

# Calculus & Lineære Algebra

Noter fra Student: Vivek Misra

*[vimis22@student.sdu.dk](mailto:vimis22@student.sdu.dk)*

University of Southern Denmark (SDU)

# Introduktion til Matriser

- Matriser eller Matrix, er en sæt af tal som er arrangeret i rækker og kolonner som er med til at danne en rektangulært array.
  - Tallene som er placeret inde i matrissen er kaldt for elementer, eller "entries" af matrissen.
  - Matriser er brugt i applikation specifikt i ingeniørvidenskab, samt i fysik, økonomi og også i statistik.

# Opbygning af Matriser

- Et eksempel på opbygning af matriser kan ses her.
  - Rækkerne kan tælles fra venstre og højre side.
  - Kolonnerne kan tælles fra nederst side.

Rækker

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Kolonner

- Hvordan tæller vi rækker og kolonner?

$R_1$	1	2	3
$R_2$	4	5	6
$R_3$	7	8	9
	$C_1$	$C_2$	$C_3$

# Opbygning af Matriser

- Placering af en element på en matrisse, skrives således:

$$A_{r,k}$$

↑ Rækker  
← Kolonner

- EXAMPLE: Please calculate the value placed at the Matrice  $A_{2,2}$ 
  - Vi har defineret vores Matrix A på følgende måde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Nu skal vi bare finde pladsen, og her kan vi se følgende.

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ R_2 & \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} = 5$$

$C_2$

# Operationer på Matriser

- Når vi snakker om Matriser, plejer vi at sige at vi ønsker at udvikle algebra blandt matriserne.
- Det betyder, at vi ønsker at udføre operationer, som vi ville normalt gøre med talværdier.
- Derfor skal vi snakke om at lægge Matriser sammen og trække dem fra hinanden, mere frem i Præsentationen!
- Størrelsen af Matrissen, kan ses på forholdet mellem rækker og kolonner som følgende:  $|r \times c|$ .
- I klassen har vi fulgt en standardiseret notation som er:  $r \times c$

Vi siger "r by c"

# Forskellige Typer af Matriser

Navn af Type	Matematisk Definition	Overview
Square Matrix	$r = c$	$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$
Fat Matrix	$r < c$	$\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$
Tall Matrix	$r > c$	$\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

- Nu har nedenfor dannet eksempler på Opgaver med Typer af Matrix.

A	B	C	D
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}$	$B = [a \quad b \quad c \quad d]$	$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
Tall Matrix	Fat Matrix	Square Matrix	Tall Matrix

# Transpose af Matriser $M^T$

- Transpose af Matriser betyder, at konverterer rækkerne om til kolonnerne på den samme matrisse. Vi skriver altid T opløftet for Matrissen navns!
- Vi viser følgende Eksempel med Matrisse A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

- Vi konverterer på følgende måde:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

# Eksempler af Transpose $M^T$

- Transpose af Matriser betyder, at konverterer rækkerne om til kolonnerne på den samme matrisse. Vi skriver altid T opløftet for Matrissen navns!
- Vi viser følgende Eksempel med Matrisse B.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

- Vi konverterer på følgende måde:

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$



# Eksempler af Transpose $M^T$

- Transpose af Matriser betyder, at konverterer rækkerne om til kolonnerne på den samme matrisse. Vi skriver altid T opløftet for Matrissen navns!
- Vi viser følgende Eksempel med Matrisse C.

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Vi konverterer på følgende måde:

$$C^T = [3 \quad 7 \quad 8]$$

# Addition mellem Matrisser

- **VIGTIG REGEL:** Addition mellem Matrisserne er kun muligt blandt matrisser som er lige i både antal rækker og kolonner.

