



Дипломная работа

студента 525 группы

Лапина Владимира Николаевича

Об устойчивости плоских течений идеально-
и вязкопластических тел

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Георгиевский Дмитрий Владимирович

Москва, 2008

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Общая постановка задачи | 2 |
| 1.1 | Плоское течение идеальножёсткопластического слоя | 3 |
| 1.2 | Плоское течение вязкопластического слоя | 3 |
| 1.3 | Обобщенная спектральная краевая задача Орра-Зоммерфельда | 4 |
| 1.4 | Операторная постановка и непрерывный спектр задачи (9) - (10) | 5 |
| 2 | Интегральные оценки устойчивости | 6 |
| 2.1 | Выделение области, содержащей спектр задачи об устойчивости идеальнопластического течения Куэтта | 6 |
| 2.2 | Измененная схема метода интегральных соотношений | 7 |
| 3 | Применение техники стационарной теории рассеяния | 9 |
| 3.1 | Уравнение для t -матрицы оператора H | 9 |
| 3.2 | T -оператор модели Фридрихса в задаче Куэтта | 9 |
| 3.3 | Волновые операторы для H_0 и $H_0 + V$ | 11 |
| 3.4 | Разложение по собственным функциям дискретного и непрерывного спектров задачи (12) - (13) | 12 |
| 4 | Численное исследование задачи (9) - (10) | 13 |
| 5 | Асимптотическое исследование задачи (7) - (8) | 13 |
| 5.1 | Фундаментальная система решений задачи (7) - (8) | 14 |
| 5.2 | Решение уравнения (7) в сходящихся рядах | 14 |
| 5.3 | Решение уравнения (7) в асимптотических рядах | 16 |

Вопросы устойчивости деформирования вязко- и идеальнопластических тел были впервые затронуты в классических работах [1, 2, 3]. В [1] дана постановка задачи устойчивости плоского вязкопластического течения в терминах возмущений функции тока и потенциала скорости. В [4] построена теория пластичности анизотропных сред. Общую постановку и методы исследования задач устойчивости деформирования вязкопластических и более сложных тел можно найти в [5].

Данная работа содержит исследование сингулярной и несамосопряженной краевой задачи, возникающей при изучении устойчивости плоских течений идеально- и вязкопластических тел. В случае идеальнопластического материала проблема сформулирована в рамках модели Фридрихса. Подход, разработанный в работах [6, 7], позволяет выполнить спектральный анализ задачи: изучить строение спектра, построить разложение по собственным функциям непрерывного и точечного спектра. Получено строгое доказательство устойчивости идеальножесткопластического течения Куэтта. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие эффект "зарождения" точек дискретного спектра на непрерывном с их последующим движением вдоль мнимой оси. Результаты расчетов, часть которых содержится в приложении, согласуются с теоретическими выводами. Изучены асимптотические свойства обобщенной задачи Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса. Описаны два метода представления фундаментальных решений асимптотическими рядами, которые могут быть использованы для численного определения минимального критического числа Рейнольдса.

1 Общая постановка задачи

Рассмотрим задачу об устойчивости течения несжимаемого вязко- и идеальножесткопластического тела в полосе $\{x \in \mathbb{R}, z \in [-1, 1]\}$. Предполагается, что поле скоростей стационарного течения направлено вдоль оси x и зависит только от z , то есть $\vec{v}_0 = (u(z), 0, 0)$. Чтобы не вводить в рассмотрение жесткие зоны, потребуем строгую монотонность функции $u(z)$

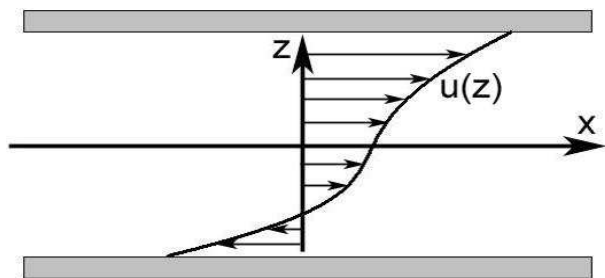


Рис. 1: Плоское течение с профилем $u(z)$

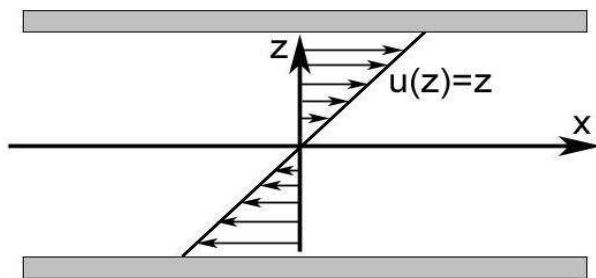


Рис. 2: Плоское течение Куэтта

1.1 Плоское течение идеальнотвёрдогопластического слоя

Замкнутая система уравнений для приведенного давления p_o и скорости \vec{v}_o имеет вид:

$$-\text{grad} p_o + 2\tau_y \text{Div} \frac{\underline{v}}{\sqrt{2\underline{v} : \underline{v}}} = \frac{d\vec{v}_o}{dt}, \quad \text{div} \vec{v}_o = 0, \quad \underline{v} = \text{Def} \vec{v}_o, \quad (1)$$

где $\text{Def} \vec{v}_o = \frac{1}{2} (\text{Grad} \vec{v}_o + (\text{Grad} \vec{v}_o)^T)$, τ_y - безразмерный предел текучести при сдвиге. Она дополняется двумя кинематическими граничными условиями непротекания

$$v_o^3(-1) = v_o^3(1) = 0, \quad (2)$$

которые заведомо выполнены для плоских течений.

Если положить $p_o = \text{const}$, то система уравнений (1) удовлетворяется при любой функции $v_o^1 = u(z) \in C^1[-1; 1]$. Физический смысл такой неединственности и связь с неустойчивостью описаны в [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассматривая интегральную постановку задачи о течении тела, аналогичную (1), легко заметить, что $u(z)$ является её решением даже для $u(z) \in L_2[-1; 1]$. В этой работе $u(z)$ для удобства считается произвольной, наперед заданной строго монотонной функцией из класса $C^2[-1; 1]$.

1.2 Плоское течение вязкопластического слоя

Выше мы сформулировали задачу о течении идеальнотвёрдогопластического тела, что является, конечно, идеализацией благодаря которой в дальнейшем исследовании задач устойчивости удастся ограничиться простыми моделями. В реальных течениях в той или иной степени сказываются эффекты, обусловленные вязкостью. Исследование устойчивости вязкопластических потоков сопряжено как со сложностью соответствующих уравнений, так и с постановкой самих задач. Дело в том, что существует лишь два вида стационарных плоскопараллельных профилей течения в слое. Это течение Куэтта с линейным распределением скоростей и течение Пуазейля с параболическим профилем, а также их комбинация. Тем не менее, задачи об устойчивости течения вязкопластического тела возможно рассматривать и для течений с произвольной зависимостью $u(z)$. Обоснование такого подхода для ньютоновских жидкостей можно найти в [9].

Введение в определяющие соотношения коэффициента динамической вязкости μ преобразует систему уравнений (1) - (2) к виду:

$$-\text{grad} p_o + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}_o + 2\tau_y \text{Div} \frac{\underline{v}}{\sqrt{2\underline{v} : \underline{v}}} = \frac{d\vec{v}_o}{dt}, \quad \text{div} \vec{v}_o = 0, \quad \underline{v} = \text{Def} \vec{v}_o, \quad (3)$$

$$v_o^1(-1) = V_1, \quad v_o^1(1) = V_2, \quad v_o^2(-1) = v_o^2(1) = v_o^3(-1) = v_o^3(1) = 0, \quad (4)$$

где Re - число Рейнольдса, величина обратная безразмерной вязкости, V_1 и V_2 - заданные продольные скорости границ. Дополнительно в канале может быть задан постоянный перепад давления Δp . Однако, при этом нужно помнить о возможности появления жесткой зоны, в области которой уравнения (3) - (4) теряют смысл. При этом исследуется на устойчивость течение между жестким ядром и стенкой канала. Граничные условия, которые следует задавать на поверхности жестких зон, описаны в [5].

Несложно доказать единственность решения задачи (3) - (4) в классе сдвиговых полей $u(z) \in C^2[-1; 1]$. Однако возникают трудности при изучении устойчивости решений этой

задачи при больших числах Рейнольдса, так как предельный переход $Re \rightarrow \infty$ в (3) сингулярен (в частности, решения уравнения (3) не всегда стремятся к решениям (1) [8]). В рамках модели вязкой жидкости такой анализ был впервые успешно проделан Гейзенбергом [10], Толлмином [11] и Линем [12]. В данной работе аналогичное исследование будет проведено для вязкопластического тела при пределе текучести $\tau \neq 0$.

