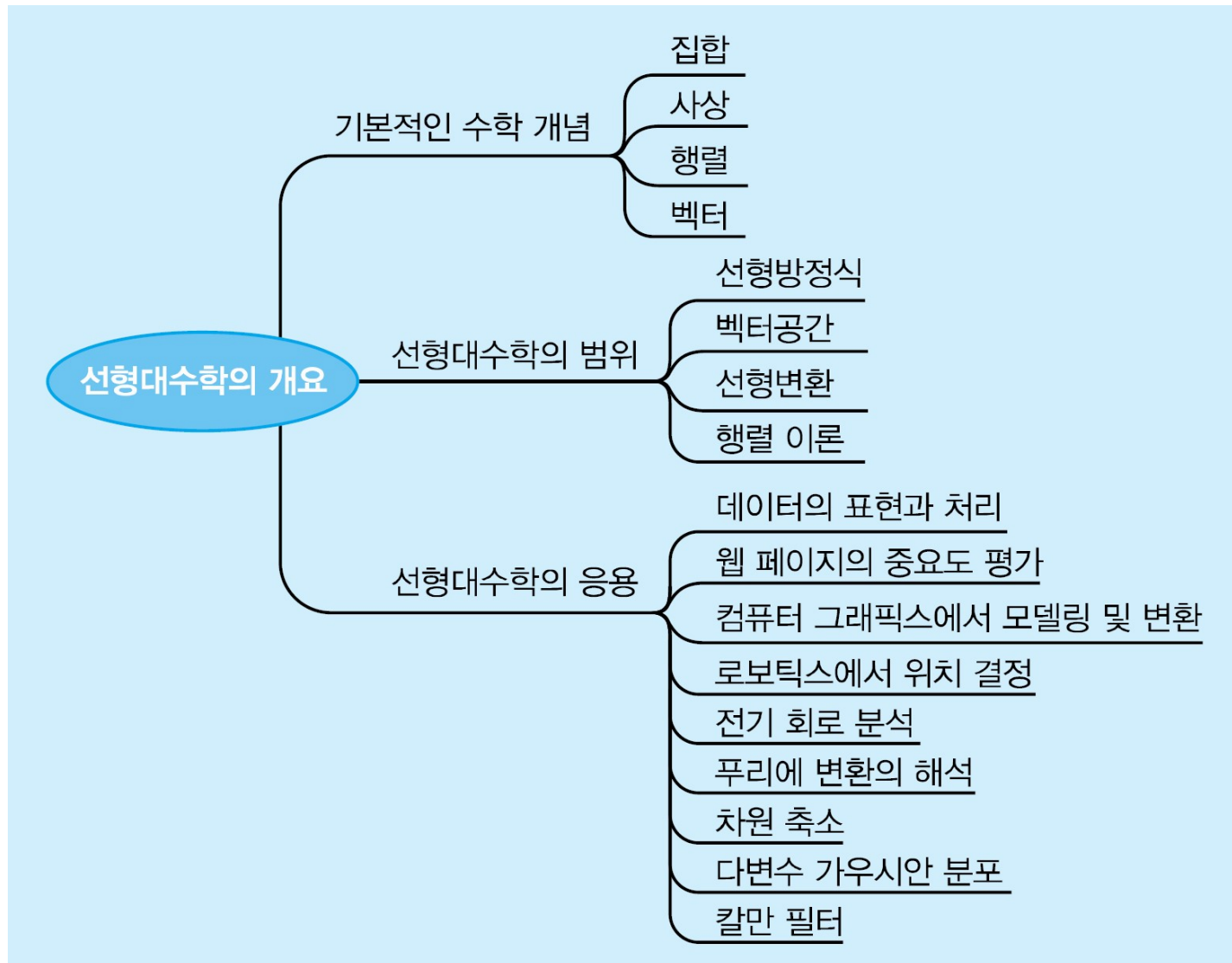
Chapter 01

선형대수학의 개요

Contents

- 1.1 기본적인 수학 개념
- 1.2 선형대수학의 범위
- 1.3 선형대수학의 응용

이 장에서 배우는 내용은?



❖ 집합(set)

- 특정한 조건을 만족하는 어떤 대상들의 모임

예) 10 이하인 자연수 중 짝수의 집합

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$: 원소나열법

$\{2n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$: 조건제시법

- 원소의 포함 여부 표현

$$2 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$3 \notin \{2n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

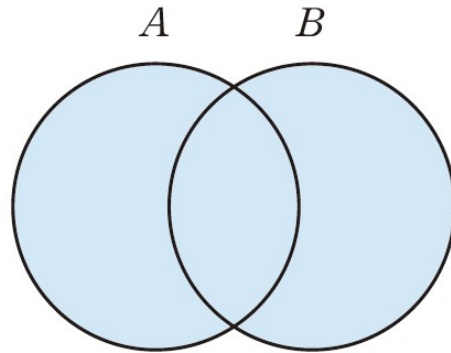
- 집합의 포함관계 표현

$$A = \{2, 6\} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \rightarrow \quad A \subset B$$

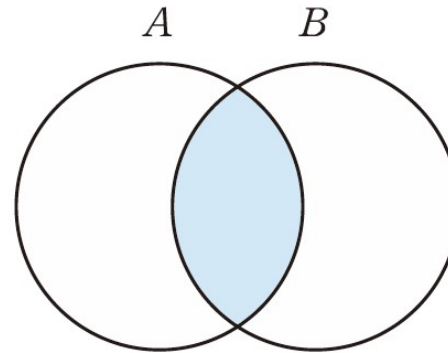
- 공집합($\emptyset, \{\}$)

원소가 포함되지 않은 집합

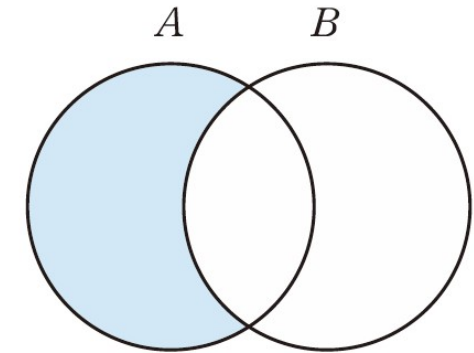
■ 집합의 연산



(a) 합집합 $A \cup B$



(b) 교집합 $A \cap B$



(c) 차집합 $A - B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$$

예제 1-1 집합의 연산

주어진 집합 A , B 에 대하여 다음 물음에 답하라.

