Система уравнений многокомпонентной газовой динамики

Цыбулин Иван

20 июля 2024 г.

1 Обозначения

- ρ_i — плотность i-й компоненты.
- M_i — молярная масса компоненты i.
- $\rho \equiv \sum \rho_i$ — плотность многокомпонентной смеси.
- $\theta_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho}$ — массовая доля компоненты i в смеси.
- x_i — молярная доля компоненты i в смеси.
- $\mathbf{q} = (u, v, w)$ — скорость газа.
- γ_i — показатель адиабаты компоненты i.
- $\beta_i \equiv \frac{1}{\gamma_i - 1}$ — молярная теплоемкость при постоянном объеме компоненты i, выраженная в единицах R.
- T — температура.
- p — давление.
- ε — внутренняя энергия газовой смеси.
- $e = \rho\left(\varepsilon + \frac{q^2}{2}\right)$ — полная энергия смеси.

1.1 Усредненные величины

В элементарном объеме V находится масса $\rho_i V$ i-й компоненты или $\frac{\rho_i V}{M_i}$ моль этой компоненты. Средняя молярная масса газа

$$M = \frac{\sum_i \rho_i V}{\sum_i \rho_i V / M_i} = \frac{\rho}{\sum_i \rho_i / M_i}.$$

$$\frac{\rho}{M} = \sum_i \frac{\rho_i}{M_i} = \rho \sum_i \frac{\theta_i}{M_i}.$$

$$\frac{1}{M} = \sum_i \frac{\theta_i}{M_i}$$

Теплоемкость при постоянном объеме одного моля смеси

$$\beta R = c_v = \sum_i x_i c_{v,i} = \sum_i x_i \beta_i R$$

$$\beta = \frac{\sum_i \beta_i \theta_i / M_i}{\sum_i \theta_i / M_i} = M \sum_i \beta_i \frac{\theta_i}{M_i}$$

$$\frac{\beta}{M} = \sum_i \frac{\beta_i}{M_i} \theta_i$$

Легко видеть, что показатель адиабаты γ смеси

$$\frac{\gamma\beta}{M} = \sum_i \frac{\beta_i \gamma_i}{M_i} \theta_i = \sum_i \frac{1 + \beta_i}{M_i} \theta_i = \frac{1}{M} + \frac{\beta}{M} = \frac{1 + \beta}{M}$$

связан с β тем же соотношением

$$\beta = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

И β и γ являются функциями исключительно θ_i.

2 Система уравнений

Система уравнений в консервативной форме (n - число компонент)

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{V})}{\partial x} = 0$$
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n & u & v & w & c \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_n & \rho u & \rho v & \rho w & e \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u & \rho_2 u & \rho_3 u & \dots & \rho_n u & \rho u^2 + p & \rho u v & \rho u w & (e+p)u \end{pmatrix}$$

Выражение консервативных величин через неконсервативные

$$\rho_i = \rho \theta_i$$
$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2$$
$$e = \rho \left(\frac{\beta c^2}{\gamma} + \frac{q^2}{2} \right)$$
$$p = \frac{\rho c^2}{\gamma}$$
$$e + p = \rho \left(\beta c^2 + \frac{q^2}{2} \right).$$

2.1 Спектральное разложение

Матрица $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \right)^{-1}$.

$$\mathbf{\Omega A} = \mathbf{\Lambda \Omega}$$
$$\mathbf{\Omega} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{\Lambda \Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}$$
$$\boldsymbol{\omega}_i^{\mathsf{T}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}$$
$$\boldsymbol{\omega}_i^{\mathsf{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 & \rho & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & \rho & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ \theta_n & 0 & 0 & \dots & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ e/\rho & \rho c^2 \frac{\partial(\beta/\gamma)}{\partial \theta_2} & \rho c^2 \frac{\partial(\beta/\gamma)}{\partial \theta_3} & \dots & \rho c^2 \frac{\partial(\beta/\gamma)}{\partial \theta_n} & \rho u & \rho v & \rho w & 2\rho c\beta/\gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u\theta_2 & \rho u & 0 & \dots & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ u\theta_3 & 0 & \rho u & \dots & 0 & \rho_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ u\theta_n & 0 & 0 & \dots & \rho u & \rho_n & 0 & 0 & 0 \\ u^2 + \frac{c^2}{\gamma} & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_2} & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_3} & \dots & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_n} & 2\rho u & 0 & 0 & \frac{2\rho c}{\gamma} \\ uv & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho v & \rho u & 0 & 0 \\ uw & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho w & 0 & \rho u & 0 \\ \frac{p+e}{\rho} u & \rho u c^2 \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} & \rho u c^2 \frac{\partial \beta}{\partial \theta_3} & \dots & \rho u c^2 \frac{\partial \beta}{\partial \theta_n} & p + e + \rho u^2 & \rho uv & \rho uw & 2\rho cu\beta \end{pmatrix}$$