Vi har følgende vektorer:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Addition sker på følgende måde:

$$A + B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + (-3) & -4 + (-4) \\ 5 + (-5) & 6 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

# Forskellige Typer af Matrisser

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dette er kaldt for Principiel Diagonal, eller Main Diagonal Matrix!

$$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & -5 & 9 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis alle diagonale-værdier i det røde felt ligges sammen på den tredimensionelle matrisse, så er det kaldt for "Trace of Matrix".

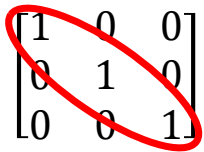
$$tr(B) = 5 + (-5) + 4$$

$$C_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hvis de diagonale værdier i en matrix, er omringet af nul-taller, så er det en Diagonal Matrisse.

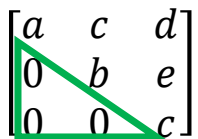
# Forskellige Typer af Matrisser

Her har vi eksempler på Triangulær Matrisser.

A 3x3 matrix with 1s on the main diagonal and 0s elsewhere. A red oval highlights the main diagonal elements (1, 1, 1).
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identity Matrix:

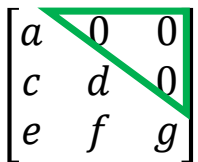
Main Diagonal værdier skal være identiske, og omringet af 0 på begge sider.

A 3x3 matrix with elements a, c, d in the top row; 0, b, e in the middle row; and 0, 0, c in the bottom row. A green line highlights the main diagonal and the upper triangle.
$$\begin{bmatrix} a & c & d \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Upper Triangulære Matrix:

Venstre nedre trekant skal være 0 under de diagonale værdier, således at de øvrige værdier er anderledes.

BRUG SARKASME REGLER HER PÅ NAVNGIVNINGEN

A 3x3 matrix with elements a, c, e in the left column; 0, d, f in the middle column; and 0, 0, g in the right column. A green line highlights the main diagonal and the lower triangle.
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & g \end{bmatrix}$$

Lower Triangulære Matrix:

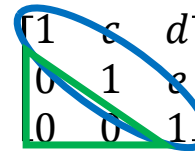
Højre øvre trekant skal være 0 over de diagonale værdier, således at de nedre værdier er anderledes.

BRUG SARKASME REGLER HER PÅ NAVNGIVNINGEN

Unit Matrix: Alle Diagonale Værdier er 1.

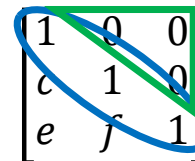
Strict Matrix: Alle Diagonale Værdier er 0.

Identity Matrix: Alle Diagonal Værdier er de samme, uanset hvad.

A 3x3 matrix with 1s on the main diagonal and c, d, e in the upper triangle. A blue oval highlights the main diagonal, and a green line highlights the upper triangle.
$$\begin{bmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

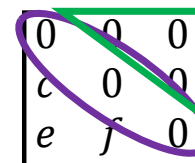
Upper Unit Triangulære Matrix:

Main Diagonal værdier skal være 1 for at kunne tilkalde sig Unit, dog skal på samtidig tidspunkt opfylde kravet for Upper Triangulære Matrix.

A 3x3 matrix with 1s on the main diagonal and c, e, f in the lower triangle. A blue oval highlights the main diagonal, and a green line highlights the lower triangle.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

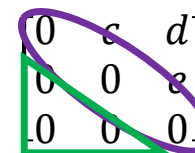
Lower Unit Triangulære Matrix:

Main Diagonal værdier skal være 1 for at kunne tilkalde sig Unit, dog skal på samtidig tidspunkt opfylde kravet for Lower Triangulære Matrix.

A 3x3 matrix with 0s on the main diagonal and c, e, f in the lower triangle. A purple oval highlights the main diagonal, and a green line highlights the lower triangle.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

Strictly Lower Triangulære Matrix:

Main Diagonal værdier skal være 0 for at kunne tilkalde sig Strict, dog skal på samtidig tidspunkt opfylde kravet for Lower Triangulære Matrix.

