Calculus & Lineære Algebra

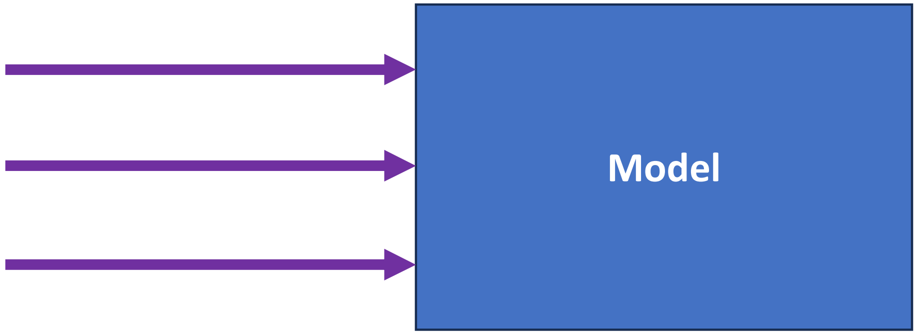
Noter fra Student: Vivek Misra

vimis22@student.sdu.dk

University of Southern Denmark (SDU)

Repetition af Modellering

- Under emnerne ved Linære Ligninger betragtede vi de forskellige variabler som være værdier, der var med til at skabe en model omkring en Funktion.
- Nu skal kigge yderligere nærmere omkring Variablerne og Klassificere dem.



Funktioner og Variabler

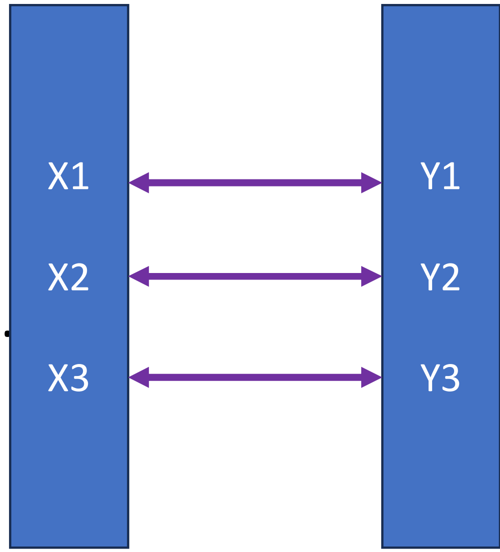
- Vi kan se, at når vi snakker om Variabler i en Funktion, skelnes der mellem to begreber:
  - Independent/Uafhængige Variabler: Er x-variablen som styrer resultatet y.
  - Dependent/Afhængige Variabler: Er y-variablen som er styret af x.
- Funktioner er den som beskriver forholdet mellem Independent og Dependent Variabler.

Funktioner og Variabler

- En Domæne af en Funktion er alle de mulige input for selve funktionen:
  - Her kan vi se, at vi har fået en ligning, hvor x-værdien er den som tager imod input for funktionen.
  - $5\boxed{x} = 4$ **Domæne**
  - Vi kan se, at når vi indsætter værdien 1000 på x's plads, resulteres det 5000.
  - Vi kan udefra det se, at vores funktion f(x) er svarende til output y.
  - Men nogen gange, kan denne regel også modificeres og byttes rundt nogen gange og dermed forstås anderledes.