1.3 Обобщенная спектральная краевая задача Орра-Зоммерфельда

Дадим математическую постановку задачи об устойчивости вязкопластического течения в слое. Для этого предположим, что на основное состояние системы наложены малые возмущения $\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}$, $p = p_0 + \delta p$. Как показано в [5], для достаточно широкого класса возмущений ($v_{23} = 0$) справедлива обобщенная теорема Сквайра, позволяющая ограничиться рассмотрением двумерной картины возмущений вместо трехмерной. Линеаризация уравнений движения относительно заданного стационарного течения с профилем $u(z)$ и переход к представлению поля скоростей флуктуаций через функцию тока $\Psi(x, z, t)$ приводит к уравнению (см. [5])

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \Psi + 4\tau_y \left(\frac{\Psi_{xz}}{|u'|} \right)_{xz} = (\Delta \Psi)_t + u(\Delta \Psi)_x - u'' \Psi_x. \quad (5)$$

Граничные условия, аналогичные (4), преобразуются к виду $\Psi_x(x, \pm 1, t) = 0$, $\Psi_z(x, \pm 1, t) = 0$. Подставляя $\Psi(x, z, t)$ в виде $\Psi(x, z, t) = \psi(z) \exp(isx + \alpha t)$ (учет всех гармоник равносильно преобразованию Фурье по переменной x), преобразуем задачу (5) к спектральному виду (обобщенное уравнение Орра-Зоммерфельда, см. [5])

$$-\frac{i}{sRe} (\psi^{IV} - 2s^2\psi'' + s^4\psi) = -i4\tau_y s \left(\frac{\psi'}{|u'|} \right)' + \left(u - \frac{i\alpha}{s} \right) (\psi'' - s^2\psi) - u''\psi, \quad (6)$$

где $s \in \mathbb{R}$ – вещественное волновое число, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in \mathbb{C}$ – комплексная частота, $\psi(z)$ – комплексная амплитуда функции тока. Без ограничения общности положим $u'(z) > 0$ и введем обозначение $\tau = 4\tau_y$. Для дальнейшего исследования вязкопластического течения удобно перейти к спектральному параметру λ , подставив $\alpha = -is\lambda$. После простых преобразований мы получим краевую задачу:

$$-\frac{i}{sRe} (\psi^{IV} - 2s^2\psi'' + s^4\psi) = \left(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda \right) (\psi'' - s^2\psi) + is\tau \frac{u''}{u'^2} \psi' - \left(u'' + i\frac{\tau s^3}{u'} \right) \psi, \quad (7)$$

$$\psi(-1) = \psi(1) = 0, \quad \psi'(-1) = \psi'(1) = 0, \quad (8)$$

Воспользуемся последним уравнением (7) и выпишем его для идеальнопластической среды. Отметим, что в этом случае удобнее использовать параметр λ , определенный равенством $\alpha = -i\lambda s^2$. Формально устремив число Рейнольдса в бесконечность, в пределе будем иметь обобщенное уравнение Рэлея

$$\left(\frac{u}{s} - i\frac{\tau}{u'} - \lambda \right) (\psi'' - s^2\psi) + i\tau \frac{u''}{u'^2} \psi' - \left(\frac{u''}{s} + i\frac{\tau s^2}{u'} \right) \psi = 0. \quad (9)$$

Это уравнение второго порядка дополняется двумя граничными условиями (8) из четырех

$$\psi(-1) = \psi(1) = 0. \quad (10)$$

Два других условия опущены, физически это означает, что на стенках разрешено проскальзывание. Так как при достаточно больших числах Рейнольдса только очень тонкий слой

деформируемого тела будет "прилипать" к границам канала, мы действительно обнаруживаем эффект проскальзывания. Однако зачастую именно этот пограничный слой ответственен за неустойчивость течения, так как именно в нем осуществляется передача пульсационной энергии от основного течения к возмущенному (например, в случае течения Пуазейля вязкой жидкости см. [13, 14]).

Спектр краевой задачи (7) - (8) состоит из собственных значений конечной кратности, а соответствующая система собственных и присоединенных функций полна в пространстве функций с конечной энергетической нормой [15]. Однако, в пределе нулевой вязкости задача (7) - (8) превращается в задачу (9) - (10), спектр которой содержит непрерывную компоненту (см. ниже). Также известно, что спектр несамосопряженного сингулярно возмущенного (см. [16]) оператора (7) - (8) неаналитически зависит от малого параметра $1/Re$ в точке $Re = \infty$ и может измениться скачком (в контексте перехода от вязкой жидкости к идеальной см. [17]).

1.4 Операторная постановка и непрерывный спектр задачи (9) - (10)

При исследовании спектральных свойств задачи (9) - (10), удобно перейти к операторной форме ее записи. Заменой $\varphi = \Delta_s \psi$, где $\Delta_s = \frac{d^2}{dz^2} - s^2$ - дифференциальный оператор с нулевыми граничными условиями на концах отрезка $[-1, 1]$, задача сводится к исследованию спектральных свойств оператора H , действующего в $L_2(-1, 1)$

$$\begin{aligned} H\varphi(z) = & \left(\frac{u}{s} - i\frac{\tau}{u'} \right) \varphi(z) + i\tau \frac{u''}{u'^2} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} (\Gamma(z, z')) \varphi(z') dz' - \\ & - \left(\frac{u''}{s} + i\frac{\tau s^2}{u'} \right) \int_{-1}^1 \Gamma(z, z') \varphi(z') dz', \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Gamma(z, z')$ - функция Грина дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2} - s^2$ с краевыми условиями (10). Возможность обращения в ноль коэффициента при старшей производной в уравнении (9) делает задачу (9) - (10) сингулярной и приводит к появлению непрерывной компоненты в спектре. Оператор $H = H_0 + V$, где $V = V_1 + V_2$, представляет собой возмущение оператора H_0 умножения на функцию $\left(\frac{u}{s} - i\frac{\tau}{u'} \right)$ суммой интегральных операторов (см. (11)), ядра которых несимметричны и несимметризуемы (в случае, если u'' не сохраняет знак на $[-1; 1]$ и $\tau \neq 0$). Таким образом, операторная постановка задачи укладывается в рамки несамосопряженной модели Фридрихса.

В предположении "малости" возмущения и самосопряженности $H = H_0 + \varepsilon V$, где H_0 - оператор умножения на независимую переменную, а V - интегральный оператор с гёльдеровским ядром, Фридрихсом [18] построена стационарная теория рассеяния. Анализ самосопряженной модели Фридрихса без малого параметра ε в возмущении был проведен Фадеевым совместно с Ладыженской [19, 20] при условии достаточной гладкости V (ядро оператора удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\mu_0 > 1/2$ по каждой переменной). В [21] была рассмотрена задача, возникающая в теории устойчивости плоских течений идеальной жидкости. Проблема сформулирована в рамках несамосопряженной модели Фридрихса, описано строение множества собственных значений, выписан явный вид собственных функций непрерывного спектра. Методы работы [20] были развиты Степиным для несамосопряженного возмущения оператора H_0 и использованы для спектрального анализа гидродинамической задачи Рэлея. В [6, 7] детализирована структура спектра, построено разложение по собственным функциям непрерывного и дискретного спектров, получена временная асимптотика решения исходного нестационарного уравнения. В данной работе указанный подход

используется для исследования обобщенной задачи Рэлея (9) - (10).

Оператор $V = V_1 + V_2$ вполне непрерывен, поэтому согласно теореме Вейля непрерывный спектр оператора H , действующего в $L_2(-1; 1)$, совпадает с непрерывным спектром H_0 [22]. Последний состоит из точек образа пути $\chi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi(x) = \frac{u(x)}{s} - i\frac{\tau}{u'(x)}$. Обозначим эту кривую γ . В соответствии с этим будем говорить о непрерывном спектре γ задачи (9) - (10).

ЗАМЕЧАНИЕ. Непрерывный спектр, который в случае задачи Рэлея заполнял отрезок $[u(-1)/s; u(1)/s]$ и соответствовал нейтральным колебаниям, при введении в определяющие соотношения среды предела текучести превращается в кривую γ и смещается в устойчивую область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [6]). *Обобщённой собственной функцией* (непрерывного спектра) задачи (9) - (10) назовем функцию ψ_c , $c = c_r + ic_i \in \gamma$, удовлетворяющую уравнению (9) на интервалах $(-1; u^{-1}(sc_r))$ и $(u^{-1}(sc_r); 1)$, граничным условиям (10) и условию непрерывности в точке $z_c = u^{-1}(sc_r)$.

Заметим, что точка z_c является регулярной особой точкой для уравнения (9) (см. [23]). Комбинируя два решения из соответствующей фундаментальной системы, одно из которых имеет устранимую особенность в окрестности z_c типа $(z - z_c)\ln(z - z_c)$, можно построить обобщенную собственную функцию. Если обобщенная собственная функция ψ_c оказывается регулярной, т.е. ψ_c дифференцируема и ψ'_c абсолютно непрерывна, соответствующая точка $c \in \gamma$ является собственным значением задачи (9) - (10), погруженным в непрерывный спектр.

2 Интегральные оценки устойчивости

Общая схема метода интегральных соотношений, использованная ранее в задачах устойчивости плоскопараллельного сдвига в слое идеальной (задача Рэлея) [24], вязкой (задача Орра-Зоммерфельда) [25], вязкой стратифицированной (задача Дразина) [26], а также идеально-и вязкопластической жидкостей [5] позволяет получать общие достаточные признаки устойчивости. Она включает в себя использование различных интегральных неравенств (Шварца, Пуанкаре, Фридрихса). Вытекающие условия устойчивости зачастую возможно уточнить в рамках конкретной задачи, если отказаться от использования некоторых априорных оценок. Ниже приведены новые интегральные оценки для задачи (9) - (10).

