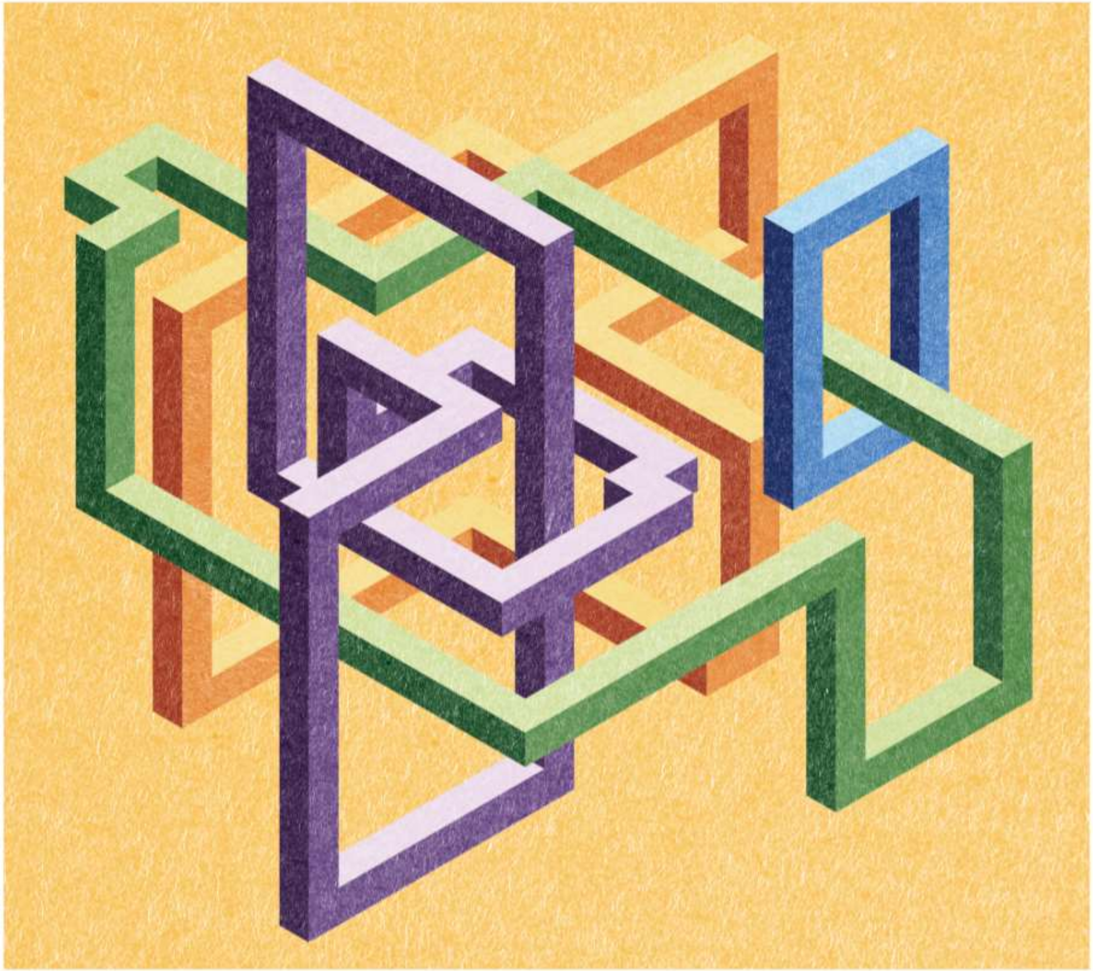


응용이 보이는 선형대수학

파이썬과 함께하는 선형대수학 이론과 응용

이양민
동아대학교, AI공학과(컴퓨터AI 공학부)
2024.07

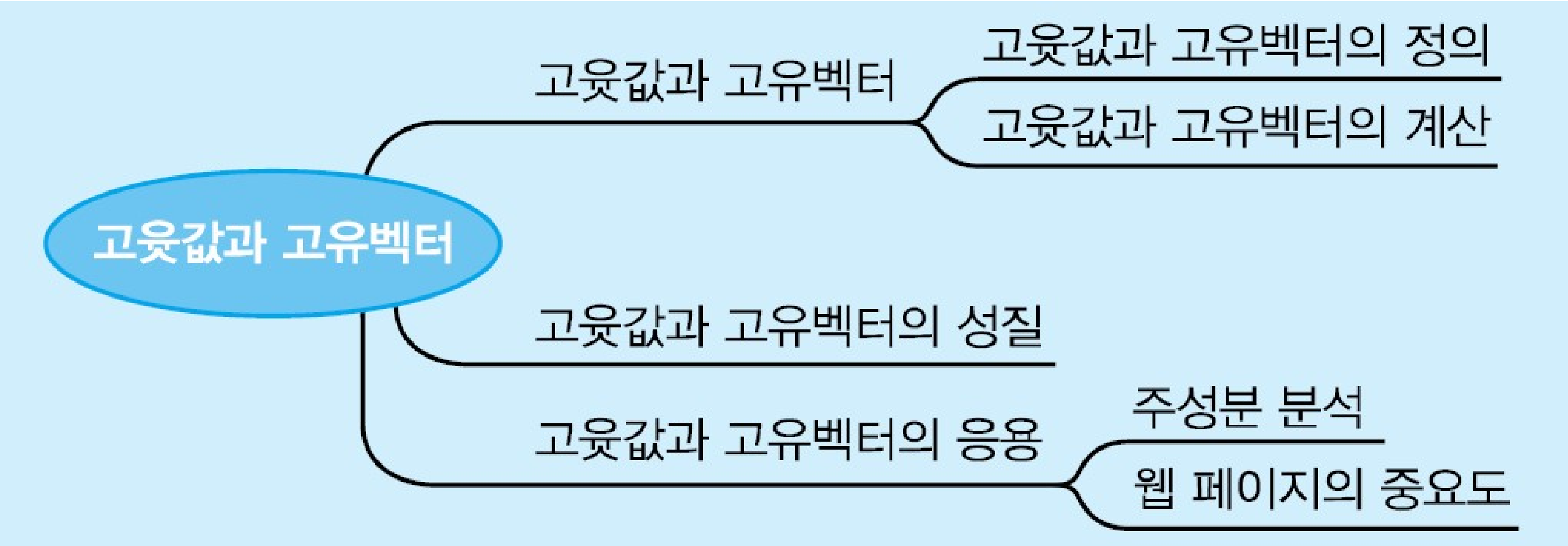
Chapter 08

고윳값과 고유벡터

Contents

미리보기

이 장에서 배우는 내용은?



❖ 고윳값과 고유벡터의 정의

정의 8-1　고윳값과 고유벡터

n차 정방행렬 A를 통해 영벡터가 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$를 선형변환할 때, $\boldsymbol{x}$의 상 image이 $\lambda\boldsymbol{x}$이면 λ를 A의 **고윳값** eigenvalue이라 하고, $\boldsymbol{x}$를 λ에 대한 **고유벡터** eigenvector라 한다. 