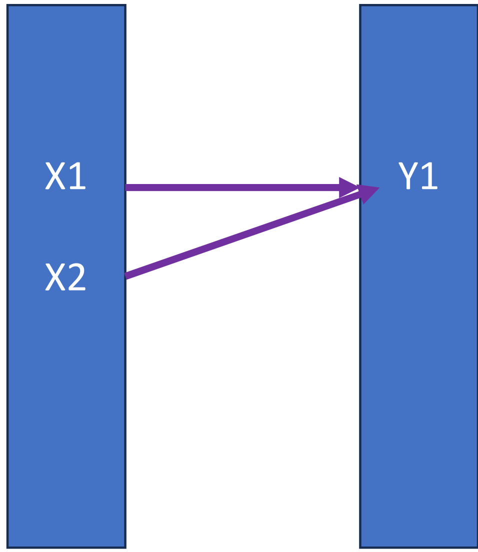
ONE TO ONE FUNKTION

- Vi kender allerede på forhånd, at en funktion er der hvor indsætter noget ind og får noget ud.
  - Men har du nogensinde undret dig over Inverse?
- Inverse er der, hvor vi kan gå fra y til x.
- Kravene for Inverse er, at det skal være 1-1 Funktion.
  - I Invers bliver x-værdien lavet om til en Dependent Variable.
  - Hvorimod y-værdien bliver lavet om til en Independent Variable.



TWO TO ONE FUNKTION

- Vi kan se, at Inverse gælder ikke for en Two to One Funktion
- Two to One funktion er der, hvor vi har flere Independent Variabler til en Dependent Output.
- Vi kan ikke lave Inverse, fordi det tilbage at vende til input.



Funktioner og Variabler

- Men spørgsmålet kommer nu, og det er hvordan man udregner Invers?
  - Vi kan se, at vi har følgende funktion: $y = 2 \cdot \boldsymbol{x} + 1$
  - Hvis vi indsætter følgende x-værdier som inde i ligning, så har vi resultaterne her:

X-værdien	Resultat
$x = -3$	$2 \cdot -\mathbf{3} + 1 = -5$
$x = -2$	$2 \cdot -\mathbf{2} + 1 = -3$
$x = -1$	$2 \cdot -\mathbf{1} + 1 = -1$
$x = 0$	$2 \cdot \mathbf{0} + 1 = 1$
$x = 1$	$2 \cdot \mathbf{1} + 1 = 3$
$x = 2$	$2 \cdot \mathbf{2} + 1 = 5$
$x = 3$	$2 \cdot \mathbf{3} + 1 = 7$

Udregning af Invers i Funktion

- Vi kendte fra sidst, at I en invers funktion sker følgende ændringer:
  - Den tidligere dependent variable y bliver omdannet til Independent Variable.
  - Den tidligere independent variable x bliver omdannet til Dependent Variable.
- Her giver eksempel med funktionen: $y = 2x + 1$
  - Vi går efter, at isolere x-værdien først som vist nedenfor:
  - $y - 1 = 2x \cancel{+ 1 - 1}$
  - $\frac{y-1}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$
  - $\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$
  - På næste side, vil vi vise hvordan vi gennem indsætning af forskellige tal kan få resulteret en x-værdi.

