

선형대수학

이양민(Yang Min Lee)

manson23@nate.com

S03-301-01호실

카카오ID: yanwenry

프로그래밍 실습

2. 다음 행렬 A, B, C, C^T 의 계수를 구하라. 연계 : 7.2절

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
4 usages
def pprint(msg, A):
    print("---", msg, "---")
    (n,m) = A.shape
    for i in range(0, n):
        line = ""
        for j in range(0, m):
            line += "{0:.2f}".format(A[i,j]) + "\t"
        print(line)
    print("")
```

```
A = np.eye(4)
pprint(msg: "A", A)
print("rank(A) =", np.linalg.matrix_rank(A)) # 행렬

B = np.zeros((3,3))
pprint(msg: "B", B)
print("rank(B) =", np.linalg.matrix_rank(B)) # 행렬

C = np.array([[2, 5, -3, -4, 8],
              [4, 7, -4, -3, 9],
              [6, 9, -5, 2, 4],
              [0, -9, 6, 5, -6]])
pprint(msg: "C", C)
print("rank(C) =", np.linalg.matrix_rank(C)) # 행렬

CT = np.transpose(C)
pprint(msg: "C^T", CT)
print("rank(C^T) =", np.linalg.matrix_rank(CT)) #
```

5. 다음 선형변환의 표준행렬을 구하라.

(a) $L(x_1, x_2) = (-3x_1, 2x_2)$

(b) $L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - 4x_2)$

(c) $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_2 - 4x_3)$

(d) $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_3)$

(e) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_2 + x_4, 2x_2 - x_4)$

(f) $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, x_1 - 3x_2, 2x_1)$

(g) $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

(h) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 4x_3 - 5x_4$

6. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 선형변환이고 $L(1, 0, 0) = (2, 3)$, $L(0, 1, 0) = (2, 1)$, $L(0, 0, 1) = (1, -1)$ 일 때, 다음을 구하라.

(a) $L(1, 2, 3)$

(b) $L(1, 0, -1)$

(c) $L(2, 3, 1)$

(d) $L(x, y, z)$

10. \mathbb{R}^2 공간의 좌표 (a, b) 를 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 3만큼 평행이동하는 표준행렬의 동차 표현을 구하라.
11. \mathbb{R}^3 공간의 좌표 (a, b, c) 를 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 -1 , z 축 방향으로 5만큼 평행이동하는 표준행렬의 동차 표현을 구하라.
12. \mathbb{R}^3 공간에서 y 축을 기준으로 45° 만큼 반시계방향으로 회전할 때, 점 $(1, 2, 1)$ 이 이동한 위치를 구하라.
13. \mathbb{R}^2 공간에서 원점을 중심으로 30° 만큼 반시계방향으로 회전한 다음, x 축을 기준으로 반사하는 선형변환의 표준행렬을 구하라.
14. \mathbb{R}^2 공간에서 벡터 x 의 길이를 2배로 확대하고, 반시계방향으로 30° 회전하는 선형변환의 표준행렬을 구하라.

17. 표준행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대한 선형변환 $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 아래의 각 위치를 변환한 결과를 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

18. \mathbb{R}^2 공간에서 꼭짓점이 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ 인 사각형에 대해, 다음 행렬 A 를 표준행렬로 갖는 선형변환을 적용한 결과를 좌표평면에 그려라.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

19. 선형변환 $L_1(x, y) = (2x + y, x + 2y)$ 와 $L_2(x, y) = (-x + y, 2y)$ 에 대하여, 선형변환의 합성 $L_2 \circ L_1$ 을 구하라.

20. 선형변환 L_1 과 L_2 의 표준행렬이 각각 A 와 B 일 때, $L_2 \circ L_1$ 의 표준행렬을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

23. \mathbb{R}^3 공간의 네 점 $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(\sqrt{3}, 0, 0)$, $P_3(0, 2, 0)$, $P_4(0, 0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 사각뿔에 대하여 다음 물음에 답하라.

- (a) x 축으로 기준으로 y 축 방향으로 3, z 축 방향으로 2만큼 증밀립변환한 사각뿔의 각 꼭짓점을 구하라.
- (b) x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 -1 , z 축 방향으로 3만큼 평행이동한 사각뿔의 각 꼭짓점을 구하라.

24. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 변환에 해당하는 선형변환이 노름보존 선형연산자임을 보여라.

25. \mathbb{R}^3 공간의 초기 좌표계에서 항공기에 피치 30° , 롤 60° 를 순차적으로 적용할 때, 처음 좌표 $(0, 1, 0)$ 의 변환된 좌표를 구하라.

26. 다음 각 표준행렬에 대한 선형변환의 결과를 기하학적으로 설명하라.

$$(a) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27. \mathbb{R}^3 공간에서 투영중심이 $(0, 0, -10)$ 이고 투영면은 $z=0$ 인 원근투영을 사용하여 점 $(4, 2, 3)$ 을 투영한 좌표를 구하라.