즉 다음 관계를 만족하는 λ와 $\boldsymbol{x}$를 각각 고윳값과 고유벡터라고 한다.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\text{단, } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$$

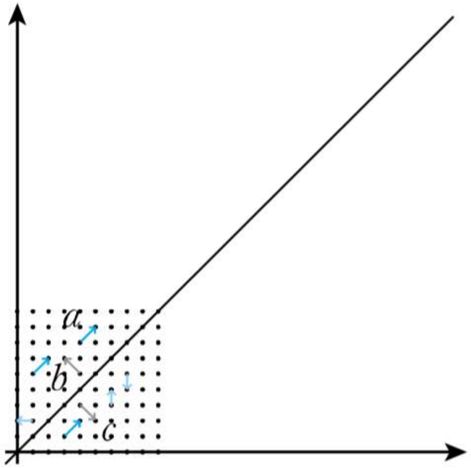
❖ 고윳값과 고유벡터의 정의

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

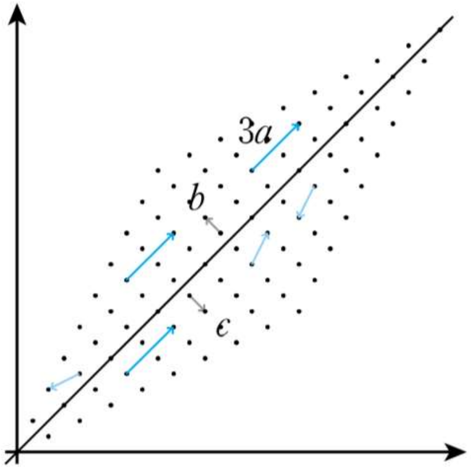
$$Aa = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3a$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c$$

