선형대수학

이양민(Yang Min Lee)

manson23@nate.com

S03-301-01호실

카카오ID: yanwenry

1. 다음과 같이 방향과 크기가 주어진 \mathbb{R}^2 공간의 두 힘을 결합한 힘의 방향과 크기를 구하라.

연계: 6.1절

30° 방향으로 100N의 힘 60° 방향으로 120N의 힘

```
import numpy as np
2 usages
|def getVector(mag, deg): # 주어진 크기와 방향에 대응하는 벡터
    vec = np.zeros(2)
    vec[0] = mag*np.cos(deg*2*np.pi/360)
    vec[1] = mag*np.sin(deg*2*np.pi/360)
    return vec
def getMagDeg(vec): # 벡터의 크기와 방향 계산
    mag = np.sqrt(vec[0]*vec[0]+vec[1]*vec[1])
    deg = np.arctan(vec[1]/vec[0]) * 360/(2*np.pi)
    return mag, deg
F1 = getVector( mag: 100, deg: 30) # 크기 100N, 방향 30°인
F2 = getVector( mag: 120, deg: 60) # 크기 120N, 방향 60°인
Fsum = F1 + F2
magn, angle = getMagDeg(Fsum)
print("결합한 힘의 크기 : ", magn)
print("결합한 힘의 방향 : ", angle)
```

2. 다음 벡터 A, B의 사잇각과, A의 B 위로의 정사영을 구하라. 연계: 6.3절

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
|def angle2vectors(v, w): # 두 벡터의 사잇각 계산
    vnorm = np.linalg.norm(v)
    wnorm = np.linalg.norm(w)
    vwdot = np.dot(v.T, w)
    angle = np.arctan(vwdot/(vnorm*wnorm))*360/np.pi
    return angle
def orthProj(u, x): # 정사영 계산
   xu_dot = np.dot(x.T, u)
   uu_dot = np.dot(u.T, u)
    projux = (xu_dot/uu_dot)*u
    return projux
A = np.array([[2], [4], [1]])
B = np.array([[1], [-1], [3]])
angle = angle2vectors(A, B)
projAB = orthProj(B, A)
print("A와 B의 사잇각 : ", angle)
print("A의 B 위로의 정사영 : \n", projAB)
```

 $\bf 3.$ 다음의 네 점 $\bf A$, $\bf B$, $\bf C$, $\bf D$ 에 대해, 선분 $\overline{\bf AB}$, $\overline{\bf AC}$, $\overline{\bf AD}$ 로 만들어지는 평행육면체의 부피

를 구하라. 연계: 6.4절

A = (1, 2, 3), B = (0, 5, 2), C = (2, 2, 4), D = (2, 4, 1)

```
import numpy as np
def tripleProduct(u, v, w): # 스칼라
    M = np.zeros((3.3))
   M[0:] = U
    M[1:] = v
   M[2:] = w
    val = np.linalg.det(M) # 행벡터가
    return val
A = np.array([1, 2, 3])
B = np.array([0, 5, 2])
C = np.array([2, 2, 4])
D = np.array([2, 4, 1])
U = B - A
v = C - A
w = D - A
val = tripleProduct(u, v, w)
print("부피 : ", np.absolute(val))
```



4. 다음과 같은 점 A를 포함하고 법선벡터가 W인 평면과 점 P 사이의 거리를 계산하라.

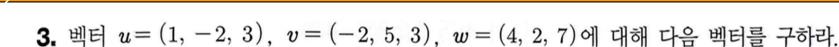
연계: 6.5절

$$A = (2,3,4), W = (1,2,3), P = (0,1,2)$$

```
import numpy as np
1 usage

def distPt2Pl(A, W, P): # 거리 계산
    num = np.dot((P-A).T, W)
    deno = np.linalg.norm(W)
    val = np.absolute(num)/deno
    return val

