

선형대수학

이양민(Yang Min Lee)

manson23@nate.com

S03-301-01호실

카카오ID: yanwenry

1. 임의의 크기의 정방행렬에 대한 행렬식을 계산하는 프로그램을 작성하고, 이를 이용하여 다음 행렬 A의 행렬식을 구하라. 연계 : 5.1절

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

프로그래밍 실습

```
import numpy as np
```

1 usage

```
def getMinorMatrix(A,i,j): # 행렬 A의 i행과 j열을 제거하고 만든 행렬 생성
    n = len(A)
    M = np.zeros((n-1, n-1))
    for a in range(0,n-1):
        k = a if (a < i) else a+1
        for b in range(0, n-1):
            l = b if (b < j) else b+1
            M[a, b] = A[k, l]
    return M
```

2 usages

```
def determinant(M): # 행렬식 계산
    if len(M) == 2: # 2x2 행렬의 행렬식 계산
        return M[0,0]*M[1,1]-M[0,1]*M[1,0]

    detVal = 0
    for c in range(len(M)):
        detVal += ((-1)**c)*M[0,c]*determinant(getMinorMatrix(M,i:0,c))
    return detVal
```

```
A = np.array([[ -4,  0,  2, -1,  0], [ 1,  3, -3, -1,  4], [ 2,  0,  1,  3,  0],
              [-2,  1, -3, -1,  5], [ 1, -5,  1,  0,  5]])
print("A = ", A)
print("det(A) = ", determinant(A))
```

프로그래밍 실습

2. 수반행렬을 이용한 역행렬 계산 방법을 구현하여, 다음 행렬 A의 역행렬을 계산하라.

연계 : 5.5절

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
```

1 usage

```
def cofactor(A, i, j): # 여인수 계산
```

```
    (n,m) = A.shape
```

```
    M = np.zeros((n-1, m-1))
```

```
    for a in range(0, n-1):
```

```
        k = a if (a < i) else a+1
```

```
        for b in range(0, m-1):
```

```
            l = b if (b < j) else b+1
```

```
            M[a,b] = A[k, l]
```

```
    return (-1)**(i+j)*np.linalg.det(M)
```

```
def inverseByAdjointMatrix(A): # 수반행렬을 이용한 A의 역행렬 계산
```

```
    detA = np.linalg.det(A) # A의 행렬식 계산
```

```
    (n,m) = A.shape
```

```
    adjA = np.zeros((n, m))
```

```
    for i in range(0,n): # 수반행렬 생성
```

```
        for j in range(0, m):
```

```
            adjA[j,i] = cofactor(A, i, j)
```

```
    if detA != 0.0:
```

```
        return (1./detA) * adjA
```

```
    else:
```

```
        return 0
```

```
A = np.array([[ -4,  0,  2, -1,  0], [ 1,  3, -3, -1,  4], [ 2,  0,  1,  3,  0],  
              [-2,  1, -3, -1,  5], [ 1, -5,  1,  0,  5]])
```

```
print("A = ", A)
```

```
Ainv = inverseByAdjointMatrix(A)
```

```
print("A inverse = ", Ainv)
```

3. 크래머 공식을 이용하여 연립선형방정식의 해를 구하는 방법을 구현하여, 다음 연립선형방정식의 해를 구하라. 연계 : 5.5절

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -32 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -47 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 49 \end{cases}$$

```
import numpy as np

1 usage
def solveByCramer(A, B): # 크래머 공식을 이용한 연립선형방정식 AX=B의 풀이
    X = np.zeros(len(B))
    C = np.copy(A)
    for i in range(0, len(B)):
        for j in range(0, len(B)):
            C[j,i] = B[j]
            if i>0:
                C[j,i-1] = A[j,i-1]
        X[i] = np.linalg.det(C)/np.linalg.det(A)
    return X

# AX = B의 해
A = np.array([[2, -1, 5, 1], [3, 2, 2, -6], [1, 3, 3, -1], [5, -2, -3, 3]])
B = np.array([[-3], [-32], [-47], [49]])
X = solveByCramer(A, B)
print("A = ", A)
print("B = ", B)
print("X = ", X)
```

2. 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

3. 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

(a) $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

4. 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

5. 다음 행렬의 소행렬식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) A_{11}

(b) A_{12}

(c) A_{13}

(d) A_{23}

6. 다음 순열을 오름차순으로 변환하기 위한 자리바꿈 횟수를 계산하라.

(a) $[3, 1, 4, 2]$

(b) $[2, 1, 4, 3]$

(c) $[3, 4, 2, 1]$

(d) $[5, 2, 1, 4, 3]$

7. 다음 행렬식을 구하라.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

8. 다음 행렬식을 구하라.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

10. 행렬식을 이용하여 다음 행렬이 가역행렬인지 확인하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

11. 다음 연립선형방정식이 자명해만 가지도록 하는 실수 s 의 조건을 찾으라.

$$(a) \begin{cases} 6sx_1 + 4x_2 = 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 = -2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3sx_1 - 5x_2 = 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 = 2 \end{cases}$$

12. 다음 연립선형방정식이 자명해만 가지도록 하는 실수 s 의 조건을 찾으라.

$$(a) \begin{cases} sx_1 - 2sx_2 = -1 \\ 3x_1 + 6sx_2 = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2sx_1 + x_2 = 1 \\ 3sx_1 + 6sx_2 = 2 \end{cases}$$

19. 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 6 & 7 & 2 \\ -2 & -6 & 0 & 4 & 8 \\ -3 & -7 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 일 때, $AB = A^2 + A$ 인 행렬 B 의 행렬식을 구하라.

21. $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 8)$ 을 꼭짓점으로 갖는 평행사변형의 넓이를 구하라.

22. 행렬 A 를 이용하여 입체도형을 변환할 때, 부피가 얼마나 증가하는지 계산하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

23. 행렬식을 이용하여 세 점 $(1, 2, -1)$, $(-2, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$ 를 지나는 평면의 방정식을 구하라.

24. 행렬식을 이용하여 세 점 $(5, -3, 2)$, $(3, 2, -1)$, $(1, 4, -3)$ 을 지나는 평면의 방정식을 구하라.

25. 다음 행렬의 수반행렬을 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

26. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$(a) \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ -5x_1 + 6x_2 = -5 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

27. 수반행렬을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$