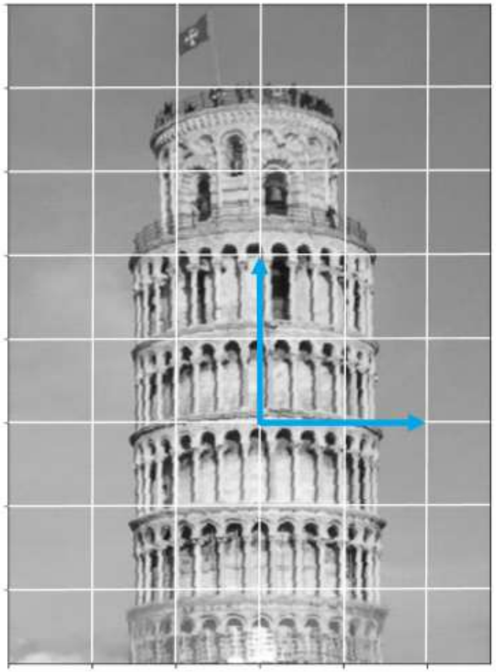


(a) 변환 전의 벡터

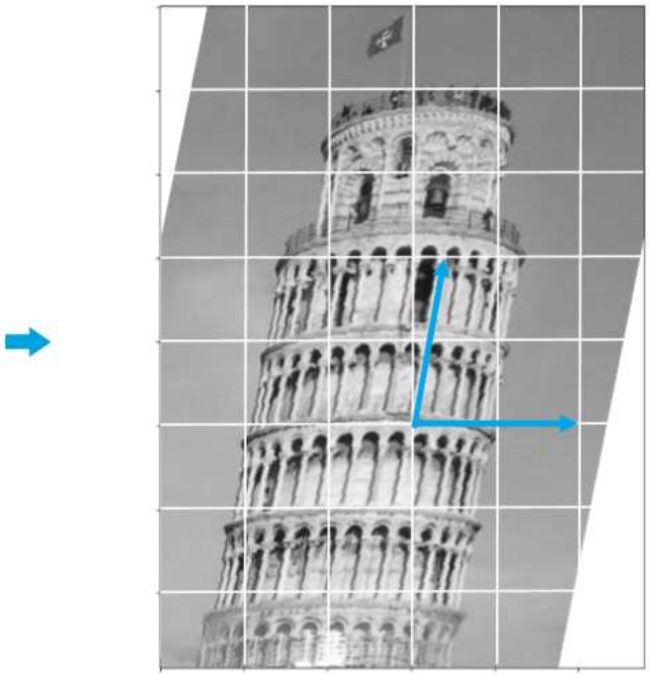


(b) 변환 후의 벡터

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) 원본 그림



(b) 변환 후의 그림

예제 8-1 고유벡터 여부의 판정

다음 행렬 A에 대해 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$가 각각 고유벡터인지 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tip

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$를 만족하는 λ가 있는지 확인한다.

$$A\boldsymbol{x} = 7\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad 7\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad (7I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$7I - A = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(R_1 \leftarrow \frac{1}{6}R_1\right)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(R_2 \leftarrow 5R_1 + R_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

❖ 고윳값과 고유벡터의 계산

정의 8-2 행렬의 특성방정식과 특성다항식

n차 정방행렬 A에 대하여, $\det(\lambda I - A) = 0$을 A의 **특성방정식**characteristic equation이라 한다. 여기서 $\det(\lambda I - A)$를 **특성다항식**characteristic polynomial이라 한다.

예제 8-2 **특성방정식과 특성다항식**

다음 행렬 A의 특성방정식과 특성다항식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Tip

$\det(\lambda I - A) = 0$을 계산한다.

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 2$$

특성방정식 : $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$

특성다항식 : $\lambda^2 - 5\lambda + 2$

정리 8-1 행렬의 고윳값과 고유벡터 계산

n차 정방행렬 A에 대해, 특성방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$을 만족하는 λ가 A의 고윳값이고, $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 만족하는 영벡터가 아닌 해 $\boldsymbol{x}$가 λ에 대한 고유벡터이다.

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad &\Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow \quad (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

예제 8-3 고윳값과 고유벡터

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Tip
$Ax = \lambda x$를 만족하는 λ를 찾고, 결정된 λ에 대해 $Ax = \lambda x$를 만족하는 해 x를 찾는다.

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda+6) - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda-3)(\lambda+7) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = 3,\ -7$$

① $\lambda_1 = 3$일 때, $(3I - A)x = 0$

$$3I - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_2 \leftarrow 3R_1 + R_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② $\lambda_2 = -7$일 때, $(-7I - A)x = 0$

$$-7I - A = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} -9 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_1 + R_2\right)} \left[\begin{array}{cc|c} -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

정리 8-2 고윳값에 대한 고유벡터

증명

n차 정방행렬 A와 특정 고윳값 λ에 대해 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$를 만족하는 고유벡터 $\boldsymbol{a}$가 있다면, $\boldsymbol{a}$에 0이 아닌 c를 스칼라배한 $c\boldsymbol{a}$도 고유벡터이다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$일 때의 고유벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -7$일 때의 고유벡터 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 8-4 **서로 다른 고윳값을 갖는 행렬**

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tip

특성방정식의 해인 고윳값을 찾고, 각 고윳값에 대한 고유벡터를 찾는다.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & -5 \\ 1 & \lambda-4 & 5 \\ 3 & -3 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)(\lambda-4)(\lambda+4) + 3(5)(3) + (-5)(1)(-3)$$

$$-(-5)(\lambda-4)(3) - (\lambda-6)(5)(-3) - (3)(1)(\lambda+4)$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

→ **고윳값 : 1, 2, 3**

① $\lambda_1 = 1$일 때, $(1I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$1I - A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0,\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = 2$일 때, $(2I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$2I - A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - 3x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $\lambda_3 = 3$일 때, $(3I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$3I - A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_2 = 0,\ x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

예제 8-5 중복된 고윳값을 갖는 행렬

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

Tip
특성방정식이 중근을 갖는 경우, 중근인 고윳값에 대한 고유벡터가 생성하는 공간의 기저벡터를 고유벡터로 선택한다.

