

# 实分析

xiaou0

2025 年 12 月 11 日

<b>1 集合</b>	<b>3</b>
1.1 子集族 . . . . .	3
1.2 集合的序关系 . . . . .	3
1.3 集合列 . . . . .	4
<b>2 测度论 I</b>	<b>7</b>
2.1 $\sigma$ -代数 . . . . .	7
2.2 可测空间 . . . . .	9
2.3 可测映射 . . . . .	9
2.4 $[0, \infty]$ 上的代数运算 . . . . .	10
2.5 测度 . . . . .	10
2.6 外测度 . . . . .	13
2.7 Lebesgue 外测度 . . . . .	13
2.8 Carathéodory 条件 . . . . .	14
2.9 Lebesgue 测度 . . . . .	16
2.10 Vitali 集 . . . . .	18
2.11 乘积测度 . . . . .	19
2.12 零测集 . . . . .	20
2.13 特征函数 . . . . .	21
2.14 简单函数 . . . . .	21
<b>3 空间与收敛</b>	<b>23</b>
3.1 线性空间 . . . . .	23
3.2 拓扑空间 . . . . .	24
3.3 连续映射 . . . . .	25



### 特别鸣谢

琪露诺 | 幻想乡大学纯粹与应用数学博士

<https://www.pixiv.net/artworks/90486424>

### 作者的话

Ciallo～我是 xiaou0, 一名爱好数学的普通高中生.

该材料仅供交流学习, 仅供交流学习! 贩卖兜售的话 xiaou0 会哭的 TAT

我个人的数学写作风格可能尚为稚嫩. 如果你正在学习数学, 希望这份材料能够帮助到你!

### 讨论群

讨论群号 (QQ): 244425765

# 1 集合

本章中, 我们将介绍实分析所需要的集合和拓扑的前置知识 (当然过于基本的就不介绍了:P).

## 1.1 子集族

### 定义 1.1. 子集族

对于集合  $S$ , 若集合  $\mathcal{T}$  中的任一元素都是  $S$  中的子集, 则称  $\mathcal{T}$  是  $S$  上的子集族 (collection of subsets).



子集族是分析学中最重要的刻画之一, 诸多内容例如拓扑,  $\sigma$ -代数都是子集族的构造.

例如,  $S$  的幂集  $\wp(S)$  就是  $S$  的一个子集族. 事实上, 幂集是最大的子集族: 显然它包含了  $S$  全体的子集, 任何  $S$  的子集族都是  $\wp(S)$  的子集.

## 1.2 集合的序关系

### 定义 1.2. 集合的序关系

对于任给的集族  $\mathcal{C}$ , 我们可以定义一个偏序关系. 对于  $A, B \in \mathcal{C}$ , 我们定义



$$A \preceq B \iff A \subset B$$

显然构成偏序关系. 为了记号方便, 也为了不引起歧义, 我们用  $A \subset B$  来代指  $A \preceq B$ .

注. 1. 这本书内我们用  $\subset$  表示子集, 用  $\subsetneq$  表示真子集.

由定义, 下面的定理是显然的.

### 定理 1.1.



任何集合族都是偏序集.

不失一般性, 下面我们对于集合族的讨论, 总是考虑将其作为某个全集  $\Omega$  的子集族.

回顾上确界的定义, 在偏序集中, 上界 (upper bound) 的定义为对于集合  $A$  中的任意元素  $a$ , 都有  $b \geq a$  的元素  $b$  就成为  $A$  的一个上界. 而上确界 (supremum)  $c$  是满足对任何  $A$  的上界  $b$ , 都有  $b \geq c$  的那个上界  $c$  (称之为上确界的泛性质 (universal property)). 对偶地我们可以定义下界 (lower bound) 和下确界 (infimum).

### 定理 1.2.



一个偏序集的上确界存在即唯一.

*Pf.* 设  $m_1, m_2$  都是  $A$  的上确界, 那么它们肯定是上界, 由上确界的泛性质可得  $m_1 \leq m_2$  和  $m_2 \leq m_1$ , 由反对称性可知  $m_1 = m_2$ .  $\square$

从而我们可以给出如下定义:

### 定义 1.3. 上界集

设  $\mathcal{C}$  是  $X$  的子集族, 则  $\mathcal{C}$  对于集合的序关系的上确界称为该子集族的上界集 (supremum set).



我们容易猜想结论:

### 定理 1.3.

设  $\mathcal{C}$  是对任意并封闭的集族, 则  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  的上界集就是它们的并:

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$



Pf. 显然

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

是  $\mathcal{A}$  的一个上界, 假若  $B$  是  $\mathcal{A}$  的一个上界, 那么对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 都有  $A \subset B$ , 从而  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset B$ .  $\square$

### 推论 1.4.

设  $\mathcal{C}$  是对有限并封闭的集族, 则  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$  的上界集就是它们的并:

$$\sup \{ A_1, A_2, \dots, A_n \} = \bigcup_{k=1}^n A_k$$



### 推论 1.5.

设  $\mathcal{C}$  是对可数并封闭的集族, 则任意集列  $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$  的上界集就是它们的并:

$$\sup \{ A_n \}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$



对偶地, 我们可以定义下界集, 并且指出一个集族的下界集就是它们的交.

## 1.3 集合列

我们重点研究的对象是集合列 (特别是某个集合的子集列), 以及它们的极限.

### 定义 1.4. 集列

正整数集到某个集合族  $\mathcal{C}$  的映射  $\mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{C}$ , 就称作一个集列.



对应于实数列中的极限, 我们可以定义集列的上下极限:

### 定义 1.5. 集列的上极限

对于一列集合  $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ , 其上极限 (limit superior) 定义为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$



### 定义 1.6. 集列的下极限

对于一列集合  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 其下极限 (limit inferior) 定义为

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$



就像实数列极限里那样, 我们也可以借助上下极限定义一个集合列的极限:

### 定义 1.7. 集列的极限

对于一列集合  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 若其上下极限相等, 就称该集合列是收敛 (converge) 的, 并令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} = \liminf_{n \rightarrow \infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$



称之为该集合列的极限 (limit).

