정의 6-13 선형종속과 선형독립

벡터공간 V의 원소인 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$과 적어도 하나는 0이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \cdots, c_n$에 대해 다음 식이 성립하면,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$은 **선형종속** linearly dependent 또는 **일차종속**이라 한다. 즉, 한 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현할 수 있으면, 이들 벡터는 선형종속이다. 한편,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

을 만족하는 스칼라가 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$뿐이라면, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$은 **선형독립** linearly independent 또는 **일차독립**이라 한다.

정리 6-2 벡터공간 $\mathbb{R}^n$에서 선형독립 조건

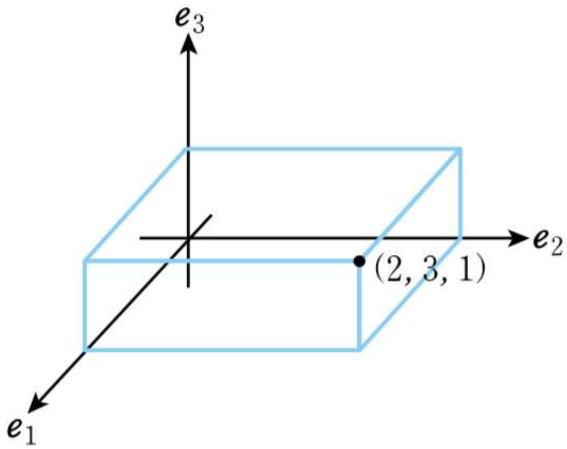
벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 원소인 n개의 벡터 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix}$에 대하여, 다음 행렬식 $\varDelta$가 0이 아닐 때, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n$은 선형독립이다.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

정의 6-18 순서기저와 좌표벡터

기저 $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$의 벡터에 순서를 부여한 기저를 **순서기저**ordered basis라 한다. 벡터 $\boldsymbol{v}$를 순서기저벡터의 선형결합인 $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$으로 표현할 때, 각 $c_1, c_2, \cdots, c_n$을 **기저 B에 대한 벡터 $\boldsymbol{v}$의 좌표**coordinate라 하고, 이들 좌표를 다음과 같이 순서에 따라 벡터의 성분으로 나열한 $[\boldsymbol{v}]_B$를 **좌표벡터**coordinate vector라고 한다.

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



정리 6-6 기저변환

증명

기저 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$을 사용하는 $\mathbb{R}^m$의 좌표계에서 $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$의 좌표벡터를 갖는 $\boldsymbol{v}$는 기저 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$을 사용하는 $\mathbb{R}^m$의 좌표계에서 다음을 만족하는 $(d_1, d_2, \cdots, d_m)$의 좌표벡터를 갖는다.

$$\boldsymbol{d} = U^{-1} V \boldsymbol{c}$$

여기에서 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, U, V는 다음과 같고, U는 가역행렬이다.

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

벡터 $\boldsymbol{v}$가 기저 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$을 사용하여 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = V\boldsymbol{c}$$

동일한 벡터 $\boldsymbol{v}$가 기저 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$을 사용하여 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$\boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{u}_m = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = U\boldsymbol{d}$$

위의 두 식이 동일한 벡터를 나타내므로 다음 관계가 성립한다.

$$V\boldsymbol{c} = U\boldsymbol{d}$$

따라서 $\boldsymbol{d} = U^{-1}V\boldsymbol{c}$이다.

❖ 벡터와 연립선형방정식

정리 6-7 행렬과 벡터 곱의 선형결합 표현

행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 을 다음 n개의 열벡터를 사용하여 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$으로 표현하자.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

이때 행렬 A와 벡터 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$의 곱 $A\boldsymbol{x}$는 다음과 같은 A의 열벡터의 선형결합과 같다.

$$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

❖ 벡터의 크기

정의 6-19 노름

벡터의 크기를 계산하는 함수를 벡터의 **노름**norm이라고 한다. 벡터 $\boldsymbol{u}$의 노름은 $\|\boldsymbol{u}\|$로 표현하며, 노름은 다음 성질을 만족한다. 여기서 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 벡터이고, α는 스칼라이다.

(1) $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$

(2) $\|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$

(3) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

(4) $\|\boldsymbol{u}\| = 0$인 경우는 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$일 때뿐이다.