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 3 & -1\\-1 & \lambda+2 & -1\\-1 & 3 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-1)^2$$

➡ **고윳값 :** $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

① $\lambda_1=0$일 때, $(0I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$$0I-A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & 3 & -2\end{bmatrix}\qquad\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1 & 0\\-1 & 3 & -2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$x_1-x_3=0,\ x_2-x_3=0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$일 때, $(1I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$1I - A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} & x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ & x_2 = s, \quad x_3 = t \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 를 기저로 하는 공간에서 고유벡터 선택 가능

➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

정의 8-3 고유공간

n차 정방행렬 A의 특정 고윳값 λ에 대한 고유벡터가 생성하는 공간을 **고유공간** eigenspace 이라 한다. 이 공간은 영벡터를 포함한다.

예제 8-6 고유공간

다음 행렬 A의 고윳값 $\lambda=2$에 대한 고유공간을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$$

Tip

고윳값에 대한 고유공간의 기저를 구한다.

고윳값 2에 대한 A의 고유벡터

$$2I-A=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-6\\-2&1&-6\\-2&1&-6\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&-6&0\\-2&1&-6&0\\-2&1&-6&0\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&6&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$2x_1-x_2+6x_3=0 \qquad x_2=s,\ x_3=t$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5s-3t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

고윳값 $\lambda=2$에 대한 고유공간 $\quad span\left\{\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

예제 8-7 복소수 고윳값을 갖는 행렬

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip
고윳값 λ가 복소수인 경우에도 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$의 해로부터 고유벡터를 구한다.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

$\det(\lambda I - A) = 0$의 해 ➡ $\lambda_1 = 1 + 2i \quad \lambda_2 = 1 - 2i$

① $\lambda_1 = 1 + 2i$일 때, $(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2i & -2 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ ➡ 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = 1 - 2i$일 때, $(\lambda_2 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ ➡ 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

정리 8-3 고윳값의 개수

n차 정방행렬은 n개의 고윳값을 갖는다.

- n차 정방행렬 A에 대한 특성방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$은 n차 다항식
- n차 다항식은 복소수 범위에서 n개의 근을 가짐
- 동일한 고윳값이 나타나는 횟수인 중복도(multiplicity)와 복소수 근까지 고려하면, n개의 고윳값 존재

정리 8-4 삼각행렬의 고윳값

삼각행렬의 고윳값은 주대각 성분이다.

증명

예제 8-8 고윳값 계산

다음 행렬 A와 B의 고윳값을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tip

[정리 8–4]를 이용한다.

$\boldsymbol{A}$**의 고윳값** : $2, 0, -3$

$\boldsymbol{B}$**의 고윳값** : $4, 2, 5$

정리 8-5 고유벡터의 선형독립

증명

n차 정방행렬 A의 서로 다른 r개의 고윳값 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$에 대한 고유벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$은 선형독립이다.

예제 8-9 고유벡터의 선형독립

다음 행렬 A의 고유벡터가 선형독립임을 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Tip
행렬 A의 고유벡터를 구하고
$c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_p \boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}$를
만족하는 c_i가 모두 0인지 확인한다.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - 22\lambda + 16 = (\lambda+8)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -8, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$$

① $\lambda_1 = -8$일 때, $(-8I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 - 0.25x_3 = 0, \ x_2 - 0.25x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25x_3 \\ 0.25x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② $\lambda_2 = 1$일 때, $(1I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 + 2x_3 = 0,\ \ x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ $\lambda_3 = 2$일 때, $(2I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 + x_2 = 0,\ \ x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_1 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.25 & -2 & -1 & 0 \\ 0.25 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

세 고유벡터는 선형독립이다

정리 8-6 행렬 거듭제곱의 고윳값

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$인 고유벡터 $\boldsymbol{x}$와 고윳값 λ, 임의의 양수 n에 대해 A^n의 고윳값은 λ^n이다. 따라서 $A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}$가 성립한다.

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$$

$$A^3\boldsymbol{x} = A^2(A\boldsymbol{x}) = A^2(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A^2\boldsymbol{x} = \lambda^3\boldsymbol{x}$$

$A^{n-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{n-1}\boldsymbol{x}$라면,

$$A^n\boldsymbol{x} = A^{n-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{n-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A^{n-1}\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}$$

따라서 임의의 n에 대해서 $A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}$

예제 8-10 행렬 거듭제곱의 고윳값 계산

다음 행렬 A에 대해서 A^7의 고윳값을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tip

행렬 A의 고윳값을 구하고, [정리 8-6]을 이용한다.

정리 8-7 역행렬의 고윳값

n차 정방행렬 A가 가역일 때, λ가 A의 고윳값이면 $\dfrac{1}{\lambda}$은 역행렬 A^{-1}의 고윳값이다.