我们再来给出两类尤其重要的集列:

### 定义 1.8. 单调集列

对于集合列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 若满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$



则称集合列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调上升的, 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则称集合列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调下降的, 若满足任意一者, 就称该列是单调 (monotonic) 的.

类比实数列的单调有界定理, 我们有

#### 定理 1.6.

若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调的, 那么其必然是收敛的. 若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调上升的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$



若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调下降的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Pf. 假设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调上升的, 则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

由于  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调上升, 从而

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

对任意  $n$  都相同, 因此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

同样地

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

由于  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调上升, 从而

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$$

于是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

类似地可以证明单调下降的情况. □

### 定义 1.9. 单调类

若集合  $X$  的子集族  $\mathcal{M}$  满足对任意单调的集列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ , 都有



$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{M}$$

则称  $\mathcal{M}$  是  $X$  的一个单调类 (monotonic class).

## 2 测度论 I

自从小学开始学习几何以来, 我们似乎一直默许了一个概念: 面积. 面积似乎无处不在, 人们对它司空见惯了, 却仍然没有意识到一个严重的问题, 那就是如何在数学里严格定义面积?

你或许会说: 这很简单啊, 比如说正方形的面积是  $S = a^2$ , 长方形是  $S = ab$ , 圆形是  $S = \pi r^2$ ... 面积谁不会算啊, 你拿小学知识忽悠我呢?

事实上, 但凡学数学的都能看出, 目前为止我们给面积下的定义都太狭隘了. 我们只需要随手构建一个看上去更神秘的集合, 凭我们之前的知识就束手无策了. 例如求全体有理数  $\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  (作为空间) 中的长度.

而本章的目标就是解决面积 (或体积) 概念的问题, 并引出一个更加抽象, 泛用的概念: 测度.

### 2.1 $\sigma$ -代数

就像在定义实函数之前我们严格定义了实数: 既然要定义测度, 我们就需要指明哪些集合是可测的. 从我们一贯的几何直觉中, 不相交的集合的无交并的面积应该是双方面积的简单加和. 我们可以将这个概念推广到无限情况, 也就是可数可加性. 至于为什么没有不可数可加性, 显然对不可数个数定义代数求和并没有意义.

#### 定义 2.1. $\sigma$ -代数

对于一个集合  $X$ , 其子集族  $\Sigma$  若满足:



A1  $\emptyset \in \Sigma$ .

A2  $A \in \Sigma \implies X \setminus A \in \Sigma$ .

A3 对于子族  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$ , 若指标集  $I$  至多可数, 则  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma$ .

那么就称  $\Sigma$  是  $X$  上的一个  $\sigma$ -代数 ( $\sigma$ -algebra). 若要求条件 A3 中的  $I$  是有限集, 则也称  $\Sigma$  是一个代数.

显然, 上述定义蕴含了以下结果:

#### 定理 2.1.

设  $\Sigma$  是  $X$  上的  $\sigma$ -代数, 则:



A4  $X \in \Sigma$ .

A5 对于子族  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$ , 若指标集  $I$  可数, 则  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \Sigma$ .

上述两个定理是显然的, A4 由 A1 和 A2 推出, A5 可以由 De Morgan 定律 (对偶律) 推出. 事实上, 如果用 A4 和 A5 分别替换 A1 和 A3, 给出的定义和原定义还是等价的.

显然, 幂集  $\wp(X)$  也是  $X$  上的  $\sigma$ -代数, 我们容易证明它是  $X$  上最大的代数. 但我们更多情况下考虑的其实是最小的代数, 具体来说, 是包含某些特定集合的最小代数. 我们发现代数之间也有一系列明确的包含关系:

#### 定义 2.2. 子 $\sigma$ -代数

对于  $X$  上的  $\sigma$ -代数  $\Sigma$ , 若  $\Sigma' \subset \Sigma$  也是  $X$  的  $\sigma$ -代数, 则称为  $\Sigma$  的子  $\sigma$ -代数 (sub  $\sigma$ -algebra).



由于任何子集族都是  $\wp(X)$  的子集, 所有  $\sigma$ -代数都是  $\wp(X)$  的子代数, 这就印证了刚刚说的,  $\wp(X)$  在集合族之间的序关系下,  $\wp(X)$  就是那个最大元. 这给了我们构造最小代数的一种方法: 类似于群论中的生成子群, 既然要找包含某些特定集合的最小代数, 只需找出所有包含这些集合的代数, 取其交集就是满足泛性质的下确界. 不过在此之前, 我们需要先验证  $\sigma$ -代数的任意交还是  $\sigma$ -代数 (即确界一定存在).

### 定理 2.2.

设  $\{\Sigma_j\}_{j \in J}$  是一族  $X$  的  $\sigma$ -代数, 则



$$\Sigma_0 := \bigcap_{j \in J} \Sigma_j$$

也是  $X$  的  $\sigma$ -代数.

*Pf.* 我们逐一验证定义中的公理:

A1 显然对每个  $\Sigma_j$ , 都有  $\emptyset \in \Sigma_j$ , 因此  $\emptyset \in \Sigma_0$  成立.

A2 对任意  $S \in \Sigma_0$ , 那么对每个  $\Sigma_j$  都有  $S \in \Sigma_j$ , 因此  $X \setminus S \in \Sigma_j$ , 从而  $X \setminus S \in \Sigma_0$ .

A3 对任意  $S_1, S_2, \dots \in \Sigma_0$ , 对于每个  $\Sigma_j$  都有  $S_1, S_2, \dots \in \Sigma_j$ , 从而  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Sigma_j$ , 从而也有  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Sigma_0$ .

□

因此我们可以作下述定义:

### 定义 2.3. 生成的 $\sigma$ -代数

设  $\mathcal{M}$  是  $X$  的一个子集族. 令



$$\text{coll}(\mathcal{M}) := \{ \Sigma \mid \Sigma \supset \mathcal{M}, \Sigma \text{为}\sigma\text{-代数} \}$$

显然其非空, 令

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\Sigma \in \text{coll}(\mathcal{M})} \Sigma$$

则由定理 2.2,  $\sigma(\mathcal{M})$  是一个  $\sigma$ -代数, 称之为  $\mathcal{M}$  生成的代数 (generated by  $\mathcal{M}$ ).

