

# 一种改进的模拟退火算法 求解 0—1 背包问题

梁国宏, 张 生, 黄 辉, 何尚录

(兰州交通大学 数理与软件工程学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘 要:** 从增强算法收敛性和减少参数依赖性的角度出发, 提出应用改进的模拟退火算法求解 0—1 背包问题。对模拟退火算法有所改进, 并有效地克服它的弱点, 使其在优化性能, 优化效率和可靠性方面有明显的优越性。阐明了用该算法求解 0—1 背包问题的具体实现过程, 并通过实际数值计算和结果比较表明, 该算法在求解 0—1 背包问题优于传统的模拟退火算法, 并且得到更有效的近似解。

**关键词:** 0—1 背包问题; 传统的模拟退火算法; 改进的模拟退火算法

**中图分类号:** O224 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-8462(2007)03-0091-03

## 0 引言

背包问题<sup>[1,2]</sup> (Knapsack Problem) 是一个典型的 NP 完全问题, 在实际的工程中有着广泛的应用。其求解主要依靠一些启发式算法, 如贪婪算法; 也可以用全局优化方法, 如遗传算法 (Genetic Algorithm, GA) 和模拟退火算法 (Simulated Annealing Algorithm, SA) 算法<sup>[3,4]</sup> 等。SA 算法起源于统计物理学方法, 并首次被 Kirkpatrick 等引入优化问题的求解, 是 20 世纪 80 年代初发展起来的一种随机组合优化方法。SA 算法具有很好的局部搜索能力, 但对参数的依赖性比较强。为了弥补传统的模拟退火算法的不足, 对其进行改进, 来求解 0—1 背包问题。

## 1 0—1 背包问题描述

已知  $n$  个物品的尺寸大小及其价值分别为  $w_i$  和  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。如何将它们装入总容量为  $M$  的背

包中, 使得所选物品的总价值最大。其中要求  $w_i$  和  $M$  都是整数。变量

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{不选择物品 } i \\ 1 & \text{选择物品 } i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则问题的模型可表示为:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(X) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} g(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \leq M \\ x_i \in \{0, 1\} (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

## 2 算法介绍

模拟退火算法思想来源于固体退火过程: 将固体加温至充分高, 再让其徐徐冷却。加温时固体内部粒

• 收稿日期: 2007-03-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目: 40301037.

作者简介: 梁国宏 (1980-), 男, 甘肃省通渭人, 兰州交通大学研究生, 研究方向为组合优化及其算法.

子随温度上升变为无序状,内能增大,再徐徐冷却时粒子排列逐渐趋于有序,最后在常温时达到基态,内能减为最小.用固体退火过程模拟组合优化问题,将内能  $E$  模拟为目标函数,组合优化问题对应金属物体,解对应状态,最优解对应能量最低的状态,温度  $T$  演化为控制参数  $t$ ,根据波尔兹曼分布,温度达到最低点时,获得最优解的概率最大.模拟退火算法中,Metropolis 接受准则的引入使算法呈现跳跃性,从而降低了对初始解的依赖性.传统的模拟退火算法为:

(1) 初始化冷却进度表 [ $t = t_0$  (初始温度),  $L_k$  (Markov 链长),  $\alpha$  (温度衰减因子),  $s$  (停止准则)], 初始解  $x_i = x_0$ ;

(2) 若在该温度下内循环次数达到  $L_k$ ,则转到3;否则,确定选用的邻域结构(2\_opt 或 3\_opt),从该邻域中随机产生新解  $x_j$ ,计算  $\Delta f_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$ ,若  $\Delta f_{ij} \leq 0$ ,则  $x_i = x_j$ ;否则,当  $\exp(-\Delta f_{ij}/t) > \text{random}(0,1)$  时,令  $x_i = x_j$ ;重复(2);

3 若满足停止准则  $s$ ,终止计算;否则  $t_k = \alpha t_{k-1}$ ,转到2;

(4) 输出最优解.

直观上看,对于控制参数  $t$  的每一取值,算法持续进行产生新解—判断—接受/舍弃的过程.

### 3 求解模型

SA 算法是基于 Monte Carlo 迭代求解策略的一种随机寻优算法,其出发点是基于物理中固体物质的退火过程与一般组合优化问题之间的相似性. SA 算法在某一初温下,伴随温度参数的不断下降,结合概率突跳特性在解空间中随机寻找目标函数的全局最优解,即在局部优解中能概率跳出并最终趋于全局最优.

#### 3.1 传统的模拟退火算法求解

采用传统的模拟退火算法求解的描述如下:

(1) 解空间.

