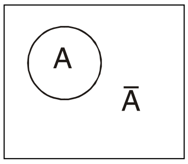
III. Logika

Boole algebra

A halmazok logikája

A és $\bar{A}$ Venn diagrammja



- Halmazon a közös tulajdonságú dolgok összességét értjük.
- A halmaz elemei a halmazhoz tartozó dolgok
- Egy A halmaz **kiegészítő (komplemens) halmaza** alatt azt az $\bar{A}$ halmazt értjük, mely elemeinek nincs meg az A elemeinek tulajdonsága.

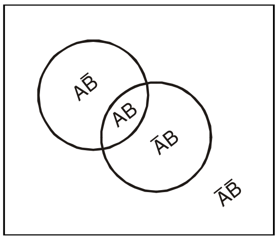
- Az üres halmaz olyan halmaz, melynek egyáltalán nincs eleme. Az üres halmazt nulla halmaznak, 0 halmaznak is nevezik. **Az üres halmaz jele a 0**.
- Részhalmaz egy halmaz elemeinek olyan csoportja, melyeket további tulajdonságokkal határozunk meg.
- Az üres halmaz komplemense az univerzális halmaz a Boole algebrában.
  Az univerzális halmaz jele az 1. Az univerzális halmaz komplemense a 0 halmaz.

Példa: az egész számok halmazának részhalmaza a páros számok összessége. Ekkor a páratlan számok (a nem páros számok) a páros számok komplemense. A páros és a páratlan számok együtt alkotják az egész számok univerzális halmazát.

- Két halmaz (A és B) közös része, **logikai szorzata**, **metszete,** konjunkciója alatt azokat az elemeket értjük, melyek egyszerre elemei A-nak **és** B-nek is. A logikai szorzatot a Boole algebrában így jelöljük: C = AB. Természetesen AB = BA

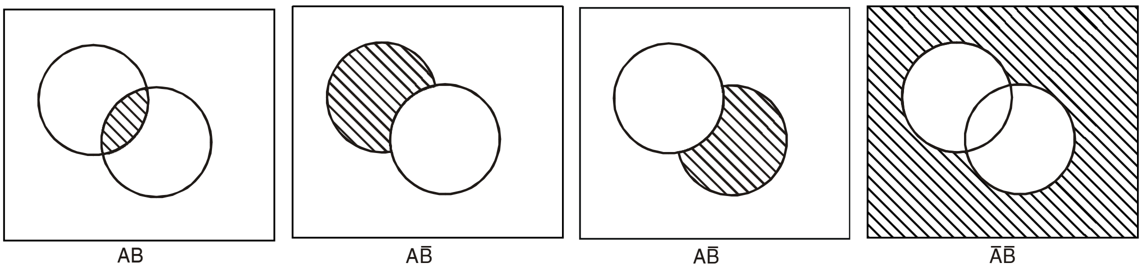
  A halmazelméletben szokás AB-t $A \cap B$ -vel jelölni.

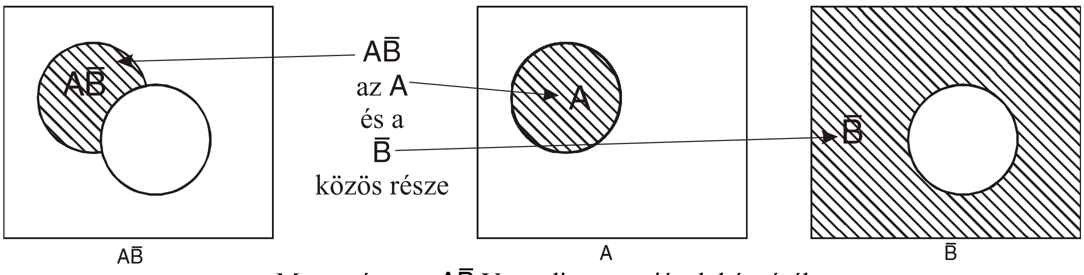
Az A és B halmaznak csak a következő részhalmazai képzelhetők el: AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ és $\bar{A}\bar{B}$



Finomabb (hogy kisebb részeket tartalmazó) felosztás nem képzelhető el, ezért az AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ és $\bar{A}\bar{B}$ részhalmazokat **mintermeknek** is nevezik. A mintermek tehát logikai szorzatok az összes szóba előforduló kombinációban.
A négy lehetséges részhalmaz külön-külön:

AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ és $\bar{A}\bar{B}$ Venn diagrammjai





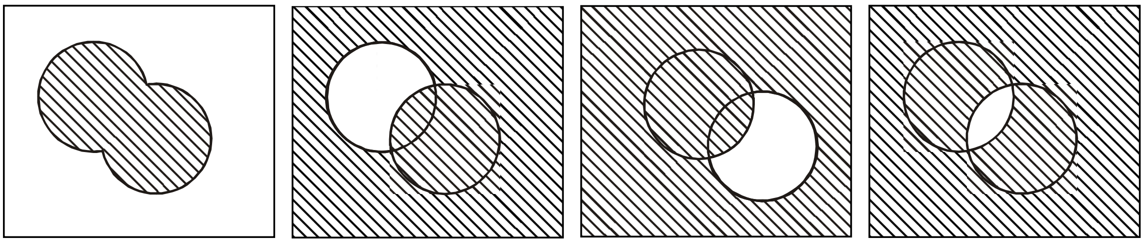
Magyarázat az $A\bar{B}$ Venn diagrammjának képzéséhez

➯ Azok az elemek, melyek **vagy** az A halmazhoz, **vagy** a B halmazhoz, **vagy** mindkettőhöz tartoznak, az **A éb B halmaz logikai összegét**, más néven egyesítését, únióját alkotják.

A logikai összeget (úniót) a Boole algebrában úgy jelöljük, mint a szokásos összeadást: $D = A + B$

Mivel A és B egyenként csak ponált, vagy negált lehet, így a logikai összeg képzés is csak négyféle esetre lehetséges, $A + B$, $A + \overline{B}$, $\overline{A} + B$ és $\overline{A} + \overline{B}$-re:

$A + B$, $A + \overline{B}$, $\overline{A} + B$ és $\overline{A} + \overline{B}$ Venn diagrammjai



Durvább (nagyobb részeket tartalmazó) felosztás nem képzelhető el, ezért az $A + B$, $A + \overline{B}$, $\overline{A} + B$ és $\overline{A} + \overline{B}$ részhalmazokat **maxtermeknek** is nevezik. A maxtermek tehát logikai összegek az összes szóba előforduló kombinációban.

Kétértékű logika és a bináris számok

Eddigi megállapításainkban láttuk, egy logikai halmaz vagy üres, vagy nem üres halmaz volt. Ez a tulajdonsága a Boole algebra által tárgyalt halmazoknak alkalmassá teszi a halmazok jellemzését kétféle értékű jelekkel, fogalmakkal. A két állapot jellemzésére használhatjuk a 0, és az 1 számokat. **0, ha üres a halmaz, és 1, ha nem üres.**

Látható, a bináris számrendszer számjegyei logikai halmazok jellemzésére is alkalmasak. Az univerzális halmazt, mely nem üres halmaz, eddig is 1-gyel jelöltük, míg a biztosan üres 0 halmazt 0-val.
A logikai egyenletek hasonlítanak a számok egyenleteihez. Pl. a logikai szorzatot szorzásnak jelöljük, a logikai összeget összegnek, stb. De látni fogjuk, hogy nem minden esetben van megfelelője a logikai tételeknek a számokon értelmezett műveleteknél (pl. abszorpció).

A továbbiakban mindig kétértékű logikát tanulmányozunk

További kétértékű jellemzők lehetnek felsorolás jelleggel: Van/nincs; fekete/fehér; jó/rossz, kicsi/nagy, ilyen-/olyan irányú, magas/alacsony, világos/sötét, **igaz/hamis**. Utóbbi pár külön alfejezetet érdemel:

Logikai függvények

A logikai függvények független logikai változókhoz rendelt függő logikai változó(k). Hasonlóan, mint a számoknál, csak itt az értékek logikai értékek. Tehát vizsgáljuk, hogyan függ egy (vagy több) logikai változó a független logikai változóktól. Pl. az $X = AB\overline{C}$ azt jelenti, X akkor igaz, ha A igaz és B is igaz és C hamis. Hasonlóan az $Y = \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$ egyenlet is egy logikai függvény, mely közli, Y mikor lesz igaz.

Ítéletek logikája

A kétértékű logika az olyan ítéletek meghozására alkalmas, mikor ítéletünk csak kétféle lehet. **Az ítéletet egy állításról hozzuk** a következő módon: **az állítás vagy igaz, vagy hamis**, csakis az egyik, de az mindenféleképpen.