就像我们之前讨论的一样,  $\sigma(\mathcal{M})$  就是包含  $\mathcal{M}$  最小的  $\sigma$ -代数. 我们还可以定义两个  $\sigma$ -代数的积构造, 这也是为了积空间的内容作铺垫.

### 定义 2.4. 积 $\sigma$ -代数

设  $\Sigma_1, \Sigma_2$  分别是  $X_1, X_2$  的  $\sigma$ -代数. 则



$$\mathcal{R} := \{S_1 \times S_2 \mid S_1 \in \Sigma_1, S_2 \in \Sigma_2\}$$

并记  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \sigma(\mathcal{R})$ , 它是  $X_1 \times X_2$  上的  $\sigma$ -代数, 称为  $\Sigma_1, \Sigma_2$  的积  $\sigma$ -代数 (product). 有时为了区别它和 Cartesian 积, 也称之为两个  $\sigma$ -代数的张量积.

上面的定义和积拓扑的定义也有异曲同工之妙. 两者的过程都类似于先构造出空间中的矩形, 再通过矩形生成完整的拓扑 ( $\sigma$ -代数). 这是因为有些集合不一定能完全分解为两个集合的积.

### 定理 2.3.

如果  $X$  上的代数  $\mathcal{M}$  是一个单调类, 则  $\mathcal{M}$  是  $\sigma$ -代数.



*Pf.* 设  $\mathcal{M}$  是代数, 则对任意有限并封闭. 对于其中任何一列集合  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 其并集可取为极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n A_n$$

显然这个列是单调的. 由单调类定义, 其极限也在  $\mathcal{M}$  中, 这就证明了  $\mathcal{M}$  是  $\sigma$ -代数.  $\square$

## 2.2 可测空间

可测空间, 其实就是可以定义测度的空间. 需要注意的是, 这和测度空间是两个概念: 测度空间是配备了特定测度的空间.

### 定义 2.5. 可测空间

指定了  $\sigma$ -代数  $\Sigma$  的集合  $X$ , 称为一个可测空间 (measurable space), 通常记作二元组  $(X, \Sigma)$ . 此时称  $S \in \Sigma$  是  $X$  的一个可测集 (measurable set).



可测空间的定义是非常简单的, 同样地我们也可以定义其积对象:

### 定义 2.6. 积可测空间

对于两个可测空间  $(X, \mathcal{A})$  和  $(Y, \mathcal{B})$ , 那么  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  是  $X \times Y$  上的  $\sigma$ -代数, 记



$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

为这两个可测空间的积 (product), 通常简记作  $X \times Y$ .

## 2.3 可测映射

用范畴论的语言, 全体可测空间构成可测空间范畴  $\text{Meas}$ , 这个范畴中的态射就是可测映射, 类似于拓扑学中的连续映射, 它的定义也非常相似:

### 定义 2.7. 可测映射

设  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  是两个可测空间, 映射  $f : X \rightarrow Y$  若满足对任意  $S \in \mathcal{B}$ , 其原象都满足  $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ , 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的一个可测映射 (measurable map). 一个可测空间  $(X, \Sigma)$  上的全体可测映射组成的集合记作  $\mathcal{L}^0(X, \Sigma)$ .



就像拓扑学中的连续函数一样, 我们也有如下结论:

### 定理 2.4.

可测映射的复合仍然是可测映射.



*Pf.* 设  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  是复合映射, 则  $g \circ f : X \rightarrow Z$  满足, 对任意  $Z$  中的可测集  $S$ ,  $g^{-1}(S)$  是  $Y$  中可测集, 从而  $(g \circ f)^{-1}(S)$  是  $X$  中可测集.  $\square$

### 定理 2.5.

一个映射  $f : X \rightarrow Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$  可测, 当且仅当每一个分量函数  $f_i = \pi_i \circ f$  可测.



$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_i \circ f} & Y_i \\ f \downarrow & \nearrow \pi_i & \\ \prod_j Y_j & & \end{array}$$

*Pf.* 由于  $f$  可测, 对任意  $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$  的可测集  $S$ ,  $f^{-1}(S)$  是  $X$  中的可测集. 由定义

$$\mathcal{R} = \{ S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \mid S_1 \in \Sigma_1, S_2 \in \Sigma_2, \dots, S_n \in \Sigma_n \}$$

其中  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  分别是  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  所配备的  $\sigma$ -代数. 从而任何  $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$  中的可测集都可以表示为可数个  $\mathcal{R}$  中元素的并集, 而每个  $\mathcal{R}$  中元素在  $Y_i$  上投影的原像都是  $Y_i$  的可测集(积的泛性质), 可测集的可数并依然可测, 从而每个分量函数是可测的.

另一方面, 若每个分量函数都可测, 那么证明是类似的. 对于  $\mathcal{R}$  中的每个元素, 其在  $Y_i$  上的原像都是可测集, 那么  $f$  自然可测.  $\square$

## 2.4 $[0, \infty]$ 上的代数运算

在处理测度的时候, 我们难免会遇到  $\infty$ , 一个理由是我们希望赋予无限大的集以一个测度, 例如  $\mathbb{R}$  就有无限长. 同样一个序列的极限或级数的和也很可能是  $\infty$ , 如果规避讨论  $\infty$ , 会导致很多麻烦. 在测度论的语境中, 我们一般会做出一些特殊规定:

加法 对于  $0 \leq a \leq \infty$ , 我们总是规定  $a + \infty = \infty + a = \infty$ .

乘法 对于  $0 < a \leq \infty$ , 我们定义  $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ ; 特别地,  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

这么定义可能会显得很奇怪, 因为它似乎和数学分析中的结论有出入, 尤其是  $0 \cdot \infty = 0$ , 在数学分析中我们知道这是一个不定式, 不可以视作定值 凭什么  $0 \cdot \infty = 0$  啊! galgame 里不是这样的!, 然而容易验证, 这样定义的运算的交换律和结合律在  $[0, \infty]$  上都是自动成立的.

## 2.5 测度

现在一切铺垫都准备就绪, 我们给出一般情况下测度的定义:

### 定义 2.8. 测度



设  $(X, \Sigma)$  是可测空间, 若定义在其  $\sigma$ -代数上的集函数  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  满足:

M1  $\mu(\emptyset) = 0$ .