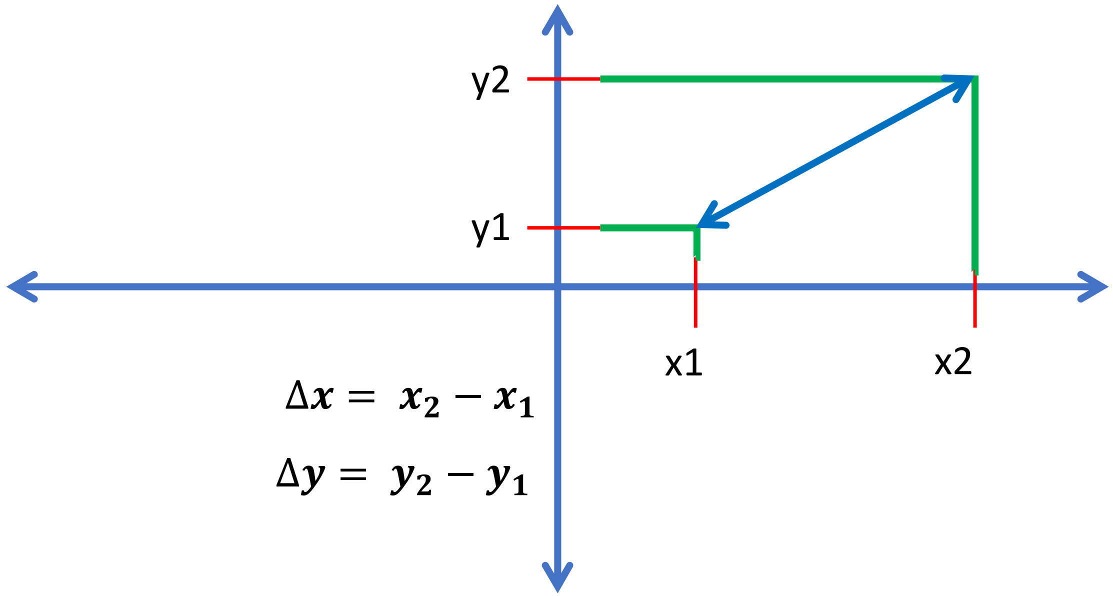
Udregning af Invers i Funktion

- Vi har isoleret funktionen: $\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$
  - Her der opstillet en tabel over, hvordan vi ændrer på y-værdierne.

X-værdi	Resultat
$y = 0$	$x = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$
$y = 1$	$x = \frac{1-1}{2} = 0$
$y = 2$	$x = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$y = 3$	$x = \frac{3-1}{2} = 1$

Funktionernes Længder

- I den første del af Calculus Undervisningstimen, så vi at både x-værdien og y-værdien tager Reelle Numre (markeret med fedt).
  - $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x} + 1$
- Vi ved også, at udefra det så har to punkter i x-aksen og to punkter i y-aksen.



$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$

$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}$

Funktionernes Længder

- Vi kan se, at den blå linje viste afstanden mellem de x-punkterne og y-punkterne.
  - Vi kender allerede distanceformlen for en vektor som er følgende:

$$|v| = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \sqrt[2]{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

  - Udefra sådan en distanceformel, kan man indlede en distanceformlen til afstanden mellem x og y-værdierne i koordinataksen.

$$|\boldsymbol{dist}| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \sqrt[2]{(x_1 - x_2)^{\mathbf{2}} + (y_1 - y_2)^{\mathbf{2}}}$$

Operationer på Funktioner

- Vi kan se, at man kan lave operationer på funktionerne.
- Vi har følgende operationer som kan udføres på funktionerne:
- **Addition:** $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$
- **Subtraktion:** $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$
- **Multiplikation:** $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}$
- **Division:** $\boldsymbol{f(x) \div g(x)}$

Operationer på Funktioner

- Vi kan se, at vi har følgende eksempel med to funktioner:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$$
$$\boldsymbol{g(x) = x - 1}$$

- Vi skriver det på følgende måde i operationerne:
- **Addition:** $\boldsymbol{3x + 2}$
- **Subtraktion:** $\boldsymbol{x + 4}$
- **Multiplikation:** $\boldsymbol{(2x + 3) \cdot (x - 1) = 2x^2 + x - 3}$
- **Division:** $\boldsymbol{\frac{2x+3}{x-1} = 2 + (\frac{5}{x-1})}$

Operationer på Funktioner

- Vi kan se, at Funktion Composition er der hvor vi undersøger at multiplikation med to funktioner på omvendt vis er forskellige.

$$\boldsymbol{f \cdot g(x) \neq g \cdot f(x)}$$

- Vi kan se, at vi har følgende funktioner fra sidst:

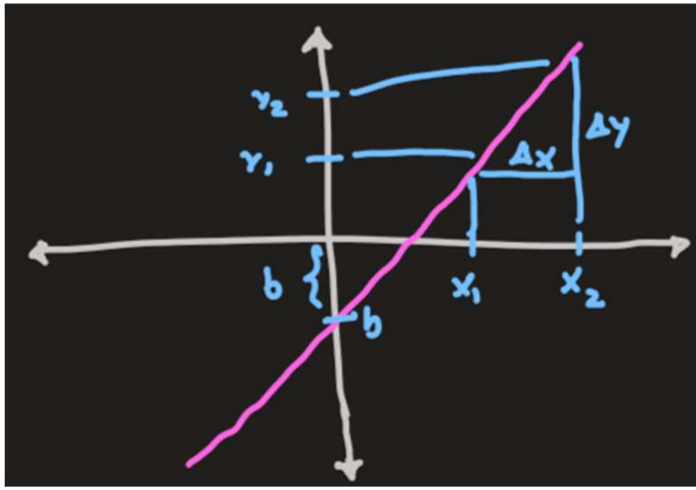
$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = x - 1$$

