实分析

xiaou0

2025 年 12 月 4 日

特别鸣谢

琪露诺 | 幻想乡大学纯粹与应用数学博士

https://www.pixiv.net/artworks/90486424

作者的话

Ciallo～我是 xiaou0, 一名爱好数学的普通高中生.

该材料仅供交流学习, **仅供交流学习!** 贩卖兜售的话 xiaou0 会哭的 TAT

我个人的数学写作风格可能尚为稚嫩. 如果你正在学习数学, 希望这份材料能够帮助到你!

1 集合

本章中, 我们将介绍实分析所需要的集合和拓扑的前置知识 (当然过于基本的就不介绍了:P).

1.1 子集族

定义 1.1. 子集族

对于集合 S, 若集合 $\mathcal{T}$ 中的任一元素都是 S 中的子集, 则称 $\mathcal{T}$ 是 S 上的**子集族** (collection of subsets).

子集族是分析学中最重要的刻画之一, 诸多内容例如拓扑, σ-代数都是子集族的构造.

例如, S 的幂集 $\wp(S)$ 就是 S 的一个子集族. 事实上, 幂集是最大的子集族: 显然它包含了 S 全体的子集, 任何 S 的子集族都是 $\wp(S)$ 的子集.

1.2 集合的序关系

定义 1.2. 集合的序关系

对于任给的集族 $\mathcal{C}$, 我们可以定义一个偏序关系. 对于 $A, B \in \mathcal{C}$, 我们定义

$$A \preceq B \iff A \subset B$$

显然构成偏序关系. 为了记号方便, 也为了不引起歧义, 我们用 $A \subset B$ 来代指 $A \preceq B$.

注. 1. 这本书内我们用 $\subset$ 表示子集, 用 $\subsetneq$ 表示真子集.

由定义, 下面的定理是显然的.

定理 1.1.

任何集合族都是偏序集.

不失一般性, 下面我们对于集合族的讨论, 总是考虑将其作为某个全集 Ω 的子集族.

回顾上确界的定义, 在偏序集中, **上界** (upper bound) 的定义为对于集合 A 中的任意元素 a, 都有 $b \geq a$ 的元素 b 就成为 A 的一个上界. 而**上确界** (supremum)c 是满足对任何 A 的上界 b, 都有 $b \geq c$ 的那个上界 c (称之为上确界的**泛性质** (universal property)). 对偶地我们可以定义**下界** (lower bound) 和**下确界** (infimum).

定理 1.2.

一个偏序集的上确界存在即唯一.

Pf. 设 m_1, m_2 都是 A 的上确界, 那么它们肯定是上界, 由上确界的泛性质可得 $m_1 \leq m_2$ 和 $m_2 \leq m_1$, 由反对称性可知 $m_1 = m_2$. □

从而我们可以给出如下定义:

定义 1.3. 上界集

设 $\mathcal{C}$ 是 X 的子集族, 则 $\mathcal{C}$ 对于集合的序关系的上确界称为该子集族的**上界集** (supremum set).

我们容易猜想结论:

定理 1.3.

设 $\mathcal{C}$ 是对任意并封闭的集族, 则 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ 的上界集就是它们的并:

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Pf. 显然

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个上界, 假若 B 是 $\mathcal{A}$ 的一个上界, 那么对任意 $A \in \mathcal{A}$, 都有 $A \subset B$, 从而 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset B$. □

推论 1.4.

设 $\mathcal{C}$ 是对有限并封闭的集族, 则 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ 的上界集就是它们的并:

$$\sup \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

推论 1.5.

设 $\mathcal{C}$ 是对可数并封闭的集族, 则任意集列 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ 的上界集就是它们的并:

$$\sup \{ A_n \}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

对偶地, 我们可以定义下界集, 并且指出一个集族的下界集就是它们的交.

1.3 集合列

我们重点研究的对象是集合列 (特别是某个集合的子集列), 以及它们的极限.

定义 1.4. 集列

正整数集到某个集合族 $\mathcal{C}$ 的映射 $\mathbb{Z}_+ \to \mathcal{C}$, 就称作一个**集列**.

对应于实数列中的极限, 我们可以定义集列的上下极限:

定义 1.5. 集列的上极限

对于一列集合 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$, 其**上极限** (limit superior) 定义为

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

定义 1.6. 集列的下极限

对于一列集合 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$, 其**下极限** (limit inferior) 定义为

$$\liminf_{n \to \infty} A_n := \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

就像实数列极限里那样, 我们也可以借助上下极限定义一个集合列的极限:

定义 1.7. 集列的极限

对于一列集合 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若其上下极限相等, 就称该集合列是**收敛** (converge) 的, 并令

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} = \liminf_{n\to\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称之为该集合列的**极限** (limit).

我们再来给出两类尤其重要的集列:

定义 1.8. 单调集列

对于集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则称集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是**单调上升**的, 若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则称集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是**单调下降**的, 若满足任意一者, 就称该列是**单调** (monotonic) 的.

类比实数列的单调有界定理, 我们有

定理 1.6.