M2 (可数可加性) 设  $\{E_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$  是两两不交的可测集族, 且指标集  $I$  至多可数, 则

$$\mu \left( \bigcup_{i \in I} E_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i)$$

则称  $\mu$  为  $(X, \Sigma)$  上的一个 (非负) 测度 (measure). 指定了测度的可测空间  $(X, \Sigma, \mu)$  称为测度空间 (measure space).

注. 2. 显然  $\mu(E_i)$  一定是大于等于 0 的正数. 因此是正项级数, 重排并不会改变它的敛散性和极限.

注. 3. 我们并没有要求测度一定是有限数, 测度可以取  $\infty$ . 这类集合也是容易构造的.

### 定理 2.6. 测度的保序性

对于配备了测度  $\mu$  的可测空间  $(X, \Sigma)$ , 对于  $A, B \in \Sigma$ , 总有

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$



*Pf.* 若  $A \subset B$ , 则  $B \setminus A \in \Sigma$ , 从而  $\mu(B \setminus A) \geq 0$ . 由可数可加性,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

这就证明了定理. □

### 定理 2.7. 测度的连续性



对于配备了测度  $\mu$  的可测空间  $(X, \Sigma)$ , 若可测集合列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$  单调上升或单调下降, 且  $\mu(A_1) < \infty$ , 则其极限可测并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

*Pf.* 我们分别证明两种情况:

1. 假设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调上升的, 由定理 1.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们作  $B_1 = A_1$ , 对于  $n > 1$ ,  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ . 显然

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

我们只是为  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  作了一次去重, 显然由可数可加性

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$$

等式右边的级数是一个望远镜级数, 其和为  $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) - \mu(A_1)$ , 于是

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

这就证明了  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调上升的情况.

2. 假设  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调下降的, 我们令  $B_n$  为差分, 对任意  $n$ , 定义

$$B_n = A_n \setminus A_{n+1}$$

容易证明

$$A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

显然  $\{B_n\}_{n=1}^\infty$  是两两不交的, 显然有

$$\mu \left( A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n+1}))$$

由 (1) 中类似的方法可以得到

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

这就证明了  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  单调上升的情况.

□

### 定理 2.8. Fatou 引理, 集合形式



对于配备了测度  $\mu$  的可测空间  $(X, \Sigma)$ , 以及可测集合列  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ , 总有

$$\mu \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

若存在可测集  $A_0$  使得  $\mu(A_0) < \infty$  且对任意  $n$ ,  $A_n \subset A_0$ , 则有

$$\mu \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

*Pf.* 考虑  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  的下极限, 显然有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

显然  $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$  是随  $n$  单调上升的. 令

$$B_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \setminus \bigcap_{k=n-1}^{\infty} A_k$$

那么

$$\begin{aligned} \mu \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) &= \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \\ &= \mu \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \mu \left( \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) - \mu \left( \bigcap_{k=n-1}^{\infty} A_k \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

同样地, 考虑  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  的上极限, 显然有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

考虑

$$A_0 \setminus \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)$$

其中  $A_0$  是包含全体  $A_n$  的有限测度集. 由 De Morgan 律,

$$A_0 \setminus \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = A_0 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( A_0 \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (A_0 \setminus A_k) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_0 \setminus A_n)$$

从而

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 \setminus \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_0 \setminus A_n) \right)$$

于是

$$\mu \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \mu(A_0) - \mu \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_0 \setminus A_n) \right) \geq \mu(A_0) - \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

□

我们再引入一种有趣的测度:

#### 定义 2.9. 计数测度



对于集合  $X$ , 我们在  $\wp(X)$  上定义测度  $\mu_c$  满足:

1. 若  $A \subset X$  是有限集, 则  $\mu_c(A) = |A|$ .
2. 若  $A \subset X$  是无限集, 则  $\mu_c(A) = \infty$ .

容易验证这是一个测度, 称之为集合  $X$  上的计数测度 (counting measure).

## 2.6 外测度

从本节开始我们开始尝试定义  $\mathbb{R}$  上的一般测度, 也就是 Lebesgue 测度, 也就是我们熟悉的长度. 虽然我们已经有了测度的概念, 但是定义 Lebesgue 测度也不总是一件容易的事情. 外测度就是为了解决这类问题而存在的, 我们先不考虑测度的性质, 而是从更宽松的条件入手:

#### 定义 2.10. 外测度



设集合  $X$  的幂集  $\wp(X)$  上的集函数  $\mu^* : \wp(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  若满足:

OM1  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

OM2 (单调性)  $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .

OM3 (可数次可加性) 对于  $X$  的任意子集的至多可数族  $\{E_n\} \subset \wp(X)$ , 其并集的外测度不大于每个集合的外测度之和:

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

则称  $\mu^*$  是  $X$  上的一个外测度 (outer measure).

注. 4. 注意外测度定义域一定是全体子集.

## 2.7 Lebesgue 外测度

我们可以尝试在实线  $\mathbb{R}$  上定义一个简单的外测度, 既然如此, 我们自然先从最简单的情况入手: 显然对于  $\mathbb{R}$  上的一个区间, 例如  $(0, 1), (0, 1], [0, 1]$ . 我们定义他们的长度 (外测度) 就是它们端点之间的距离, 即

$$\text{diam } (a, b) = b - a$$

这个记号源自度量空间中的直径.

### 定义 2.11. Lebesgue 外测度



我们定义  $\mathbb{R}$  的一个子集  $S$  的 **Lebesgue 外测度** 为使用可数个区间覆盖该子集的区间长度的下确界, 即

$$m^*(S) := \inf \left\{ \sum_{j \in J} \text{diam } I_j \mid \bigcup_{j \in J} I_j \supset S \right\}$$

其中每个  $I_j$  都是区间, 且指标集  $J$  为可数集.

### 命题 2.9.



$m^* : \wp(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  是一个外测度.

*Pf.* 我们分别证明外测度的几条公理:

OM1 显然空集可以任意取一个长度趋近于 0 的一列区间, 证明  $m^*(\emptyset) = 0$  的过程是平凡的.

OM2 假若  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ , 那么覆盖  $B$  的覆盖也一定覆盖  $A$ , 于是若  $m^*(A) > m^*(B)$  必构成矛盾.