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{b, c, e, f\}$$

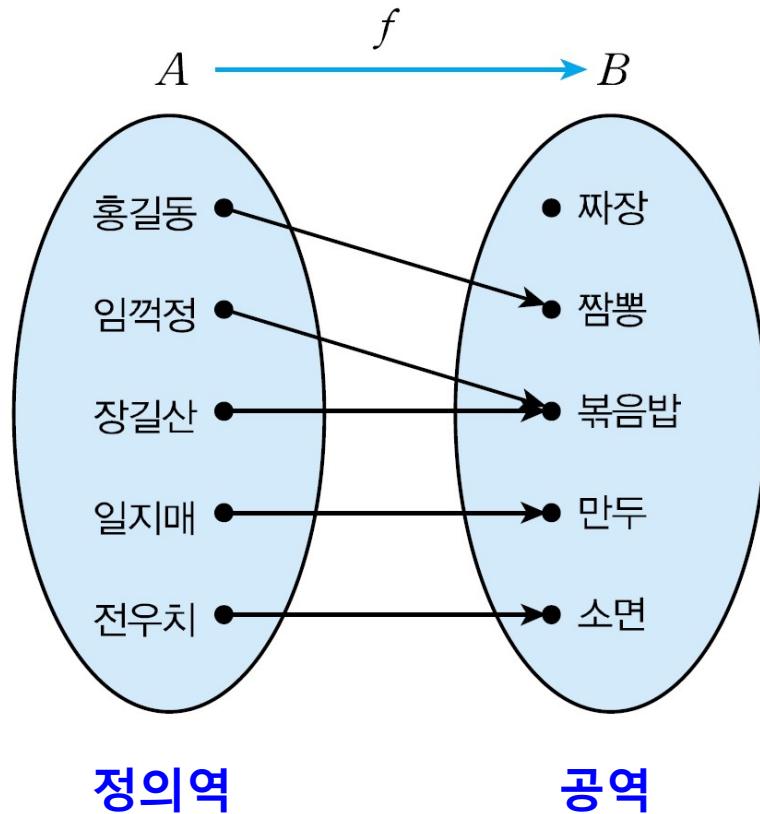
- (a) A 의 모든 부분집합을 구하라.
- (b) A 와 B 의 합집합을 구하라.
- (c) A 와 B 의 교집합을 구하라.
- (d) $A - B$ 를 구하라.

Tip

집합 연산의 정의를 이용한다.

❖ 사상(mapping)

- 집합 A 의 각 원소를 B 의 어떤 원소 하나에 대응시키는 관계
- A 에서 B 로의 사상 $f \rightarrow f : A \rightarrow B$



상 : 정의역의 원소에 대응하는 공역의 원소

$$f(\text{홍길동}) = \text{짬뽕}$$

$$f(\text{임꺽정}) = \text{볶음밥}$$

$$f(\text{장길산}) = \text{볶음밥}$$

$$f(\text{일지매}) = \text{만두}$$

$$f(\text{전우치}) = \text{소면}$$

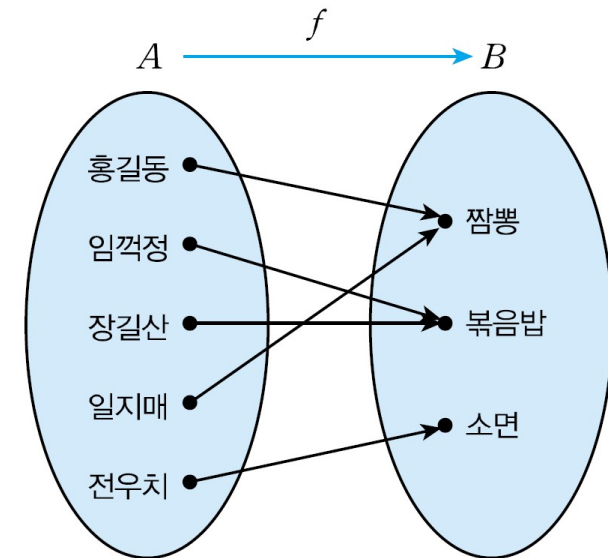
치역 : 정의역 원소의 상을 모아 놓은 집합

$\{\text{짬뽕, 볶음밥, 만두, 소면}\}$

■ 사상의 종류

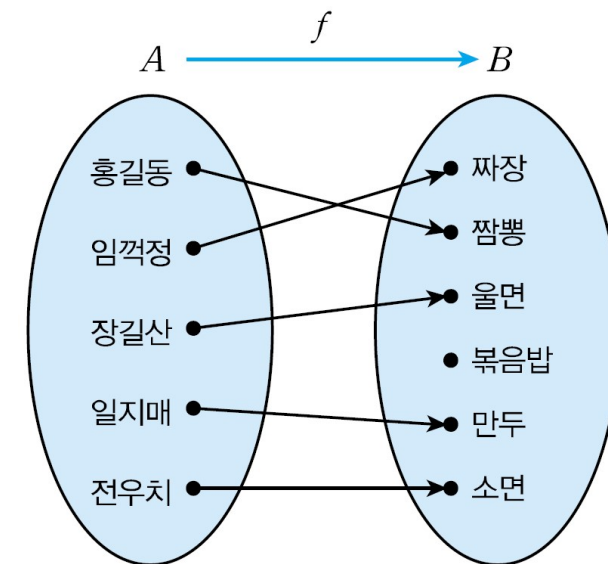
• 전사(위로의 사상)

- 공역과 치역이 동일한 사상



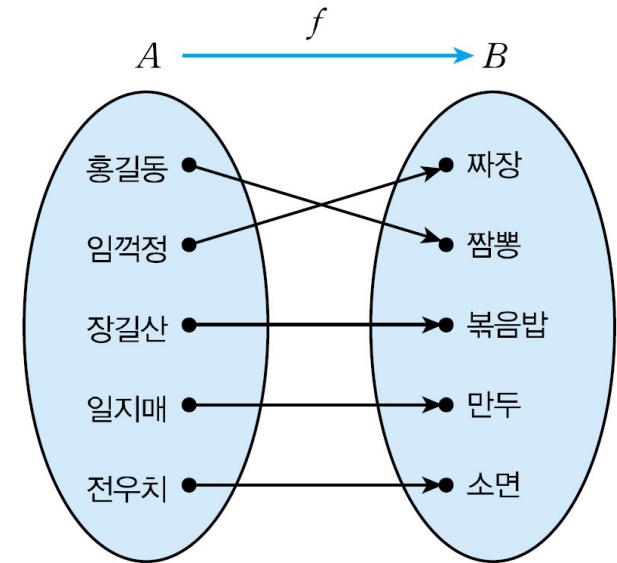
• 단사(일대일 사상)

