

# Agrégation

Xavier MONTILLET

29 avril 2016

Notations :

- ▶ todo (pour les oraux blancs)
- ✓ ok
- 🤔 bof (à changer si possible)
- ✗ pas ok

Première partie

Informatique

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Informatique</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Leçons</b>	<b>6</b>
1.1	901 - ► Structures de données : exemples et applications. (3/2) . .	6
1.1.1	Rapport du jury . . . . .	6
1.1.2	Développements . . . . .	6
1.1.3	Références . . . . .	6
1.1.4	Plan . . . . .	6
1.1.5	Remarques . . . . .	7
1.2	902 - ► Diviser pour régner : exemples et applications. (2/2) . . .	7
1.2.1	Rapport du jury . . . . .	7
1.2.2	Développements . . . . .	7
1.2.3	Références . . . . .	7
1.2.4	Plan . . . . .	7
1.2.5	Remarques . . . . .	7
1.3	903 - ► Exemples d'algorithmes de tri. Complexité. (2/2) . . . . .	7
1.3.1	Rapport du jury . . . . .	7
1.3.2	Développements . . . . .	8
1.3.3	Références . . . . .	8
1.3.4	Plan . . . . .	8
1.3.5	Remarques . . . . .	8
1.4	906 - ► Programmation dynamique : exemples et applications. (3/2)	9
1.4.1	Rapport du jury . . . . .	9
1.4.2	Développements . . . . .	9
1.5	912 - ► Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples. (2/2) . . . . .	9
1.5.1	Développements . . . . .	9
1.5.2	Références . . . . .	9
1.5.3	Plan . . . . .	9
1.5.4	Remarques . . . . .	9
1.6	913 - ► Machines de Turing. Applications. (2/2) . . . . .	10
1.6.1	Développements . . . . .	10
1.6.2	Références . . . . .	10
1.6.3	Plan . . . . .	10
1.6.4	Remarques . . . . .	10
1.7	916 - ► Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications. (2/2) . . . . .	10
1.7.1	Rapport du jury . . . . .	10
1.7.2	Développements . . . . .	10
1.7.3	Références . . . . .	10

1.7.4	Plan . . . . .	11
1.7.5	Remarques . . . . .	11
1.8	917 - ➤ Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. (2/2) . . . . .	11
1.8.1	Rapport du jury . . . . .	11
1.8.2	Développements . . . . .	11
1.8.3	Références . . . . .	11
1.8.4	Plan . . . . .	11
1.8.5	Remarques . . . . .	11
1.9	921 - ➤ Algorithmes de recherche et structures de données associées. (2/2) . . . . .	11
1.9.1	Développements . . . . .	11
1.9.2	Références . . . . .	12
1.9.3	Plan . . . . .	12
1.9.4	Remarques . . . . .	12
1.10	922 - ➤ Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples. (2/2) . . . . .	12
1.10.1	Développements . . . . .	12
1.10.2	Références . . . . .	12
1.10.3	Plan . . . . .	12
1.10.4	Remarques . . . . .	12
1.11	925 - ➤ Graphes : représentations et algorithmes. (2/2) . . . . .	12
1.11.1	Développements . . . . .	12
1.11.2	Références . . . . .	13
1.11.3	Plan . . . . .	13
1.11.4	Remarques . . . . .	13
1.12	927 - ➤ Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison. (2/2) . . . . .	13
1.12.1	Rapport du jury . . . . .	13
1.12.2	Développements . . . . .	13
1.12.3	Références . . . . .	13
1.12.4	Plan . . . . .	13
1.12.5	Remarques . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Développements</b>	<b>15</b>
2.1	Théorème de Cook . . . . .	15
2.2	Tri par Tas . . . . .	15
2.3	Unification . . . . .	15
2.4	Plus longue sous-séquence commune . . . . .	15
2.5	Les points les plus proches . . . . .	16
2.6	Bellman-Ford . . . . .	16
2.7	Tri topologique . . . . .	16
2.8	Arbres binaires de recherche optimaux . . . . .	16
2.9	Décidabilité de l'arithmétique de Presburger . . . . .	16
2.10	Calculable implique récursif . . . . .	17
2.11	DPLL . . . . .	17
2.12	FFT . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Références</b>	<b>18</b>



# Chapitre 1

## Leçons

### 1.1 901 - ➤ Structures de données : exemples et applications. (3/2)




#### 1.1.1 Rapport du jury

Le mot *algorithme* ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques.

La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données que d'un algorithme. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres.