OM3 显然当对每个  $n$ ,  $\{I_{nj}\}$  覆盖  $E_n$  时,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nj}$$

也覆盖

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

类似的可以证明

$$m^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) > \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

不可能成立.

□

我们现在定义了一个看上去很像测度的东西, 但是它并不满足可数可加性, 对于这个事实有一个非常经典的反例的构造, 我们会在之后介绍.

## 2.8 Carathéodory 条件

我们现在知道: 有一些病态的集合使得外测度不满足可数可加性. 那么我们要做的事情也很简单: 只要把这些坏东西不干净的集合去掉, 我们就能得到一个测度.

但是, 如何判断一个集合是不是病态的? 德国数学家 Constantin Carathéodory (1873–1950) 给出了这个问题的答案, 他给出并证明了一个集合是病态的条件, 也就是 Carathéodory 条件:

### Carathéodory 条件

设  $X$  上有外测度  $\mu^*$ , 对于  $E \subset X$ , 若对任意  $A \subset X$  都有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

即对任意集合  $A$ , 其测度等于其在  $E$  之内的部分与  $E$  之外的部分之和. 则称集合  $E$  满足 **Carathéodory 条件**. 简称 C-条件.

Carathéodory 也证明了这个条件的合理性, 即这个条件的的确确把所有病态集合都剔除了, 也就是重要的 Carathéodory 定理:

**定理 2.10. Carathéodory 定理**



设集合  $X$  以及集合  $X$  上的外测度  $\mu^*$ , 那么:

1.  $X$  上全体满足 C-条件的集合构成一个  $\sigma$ -代数  $\Sigma$ .
2. 将外测度  $\mu^*$  限制在  $\Sigma$  上的限制映射  $\mu^*|_{\Sigma}$  是一个测度.

*Pf.* 先证明其满足  $\sigma$ -代数.

A1 显然对于  $\emptyset$ , 对任意  $A$  都满足  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $A \setminus \emptyset = A$ , 从而  $\emptyset$  满足 C-条件, 这就证明了  $\emptyset \in \Sigma$ .

A2 任取  $E \in \Sigma$ , 则  $E$  满足 C-条件, 令  $F = X \setminus E$ , 则对任意  $A \subset X$ , 都有

$$A \cap F = A \setminus E, \quad A \setminus F = A \cap E$$

从而

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A)$$

于是  $X \setminus E \in \Sigma$ .

A3 先证明二元情况. 设  $A, B \in \Sigma$ , 要证  $A \cup B \in \Sigma$ . 由于  $A \in \Sigma$ , 由 C-条件, 对任给的  $S \in X$ , 有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A) \tag{I}$$

由于  $B$  也满足 C-条件, 代入  $S' = S \setminus A$  有

$$\mu^*(S') = \mu^*(S' \cap B) + \mu^*(S' \setminus B) \tag{II}$$

将 (II) 代入 (I), 有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A \cap B) + \mu^*(S \setminus A \setminus B) \tag{III}$$

我们调整一下上式的形式, 由于  $S \setminus A \setminus B = S \setminus (A \cup B)$ , 记  $C = A \cup B$ . 由于  $S \cap C = S \cap (A \cup B) = (S \cap A) \cup (S \cap B) = (S \cap A) \cup (S \setminus A \cap B)$ , 从而

$$\mu^*(S \cap C) = \mu^*((S \cap A) \cup (S \setminus A \cap B)) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A \cap B) \tag{IV}$$

将 (IV) 代回 (III) 就立即得到了

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap C) + \mu^*(S \setminus C) \tag{V.I}$$

又由于  $(S \cap C) \cup (S \setminus C) = S$ , 由外测度的公理 OM3 可得

$$\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap C) + \mu^*(S \setminus C) \tag{V.II}$$

结合 (V.I), (V.II) 就证明了

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap C) + \mu^*(S \setminus C)$$

从而  $C = A \cup B \in \Sigma$ , 由归纳法容易证明有限情况. 并且假若  $A \cap B = \emptyset$ , 那么

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cup B \cap B) + \mu^*(A \cup B \setminus B) = \mu^*(B) + \mu^*(A)$$

这证明了  $\mu^*|_{\Sigma}$  是有限可加的. 下面证明可数情况, 设  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  是一列集合. 不失一般性, 我们假设其是两两无交的. 若非如此, 可取  $E'_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ , 且对于每个  $i$  都有  $E_i \in \Sigma$ . 令

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

我们要证明  $E \in \Sigma$ . 不妨设对正整数  $n$ ,

$$H_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

我们已经证明了  $H_n$  满足 C-条件, 对任意集合  $S \subset X$  都有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap H_n) + \mu^*(S \setminus H_n) \quad (\text{VI})$$

由于  $H_n \subset E$ , 从而  $X \setminus E \subset X \setminus H_n$ , 由外测度单调性 OM2 得

$$\mu^*(S \setminus H_n) \geq \mu^*(S \setminus E)$$

代入 (VI) 有

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap H_n) + \mu^*(S \setminus E) \quad (\text{VII})$$

注意到  $S \cap H_n$  是  $S \cap E_1, S \cap E_2, \dots, S \cap E_n$  的无交并, 因此由已知结论 (有限可加)

$$\mu^*(S \cap H_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(S \cap E_i) \quad (\text{VIII})$$

联立 (VII), (VIII) 有

$$\mu^*(S) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(S \cap E_i) + \mu^*(S \setminus E)$$

令上式  $n \rightarrow \infty$ , 由实数列极限保序性有

$$\mu^*(S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S \cap E_i) + \mu^*(S \setminus E) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S \cap E_i\right) + \mu^*(S \setminus E) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E) \quad (\text{IX})$$

同样地, 由于  $(S \cap E) \cup (S \setminus E) = S$ , 由外测度的公理

$$\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E) \quad (\text{X})$$

联立 (IX), (X) 有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E)$$

这就证明了  $E \in \Sigma$ . 再对有限可加性取极限容易证明可数可加性. 于是我们证明了  $\mu^*|_{\Sigma}$  是一个测度.

□

借助 Carathéodory 定理定义的  $\mu^*|_{\Sigma}$  称为外测度  $\mu^*$  诱导的测度, Carathéodory 定理指出, 每个外测度都能导出一个测度.

