Calculus & Lineære Algebra

Noter fra Student: Vivek Misra

vimis22@student.sdu.dk

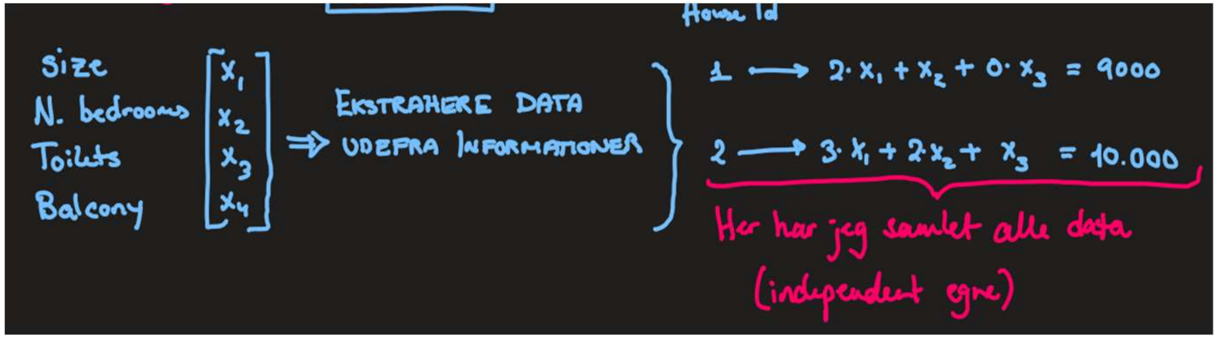
University of Southern Denmark (SDU)

Introduktion til Lineære Ligninger

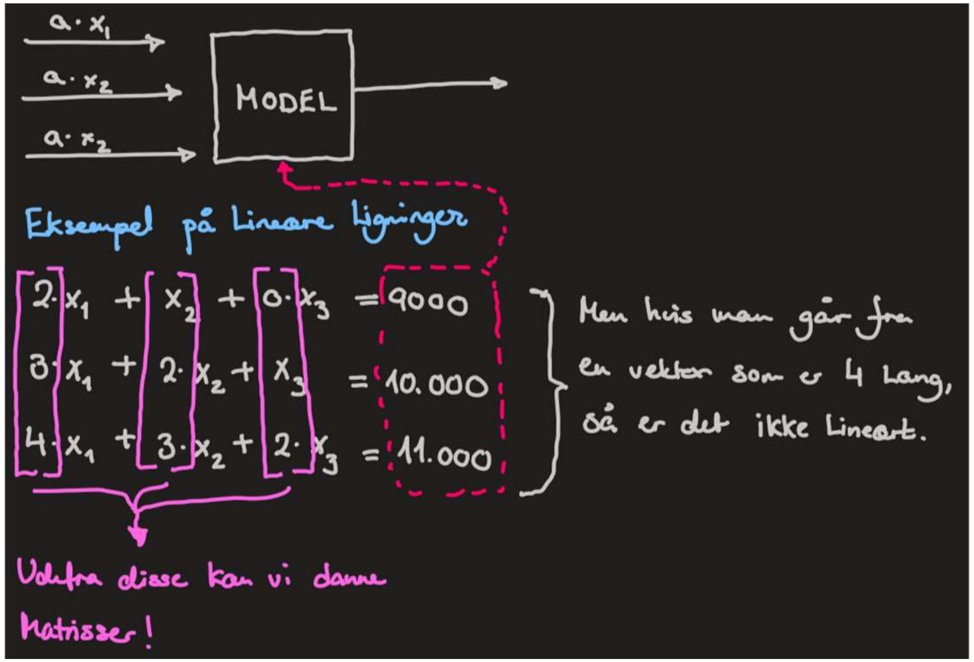
- Hensigten med Lineære Ligninger er, at kunne bruge dem i sammenhæng med analyse og fortolkning af variabler.
  - Lineære Ligninger der defineret udefra følgende formel:
    $$a \cdot x + b = c$$
  - Udefra denne ligning, kan disse værdier omdannes til en samlet Matrisse.
  - Den samlede Matrisse er kaldt for en Augmented Matrix med notationen: $\tilde{A}$.

Introduktion til Lineære Ligninger

- **EKSEMPEL: Her giver smagsprøve på, hvordan Lineære Variabler er set.**
  - Vi forestiller os, at Vinay kommer til Odense, Danmark.
  - Han leder efter en lejlighed, hvor han leder efter forskellige kvaliteter.
  - Eksempel på Kvaliteter, kan være antal Badeværelser, Rum



  - Vi kan udefra Lejligheds-Eksemplet se, at vi bygger en Model udefra noget Data.



Introduktion til Lineære Ligninger

- Vi kan udefra billederne se, at vi kan omdanne Lineære Ligninger om til Matrisser på følgende måde i Matematik:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} \\ a_{2,1} & + & a_{2,2} & + & a_{2,3} \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} \\ a_{n+1} & & a_{n+2} & & a_{n+3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Vi kan se, at værdierne skrives vertikalt i matrisserne og derved er omskrevet på følgende måde i Lineære Ligninger:

$$A \cdot x = b$$

Invers af Matrix i Lineære Ligninger

- Vi kan se, at vi skal gange invers af A med både A og B.
  - DET SKAL ALTID SKE BAG VED A-VÆRDIEN!
  - Vi viser her et eksempel:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

- Vi kan se, at når det gælder til en normal 2D-Matrisse er det okay.
- Men når det gælder til en 3D-Matrisse, kan det skabe komplikationer.
  - Det er her, hvor vi kommer til at kigge på Gauss Jordan Elimination.
  - Vi kommer også til at kigge på Cramers Rule med Henblik på Determinanten.
  - Og så har vi også Back-Substitution som skal hjælpe med at indsætte værdier i Lineære Ligninger.