- 정의역의 원소가 서로 다르면 대응하는 상도 서로 다른 사상



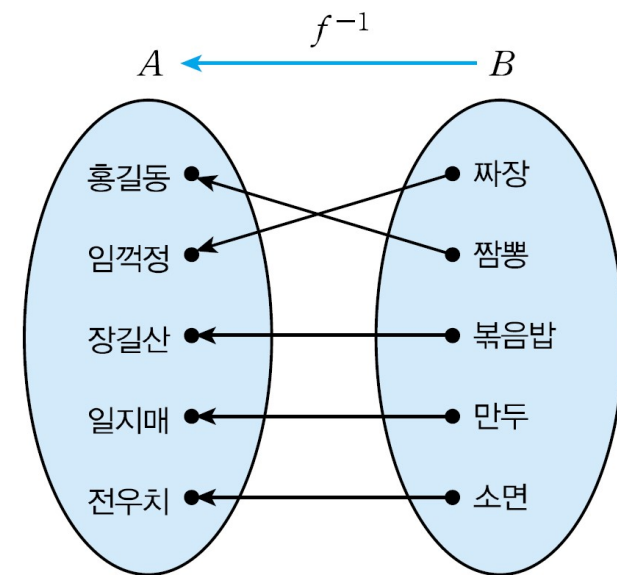
- 전단사(일대일 대응)

- 전사이면서 동시에 단사인 사상



- 역사상

- 전단사 사상에 대해서
공역의 원소를 정의역의 원소로
대응시키는 사상



❖ 행렬(matrix)

- 수나 식을 사각형 모양으로 배열하고 괄호로 묶어 놓은 것

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a+b & a & 2b^2 \\ b^2 & ab & 3b \end{bmatrix}$$

- 성분(원소, element)
- 행(row)
- 열(column)

열

행

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

행벡터

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

열벡터

■ 행렬의 종류

• 정방행렬(정사각행렬)

- 행과 열의 수가 같은 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• 대각행렬

- 주대각 성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 단위행렬(항등행렬)

- 주대각 성분이 모두 1이고, 나머지 성분은 모두 0인 정방행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 전치행렬

- 어떤 행렬에서 모든 행을 각각 대응하는 열로 바꾼 행렬
- A^T (A 의 전치행렬)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 대칭행렬

- 전치행렬이 자기 자신과 같은 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 1-2 행렬의 정의

주어진 다음 행렬 A 에 대하여 다음 물음에 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip

행렬의 정의를 이용한다.

- (a) A 의 2행을 구하라.
- (b) A 의 3열을 구하라.
- (c) A 의 전치행렬을 구하라.
- (d) A 가 대칭행렬인지 보여라.

■ 행렬의 연산

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

• 합(덧셈)

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

• 차(뺄셈)

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

• 스칼라배(스칼라곱)

$$10A = 10 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10 & 2 \times 10 \\ 3 \times 10 & 4 \times 10 \\ 5 \times 10 & 6 \times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$$

• 곱 연산

A 의 열 개수와 B 의 행 개수가 같을 때 AB 의 곱

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \Rightarrow AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (\text{단, } 1 \leq i, j \leq n)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

❖ 벡터(vector)

- 행이나 열이 하나 밖에 없는 행렬

- **행벡터**(row vector)

$$B = [4 \ 6 \ 7 \ 9]$$

- **열벡터**(column vector)

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

예제 1-3 행렬과 벡터의 연산

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ 일}$$

때, 다음 식을 계산하라.

Tip

행렬의 연산 방법을 이용한다.

(a) $A + 2B$

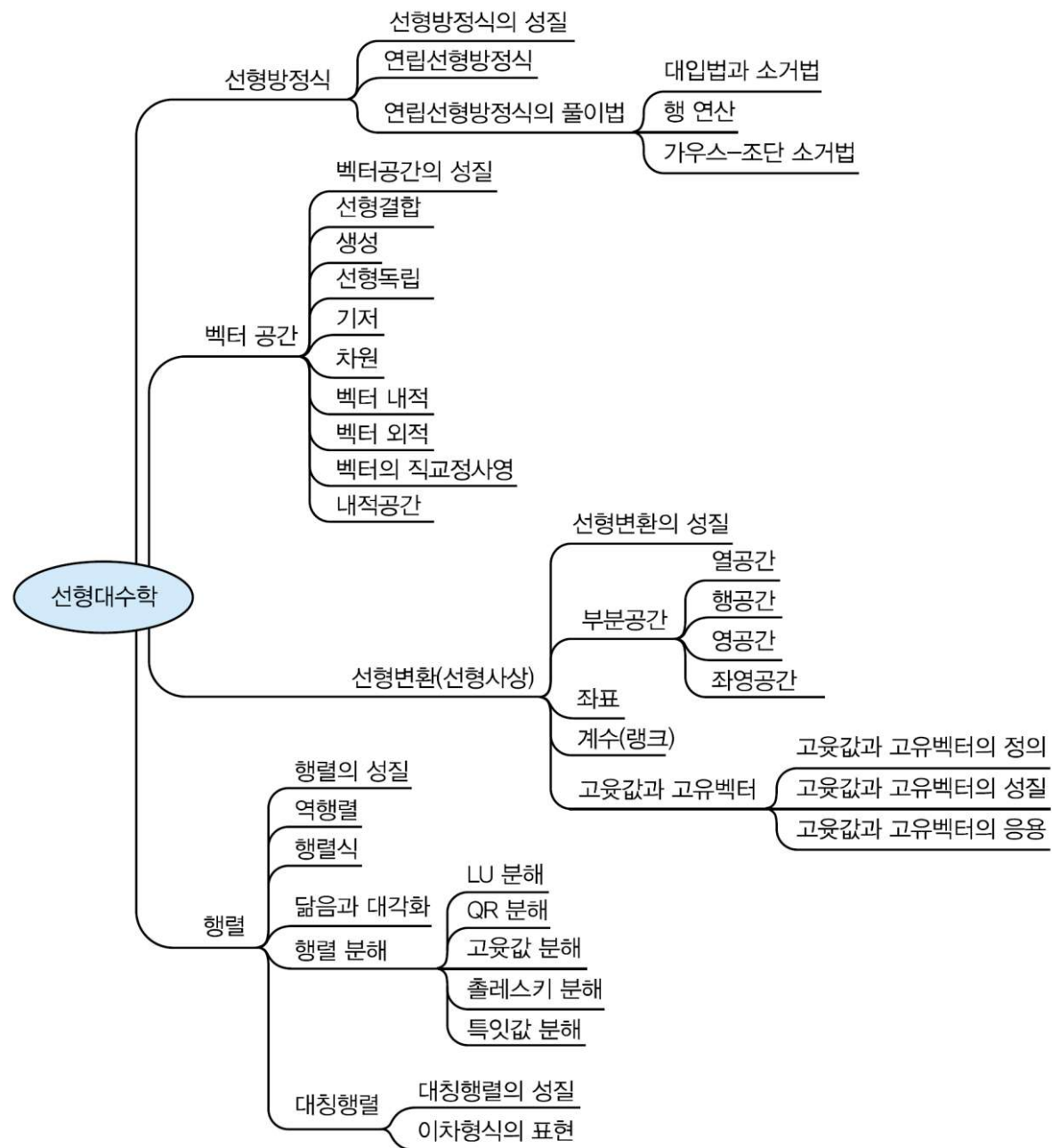
(b) AC

(c) $3D$

❖ 선형대수학(linear algebra)