❖ 벡터의 내적

정의 6-22 내적

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$과 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$의 **내적**inner product, dot product은 다음과 같은 스칼라로 정의되며, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 또는 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$로 나타낸다. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$는 '$\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 내적' 또는 '$\boldsymbol{u}$ dot $\boldsymbol{v}$'라고 읽는다.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

정리 6-10 내적의 성질

증명

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 벡터 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$와 스칼라 c에 대해 다음 성질이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ (교환법칙)

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$ (분배법칙)

(3) $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}$ (분배법칙)

(4) $c(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (c\boldsymbol{y})$

(5) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$

(6) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$일 때만 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$이다.

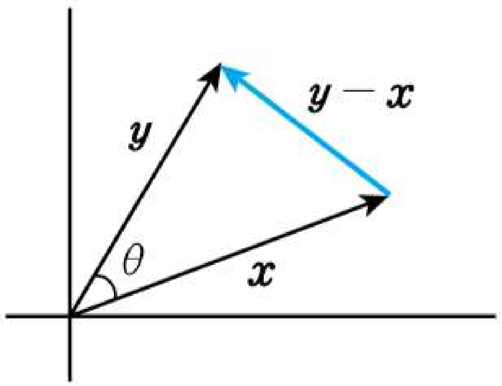
정리 6-11 벡터의 내적과 사잇각

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 두 벡터 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$의 내적은 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

여기서 $\|\boldsymbol{x}\|$는 벡터 $\boldsymbol{x}$의 길이를 나타내는 노름이고, θ는 두 벡터 사이의 각이다.

제2코사인법칙



$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta &= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{x}\|^2)) \\
&= \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

정리 6-12 코시-슈바르츠 부등식 Cauchy-Schwarz inequality

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 임의의 두 벡터 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$에 대해서 다음 성질이 성립한다.

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

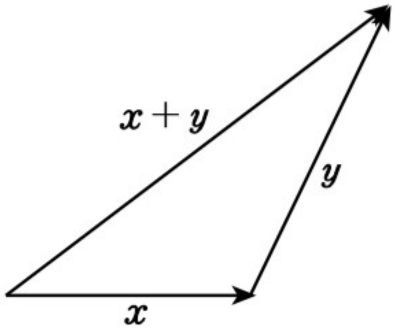
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| &= |\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta| \\ &= \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\||\cos\theta| \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \cdot 1 = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

정리 6-13 벡터의 삼각부등식 triangle inequality

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 임의의 두 벡터 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$에 대해서 다음 성질이 성립한다.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$



$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

$$2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \leq 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

정의 6-23 벡터의 직교

벡터 x와 y가 $x \cdot y = 0$을 만족하면, 벡터 x와 y는 **직교**orthogonal한다고 하고, 이를 $x \perp y$로 표기한다.

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

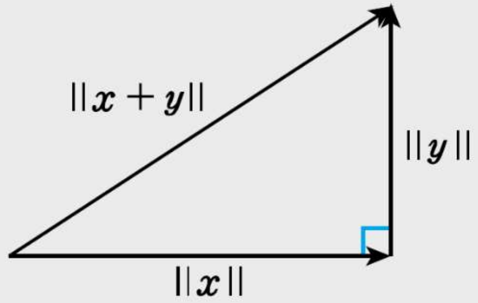
$$x \cdot y = \|x\|\|y\|\cos\theta = 0$$

$$x \cdot y = (2)(-2) + (4)(1) = 0$$

정리 6-14 피타고라스 정리 Pythagorean theorem

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 임의의 두 벡터 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$가 직교한다면 다음 관계가 성립한다.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

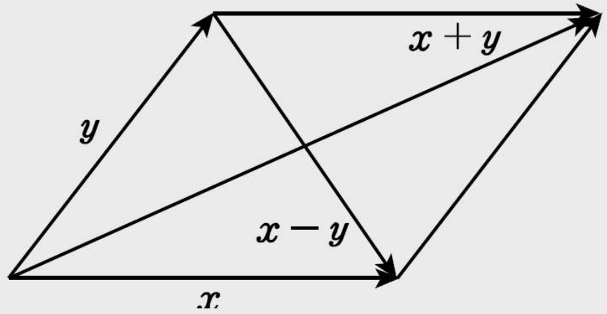


$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2+2\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

정리 6-15 평행사변형 등식 parallelogram equality



$\mathbb{R}^n$ 공간에서 두 벡터 x와 y에 대해 다음 성질이 성립한다.