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x \quad &\Rightarrow \quad x = \lambda A^{-1} x \\ &\Rightarrow \quad A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x \end{aligned}$$

예제 8-11 역행렬의 고윳값

다음 행렬 A의 역행렬 A^{-1}의 고윳값을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Tip

행렬 A의 고윳값을 구하고, [정리 8-7]을 이용한다.

A의 고윳값은 $1,\ 2,\ 3$

A^{-1}의 고윳값은 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

정리 8-8 정방행렬의 고윳값을 이용한 행렬식과 대각합 계산

증명

n차 정방행렬 A에 대하여, 행렬식 $\det(A)$는 A의 고윳값 λ_i의 곱이고, 대각합 $tr(A)$는 A의 고윳값 λ_i의 합이다.

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

예제 8-12 고윳값을 이용한 행렬식 계산

다음 행렬 A의 고윳값과 행렬식을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Tip

[정리 8-8]을 이용한다.

고윳값은 주대각 성분인 4, 2, 6

$$\det(A)= 4\times 2\times 6=48$$

예제 8-13 특성다항식을 이용한 대각합과 행렬식 계산

다음 특성다항식을 갖는 행렬의 대각합과 행렬식을 구하라.

$$p(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-12\lambda+26$$

Tip

주어진 특성다항식의 최고차항 차수가 3이므로, 3×3 행렬에 대한 특성다항식이다.

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\\&=\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda-\lambda_1\lambda_1\lambda_3\end{aligned}$$

대각합은 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$

행렬식은 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-26$

정리 8-9 행렬과 단위행렬 합의 고윳값

증명

n차 정방행렬 A와 $n \times n$ 단위행렬 I_n에 대하여, $A + cI_n$의 고윳값은 A의 고윳값 λ와 c의 합, 즉 $\lambda + c$이다.

예제 8-14 행렬과 단위행렬 합의 고윳값 계산

다음 행렬 $A+3I_3$의 고윳값을 구하라.

$$A+3I_3=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Tip
행렬 A의 고윳값을 구하고, [정리 8-9]를 이용한다.

A의 고윳값은 1, 2, 3

$A+3I_3$의 고윳값은 4, 5, 6

정리 8-10 전치행렬의 고윳값

증명

행렬 A와 전치행렬 $A^{\top}$의 고윳값은 동일하다.

예제 8-15 **전치행렬의 고윳값과 고유벡터**

다음 행렬 A와 $A^{\top}$의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tip

A, $A^{\top}$의 고윳값과 고유벡터를 각각 구한다.

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-6)(\lambda-3)+2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = (\lambda-4)(\lambda-5)$$

A의 고윳값은 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$

$\lambda_1 = 4$에 대한 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$에 대한 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A^{\top}) = (\lambda-6)(\lambda-3)+2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = (\lambda-4)(\lambda-5)$$

$A^{\top}$의 고윳값은 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$

$\lambda_1 = 4$에 대한 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$에 대한 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

정리 8-11 케일리-해밀턴 정리 Cayley-Hamilton theorem

다음 식을 n차 정방행렬 A의 특성방정식이라 하자.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_n = 0$$

이때 다음 행렬방정식은 항상 성립한다.

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_nI = \mathbf{0}$$

예제 8-16 케일리-해밀턴 정리를 이용한 역행렬 계산

케일리-해밀턴 정리를 이용하여 다음 행렬 A의 역행렬을 구하라.

> **Tip**
> [정리 8-11]의 케일리-해밀턴 정리를 이용한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 8\lambda + 41 = 0$$

$$p(A) = A^3 - 6A^2 - 8A + 41I = 0$$

$$41I = -A^3 + 6A^2 + 8A = A(-A^2 + 6A + 8I)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{41}A(-A^2+6A+8I) = A\left\{\frac{1}{41}(-A^2+6A+8I)\right\} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{41}(-A^2+6A+8I)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -A^2+6A+8I = -\begin{bmatrix} 20 & 3 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 27 & 7 & -18 \\ 10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 27 & 7 & -18 \\ 10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

예제 8-17 케일리-해밀턴 정리를 이용한 행렬 연산의 단순화

다음 행렬 A에 대해, A^8-4A^2+4I를 계산하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Tip

A의 고윳값을 이용하여 특성방정식을 구하고, 이에 케일리-해밀턴 정리를 적용하여 행렬방정식을 얻는다.