2.1 Выделение области, содержащей спектр задачи об устойчивости идеальнопластического течения Куэтта

Рассмотрим краевую задачу (9) - (10) в случае линейного профиля скоростей по толщине: $u(z) = z$, $-1 < z < 1$, что представляет собой течение Куэтта в узком смысле. Легко видеть, что $V_1 = 0$, а уравнение (9) перепишется в виде

$$\left(\frac{z}{s} - i\tau - \lambda\right) (\psi'' - s^2\psi) - i\tau s^2\psi = 0, \quad (12)$$

$$\psi(-1) = \psi(1) = 0, \quad (13)$$

Операторная постановка задачи (11) принимает вид

$$H\varphi(z) = \left(\frac{z}{s} - i\tau\right) \varphi(z) - i\tau s^2 \int_{-1}^1 \Gamma(z, z') \varphi(z') dz'. \quad (14)$$

Непрерывный спектр γ этой задачи совпадает с отрезком в нижней полуплоскости, параллельным действительной оси.

ЛЕММА. Любая точка $\lambda \in \gamma$ не является собственным значением задачи (12) - (13).

Δ . Пусть ψ - собственная функция задачи (12) - (13) для собственного значения $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \gamma$. Из (12) видно, что $\psi(z_\lambda) = 0$ (для задачи Куэтта $z_\lambda = s\lambda_r$). Делим (12) на $(\frac{z}{s} - i\tau - \lambda) = (\frac{z}{s} - \lambda_r)$ и умножаем скалярно в $L_2(-1; 1)$ на ψ :

$$\int_{-1}^1 \psi'' \bar{\psi} dz - s^2 \int_{-1}^1 |\psi|^2 dz - i \int_{-1}^1 \frac{\tau s^2}{\frac{z}{s} - \lambda_r} |\psi|^2 dz = 0.$$

Интегрируя по частям с учётом граничных условий, получим

$$- \int_{-1}^1 |\psi'|^2 dz - s^2 \int_{-1}^1 |\psi|^2 dz - i \int_{-1}^1 \frac{\tau s^2}{\frac{z}{s} - \lambda_r} |\psi|^2 dz = 0. \quad (15)$$

Это равенство может выполняться только для $\psi \equiv 0$. \square .

ЛЕММА. Точки дискретного спектра $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_p(H)$ содержатся в прямоугольнике $\lambda_r \in (-\frac{1}{s}; \frac{1}{s})$, $\lambda_i \in (-\tau; \frac{-\pi^2 \tau}{\pi^2 + 4s^2}]$.

Δ . Пусть опять ψ - собственная функция задачи (12) - (13), а соответствующее ей собственное значение λ не лежит на γ . Следовательно, выражение $(\frac{z}{s} - i\tau - \lambda)$ не обращается в 0. Тогда, выполняя преобразования, описанные в лемме выше, и выделяя вещественную и мнимую части в равенстве, аналогичном (15), получим

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{(\frac{z}{s} - \lambda_r)}{(\frac{z}{s} - \lambda_r)^2 + (\tau + \lambda_i)^2} |\psi|^2 dz = 0, \\ \int_{-1}^1 \left(\frac{\tau s^2 (\tau + \lambda_i)}{(\frac{z}{s} - \lambda_r)^2 + (\tau + \lambda_i)^2} - s^2 \right) |\psi|^2 dz = \int_{-1}^1 |\psi'|^2 dz. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $\lambda_r \in (-\frac{1}{s}; \frac{1}{s})$. Применяя ко второму равенству теорему о среднем и неравенство Фридрихса $\int_{-1}^1 |\psi|^2 dz \leq 4\pi^{-2} \int_{-1}^1 |\psi'|^2 dz$, для некоторого $\xi \in [-1; 1]$ получим

$$\frac{-s^2 \lambda_i}{\tau + \lambda_i} \geq \frac{\tau s^2 (\tau + \lambda_i)}{(\xi/s - \lambda_r)^2 + (\tau + \lambda_i)^2} - s^2 \geq \frac{\pi^2}{4},$$

Следовательно, $\lambda_i \in (-\tau; -\frac{\pi^2}{\pi^2 + 4s^2} \tau]$. \square .

ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение обосновывает устойчивость идеальнопластического течения Куэтта, в случае полноты системы собственных и обобщенных собственных функций этой задачи. Далее будут сформулированы утверждения, необходимые для доказательства этого факта.

ЗАМЕЧАНИЕ. Численные расчеты подтвердили "точность" оценки для области, содержащей спектр задачи (12) - (13), полученной без использования неравенства Шварца. Результаты, приведенные в виде иллюстраций в приложении, демонстрируют, что спектр появляется на верхней границе прямоугольника $\lambda_r \in (-\frac{1}{s}; \frac{1}{s})$, $\lambda_i \in (-\tau; \frac{-\pi^2 \tau}{\pi^2 + 4s^2}]$ при больших s , и на боковых при малых τ .

2.2 Измененная схема метода интегральных соотношений

В данном параграфе будут получены новые достаточные условия устойчивости плоского идеальнотексткопластического течения с произвольным профилем скорости $u(z)$. К ним приводит попытка отказаться от грубой оценки интеграла $\int_{-1}^1 u'(z) \psi'(z) \psi(z) dz$ с использованием

неравенства Шварца в пространстве $L_2(-1, 1)$

$$\pm \int_{-1}^1 u'(z) \psi'(z) \psi(z) dz \leq \int_{-1}^1 |u'(z)| |\psi'(z)| |\psi(z)| dz \leq \sup_{[-1;1]} |u'(z)| I_0 I_1,$$

где $I_0^2 = \int_{-1}^1 |\psi(z)|^2 dz$, $I_1^2 = \int_{-1}^1 |\psi'(z)|^2 dz$. Этот интеграл возникает, если, следуя стандартной схеме, мы умножим равенство (9) на комплексно-сопряженную функцию $\bar{\psi}$ и проинтегрируем по z от -1 до 1 с учетом граничных условий (10).

Легко видеть, что при всех $\lambda \notin \gamma$ (9) эквивалентно уравнению, не содержащему слагаемого с ψ'

$$(\alpha(\lambda, z) \psi'(z))' - \alpha(\lambda, z) (\beta(\lambda, z) + s^2) \psi(z) = 0, \quad (16)$$

где

$$\alpha(\lambda, z) = \exp \left(-i\tau \int \left(\frac{u(z)}{s} - i \frac{\tau}{u'(z)} - \lambda \right)^{-1} d \left(\frac{1}{u'(z)} \right) \right), \quad \beta(\lambda, z) = \frac{\frac{u''(z)}{s} + i s^2 \frac{\tau}{u'(z)}}{\frac{u(z)}{s} - i \frac{\tau}{u'(z)} - \lambda}$$

В силу того, что $\alpha(\lambda, z)$ определяется с точностью до постоянного множителя, интеграл под экспонентой можно понимать как неопределенный интеграл. Умножая скалярно в $L_2(-1; 1)$ равенство (16) на ψ и интегрируя по частям с учётом граничных условий, получим:

$$\int_{-1}^1 \alpha(\lambda, z) \left(|\psi'(z)|^2 + (\beta(\lambda, z) + s^2) |\psi(z)|^2 \right) dz = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим предельные случаи $s \rightarrow \pm\infty, 0$ (коротковолновые и длинноволновые вариации). Чтобы сделать результаты более наглядными, вернемся к классическому спектральному параметру $c = s^2 \lambda$. Оставим в равенстве выше только члены нулевого порядка по малому параметру (s^{-1} и s соответственно), учитывая, что $c = c(s)$, $\psi(z) = \psi(z, s)$. Легко видеть, что $\alpha(\lambda, z) \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{u'(z)} - ic/s^2$, $\alpha(\lambda, z) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$. Выделяя вещественную и мнимую части в случае коротковолновых возмущений получим устойчивость течения, $c_i \leq -\frac{\pi^2 \tau}{4u'_{max}}$. В случае длинноволновых вариаций в нулевом приближении возникает уравнение $\int_{-1}^1 \left(|\psi'(z)|^2 + \frac{u''(z)}{u(z)-c/s} |\psi(z)|^2 \right) dz = 0$, совпадающее по своей структуре с интегральным соотношением для идеальной жидкости, к которому применимы теоремы Рэлея и Фьортюфта-Хойланда, а также теорема Ховарда о полукруге (см. обзор [9]). Эти утверждения дополняют оценки полученные в [3].

Использование теоремы о среднем в условии (17) приводит к равенству

$$\alpha_r(\eta_1) \beta_r(\eta_1) - \alpha_i(\eta_1) \beta_i(\eta_1) + i(\alpha_r(\eta_2) \beta_i(\eta_2) + \beta_r(\eta_2) \alpha_i(\eta_2)) = -\frac{I_1^2 + s^2 I_0^2}{I_0^2} (\alpha_r(\xi_1) + i \alpha_i(\xi_2)),$$

которое выполнено для некоторых $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in [-1; 1]$. Из неравенства Фридрихса $I_0^2 \leq 4/\pi^2 I_1^2$ вытекает система неравенств

$$\begin{cases} \frac{\alpha_r(\eta_1) \beta_r(\eta_1) - \alpha_i(\eta_1) \beta_i(\eta_1)}{\alpha_r(\xi_1)} \leq -\frac{\pi^2}{4} - s^2 \\ \frac{\alpha_r(\eta_2) \beta_i(\eta_2) + \beta_r(\eta_2) \alpha_i(\eta_2)}{\alpha_i(\xi_2)} \leq -\frac{\pi^2}{4} - s^2 \end{cases}$$

Для конкретного профиля скорости $u(z)$, множество точек $\lambda(s)$, для которых существуют $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in [-1; 1]$, удовлетворяющие системе, составляют область, содержащую спектр задачи (9) - (10). Использование этой системы в аналитических исследованиях представляется разумным в случае, если вычислены границы изменения функций в числителе и знаменателе системы неравенств. Например, выражение для $\alpha(\lambda, z)$ удастся проинтегрировать явно, если $u(z)$ - рациональная функция.

