微积分 B（II）知识点及复习题

第六章　定积分

知识点：

1. 定积分的性质；

2. 定积分的几何意义；

3. 定积分与被积函数及积分区间有关，与积分变量用什么字母表示无关；

4. 定积分存在定理：有限区间上的连续函数是可积的，有限区间上只有有限个间断点的有界函数也是可积的；

5. 变限积分求导，利用变限积分求极限；

6. 定积分的计算（牛顿-莱布尼茨公式，区间可加性，换元积分法，分部积分法）；

7. 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$；

如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$；

8. 判断广义积分的敛散性，计算广义积分；

9. 定积分的应用（求面积）.

习题：

1. $\int_1^2 (\frac{\sin x}{x} + e^{-x})dx = \int_1^2 (\frac{\sin t}{t} + e^{-t})dt$，对吗？

2. 计算 $\int_0^1 x^4\,dx$，$\int_1^2 e^x\,dx$，$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

3. 比较下列各组积分值的大小.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$　　　(2) $\int_3^4 e^x dx, \int_3^4 e^{x^2} dx$

4. 计算 $\frac{d}{dx}[\int_0^x \tan t dt]$.

5. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{(1+x^2)^4}\,dx$.

6. 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ 的敛散性.若收敛，求其值.

7. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx$.

8. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\,dx$.

9. 计算$\int_1^2 xe^x dx$.

10. 计算$\int_0^3 xe^x dx$.

11. 求由曲线$y=9-x^2$，直线$x=-1$、$x=1$及x轴所围成的图形的面积.

12. 求由$y=x^2$、$x=1$、$x=4$所围成的平面图形的面积.

第七章　无穷级数

知识点：

1. 无穷级数的基本性质；
2. 无穷级数收敛的必要条件；
3. 常用级数的敛散性，如等比级数，调和级数，$p-$级数；
4. 正项级数敛散性的判别方法：比较判别法（推论）、达朗贝尔比值判别法、柯西根值判别法；
5. 莱布尼茨定理；
6. 任意项级数敛散性的判别；
7. 绝对收敛、条件收敛；
8. 幂级数的收敛半径、收敛域；
9. 幂级数的性质.

习题：

1. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}(2+\frac{1}{n^2}),1+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的敛散性.

2. 若无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$,对吗？

3. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n}$的敛散性.

4. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$的和为多少？

5. 判断$\sum_{n=0}^{\infty}q^n$的敛散性，若收敛，求其和为多少.

6. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性.

7. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$的敛散性.

8. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$的敛散性.

9. 试描述莱布尼茨定理，并判断$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^3}$是否收敛.

10. 若无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必绝对收敛，对吗？

11. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$绝对收敛、条件收敛还是发散.

12. 幂级数在其收敛区间内逐项积分、逐项微分后，其收敛半径如何变化？

13. 计算幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$的收敛域.

14. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$的收敛域.

第八章　多元函数

知识点：

1. 多元函数的定义域；
2. 空间任意两点的距离公式；
3. 球面方程的表示；
4. 二元函数的极限；
5. 二元函数偏导数、二阶偏导数、全微分的计算；
6. 多元函数连续、偏导数存在、可微、偏导数连续之间的关系；
7. 多元复合函数求偏导数；
8. 多元隐函数求偏导数；
9. 二元函数极值存在的必要条件；
10. 二元函数极值存在的充分条件；

11. 二元函数的最值应用；

12. 二重积分的性质；

13. 直角坐标系下二重积分的计算；

14. 交换累次积分次序；

15. 直角坐标系下的二重积分变换为极坐标系下的二重积分公式.

习题：

1. 试表示函数 $z=\ln(1+x+y)$ 的定义域；

2. 求空间两点 $(1,-1,0),(2,0,-2)$ 的距离.

3. 试表示球心在原点，半径为 5 的球面方程.

4. 已知 $z=x^2y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},dz,z_x{}'(1,1)$，$z_y{}'(1,1)$.

5. 已知 $z=\ln(x^2+y^2)$，求 dz .

6. $(0,0)$ 是函数 $z=-\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 的极值点吗？

7. 如果D是由$x=1,x=2,y=0,y=1$围成的矩形，计算$\iint\limits_D kd\sigma$.

8. 交换$\int_0^3 dx\int_x^3 f(x,y)dy$ 的积分次序.

9. 直角坐标系下的二重积分可变换为极坐标系下的二重积分公式：$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,drd\theta$，对吗？

10. 求由 $z^2+e^z=xy$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

11. 求由 $xz-y^2+xy=xyz$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

12. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由 $x=1,x=3$，直线 $y=x$ 及 x 轴所围成的区域.

13. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,d\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2$ 及直线 $y=x+2$ 所围成的区域.

14. 设某工厂生产甲、乙两种产品，产量分别为 x 和 y，总成本函数为 $C(x,y)=x^2+4y^2+2$，已知甲的售价为 6，乙的售价为 16，问两种商品各生产多少单位时，总利润最大？最大利润为多少？

15. 设商品 A 的需求量 x 与价格 p 的关系是 $p=120-5x$, 商品 B 的需求量 y 与价格 q 的关系是 $q=200-20y$. 若生产两种产品的总成本函数为 $C=35+40(x+y)$, 问两种商品各生产多少时利润最大?

第九章　微分方程

知识点：

1. 微分方程的阶；

2. 会判断一阶微分方程的类型，如可分离变量的微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程；

3. 可分离变量的微分方程求通解；

4. 二阶微分方程 $y''=f(x)$， $y''=f(x,y')$， $y''=f(y,y')$ 的求解方法；

5. 二阶常系数线性齐次微分方程的通解形式.

习题：

1. 判断 $(y'')^2+5(y')^4-y^5+x^7=0$ 是几阶微分方程？

2. $(x^2+y^2)dx+y(1+x)dy=0$ 是否可分离变量？

3. $(x^2+y^2)dx+y(1+x)dy=0$ 是否为齐次方程？

4. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x-1}=(x-1)^2$ 是否为一阶线性微分方程？

5. 求微分方程 $y''=x$ 的通解.

6. 形如 $y''=f(x,y')$， $y''=f(y,y')$ 的二阶微分方程的求解方法.

7. 求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解.

8. 求微分方程 $y''-4y'+13y=0$ 的通解.

9. 求微分方程 $y''-3y'-10y=0$ 的通解.

10. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ 的通解.

11. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=x^2y^2$ 的通解.