A 3x3 matrix with 0s on the main diagonal and c, d, e in the upper triangle. A purple oval highlights the main diagonal, and a green line highlights the upper triangle.
$$\begin{bmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Strictly Upper Triangulære Matrix:

Main Diagonal værdier skal være 0 for at kunne tilkalde sig Strict, dog skal på samtidig tidspunkt opfylde kravet for Upper Triangulære Matrix.

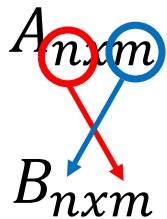
# Produkt mellem Matriser

$$A_{n \times m} = a_{r \times c}$$

$$B_{r \times c} = b_{r \times c}$$

Man kan lægge værdier sammen fordi de har den samme størrelse.

Vi kan se, at ved Multiplikation at antallet af kolonner ved A skal være lig rækkerne ved B.



Produkt af C er følgende:

$$c = Ax B = \sum_{j=1}^i a_{ij} b_{ij}$$

## Eksempel på Udregning af Produkt

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \end{array}$$

Nu ganger vi på tværs og får følgende

$$C = \begin{bmatrix} a \cdot p + b \cdot r & a \cdot q + b \cdot s \\ c \cdot p + d \cdot r & c \cdot q + d \cdot s \end{bmatrix}$$

# Produkt mellem Matriser

- Her fremviser vi eksempel på Multiplikation mellem Matriser.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$2 + 6 = 8$$

$$4 + 9 = 13$$

$$3 + 8 = 11$$

$$6 + 12 = 18$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$$

# Produkt mellem Matriser

- Her viser vi en Eksempel på Udregning af en Opgave.

$$C = AxB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + (-5) \cdot 4 & 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 2 & 0 \\ -20 & 0 & -5 & 5 \\ 10 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Determinanten til Matriser $\det(S)$ / $|S|$

- Vi skal nu videre og kigge på Invers af Matriser og Determinanter.
- **HVERDAGS KONTEKST**
  - Når man arbejder med Algoritmers Stabilitet i Machine Learning, ønskes der en stabilitet blandt dataene.
  - Når man laver analyse på Stabilitet, så ønskes det at determinanten skal IKKE være 0.

## STEPS TIL UDREGNING AF DETERMINANT I 2D.

1. Co-factor
2. Ignorere de samme kolonner og rækker.
3. Find endelige Determinant.



# Determinanten til 2D-Matriser $\det(S)$ / $|S|$

## STEP 1: Find Co-factor

- Co-factoren betyder at finde foretegn, baseret på de elementer som står (kun) i Række 1 i Matrisen.
- Cofactoren for  $a$  er 2, fordi den befinder sig i række 1 og kolonne 1. Fordi begge placeringstal tilsammengør 2 i summen, er det en positiv lige tal.
- Derfor skrives + i foretegnet for  $a$  i determinanten.

$$\begin{array}{cc} R_1 & \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ R_2 & \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \end{array}$$
$$co(a) = R_1 + C_1 = 2$$
$$co(a) = 2 = +a$$

## STEP 2: Ignorere de samme kolonner og rækker.

- Når vi finder Co-factoren for en værdi, skal alle værdier i den samme række og kolonne ignoreres.

$$\begin{array}{cc} R_1 & \begin{bmatrix} a & \text{orange} \end{bmatrix} \\ R_2 & \begin{bmatrix} \text{orange} & d \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \end{array}$$

# Determinanten til 2D-Matriser $\det(S)$ / $|S|$

## STEP 3: Find det endelige Determinant.

- Vi ganger den modsatte værdi som befinder sig diagonal overfor den anden side.