정리 8-12 행렬다항식의 고윳값

λ가 n차 정방행렬 A의 고윳값일 때, 다음과 같은 행렬다항식 $q(A)$가 있다고 하자.

$$q(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

이때 $q(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$는 $q(A)$의 고윳값이다.

$$\begin{aligned}
q(A)\boldsymbol{x} &= \left(a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I\right)\boldsymbol{x} \\
&= \left(a_m A^m\right)\boldsymbol{x} + \left(a_{m-1}A^{m-1}\right)\boldsymbol{x} + \cdots + \left(a_1 A\right)\boldsymbol{x} + \left(a_0 I\right)\boldsymbol{x} \\
&= a_m\left(A^m\boldsymbol{x}\right) + a_{m-1}\left(A^{m-1}\boldsymbol{x}\right) + \cdots + a_1\left(A\boldsymbol{x}\right) + a_0\left(I\boldsymbol{x}\right) \\
&= a_m\left(\lambda^m\boldsymbol{x}\right) + a_{m-1}\left(\lambda^{m-1}\boldsymbol{x}\right) + \cdots + a_1\left(\lambda\boldsymbol{x}\right) + a_0\left(I\boldsymbol{x}\right) \\
&= \left(a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)\boldsymbol{x} \\
&= q(\lambda)\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

$$q(A)\boldsymbol{x} = q(\lambda)\boldsymbol{x}$$

$q(\lambda)$는 행렬다항식 $q(A)$의 고윳값

예제 8-18 행렬다항식의 고윳값 계산

다음 행렬 A에 대해, $3A^2+4A$의 고윳값을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip
[정리 8–12]를 이용한다.

❖ 주성분 분석

- **차원 축소**(dimensionality reduction)
  - 가능하면 많은 정보를 유지하면서 고차원의 데이터를 저차원의 데이터로 변환하는 것

- **주성분 분석**(Principal Component Analysis, PCA)
  - 차원 축소에 사용하는 대표적인 방법

정의 8-4 평균벡터와 공분산 행렬

n차원의 데이터 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$에 대해 **평균벡터**mean vector $\boldsymbol{m}$과 **공분산 행렬**covariance matrix C는 다음과 같이 정의된다. 여기서 $\boldsymbol{m}$은 n차원 벡터, C는 $n \times n$ 행렬이다.

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}_i \qquad C = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})^\top$$

예제 8-19 평균벡터와 공분산 행렬 계산

다음 4개의 데이터에 대한 평균벡터와 공분산 행렬을 구하라.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Tip

[정의 8-4]를 이용한다.

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}_i = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})^\top \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 6.25 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.75 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

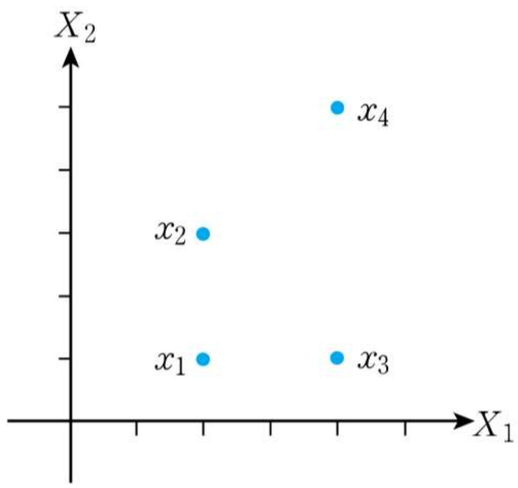
- **평균벡터가 영벡터가 되도록 데이터 변환**

$$x_i \leftarrow x_i - m$$

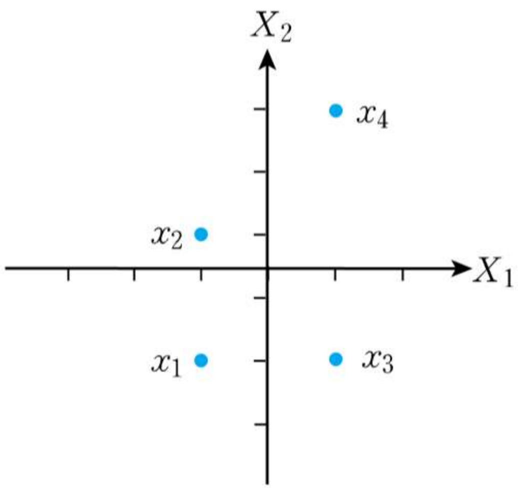
변환된 데이터 : $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$ $x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

