예제 3-1 행렬 용어

주어진 행렬에 대하여 다음 물음에 답하라.

$$A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\6&3&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix},\quad C=[-4\ \ 9],\quad D=\begin{bmatrix}2&4&8&4\\4&8&3&1\\7&3&0&5\end{bmatrix}$$

Tip
앞에서 설명한 행렬 용어를 참고한다.

(a) 어떤 행렬이 정방행렬인가?

(b) B의 크기는 얼마인가?

(c) C의 크기는 얼마인가?

(d) D의 (2, 3) 성분은 무엇인가?

(e) A의 두 번째 행벡터는 무엇인가?

(f) D의 세 번째 열벡터는 무엇인가?

정의 3-2 행렬의 합

같은 크기의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$과 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$의 **합**sum인 행렬 $C=[c_{ij}]_{m\times n}$의 성분 c_{ij}는 대응하는 성분들의 합 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$이다.

➢ 동일 크기 행렬의 성분 간의 합

예제 3-2 행렬의 합

다음 행렬 A와 B의 합 $C=A+B$를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&4&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&5&6\end{bmatrix}$$

Tip
[정의 3–2]를 이용한다.

풀이

$$C=A+B=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&4&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&5&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+1&3+2&4-2\\1+4&4+5&2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&2\\5&9&8\end{bmatrix}$$

정의 3-4 행렬의 스칼라배

스칼라 k를 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 곱하는 행렬의 **스칼라배**scalar multiplication kA는 $kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$으로, A의 각 성분을 k배한 것이다.

- 성분별 스칼라배

예제 3-4 행렬의 스칼라배

다음 행렬 A에 대하여 $3A$를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tip
[정의 3-4]를 이용한다.

풀이

$$3A=\begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 & 3\times 4 \\ 3\times 1 & 3\times 4 & 3\times 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

예제 3-6 행렬의 곱

다음 행렬 A와 B의 곱 AB를 구하라.

Tip
[정의 3-5]를 이용한다.

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\3&1\\4&5\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}$$

풀이

$$AB=\begin{bmatrix}2&3\\3&1\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+3\times2&2\times2+3\times3&2\times3+3\times4\\3\times1+1\times2&3\times2+1\times3&3\times3+1\times4\\4\times1+5\times2&4\times2+5\times3&4\times3+5\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&13&18\\5&9&13\\14&23&32\end{bmatrix}$$

예제 3-7 행렬의 곱

다음 행렬 A와 열벡터 v의 곱 Av를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Tip
행렬 곱의 정의를 이용하여 계산한다.

예제 3-8 행렬의 곱

주어진 행렬에 대하여 다음을 계산하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) AB (b) CA (c) CI (d) IB

Tip
행렬 곱의 정의를 이용하여 계산한다.

예제 3-9 행렬의 곱

주어진 행렬에 대하여 다음 계산이 가능한지 판정하고, 가능한 경우 계산 결과로 만들어지는 행렬의 크기를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\\ 6 & -5\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 5 & 4\\ 8 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}2 & 4 & 8 & 4\\ 4 & 8 & 3 & 1\\ 7 & 3 & 0 & 5\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

(a) AF (b) CD (c) FB

(d) BF (e) DF (f) BC

Tip

행렬의 곱 AB는 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같을 때 수행할 수 있다.

예제 3-10 행렬의 거듭제곱

행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$에 대해 다음 행렬의 거듭제곱을 구하라.

Tip [정의 3-6]을 이용한다.

(a) A^0 (b) A^2 (c) A^3

풀이

(a) $A^0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(b) $A^2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}$

(c) $A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37&54\\81&118\end{bmatrix}$

예제 3-11 행렬 연산의 성질

A, B, C는 $n \times n$ 행렬이고, 0이 $n \times n$ 영행렬일 때, 다음 중 옳은 것을 찾으라.

Tip
행렬 연산의 성질을 이용한다.

① $AB = BA$

② $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

③ $A(B+C) = AB + AC$

④ $AB = 0$이면, $A = 0$ 또는 $B = 0$이다.

예제 3-12 역행렬

다음 행렬 A와 B가 서로 역행렬인지 보여라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Tip

$AB=BA=I_2$인지 확인한다.

풀이

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

➡ A와 B는 서로 역행렬

예제 3-13 가역행렬

다음 행렬 A가 가역행렬인지 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tip

$AB=I$가 가능한지 확인한다.

- **비가역행렬의 예**

임의의 3×3 행렬 B에 대한 AB

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 3-14 **역행렬**

다음 행렬이 가역행렬인지 판정하고, 가역행렬인 경우 역행렬을 구하라.

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $C=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tip

[정리 3-7]의 역행렬 공식을 이용한다.

예제 3-15 역행렬

주어진 행렬 A와 B에 대하여 다음 물음에 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) A와 B의 역행렬을 구하라.