若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调的, 那么其必然是收敛的. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调上升的, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$$

若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调下降的, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_n$$

Pf. 假设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调上升的, 则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

由于 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升, 从而

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

对任意 n 都相同, 因此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

同样地

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

由于 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升, 从而

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

类似地可以证明单调下降的情况. $\square$

定义 1.9. 单调类

若集合 X 的子集族 $\mathcal{M}$ 满足对任意单调的集列 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

则称 $\mathcal{M}$ 是 X 的一个**单调类** (monotonic class).

2 测度论 I

自从小学开始学习几何以来，我们似乎一直默许了一个概念：**面积**. 面积似乎无处不在，人们对他司空见惯了，却仍然没有意识到一个严重的问题，那就是**如何在数学里严格定义面积**?

你或许会说：这很简单啊，比如说正方形的面积是 $S = a^2$，长方形是 $S = ab$，圆形是 $S = \pi r^2$... 面积谁不会算啊，你拿小学知识忽悠我呢?

事实上，但凡学数学的都能看出，目前为止我们给面积下的定义都太狭隘了. 我们只需要随手构建一个看上去更神秘的集合，凭我们之前的知识就束手无策了. 例如求全体有理数 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ (作为空间) 中的长度.

而本章的目标就是解决面积 (或体积) 概念的问题，并引出一个更加抽象，泛用的概念：测度.

2.1 σ-代数

就像在定义实函数之前我们严格定义了实数：既然要定义测度，我们就需要指明哪些集合是可测的. 从我们一贯的几何直觉中，不相交的集合的无交并的面积应该是双方面积的简单加和. 我们可以将这个概念推广到无限情况，也就是**可数可加性**. 至于为什么没有不可数可加性，显然对不可数个数定义代数求和并没有意义.

定义 2.1. σ-代数

对于一个集合 X，其子集族 Σ 若满足：

A1 $\varnothing \in \Sigma$.

A2 $A \in \Sigma \implies X \setminus A \in \Sigma$.

A3 对于子族 $\{A_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$，若指标集 I 至多可数，则 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma$.

那么就称 Σ 是 X 上的一个**σ-代数** (σ-algebra). 若要求条件 A3 中的 I 是有限集，则也称 Σ 是一个**代数**.

显然，上述定义蕴含了以下结果：

定理 2.1.

设 Σ 是 X 上的 σ-代数，则：

A4 $X \in \Sigma$.

A5 对于子族 $\{A_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$，若指标集 I 可数，则 $\bigcap_{i \in I} A_i \in \Sigma$.

上述两个定理是显然的，A4 由 A1 和 A2 推出，A5 可以由 De Morgan 定律 (对偶律) 推出. 事实上，如果用 A4 和 A5 分别替换 A1 和 A3，给出的定义和原定义还是等价的.

显然，幂集 $\wp(X)$ 也是 X 上的 σ-代数，我们容易证明它是 X 上最大的代数. 但我们更多情况下考虑的其实是最小的代数，具体来说，是包含某些特定集合的最小代数. 我们发现代数之间也有一系列明确的包含关系：

定义 2.2. 子 σ-代数

对于 X 上的 σ-代数 Σ，若 $\Sigma' \subset \Sigma$ 也是 X 的 σ-代数，则称为 Σ 的**子 σ-代数** (sub σ-algebra).

由于任何子集族都是 $\wp(X)$ 的子集, 所有 σ-代数都是 $\wp(X)$ 的子代数, 这就印证了刚刚说的, $\wp(X)$ 在集合族之间的序关系下, $\wp(X)$ 就是那个最大元. 这给了我们构造最小代数的一种方法: 类似于群论中的生成子群, 既然要找包含某些特定集合的最小代数, 只需找出所有包含这些集合的代数, 取其交集就是满足泛性质的下确界. 不过在此之前, 我们需要先验证 σ-代数的任意交还是 σ-代数 (即确界一定存在).

定理 2.2.

设 $\{\,\Sigma_j\,\}_{j\in J}$ 是一族 X 的 σ-代数, 则

$$\Sigma_0 := \bigcap_{j\in J} \Sigma_j$$

也是 X 的 σ-代数.

Pf. 我们逐一验证定义中的公理:

A1 显然对每个 Σ_j, 都有 $\varnothing \in \Sigma_j$, 因此 $\varnothing \in \Sigma_0$ 成立.

A2 对任意 $S \in \Sigma_0$, 那么对每个 Σ_j 都有 $S \in \Sigma_j$, 因此 $X \setminus S \in \Sigma_j$, 从而 $X \setminus S \in \Sigma_0$.

A3 对任意 $S_1, S_2, \ldots \in \Sigma_0$, 对于每个 Σ_j 都有 $S_1, S_2, \ldots \in \Sigma_j$, 从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Sigma_j$, 从而也有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Sigma_0$.

□

因此我们可以作下述定义:

定义 2.3. 生成的 σ-代数

设 $\mathcal{M}$ 是 X 的一个子集族. 令

$$\operatorname{coll}(\mathcal{M}) := \{\,\Sigma \mid \Sigma \supset \mathcal{M}, \Sigma\text{为}\sigma\text{-代数}\,\}$$

显然其非空, 令

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\Sigma\in\operatorname{coll}(\mathcal{M})} \Sigma$$

则由定理 2.2, $\sigma(\mathcal{M})$ 是一个 σ-代数, 称之为$\mathcal{M}$ **生成的代数** (generated by $\mathcal{M}$).

