Obliczenia naukowe
Lista 4

Aleksandra Wójcik

Grudzień 2023

1 Zadanie 1

1.1 Opis zadania

Zadanie nakazuje utworzenie funkcji `ilorazyRoznicowe`, która dla podanych danych (x -wektor długości n+1 zawierajacy wezły $x_0, x_1, ...x_n$ oraz f - wektor długosci n+1 zawierajacy wartości interpolowanej funkcji w wezłach $f(x_0), ..f(x_n)$) zwróci wektor fx długości n+1 zawierajacy obliczone ilorazy różnicowe.

1.2 Interpretacja matematyczna ilorazów różnicowych

Korzystajac z twierdzenia `Dla wez␣lów` x_i `i liczb` y_i `istnieje dok␣ladnie jeden wielomian` $p \in \Pi_n$ `spe␣lniajacy warunki interpolacji` $p(x_i) = y_i$ `dla` $0 \leq i \leq n$`.` . Zatem p możnana przedstawic w innej bazie Π_n.

$q_0 = 1$
$q_1 = (x - x_0)$
$q_2 = (x - x_0)(x - x_1)$
:
$q_n = (x - x_0)...(x - x_{n-1})$

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j q(x)$$

Otrzymujemy nastepujacy układ równań macierzowych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & q_1(x_n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & q_1(x_n) & q_2(x_n).. & & q_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Wyznaczajac współczynniki $c_i latwomożnazauważyć, żedladowolnego c_i$ zależy ono od wartości funkcji f w punktach $x_0, x_1, ...x_i$ Wielkość $c_i = f[x_0, x_1, ...x_i]$ nazywamy ilorazem różnicowym opartym na wezłach $x_0, x_1, ...x_i$.

1.2.1 Wyznaczanie ilorazów różnicowych

Własności ilorazów różnicowych:

- f[x_0]=f(x_0)
- f$[x_0, x_1, ...x_n] = \frac{f[x_1,x_1,...x_n]-f[x_0,x_1,...x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Korzystajac z wyżej wymienionych własności, jesteśmy w stanie rekurencyjnie wyznaczać kolejne ilorazy różnicowe. Algorytm uzywany do implementacji omawianych obliczeń jest łatwy do zaimplementowania i ma złożoność obliczeniowa $O(n^2)$.

2 Zadanie 2

2.1 Opis zadania

Należy napisać funkcje obliczajaca wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie x=t za pomoca uogólnionego algorytmu Hornera w czasie O(n)

2.2 Uogólniony algorytm Hornera

Korzystajac z własności wielomianów w postaci Newtona, pożemy rozpisać p nastepujaco:

- $$p(x) = f[x_0]+\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\dots,x_i]q_i(x) = f[x_0]+\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\dots,x_i](x-x_0)\cdots(x-x_i)$$
- = f[x$_0$] $+ (x-x_0)\left(f[x_0,x_1] + \sum_{i=2}^{n} f[x_0,\dots,x_i](x-x_1)\cdots(x-x_i)\right) = \dots$
- = f[x$_0$]$+(x-x_0)\left(f[x_0,x_1] + (x-x_1)\dots(f[x_0,\dots,x_{n-1}] + (x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n])\dots\right)$

Łatwo można zauważyć, że w celu wyznacznia wartości funkcji w punkcie, należy zaczać kalkulacje od "środka", ponieważ każda składowa wielomianu p jest w postaci $s_k = f[x_0, x1, ...x_k] + (x - x_k) \cdot s_{k-1}$.

Przykład: Rozważania zaczynamy od środka:

- $s_1 -> f[x_0, x_1, ..., x_n]$
- $s_2 -> f[x_0, ...x_{n-1}] + (x - x_{n-1}) \cdot s_1$

  :

- $s_n -> f[x_0] + (x - x_0) \cdot s_{n-1}$

Z powyższego rozumowania, możemy ukształtować algorytm:

$tn \leftarrow f_n$; //Gdzie $f_n = f[x_0, x_1, ..x_n]$
for $k \leftarrow n - 1$ **downto** 0 **do**
  $tn \leftarrow f_k + (x_0 - x_k) \cdot nt$;
end for
return tn;