3 Применение техники стационарной теории рассеяния

В данном разделе будет продолжено аналитическое исследование обобщенной задачи Рэлея об устойчивости течения идеальножесткопластического тела в полосе. С помощью техники стационарной теории рассеяния изучаются спектральные свойства оператора H (11). На основании этого анализа исследована структура спектра задачи (9) - (10). Для задачи Куэтта решена проблема построения разложения по собственным и обобщенным собственным функциям.

3.1 Уравнение для t -матрицы оператора H

Далее для исследования резольвенты $R(\lambda) = (H - \lambda E)^{-1}$ будет использован аналитический аппарат, разработанный в [6, 7]. Рассмотрим T -оператор

$$T(\lambda) := V - VR(\lambda)V, \quad (18)$$

где $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda E)^{-1}$ – оператор умножения на функцию $1 / \left(\frac{u}{s} - i \frac{\tau}{u'} - \lambda \right)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. При всех $\lambda \notin \sigma(H)$ оператор T определен и удовлетворяет уравнению Липпмана-Швингера

$$T(\lambda) := V - VR_0(\lambda)T(\lambda). \quad (19)$$

При этом $R(\lambda)$ выражается через T -оператор по формуле $R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)T(\lambda)R_0(\lambda)$.

Решение уравнения (19) ищется в виде интегрального оператора с ядром $t(z, z', \lambda)$ (так называемая t -матрица оператора H). В терминах ядер операторов T и V уравнение (19) принимает вид

$$t(z, z', \lambda) = v(z, z') - \int_{-1}^1 \frac{v(z, \tilde{z})t(\tilde{z}, z', \lambda)}{\left(\frac{u}{s} - i \frac{\tau}{u'} - \lambda \right)} d\tilde{z}. \quad (20)$$

Известно (см. [6, 7, 20]), что спектральные свойства операторов модели Фридрихса зависят от степени гёльдеровской гладкости ядра оператора возмущения. Введем в рассмотрение класс \mathfrak{h}^μ , $0 < \mu < 1$, функций $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_\mu := \sup_{z \neq z'} \left(|\varphi(z)| + \frac{|\varphi(z) - \varphi(z')|}{|z - z'|^\mu} \right).$$

Поскольку ядро $\Gamma(z, z')$ удовлетворяет условию Липшица, нужные свойства гладкости ядра v_2 оператора V_2 определяются функцией u . Если $u \in C^{2+\mu}[-1; 1]$, то v_2 заведомо удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ по каждой переменной. Про ядро v_1 такого сказать вообще говоря нельзя, т.к. $\frac{\partial}{\partial z}(\Gamma(z, z'))$ разрывна при $z = z'$.

3.2 T -оператор модели Фридрихса в задаче Куэтта

Как было показано, в случае течения Куэтта возмущение V представляет собой интегральный оператор с ядром $v(z, z') = -i\tau s^2 \Gamma(z, z')$, которое удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, заведомо принадлежит классу \mathfrak{h}^μ , $0 < \mu < 1$ по каждой переменной. Соответствующее оператору H (14) уравнение (20) естественно рассматривать для значений λ , принадлежащих комплексной плоскости с разрезом γ , различая при этом края разреза (см. [6, 20]). То есть область изменения Π спектрального параметра λ представляет собой

поверхность с краем, полученную пополнением $\mathbb{C} \setminus \gamma$ относительно метрики $\rho(\lambda, \lambda')$, определяемой как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих λ и λ' и не пересекающих отрезок γ . Считая z' параметром, запишем уравнение (20) в виде

$$t_\lambda(z) = v(z) - K(\lambda)t_\lambda(z), \quad (21)$$

где $K(\lambda) = VR_0(\lambda)$, когда $\lambda \notin \partial\Pi$; если $\lambda = z/s - i\tau \pm i0 \in \partial\Pi$, то для $\varphi \in \mathfrak{h}^\mu, 0 < \mu < 1$, имеем

$$K(z/s - i\tau \pm i0)\varphi(\cdot) = v.p. \int_{-1}^1 s \frac{v(\cdot, z')\varphi(z')}{z' - z} dz' \pm is\pi v(\cdot, z)\varphi(z).$$

На основании теоремы Привалова о граничных значениях интеграла типа Коши и с учётом свойств гладкости ядра v устанавливается ограниченность оператора $K(\lambda) : \mathfrak{h}^\nu \rightarrow \mathfrak{h}^\mu$, где $0 < \nu < \mu < 1$, для всех $\lambda \in \Pi$. Комбинируя это факт с компактностью оператора вложения $\mathfrak{h}^\mu \rightarrow \mathfrak{h}^\nu$, следуя [6, 20], получим:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для каждого $\lambda \in \Pi$ и произвольного $\nu \in (0, \mu)$ оператор $K(\lambda) : \mathfrak{h}^\nu \rightarrow \mathfrak{h}^\nu$ вполне непрерывен, причём в соответствующей операторной норме выполнена оценка

$$\|K(\lambda) - K(\lambda')\|_\nu \leq \text{const}(\nu, \varkappa)\rho(\lambda, \lambda')^\varkappa \quad (22)$$

для всех $\lambda, \lambda' \in \Pi$ и любого $\varkappa \in (0, \nu(\mu - \nu)\mu^{-1})$.

СЛЕДСТВИЕ. В банаховом пространстве $\mathfrak{h}^\nu, 0 < \nu < \mu$, уравнение (19) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(z) + K(\lambda)\varphi(z) = 0 \quad (23)$$

и обозначим через Λ множество значений параметра $\lambda \in \Pi$, при которых (23) имеет нетривиальное решение в классе $\mathfrak{h}^\nu, \nu > 0$. Вследствие предложения выше множество $\Lambda \subset \Pi$ замкнуто. Так как оператор $K(\lambda)$ является вполне непрерывным в \mathfrak{h}^ν и аналитически зависящим от параметра $\lambda \in \Pi$, множество особых точек λ дискретно и может иметь точки накопления только на γ .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Λ совпадает с $\sigma_p(H)$, множеством собственных значений оператора H .

Δ . Включения $\sigma_p(H) \subset \Lambda$ и $\Lambda \setminus \partial\Pi \subset \sigma_p(H)$ легко следуют из того, что уравнения (23) и $H\eta(z) - \lambda\eta(z) = 0$ переходят друг в друга при замене $\eta(z) = (\frac{z}{s} - i\tau - \lambda)^{-1}\varphi(z)$ (доказательства лемм 3.11, 3.8 из [20] повторяются дословно). Как было показано выше, $\sigma_p(H) \cap \gamma = \emptyset$, поэтому необходимо проверить что $\Lambda \cap \partial\Pi = \emptyset$. Положим

$$\psi(z, \varepsilon) = K(c + i\varepsilon)\varphi(z) + \varphi(z), \quad (24)$$

где $c = c_r + ic_i = c_r - i\tau \in \gamma$, а $\varphi(z) \in \mathfrak{h}^\nu$ - решение уравнения (23) при $\lambda = c + i0$. Заметим, что в силу оценки (22) отношение $\psi(z, \varepsilon) = [K(\lambda + i\varepsilon) - K(\lambda + i0)]\varphi(z)$ исчезает в норме $\mathfrak{h}^\mu, 0 < \nu < \mu < 1$, когда $\varepsilon \rightarrow +0$. Подставим в (24) $K(c + i\varepsilon) = VR_0(c + i\varepsilon) = -i\tau s^2 GR_0(c + i\varepsilon)$, где G - интегральный оператор с ядром $\Gamma(z, z')$. Умножим обе части получившегося равенства на элемент $R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z)$; приравнявая мнимые части и учитывая симметричность $\Gamma(z, z')$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}(R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z), \psi(z, \varepsilon)) &= \text{Im}(R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z), \varphi(z)) - \\ &\quad - \tau s^2 (R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z), GR_0(c + i\varepsilon)\varphi(z)). \end{aligned} \quad (25)$$

Левая часть (25) исчезает при $\varepsilon \rightarrow +0$ (лемма 3.1 из [20]). Согласно формуле Сохоцкого

$$\text{Im}(R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z), \varphi(z)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \pi \int_{-1}^1 |\varphi(z)|^2 \delta\left(\frac{z}{s} - c_r\right) dz.$$

Заметим, что $(\xi(z), G\xi(z)) = \int_{-1}^1 \xi(z) \overline{u(z)} dz$, где $u(z)$ - решение уравнения $y''(z) - s^2 y(z) = \xi(z)$, $y(\pm 1) = 0$. Тогда

$$(\xi(z), G\xi(z)) = \int_{-1}^1 (u''(z) - s^2 u(z)) \overline{u(z)} dz = - \int_{-1}^1 |u'(z)|^2 dz - \int_{-1}^1 s^2 |u(z)|^2 dz \leq 0,$$

причем равенство возможно только при $\xi(z) = 0$. В итоге переход к пределу в соотношении (25) дает

$$s\pi |\varphi(sc_r)|^2 - \tau s^2 (R_0(c + i0)\varphi(z), GR_0(c + i0)\varphi(z)) = 0.$$

Следовательно, $\varphi(z) = 0$ для $s > 0$; для $s < 0$ при выводе (25) нужно умножить на $R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z)$ с правой стороны, тогда

$$\operatorname{Im}(\varphi(z), R_0(c + i\varepsilon)\varphi(z)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} -\pi \int_{-1}^1 |\varphi(z)|^2 \delta\left(\frac{z}{s} - c_r\right) dz.$$

Случай нижней границы $\partial\P$ рассматривается аналогично. \square .