## 2.9 Lebesgue 测度

### 定义 2.12. Lebesgue 测度

令  $\mathcal{M}$  为  $\mathbb{R}$  中全体满足 Carathéodory 条件的子集构成的族, 令  $m = m^*|_{\mathcal{M}}$  是 Lebesgue 外测度在  $\mathcal{M}$  上的限制, 由定理 2.10,  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$  构成一个测度空间, 称测度  $m$  为 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure). 当我们提到  $\mathbb{R}$  时, 若没有明确指定, 默认使用该测度作为测度.

至此, 我们完成了  $\mathbb{R}$  上长度的定义, 下面我们来分析它的一些性质:

### 定理 2.11. 平移不变性

设  $A$  是 Lebesgue 可测集, 则对任意  $k \in \mathbb{R}$ , 有

$$m(A) = m(k + A)$$

*Pf.* 易证区间平移后仍然是等长的区间, 且平移后的全体区间依然覆盖平移后的集合, 因此平移后的测度不会大于原本的测度, 即

$$m^*(E + k) \leq m^*(E)$$

只需再次套用一遍上式,

$$m^*(E - k' + k') \leq m^*(E - k') \implies m^*(E) \leq m^*(E - k')$$

由于  $k$  是任意的, 只需任选  $k' = -k$  即可, 从而结论成立.  $\square$

### 例 2.1. 单点集

求  $m\{0\}$ .

*Sol.* 显然  $(-1/n, 1/n)$  是一列包含  $\{0\}$  的区间列, 其单调下降且测度趋于 0, 从而  $[m\{0\} = 0]$ .  $\square$

### 例 2.2. 有理数集 $\mathbb{Q}$

求  $m(\mathbb{Q})$ .

*Sol.* 显然  $\mathbb{Q}$  可以写作无交并

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

由上例的结论以及平移不变性, 我们容易得出所有  $m\{q\} = 0$ , 从而

$$m(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m\{q\} = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0$$

$\square$



图 1: Cantor 三分集

### 例 2.3. Cantor 三分集



考虑一个如下构造的集合:

0.  $A_0 = [0, 1]$ .
1.  $A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ .
2.  $A_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ .
- n. 反复循环, 每次去掉每个区间的中间三分之一.
- $\infty$ . 目标集合  $C$ .

具体地,  $A_n$  定义为

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

取其交

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

称之为 **Cantor 三分集**. 求  $m(C)$ .

*Sol.* 显然每个  $A_n$  都是  $A_{n-1}$  的子集,  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调下降的. 并且对于每个  $A_n$ ,

$$m(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

显然成立. 由定理 2.7 (测度的连续性),

$$m(C) = m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

□

## 2.10 Vitali 集

我们将在本节指出, 并不是实数集的每个子集都是 Lebesgue 可测 (满足 Carathéodory 条件) 的. 我们先在  $[0, 1]$  上定义一个等价关系  $\sim$ :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

这显然是等价关系, 因为

1.  $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ .
2.  $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$ .
3.  $x - y, y - z \in \mathbb{Q} \implies x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$ .

因此可以给出  $[0, 1]$  的一个划分  $[0, 1]/\sim$ , 其每个元素都是两两无交的等价类  $[x]$ , 即

$$[x] = (x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$$

并且每个等价类  $[x]$  非空. 下面, 我们要应用选择公理, 从  $[0, 1]/\sim$  中的每个等价类中选取一个代表元构成集合  $\mathcal{V}$ , 即

$$\mathcal{V} = \{p[x] \mid [x] \in [0, 1]/\sim\}$$

其中  $p$  是选择函数, 由选择公理确保其存在性. 我们选取的集合  $\mathcal{V}$  就称为 **Vitali 集**.

显然, Vitali 集是不可数的. 这是因为每个等价类  $[x]$  是可数的, 然而  $[0, 1]$  不可数, 而  $\mathcal{V}$  与全体  $[x]$  等势.

**定理 2.12.**

Vitali 集  $\mathcal{V}$  是不可测的.



*Pf.* 我们令  $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ , 定义  $\mathcal{V}$  的一个平移:

$$\mathcal{V}_q = \mathcal{V} + q = \{ v + q \mid v \in \mathcal{V} \}, \quad q \in \mathbb{Q}^\circ$$

任取  $p, q \in \mathbb{Q}^\circ$  且  $p \neq q$ , 假设  $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q \neq \emptyset$ , 则存在  $z$  使得

$$z = v_1 + p \quad \wedge \quad z = v_2 + q \quad (v_1, v_2 \in \mathcal{V})$$

则  $v_1 - v_2 = q - p \in \mathbb{Q}$ . 从而  $v_1 \sim v_2$ , 然而由  $\mathcal{V}$  的构造, 每个等价类中的元素唯一, 从而  $v_1 = v_2$ , 这导致  $p = q$ , 与假设矛盾. 从而  $\mathcal{V}_p, \mathcal{V}_q$  无交, 由于  $p, q$  是任意的, 因此  $\{\mathcal{V}_q\}_{q \in \mathbb{Q}^\circ}$  是一个两两不交的可数集合族. 于是我们作它们的可数并

$$\mathcal{V}^\circ = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q$$

则:

1.  $[0, 1] \subset \mathcal{V}^\circ$ , 这是因为  $\mathcal{V}$  对应的商集构成  $[0, 1]$  的划分: 任给  $x \in [0, 1]$ , 都可以表示为  $v + q$ , 其中  $v \in \mathcal{V}, q \in \mathbb{Q}^\circ$ .
2.  $\mathcal{V}^\circ \subset [-1, 2]$ , 这是因为  $\mathcal{V} \subset [0, 1]$  且  $\mathbb{Q}^\circ \subset [-1, 1]$ .