3 Zadanie 3

3.1 Opis zadania

Zadanie polega na obliczeniu współczynników w postaci naturalnej wielomianu przedstawionego w postaci Newtona. Załóżmy, że wezły interpolacji to $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Chcemy obliczyć współczynniki postaci naturalnej wielomianu $a_0, a_1, \ldots, a_n$, gdzie wielomian ten ma postać:

$$P(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Załóżmy również, że :
$c_0 = f[x_0]$, $c_1 = f[x_0, x_1]$, $c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$, ..., $c_n = f[x_0, \ldots, x_n]$
Wiemy,że weilomian p(x)=

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j q(x)$$

Można go przedstawić w równoważny sposób:

$$p(x) = f[x_0]+(x-x_0)\left(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\ldots(f[x_0, \ldots, x_{n-1}] + (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n])\ldots\right)$$

czyli :

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)\left[c_1 + (x - x_1)\left(c_2 + \ldots + (x - x_{n-1})c_n\right)\ldots\right]$$

Z tego można wywnioskować, że $c_n = a_n$. W celu wyznaczena kolejnych współczynnikiów,bedziemy wykonywać podobne akcje, jak w poprzednim zadaniu, czyli bedziemy rozpakowywać wielomian od środka, a nastepnie poprawiali wyznaczone "tymczasowe" współczynniki funkcji w postaci naturalnej.Algorytm zakłada, że w każdej iteracji cofania (analogicznej do kroku algorytmu Hornera) wyznaczana jest bazowa wartość dla obecnej potegi, a nastepnie aktualizowane sa współczynniki przy wyższych potegach o "nowo odkryte" składniki.

4 Zadanie 4

Zadanie polega na wykonaniu programu, który interpoluje podany jako argumnet wielomian i przedstawia go na wykresie. W tym celu należy użuć funkcji `ilorazyRozlicowe` oraz `warWielomian`

4.1 Analiza rozwiazania

W celu interpolacji wielomianu f, należy przede wszytkim wyznaczyc potrzebne punkty oraz wartości funkcji w tych punktach. Liczba punktów jest ograniczona i wynosi n+1, gdzie n to stopień wielomianu. Wtedy weimy, że dla wyznaczonych punktów istanieje dokładnie jeden wielomian p$\in\Pi_n$ spełniajacy warunek interpolacji.

W celu wyznaczenia ilorazów różnicowych wywołuje wczesniej zaimplementowana funkcje `ilorazyRoznicowe`, a nastepnie w celu ukazania wielomianu na wykresie wybieram dowolna (całkiem duża) liczbe punktów, dla których licze wartość funkcji.Finalnie otrzymane wartości ukazuje na wykresie używajac biblioteki Plots.

5 Zadanie 5

5.1 Opis zadania

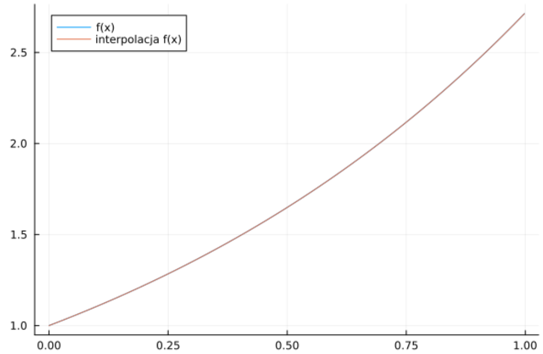
Przetestować funkcje `rysujNnfx(f, a, b, n)` na nastepujacych przykładach:

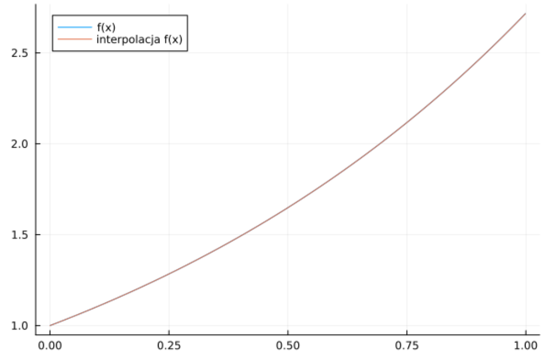
(a) e^x, $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$,

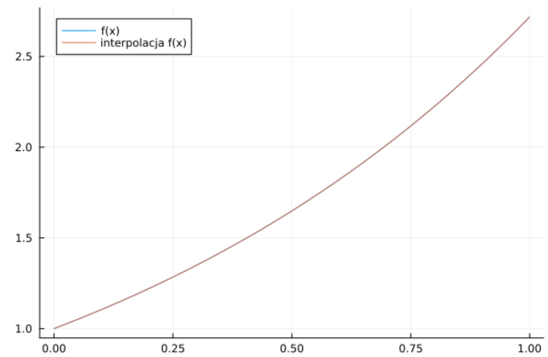
(b) $x^2 \sin x$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$.