СЛЕДСТВИЕ. Из того, что Λ и $\sigma_p(H)$ совпадают, $\sigma_p(H)$ содержится в прямоугольнике $\lambda_r \in (-\frac{1}{s}; \frac{1}{s})$, $\lambda_i \in \left(-\tau; -\frac{\pi^2}{\pi^2 + 4s^2}\tau\right]$, а Λ может иметь точки накопления лишь на γ , вытекает конечность дискретного спектра оператора H .

Возвращаясь к уравнению (20), заметим, что, согласно альтернативе Фредгольма, оператор $E + K(\lambda)$, $\lambda \in \Pi \setminus \Lambda$, ограниченно обратим в \mathfrak{h}^ν , $\nu < \mu$, и уравнение (21) однозначно разрешимо: $t_\lambda = (E + K(\lambda))^{-1}v$.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [6]). Для каждого $\lambda \in \Pi \setminus \Lambda$ уравнение (20) для задачи Куэтта имеет единственное решение, и при любом $\nu \in (0; \mu)$ справедливы оценки

$$|t(z, z', \lambda)| \leq |\operatorname{const}(\lambda)|$$

$$|t(z + h, z, \lambda) - t(z, z', \lambda)| \leq \operatorname{const}(\lambda, \nu) |h|^\nu$$

$$|t(z, z + k, \lambda) - t(z, z', \lambda)| \leq \operatorname{const}(\lambda, \nu) |k|^\nu$$

кроме того, для всех $\lambda, \lambda' \in \Pi \setminus \Lambda$ и произвольного $\beta \in (0; \mu)$ выполняется неравенство

$$|t(z, z', \lambda) - t(z, z', \lambda')| \leq \operatorname{const}(\lambda, \lambda', \beta) \rho(\lambda, \lambda')^\beta.$$

Константы в этих оценках равномерно ограничены, если λ и λ' отделены от Λ .

3.3 Волновые операторы для H_0 и $H_0 + V$

Задача построения волновых операторов для пары H_0 и $H_0 + V$ с помощью t -матрицы была решена в [11] в рамках теории рассеяния. В работах [6, 7] это было сделано для гидродинамической задачи Рэлея. На основании теоремы 1, с учетом отсутствия собственных значений оператора $H = H_0 + V$ на непрерывном спектре и конечности $\sigma_p(H)$, можно показать, что волновые операторы, сплетающие H_0 и $H_0 + V$, удаётся определить явными формулами:

$$U^\pm \varphi(z) = \varphi(z) - \int_{-1}^1 \frac{t(z, z', z'/s - i\tau \pm i0)}{\frac{1}{s}(z - z') \mp i0} \varphi(z') dz', \quad (26)$$

которые следует понимать как предел соответствующего семейства операторов, заданных на плотном в $L_2(-1; 1)$ множестве гильберовских функций \mathfrak{H} (см. [6, 7]).

ЛЕММА (ср. [6]). Операторы $U^\pm : \mathfrak{H} \rightarrow L_2(-1; 1)$ продолжаются до ограниченных операторов в $L_2(-1; 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $\lambda \notin \sigma(H)$ выполняется равенство $R(\lambda)U^\pm = U^\pm R_0(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ. Волновые операторы U^\pm суть "сплетающие" операторы для пары $H_0, H_0 + V$, т.е. $HU^\pm = U^\pm H_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, ядра

$$u^\pm(z, z') = \delta(z - z') - \frac{t(z, z', z'/s - i\tau \pm i0)}{\frac{1}{s}(z - z') \mp i0}$$

операторов U^\pm как функции от z (при всевозможных значениях $z' \in [-1; 1]$) представляют собой собственные функции непрерывного спектра оператора H .

3.4 Разложение по собственным функциям дискретного и непрерывного спектров задачи (12) - (13)

Поскольку $\Lambda \cap \gamma = \emptyset$, найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ контур $\Gamma_\varepsilon = \{\lambda \in \Pi : \text{dist}(\lambda, \partial\Pi) = \varepsilon\}$ состоит из точек резольвентного множества и не содержит внутри себя собственных значений оператора H . С помощью интеграла Рисса построим проектор

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} R(\lambda) d\lambda = E - P,$$

где P – проектор на линейную оболочку корневых функций оператора H вдоль инвариантного подпространства непрерывного спектра. Формула разложения может быть получена из соответствующего соотношения для $((E - P)f, g)$ в результате предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$. Эта процедура сводится к вычислению разности предельных значений резольвенты на краях разреза $\partial\Pi$ и приводит к "соотношению полноты" для волнового оператора $U := U^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Пусть $f, g \in \mathfrak{H}$, причём $f(-1)g(-1) = f(1)g(1) = 0$. Тогда справедливо равенство эрмитовых форм

$$((E - P)f, g) = \int_{-1}^1 U_L^{-1} f(\eta) \overline{U^* g(\eta)} d\eta. \quad (27)$$

СЛЕДСТВИЕ. Формула (27) допускает запись в виде разложения по обобщенным собственным функциям оператора H :

$$f(z) = \int_{-1}^1 U_L^{-1} f(\eta) u^+(z, \eta) d\eta + Pf(z),$$

где $f \in \mathfrak{H}$; фигурирующий здесь интеграл понимается как действие обобщенной функции $u^+(z, \eta)$ на элемент $U_L^{-1} f(z) \in \mathfrak{H}$.

ЛЕММА (ср. [6]). Для каждого $\eta \in [-1; 1]$, положив $g(\eta) = g(z, \eta) = v(z, \eta) = -i\tau s^2 \Gamma(z, \eta)$, выполнено равенство

$$\overline{U^* g(z, \eta)} = t(z, \eta, \eta/s - i\tau + i0) = \psi_\eta(z),$$

где $\psi_\eta(z)$ – обобщённые с.ф. задачи (12) - (13).

Предложение выше приводит к формуле разложения по собственным функциям непрерывного и дискретного спектра задачи (12) - (13). Для этого положим $f = \Delta_s h$, где $\Delta_s =$

$\frac{d^2}{dz^2} - s^2$, $h \in C^{2+\nu}[-1; 1]$, $\nu > 0$ и учтём, что $g(z, \cdot) \in Lip$, $g(z, -1) = g(z, 1) = 0$. Для таких f и g соотношение (27) принимает вид

$$(E - \Delta_s^{-1} P \Delta_s) h(z) = \int_{-1}^1 U_L^{-1}(\Delta_s h)(\eta) \overline{U^* g(z, \eta)} d\eta.$$

С учетом леммы получим следующую формулировку теоремы о разложении по собственным функциям.

ТЕОРЕМА 2 (ср. [6]). Для задачи об устойчивости идеальнопластического течения Куэтта (12) - (13) существует ограниченный оператор W в $L_2(-1; 1)$, такой что произвольная функция $h \in C^{2+\nu}[-1; 1]$, $\nu > 0$, удовлетворяющая граничным условиям $h(-1) = h(1) = 0$, представима в виде

$$h = \int_{-1}^1 (W(h'' - s^2 h)(c) \psi_c) dc + Qh; \quad (28)$$

здесь Q - проектор на линейную оболочку корневых функций задачи (12) - (13) вдоль пространства, порожденного обобщёнными собственными функциями $\psi_c(z)$, $c \in [-1; 1]$. Оператор W представляет собой интегральный оператор с ядром $\delta(z - z') - \frac{t(z, z', z'/s - i\tau - i0)}{\frac{1}{s}(z - z') + i0}$, где $t(z, z', \lambda)$ - решение уравнения (20), отвечающего задаче (12) - (13).

4 Численное исследование задачи (9) - (10)

Представленный теоретический анализ к сожалению не дает полной картины строения спектральных кривых задачи об устойчивости идеальнопластического течения. В частности, остается открытым вопрос о возможности появления дискретного спектра в обобщенной задаче Рэлея (заметим, что в случае течения Куэтта идеальной жидкости ($\tau = 0$) присутствует лишь непрерывный спектр).

В рамках данной работы реализована численная схема, позволяющая находить спектральные кривые, а также собственные и обобщенные собственные функции задачи (9) - (10). Результаты тестируются на задаче Куэтта с помощью полученных теорем и интегральных оценок. Проведенные численные эксперименты продемонстрировали эффект "зарождения" точек дискретного спектра на непрерывном с их последующим движением вдоль мнимой оси при увеличении параметров τ или s . Была построена кривая зависимости $\tau(s)$, которая выделяет область параметров (τ, s) при которых впервые появляются точки дискретного спектра.

Введем равномерную сетку на отрезке $[-1; 1]$ с шагом h . Для дифференциального оператора $L\psi = \psi'' - s^2\psi$ используем разностную аппроксимацию $(L_h \psi_h)_i = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{h^2} - s^2\psi_i$. Следует заметить, что при больших s матрица оператора L_h становится плохо обусловленной, что сказывается на точности вычислений, однако не мешает качественным исследованиям. После несложных преобразований разностный аналог задачи (12) - (13) сводится к задаче на собственные значения матрицы $L_h^{-1} \cdot \text{diag}\{\frac{x_j}{s} - i\tau\} \cdot L_h - i\tau s^2 L_h^{-1}$. Результаты вычислений (спектр задачи при некотором s) представлены в приложении.

