

선형대수학

이양민(Yang Min Lee)

manson23@nate.com

S03-301-01호실

카카오ID: yanwenry

1. 다음 행렬 A의 역행렬을 구한 다음, 행렬 A와 구한 역행렬의 곱이 단위행렬 I인지 확인하라. 그 다음 난수^{random number}로 3×3 행렬 B를 만들고 그 역행렬을 구한 후, B와 B의 역행렬을 곱하여 결과를 출력하라. 또한 다음 행렬 C와 D에 대한 행렬방정식 $Cx = D$ 의 해를 역행렬을 이용하여 구한 다음, 해가 맞는지 확인하라. [연계 : 4.2절](#)

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5.0 & 3.0 & 2.0 & 1.0 \\ 6.0 & 2.0 & 4.0 & 5.0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 2.0 \\ 5.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

프로그래밍 실습

```
import numpy as np

# 행렬 A를 출력하는 함수
10 usages
def pprint(msg, A):
    print("---", msg, "---")
    (n,m) = A.shape
    for i in range(0, n):
        line = ""
        for j in range(0, m):
            line += "{0:.2f}".format(A[i,j]) + "\t"
        print(line)
    print("")

A = np.array([[1., 2.], [3., 4.]])
pprint(msg: "A", A)

Ainv1 = np.linalg.matrix_power(A, -1) # matrix_power( )를
pprint(msg: "linalg.matrix_power(A, -1) => Ainv1", Ainv1)

Ainv2 = np.linalg.inv(A) # inv( )를 사용한 역행렬 A-1 계산
pprint(msg: "np.linalg.inv(A) => Ainv2", Ainv2)

pprint(msg: "A*Ainv1", np.matmul(A, Ainv1)) # 행렬 A와 역행렬
pprint(msg: "A*Ainv2", np.matmul(A, Ainv2)) # 행렬 A와 역행렬
```

```
B = np.random.rand(3,3) # 난수를 이용한 3x3 행렬 B 생성
pprint(msg: "B =", B)
Binv = np.linalg.inv(B) # 역행렬 B-1 계산
pprint(msg: "Binv =", Binv)
pprint(msg: "B*Binv =", np.matmul(B, Binv)) # 행렬 B와 역행렬 B-1의 곱

# CX = D의 해 계산
C = np.array([[5, 3, 2, 1], [6, 2, 4, 5], [7, 4, 1, 3], [4, 3, 5, 2]])
D = np.array([[4], [2], [5], [1]])
x = np.matmul(np.linalg.inv(C), D)
pprint(msg: "x", x) # 해 x 출력
pprint(msg: "C*x", np.matmul(C, x)) # C*x의 결과가 D와 같은지 확인
```

2. 임의의 크기의 정방행렬 A 를 LU 분해하는 함수 $LU(A)$ 를 사용하여 $Ax = b$ 의 해를 구하는 프로그램을 작성하라. [프로그래밍 실습 문제 1]의 연립선형방정식을 행렬방정식 $Ax = b$ 로 간주하고, 작성한 함수로 계수행렬 A 를 LU 분해하여 이 연립선형방정식의 해를 구하라.

```
import numpy as np

4 usages
def pprint(msg, A):
    print("---", msg, "---")
    (n,m) = A.shape
    for i in range(0, n):
        line = ""
        for j in range(0, m):
            line += "{0:.2f}".format(A[i,j]) + "\t"
        print(line)
    print("")
```

프로그래밍 실습

#LU 분해 함수

2 usages

def LU(A):

(n,m) = A.shape

L = np.zeros((n,n)) # 행렬 L 초기화

U = np.zeros((n,n)) # 행렬 U 초기화

행렬 L과 U 계산

for i in range(0, n):

for j in range(i, n):

U[i, j] = A[i, j]

for k in range(0, i):

U[i, j] = U[i, j] - L[i, k]*U[k, j]

L[i,i] = 1

if i < n-1:

p = i + 1

for j in range(0,p):

L[p, j] = A[p, j]

for k in range(0, j):

L[p, j] = L[p, j] - L[p, k]*U[k, j]

L[p,j] = L[p,j]/U[j,j]

return L, U

LU 분해를 이용한 Ax=b의 해 구하기

1 usage

def LUSolver(A, b):

L, U = LU(A)

n = len(L)

Ly=b 계산

y = np.zeros((n,1))

for i in range(0,n):

y[i] = b[i]

for k in range(0,i):

y[i] -= y[k]*L[i,k]

Ux=y 계산

x = np.zeros((n,1))

for i in range(n-1, -1, -1):

x[i] = y[i]

if i < n-1:

for k in range(i+1,n):

x[i] -= x[k]*U[i,k]

x[i] = x[i]/float(U[i,i])

return x

프로그래밍 실습

```
A = np.array([[5, 3, 2, 1], [6, 2, 4, 5], [7, 4, 1, 3], [4, 3, 5, 2]])
b = np.array([[4], [2], [5], [1]])

# 행렬 A의 LU 분해
L, U = LU(A)
pprint(msg: "A", A)
pprint(msg: "L", L)
pprint(msg: "U", U)

# LU 분해를 이용한 Ax=b의 해 구하기
x = LUSolver(A, b)
pprint(msg: "x", x)
```

4. 다음 기본행렬의 역행렬을 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 다음 행 연산에 해당하는 기본행렬을 구하라.

(a) 4×4 행렬의 3행에 5배를 하는 기본행렬 R_1

(b) 5×5 행렬의 2행과 3행을 교환하는 기본행렬 R_2

(c) 4×4 행렬에서 2행의 4배를 3행에 더하는 기본행렬 R_3

6. 두 행렬이 행 동치인지 보여라.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

7. 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

8. 행 연산을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

9. 역행렬을 이용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

(a) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = -9 \\ -6x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$

10. 다음 각 행렬의 역행렬이 존재하는지 확인하고, 존재한다면 그 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

12. 역행렬을 이용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$$

13. 역행렬을 이용하여 다음 행렬방정식의 해 B 를 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 11 \\ 11 & -3 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$$

19. 다음 행렬 A 를 LU 분해하라.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

20. LU 분해를 이용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

22. 다음 부분행렬 A, B, C, D 로 구성된 블록행렬 M 에 대하여, A 의 슈어 보수행렬을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

23. 블록행렬의 역행렬 계산 방법을 이용하여 다음 행렬 A 의 역행렬을 구하라.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ -9 & -10 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$