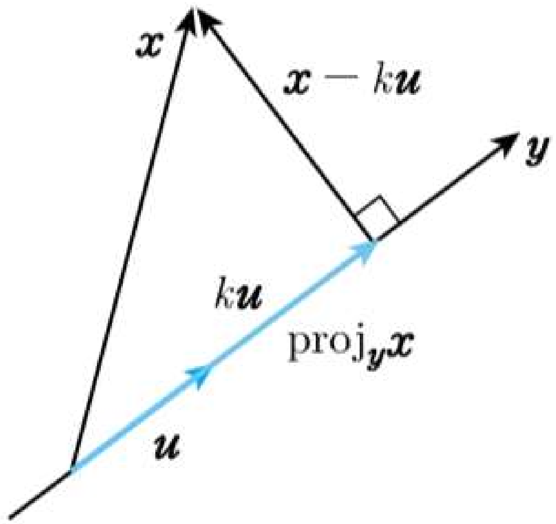
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

평행사변형에서 $x+y$ 와 $x-y$는 각각 대각선에 해당하므로, 위 등식은 평행사변의 대각선 길이 제곱의 합은 각 변의 길이 제곱의 합의 2배와 같다는 의미이다.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y)+(x-y)\cdot(x-y) \\
&= x\cdot x+2x\cdot y+y\cdot y+x\cdot x-2x\cdot y+y\cdot y \\
&= 2x\cdot x+2y\cdot y \\
&= 2(\|x\|^2+\|y\|^2)
\end{aligned}$$

정의 6-24 정사영

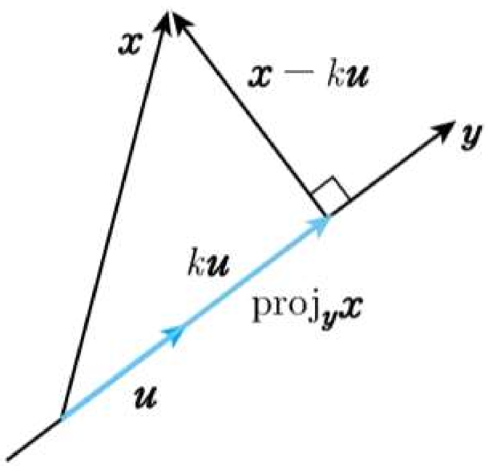
벡터 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$에 대하여, 벡터 $\boldsymbol{x}$의 $\boldsymbol{y}$ 방향의 성분을 $\boldsymbol{x}$의 $\boldsymbol{y}$ 위로의 **정사영** orthogonal projection이라 하고 $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$로 나타낸다.



정리 6-16 벡터의 정사영

벡터 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$에 대하여, $\boldsymbol{x}$의 $\boldsymbol{y}$ 위로의 정사영 $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$는 다음과 같다.

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}$$



$$(\boldsymbol{x} - k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - k\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$$

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$$

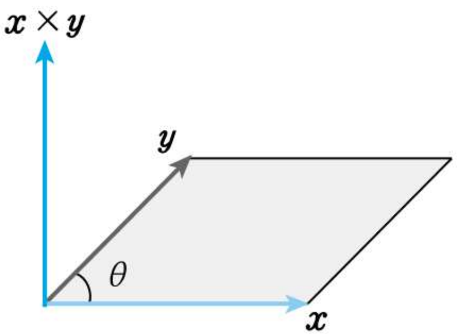
$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} &= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} \\ &= \left(\boldsymbol{x} \cdot \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}\right)\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} \qquad (\because \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1) \\ &= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{y} \\ &= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

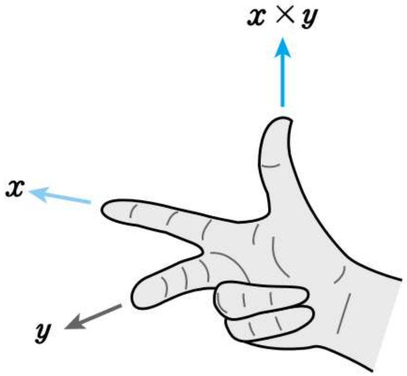
❖ 벡터의 외적

정의 6-27 외적

$\mathbb{R}^3$ 공간의 벡터 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$와 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$의 **외적**cross product,vector product $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$는 다음과 같이 정의된다. $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$는 '$\boldsymbol{x}$ cross $\boldsymbol{y}$'라고 읽는다.