(*Rapport du jury.* 2015)

#### 1.1.2 Développements

-  Tri par Tas
-  Arbres binaires de recherche optimaux
-  FFT

#### 1.1.3 Références

Cormen, BBC, Froidevaux, Papadimitriou

#### 1.1.4 Plan

- Défs BBC (type concret, type abstrait, structure de données)
- Structures de base (tableau, liste, arbres binaires)
- Ordonnancement (piles, files, files de priorité)
- Ensembles et dictionnaires

### 1.1.5 Remarques

Mentionner les implémentations naïves, et faire une remarques générale sur les implémentations implicites et paresseuses

## 1.2 902 - ➤ Diviser pour régner : exemples et applications. (2/2)

### 1.2.1 Rapport du jury

Cette leçon permet au candidat de proposer différents algorithmes utilisant le paradigme *diviser pour régner*. Le jury attend du candidat que ces exemples soient variés et touchent des domaines différents.

Un calcul de complexité ne peut se limiter au cas où la taille du problème est une puissance exacte de 2, ni à une application directe d'un théorème très général recopié approximativement d'un ouvrage de la bibliothèque de l'agrégation. *(Rapport du jury. 2015)*

### 1.2.2 Développements



Les points les plus proches



FFT

### 1.2.3 Références

Cormen, BBC, Papadimitriou

### 1.2.4 Plan

- Paradigme et premiers exemples (et Master Theorem)
- Tri et recherche
- Multiplication (Karatsuba, Strassen, FFT)
- Géométrie algorithmique
- Applications théoriques (Savitch, multiplication de matrice -> inversion)

### 1.2.5 Remarques

Graphe de dépendances acyclique (ou presque)

## 1.3 903 - ➤ Exemples d'algorithmes de tri. Complexité. (2/2)

### 1.3.1 Rapport du jury

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.



Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction et que l'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne soit menée avec rigueur.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, ainsi que la représentation en machine des collections triées.

Le jury ne manquera pas de demander au candidat des applications non triviales du tri. (*Rapport du jury*. 2015)

### 1.3.2 Développements



Tri par Tas

Tri topologique

### 1.3.3 Références

Cormen, BBC, Papadimitriou

### 1.3.4 Plan

- Intro (tri, applications, stable, en place, [on se restreint aux entiers?], on compte le nombre de comparaisons, borne inférieure)
- Tris naïfs
- Tri par tas
- Diviser pour régner
- Autres tris (base, paquet, dénombrement, mémoire externe?)

### 1.3.5 Remarques

Quand on trie, on trie par rapport à un *préordre*  $\preceq$ . On a donc aussi une relation d'équivalence  $x \approx y := (x \preceq y) \wedge (x \succeq y)$  qui n'a aucune raison d'être l'égalité.

Si l'on note  $\sqsubseteq$  le préordre associé au tableau donné en entrée d'un tri (donc  $T[i] \sqsubseteq T[j] \iff i \leq j$ ), le fait qu'une procédure de tri soit *stable* veut dire que trier par rapport à  $\preceq$  ou par rapport au préordre lexicographique associé à  $(\preceq, \sqsubseteq)$ , que l'on note  $\preceq_{\preceq, \sqsubseteq}^{lex}$ , revient au même. En particulier, si on a une procédure de tri instable, on peut en construire une stable (mais le tri ne peut alors plus être *en place* car pour pouvoir savoir si  $x \sqsubseteq y$ , on a besoin de stocker de tableau d'entrée et on est donc forcé de travailler sur une copie).

La notion de tri *stable* n'a aucun intérêt si on se restreint aux entiers muni de leur ordre habituel (ou plus généralement à un ensemble muni d'un ordre [par opposition à un préordre]) car si l'on ne peut jamais distinguer  $T[i]$  de  $T[j]$ , s'assurer qu'ils sont restés dans le même ordre n'est pas vraiment utile.

Pour trier selon  $\preceq_{\preceq_1, \preceq_2}^{lex}$ , on peut d'abord trier selon  $\preceq_2$  et ensuite utiliser une procédure de tri stable pour trier selon  $\preceq_1$  (ce qui peut être plus facile à implémenter que le tri selon  $\preceq_{\preceq_1, \preceq_2}^{lex}$  et peut servir si l'on doit trier selon  $\preceq_{\preceq_1, \preceq_2}^{lex}$  et  $\preceq_{\preceq_1', \preceq_2}^{lex}$ ).

Dans le tri rapide, on peut choisir la médiane en  $O(n)$  comme pivot et donc atteindre un pire cas en  $O(n \log n)$  mais en pratique, c'est plus lent.




## 1.4 906 - ➤ Programmation dynamique : exemples et applications. (3/2)

### 1.4.1 Rapport du jury

Même s'il s'agit d'une leçon d'exemples et d'applications, le jury attend des candidats qu'ils présentent les idées générales de la programmation dynamique et en particulier qu'ils aient compris le caractère générique de la technique de mémorisation. Le jury appréciera que les exemples choisis par le candidat couvrent des domaines variés, et ne se limitent pas au calcul de la longueur de la plus grande sous-séquence commune à deux chaînes de caractères.



Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité en espace. (*Rapport du jury*, 2015)

### 1.4.2 Développements

-  Plus longue sous-séquence commune
-  Bellman-Ford
-  Arbres binaires de recherche optimaux

## 1.5 912 - ➤ Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples. (2/2)

### 1.5.1 Développements

-  Décidabilité de l'arithmétique de Presburger
-  Calculable implique récursif

### 1.5.2 Références

Wolper, Carton

### 1.5.3 Plan

- Fonctions primitives récursives
- (Limites du modèle) (cardinal, Ackermann)
- Fonctions récursives (calculables, casto affairé)

### 1.5.4 Remarques

Aucunes.

## 1.6 913 - ➤ Machines de Turing. Applications. (2/2)

### 1.6.1 Développements



Théorème de Cook



Calculable implique récursif

### 1.6.2 Références

Wolper, Carton

### 1.6.3 Plan

- Défs (défs équivalentes, codage, machine universelle)
- Calculabilité et décidabilité (RE, R, Rice)
- Complexité

### 1.6.4 Remarques

Aucunes.

## 1.7 916 - ➤ Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications. (2/2)

### 1.7.1 Rapport du jury

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité.

Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT.

Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales. (*Rapport du jury*. 2015)

### 1.7.2 Développements



Théorème de Cook



DPLL

### 1.7.3 Références

- Huth, Ryan (tableau avec différentes représentations p. 361, ROBDD)
- Stern (Tseitin)
- Devisme, Lafourcade, Lévy (Tout le reste, en particulier DPLL)

#### 1.7.4 Plan

- Syntaxe (lecture unique, notation parenthésée, notation polonaise, arbre, circuit)
- Sémantique (compacité, représentations [table, formes normales, OBDD])
- Problèmes associés (SAT, Valie, DPLL, Tseitin)

#### 1.7.5 Remarques

Aucunes.

### 1.8 917 - ➤ Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. (2/2)

#### 1.8.1 Rapport du jury

La question de la syntaxe dépasse celle de la définition des termes et des formules. Elle comprend aussi celle des règles de la démonstration. Le jury attend donc du candidat qu'il présente au moins un système de preuve et les liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude.

*(Rapport du jury. 2015)*

#### 1.8.2 Développements



Unification



Décidabilité de l'arithmétique de Presburger

#### 1.8.3 Références

- David Nour Raffali
- Cori Lascar
- CK ?

#### 1.8.4 Plan

- qwe

#### 1.8.5 Remarques

Aucunes.

### 1.9 921 - ➤ Algorithmes de recherche et structures de données associées. (2/2)

#### 1.9.1 Développements



Les points les plus proches



Arbres binaires de recherche optimaux

### 1.9.2 Références

— Cormen

### 1.9.3 Plan

- Liste et tableau (recherche, rang, min, max)
- ABR (AVL, ABR optimaux)
- Tables de Hachage

### 1.9.4 Remarques

Demander à Simon pourquoi ABR optimaux  $\rightarrow$  Huffman (l'ordre des clés factices est conservé dans ABR optimaux mais l'ordre des clés n'est pas conservé dans Huffman)

## 1.10 922 - ➤ Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples. (2/2)

### 1.10.1 Développements



Décidabilité de l'arithmétique de Presburger



Calculable implique récursif

### 1.10.2 Références

- Carton
- Wolper
- Sipser
- Lassaigne Rogemont (Logique et fondements de l'informatique)

### 1.10.3 Plan

- Fonction récursives et machines de Turing
- Ensembles récursifs et récursivement énumérables (équivalences, énumérateur, propriétés de clôture)
- Exemples et applications (langages, PCP, théories)

### 1.10.4 Remarques

Aucunes.

## 1.11 925 - ➤ Graphes : représentations et algorithmes. (2/2)

### 1.11.1 Développements



Bellman-Ford



Tri topologique

### 1.11.2 Références

— Cormen

### 1.11.3 Plan

— Défs  
— Représentations  
— Parcours  
— Chemins  
— Problèmes de réseaux

### 1.11.4 Remarques

Aucunes.

## 1.12 927 - ➤ Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison. (2/2)

### 1.12.1 Rapport du jury

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. *(Rapport du jury. 2015)*

### 1.12.2 Développements

😊 Tri par Tas  
😊 Unification

### 1.12.3 Références

— Cormen  
— Winskel  
— Luc Albert  
— David Nour Raffali

### 1.12.4 Plan

```
let f (x : int ref) (y : int ref) =  
  x := !x lxor !y;  
  y := !x lxor !y;  
  x := !x lxor !y
```

— Terminaison (ensemble bien fondé, itératif et récursif)

- Correction (itératif et récursif)
- Sémantique axiomatique

#### **1.12.5 Remarques**

Aucunes.