5 Асимптотическое исследование задачи (7) - (8)

Экспериментальные данные [27, 28, 29, 30], аналогия с задачей Орра-Зоммерфельда и интуиция заставляют думать, что неустойчивость может быть обнаружена только для больших

значений числа Рейнольдса. В этой ситуации для того, чтобы получить решения краевой задачи (7) - (8), пригодные для дальнейшего анализа, рассматриваются их асимптотические разложения в степенные ряды по подходящему малому параметру. Опираясь на подход, изложенный в [12], описаны два метода представления решения задачи (7) - (8) асимптотическими рядами. В приложении к задаче Орра-Зоммерфельда, эти методы были впервые предложенные в работе [10]. Законность формальных асимптотических разложений, использованных в теории гидродинамической устойчивости и данной работе, была строго доказана в рамках статьи [31].

5.1 Фундаментальная система решений задачи (7) - (8)

На время забудем о физической стороне задачи и рассмотрим уравнение (7) как линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка в комплексной z -плоскости. Вообще говоря, функция $u(z)$, задающая профиль основного течения, определена лишь для действительных значений $z \in [-1; 1]$. Однако, аналитически продолжив ее в некоторую комплексную окрестность отрезка $[-1; 1]$, мы будем считать функцию $u(z)$ голоморфной в любой конечной области, которую мы будем рассматривать. Таким образом, коэффициенты задачи (7) также являются целыми функциями параметров λ , sRe , τs и s (также считаются комплексными). Из теории дифференциальных уравнений известно, что существует фундаментальная система четырех решений (7), являющихся целыми функциями переменных z , λ , sRe , τs и s . Этот факт, впервые отмеченный в [12], является основополагающим при дальнейшем исследовании сходимости асимптотических решений задач (7) и (9).

Обозначим вышеупомянутую систему 4 решений как $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, $\psi_4(z)$. Необходимость выполнения граничных условий (8) для любого решения обобщенной задачи Орра-Зоммерфельда (7) - (8) приводит к так называемому "вековому уравнению"

$$F(\lambda, sRe, \tau, s) = \begin{vmatrix} \psi_1(-1) & \psi_2(-1) & \psi_3(-1) & \psi_4(-1) \\ \psi_1(1) & \psi_2(1) & \psi_3(1) & \psi_4(1) \\ \psi'_1(-1) & \psi'_2(-1) & \psi'_3(-1) & \psi'_4(-1) \\ \psi'_1(1) & \psi'_2(1) & \psi'_3(1) & \psi'_4(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Т.к. $F(\lambda, sRe, \tau, s)$ – целая функция переменных λ , sRe , τs и s , уравнение (29) разрешимо относительно λ . Полученная зависимость $\lambda = \lambda(s, Re, \tau)$ может иметь как несколько ветвей решения (многозначная функция) так и не иметь их вообще.

Особый интерес представляет случай, когда число Рейнольдса очень велико. Как уже было упомянуто, исследование в этом направлении затруднено тем фактом, что функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, $\psi_4(z)$ обладают естественной особенностью в бесконечной точке комплексной sRe -плоскости. Так как в пределе $sRe \rightarrow \infty$ мы получаем уравнение второго порядка (9), два решения (7), очевидно, потеряны. Ниже будет показано, что два линейно независимых решения уравнения (7), пусть это будут $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, будут удовлетворять (9) в пределе бесконечного sRe всюду, за исключением некоторой линии через точку z_λ , такую что $\frac{u(z_\lambda)}{s} - i \frac{\tau}{u'(z_\lambda)} = \lambda$. Два других независимых решения $\psi_3(z)$ и $\psi_4(z)$ быстро осциллируют при больших sRe и, следовательно, в невязком пределе исчезают.

5.2 Решение уравнения (7) в сходящихся рядах

Сделаем замену переменной (z_0 - произвольная точка)

$$z - z_0 = \varepsilon \eta, \quad \psi(z) = \chi(\eta),$$

здесь ε - некоторый малый параметр, его связь с sRe будет установлена ниже. После несложных преобразований, уравнение (7) преобразуется к виду

$$-\frac{i}{\varepsilon^2 s Re} (\chi^{IV} - 2s^2 \varepsilon^2 \chi'' + s^4 \varepsilon^4 \chi) = \left(u - i \frac{\tau s}{u'} - \lambda\right) (\chi'' - s^2 \varepsilon^2 \chi) + i s \tau \varepsilon \frac{u''}{u'^2} \chi' - \varepsilon^2 \left(u'' + i \frac{\tau s^3}{u'}\right) \chi = 0, \quad (30)$$

Будем искать решение уравнения (30) в форме

$$\psi(z) = \chi(\eta) = \chi^{(0)}(\eta) + \varepsilon \chi^{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 \chi^{(2)}(\eta) + \dots, \quad (31)$$

коэффициенты уравнения (30) тоже разложим в ряд Тейлора

$$\begin{cases} u - i \frac{\tau s}{u'} - \lambda = \left(u_0 - i \frac{\tau s}{u'_0} - \lambda\right) + (\varepsilon \eta) \left(u'_0 + i s \tau \frac{u''_0}{u'^2_0}\right) + \dots, \\ \frac{u''}{u'^2} = \frac{u''_0}{u'^2_0} + (\varepsilon \eta) \left(\frac{u'''_0}{u'^2_0} - \frac{2u''_0{}^2}{u'^3_0}\right) + \dots, \\ u'' + i \frac{\tau s^3}{u'} = u''_0 + i \frac{\tau s^3}{u'_0} + (\varepsilon \eta) \left(u'''_0 - i s^3 \tau \frac{u''_0}{u'^2_0}\right) + \dots \end{cases} \quad (32)$$

Дифференциальное уравнение для приближений (31) получаются после подстановки (31) и (32) в (30) и приравнивания коэффициентов при различных степенях ε к нулю. Легко заметить, что если мы выберем в качестве z_0 точку, в которой $u_0 - i \frac{\tau s}{u'_0} = \lambda$, подходящим выбором для параметра ε будет

$$\varepsilon = (sRe)^{-1/3}. \quad (33)$$

Бесконечную систему дифференциальных для определения функций $\chi^{(0)}, \chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : & i \chi^{(0)IV} + \left(u'_0 + i s \tau \frac{u''_0}{u'^2_0}\right) \eta \chi^{(0)''} + i \tau s \frac{u''_0}{u'^2_0} \chi^{(0)'} = 0, \\ \varepsilon^n : & i \chi^{(n)IV} + \left(u'_0 + i s \tau \frac{u''_0}{u'^2_0}\right) \eta \chi^{(n)''} + i \tau s \frac{u''_0}{u'^2_0} \chi^{(n)'} = L_{n-1}(\chi), \end{cases} \quad (34)$$

где выражение $L_{n-1}(\chi)$ представляет собой линейную комбинацию $\chi^{(0)}(\eta), \dots, \chi^{(n-1)}(\eta)$ и их производных.

Заметим, что однородная часть всех уравнений (34) одинакова. Следовательно, если мы сможем решить уравнение для первого приближения, то остальные можно получить в квадратурах. В случае вязкопластического течения Куэтта с профилем $u(z) = z$ система (34) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : & i \chi^{(0)IV} + \eta \chi^{(0)''} = 0, \\ \varepsilon^n : & i \chi^{(n)IV} + \eta \chi^{(n)''} = \tilde{L}_{n-1}(\chi). \end{cases} \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение для первого приближения (35) в случае вязкопластического течения Куэтта полностью совпадает с аналогичным уравнением для вязкой модели. Следовательно, в первом приближении соответствующие задачи на собственные значения совпадают. Этот факт является существенным аргументом в пользу устойчивости вязкопластического течения Куэтта по отношению к малым возмущениям.

Первое уравнение (34) является уравнением Стокса для $\chi^{(0)''}(\eta)$. Его решения могут быть записаны с помощью функций Бесселя порядка $1/3$ (или с помощью функций Ханкеля). Поэтому, для первого уравнения (34) получаем четыре интегральных решения

$$\begin{cases} \chi_1^{(0)} = 1, & \chi_2^{(0)} = \eta, \\ \chi_3^{(0)} = \int_{+\infty}^{\eta} d\eta \int_{+\infty}^{\eta} d\eta \eta^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{3/2} \right], \\ \chi_3^{(0)} = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{1/2} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{3/2} \right]. \end{cases} \quad (36)$$

На практике обычно ограничиваются начальным приближением (35), хотя можно выписать явные формулы для приближений любого порядка (см. [12]). Ряд (31) является сходящимся, так как легко заметить, что решение дифференциального уравнения (30) аналитически зависит от параметра ε .

5.3 Решение уравнения (7) в асимптотических рядах

Зачастую для численных расчетов удобнее использовать не сходящиеся, а асимптотические ряды. Следуя работам [10] и [12] ниже будет описано два метода, каждый из которых дает два линейно независимых решения (7). Так как в статье [31] была рассмотрена асимптотическая теория для дифференциального оператора четвертого порядка, записанного в общем виде, все утверждения обосновывающие законность этих разложений остаются выполненными для обобщенной задачи Орра-Зоммерфельда (7).