就像我们之前讨论的一样, $\sigma(\mathcal{M})$ 就是包含 $\mathcal{M}$ 最小的 σ-代数. 我们还可以定义两个 σ-代数的积构造, 这也是为了积空间的内容作铺垫.

定义 2.4. 积 σ-代数

设 Σ_1, Σ_2 分别是 X_1, X_2 的 σ-代数. 则

$$\mathcal{R} := \{\, S_1 \times S_2 \mid S_1 \in \Sigma_1, S_2 \in \Sigma_2 \,\}$$

并记 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \sigma(\mathcal{R})$, 它是 $X_1 \times X_2$ 上的 σ-代数, 称为 Σ_1, Σ_2 的**积 σ-代数** (product). 有时为了区别它和 Cartesian 积, 也称之为两个 σ-代数的张量积.

上面的定义和积拓扑的定义也有异曲同工之妙. 两者的过程都类似于先构造出空间中的矩形, 再通过矩形生成完整的拓扑 (σ-代数). 这是因为有些集合不一定能完全分解为两个集合的积, 如下图所示:

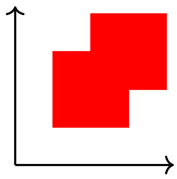

图 1: 一个不能直接分解为两个集合的积的集合

定理 2.3.

如果 X 上的代数 $\mathcal{M}$ 是一个单调类, 则 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数.

Pf. 设 $\mathcal{M}$ 是代数, 则对任意有限并封闭. 对于其中任何一列集合 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其并集可取为极限

$$\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A_n$$

显然这个列是单调的. 由单调类定义, 其极限也在 $\mathcal{M}$ 中, 这就证明了 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数. □

2.2 可测空间

可测空间, 其实就是可以定义测度的空间. 需要注意的是, 这和测度空间是两个概念: 测度空间是配备了特定测度的空间.

定义 2.5. 可测空间

指定了 σ-代数 Σ 的集合 X, 称为一个**可测空间** (measurable space), 通常记作二元组 (X,Σ). 此时称 $S\in\Sigma$ 是 X 的一个**可测集** (measurable set).

可测空间的定义是非常简单的, 同样地我们也可以定义其积对象:

定义 2.6. 积可测空间

对于两个可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 和 $(Y,\mathcal{B})$, 那么 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 是 $X\times Y$ 上的 σ-代数, 记

$$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$$

为这两个可测空间的**积** (product), 通常简记作 $X\times Y$.

2.3 可测映射

用范畴论的语言, 全体可测空间构成可测空间范畴 Meas, 这个范畴中的态射就是可测映射, 类似于拓扑学中的连续映射, 它的定义也非常相似:

定义 2.7. 可测映射

设 $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ 是两个可测空间, 映射 $f: X\to Y$ 若满足对任意 $S\in\mathcal{B}$, 其原象都满足 $f^{-1}(S)\in\mathcal{A}$, 则称 f 是 X 到 Y 的一个**可测映射** (measurable map). 一个可测空间 (X,Σ) 上的全体可测映射组成的集合记作 $\mathscr{L}^0(X,\Sigma)$.

就像拓扑学中的连续函数一样, 我们也有如下结论:

定理 2.4.

可测映射的复合仍然是可测映射.

Pf. 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 是复合映射, 则 $g \circ f: X \to Z$ 满足, 对任意 Z 中的可测集 S, $g^{-1}(S)$ 是 Y 中可测集, 从而 $(g \circ f)^{-1}(S)$ 是 X 中可测集. □

定理 2.5.

一个映射 $f: X \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ 可测, 当且仅当每一个分量函数 $f_i = \pi_i \circ f$ 可测.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\pi_i \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Y_i \\ \prod_j Y_j \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Pf. 由于 f 可测, 对任意 $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ 的可测集 S, $f^{-1}(S)$ 是 X 中的可测集. 由定义

$$\mathcal{R} = \{ S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \mid S_1 \in \Sigma_1, S_2 \in \Sigma_2, \ldots, S_n \in \Sigma_n \}$$

其中 $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ 分别是 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 所配备的 σ-代数. 从而任何 $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ 中的可测集都可以表示为可数个 $\mathcal{R}$ 中元素的并集, 而每个 $\mathcal{R}$ 中元素在 Y_i 上投影的原像都是 Y_i 的可测集 (积的泛性质), 可测集的可数并依然可测, 从而每个分量函数是可测的.

另一方面, 若每个分量函数都可测, 那么证明是类似的. 对于 $\mathcal{R}$ 中的每个元素, 其在 Y_i 上的原像都是可测集, 那么 f 自然可测. □

2.4 $[0, \infty]$ 上的代数运算

在处理测度的时候, 我们难免会遇到 ∞, 一个理由是我们希望赋予无限大的集以一个测度, 例如 $\mathbb{R}$ 就有无限长. 同样一个序列的极限或级数的和也很可能是 ∞, 如果规避讨论 ∞, 会导致很多麻烦. 在测度论的语境中, 我们一般会做出一些特殊规定:

加法 对于 $0 \le a \le \infty$, 我们总是规定 $a + \infty = \infty + a = \infty$.