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$





$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)\end{aligned}$$

정리 6-17 $\mathbb{R}^3$ **공간 벡터의 표준기저에 대한 외적의 성질**

증명

$\mathbb{R}^3$ 공간의 표준기저 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$의 외적에 대하여, 다음 성질이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0$

(2) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

(3) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$

(1) $$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

(2) $$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$$

정리 6-18 $\mathbb{R}^3$ **공간 벡터의 외적의 성질**

$\mathbb{R}^3$ 공간의 벡터 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$와 스칼라 c에 대해서 다음 성질이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$

(2) $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z})$

(3) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$

(4) $c(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times (c\boldsymbol{y})$

(5) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(6) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(3)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} &= ((x_2 + y_2)z_3 - (x_3 + y_3)z_2,\ (x_3 + y_3)z_1 - (x_1 + y_1)z_3,\\ &\qquad (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1)\\ &= (x_2z_3 - x_3z_2 + y_2z_3 - y_3z_2,\ x_3z_1 - x_1z_3 + y_3z_1 - y_1z_3,\\ &\qquad x_1z_2 - x_2z_1 + y_1z_2 - y_2z_1)\\ &= (x_2z_3 - x_3z_2,\ x_3z_1 - x_1z_3,\ x_1z_2 - x_2z_1) +\\ &\qquad (y_2z_3 - y_3z_2,\ y_3z_1 - y_1z_3,\ y_1z_2 - y_2z_1)\\ &= (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})\end{aligned}$$

(4)
$$c(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = (cx_2y_3 - cx_3y_2,\ cx_3y_1 - cx_1y_3,\ cx_1y_2 - cx_2y_1)$$
$$(c\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = (cx_2y_3 - cx_3y_2,\ cx_3y_1 - cx_1y_3,\ cx_1y_2 - cx_2y_1)$$
$$\boldsymbol{x} \times (c\boldsymbol{y}) = (cx_2y_3 - cx_3y_2,\ cx_3y_1 - cx_1y_3,\ cx_1y_2 - cx_2y_1)$$

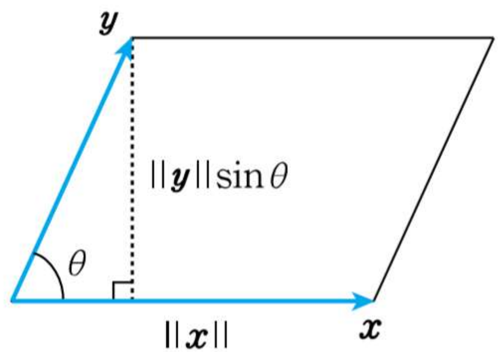
정리 6-19 $\mathbb{R}^3$ **공간에 있는 벡터 외적의 노름과 평행사변형의 넓이**

$\mathbb{R}^3$ 공간에서 벡터 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$의 외적의 노름 $\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|$는 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$가 만드는 평행사변형의 넓이이다.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2 &= (x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\ &= x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_2x_3y_2y_3-2x_1x_3y_1y_3\\ &\quad -2x_1x_2y_1y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\ &= x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_2x_3y_2y_3\\ &\quad -2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_2y_1y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\cos^2\theta\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$



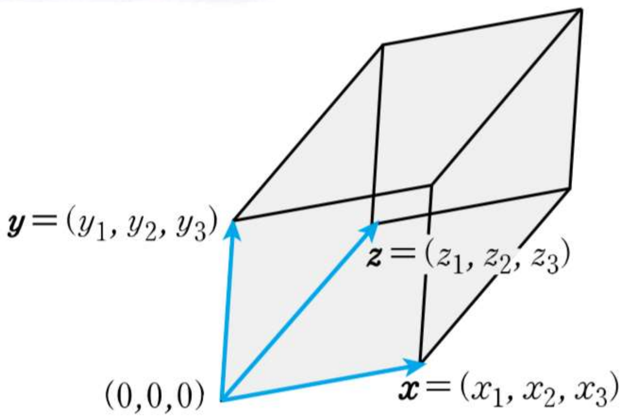
정리 6-20 $\mathbb{R}^3$ **공간에서의 스칼라 삼중적의 절댓값과 평행육면체의 부피**

$\mathbb{R}^3$ 공간의 벡터 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)$에 대한 스칼라 삼중적의 절댓값 $|\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})|$는 이들 벡터가 만드는 평행육면체의 부피이다.