Согласно первому методу разложим решение (7) $\psi(z)$ в ряд по степеням $(sRe)^{-1}$

$$\psi(z) = \psi^{(0)}(z) + (sRe)^{-1}\psi^{(1)}(z) + (sRe)^{-2}\psi^{(2)}(z) + \dots, \quad (37)$$

Подставляя (37) в исходное уравнение (7) и группируя выражения при одинаковых степенях $(sRe)^{-1}$ получим

$$\left. \begin{aligned} (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda) \left(\psi^{(0)''} - s^2 \psi^{(0)} \right) + i s \tau \frac{u''}{u'^2} \psi^{(0)'} - \left(u'' + i \frac{\tau s^3}{u'} \right) \psi^{(0)} &= 0, \\ (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda) \left(\psi^{(k)''} - s^2 \psi^{(k)} \right) + i s \tau \frac{u''}{u'^2} \psi^{(k)'} - \left(u'' + i \frac{\tau s^3}{u'} \right) \psi^{(k)} &= \\ &= -i \left(\psi^{(k-1)IV} - 2s^2 \psi^{(k-1)''} + s^4 \psi^{(k-1)} \right), \quad (k \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Легко видеть, что начальное приближение удовлетворяет невязкому уравнению (9). Решения обобщенной задачи Рэлея $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$ можно получить в виде рядов по степеням s , которые будут равномерно сходящимися в любой конечной области, для любой точки z , кроме особой точки z_0 , в которой $u(z_0) - i\frac{\tau s}{u'(z_0)} = \lambda$.

Так как $\psi(z)$, как решение уравнения (7), должна быть целой функцией параметра sRe . Следовательно, бесконечноудаленная точка комплексной sRe -плоскости является особой точкой для $\psi(z)$, если зависимость от sRe нетривиальна. Поэтому ряд (37) является существенно асимптотическим.

Как уже было отмечено, невязкое уравнение (9) имеет логарифмическую особенность в точке z_0 . Однако, эта точка является регулярной точкой уравнения (7), соответствующего вязкопластической модели. Особенность, появившаяся исключительно вследствие использования асимптотического метода, приводит к необходимости корректного определения ветви невязкого решения. Решить эту проблему можно использовав в качестве эталона для сравнения решение (31), полученное предыдущим методом.

Для получения второй пары независимых решений (7) воспользуемся вторым методом, впервые предложенным в работе [10]. Сделав замену

$$\psi = \exp \left(\int g dz \right), \quad (39)$$

получим нелинейное дифференциальное уравнение для функции $g(z)$

$$\begin{aligned} -\frac{i}{sRe} (g^4 + 6g^2 g' + 3g'^2 + 4gg'' + g''' - 2s^2(g^2 + g') + s^4) = \\ \left(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda \right) ((g^2 + g') - s^2) + i s \tau \frac{u''}{u'^2} g - \left(u'' + i \frac{\tau s^3}{u'} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$g(z) = (sRe)^{1/2} g_0(z) + g_1(z) + (sRe)^{1/2} g_2(z) + \dots \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40) получим бесконечную систему уравнений

$$\begin{cases} (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda) g_0^2 = -ig_0^4, \\ (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda) (g_0' + 2g_0 g_1) + i s \tau \frac{u''}{u'^2} g_0 = -i(4g_0^3 g_1 + 6g_0^2 g_0'), \\ \dots \end{cases} \quad (42)$$

С помощью несложных алгебраических преобразований получим

$$\begin{cases} g_0 = \pm \sqrt{i(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)}, \\ g_1 = -\frac{5}{2} \frac{g_0'}{g_0} - \frac{1}{2} \frac{(\frac{i\tau s}{u'})'}{(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)} = -\frac{5}{2} \frac{g_0'}{g_0} + \frac{1}{2} \frac{(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)'}{(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)} - \frac{1}{2} \frac{u'}{(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)}, \\ \dots \end{cases} \quad (43)$$

Для определенности положим $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $\arg(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ для $u - \lambda_r > 0$.

Прямая подстановка (43) в (39) дает еще два асимптотических решения

$$\begin{cases} \psi_3(z) = (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{du(z)}{u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda}\right) \exp\left(-\int_{z_0}^z \sqrt{isRe(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)} dz\right), \\ \psi_4(z) = (u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{du(z)}{u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda}\right) \exp\left(+\int_{z_0}^z \sqrt{isRe(u - i\frac{\tau s}{u'} - \lambda)} dz\right), \end{cases} \quad (44)$$

где множители порядка $\exp(sRe)^{-1/2} = 1 + O((sRe)^{-1/2})$ принимаются равными 1. В случае вязкопластического течения Куэтта решения (44) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \psi_3(z) = (z - i\tau s - \lambda)^{-5/4} \exp\left(-\int_{z_0}^z \sqrt{isRe(z - i\tau s - \lambda)} dz\right), \\ \psi_4(z) = (z - i\tau s - \lambda)^{-5/4} \exp\left(+\int_{z_0}^z \sqrt{isRe(z - i\tau s - \lambda)} dz\right). \end{cases} \quad (45)$$

С точностью до замены $\tilde{\lambda} = \lambda + i\tau s$ (44) совпадает с парой аналогичных асимптотических решений вязкой задачи Куэтта.

Полученные решения хотя и требуют более детального рассмотрения по ряду вопросов (см. [12, 14]), могут быть использованы для численного расчета области устойчивости в плоскости параметров Re, τ .

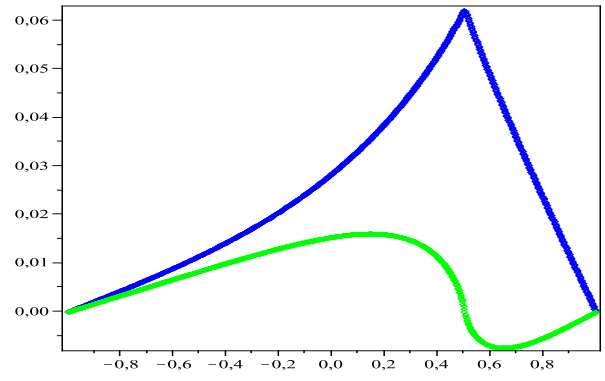
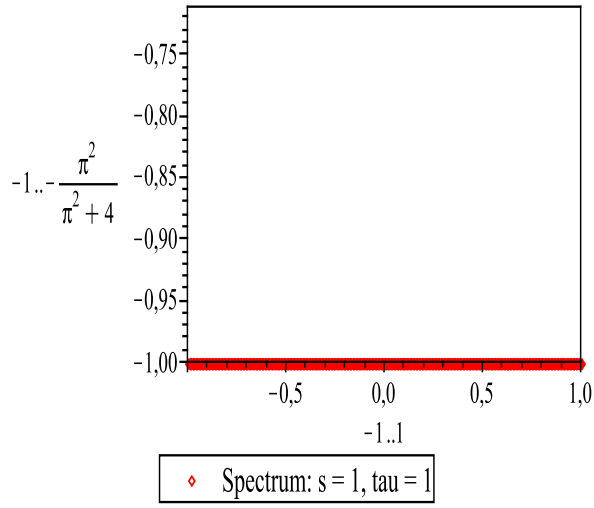


Рис. 3: Обобщенная собственная функция, отвечающая точке непрерывного спектра при $s = 1$, $\tau = 1$

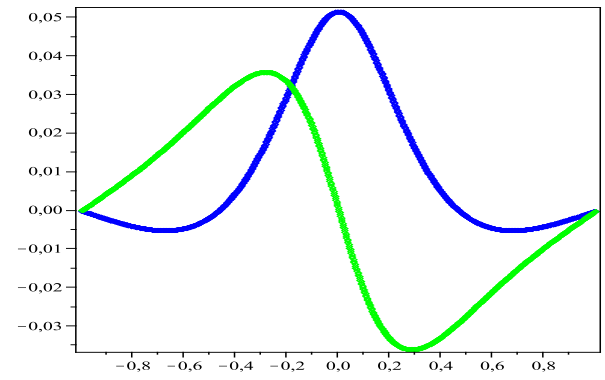
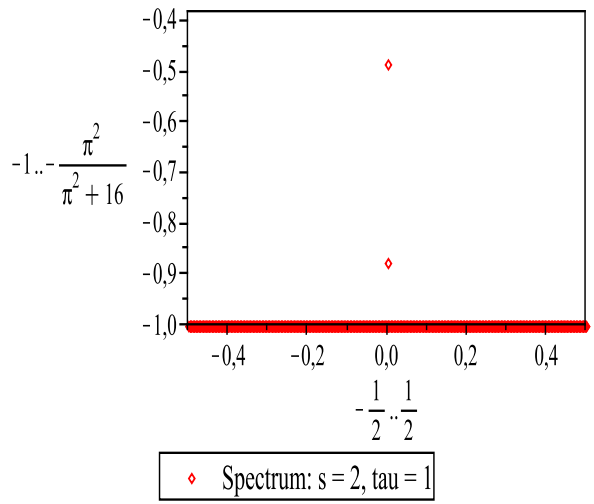


Рис. 4: Собственная функция, отвечающая появившейся точке дискретного спектра при $s = 2$, $\tau = 1$