乘法 对于 $0 < a \le \infty$, 我们定义 $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$; 特别地, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

这么定义可能会显得很奇怪, 因为它似乎和数学分析中的结论有出入, 尤其是 $0 \cdot \infty = 0$, 在数学分析中我们知道这是一个不定式, 不可以视作定值 ~~凭什么 $0 \cdot \infty = 0$ 啊! galgame 里不是这样的!~~, 然而容易验证, 这样定义的运算的交换律和结合律在 $[0, \infty]$ 上都是自动成立的.

2.5 测度

现在一切铺垫都准备就绪, 我们给出一般情况下测度的定义:

定义 2.8. 测度

设 (X, Σ) 是可测空间, 若定义在其 σ-代数上的集函数 $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{ \infty \}$ 满足:

M1 $\mu(\varnothing) = 0$.

M2 (可数可加性) 设 $\{E_i\}_{i\in I} \subset \Sigma$ 是两两不交的可测集族, 且指标集 I 至多可数, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(E_i)$$

则称 μ 为 (X,Σ) 上的一个 **(非负) 测度** (measure). 指定了测度的可测空间 (X,Σ,μ) 称为**测度空间** (measure space).

注. 2. 显然 $\mu(E_i)$ 一定是大于等于 0 的正数. 因此是正项级数, 重排并不会改变它的敛散性和极限.

注. 3. 我们并没有要求测度一定是有限数, 测度可以取 ∞. 这类集合也是容易构造的.

定理 2.6. 测度的保序性

对于配备了测度 μ 的可测空间 (X,Σ), 对于 $A,B\in\Sigma$, 总有

$$A\subset B \implies \mu(A)\le\mu(B)$$

Pf. 若 $A\subset B$, 则 $B\setminus A\in\Sigma$, 从而 $\mu(B\setminus A)\ge 0$. 由可数可加性,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$$

这就证明了定理. □

定理 2.7. 测度的连续性

对于配备了测度 μ 的可测空间 (X,Σ), 若可测集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$ 单调上升或单调下降, 且 $\mu(A_1)<\infty$, 则其极限可测并且

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)$$

Pf. 我们分别证明两种情况:

1. 假设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调上升的, 由定理 1.6,

$$\lim_{n\to\infty}A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

我们作 $B_1=A_1$, 对于 $n>1$, $B_n = A_n\setminus A_{n-1}$. 显然

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

我们只是为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作了一次去重, 显然由可数可加性

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\mu(A_n\setminus A_{n-1}) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\mu(A_n)-\mu(A_{n-1})\right)$$

等式右边的级数是一个望远镜级数, 其和为 $\mu\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)-\mu(A_1)$, 于是

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)$$

这就证明了 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升的情况.

2. 假设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调下降的, 我们令 B_n 为差分, 对任意 n, 定义

$$B_n = A_n \setminus A_{n+1}$$

容易证明

$$A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

显然 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两不交的, 显然有

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n+1}))$$

由 (1) 中类似的方法可以得到

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

这就证明了 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升的情况.

□

定理 2.8. Fatou 引理, 集合形式

对于配备了测度 μ 的可测空间 (X, Σ), 以及可测集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, 总有

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

若存在可测集 A_0 使得 $\mu(A_0) < \infty$ 且对任意 n, $A_n \subset A_0$, 则有

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \ge \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Pf. 考虑 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下极限, 显然有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

显然 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 是随 n 单调上升的. 令

$$B_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \setminus \bigcap_{k=n-1}^{\infty} A_k$$

那么

$$\begin{aligned}
\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \\
&= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) - \mu\left(\bigcap_{k=n-1}^{\infty} A_k\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

同样地, 考虑 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限, 显然有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

考虑

$$A_0 \setminus \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

其中 A_0 是包含全体 A_n 的有限测度集. 由 De Morgan 律,

$$A_0 \setminus \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = A_0 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_0 \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(A_0 \setminus A_k) = \liminf_{n\to\infty}(A_0 \setminus A_n)$$

从而

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = A_0 \setminus \left(\liminf_{n\to\infty}(A_0 \setminus A_n)\right)$$

于是

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\liminf_{n\to\infty}(A_0 \setminus A_n)\right) \geq \mu(A_0) - \liminf_{n\to\infty}(\mu(A_0) - \mu(A_n)) = \limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

□

我们再引入一种有趣的测度:

定义 2.9. 计数测度

对于集合 X, 我们在 $\wp(X)$ 上定义测度 μ_c 满足:

1. 若 $A \subset X$ 是有限集, 则 $\mu_c(A) = |A|$.
2. 若 $A \subset X$ 是无限集, 则 $\mu_c(A) = \infty$.

容易验证这是一个测度, 称之为集合 X 上的**计数测度** (counting measure).