## Chapitre 2

# Développements

### 2.1 Théorème de Cook

Leçons :



913 - ➤ Machines de Turing. Applications. (2/2)



916 - ➤ Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications. (2/2)

Wolper (et Carton)

### 2.2 Tri par Tas

Leçons :



901 - ➤ Structures de données : exemples et applications. (3/2)



903 - ➤ Exemples d'algorithmes de tri. Complexité. (2/2)



927 - ➤ Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison. (2/2)

Cormen

Remarques :

- $n$  pour taille du tas et  $l$  pour longueur de tableau Faire un dessin.
- Dire que la série converge sans le justifier.

### 2.3 Unification

Leçons :



917 - ➤ Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. (2/2)



927 - ➤ Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison. (2/2)

### 2.4 Plus longue sous-séquence commune

Leçons :



906 - ➤ Programmation dynamique : exemples et applications. (3/2)

Cormen



Remarques :



- Lemme, relation de récurrence et algorithme (et exemple si c'est trop court).
- Il faut juste changer les notations ( $\tilde{u}u_{\bullet} = u$ )



## 2.5 Les points les plus proches

Leçons :

-  902 - ➤ Diviser pour régner : exemples et applications. (2/2)
-  921 - ➤ Algorithmes de recherche et structures de données associées. (2/2)

## 2.6 Bellman-Ford

Leçons :


-  906 - ➤ Programmation dynamique : exemples et applications. (3/2)
-  925 - ➤ Graphes : représentations et algorithmes. (2/2)

Remarques :

- Bien différentier taille et poids d'un chemin
- *Le* poids minimal, *un* chemin de poids minimal

## 2.7 Tri topologique

Leçons :

-  903 - ➤ Exemples d'algorithmes de tri. Complexité. (2/2)
-  925 - ➤ Graphes : représentations et algorithmes. (2/2)




Cormen

Remarques :

- Parcours en profondeur avec date
- intervalles de dates disjoint ou inclusion (on suppose  $u.d < v.d$  et après cas selon  $u.f < v.d$  ou non)
- si  $(u, v)$  arête alors  $u.f > v.f$  (cas selon la couleur de  $v$  quand on passe par  $(u, v)$ )
- exemple ?




## 2.8 Arbres binaires de recherche optimaux

Leçons :

-  901 - ➤ Structures de données : exemples et applications. (3/2)
-  906 - ➤ Programmation dynamique : exemples et applications. (3/2)
-  921 - ➤ Algorithmes de recherche et structures de données associées. (2/2)




## 2.9 Décidabilité de l'arithmétique de Presburger

Leçons :

-  912 - ➤ Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples. (2/2)
-  917 - ➤ Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. (2/2)
-  922 - ➤ Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples. (2/2)

## 2.10 Calculable implique récursif

Leçons :


-  912 - ➤ Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples. (2/2)
-  913 - ➤ Machines de Turing. Applications. (2/2)
-  922 - ➤ Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples. (2/2)

Remarques :

- Carton pour les formules
- Wolper four nom des fonctions intermédiaires et vision globale
- Il faut prendre  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  et à la fin, rajouter une fonction pour transformer  $(u, q, v)$  et  $\varepsilon, q, v'$  pour pouvoir dire que le résultat est  $v'$ .



## 2.11 DPLL

Leçons :

-  916 - ➤ Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications. (2/2)

## 2.12 FFT

Leçons :

-  901 - ➤ Structures de données : exemples et applications. (3/2)
-  902 - ➤ Diviser pour régner : exemples et applications. (2/2)

## Chapitre 3

## Références

Livres a priori cools : KOZEN [1]

# Bibliographie

- [1] Dexter C. KOZEN. *The Design and Analysis of Algorithms*. New York, NY, USA : Springer-Verlag New York, Inc., 1992. ISBN : 0-387-97687-6.
- [2] *Rapport du jury*. 2015. URL : [http://cache.media.education.gouv.fr/file/agreg\\_ext/30/1/math\\_470301.pdf](http://cache.media.education.gouv.fr/file/agreg_ext/30/1/math_470301.pdf).

lassaigne rougemeont  
froidevaux godel soria  
cori lascar (1 ET 2)  
dehornoy  
informatique theorique (DEVISME, LAFOURCADE LEVY) : DPLL (et  
mieux pr calcul prop ?)  
Hutt, Ryan (BDD)

Deuxième partie

Mathématiques