- 연립선형방정식, 벡터공간, 선형변환, 행렬을 다루는 수학 분야
- 공학, 과학뿐만 아니라 경제학, 경영학, 사회학 등 거의 모든 학문 분야에서 널리 활용되는 중요한 수학적 도구

1.2 선형대수학의 범위



❖ 선형방정식

- 선형방정식(linear equation)
 - 최고차항의 차수가 1인 방정식 (=일차방정식)

- 연립선형방정식(system of linear equations)

- 여러 선형방정식이 모여 있는 것

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

- 연립선형방정식의 해(solution)

: 연립선형방정식의 모든 선형방정식을 만족하는 미지수들의 값

- 행렬과 벡터를 이용하여 표현 가능

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

❖ 벡터공간(vector space)

- 서로 더하거나 스칼라배할 수 있는 벡터들의 모임

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- 벡터공간에 대한 구체적인 의미와 성질
- 벡터의 선형결합(linear combination)
- 벡터 생성(span)
- 벡터의 노름(norm)과 내적(inner product)
- 벡터의 정사영(orthogonal projection)
- 내적공간(inner product space)

❖ 선형변환(linear transformation)

- 벡터 v 와 w , 스칼라 c 에 대해 다음 두 성질을 만족하는 사상 f
(= 선형사상)

$$(1) f(v + w) = f(v) + f(w)$$

$$(2) f(cv) = cf(v)$$

- 선형변환의 성질
- 부분공간(subspace)
- 기저(basis)
- 좌표(coordinate)
- 차원(dimension)
- 계수(랭크, rank)
- 고윳값(eigenvalue)과 고유벡터(eigenvector)

예제 1-4 선형변환

다음 사상이 선형변환인지 판단하라.

(a) $f(x) = x + x^2$

(b) $g(x) = 5x + 4$

Tip

선형변환의 조건을 확인한다.

예제 1-5 행렬과 선형변환

사상 $f(v) = Av$ 가 행렬 A 와 벡터 v 의 곱이라면, $f(v)$ 는 선형변환인지 판단하라.

Tip

선형변환의 조건을 확인한다.

❖ 행렬 이론

- 행렬의 성질과 변환에 대한 이론
 - 영행렬과 단위행렬
 - 역행렬(inverse matrix)
 - 행렬식(determinant)
 - 행렬 분해(matrix decomposition)
 - LU 분해, QR 분해, 고윳값 분해, 촐레스키 분해, 특잇값 분해
 - 대각화(diagonalization)
 - 이차형식(quadratic form)
 - 이차항으로만 구성된 수식

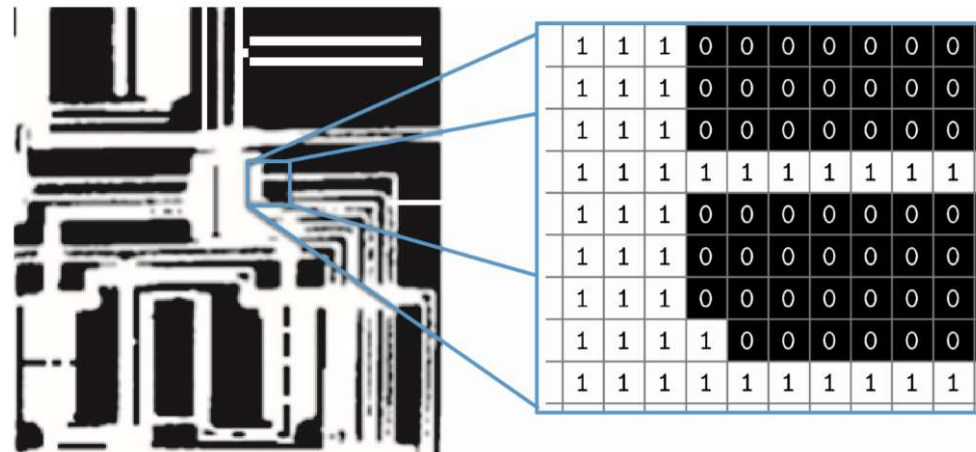
$$3x^2 + 4xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