2.6 外测度

从本节开始我们开始尝试定义 $\mathbb{R}$ 上的一般测度, 也就是 Lebesgue 测度, 也就是我们熟悉的长度. 虽然我们已经有了测度的概念, 但是定义 Lebesgue 测度也不总是一件容易的事情. 外测度就是为了解决这类问题而存在的, 我们先不考虑测度的性质, 而是从更宽松的条件入手:

定义 2.10. 外测度

设集合 X 的幂集 $\wp(X)$ 上的集函数 $\mu^* : \wp(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ 若满足:

OM1 $\mu^*(\varnothing) = 0$.

OM2 (单调性) $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

OM3 (可数次可加性) 对于 X 的任意子集的至多可数族 $\{E_n\} \subset \wp(X)$, 其并集的外测度不大于每个集合的外测度之和:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$$

则称 μ^* 是 X 上的一个**外测度** (outer measure).

注. 4. 注意外测度定义域一定是全体子集.

2.7 Lebesgue 外测度

我们可以尝试在实线 $\mathbb{R}$ 上定义一个简单的外测度, 既然如此, 我们自然先从最简单的情况入手: 显然对于 $\mathbb{R}$ 上的一个**区间**, 例如 $(0,1),(0,1],[0,1]$. 我们定义他们的长度 (外测度) 就是它们端点之间的距离, 即

$$\operatorname{diam}(a,b)=b-a$$

这个记号源自度量空间中的**直径**.

定义 2.11. Lebesgue 外测度

我们定义 $\mathbb{R}$ 的一个子集 S 的 **Lebesgue 外测度**为使用可数个区间覆盖该子集的区间长度的下确界, 即

$$m^*(S):=\inf\left\{\sum_{j\in J}\operatorname{diam}I_j \mid \bigcup_{j\in J}I_j\supset S\right\}$$

其中每个 I_j 都是区间, 且指标集 J 为可数集.

命题 2.9.

$m^*:\wp(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ 是一个外测度.

Pf. 我们分别证明外测度的几条公理:

OM1 显然空集可以任意取一个长度趋近于 0 的一列区间, 证明 $m^*(\varnothing)=0$ 的过程是平凡的.

OM2 假若 $A\subset B\subset\mathbb{R}$, 那么覆盖 B 的覆盖也一定覆盖 A, 于是若 $m^*(A)>m^*(B)$ 必构成矛盾.

OM3 显然当对每个 n, $\{I_{nj}\}$ 覆盖 E_n 时,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{nj}$$

也覆盖

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

类似的可以证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)>\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)$$

不可能成立.

□

我们现在定义了一个看上去很像测度的东西, 但是**它并不满足可数可加性**, 对于这个事实有一个非常经典的反例的构造, 我们会在之后介绍.

2.8 Carathéodory 条件

我们现在知道: 有一些病态的集合使得外测度不满足可数可加性. 那么我们要做的事情也很简单: 只要把这些~~坏东西~~不干净的集合去掉, 我们就能得到一个测度.

但是, 如何判断一个集合是不是病态的? 德国数学家 Constantin Carathéodory (1873–1950) 给出了这个问题的答案, 他给出并证明了一个集合是病态的条件, 也就是 Carathéodory 条件:

Carathéodory 条件

设 X 上有外测度 μ^*, 对于 $E \subset X$, 若对任意 $A \subset X$ 都有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

即对任意集合 A, 其测度等于其在 E 之内的部分与 E 之外的部分之和. 则称集合 E 满足 **Carathéodory 条件**. 简称 C-条件.

Carathéodory 也证明了这个条件的合理性, 即这个条件的的确确把所有病态集合都剔除了, 也就是重要的 Carathéodory 定理:

定理 2.10. Carathéodory 定理

设集合 X 以及集合 X 上的外测度 μ^*, 那么:

1. X 上全体满足 C-条件的集合构成一个 σ-代数 Σ.
2. 将外测度 μ^* 限制在 Σ 上的限制映射 $\mu^*|_\Sigma$ 是一个测度.

Pf. 先证明其满足 σ-代数.

A1 显然对于 $\varnothing$, 对任意 A 都满足 $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, 从而 $\varnothing$ 满足 C-条件, 这就证明了 $\varnothing \in \Sigma$.

A2 任取 $E \in \Sigma$, 则 E 满足 C-条件, 令 $F = X \setminus E$, 则对任意 $A \subset X$, 都有

$$A \cap F = A \setminus E, \quad A \setminus F = A \cap E$$

从而

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A)$$

于是 $X \setminus E \in \Sigma$.