$$(a \cdot d) - (b \cdot c)$$

$$\begin{matrix} R_1 & [a & b] \\ R_2 & [c & d] \\ & C_1 & C_2 \end{matrix}$$

## STEPS TIL UDREGNING AF DETERMINANT I 3D.

1. Find Co-factor.
2. Find Determinanten
  - a) Ignorere de samme kolonner og rækker.

# Determinanten til 3D-Matriser $\det(S)$ / $|S|$

## STEP 1: Find Co-factor

- Vi starter med, at finde de negative og positive koefficienter ved værdierne placeret på første række af Matrissen.

$$R_1 + C_1 = 2 = +$$

$$R_1 + C_2 = 3 = -$$

$$R_1 + C_3 = 4 = +$$

## STEP 2: Ignorere de samme kolonner og rækker.

- UNDERTRIN: Vi ignorere de forskellige værdier, (mens) vi udregner Determinanten.

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

# Determinanten til 3D-Matriser $\det(S)$ / $|S|$

## STEP 1: Find Co-factor

- Vi starter med, at finde de negative og positive koefficienter ved værdierne placeret på første række af Matrissen.

$$R_1 + C_1 = 2 = +$$

$$R_1 + C_2 = 3 = -$$

$$R_1 + C_3 = 4 = +$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

## STEP 2: Ignorere de samme kolonner og rækker.

- a) UNDERTRIN: Vi ignorere de forskellige værdier, (mens) vi udregner Determinanten.
- Sort farve: Viser at vi ignorere de andre værdier mens vi udregner værdierne på en af dem.
  - Rød farve: Ignorere kolonne 1, når vi arbejder med element 1.
  - Orange farve: Ignorere kolonne 2, når vi arbejder med element 2.
  - Grøn farve: Ignorere kolonne 3, når vi arbejder med element 3.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

# Introduktion til Matriser

- Sådan udregnes Determinanten til Matriser.

$$\det(A) = +1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

$$\det(1) = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(2) = \begin{bmatrix} 1 & \textcircled{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \textcircled{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{green}{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$

# Inverse for 2D-Matrisser

- Nu skal vi til at introducere til Matrisser i Inverse-Form i 2D.

## **STEPS TIL UDREGNING AF DETERMINANT I 2D.**

1. Determinanten
2. Co-factor
3. Adjustment eller Transpose
4. Multiply Determinant med Transpose

- Vi arbejder med følgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Inverse for 2D-Matrisser

## 1. STEP - DETERMINANTEN

$$\det(A) = 0 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -7$$

## 2. STEP – COFACTOR

$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
+2	-1	-7	+0

Det her er Matrisen, som er visualiseret med Cofactoren.

$$\begin{bmatrix} +2 & -1 \\ -7 & +0 \end{bmatrix}$$

# Inverse for 2D-Matrisser

## 3. STEP – ADJUSTMENT ELLER TRANSPOSE

- Her skal vi bare sætte vores Matrisse i Transpose, hvor vi konverterer vores rækker om til kolonner!

$$\begin{bmatrix} +2 & -1 \\ -7 & +0 \end{bmatrix} \longrightarrow adj(A) = A^T = \begin{bmatrix} +2 & -7 \\ -1 & +0 \end{bmatrix}$$

## 4. STEP – MULTIPLY DETERMINANT MED TRANSPOSE

$$\frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} +2 & -7 \\ -1 & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{2}{7}\right) & +\left(\frac{7}{7}\right) \\ +\left(\frac{1}{7}\right) & -\left(\frac{0}{7}\right) \end{bmatrix}$$
$$Answer = \begin{bmatrix} -\left(\frac{2}{7}\right) & +\left(\frac{7}{7}\right) \\ +\left(\frac{1}{7}\right) & -\left(\frac{0}{7}\right) \end{bmatrix}$$



# Inverse for 3D-Matrisser

- Nu skal vi til at introducere til Matrisser i Inverse-Form i 3D.