❖ 데이터의 표현과 처리

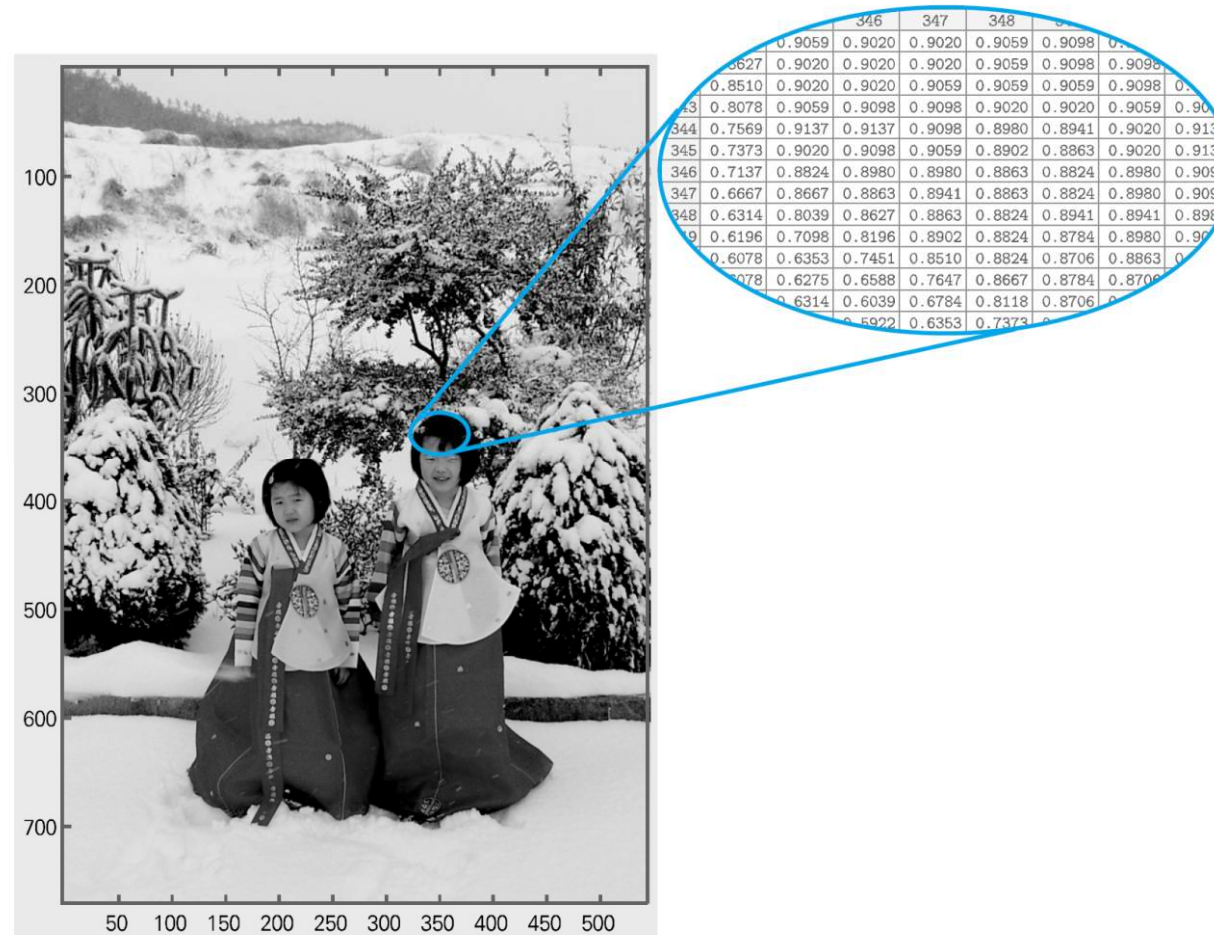
■ 표로 표현되는 정형화된 데이터의 처리

	1월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
2014	7.2	11.1	9.3	7.9	8	11.2	15	17.9	7.3	6.6	8.5	10.9
2015	10.2	6.4	5.5	14.3	6.3	10.2	15	11.2	7.1	6.4	16.2	11
2016	6.2	7.5	8.4	12	9.2	10.1	12.5	7.8	13.2	11.1	9.1	8.5
2017	7.8	7	6.7	9	5.5	8.1	17	14.7	6	7.2	5.6	7
2018	7.2	2.8	11	10.5	12	9.4	8	10.7	11	6	12	7.3
2019	3.9	7	8.2	11.1	6	6.9	10.7	12.8	9.5	4	8	7.4

■ 흑백영상의 표현과 처리



■ 회색조영상의 표현



■ 텍스트 데이터의 표현과 처리

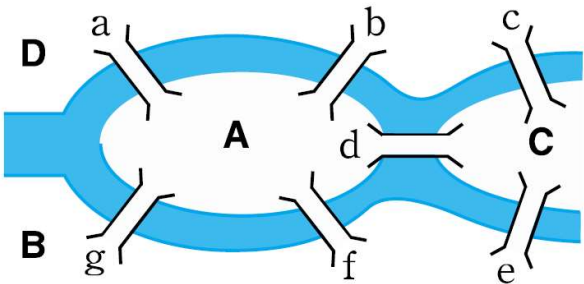
[표 1-1] 텍스트 데이터의 예

문서	내용
c_1	Human machine interface for Lab ABS computer application
c_2	A survey of user opinion of computer system response time
c_3	The EPS user interface management system
c_4	System and human system engineering testing of EPS
c_5	Relation of user-perceived response time to error measurement
m_1	The generation of random, binary, unordered trees
m_2	The intersection graph of paths in trees
m_3	Graph minors TV : Widths of trees and well-quasi-ordering
m_4	Graph minors: A survey

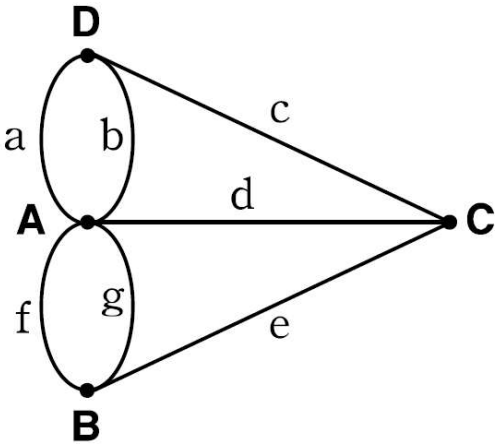
[표 1-2] 텍스트 데이터의 행렬 표현

단어	문서								
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	m_1	m_2	m_3	m_4
computer	1	1	0	0	0	0	0	0	0
EPS	0	0	1	1	0	0	0	0	0
human	1	0	0	1	0	0	0	0	0
interface	1	0	1	0	0	0	0	0	0
response	0	1	0	0	1	0	0	0	0
system	0	1	1	2	0	0	0	0	0
time	0	1	0	0	1	0	0	0	0
user	0	1	1	0	1	0	0	0	0
graph	0	0	0	0	0	0	1	1	1
minors	0	0	0	0	0	0	0	1	1
survey	0	1	0	0	0	0	0	0	1
trees	0	0	0	0	0	1	1	1	0