A3 先证明二元情况. 设 $A, B \in \Sigma$, 要证 $A \cup B \in \Sigma$. 由于 $A \in \Sigma$, 由 C-条件, 对任给的 $S \in X$, 有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A) \tag{I}$$

由于 B 也满足 C-条件, 代入 $S' = S \setminus A$ 有

$$\mu^*(S') = \mu^*(S' \cap B) + \mu^*(S' \setminus B) \tag{II}$$

将 (II) 代入 (I), 有

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A \cap B) + \mu^*(S \setminus A \setminus B) \tag{III}$$

我们调整一下上式的形式, 由于 $S \setminus A \setminus B = S \setminus (A \cup B)$, 记 $C = A \cup B$. 由于 $S \cap C = S \cap (A \cup B) = (S \cap A) \cup (S \cap B) = (S \cap A) \cup (S \setminus A \cap B)$, 从而

$$\mu^*(S \cap C) = \mu^*((S \cap A) \cup (S \setminus A \cap B)) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \setminus A \cap B) \tag{IV}$$

将 (IV) 代回 (III) 就立即得到了

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap C) + \mu^*(S \setminus C) \tag{V.I}$$

又由于 $(S\cap C)\cup(S\setminus C)=S$, 由外测度的公理 OM3 可得

$$\mu^*(S)\leq\mu^*(S\cap C)+\mu^*(S\setminus C) \tag{V.II}$$

结合 (V.I), (V.II) 就证明了

$$\mu^*(S)=\mu^*(S\cap C)+\mu^*(S\setminus C)$$

从而 $C=A\cup B\in\Sigma$, 由归纳法容易证明有限情况. 并且假若 $A\cap B=\varnothing$, 那么

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A\cup B\cap B)+\mu^*(A\cup B\setminus B)=\mu^*(B)+\mu^*(A)$$

这证明了 $\mu^*|_\Sigma$ 是有限可加的. 下面证明可数情况, 设 $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ 是一列集合. 不失一般性, 我们假设其是两两无交的. 若非如此, 可取 $E_n'=E_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i$, 且对于每个 i 都有 $E_i\in\Sigma$. 令

$$E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$$

我们要证明 $E\in\Sigma$. 不妨设对正整数 n,

$$H_n=\bigcup_{i=1}^n E_i$$

我们已经证明了 H_n 满足 C-条件, 对任意集合 $S\subset X$ 都有

$$\mu^*(S)=\mu^*(S\cap H_n)+\mu^*(S\setminus H_n) \tag{VI}$$

由于 $H_n\subset E$, 从而 $X\setminus E\subset X\setminus H_n$, 由外测度单调性 OM2 得

$$\mu^*(S\setminus H_n)\geq\mu^*(S\setminus E)$$

代入 (VI) 有

$$\mu^*(S)\geq\mu^*(S\cap H_n)+\mu^*(S\setminus E) \tag{VII}$$

注意到 $S\cap H_n$ 是 $S\cap E_1, S\cap E_2,\ldots,S\cap E_n$ 的无交并, 因此由已知结论 (有限可加)

$$\mu^*(S\cap H_n)=\sum_{i=1}^n\mu^*(S\cap E_i) \tag{VIII}$$

联立 (VII), (VIII) 有

$$\mu^*(S)\geq\sum_{i=1}^n\mu^*(S\cap E_i)+\mu^*(S\setminus E)$$

令上式 $n\to\infty$, 由实数列极限保序性有

$$\mu^*(S)\geq\sum_{i=1}^\infty\mu^*(S\cap E_i)+\mu^*(S\setminus E)\geq\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty S\cap E_i\right)+\mu^*(S\setminus E)=\mu^*(S\cap E)+\mu^*(S\setminus E) \tag{IX}$$

同样地, 由于 $(S\cap E)\cup(S\setminus E)=S$, 由外测度的公理

$$\mu^*(S)\leq\mu^*(S\cap E)+\mu^*(S\setminus E) \tag{X}$$

联立 (IX), (X) 有

$$\mu^*(S)=\mu^*(S\cap E)+\mu^*(S\setminus E)$$

这就证明了 $E\in\Sigma$. 再对有限可加性取极限容易证明可数可加性. 于是我们证明了 $\mu^*|_\Sigma$ 是一个测度.

□

借助 Carathéodory 定理定义的 $\mu^*|_\Sigma$ 称为**外测度 μ^* 诱导的测度**, Carathéodory 定理指出, 每个外测度都能导出一个测度.

2.9 Lebesgue 测度

定义 2.12. Lebesgue 测度

令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathbb{R}$ 中全体满足 Carathéodory 条件的子集构成的族, 令 $m = m^*|_{\mathcal{M}}$ 是 Lebesgue 外测度在 $\mathcal{M}$ 上的限制, 由定理 2.10, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ 构成一个测度空间, 称测度 m 为 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure). 当我们提到 $\mathbb{R}$ 时, 若没有明确指定, 默认使用该测度作为测度.

至此, 我们完成了 $\mathbb{R}$ 上长度的定义, 下面我们来分析它的一些性质:

定理 2.11. 平移不变性

设 A 是 Lebesgue 可测集, 则对任意 $k \in \mathbb{R}$, 有

$$m(A) = m(k + A)$$

Pf. 易证区间平移后仍然是等长的区间, 且平移后的全体区间依然覆盖平移后的集合, 因此平移后的测度不会大于原本的测度, 即

$$m^*(E + k) \leq m^*(E)$$

只需再次套用一遍上式,

$$m^*(E - k' + k') \leq m^*(E - k') \implies m^*(E) \leq m^*(E - k')$$

由于 k 是任意的, 只需任选 $k' = -k$ 即可, 从而结论成立. □

例 2.1. 单点集

求 $m\{0\}$.