Állításkalkulus

A logikai ítéletek meghozását állításkalkulusnak is nevezik.. Az állításkalkulus hasonlít a beszélt nyelvhez. Néhány példával mutatjuk meg ezt a hasonlóságot:

X igaz, hogy folyik a víz, ha **A** csap nyitott **ÉS B** csap is nyitott, **ÉS NEM** nyitott a **C** biztonsági szelep. Egyenlete: $X = AB\overline{C}$

Y igaz, hogy főzhetek, ha **A** van gáz, **ÉS B** van víz, **ÉS C** van élelmiszer. Egyenlete: $Y = ABC$

Z igaz, hogy bemehetek, ha **A** van kulcsom **VAGY NEM B** zárt az ajtó, **VAGY C** van elég erőm (tankom, kalapácsom-vésőm, bombám, stb.), **VAGY B** zárt az ajtó **ÉS (D** meghallják a csengőt, **VAGY E** elég nagyot tudok kiabálni, **VAGY F** elég nagyot dörömbölök**)**
Egyenlete: $Z = A + \overline{B} + C + B(D + E + F)$

Az **L** lámpa ég, ha az **A** keleti kapcsoló **1**-es **ÉS B** nyugati kapcsoló is **1**-es állásban van, **VAGY** az **A** keleti kapcsoló **NEM 1**-es **ÉS** a **B** nyugati kapcsoló is **NEM 1**-es állásban van. Ez egy úgynevezett alternatív kapcsolás, akkor világít **L**, ha a két kapcsoló azonos állásban van.
Egyenlete: $L = AB + \overline{A}\overline{B}$

Az **L** lámpa ég, ha az **A** északi kapcsoló **NEM 1**-es **ÉS B** déli kapcsoló **1**-es állásban van, **VAGY** az **A** északi kapcsoló **1**-es **ÉS** a **B** déli kapcsoló **NEM 1**-es állásban van. Ez is alternatív kapcsolás, akkor világít **L**, ha a két kapcsoló különböző állásban van.
Egyenlete: $L = AB + \overline{A}\overline{B}$

- A logikai negálást NEM-nek (nemzetközi NOT) mondjuk.

Pl. $\overline{A}$ kimondva NEM A. $\overline{A}$ jelentése: NEM A, NOT A, tagadott A, vagy negált A.

- Amit nem tagadunk, állítjuk. Az állított A-t ponált A-nak is mondják.
- A logikai szorzatot az ÉS-nek mondjuk.
- A logikai összeget az VAGY-nak mondjuk.

Példák:

AB kimondva: A ÉS B.
A + B kimondva: A VAGY B.
Az $X = A\overline{B}$ egyenlet kimondva: X (igaz), ha A ÉS NEM B (igaz).
Az $Y = \overline{D} + E$ egyenlet kimondva: Y (igaz), ha NEM D VAGY E (igaz).

Megjegyzés: Sokszor a zárójelben levőket nem mondják, nem kell kimondani, csak úgy érthetőbb.

Igazságtáblázat

Tanulmányaink során egyszerű, kétértékű ítéleteket hozunk, egyszerű, egyenként két lehetséges állapotú feltételekkel. Ezt táblázatban is ábrázolhatjuk. Ebben a táblázatban egyszerűen számba vesszük, az ítélet mikor, milyen feltételek esetén igaz, és mikor hamis. Az ilyen táblázatot nevezzük igazságtáblázatnak.

Logikai NEM igazságtáblázata:

$X = \overline{A}$

A	X
Hamis	1
Igaz	0

Logikai ÉS igazságtáblázata:

$Y = AB$

Beszélt			Jelölt		
A	B	Y	A	B	Y
Hamis	Hamis	Hamis	0	0	0
Hamis	Igaz	Hamis	0	1	0
Igaz	Hamis	Hamis	1	0	0
Igaz	Igaz	Igaz	1	1	1

Logikai VAGY igazságtáblázata:

$Z = A + B$

Beszélt			Jelölt		
A	B	Z	A	B	Z
Hamis	Hamis	Hamis	0	0	0
Hamis	Igaz	Igaz	0	1	1
Igaz	Hamis	Igaz	1	0	1
Igaz	Igaz	Igaz	1	1	1

A Boole algebra azonosságai és tételei

Alapvető azonosságok

$A + A = A$. Természetesen akárhányszor vesszük A önmagával való logikai összegét, A-t kapunk.