- Vi kan se, at vi har følgende multiplikation:

$$f \cdot g(x) \Rightarrow 2 \cdot (x - 1) + 3 \Rightarrow 2x - 2 + 3 = 2x - 1$$
$$2x - 1 = 2$$

Straight Line From Two Points

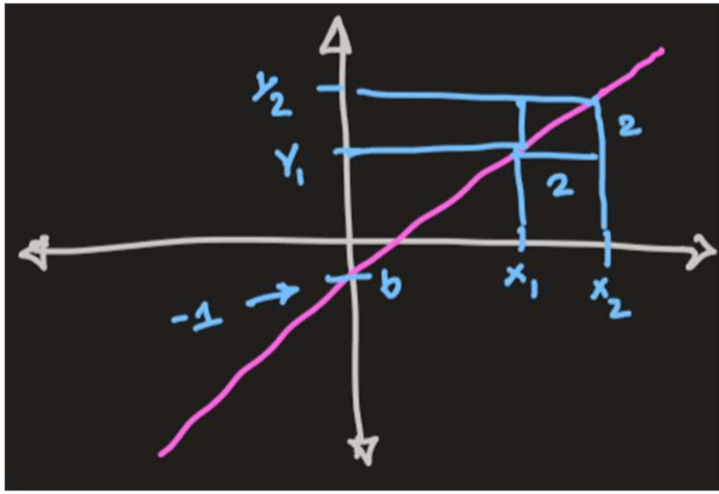
- Når vi snakker om Straight Line Two From Two Points, så snakker vi om hvordan vi kan danne en Linære Samenhæng fra to punkter:
- I tilfældet herhenne snakker vi også om ”Degree of Order”; hvor det kan ses at vi ikke kender funktionsforskriften af den Lineære Sammenhæng på forhånd.
- Nu har vi Ligningen: $y = 2x + 1$
  - Men vi antager, at vi ikke kender Funktionsforskriften!



Straight Line From Two Points

- Vi kan se, at vi har fået givet en tegning på højre side:
- Vi kan se, at der er en måde at udregne den lineære sammenhæng på.
  - Dette er kun muligt ved, at finde de to x-værdier og de to y-værdier.
  - Så kan vi finde den lineære sammenhæng ved, at indsætte i følgende formel:

$$f(x) = a \cdot x + b$$



Straight Line From Two Points

- METODE 1:
- Vi kan se, at vi har fået følgende værdier.

$$(x_1, y_1) = (1,3)$$
$$(x_2, y_2) = (-1, -4)$$

- Vi ved fra vores sidste slide, at vi kan anvende følgende formel til at udregne a-værdien på lineære sammenhæng.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Vi kan se, at vi har følgende formel som vi kan bruge:

$$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

Straight Line From Two Points

- METODE 2:
- Så er der også en anden metode at kunne udregne lineære sammenhæng på:

$$y = m \cdot (x - a)$$

- METODE 3:
- Vi kan se, at der er også en anden metode at kunne udregne lineære sammenhæng på:

$$\tan(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Men den mest brugbare er bare: $f(x) = a \cdot x + b$