(b) AB의 역행렬을 구하라.

(c) $4A$의 역행렬을 구하라.

(d) A^2의 역행렬을 구하라.

Tip

2×2 행렬의 역행렬 계산 공식과 [정리 3-8]의 성질을 이용한다.

예제 3-16 역행렬을 이용한 행렬방정식의 풀이법

행렬 A와 B가 다음과 같다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A^{-1}를 사용하여 $AX = B$를 만족하는 2×2 행렬 X를 구하라.

Tip

2×2 행렬의 역행렬 계산 공식을 이용해 A의 역행렬을 구하고, 역행렬을 행렬 방정식 양변 앞에 곱한다.

❖ 전치행렬

정의 3-9 전치행렬

행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$의 행과 열을 바꾸어 놓은 행렬을 **전치행렬** transpose matrix이라 하고, $A^{\top}$로 나타낸다. 전치행렬 $A^{\top}=[a'_{ij}]_{n\times m}$의 성분 a'_{ij}는 A의 a_{ji}와 같다. $A^{\top}$는 'A의 전치행렬' 또는 'A transpose'라고 읽는다.

예제 3-17 전치행렬

다음 행렬의 전치행렬을 구하라.

(a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

Tip

[정의 3–9]를 이용한다.

$$A^{\top}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix} \qquad B^{\top}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 1 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

예제 3-18 전치행렬

주어진 행렬 A, B에 대하여 다음 물음에 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) $(A^\top)^\top$를 구하여 A와 같은지 확인하라.

(b) $(A+B)^\top$와 $A^\top+B^\top$가 같은지 확인하라.

(c) $(AB)^\top$와 $B^\top A^\top$가 같은지 확인하라.

(d) $(3A)^\top$와 $3A^\top$가 같은지 확인하라.

(e) $(A^\top)^{-1}$와 $(A^{-1})^\top$가 같은지 확인하라.

Tip

행렬의 행과 열을 바꾼 것이 전치행렬임을 이용한다.

예제 3-20 대칭행렬과 반대칭행렬의 합

행렬 A를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타내라.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Tip

[정리 3-10]을 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(A + A^{\top}) + \frac{1}{2}(A - A^{\top}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 12 & 11 \\ 3 & 11 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

예제 3-22 대각행렬의 연산

주어진 행렬 A, B, C에 대하여 다음 행렬의 연산 결과를 구하라.

$$A = diag(3,\ 4,\ 5,\ 2),\ B = diag(1,\ 3,\ 2,\ 5),\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $A+B$ (b) AB (c) AC

Tip

[정리 3-11]과 [정리 3-12]를 이용한다.

예제 3-23 대각합의 성질

행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$과 $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$에 대해

$tr(AB)=tr(BA)$임을 보여라.

Tip

[정의 3-12]를 이용하여 대각합을 구한다.

예제 3-24 대각합의 성질

n차 정방행렬 A, B, C에 대하여, 다음 각 관계식의 참, 거짓을 판정하라.

(a) $tr(B^{-1}AB)=tr(A)$

(b) $tr(ABC)=tr(ACB)$

Tip

[정리 3-13]을 이용한다.

정리 3-14 삼각행렬의 곱

증명

(1) 상삼각행렬과 상삼각행렬의 곱은 상삼각행렬이다.

(2) 하삼각행렬과 하삼각행렬의 곱은 하삼각행렬이다.

예제 3-25 삼각행렬

상삼각행렬 A와 B를 곱하고, 그 결과가 상삼각행렬인지 확인하라.

Tip
[정리 3-14]를 이용한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

풀이

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 23 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

예제 3-26 **블록행렬**

다음과 같이 분할된 행렬 A와 B가 있다고 하자.

> **Tip**
> [정리 3-15]를 이용한다.

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \\ \hdashline 3 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ \hdashline 5 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$A+B=C$인 C를 다음과 같이 동일한 형태로 분할한 경우의 부분행렬들을 구하라.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

풀이

$$C_{11} = A_{11} + B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = A_{12} + B_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = A_{21} + B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = A_{22} + B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

예제 3-27 블록행렬

다음과 같이 분할된 행렬 A와 B에 대해, 블록행렬의 곱으로 AB를 구하라.

Tip
[정리 3-17]을 이용한다.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B=\left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

풀이

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 14 & -18 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -12 & 19 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 3-28 행렬 곱의 표현

다음과 같은 행렬 A와 B의 곱 AB를 직접 계산한 것과, A의 열벡터와 B의 행벡터의 곱들의 합으로 계산한 것을 비교하라.

Tip
[정리 3-19]의 행렬 곱의 계산 방법을 이용한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

풀이

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 20 \\ 16 & 28 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1^{\top} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2^{\top} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [2\ 4\ 6] + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} [3\ 5\ 7] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 12 & 20 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 20 \\ 16 & 28 & 40 \end{bmatrix}$$