5.2 Wyniki

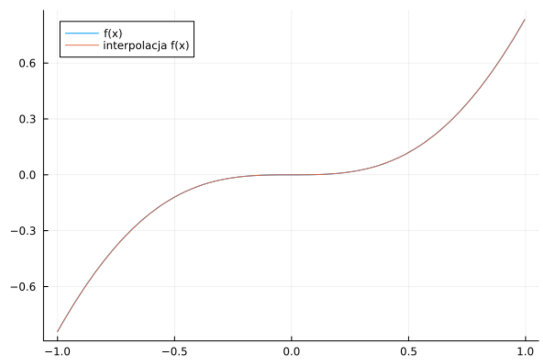
funkcja f(X) = e^x

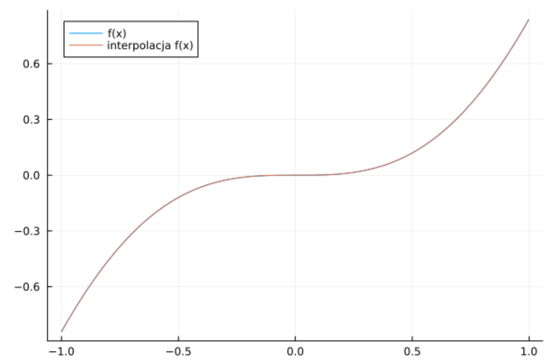


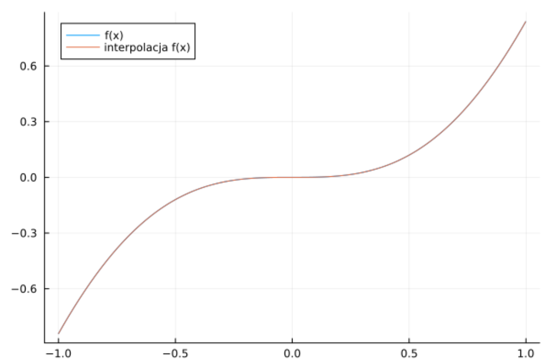




funkcja g(x)=$x^2 \cdot sin(x)$







5.3 Wnioski

Przedstawione wykresy ukazuja funkcje, które sa dokładnie interpolowane. Wykresy funkcji pokrywaja sie.

6 Zadanie 6

7 Opis zadania

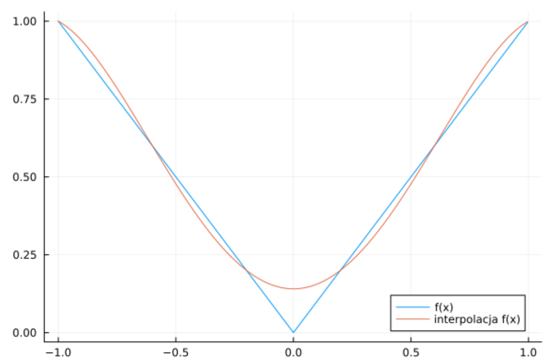
Przetestować funkcje `rysujNnfx(f, a, b, n)` na nastepujacych przykładach (zjawisko rozbieżności):

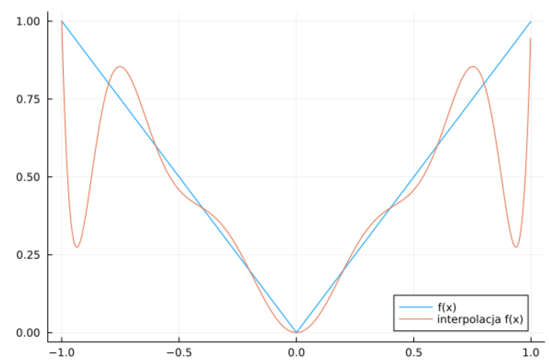
(a) $|x|$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$,