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

[정리 6-19]에 따르면 $\|\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}\|$는 $\boldsymbol{y}$와 $\boldsymbol{z}$를 양변으로 하는 평행사변형의 넓이이고, $\boldsymbol{x} \cdot \dfrac{\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}\|}$는 $\boldsymbol{y}$와 $\boldsymbol{z}$를 포함한 평면에 수직인 방향의 단위벡터로 $\boldsymbol{x}$를 정사영한 것으로, 평행육면체의 높이에 해당한다. 따라서 아래 그림과 같이 평행육면체의 세 변이 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$에 대응될 때, $|\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})|$는 평행육면체의 부피가 된다. 그러므로 스칼라 삼중적의 절댓값은 이들 벡터로 만들어지는 평행육면체의 부피와 같다.



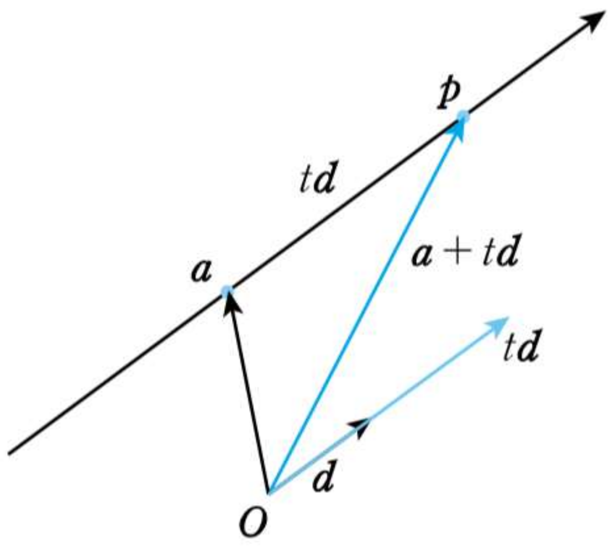
❖ 직선의 벡터 표현

정리 6-21 $\mathbb{R}^n$ **공간의 직선**

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 점 $\boldsymbol{a}$를 지나고 벡터 $\boldsymbol{d}$에 평행인 직선의 점 $\boldsymbol{p}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{d}$$

여기서 t는 실수이고, $\boldsymbol{d}$는 직선의 **방향벡터**direction vector라고 한다.



$\mathbb{R}^3$ 공간에서 점 (x_1, y_1, z_1)을 지나고, 벡터 $\boldsymbol{d} = (l, m, n)$에 평행인 직선의 점 (x, y, z)는 [정리 6-21]에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(l, m, n)$$

위 식을 각 성분별로 나타내면 다음과 같다.

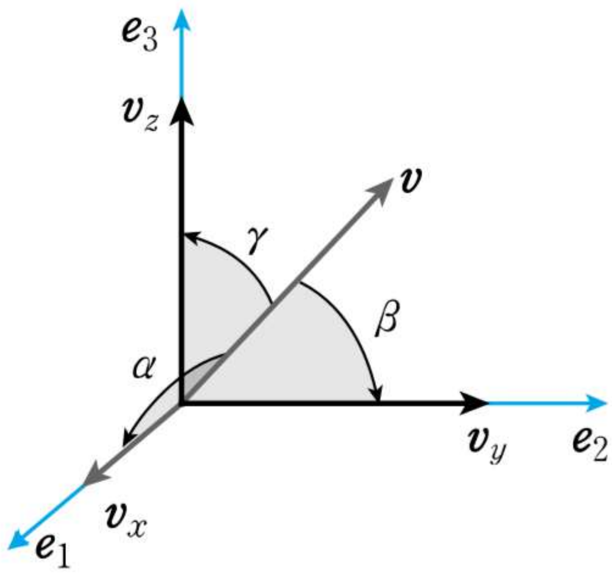
$$x = x_1 + tl, \quad y = y_1 + tm, \quad z = z_1 + tn$$

따라서 위 식을 t에 대해서 정리하면 다음과 같은 관계식이 성립한다. 이를 (x_1, y_1, z_1)을 지나고, 벡터 $\boldsymbol{d} = (l, m, n)$에 평행인 **직선의 방정식**이라 한다.

