Fin500 Midterm

Chengjia Dong

October 20, 2024

1 Lecture 2: Rates, Bonds, Zero Coupon Bonds

1.1 概述 (Overview)

本节课的目标是介绍利率、债券以及零息债券的基本概念。我们会讨论不同类型的利率及其复利规则，随后引入基本的债券定价方法。这些知识点对分析固定收益产品非常重要。

1.2 利率与零息债券 (Rates and Zero Coupon Bonds)

- 利率的表示 (Rate Notation):

  $$r_t(t_1, t_2)$$

  表示在 t_1 到 t_2 时间段内的年化利率。如果 $t = t_1$，则写作 $r(t, t_2)$。

- 远期利率 (Forward Rate):

  $$F_t(t_1, t_2)$$

  当 $t < t_1$ 时，这个利率称为远期利率。

- 零息债券价格 (Zero Coupon Bond Price):

  $$P(t, T)$$

  这是在时间 t 报价的零息债券价格，该债券到期时间为 T。零息债券在到期时支付面值，而没有中间支付的利息。

- 含息债券价格 (Coupon Bond Price):

  $$B(t, T, c, n)$$

  其中，c 是年化票息，n 是债券的支付次数。

- 收益率曲线 (Yield Curve): 反映不同到期期限的利率 $r(0, T)$。实际使用中，这被称为“零息利率曲线 (Zero Rate Curve)”。

1.3 年复利计算 (Annual Compounding)

- 年复利公式:

$$P(0,t) = \frac{1}{(1+r(0,t))^t}$$

其中，$P(0,t)$ 是时间 t 的零息债券价格，$r(0,t)$ 是年复利利率。

- 现值计算 (Present Value Calculation): 对于任意现金流 C_t，其现值为:

$$\text{PV} = \frac{C_t}{(1+r(0,t))^t}$$

1.4 远期利率 (Forward Rates)

- 远期利率计算:

$$[1+r(0,1)][1+F_0(1,2)] = [1+r(0,2)]^2$$

通过现有利率计算出未来一段时间内的远期利率。例如:

$$1+F_0(1,2) = \frac{(1.065)^2}{1.06} = 1.07002$$

所以 $F_0(1,2) \approx 7\%$。

1.5 票面债券 (Coupon Bonds)

- 票面债券的定价公式:

$$B(t,T,c,n) = \sum_{i=1}^{nm} \frac{(c/m)P(t,t_i)}{+} P(t,T)$$

其中 t_i 是每次付息的时间，c/m 是每期支付的票息。

- 到期收益率 (Yield to Maturity, YTM): 使用年复利时的公式为:

$$B(t,T,c,n) = \sum_{i=1}^{nm} \frac{(c/m)}{(1+y/m)^i} + \frac{1}{(1+y/m)^{nm}}$$

其中 y 是到期收益率。

1.6 Bootstrapping与Zero Rate Curve

通过票面债券的价格，我们可以利用引导法逐步计算出各期零息债券的价格和利率。举例:

$$1 = 0.064842P(0,1) + (1.064842)P(0,2)$$

由此可以得到 $P(0,2)$ 和对应的零息利率。

1.7 持续复利 (Continuous Compounding)

- 持续复利公式:
$$P(0,t) = e^{-R(0,t)t}$$
其中 $R(0,t)$ 是持续复利利率。通过零息债券价格可以计算出该利率:
$$R(0,t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{P(0,t)}\right)$$

1.8 总结 (Conclusion)

本节课讨论了利率、债券定价以及远期利率等概念。重要的理解要点包括:

- 零息债券价格和利率之间的一一对应关系。
- 不同到期时间的利率可能不同。
- 可以根据现有利率计算远期利率。

2 Lecture 3: FRAs and Swaps

2.1 概述 (Overview)

本节课介绍了两种重要的利率衍生工具——远期利率协议（FRA）和利率互换（Swap）。这些工具可以用于对冲利率波动或进行利率投机。我们将讨论FRA和互换的定义、计算公式及其实际应用。

2.2 远期利率协议 (Forward Rate Agreements, FRA)