변환된 데이터의 평균벡터 : $\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

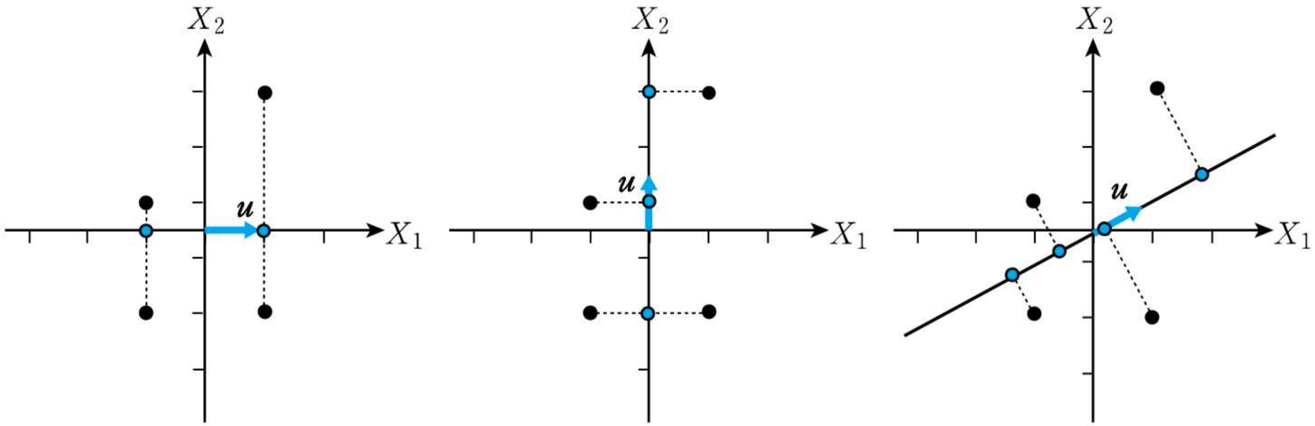


(a) 기존 데이터



(b) 변환된 데이터

- **2차원 데이터의 1차원 데이터로의 차원 축소**



(a) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$에 사영 (b) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$에 사영 (c) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$에 사영

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m\}$을 새로운 기저 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ 의 좌표계로 선형변환

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i$$

$u_j(i = 1, 2, \cdots, n)$는 직교하는 단위벡터

$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_i$는 $\boldsymbol{x}$를 $\boldsymbol{u}_i$ 방향으로 정사영한 벡터의 크기에 해당

처음 K개의 기저벡터만을 사용하여 $\boldsymbol{x}$를 $\hat{\boldsymbol{x}}$으로 근사

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{K}(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i$$

- **정보손실 J**
  - K차원으로 근사하여 나타낼 때 발생하는 오차

$$J = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\| \boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{x}}_i \right\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\| \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j - \sum_{j=1}^{K}(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \right\|^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\| \sum_{j=K+1}^{n}(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \right\|^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=K+1}^{n}(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)^2 \qquad (\because \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j\text{는 스칼라, } \boldsymbol{u}_j\text{는 단위벡터})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=K+1}^{n}(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)^\top(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=K+1}^{n}\boldsymbol{u}_j^\top \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j$$

$$= \sum_{j=K+1}^{n}\boldsymbol{u}_j^\top\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top\right)\boldsymbol{u}_j$$

$$= \sum_{j=K+1}^{n}\boldsymbol{u}_j^\top C \boldsymbol{u}_j \qquad (\because \text{평균벡터가 영벡터이므로, } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top = C)$$

- **정보손실 J의 축소 방법**

$$J = \sum_{j=K+1}^{n} \boldsymbol{u}_j^\top C \boldsymbol{u}_j$$

$$\boldsymbol{u}_j^\top C \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j^\top \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \right) \boldsymbol{u}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_j^\top \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j)^\top (\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{u}_j) = \sigma_j^2$$

정보 손실 J를 줄이려면 분산이 작은 $(n-K)$개의 기저벡터에 해당하는 차원을 제거

- **주성분 분석**

분산을 가장 크게 하는 기저벡터 $\boldsymbol{u}$를 찾는 문제

$\boldsymbol{u}^\top C\boldsymbol{u}$를 최대화하는 $\boldsymbol{u}$를 찾으라.
(제한 조건 : $\|\boldsymbol{u}\|^2 = 1$)

$$\tilde{J} = \boldsymbol{u}^\top C\boldsymbol{u} - \lambda(\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{u} - 1)$$

$$C\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{u} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u}^\top C\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{u} = \lambda = \sigma^2$$

데이터의 공분산 행렬 C로부터 고윳값이 큰 순서대로 K의 고유벡터 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_K\}$를 선택

선택된 축 ⟶ **주성분 축** principal axis 또는 **주성분 벡터** principal vector

예제 8-20 주성분 분석

다음 4개의 데이터를 주성분 분석을 사용하여 1차원 데이터로 차원 축소하여 표현하라.

Tip
공분산 행렬의 고유벡터를 구하여 표현한다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

평균벡터 $m = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \end{bmatrix}$ 공분산 행렬 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.75 \end{bmatrix}$

C에 대한 고윳값과 고유벡터

$$\lambda_1 = \frac{15+\sqrt{65}}{8},\quad u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{65}-7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.27 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{15-\sqrt{65}}{8},\quad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{65}+7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3.77 \\ 1 \end{bmatrix}$$

u_1을 사용하여 데이터를 변환

$$\hat{x}_1 = (x_1 - m)^T u_1 \approx [-1\ \ -1.5] \begin{bmatrix} 0.27 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.77$$

$$\hat{x}_2 = (x_2 - m)^T u_1 \approx [-1\ \ 0.5] \begin{bmatrix} 0.27 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.23$$

$$\hat{x}_3 = (x_3 - m)^T u_1 \approx [1\ \ -1.5] \begin{bmatrix} 0.27 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.23$$