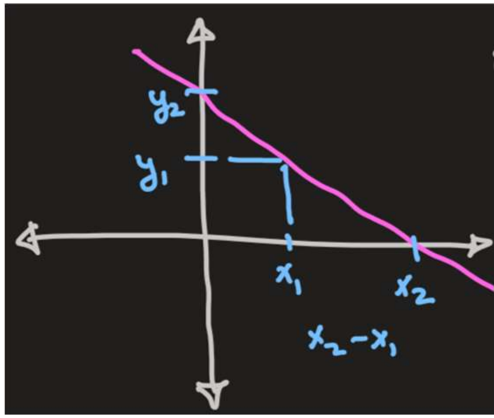
Straight Line From Two Points

- HÆLDNINGSVENDING:
  - Vi kan se, at afhængig af fortegnet for hældningskoefficenten så vender den forskellige veje. Udefra dette kan vi definere vores tangensformel således:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{y_2 - y_1}}{\boxed{x_2 - x_1}}$$

Hvis m er negativ så er det fordi y1 > y2

Hvis m er negativ så er det fordi x1 > x2



  - Vi kan se, at vores m-værdi eller hældningskoefficenten kan ses sådan:

$$m \; - negativ \; værdi = m < 0$$
$$m + positiv \; værdi = m > 0$$

Straight Line From Two Points

- Vi kan se, at vi har eksempel på udregning emd Straight Line:

$$(x_1, y_1) = (0,3)$$
$$(x_2, y_2) = (1,4)$$

- Vi kan se, at vi har følgende formel som vi skal bruge: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

- Vi kan se, at vi har følgende formel som vi kan bruge når vi ikke kender oplyst nogen billeder:

$$y = m \cdot (x - x_2)$$

Straight Line From Two Points

- Vi har følgende formel fra sidst:

$$y = m \cdot (x - x_2)$$

- Vi indsætter værdierne inde i formlen:

$$y = 1 \cdot (x - 0) + 3$$
$$y = x + 3$$

- Vi har følgende:

$$y = m \cdot (x - x_2) + y_2$$
$$y = 1 \cdot (x - 1) + 4$$
$$y = x + 3$$

Andengradsligning

Her kommer vi lige til at introducere til de basale færdigheder for Andengradsligningen.

Andengradspolynomium

- Vi kender allerede, at vores andengradsligning er også kendt som andengradspolynomium.
- Formlen er således: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Når vi skal finde løsningerne, plejer at vi snakker om diskriminanten.
$$d = b^2 - 4ac$$
  - Hvis d > 0 (d større end 0), så har ligningen 2 løsninger.
  - Hvis d = 0, så har ligningen kun 1 løsning.
  - Hvis d < 0 (d mindre end 0), så har ligningen 0 løsninger.

Andengradspolynomium

- Vi kan se, at vi har følgende formel for
$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- Når man anvender denne formel, kan man finde resultatet på antal løsninger.
- Det er vigtigt, at være opmærksom på at lave to udregninger med både + og minus efter negativ b-værdien.

Andengradspolynomium

$$f(x) = \boxed{a}x^2 + \boxed{b}x + \boxed{c}$$

A-værdien forklarer om selve parablens form på ligningen.

Er a-værdien positiv, så er det en glad-parabel.
Er a-værdien negativ, så er det en sur-parabel.

Er a-værdien tæt på 0 er parablen enten eller næsten flad.

Er a-værdien væk fra 0 er parablen bøjet.

B-værdien forklarer om selve parablens placering langs førsteaksen.

Er b-værdien positiv, så er andengradspolynomiet ved venstre side af andenaksen.

Er b-værdien negativ, så er andengradspolynomiet ved højre side af andenaksen.

Er b-værdien ved 0, så er parablen liggende i andenaksen med toppunkt i skæringen ved punktet.

C-værdien forklarer skæring med andenaksen.

Er c-værdien positiv, så er andengradspolynomiets skæringspunkt i den positive-del af andenaksen.

Er c-værdien negativ, så er andengradspolynomiets skæringspunkt i den negative-del af andenaksen.

Er c-værdien 0, så er andengradspolynomiets skæringspunkt i Origo (0,0).

SLUT 10

Noter fra Student: Vivek Misra

vimis22@student.sdu.dk

University of Southern Denmark (SDU)