Пусть $\lambda_i = u + s_i$. Тогда

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\right) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} - u\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} - s_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\right) = \det\left(\mathbf{G} - s_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\right)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} - u\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\gamma} & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_2} & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_3} & \dots & \rho c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_n} & \rho u & 0 & 0 & \frac{2\rho c}{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ \frac{uc^2}{\gamma} & \rho u c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_2} & \rho u c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_3} & \dots & \rho u c^2 \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial \theta_n} & p + e & 0 & 0 & \frac{2\rho c u}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{G}$ имеет размер $n+4 \times n+4$. У этой матрицы $n+2$ левых собственных вектора, соответствующих $s_i = 0$.

$$\mathbf{\Omega}_0 \mathbf{G} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} \theta_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ \theta_n & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u^2 - \beta c^2 - \frac{q^2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -u & 0 & 0 & 1 \\ v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Остальные два собственных вектора матрицы $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$

$$s_+ = +c$$

$$\boldsymbol{\omega}_+^{\mathsf{T}} = \left(-\frac{q^2}{2} + \beta c u - \frac{c^2}{\gamma} \sum_{i=2}^n \theta_i \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i}, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2}, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_3}, \quad \dots, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_n}, \quad u - \beta c, \quad v, \quad w, \quad -1 \right)$$

$$s_- = -c$$

$$\boldsymbol{\omega}_-^{\mathsf{T}} = \left(-\frac{q^2}{2} - \beta c u - \frac{c^2}{\gamma} \sum_{i=2}^n \theta_i \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i}, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2}, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_3}, \quad \dots, \quad \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_n}, \quad u + \beta c, \quad v, \quad w, \quad -1 \right)$$

Матрица левых собственных векторов

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \theta_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ \theta_n & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u^2 - \beta c^2 - \frac{q^2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -u & 0 & 0 & 1 \\ v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{q^2}{2} + \beta c u - \frac{c^2}{\gamma} \sum_{i=2}^n \theta_i \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_3} & \dots & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_n} & u - \beta c & v & w & -1 \\ -\frac{q^2}{2} - \beta c u - \frac{c^2}{\gamma} \sum_{i=2}^n \theta_i \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_3} & \dots & \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_n} & u + \beta c & v & w & -1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы $\mathbf{\Omega}$ равен $2\beta^2 c^3$. Обратную матрицу можно представить компактно, если ввести вектора

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n & u & v & w & \frac{q^2}{2} + \beta c^2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

и

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2} & \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial\beta}{\partial\theta_3} & \dots & \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial\beta}{\partial\theta_n} & 1 & v & w & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица представима в виде $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbf{T} - \frac{1}{\beta c^2}\mathbf{r}\boldsymbol{\ell}$, где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\beta c} & \frac{1}{2\beta c} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{u}{2\beta c} & \frac{u}{2\beta c} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие строкам матрицы $\boldsymbol{\Omega}$ равны

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(u, u, \dots, u, u + c, u - c).$$

3 Производные

Учтем, что $\theta_1 = 1 - \sum_{i=2}^n \theta_i$ и

$$\frac{\beta}{M} = \sum_i \frac{\beta_i\theta_i}{M_i} = \frac{1 - \sum_{i=2}^n \theta_i}{M_1}\beta_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\beta_i\theta_i}{M_i}$$

$$\frac{1}{M} = \sum_i \frac{\theta_i}{M_i} = \frac{1 - \sum_{i=2}^n \theta_i}{M_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\theta_i}{M_i}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\beta}{M}\right)M + \frac{\beta M}{M^2}\frac{\partial M}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{\beta}{M}\right)M - \beta M\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\frac{1}{M}\right) =$$
$$\left(\frac{\beta_i}{M_i} - \frac{\beta_1}{M_1}\right)M + M\left(\frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_i}\right) = M\left(\frac{\beta - \beta_1}{M_1} + \frac{\beta_i - \beta}{M_i}\right).$$