- **定义**: 场外交易合同，双方约定未来某个时间点的利率（参考利率），适用于名义上的贷款或存款。
- **FRA的收益**:
  - 买方（借款人）的收益:
  $$\text{Payoff} = N \times (r(T, T+\tau)\tau - K\tau)$$
  - 卖方（贷款人）的收益:
  $$\text{Payoff} = N \times (K\tau - r(T, T+\tau)\tau)$$
  其中，N 是名义金额，$r(T, T+\tau)$ 是参考利率，K 是锁定的远期利率，τ 是合同期限。
- **FRA示例**:
  - 假设投资者希望借款100百万美元用于90天（四个月后的120天）。

- FRA远期利率为7.2%。如果参考利率为6%:

$$100M \times 0.25 \times (0.06 - 0.072) = -300,000C$$

- 如果参考利率为8%:

$$100M \times 0.25 \times (0.08 - 0.072) = +200,000C$$

- **合成FRA**：通过购买和出售零息债券可以构建合成FRA，前提是组合投资能模拟FRA的现金流。

2.3 利率互换 (Interest Rate Swaps)

- **定义**: 两方交换基于不同利率（通常是固定利率和浮动利率）的现金流。
- **现金流**：固定利率支付者每期支付固定利率，接收浮动利率（反之亦然）。
- **互换的主要特点**:
  - 利率互换通常用于对冲利率风险或投机利率变动。
  - 常见索引：SOFR（担保隔夜融资利率）、国库券收益率、商业票据利率等。

2.4 互换定价与公式

- **互换的净现金流**:

$$\text{Swap Payoff} = \sum_{i=1}^{n} \tau N \left(r(T_{i-1}, T_i) - s_0 \right) P(0, T_i)$$

其中，N 是名义金额，$r(T_{i-1}, T_i)$ 是浮动利率，s_0 是固定利率，τ 是支付周期的长度，$P(0, T_i)$ 是折现因子。

- **互换利率计算**:

$$s_0 = \frac{1 - P(0, T_n)}{\tau \sum_{i=1}^{n} P(0, T_i)}$$

其中，$P(0, T_n)$ 是最终支付期的折现因子。

- **互换的估值**：互换的价值可以视为长浮动利率债券与短固定利率债券的组合：

$$\text{Swap}(0) = N \left(1 - s_0 \tau \sum_{i=1}^{n} P(0, T_i) - P(0, T_n) \right)$$

2.5 应用与案例

- **对冲 (Hedging)**: 公司如LEU使用互换将浮动利率贷款转换为固定利率贷款。
- **投机 (Speculation)**: 投资者可以通过支付固定利率和接收浮动利率来投机未来利率上升。
- **管理现金流和收入 (Managing Cash Flows)**: 如Gibson公司通过互换调整不同年度的收入。

2.6 案例：Gibson公司与Bankers Trust的互换交易

- **交易概览**:
  1. 5年期互换：Gibson支付浮动利率，接收7.12%的固定利率。
  2. 2年期互换：Gibson支付5.91%的固定利率，接收浮动利率。
- 通过这种互换，Gibson公司将收入从第三至第五年转移到第一和第二年。

2.7 总结 (Conclusion)

本节课讨论了两种重要的利率衍生品——远期利率协议（FRA）和利率互换（Swap）。它们的主要用途包括对冲利率波动、投机利率变动以及管理公司的现金流和会计收入。通过学习这些工具，我们可以更好地理解利率衍生品的价值计算和实际应用。

3 Lecture 4: Theories of the Term Structure of Interest Rates

3.1 概述 (Overview)

本节课主要介绍了利率的期限结构以及解释其不同形状的几种理论。重点讨论了预期假说（Expectations Hypothesis）、风险调整的预期假说（Risk-Adjusted Expectations Hypothesis）和流动性偏好假说（Liquidity Preference Hypothesis），并分析了它们的局限性和实际应用。

3.2 期限结构 (Term Structure)

- **收益率曲线 (Yield Curve)**: 不同到期期限的债券收益率形成的曲线。其形状可能是上升、平坦或下降的。
- **常见形状**:
  - 上升曲线通常意味着市场预期未来利率上升。
  - 平坦曲线表示市场预期利率保持稳定。
  - 下降曲线则意味着市场预期未来利率下降。