Sol. 显然 $(-1/n, 1/n)$ 是一列包含 $\{0\}$ 的区间列, 其单调下降且测度趋于 0, 从而 $\boxed{m\{0\} = 0}$. □

例 2.2. 有理数集 $\mathbb{Q}$

求 $m(\mathbb{Q})$.

Sol. 显然 $\mathbb{Q}$ 可以写作无交并

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

由上例的结论以及平移不变性, 我们容易得出所有 $m\{q\} = 0$, 从而

$$\boxed{m(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m\{q\} = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0}$$

□

图 2: Cantor 三分集

例 2.3. Cantor 三分集

考虑一个如下构造的集合:

0. $A_0 = [0,1]$.

1. $A_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$.

2. $A_1 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$.

n. 反复循环, 每次去掉每个区间的中间三分之一.

∞. 目标集合 C.

具体地, A_n 定义为

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

取其交

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

称之为 **Cantor 三分集**. 求 $m(C)$.

Sol. 显然每个 A_n 都是 A_{n-1} 的子集, $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ 是单调下降的. 并且对于每个 A_n,

$$m(A_n) = \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

显然成立. 由定理 2.7 (测度的连续性),

$$\boxed{m(C) = m\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0}$$

□

2.10 Vitali 集

我们将在本节指出, 并不是实数集的每个子集都是 Lebesgue 可测 (满足 Carathéodory 条件) 的. 我们先在 $[0,1]$ 上定义一个等价关系 $\sim$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

这显然是等价关系, 因为

1. $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.

2. $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Q}$.

3. $x-y, y-z \in \mathbb{Q} \implies x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$.

因此可以给出 $[0,1]$ 的一个划分 $[0,1]/\sim$, 其每个元素都是两两无交的等价类 $[x]$, 即

$$[x] = (x + \mathbb{Q}) \cap [0,1]$$

并且每个等价类 $[x]$ 非空. 下面, 我们要应用选择公理, 从 $[0,1]/\sim$ 中的每个等价类中选取一个代表元构成集合 $\mathcal{V}$, 即

$$\mathcal{V} = \{ p[x] \mid [x] \in [0,1]/\sim \}$$

其中 p 是选择函数, 由选择公理确保其存在性. 我们选取的集合 $\mathcal{V}$ 就称为 **Vitali 集**.

显然, Vitali 集是不可数的. 这是因为每个等价类 $[x]$ 是可数的, 然而 $[0,1]$ 不可数, 而 $\mathcal{V}$ 与全体 $[x]$ 等势.

定理 2.12.

Vitali 集 $\mathcal{V}$ 是不可测的.

Pf. 我们令 $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, 定义 $\mathcal{V}$ 的一个平移:

$$\mathcal{V}_q = \mathcal{V} + q = \{\, v + q \mid v \in \mathcal{V} \,\}, \quad q \in \mathbb{Q}^\circ$$

任取 $p, q \in \mathbb{Q}^\circ$ 且 $p \neq q$, 假设 $\mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q \neq \varnothing$, 则存在 z 使得

$$z = v_1 + p \quad \wedge \quad z = v_2 + q \quad (v_1, v_2 \in \mathcal{V})$$

则 $v_1 - v_2 = q - p \in \mathbb{Q}$. 从而 $v_1 \sim v_2$, 然而由 $\mathcal{V}$ 的构造, 每个等价类中的元素唯一, 从而 $v_1 = v_2$, 这导致 $p = q$, 与假设矛盾. 从而 $\mathcal{V}_p, \mathcal{V}_q$ 无交, 由于 p, q 是任意的, 因此 $\{\mathcal{V}_q\}_{q \in \mathbb{Q}^\circ}$ 是一个两两不交的可数集合族. 于是我们作它们的可数并

$$\mathcal{V}^\circ = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q$$

则:

1. $[0,1] \subset \mathcal{V}^\circ$, 这是因为 $\mathcal{V}$ 对应的商集构成 $[0,1]$ 的划分: 任给 $x \in [0,1]$, 都可以表示为 $v + q$, 其中 $v \in \mathcal{V}, q \in \mathbb{Q}^\circ$.
2. $\mathcal{V}^\circ \subset [-1,2]$, 这是因为 $\mathcal{V} \subset [0,1]$ 且 $\mathbb{Q}^\circ \subset [-1,1]$.