■ 그래프 데이터의 표현과 처리



(a) 쾨니히스베르크 다리 지도



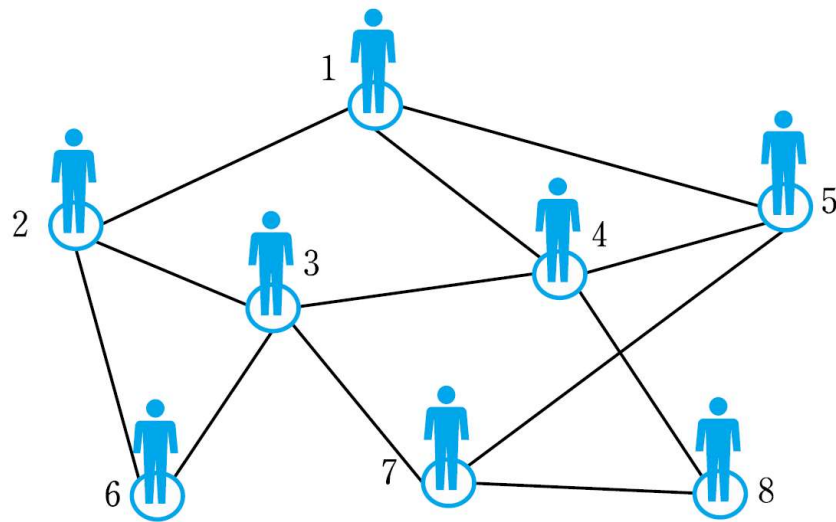
(b) 그래프 표현

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	1	0	1	0

(c) 행렬 표현

■ 소셜 네트워크 데이터의 표현과 처리

- 소셜 네트워크 : 개인 간의 연결 관계를 나타내는 것



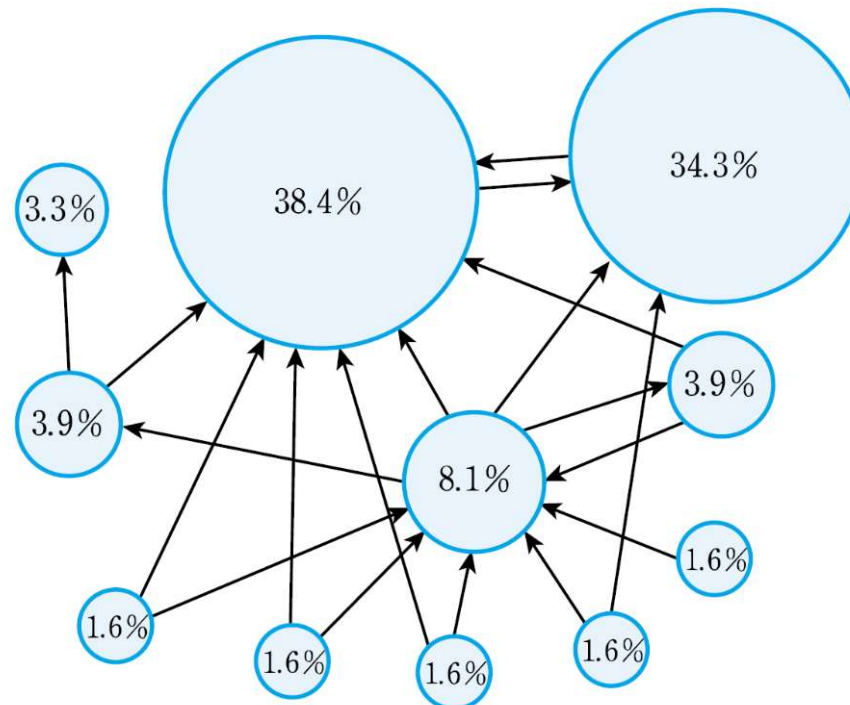
(a) 소셜 네트워크의 예

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	1	1	0
4	1	0	1	0	1	0	0	1
5	1	0	0	1	0	0	1	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	1	0	0	1
8	0	0	0	1	0	0	1	0

(b) 행렬 표현

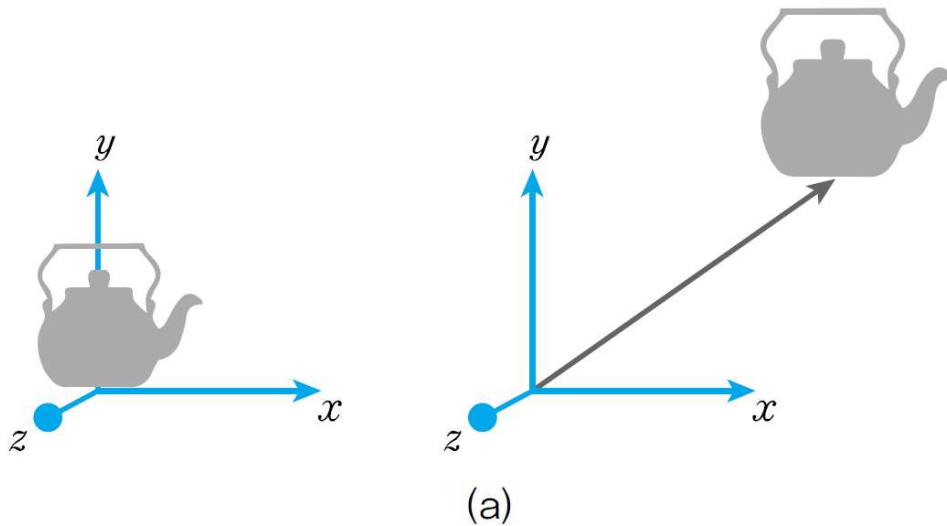
❖ 웹 페이지의 중요도 평가

- 웹 페이지를 **노드**로 간주하고, 하이퍼링크에 의한 연결 관계를 **에지**로 표현
- 행렬 연산을 통해서 각 페이지의 중요도를 결정
 - 페이지랭크(PageRank) 알고리즘