Back-Substitutionsmetoden

- Substitutionsmetoden er også kendt som Erstatningsmetoden.
- Vi starter med, at arbejde fra 2 ligninger:

Ligning 1: $2y = x + 7$

Ligning 2: $x = y - 4$

- STEP 1: Indsæt x-værdien fra ligning 2 i ligning 1.

$$2y = (y - 4) + 7$$
$$2y = y - 4 + 7 \Rightarrow$$
$$2y = y + 3$$
$$2y - y = y + 3 - y \Rightarrow y = 3$$

Back-Substitutionsmetoden

- **STEP 1: Indsæt x-værdien fra ligning 2 i ligning 1.**

$$2y = x + 7$$
$$2y = (y - 4) + 7$$
$$2y = y - 4 + 7 \Rightarrow$$
$$2y = y + 3$$
$$2y - y = y + 3 - y \Rightarrow y = 3$$

STEP 2: Indsæt den isolerede y-værdi fra ligning 1 i ligning 2.

$$x = y - 4$$
$$x = 3 - 4 = -1$$

Back-Substitutionsmetoden

- **STEP 3: Opsamle værdierne for Overblik.**

$$y = 3$$
$$x = -1$$

- **STEP 4: Indsæt værdierne i de respektive ligninger.**
  - Det betyder, at begge værdier indsættes i Ligning 1 og Ligning 2 således:

Ligning 1: $\mathbf{2y = x + 7}$

$$2 \cdot 3 = -1 + 7 = 6$$

Ligning 2 : $\mathbf{x = y - 4}$

$$-1 = 3 - 4$$

Cramers Rule

- Den primære hensigt med Cramers Rule er, at kunne finde x,y,z værdier udefra den ”Augmenteret Matrisse”.
- Vi kommer her til at vise, hvordan udregningen foregår når man skal finde det i sammenhæng med **inverse af matrisser**.
- Vi tager udgangspunkt i det følgende ligning som står nedenfor:

$$3x + 3y = 1$$
$$4y + 4z = 3$$
$$2y + 1z = 0$$

Det er vigtigt, at gøre obs på, at der er ingen forskel i om ligning står ved siden af hinanden eller om på hinanden som:

$$3x + 3y = 1, 4y + 4z = 3, 2y + 1z = 0$$

Cramers Rule

- **STEP 1: Lav Augmented Matrix**
  - Vi starter med, at opskrive ligningerne ned for at skabe overblik.

$$3x + 3y = 1$$
$$4y + 4z = 3$$
$$2y + 1z = 0$$

  - Nu laver vi Augmented Matrix. X står i kolonne 1, Y står i kolonne 2, og z i kolonne 3.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cramers Rule

- **STEP 2: Find den Generelle Determinant.**
  - Nu skriver vi kun den tredimensionelle matrisse og udregner determinanten derfra.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Nu udregnes determinanten.

$$\det(A) = 3 \cdot (4 \cdot 1 - 4 \cdot 2) - 3 \cdot (0 \cdot 1 - 4 \cdot 0) + 0 \cdot (0 \cdot 2 - 4 \cdot 0) = -12$$

Cramers Rule

- **STEP 3: Indsæt resultat værdierne inde på x's plads i første kolonne.**
  - Nu skriver vi kun den tredimensionelle matrisse og udregner determinanten derfra.

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Nu udregnes determinanten.

$$\det(A_x) = 1 \cdot (4 \cdot 1 - 4 \cdot 2) - 3 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 0) + 0 \cdot (3 \cdot 2 - 4 \cdot 0) = -13$$

Cramers Rule

- **STEP 4: Indsæt resultat værdierne inde på y's plads i anden kolonne.**
  - Nu skriver vi kun den tredimensionelle matrisse og udregner determinanten derfra.

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Nu udregnes determinanten.

$$\det(A_y) = 3 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 0) - 1 \cdot (0 \cdot 1 - 4 \cdot 0) + 0 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

Cramers Rule

- **STEP 5: Indsæt resultat værdierne inde på z’s plads i tredje kolonne.**
  - Nu skriver vi kun den tredimensionelle matrisse og udregner determinanten derfra.

$$A_z = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Nu udregnes determinanten.

$$\det(A_z) = 3 \cdot (4 \cdot 0 - 3 \cdot 2) - 3 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 0) + 1 \cdot (0 \cdot 2 - 4 \cdot 0) = -18$$

Cramers Rule

- **STEP 6: Find X,Y,Z gennem Divisionen**
  - Indtil nu kender vi følgende værdier fra de sidste Determinanter.

Udregnede Determinanter	Kvotienter
$\det(A) = 12$	$Ignorere!$
$\det(A_X) = -13$	$x = \frac{\det(A_X)}{\det(A)} = -\frac{13}{12} = -1{,}08$
$\det(A_y) = 0$	$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{12} = 0$
$\det(A_z) = -18$	$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = -\frac{18}{12} = -1{,}5$

Gaussian Elimination

Det er her, hvor tingene bliver komplekst.

Kig venligst på Youtube!

SLUT 4

Noter fra Student: Vivek Misra

vimis22@student.sdu.dk

University of Southern Denmark (SDU)