A = np.array([2, 3, 4])
W = np.array([1, 2, 3])
P = np.array([0, 1, 2])
print("거리 : ", distPt2Pl(A, W, P))
```



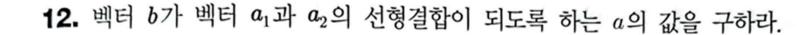
- (a) 3u + 2v
- (b) -4u+2v+3w
- (c) 5u 4w
- (d) 2u+3v = 4w+x일 때 x
- (e) 4u + 2(-3v + 5w)
- **8.** 다항식 $f(x) = 2 + 3x x^2$ 을 기저 $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ 의 선형결합으로 표현하라.
- 9. 벡터 $\begin{bmatrix} 1\\3\\-1 \end{bmatrix}$ 을 기저 $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\-2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\0\\4 \end{bmatrix} \right\}$ 의 선형결합으로 표현하라.
- **10.** 다음 벡터들이 각각 \mathbb{R}^2 공간의 기저가 될 수 있는지 확인하라.

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
, $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

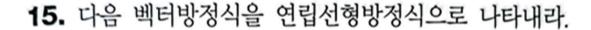
(d)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
, $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$



$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

13. 벡터
$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
과 $a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 가 있을 때, 두 벡터가 $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$ 를 생성하도록 하는 h 값을 구하라.

14. 벡터
$$v_1=\begin{bmatrix} 1\\0\\-2\end{bmatrix}$$
와 $v_2=\begin{bmatrix} -2\\1\\7\end{bmatrix}$ 이 있을 때, 두 벡터가 $y=\begin{bmatrix} h\\-3\\-5\end{bmatrix}$ 를 생성하도록 하는 h 값을 구하라.



(a)
$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(b)
$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16. 다음 연립선형방정식을 벡터방정식으로 나타내라.

(a)
$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ -2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

17. 다음 벡터집합 S가 생성하는 공간의 기저를 찾으라.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\-2\\-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\6\\-2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\3 \end{bmatrix} \right\}$$



21. 다음 벡터의 노름을 계산하라.

(a)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

22. 주어진 두 벡터의 내적을 구하라.

(a)
$$u = (2, -2), v = (1, 3)$$

(b)
$$u = (2, -2, 3), v = (-2, 1, 3)$$

(c)
$$u = (1, 2, -1, 3), v = (2, -3, 1, 4)$$

(d)
$$u = (2, -2, 4), v = (-1, 1, 1)$$

23. 다음 벡터 u와 v의 사잇각 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 를 구하라.

(a)
$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b)
$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

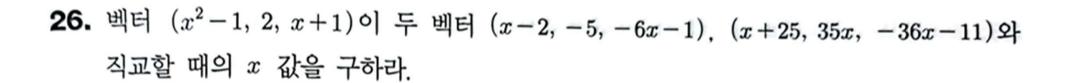
24. 벡터 u의 벡터 v 위로의 정사영을 구하라.

(a)
$$u = (2, -1), v = (1, 3)$$

(b)
$$u = (2, -2, 4), v = (-1, 1, 2)$$

(c)
$$u = (1, 2, 1, 3), v = (1, -3, 3, 2)$$

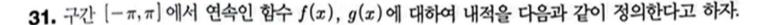
(d)
$$u = (2, -2, 4), v = (-1, 1, 1)$$



27. u=(2,3)과 v=(x,2)에 대해, u+v와 u-v가 직교할 때의 실수 x 값을 구하라.

28. u=(2,3)과 v=(x,-6)이 서로 평행할 때의 x 값을 구하라.