不妨设 Vitali 集可测, 由 Lebesgue 测度的平移不变性, 对任意 $q \in \mathbb{Q}^\circ$, $\mathcal{V}_q$ 也是可测的, 且 $m(\mathcal{V}_q) = m(\mathcal{V})$. 并且由可数可加性以及 $\mathcal{V}^\circ$ 的定义,

$$m(\mathcal{V}^\circ) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) \tag{I}$$

根据测度的单调性,

$$1 = m[0,1] \le m(\mathcal{V}^\circ) \le m[-1,2] = 3 \tag{II}$$

若 $m(\mathcal{V}) = 0$, 则

$$m(\mathcal{V}^\circ) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} 0 = 0$$

这是由绝对收敛级数重排得到的, 与 (II) 中 $m(\mathcal{V}^\circ) \ge 1$ 矛盾. 若 $m(\mathcal{V}) > 0$, 则

$$m(\mathcal{V}^\circ) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^\circ} \mathcal{V}_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\circ} m(\mathcal{V}) = \infty$$

与 (II) 中 $m(\mathcal{V}^\circ) \le 3$ 矛盾. 从而假设不成立. $\mathcal{V}$ 是 Lebesgue 不可测的. $\square$

2.11 乘积测度

我们已经推广了 $\mathbb{R}$ 上长度的概念, 现在我们可以很容易地定义 $\mathbb{R}^d$ 上体积的概念.

定义 2.13. 乘积测度

设测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, 我们定义测度 $\mu \times \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, 满足

$$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$$

其中每个形如 $A \times B$ 的集合称之为一个矩形. 我们可以仿照外测度的方式定义外测度

$$(\mu \times \nu)^*(U) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} (\mu \times \nu)^*(R_j) \mid \bigcup_{j \in J} R_j \supset S \right\}$$

其中每个 R_j 都是矩形且 J 是至多可数的, 容易证明这是一个外测度, 由 Carathéodory 定理, 可以确定唯一的测度 $\mu \times \nu$, 称之为 μ 和 ν 的**积测度** (product measure).

这样我们可以推广 $\mathbb{R}^d$ 上的测度, 一般情况下, 我们选取 $m^d = \overbrace{m \times m \times \cdots \times m}^{\#d}$ 作为 $\mathbb{R}^d$ 的标准测度.

2.12 零测集

零测集就像加法中的 0, 它本身也是一个非常有用的研究对象. 因为我们已经见识了测度为 0 的集合不一定是空集.

定义 2.14. 零测集

在测度空间 (X, Σ, μ) 中, 若 $N \in \Sigma$ 满足 $\mu(N) = 0$, 就称 N 是一个**零测集** (null set).

显然有以下定理:

定理 2.13.

零测集的可数并是零测集.

Pf. 显然由测度的可数次可加性, 对于一族零测集 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0$$

由非负性立即得出其为零测集. □

定义 2.15. 几乎处处

对于测度空间 (X, Σ, μ) 以及一个关于 X 中的点 $x \in X$ 的命题 P, 我们称命题 P 在 X 上**几乎处处** (almost everywhere) 成立, 当且仅当 X 去除某个零测集后该命题在任意点上成立. 常常简写作 a.e.

几乎处处是依赖测度的, 若有多个测度, 我们用记号 a.e. $[\mu]$ 来表示对测度 μ 几乎处处成立.

2.13 特征函数

定义 2.16. 特征函数

设 $A \subset X$, A 在 X 中的**特征函数** (characteristic function) 是指函数 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

这个定义容易推广到 $\mathbb{C}$ 上. 故不多赘述.

特征函数是最最简单的一类函数. 它的取值就类似于一个判断, 判断一个点是否在集合内.

命题 2.14.

显然, 对于至多可数集族 $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$, 有

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \iff \prod_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = 1$$

Pf. 证明是显然的, 若前 (或后) 成立, 都能推出 $\chi_{A_n}(x)$ 恒为 1, 再推出另一者. □

一般情况下, 在实分析语境中, 我们使用符号 χ 就默认为特征函数.

2.14 简单函数

在定义一般函数的积分之前, 我们可以先从最简单的情况入手. 简单函数顾名思义就是形式最简单的函数: 它的取值只可能是有限个.

定义 2.17. 简单函数

若函数 $s : X \to Y$ 的像 $s(X)$ 是一个有限集, 则称 s 为一个**简单函数** (simple function).

注. 5. 虽然简单函数只能取有限值, 但我们并不要求取相同值的区域必须连通. 相反, 它可以分散, 甚至可以非常分散, 只要其值域是有限集.

在实分析的语境下, 我们经常要求其为可测简单函数, 也就是说, 对于每一个取值 α, 它对应的原像 $s^{-1}(\alpha)$ 一定是一个可测集.

定理 2.15. 典范形式

设 $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$ 是可测简单函数 $s : X \to \mathbb{R}$ 的全体取值, 则

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{s^{-1}(\alpha_i)}$$

称之为 s 的典范形式, 该定理容易推广到 $\mathbb{C}$.

Pf. 证明也是显然的, 对任意 $x \in X$, 若 $s(x) = \alpha_k$, 则 $x \in s^{-1}(\alpha_k)$, 那么 $\chi_{s^{-1}(\alpha_k)}(x) = 1$, 并且对任意 $\alpha_j \neq \alpha_k$, $\chi_{s^{-1}(\alpha_j)}(x) = 0$, 从而

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{s^{-1}(\alpha_i)}(x) = \alpha_k \cdot 1 = \alpha_k$$

□

3 空间与收敛

在介绍积分理论之前, 我们需要一些前置概念和结论. 在分析学中, 空间就是最重要的研究对象, 也是一切的基础. 本章中就重点研究分析学中常见的空间.

3.1 线性空间