$A + \overline{A} = 1$. Ez következik a komplemens halmaz értelmezéséből, (lásd ott)

$AA = A$. Természetesen akárhányszor vesszük A önmagával való logikai szorzatát, A-t kapunk.

$A\overline{A} = 0$. Egy halmaznak és komplemens halmazának nincs közös része (metszete)

$\overline{\overline{A}} = A$ A kettős tagadás állításnak felel meg. **A tagadás ellentettje tehát állítás.** (A tagadás tagadása állítás.)

$A + 0 = A$ Bármilyen A halmazhoz hozzáadjuk a 0 halmazt, magát az A halmazt kapjuk

$A + 1 = 1$ Mivel A részhalmaza az univerzális halmaznak.

$A1 = 1A = A$

$A0 = 0A = 0$ Mivel A-nak és a 0 halmaznak nincs közös eleme

Kommutativitás (felcserélhetőség)

$A + B = B + A$

$AB = BA$

Asszociativitás (átzárójelezhetőség)

A logikai szorzat átzárójelezhető:

$ABC = A(BC) = (AB)C = B(AC)$, stb.,

A logikai összeg átzárójelezhető

$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C = B + (A + C)$, stb.

Disztributivitás (átcsoportosíthatóság)

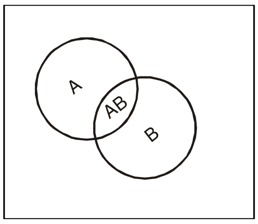
$A(B + C) = AB + AC.$

Abszorpciós törvény

$A + AB = A$

$A(A + B) = A$

Az abszorpció nem hasonlít a számok viselkedésére!



Itt a második alak a disztributív törvénnyel az első alakjára hozható: $A(A + B) = AA + AB = A + B$. Ezért csak $A + AB = A$ -t kell igazolni. Ezt a Venn diagramból beláthatjuk. Később igazolni fogjuk igazságtáblával, és Karnaugh táblával is.

További abszorpciós törvények:

$A + \overline{A}B = A + B$

$A(\overline{A} + B) = AB$

De Morgan tételei

De Morgan tételei fontosak, gyakran fogjuk használni őket!

$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, ill. akárhány tagra:

$\overline{A + B + ... + N} = \overline{A}\,\overline{B}...\overline{N}$

$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$, ill. akárhány tagra:

$\overline{AB...N} = \overline{A} + \overline{B} + ... + \overline{N}$

$\overline{A + B + ... + N} = \overline{A}\,\overline{B}...\overline{N}$ belátható, ha meggondoljuk, mit is jelent az egyenlet bal és jobb oldala. A bal oldal akkor igaz, ha hamis az $A + B + ... + N$ állítás. Ez pedig akkor hamis, ha $A + B + ... + N$ mindegyik tagja hamis. Ekkor azonban ezek tagadottja, $\overline{A} + \overline{B} + ... + \overline{N}$ mind igaz. Utóbbi pedig pontosan a tétel egyenletének jobb oldala. Másképp fogalmazva: Ha az állítások logikai összege hamis, akkor az állítások mindegyike hamis. Természetesen ekkor minden tagadott állítás igaz.

Hasonlóképpen látható be $\overline{AB...N} = \overline{A} + \overline{B} + ... + \overline{N}$ is. Itt a bal oldalon az $\overline{AB...N}$ csak akkor igaz, ha $AB...N$ hamis, azaz legalább egy eleme hamis. Ekkor az egyenlet jobb oldala is igaz lesz, mert legalább ez az egy elem negáltja igaz lesz, így állításunkat igazoltuk. Másképp fogalmazva: Ha az állítások logikai szorzata hamis, akkor az állítások legalább egyike hamis. Természetesen ekkor legalább egy tagadott állítás igaz.

Logikai állítások bizonyítása

Bizonyítás igazságtáblázattal

Ha egy állítás összes szóba jöhető esetét megvizsgáljuk egy táblázattal, az ún igazságtáblázattal, és igazolást nyer, amit állítottunk, állításunkat bizonyítottuk. Az igazságtáblázatról a *Logikai* egyenletek

alfejezetben (IV.2. old.) bővebben lesz szó

Nézzük meg ezt a módszert néhány példán:

Igazoljuk, az első abszorpciós tételt, hogy $A + AB = A$. Itt A és B egyenként két értékű lehet, vizsgáljuk meg hát az összes szóba jöhető esetet:

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Látható, $A + AB$ oszlopában minden sorban megegyezik az érték A-val, függetlenül B értékétől.
Ezzel igazoltuk, $A + AB = A$.