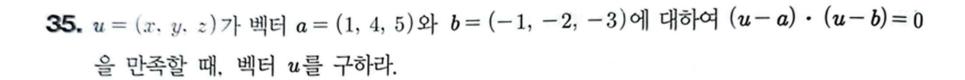
- **29.** 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}$ 의 역행렬은 존재하지 않고, x+y<0이다. u=(x,y)와 v=(1,2)의 사잇 각이 θ 라고 할 때 $\cos\theta$ 를 구하라.
- **30.** ||u||=2, ||v||=1이고, 이들 벡터의 사잇각이 60° 일 때, $(u+2v)\cdot(2u-v)$ 를 구하라.



$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

이때 서로 다른 양의 정수 m과 n에 대하여, 함수 sinmx와 cosnx의 내적을 계산하고 각 함수의 노름을 구하라.

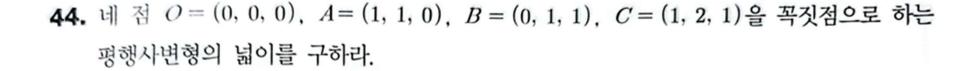
- **32.** 정육면체에서 한 꼭짓점과 가장 멀리 떨어진 꼭짓점을 연결한 직선과 정육면체의 한 면이 이루는 각 θ 에 대해 $\cos\theta$ 를 구하라.
- **33.** 벡터공간 P_2 가 실수 계수를 갖는 2차 이하의 다항식들로 구성된 벡터공간이라 하고, 다항식 f(x), g(x)에 대한 내적은 $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ 로 정의된다고 하자.
 - (a) 다항식 1과 x가 직교함을 보여라.
 - (b) 다항식 x의 노름을 구하라.
 - (c) 다항식 x-1의 다항식 x 위로의 정사영을 구하라.
- **34.** 집합 {(a, b, c, d), (1, 0, 1, 2), (1, 1, -1, 0), (1, -2, -1, 0)}의 벡터들이 서로 직교할 때, (a, b, c, d)를 구하라.



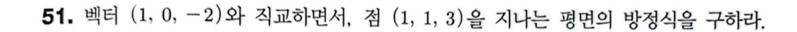
36. u = (1, 3, 2), v = (x, 1, 0), w = (0, x, 1)이 선형종속일 때의 x 값을 구하라.

37. 항구에서 배가 동쪽에서 30° 방향으로 40km를 항해한 다음, 동쪽 방향으로 30km를 항해하였다. 이 위치에서 항구까지의 거리를 구하라.

38. 진흙에 빠진 트럭을 견인 트럭 두 대가 각각 30° 방향으로 100N, 60° 방향으로 120N 의 힘으로 견인할 경우, 진흙에 빠진 트럭에 실제 작용하는 힘의 크기와 방향을 구하라.



- **45.** 네 점 O = (0, 0, 0), A = (4, 2, 1), B = (1, 3, 2), C = (2, 2, 5)에 대해, 선분 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 로 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하라.
- **46.** 네 점 O=(0, 0, 0), A=(1, 1, 1), B=(2, 1, 5), C=(-1, 1, 3)에 대해, 선분 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 로 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하라.
- 47. 다음 벡터 u, v, w에 대해, $u \cdot (v \times w)$ 를 계산하라.
 - (a) u = (2, 0, 3), v = (0, 6, 2), w = (3, 3, 0)
 - (b) u = (1, 1, 0), v = (-1, 0, 1), w = (2, 3, 4)
 - (c) u = (0, 1, 1), v = (1, 2, 3), w = (0, 0, 0)
 - (d) u = (0, 0, 0), v = (1, 2, 3), w = (2, 3, 4)



52. 벡터 (2, 3, -1)과 직교하면서, 점 (1, 1, 1)을 지나는 평면의 방정식을 구하라.

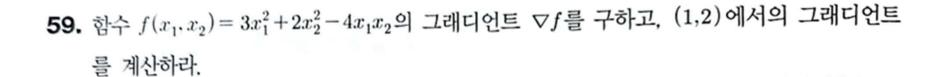
53. 평면 x+y+z=3에 직교하는 단위벡터를 구하라.

54. 점 (3, -2, 4)를 지나고 평면 2x+y-3z-4=0과 평행인 평면의 방정식을 구하라.

55. R³ 공간에서 벡터 (1, 2, 4)의 방향코사인들을 구하라.

56. 점 A, B, C에 대하여, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AC} = b$, \overrightarrow{AC} 의 중점을 D라 하자. \overrightarrow{BD} 를 3:1로 내분 하는 점을 F라고 할 때, \overrightarrow{AF} 를 a와 b로 나타내라.

57. 점 (3, 2, 5)를 지나고 법선벡터가 (1, -2, 4)인 평면과 점 (1, 0, 2) 사이의 거리를 구하라.



- **60.** 벡터함수 $F(x_1,x_2)=\left[\begin{array}{c} 3x_1^2+2x_1x_2\\ 4x_1x_2^2+x_2^2 \end{array}\right]$ 의 야코비안 행렬 J_F 를 구하고, (1,2)에서의 야코비안 행렬을 계산하라.
- **61.** 다변수함수 $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_1 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 3x_2 + 4$ 의 헤시안 행렬 H(f)를 구하고, (2,1)에서의 헤시안 행렬을 계산하라.