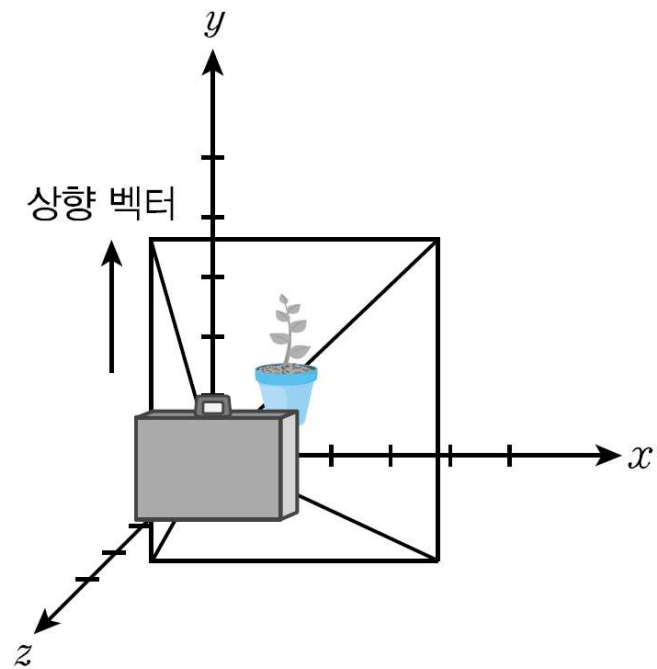
❖ 컴퓨터 그래픽스에서의 모델링 및 변환

- 화면에 나타낼 물체를 데이터로 모델링하여 표현하고
이들 데이터에 대한 연산을 통해 그림을 생성하는 분야

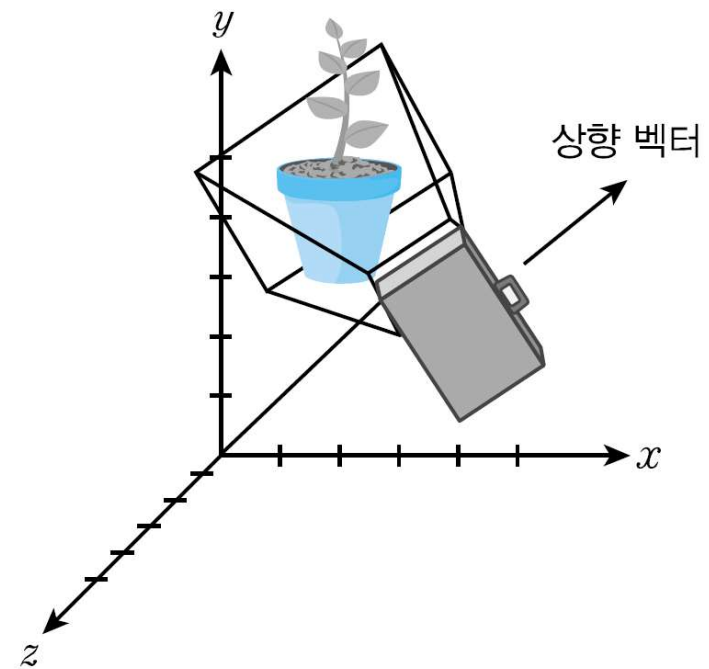


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

[그림 1-15] 컴퓨터 그래픽스에서 행렬 연산에 의한 물체의 이동



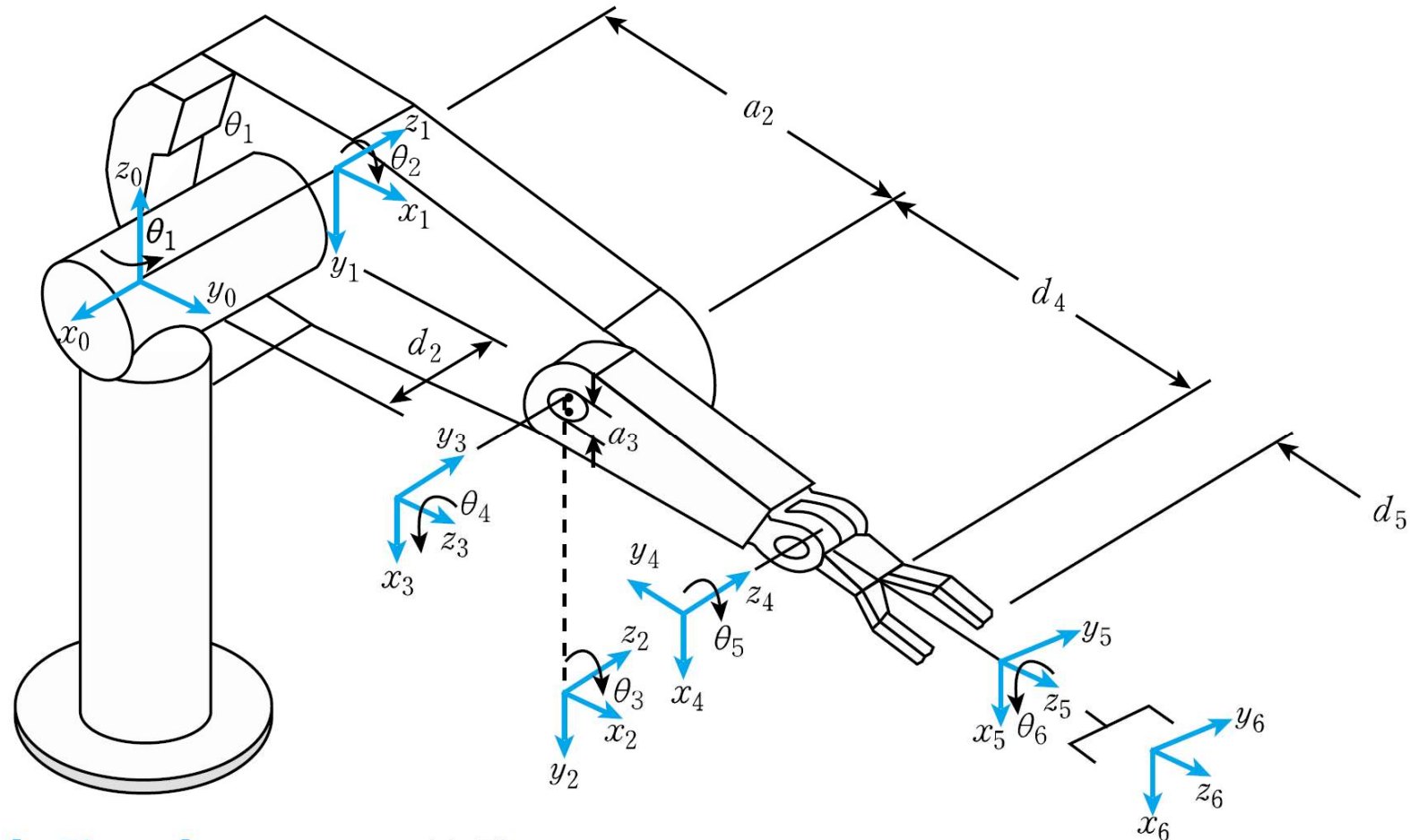
(a) 카메라 이동 전



(b) 카메라 이동 후

[그림 1-16] 컴퓨터 그래픽스에서 카메라 위치와 방향에 따른 그림 생성

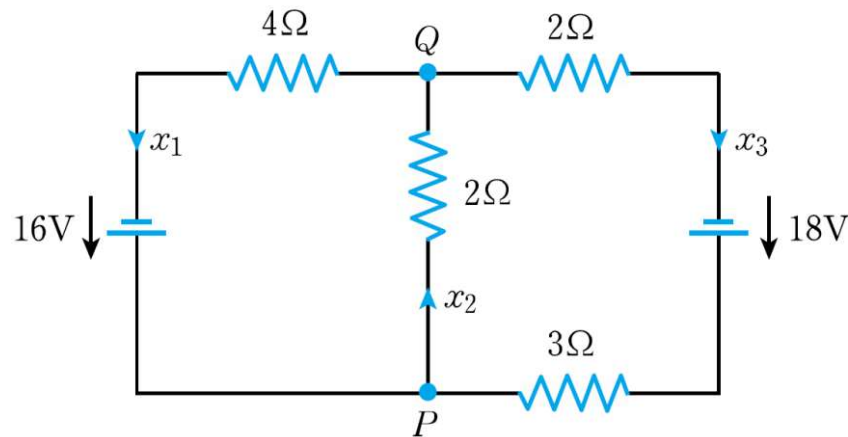
❖ 로봇틱스에서의 위치 결정



[그림 1-17] Puma 560 로봇 팔

❖ 전기 회로 분석

- **키르히호프의 전류 법칙**(Kirchhoff's Current Law)
어떤 교차점에 들어온 전류의 양과 나간 전류의 양의 합이 같다.
- **키르히호프의 전압 법칙**(Kirchhoff's Voltage Law)
하나의 닫힌 루프(loop)에서 전원 전압과 소비되는 전압 강하의 합은 0이다.