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

정의 6-29 $\mathbb{R}^3$ 공간에서 벡터의 방향각

$\mathbb{R}^3$ 공간에서 벡터 $\boldsymbol{v}$가 표준기저벡터와 이루는 각을 **방향각**directional angle이라고 한다.



$$\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{e}_1\|} = \frac{v_x}{\|\boldsymbol{v}\|},\quad \alpha = \cos^{-1}\frac{v_x}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{e}_2\|} = \frac{v_y}{\|\boldsymbol{v}\|},\quad \beta = \cos^{-1}\frac{v_y}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{e}_3\|} = \frac{v_z}{\|\boldsymbol{v}\|},\quad \gamma = \cos^{-1}\frac{v_z}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

❖ 평면의 벡터 표현

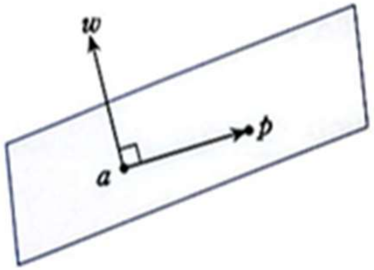
정리 6-24 $\mathbb{R}^n$ **공간의 평면**

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 점 $\boldsymbol{a}$를 포함하면서 벡터 $\boldsymbol{w}$와 직교하는 평면상의 점 $\boldsymbol{p}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = 0$$

평면과 직교하는 벡터 $\boldsymbol{w}$를 **법선벡터**normal vector라고 한다.

아래 그림은 평면상의 점 $\boldsymbol{a}$와 점 $\boldsymbol{p}$를 지나는 벡터 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}$와, 평면에 수직인 벡터 $\boldsymbol{w}$가 직교하는 것을 나타낸다.



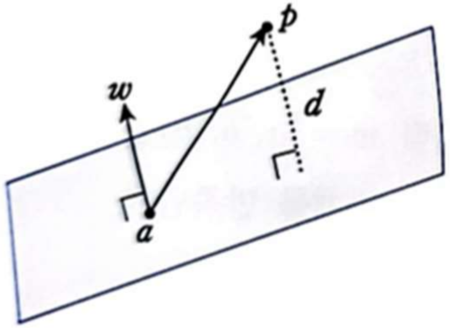
벡터 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}$와 벡터 $\boldsymbol{w}$가 직교하므로, 평면상의 점 $\boldsymbol{p}$에 대해 $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) = 0$이 성립한다. 즉, 점 $\boldsymbol{a}$를 포함하면서 벡터 $\boldsymbol{w}$와 직교하는 평면의 방정식은 $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) = 0$이다.

정리 6-25 $\mathbb{R}^n$ **공간에서의 평면과 점 사이의 거리**

$\mathbb{R}^n$ 공간에서 점 a를 포함하면서 벡터 w와 직교하는 평면과 점 p 사이의 거리 d는 다음과 같이 표현된다.

$$d = \frac{|(p-a)\cdot w|}{\|w\|}$$

아래 그림과 같이 벡터 $p-a$의 벡터 w 위로의 정사영의 길이가 평면과 점 p 사이의 거리이다.



[정리 6-16]에 따라 벡터 $p-a$의 벡터 w 위로의 정사영 d를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{d} = \frac{(p-a)\cdot w}{w\cdot w}w$$

평면과 점 사이의 거리 d는 정사영 $\mathbf{d}$의 길이, 즉 노름과 같다.

$$d = \|\mathbf{d}\| = \frac{|(p-a)\cdot w|}{w\cdot w}\|w\| = \frac{|(p-a)\cdot w|}{\|w\|^2}\|w\|$$
$$= \frac{|(p-a)\cdot w|}{\|w\|}$$

$\mathbb{R}^3$ 공간에서 점 $a=(x_1,\ x_2,\ x_3)$를 포함하면서 법선벡터 $w=(a,\ b,\ c)$를 갖는 평면과 점 $p=(x,\ y,\ z)$ 사이의 거리는 [정리 6-25]에 의해 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$d = \frac{|(p-a)\cdot w|}{\|w\|} = \frac{|(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(a,\ b,\ c)|}{\|(a,\ b,\ c)\|}$$
$$= \frac{|ax+by+cz-ax_1-by_1-cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$