## STEPS TIL UDREGNING AF DETERMINANT I 2D.

1. Den Generelle Determinant
2. Co-factor
3. Adjustment eller Transpose
4. Multiply Determinant med Transpose

- Vi arbejder med følgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

# Inverse for 3D-Matrisser

## • 1. STEP – DEN GENERELLE DETERMINANT

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Vi starter allerførst med, at finde den generelle Determinant.
- Det betyder, at vi udregner Determinanten fra værdierne i første Række.

$$\begin{aligned} \det(A) &= +7 \cdot (-40 - (-4)) - (-6) \cdot (32 - (-8)) + 3 \cdot (4 - (-10)) \\ &= +7 \cdot (-36) + 6 \cdot (40) + 3 \cdot (14) = -252 + 240 + 42 = 30 \end{aligned}$$

## 2. STEP – CO-FACTOR

- Her skal vi finde Determinanten for enhver position som er i Matrissen.
- Det betyder, at vi starter med, at opstille determinant værdierne i en firkant, og derefter udregner enkelte værdier.
- Husk, at vi sætter fortegn afhængig af Co-factorens placering i Matrissen.
- På næste side viser vi et tydeligt eksempel.

# Inverse for 3D-Matrisser

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

## • 2. STEP – CO-FACTOR

- Her skriver vi alle de værdier som skal bruges til at udregne Determinanten.
- Vi husker, at sætte alle positive og negative fortegn afhængig af Co-factorens placering.

$$A = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

# Inverse for 3D-Matrisser

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

## • 2. STEP – CO-FACTOR

- Vi ender efterfølgende med disse resultater når Determinanten udregnes ved multiplikation af diagonale værdier og subtraktionen mellem dem som vi kender.

$$\det(P) = -5 \cdot 8 - (-4) \cdot 1 = -40 - 4 = + -36 = -36$$

$$A = \begin{bmatrix} +|-36| & -40 & 14 \\ 51 & 50 & -19 \\ 39 & 40 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -40 & 14 \\ 51 & 50 & -19 \\ 39 & 40 & -11 \end{bmatrix}$$

## • 3. STEP – ADJUSTMENT ELLER TRANSPOSE

- På næste side viser vi, hvordan vi laver Transposen af Matrissen.

# Inverse for 3D-Matrisser

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

## • 3. STEP – ADJUSTMENT ELLER TRANSPOSE

- Her konverterer vi alle rækker om til Kolonner ved Transpose af Matrisen.
- Bemærk, at de Diagonale Værdier i Midten bevares i Transposen mens de andre dvs. Røde og Grønne Værdier skifter pladser.

$$A = \begin{bmatrix} -36 & -40 & 14 \\ 51 & 50 & -19 \\ 39 & 40 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -36 & 51 & 39 \\ -40 & 50 & 40 \\ 14 & -19 & -11 \end{bmatrix}$$

# Inverse for 3D-Matrisser

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

## 4. STEP – MULTIPLY GENERELLE DETERMINANT MED TRANSPOSE

- Vi fandt ude af, at vores Generelle Determinant var  $\det(A) = 30$ .
- Derfor skal vi bare gange dette Determinant med Tranpose Matrissen.

$$A^T = \begin{bmatrix} -36 & 51 & 39 \\ -40 & 50 & 40 \\ 14 & -19 & -11 \end{bmatrix}$$

- Nu ganger vi vores Determinant med Matrissen, husk at vi omskriver determinaten i brøker.

$$\det(A) * A^T = \frac{1}{30} * \begin{bmatrix} -36 & 51 & 39 \\ -40 & 50 & 40 \\ 14 & -19 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{36}{30} & \frac{51}{30} & \frac{39}{30} \\ -\frac{40}{30} & \frac{50}{30} & \frac{40}{30} \\ \frac{14}{30} & -\frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{17}{10} & \frac{13}{10} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{15} & -\frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{bmatrix}$$

# SLUT 2

Noter fra Student: Vivek Misra

*[vimis22@student.sdu.dk](mailto:vimis22@student.sdu.dk)*

University of Southern Denmark (SDU)