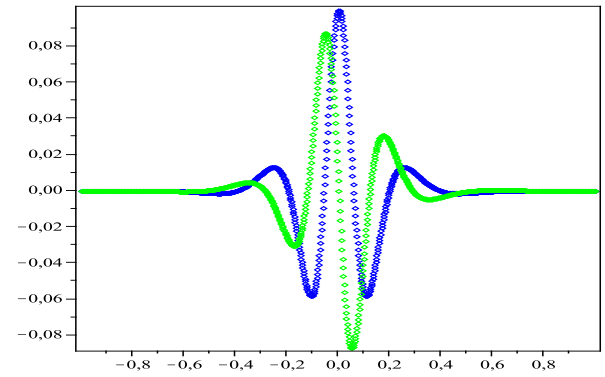
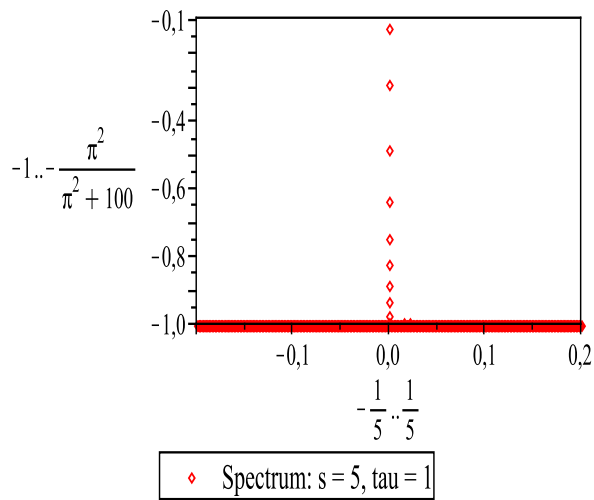
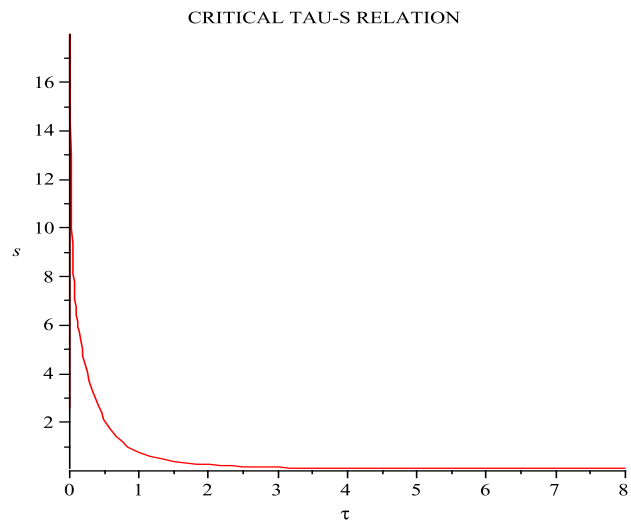
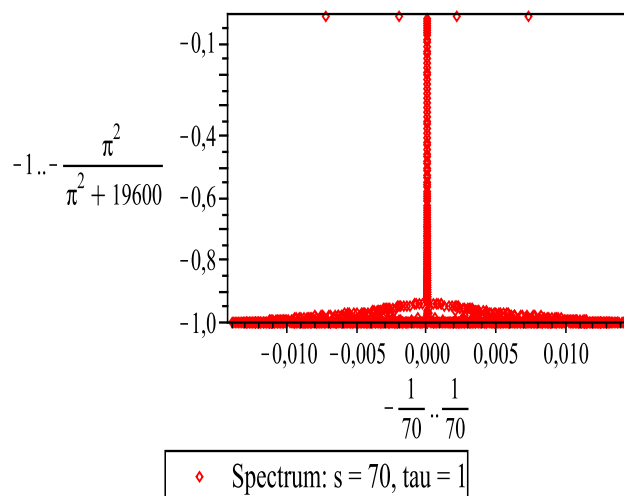
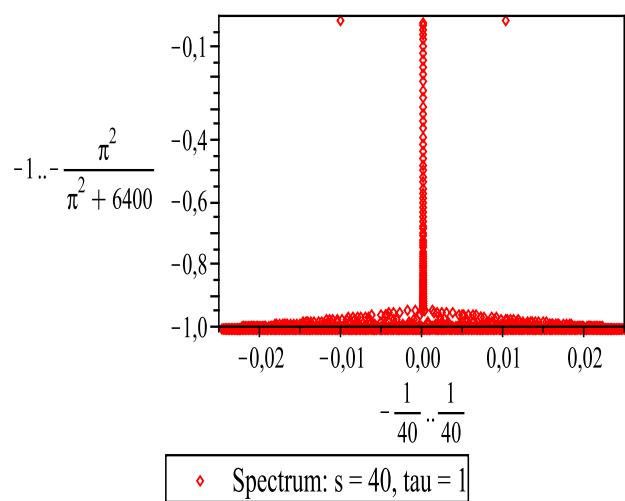
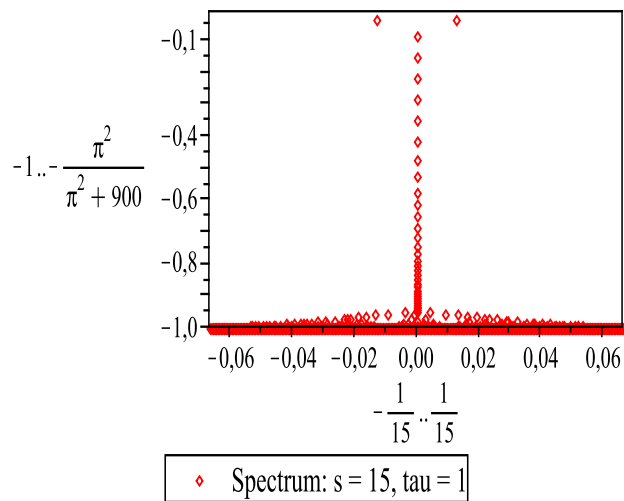


Рис. 5: С увеличением дискретного спектра собственные функции быстро осциллируют ($s = 5$, $\tau = 1$)



Список литературы

- [1] *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластических тел. Учён. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3-81.
- [2] *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины. ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 6. С. 405-412.
- [3] *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 109-130.
- [4] *Победря Б.Е.* Деформационная теория пластичности анизотропных сред. ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 29-37.
- [5] *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во УРСС. 1998. 175 с.
- [6] *Стёпин С.А.* Несамосопряжённая модель Фридрихса в теории гидродинамической устойчивости. Функц. анализ и его прил. 1995. Т. 29. № 2. С. 22-35.
- [7] *Стёпин С.А.* Гидродинамическая задача Рэлея: теорема разложения по собственным функциям и устойчивость плоскопараллельных течений. Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 201-221.
- [8] *Георгиевский Д.В.* О единственности исследуемых на устойчивость решений некоторых задач МСС. Вестник МГУ. 2007. Сер. 1. Математика. Механика. № 5. С. 48-52.
- [9] *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 25. С. 3-89.
- [10] *W. Heisenberg* Uber die Stabilitat und Turbulenz von Flfissigkeiten. Dissertation 1923; Ann. d. Phys. 1924. V. 74. Pp. 577—627.
- [11] *W. Tollmien* General instability criterion of laminar velocity distributions. N.A.C.A.: Technical Memorandum № 792. 1936. V. 1. № 5.
- [12] *C. C. Lin* On the stability of two-dimensional parallel flows. Part I. - General Theory. Q. Appl. Math. 1945. V. 3. № 2. Pp.117-142.
- [13] *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
- [14] *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 195 с.
- [15] *R. C. DiPrima, G. J. Habetler* A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability. Arch. Rational Mech. Anal. 1968. V. 34. P. 218-227.
- [16] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464 с.
- [17] *Стёпин С.А.* Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства краевой задачи Орра–Зоммерфельда. Матем. сб. 1997. Т. 188. №1. С. 129–146.

- [18] *Фридрихс К.О.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир. 1969. С. 109-130.
- [19] *Ладыженская О.А., Фадеев Л.Д.* К теории возмущений непрерывного спектра. ДАН СССР. 1958. Т. 120. № 6. С. 1187-1190.
- [20] *Фадеев Л.Д.* О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. Труды МИАН. 1964. Т. 73. С. 292-313.
- [21] *Фадеев Л.Д.* К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости. Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 164-172.
- [22] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982. 426 с.
- [23] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ. 1958. 474 с.
- [24] *P.G. Drazin, L.N. Howard* Hydrodynamic stability of parallel flow of an inviscid fluid. Adv. Appl. Mech. 1966. V. 9. Pp. 1-85.
- [25] *D.D. Joseph* Eigenvalue bounds for the Orr-Sommerfeld equation. J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 617-621
- [26] *P.G. Drazin* On stability of parallel flow of an incompressible fluid with variable density and viscosity. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1962. V.58. Pp. 649-661.
- [27] *M. A. Abbas, C. T. Crowe* Experimental study of the flow properties of a homogenous slurry near transitional Reynolds numbers. Intern. Journ. of Multiphase Flow. 1987. V. 13. № 3. Pp. 357-364.
- [28] *I.A. Frigaard* Predicting Transition to Turbulence in Well Construction Flows. 2003. Presentation at the SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference held in Port-of-Spain, Trinidad, West Indies, 27–30 April 2003.
- [29] *Kamal El-Nahhas, Nageh Gad El-Hak, Magdy Abou Rayan and Imam El-Sawaf* Flow behaviour of non-newtonian clay slurries. Ninth International Water Technology Conference, IWTC9 2005, Sharm El-Sheikh, Egypt.
- [30] *R. B. Spelay* Solids transport in laminar, open channel flow of non-newtonian slurries. A Thesis Submitted to the College of Graduate Studies and Research in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in the Department of Chemical Engineering University of Saskatchewan Saskatoon, Saskatchewan, Canada. 2007.
- [31] *W. Wasow* The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. of Math. 1948. V. 49. № 4. P. 852-871.