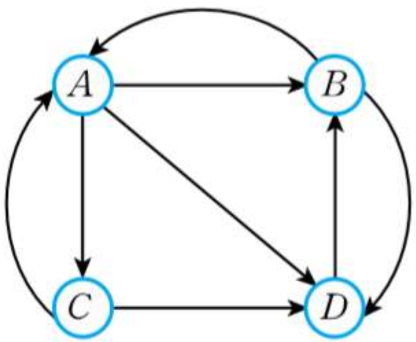
$$\hat{x}_4 = (x_4 - m)^T u_1 \approx [1\ \ 2.5] \begin{bmatrix} 0.27 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.77$$

❖ 웹 페이지의 중요도

▪ **페이지 랭크**(PageRank)

- **웹 페이지의 중요도**를 측정하는 알고리즘
- 페이지(노드)별로 중요도로 0 이상의 양수값 부여 (중요도의 합은 1)
- 사람들이 자주 방문하는 페이지가 중요한 정보를 포함하고 있다고 가정
- 무작위로 웹 페이지를 돌아다니는 **랜덤 서퍼**(random suffer) 개념 사용
- 특정 웹 페이지에서 연결된 다른 웹 페이지로 이동할 때,

  동일한 확률로 이동



$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

전이확률

- n개의 페이지가 있다면 **시작할 때의 확률분포**

$$v_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}^\top$$

- **전이확률 행렬 적용 결과**

$$v_1 = Mv_0$$
$$v_2 = Mv_1$$
$$\vdots$$
$$v_k = Mv_{k-1}$$

- **확률분포가 수렴하는 상황**

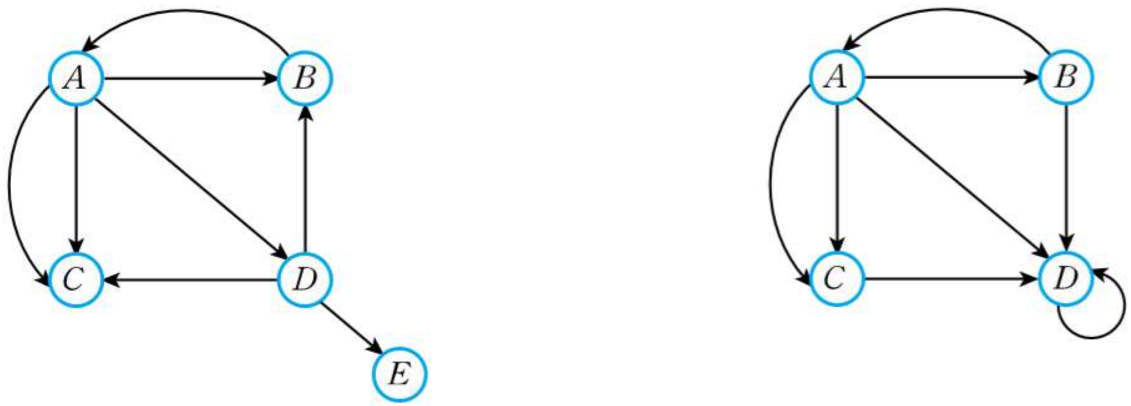
$$\boxed{Mv = v}$$

  - **고윳값이 1인 고유벡터 v = 페이지의 중요도**

- **강한 연결(strongly connected)** 그래프
  - 각 노드 간의 연결 경로가 존재하는 상태

- **데드 엔드 노드** 또는 **스파이더 트랩 노드**가 있는 그래프

$$v_{t+1} = \beta M v_t + \frac{1-\beta}{n} e \qquad e = [1\ 1\ \cdots\ 1]^\top$$

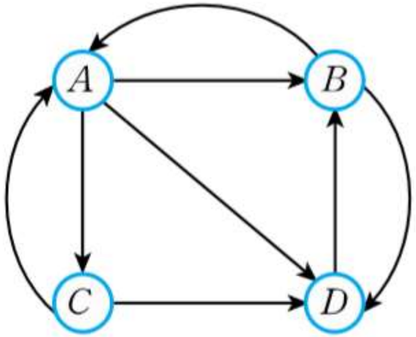


(a) 데드 엔드 노드를 포함한 그래프　　(b) 스파이더 트랩 노드를 포함한 그래프

예제 8-21 웹 페이지의 중요도 계산

[그림 8-5]의 연결 관계를 갖는 웹 페이지 A, B, C, D의 중요도를 페이지랭크 방법으로 계산하라.

Tip
전이확률 행렬의 고유벡터를 이용한다.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

M의 고윳값 1에 대한 고유벡터는 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{v} \approx \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.38 \\ 0.08 \\ 0.31 \end{bmatrix}$$

1. 고윳값과 고유벡터 구하기

2. 주성분 분석 적용하기
   - 붓꽃(iris) 데이터

Q&A