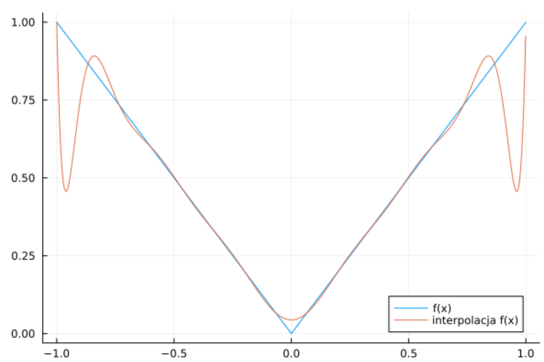
(b) $\frac{1}{1+x^2}$, $[-5, 5]$, $n = 5, 10, 15$ (zjawisko Runge'go).

7.1 Wyniki

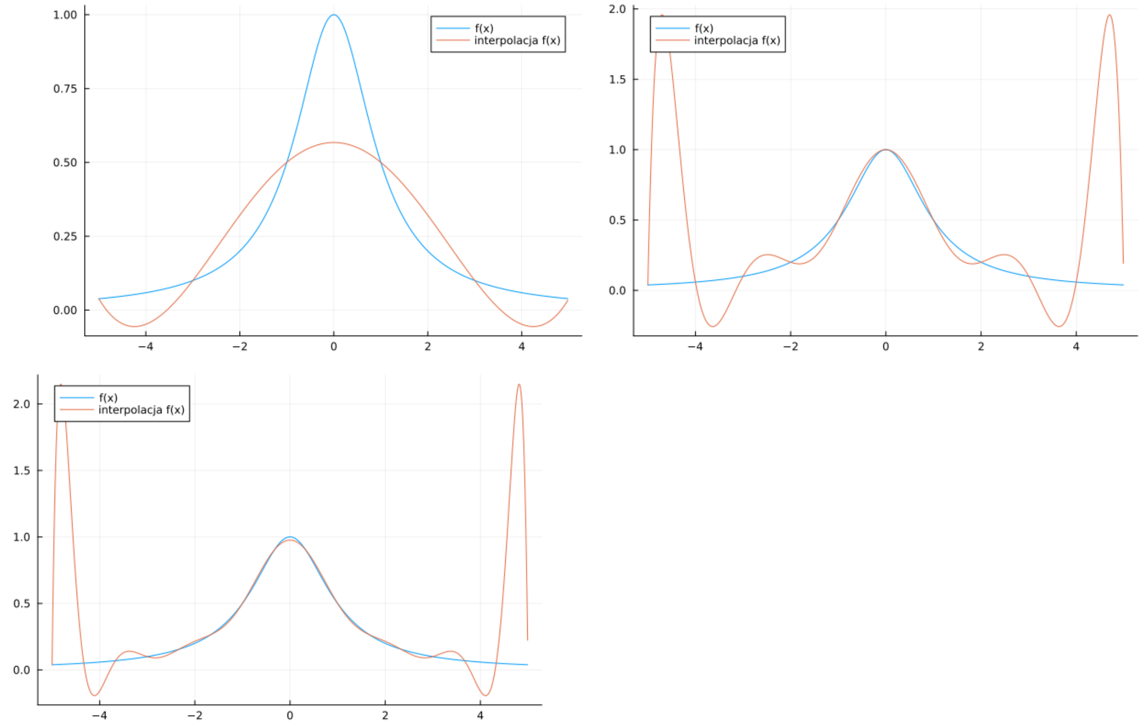
Funkcja $|x|$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$







Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$, $[-5, 5]$, $n = 5, 10, 15$



7.2 Obserwacje

Widzimy, że wielomiany powstałe na wskutek interpolacji funkcji nie pokrywaja sie z owymi funkcjami. Ponadto widzimy, że dla wieknych wartości n, dochodzi do gorszych przybliżeń funkcji.

7.3 Wnioski

Wykres pierwszy przedstawia funkcje f(x)=abs(x) , która nie jest różniczkwalna. Ten fakt bezpośrednio wskazuje na to, że niemożliwe jest przedstawienie tej fukcji za pomoga wielomianu, które sa różniczkowane na całej dziedzinie. Ponadto dla obu funkcji dochodzi do wystapienia zjawiska Rungego, objawiajace sie zwiekszona, dla rosnacych wartości n (stopień weilomianu), oscylacja miedzy wartościami wielomianu interpolacyjnego a rzeczywista funkcja dla równoległych wezłów.