Igazoljuk az $A + \bar{A}B = A + B$ abszorpciós tételt. Itt A és B egyenként kétértékű lehet, vizsgáljuk meg hát az összes szóba jöhető esetet:

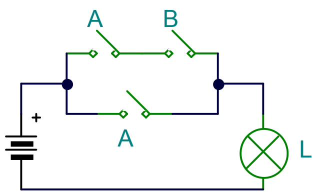
A	B	A + B	$\bar{A}$	$\bar{A}B$	$A + \bar{A}B$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Látható, $A + B$ oszlopa minden sorban megegyezik az érték $A + \bar{A}B$ -vel.
Ezzel igazoltuk, $A + \bar{A}B = A + B$.

Bizonyítás meggondolással (pl. érintkezőkkel)

Az érintkezőkről lásd az Érintkezők, kapcsolók, nyomógombok logikája fejezetet (III.7 old.)
Ha egy állítást megvalósítunk érintkezőkkel, egyszerűbb esetben ránézésre azonnal beláthatjuk, igaz-e, vagy sem. Nézzük meg ezt a módszert néhány példán:

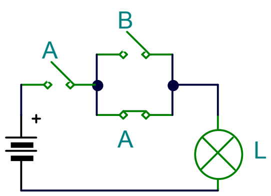
Igazoljuk, az első abszorpciós tételt, hogy $A + AB = A$. Valósítsuk meg érintkezőkkel –t, és vonjuk le a következtetést:



Meggondolás: Most $L = A + AB$.
Ha, $A = 1$, a lámpa mindig ég, ha $A = 0$, akkor pedig soha. Így a lámpa csak A-tól függ, $L = A .= A + AB$
Ezzel állításunkat igazoltuk

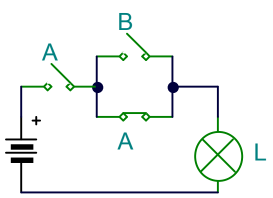
Ha $A = 1$, akkor mind a két A érintkező vezet. Ezt **együttmozgó érintkezőknek mondjuk**, mikor az egyik be (ki) kapcsolt, a másik is be (ki) kapcsol, azaz együtt mozognak.

Igazoljuk, az utolsó abszorpciós tételt tételt, hogy $A(\bar{A} + B) = AB$. Valósítsuk meg érintkezőkkel, és vonjuk le a következtetést:

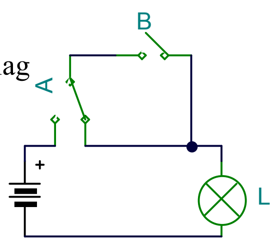


Meggondolás: Most $L = A(\bar{A} + B)$.
Ha $A = 0$, a lámpa sosem ég. Ha $A = 1$, a párhuzamos ág nem igaz, csak, ha $B = 1$, mert ekkor $\bar{A} = 0$.
Tehát a lámpa csak akkor ég, ha $A = 1$ ÉS $B = 1$.
Ezzel állításunkat igazoltuk

Ha $A = 1$, akkor az $\bar{A} = \bar{0}$ érintkező nem vezet. A két érintkező egyszerre mozog, mikor az egyik 0, a másik 1, és fordítva. Mikor az egyik be (ki) kapcsol, a másik ki (be) kapcsol, azaz együtt mozognak, de mindig ellenkező állásúak. Ilyen a váltóérintkező is, mikor egyik állásban a 0 felé, a másikban az 1 felé vezet. Sok esetben a két együttmozgó, de ellentétes állású érintkezőpárt át lehet alakítani váltóérintkezős megoldásúvá. Most is:



A két kapcsolás logikailag teljesen megegyezik.
$L = A(\bar{A} + B) = AB$



Bizonyítás algebrai módszerrel

Ez olyan átalakítást jelent, melyben a Boole algebra azonosságainak és tételeinek felhasználásával olyan alakra hozzuk az eredeti állítást, melyet igazolni szeretnénk. Ehhez bővíteni és csoportosítani kell, elég nagy leleményességet igényel, e módszer elég körülményes. Ha si-