

예제 2-2 연립선형방정식

다음 연립선형방정식의 그래프를 그려서 해의 개수를 구하라.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 6 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Tip

[그림 2-2]와 같이 각 선형방정식의 그래프를 그려서 동시에 만나는 점의 개수를 확인한다.

예제 2-3 동치인 연립선형방정식

다음 연립선형방정식 ①, ②가 서로 동치인지 확인하라.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \text{①} \begin{cases} -12x_1 + 9x_2 = 7 \\ 9x_1 - 12x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{②} \begin{cases} -12x_1 + 9x_2 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad & \text{①} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{②} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tip

[정리 2-1]의 연산을 이용하여 연립선형방정식 ①로부터 연립선형방정식 ②를 만든다.

예제 2-4 대입법

다음 연립선형방정식의 해를 대입법으로 구하라.

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

Tip

하나의 미지수를 다른 미지수로 표현한 다음, 다른 방정식의 그 미지수에 대입하여 해를 구한다.

예제 2-5 소거법

다음 연립선형방정식의 해를 소거법으로 구하라.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

Tip

미지수를 하나씩 제거하며
해를 구한다.

정의 2-5 행렬방정식

연립선형방정식을 행렬과 벡터의 곱으로 $Ax = b$ 와 같이 표현한 것을 **행렬방정식** matrix equation이라고 한다.

예제 2-6 연립선형방정식의 행렬방정식 표현

다음 연립선형방정식을 행렬방정식으로 표현하라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 2 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Tip

방정식의 계수와 상수로 행렬과 벡터를 구성한다.

예제 2-7 동치인 행렬방정식

행렬방정식으로 표현된 다음 연립선형방정식 ①, ②가 동치인지 확인하라.

$$(a) \quad \textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tip

[정리 2-2]의 연산을 사용하여 행렬방정식 ①로부터 행렬방정식 ②를 만든다.

예제 2-8 행 사다리꼴 행렬과 기약행 사다리꼴 행렬

다음 각 행렬이 행 사다리꼴 행렬인지 기약행 사다리꼴 행렬인지 설명하라.

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip

주축성분과 주축성분 위
아래 성분들의 값을 확인
한다.

- **첨가행렬**(augmented matrix)

계수행렬과 상수벡터를 묶어서 표현한 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 3 & -2 & -3 & | & -1 \end{bmatrix}}_{\text{첨가행렬}}$$

예제 2-9 첨가행렬

다음 연립선형방정식을 첨가행렬로 표현하라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 2 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Tip

연립선형방정식의 계수행렬과 상수벡터로 구성한다.

예제 2-10 가우스-조단 소거법

가우스-조단 소거법을 적용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Tip

먼저 첨가행렬로 표현한 다음, 첨가행렬에 행 연산을 적용하여 계수행렬 부분을 기약행 사다리꼴로 변환한다.

예제 2-11 첨가행렬의 첫 행의 맨 왼쪽 성분이 0인 경우

가우스-조단 소거법을 적용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Tip

먼저 첨가행렬로 표현한 다음, 첨가행렬에 행 연산을 적용하여 계수행렬 부분을 기약행 사다리꼴로 변환한다.

예제 2-12 불가능인 연립선형방정식에 대한 가우스-조단 소거법

가우스-조단 소거법을 적용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 - 17x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 10 \end{cases}$$

Tip

먼저 첨가행렬로 표현한 다음, 첨가행렬에 행 연산을 적용하여 계수행렬 부분을 기약행 사다리꼴로 변환한다.

예제 2-13 부정인 연립선형방정식에 대한 가우스-조단 소거법

가우스-조단 소거법을 적용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Tip

먼저 첨가행렬로 표현한 다음, 첨가행렬에 행 연산을 적용하여 계수행렬 부분을 기약행 사다리꼴로 변환한다.

■ 미지수의 개수가 방정식의 개수보다 적은 연립선형방정식의 풀이법

예제 2-14 미지수의 개수가 방정식의 개수보다 적은 경우

가우스-조단 소거법을 적용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Tip

먼저 첨가행렬로 표현한 다음, 첨가행렬에 행 연산을 적용하여 계수행렬 부분을 기약행 사다리꼴로 변환한다.

예제 2-16 다항식 곡선 맞춤

xy 평면상의 점 $(1, 4)$, $(2, 0)$, $(3, 12)$ 를 지나는 다항식 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ 을 구하라.

Tip

각 점의 좌표값을 다항식에 대입하여 연립선형방정식을 만들고 다항식의 계수를 결정한다.

풀이

$$p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 4$$

$$p(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$$

$$p(3) = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 12$$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 12 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} (R_2 \leftarrow -R_1 + R_2) \\ (R_3 \leftarrow -R_1 + R_3) \end{array}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & 8 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} (R_1 \leftarrow -R_2 + R_1) \\ (R_3 \leftarrow -2R_2 + R_3) \end{array}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\left(R_3 \leftarrow \frac{1}{2} R_3 \right)} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} (R_1 \leftarrow 2R_3 + R_1) \\ (R_2 \leftarrow -3R_3 + R_2) \end{array}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right] \end{array}$$

$$a_0 = 24, a_1 = -28, a_2 = 8$$

$$p(x) = 24 - 28x + 8x^2$$