(a) 전기 회로

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 16 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 - 18 = 0 \end{cases}$$

(b) 연립선형방정식 표현

❖ 푸리에 변환의 해석

- $f(x)$ 로 표현된 신호 또는 데이터를 $F(\omega)$ 로 표현하는 것

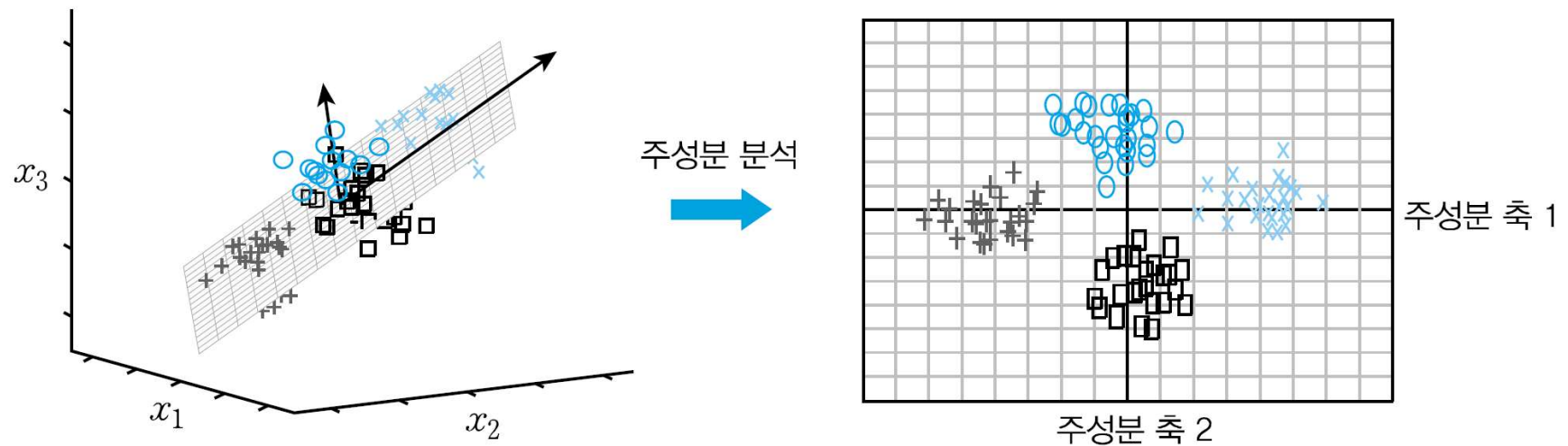
$$\text{신호 또는 데이터} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\text{푸리에 변환} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

- 푸리에 변환은 함수 $f(x)$ 를 복소 지수함수 $e^{i\omega x}$ 들을 기저로 하는 벡터공간의 좌표 표현으로 해석

❖ 차원 축소

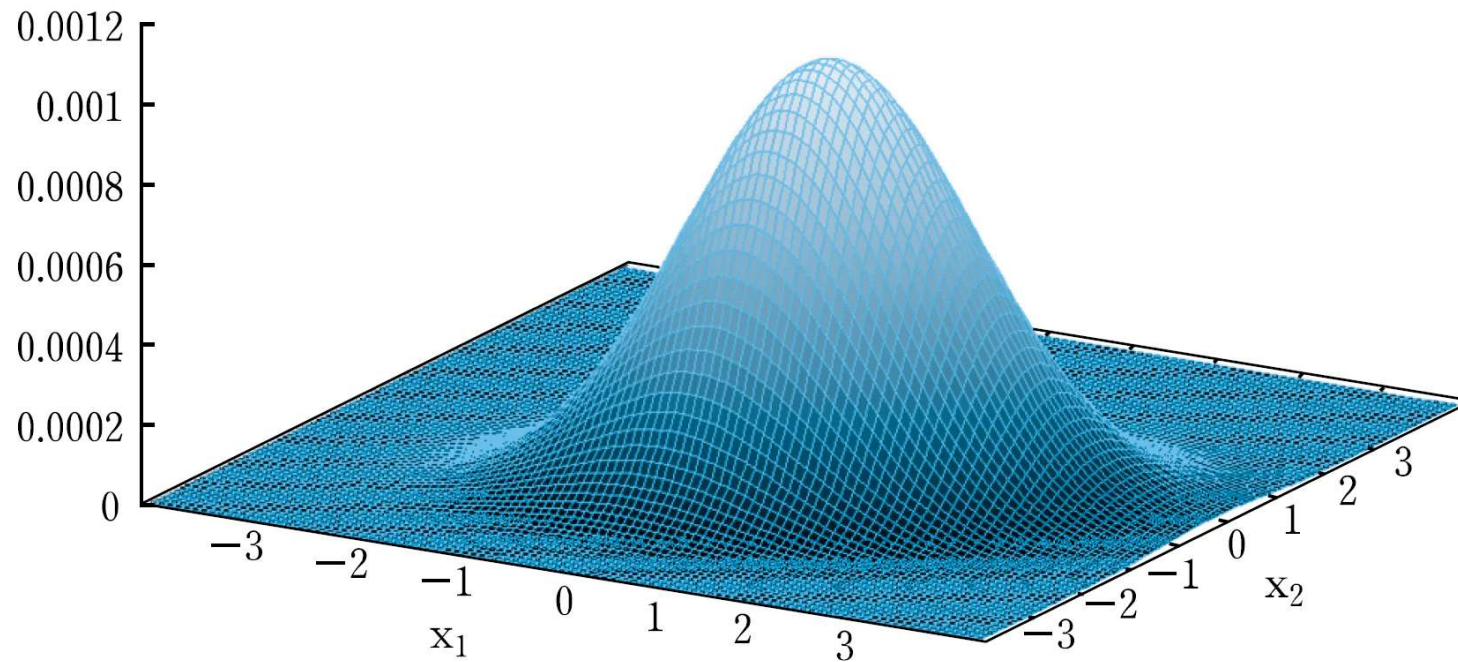
- 고차원 공간에서 표현되는 데이터를 저차원 공간의 데이터로 변환하는 것
- 주성분 분석(PCA)



[그림 1-19] 주성분 분석에 의한 데이터의 차원 축소

❖ 다변수 가우시안 분포

$$p(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)^\top \Sigma^{-1}(X - \mu)\right)$$



[그림 1-20] 이변수 가우시안 분포

❖ 칼만 필터

- 로봇, 미사일 등의 위치를 확률적으로 추정하는 기법
- 현재 위치 \mathbf{x}_t 와 위치에 대한 공분산 행렬 P_t 를 추정

$$\text{예측 단계 : } \mathbf{x}_t^- = A\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$$

$$P_t^- = AP_{t-1}A^\top + Q_t$$

$$\text{갱신 단계 : } \hat{\mathbf{x}}_t = A\mathbf{x}_t^- + K_t(z_t - H\mathbf{x}_t^-)$$

$$P_t = (I - K_tH)P_t^-$$

$$K_t = P_t^- H^\top (HP_t^- H^\top + R)^{-1}$$

1. 합을 구하는 파이썬 프로그램

2. 행렬과 벡터의 생성

3. 행렬과 벡터의 크기 계산

Q&A