선형대수학

이양민(Yang Min Lee)
manson23@nate.com
S03-301-01호실
카카오ID: yanwenry

프로그래밍 실습

- 다음 벡터 v1, v2, v3를 행으로 하는 행렬 A와 열로 하는 행렬 B를 이들 벡터를 사용하여 만들고, 행렬 C에 v3를 열로 추가하여 행렬 D를 만들어라. 또한 행렬 E의 1행 4열의 성분, 2행 3열의 성분, 1~2행의 3열에 해당하는 부분행렬을 출력하라. 마지막으로 행렬 E의 1행 1열의 성분을 -1로 변경하고 행렬 E를 출력하라.

  - V1 = [1, 2, 3] V2 = [4, 5, 6], V3 = [7, 8, 9]
  - C =[[1, 2], [3, 4], [5, 6]]
  - E = [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]]

프로그래밍 실습

```
import numpy as np

print("벡터의 결합에 의한 행렬 생성")
v1 = np.array([1, 2, 3])
v2 = np.array([4, 5, 6])
v3 = np.array([7, 8, 9])

A = np.vstack([v1, v2, v3]) # v1, v2, v3를 각각 행으로 하는 행렬 A 생성
print("A =", A)

B = np.column_stack([v1, v2, v3]) # v1, v2, v3를
print("B =", B)

C = np.array([[1, 2], [3, 4], [5, 6]])
print("C =", C)

D = np.column_stack([C, v3]) # 행렬 C에 v3를 열로
print("D =", D)
```

```
print("행렬의 성분 접근")
E = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])

print("E[0,3] =", E[0,3]) # 1행 4열의 성분
print("E[1,2] =", E[1,2]) # 2행 3열의 성분

print("E[0:2, 2] =", E[0:2, 2]) # E의 1~2행의 3열에 해당하는 부분행렬
print("E[0:2, 2:4] =", E[0:2, 2:4]) # E의 1~2행의 3~4열에 해당하는 부분행렬
print("E[2, :] =", E[2, :]) # E의 3행에 해당하는 부분행렬

print("성분의 변경")
print("E =", E)

print("E[0,0] = ", E[0, 0])
E[0, 0] = -1 # E의 1행 1열 성분을 -1로 변경
print(E)
print("E[0,0] = ", E[0, 0])
```

프로그래밍 실습

2. 다음과 같은 행렬과 벡터를 이용하여 A+B, A−B, 3A, 2**v**, AB, AC, A**v**, A^2, A^3, A와 B의 대응 성분별 곱셈 A*B, A와 B의 대응 성분별 나눗셈 A/B, 성분별 거듭제곱 A**2, $A^\top$, $\mathbf{v}^\top$, 대각행렬 diag(1, 2, 3)의 생성, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}를 사용한 블록행렬 D의 생성 연산을 수행하고 결과를 출력하는 프로그램을 작성하라. 연계 : 3.2절

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\quad D_{12}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix},\quad D_{21}=\begin{bmatrix}7&7\end{bmatrix},\quad D_{22}=\begin{bmatrix}8\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}$$

프로그래밍 실습

```python
import numpy as np

# 행렬 A를 출력하는 함수
16 usages
def pprint(msg, A):
    print("---", msg, "---")
    (n,m) = A.shape
    for i in range(0, n):
        line = ""
        for j in range(0, m):
            line += "{0:.2f}".format(A[i,j]) + "\t"
        print(line)
    print("")

A = np.array([[1., 2.], [3., 4.]])
B = np.array([[2., 2.], [1., 3.]])
C = np.array([[4., 5., 6.], [7., 8., 9.]])
v = np.array([[10.], [20.]])
```

```python
pprint( msg: "A+B", A+B) # 행렬의 합 A+B
pprint( msg: "A-B", A-B) # 행렬의 차 A-B

pprint( msg: "3*A ", 3*A) # 행렬의 스칼라배 3A
pprint( msg: "2*v ", 2*v) # 벡터의 스칼라배 2v

pprint( msg: "matmul(A,B)", np.matmul(A,B)) # 행렬의 곱 AB
pprint( msg: "matmul(A,C)", np.matmul(A,C)) # 행렬의 곱 AC
pprint( msg: "A*v", A*v) # 행렬과 벡터의 곱 Av

pprint( msg: "matrix_power(A, 2)", np.linalg.matrix_power(A,  n: 2))
pprint( msg: "matrix_power(A, 3)", np.linalg.matrix_power(A,  n: 3))

pprint( msg: "A*B", A*B) # 행렬의 성분별 곱셈 A*B
pprint( msg: "A/B", A/B) # 행렬의 성분별 나눗셈 A/B
pprint( msg: "A**2 == A*A", A**2) # 행렬의 성분별 거듭제곱 A**2

pprint( msg: "A.T", A.T) # 행렬의 전치 AT
pprint( msg: "v.T", v.T) # 벡터의 전치 vT

M = np.diag([1, 2, 3]) # 대각행렬 diag(1,2,3) 생성
pprint( msg: "diag(1,2,3) =", M)
```

```python
D11 = np.array([[1, 2], [3, 4]])
D12 = np.array([[5], [6]])
D21 = np.array([[7, 7]])d
D22 = np.array([[8]])
D = np.block([[D11, D12], [D21, D22]]) # 블록행렬 D 생성
pprint( msg: "block matrix", D)
```

11. $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$에 대하여 다음 행렬 연산을 하라.

(a) $3I_2-A$

(b) $(3I_2)A$

12. 주어진 행렬 A에 대하여 다음 행렬 연산을 하라.

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -4 & 3 & -6\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(a) $A-5I_3$

(b) $(5I_3)A$

13. 주어진 행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$를 만족하는 k 값을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 9\\ -3 & k\end{bmatrix}$$

연습 문제

17. $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$이고 $AB=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 17\end{bmatrix}$일 때, 행렬 B를 구하라.

18. 다음 각 행렬의 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 7\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

19. [연습문제 18]의 결과와 [정리 3-8]을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

(a) $4\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

20. [연습문제 18]의 결과와 [정리 3-8]을 이용하여 우변의 행렬의 역행렬을 구하라.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 28\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 12 & 31\end{bmatrix}$

25. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$에 대하여 다음 행렬 연산을 하라.

(a) $diag(1, 2, 4) \cdot A$

(b) $A \cdot diag(1, 2, 4)$

(c) $diag(1, 1, 1) \cdot A$

(d) $diag(1, 3, 5, 2) \cdot diag(-1, 2, 3, 1)$

26. 주어진 행렬 $A \sim E$에 대하여 다음 행렬 연산을 하라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

(a) BA (b) BC (c) DE (d) ABC (e) $E^{\top}$

27. 다음 열벡터 $\boldsymbol{u}$와 행벡터 $\boldsymbol{v}$의 곱 $\boldsymbol{uv}$를 계산하라.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

28. 행렬 A가 다음과 같이 부분행렬들로 분할될 때, 부분행렬 A_{12}를 구하라.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 13 \\ 7 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 11 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

연습 문제

29. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 표현하라.

35. 주어진 행렬에 대하여 다음 각 블록행렬의 곱을 계산하라.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} D & I \\ I & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$