$S = \{(x(1), x(2), \dots, x(n)) \mid \sum_{i=1}^n w(i)x(i) \leq M, x(i) \in \{0, 1\}\}$ , 初始解一般为  $(0, 0, \dots, 0)_{1 \times n}$

(2) 目标函数.

最大价值的目标函数为:

$$\max f = \sum_{i=1}^n c(i)x(i)$$

$$s. t. \sum_{i=1}^n w(i)x(i) \leq M, x(i) \in \{0, 1\}, i = 1,$$

2, ..., n

(3) 新解的产生.

随机选取物品,若  $i$  不在背包中,则将其直接放入背包中,或同时从背包中随机取出另一物品  $j$ ;若  $i$  已在背包中,则将其取出,并同时随机装入另一物品  $j$ .

(4) 背包的价值差和重量差.

根据上述新解产生的三种可能,相应的背包价值差为

$$\Delta f = \begin{cases} c(i) & \text{将物品 } i \text{ 直接装入} \\ c(i) - c(j) & \text{将物品 } i \text{ 装入且 } j \text{ 取出} \\ c(j) - c(i) & \text{将物品 } i \text{ 取出且 } j \text{ 装入} \end{cases}$$

相应的背包重量为:

$$\Delta m = \begin{cases} w(i) & \text{将物品 } i \text{ 直接装入} \\ w(i) - w(j) & \text{将物品 } i \text{ 装入且 } j \text{ 取出} \\ w(j) - w(i) & \text{将物品 } i \text{ 取出且 } j \text{ 装入} \end{cases}$$

其中  $\Delta m$  为当前状态下背包重量  $m$  的增量.

(5) 接受准则.

由于 0-1 背包问题是有约束的最优化问题,所以文中采用的是扩充了的 Metropolis 准则.

$$P = \begin{cases} 0 & m + \Delta m > M \\ 1 & m + \Delta m \leq M \text{ 且 } \Delta f > 0 \\ \exp(-\Delta f/t) & \text{其他情况} \end{cases}$$

其中  $t$  为温度控制参数

#### 3.2 改进的模拟退火算法

冷却进度表是一组控制算法进程的参数,只有合理的选取才能保证算法在有限时间内达到全局收敛性.本文对参数的设定做了一些改进.

(1) 合理选取控制参数  $t$  的初值  $t_0$ .

参数  $t_0$  的初始值应该足够大,才能保证首先在初始的大范围搜索阶段找到全局最优解所在的区域,然后再逐渐缩小搜索的范围,最终求出全局最优解.但在实际操作时,  $t_0$  也不宜太大,应与其他参数进行折中优化选取,否则会因计算量过大而使程序运行时间太长.

(2) 合理设定退火率.

控制参数  $t$  的衰减可以有如下几种选取方式:

1)  $t_{k+1} = \alpha t_k, k = 0, 1, 2, \dots$

其中  $\alpha$  是一个接近 1 的常数,它的取值决定于降温的过程.

2)  $c(t) = c(0)/t$

其中  $t$  是一个大于 1 且逐步增大的整数,  $c(0)$  为初始温度.

也可以采用  $c(t) = c(0)/\ln(t)$  或  $c(t) = c(0)/(k + \ln(t))$  的形式。

小的衰减可能导致算法进程迭代次数的增加,从而使算法进程接受更多的变换,访问更多的邻域,搜索更大范围的解空间,返回更高质量的最终解。

(3) Markov 链长度  $L_k$  的设定。

在控制参数  $t$  的衰减函数已选定的前提下,  $L_k$  应选在控制参数  $t$  的每一取值上能够达到近似平衡。

(4) 程序停止标准的确定。

程序停止标准可设定为:运行到控制参数  $t$  的终值的要求标准算法将终止,也可以是迭代在若干个相继的 Markov 链中解无任何变化。根据实验,最好是将以上两个标准结合起来,既能保证算法收敛于某一近似解,又能使最终解具有一定的全局性。

## 4 仿真试验

模拟退火算法的控制参数的设置:

a) 控制参数  $t$  的初值  $t_0$  为 500。

b) 控制参数  $t$  的衰减函数为

$t_{k+1} = \alpha t_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , 取  $\alpha = 0.95$ 。

c) 控制参数  $t$  的终止准则:让  $tf$  的值小于某个充分小的正数  $\delta$ , 取  $\delta = 0.00001$ 。

d) Markov 链长度  $L_k$ , 取等长为  $100 \cdot n$ ,  $n$  为问题的规模。

试验中所采用的数据均为随机产生,其中  $c_i$  和  $w_i$  在 1~100 之间的整数内随机产生,背包容量  $M =$

$$[0.8 * \sum_{i=1}^n w_i].$$

模拟结果如表 1 所示:

表 1 两种方法的仿真模拟

问题规模(n)	传统的模拟退火算法	改进的模拟退火算法
(1, 1, 1, 1)	(295, 0.0100)	(295, 0.0500)
(1, 2, 3, 4)	(1024, 0.0900)	(1024, 0.2710)
(2, 2, 2, 2)	(4520, 9.1200)	(4515, 1.2920)
(10, 10, 10, 10,)	(14536, 223.2600)	(14427, 3.6850)
(100, 100, 100, 100)	(48926, 7406.3500)	(47804, 13.5190)

改进的模拟退火算法进行求解比传统的求解时有更高的可靠性。在问题规模  $n$  增大过程中, SA 的解和 CPU 时间却越来越稳定。而且,改进的 SA 不容易陷入进度表的参数的选择,往往不容易选出最优的参数配置,以达到解的质量和 CPU 时间相对最优。模拟退火算法是一种通用、高效、健壮、可行的随机近似算法,且可以较容易地并行实现以进一步提高运行效率,适合求解大规模组合优化问题特别是 NP 完全问题,因此具有很大的实用价值。

## [参 考 文 献]

- [1]王小平,曾立明.遗传算法——理论、应用与算法实现[M].西安:西安交通大学出版社,2002,136~140.
- [2]刘则毅,刘东毅,马逢时,等.科学计算技术与 Matlab[M].北京:科学出版社,2001,342~347.
- [3]吴志远,邵惠鹤,吴新余.遗传退火进化算法[J].上海交通大学学报,1997,31(12):69~71.
- [4]Jackie Neider, Tom Davis, Mason Woo. OpenGL Programming Guide[M]. Addison-Wesley Press, 1991.
- [5]林森.基于 0—1 背包问题的讨论[J].微机发展,2005,15(10),41~43.
- [6]刘怀亮.模拟退火算法及其改进[J].广州大学学报,2005,4(6),503~506.
- [7]金惠敏,马良.遗传退火进化算法在背包问题中的应用[J].上海理工大学学报,2006,26(6),561~564.

[责任编辑 苏 琴]

[责任校对 黄祖宾]

## A Kind of Renewed Simulated Annealing Algorithm Solves 0—1 Knapsack Problem

LIANG Guo-hong, ZHANG Sheng, HUANG Hui, HE Shang-lu

(College of Mathematics, Physics & Software Engineering,  
Lanzhou Jiaotong University, Gansu 730070, China)

**Abstract:** From the viewpoint of intensifying convergence and reducing dependency of parameters, a renewed simulated annealing algorithm for solving knapsack problem is proposed. The algorithm avoids the disadvantages of traditional simulated annealing algorithm. It has superiority in performance, efficiency and reliability. The detailed realization of the algorithm for solving 0—1 knapsack problem is illustrated.

**Key Words:** 0—1 Knapsack Problem; Traditional Simulated Annealing Algorithm; Renewed Simulated Annealing Algorithm

# 一种改进的模拟退火算法求解0-1背包问题

作者: [梁国宏](#), [张生](#), [黄辉](#), [何尚录](#), [LIANG Guo-hong](#), [ZHANG Sheng](#), [HUANG Hui](#), [HE Shang-lu](#)  
作者单位: [兰州交通大学, 数理与软件工程学院, 甘肃, 兰州, 730070](#)  
刊名: [广西民族大学学报 \(自然科学版\)](#)  
英文刊名: [JOURNAL OF GUANGXI UNIVERSITY FOR NATIONALITIES \(NATURAL SCIENCE EDITION\)](#)  
年, 卷(期): 2007, 13 (3)  
被引用次数: 1次

## 参考文献(7条)

1. 金惠敏;马良 [遗传退火进化算法在背包问题中的应用](#)[期刊论文]-[上海理工大学学报](#) 2004(06)
2. 刘怀亮 [模拟退火算法及其改进](#)[期刊论文]-[广州大学学报 \(自然科学版\)](#) 2005(06)
3. 林鑫 [基于0-1背包问题的讨论](#)[期刊论文]-[微机发展](#) 2005(10)
4. Jackie Neider;Tom Davis;Mason Woo [OpenGL Programming Guide](#) 1991
5. 吴志远;邵惠鹤;吴新余 [遗传退火进化算法](#) 1997(12)
6. 刘则毅;刘东毅;马逢时 [科学计算技术与Matlab](#) 2001
7. 王小平;曹立明 [遗传算法—理论、应用与算法实现](#) 2002

## 引证文献(1条)

1. 徐浩漫,唐伦,陈前斌 [基于博弈学习的动态频谱分配算法研究](#)[期刊论文]-[计算机仿真](#) 2010(5)

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_gxmzxyxb200703031.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_gxmzxyxb200703031.aspx)