不妨设 Vitali 集可测, 由 Lebesgue 测度的平移不变性, 对任意  $q \in \mathbb{Q}^\circ$ ,  $\mathcal{V}_q$  也是可测的, 且  $m(\mathcal{V}_q) = m(\mathcal{V})$ . 并且由可数可加性以及  $\mathcal{V}^\circ$  的定义,

$$m(\mathcal{V}^\circ) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) \tag{I}$$

根据测度的单调性,

$$1 = m[0, 1] \leq m(\mathcal{V}^\circ) \leq m[-1, 2] = 3 \tag{II}$$

若  $m(\mathcal{V}) = 0$ , 则

$$m(\mathcal{V}^\circ) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} 0 = 0$$

这是由绝对收敛级数重排得到的, 与 (II) 中  $m(\mathcal{V}^\circ) \geq 1$  矛盾. 若  $m(\mathcal{V}) > 0$ , 则

$$m(\mathcal{V}^\circ) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}) = \infty$$

与 (II) 中  $m(\mathcal{V}^\circ) \leq 3$  矛盾. 从而假设不成立.  $\mathcal{V}$  是 Lebesgue 不可测的. □

## 2.11 乘积测度

我们已经推广了  $\mathbb{R}$  上长度的概念, 现在我们可以很容易地定义  $\mathbb{R}^d$  上体积的概念.

### 定义 2.13. 乘积测度

设测度空间  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  和  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ , 我们定义测度  $\mu \times \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ , 满足

$$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$$

其中每个形如  $A \times B$  的集合称之为一个矩形. 我们可以仿照外测度的方式定义外测度

$$(\mu \times \nu)^*(U) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} (\mu \times \nu)^*(R_j) \mid \bigcup_{j \in J} R_j \supset U \right\}$$

其中每个  $R_j$  都是矩形且  $J$  是至多可数的, 容易证明这是一个外测度, 由 Carathéodory 定理, 可以确定唯一的测度  $\mu \times \nu$ , 称之为  $\mu$  和  $\nu$  的积测度 (product measure).

这样我们可以推广  $\mathbb{R}^d$  上的测度, 一般情况下, 我们选取  $m^d = \overbrace{m \times m \times \cdots \times m}^{\#d}$  作为  $\mathbb{R}^d$  的标准测度.

## 2.12 零测集

零测集就像加法中的 0, 它本身也是一个非常有用的研究对象. 因为我们已经见识了测度为 0 的集合不一定是空集.

### 定义 2.14. 零测集

在测度空间  $(X, \Sigma, \mu)$  中, 若  $N \in \Sigma$  满足  $\mu(N) = 0$ , 就称  $N$  是一个零测集 (null set).

显然有以下定理:

### 定理 2.13.

零测集的可数并是零测集.

*Pf.* 显然由测度的可数次可加性, 对于一族零测集  $\{N_i\}_{i=1}^\infty$ .

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^\infty N_i \right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(N_i) = 0$$

由非负性立即得出其为零测集. □

### 定义 2.15. 几乎处处

对于测度空间  $(X, \Sigma, \mu)$  以及一个关于  $X$  中的点  $x \in X$  的命题  $P$ , 我们称命题  $P$  在  $X$  上几乎处处 (almost everywhere) 成立, 当且仅当  $X$  去除某个零测集后该命题在任意点上成立. 常常简写作 a.e.

几乎处处是依赖测度的, 若有多个测度, 我们用记号 a.e.  $[\mu]$  来表示对测度  $\mu$  几乎处处成立.

## 2.13 特征函数

### 定义 2.16. 特征函数

设  $A \subset X$ ,  $A$  在  $X$  中的特征函数 (characteristic function) 是指函数  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

这个定义容易推广到  $\mathbb{C}$  上. 故不多赘述.

特征函数是最最简单的一类函数. 它的取值就类似于一个判断, 判断一个点是否在集合内.

### 命题 2.14.

显然, 对于至多可数集族  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 有

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \iff \prod_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = 1$$

*Pf.* 证明是显然的, 若前 (或后) 成立, 都能推出  $\chi_{A_n}(x)$  恒为 1, 再推出另一者.  $\square$

一般情况下, 在实分析语境中, 我们使用符号  $\chi$  就默认为特征函数.

## 2.14 简单函数

在定义一般函数的积分之前, 我们可以先从最简单的情况入手. 简单函数顾名思义就是形式最简单的函数: 它的取值只可能是有限个.

### 定义 2.17. 简单函数

若函数  $s : X \rightarrow Y$  的像  $s(X)$  是一个有限集, 则称  $s$  为一个简单函数 (simple function).

**注. 5.** 虽然简单函数只能取有限值, 但我们并不要求取相同值的区域必须连通. 相反, 它可以分散, 甚至可以非常分散, 只要其值域是有限集.

在实分析的语境下, 我们经常要求其为可测简单函数, 也就是说, 对于每一个取值  $\alpha$ , 它对应的原像  $s^{-1}(\alpha)$  一定是一个可测集.

### 定理 2.15. 典范形式

设  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是可测简单函数  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  的全体取值, 则

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{s^{-1}(\alpha_i)}$$

称之为  $s$  的典范形式, 该定理容易推广到  $\mathbb{C}$ .

*Pf.* 证明也是显然的, 对任意  $x \in X$ , 若  $s(x) = \alpha_k$ , 则  $x \in s^{-1}(\alpha_k)$ , 那么  $\chi_{s^{-1}(\alpha_k)}(x) = 1$ , 并且对任意  $\alpha_j \neq \alpha_k$ ,  $\chi_{s^{-1}(\alpha_j)}(x) = 0$ , 从而

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{s^{-1}(\alpha_i)}(x) = \alpha_k \cdot 1 = \alpha_k$$

□

# 3 空间与收敛

在介绍积分理论之前, 我们需要一些前置概念和结论. 在分析学中, 空间就是最重要的研究对象, 也是一切的基础. 本章中就重点研究分析学中常见的空间.

我们不会对于每个空间进行特别深入的研究, 若感兴趣可以深入研究对应的课题.

## 3.1 线性空间

线性空间是一个代数的概念, 其描述的是一个具备数乘概念的 Abel 群.

### 定义 3.1. 线性空间

线性空间 (vector space) 是域作用在 Abel 群上构成的代数结构, 具体地说, 对于集合  $V$  和域  $\mathbb{K}$ , 定义加法

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

和数乘作用

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

并且对任意  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V; k, l \in \mathbb{K}$  满足:

G1 (加法结合律)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

G2 (零元)  $\exists! \mathbf{0} \in V, \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .

G3 (负元)  $\forall \mathbf{a} \in V, \exists! -\mathbf{a} \in V, \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Ab (加法交换律)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .

D1 (数乘对向量加法的分配律)  $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$ .

D2 (数乘对域加法的分配律)  $(k + l) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + l \cdot \mathbf{a}$ .

A1 (乘法作用)  $(k \cdot l) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (l \cdot \mathbf{a})$ .

A2 (单位元作用)  $\exists! 1 \in \mathbb{K}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

就称  $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$  是一个线性空间 (vector space).

线性空间的研究是线性代数的主题, 在此我们只给出一些简单定义:

### 定义 3.2. 线性算子

设  $V, W$  是线性空间, 映射  $f : V \rightarrow W$  若对任意  $v \in V, w \in W$  都满足

$$f(k \cdot v + l \cdot w) = k \cdot f(v) + l \cdot f(w)$$

则称  $f$  为一个线性算子 (linear operator).

一般地说, 我们把一个空间映射到另一个空间的操作就称为一个算子 (operator). 线性算子在有限维空间  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  中对应  $P^{n \times m}$  的矩阵.

### 定义 3.3. 线性同构

若线性算子  $f$  是双射, 则称  $f$  为一个线性同构 (isomorphism), 称存在线性同构  $f : V \rightarrow W$  的空间  $V, W$  是同构 (isomorphic) 的.



## 3.2 拓扑空间

拓扑空间是拓扑学的研究对象. 实分析需要非常深厚的拓扑学功底, 因此在学习实分析前最好先学习点集拓扑学, 这里给出一些非常基本的拓扑学定义:

### 定义 3.4. 拓扑空间

设集合  $X$  和  $X$  的子集族  $\mathcal{T}$ . 若  $\mathcal{T}$  满足:



Tp1  $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$ .

Tp2 (任意并封闭) 任给一族  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{T}$ , 都有

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$$

Tp3 (有限交封闭) 任给有限个  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , 都有

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$$

则称  $\mathcal{T}$  是  $X$  的一个拓扑 (topology), 指定了拓扑的集合  $(X, \mathcal{T})$  称为一个拓扑空间 (topological space).

本质上说, 拓扑空间研究的就是那些邻域, 并用集合去刻画点与点之间的相邻关系. 拓扑学中, 我们注重研究两类最重要的集合:

### 定义 3.5. 开集

拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  中,  $\mathcal{T}$  中的集合称为一个开集 (open set).



它的对偶概念:

### 定义 3.6. 闭集

拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  中, 若  $X \setminus C$  是一个开集, 则称  $C$  是一个闭集 (closed set).



显然有以下定理:

### 定理 3.1.

设  $X$  是拓扑空间, 则:



Tp4  $\emptyset$  是闭集,  $X$  也是闭集.

Tp5 有限个闭集的并也是闭集.

Tp6 闭集的任意交也是闭集.

*Pf.* 我们逐一证明每个结论:

Tp4 显然  $X \setminus X = \emptyset$ ,  $X \setminus \emptyset = X$ .

Tp5 设  $C_1, \dots, C_n$  是有限个闭集, 则  $X \setminus C_1, \dots, X \setminus C_n$  是有限个开集, 由 De Morgan 律,

$$\bigcup_{i=1}^n C_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^n X \setminus C_i$$

Tp6 同样地, 由 De Morgan 律

$$\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} X \setminus C_\alpha$$

□

事实上, 用 Tp4, Tp5, Tp6 替换 Tp1, Tp2, Tp3 可以得到一个完全对偶的拓扑空间, 但一般我们采用开集定义.

### 定义 3.7. 邻域



拓扑空间  $X$  中, 包含点  $x$  的一个开集  $U$  称为  $x$  的一个邻域 (neighborhood).

内部和闭包也是常见的两种集合的运算:

### 定义 3.8. 内部和闭包



设  $X$  是拓扑空间,  $A \subset X$  是子集,  $A$  的内部 (interior) 是包含于  $A$  的全体开集的并 (上确界), 即被  $A$  包含的最大开集, 即

$$\dot{A} := \sup \{ \text{开集 } O \mid O \subset A \}$$

$A$  的闭包 (closure) 是包含  $A$  的全体闭集的交 (下确界), 即包含  $A$  的最小闭集, 即

$$\overline{A} := \inf \{ \text{闭集 } K \mid K \supseteq A \}$$

更多内容可以参考关于点集拓扑学的教材, 个人比较推荐 James.R.Munkres 的 Topology. (等我有空了再写一本点集拓扑)

## 3.3 连续映射

数学分析中, 我们已经初步定义了  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  中的连续性, 这个概念可以进行推广: 事实上, 所谓连续就是保持点相邻关系的映射, 在拓扑的语言里刻画如下:

### 定义 3.9. 连续映射



设  $X, Y$  是拓扑空间, 若映射  $f : X \rightarrow Y$  满足对任意开集  $U \subset Y$ , 其原像  $f^{-1}(U) \subset X$  是  $X$  中的开集, 那么称  $f$  是连续的 (continuous).

例如在  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的情况下,  $\mathbb{R}$  上的拓扑是由全体开区间生成的, 那么连续性就是说对任意 (小) 的开集  $U$  (例如  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ), 映射到这个集合的所有点在  $\mathbb{R}$  中也是开集. 不过我们更熟悉的定义应该是:

### 定义 3.10. 在一点处连续



设  $X, Y$  是拓扑空间,  $f : X \rightarrow Y$  是映射,  $x \in X$ , 若对任意  $f(x) \in Y$  的邻域  $V \ni f(x)$ , 都有  $x$  的邻域  $U \subset X$ , 使得  $f(U) \subset f(V)$ , 那么就称  $f$  在点  $x$  处连续 (continuous at  $x$ ).

这个定义套用到  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  上, 就是我们熟悉的连续性的定义.

### 定理 3.2.



设  $X, Y$  是拓扑空间,  $f : X \rightarrow Y$  是映射, 那么下列命题等价:

1.  $f$  连续.
2. 对任意  $X$  的子集  $A$ , 都有  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .
3. 对任意  $Y$  中闭集  $K$ , 都有  $f^{-1}(K)$  是  $X$  中闭集.
4.  $f$  在  $X$  的每一点处连续.