3.3 CMT收益率 (Constant Maturity Treasury Yields)

- CMT收益率是基于最新拍卖的国债市场报价插值计算的。
- 公式中CMT收益率与远期利率的关系类似于票面收益率与远期利率的关系:

$$S_{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(t_0, t_i) f_{t_0}(t_{i-1}, t_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(t_0, t_i)}$$

3.4 持有期收益率 (Holding Period Returns)

- **策略1**: 投资两年期债券，持有到期，收益为:

$$100 \times e^{r(0,2)\times 2}$$

- **策略2**: 投资一年期债券，到期后再投资一年期债券，收益为:

$$100 \times e^{r(0,1)\times 1} \times e^{r(1,2)\times 1} = 100 \times e^{r(0,1)+r(1,2)}$$

- 策略2存在再投资风险，因为第二年的再投资利率 $r(1,2)$ 是未知的。

3.5 预期假说 (Expectations Hypothesis)

- 预期假说认为，长期利率是未来短期利率的预期值的平均数。公式如下:

$$r(0,n) = \frac{1}{n}\left(E_0[r(0,1) + r(1,2) + \cdots + r(n-1,n)]\right)$$

- 如果短期利率是均值回归的，则收益率曲线应是平坦的。
- 然而，通常我们观察到向上倾斜的收益率曲线，意味着投资者对长期债券要求更高的风险补偿。

3.6 风险调整的预期假说 (Risk-Adjusted Expectations Hypothesis)

- 在预期假说的基础上，引入了风险溢价 $rp(n)$，公式为:

$$r(0,n) = \frac{1}{n}\left(E_0[r(0,1) + r(1,2) + \cdots + r(n-1,n)]\right) + rp(n)$$

- 随着债券期限的增加，风险溢价 $rp(n)$ 通常也会增加，这解释了为何收益率曲线通常是向上倾斜的。

3.7 流动性偏好假说 (Liquidity Preference Hypothesis)

- 该假说认为，投资者对长期债券的持有要求流动性溢价。其形式为：

$$E[r_t(t,t+1)] = \lambda + F_0(t,t+1)$$

  其中 λ 为流动性溢价。

- 投资者对长期债券的持有成本更高，导致前瞻利率 $F_0(t,t+1)$ 高于预期未来即期利率 $E[r_t(t,t+1)]$。

3.8 便利收益 (Convenience Yield)

- 对于短期低风险债务（如国债），其收益率通常低于模型预测。这是因为这些债务具有"货币属性"，使其便于交易，投资者愿意接受较低的回报，称为**便利收益**或**流动性溢价**。

3.9 远期利率与风险中立预期 (Forward Rates and Risk-Neutral Expectations)

- 远期利率可以解释为未来即期利率的风险中立预期。公式为：

$$F_0(t,t+1) = E_0^b[r(t,t+1)]$$

  其中，$E_0^b[r(t,t+1)]$ 为风险中立预期的未来即期利率。

3.10 总结 (Conclusion)

- 本节课介绍了利率期限结构的几种主要理论，包括预期假说、风险调整的预期假说和流动性偏好假说。
- 这些理论提供了不同的视角来解释收益率曲线的形状，但都存在一定的局限性。
- 还介绍了风险中立概率的概念，并解释了远期利率如何用于估值，但可能无法准确预测未来的利率。

4 Lecture 5: Measures of Interest Rate Risk

4.1 概述 (Overview)

本节课我们将讨论如何衡量债券持有人或发行人的利率风险，通常使用久期（Duration）来进行度量。 我们会介绍如何使用这些风险衡量指标，以及它们之间的关系。 最后，我们会讨论如何通过匹配久期来减少利率风险，例如通过使用互换或其他债券进行对冲。

4.2 固定收益证券的对冲方法 (Methods of Hedging Fixed Income Securities)

- 资产和负债的时间完全匹配。
- 久期匹配 - 本课重点。
- 使用衍生品对冲，如互换合约。

4.3 久期的简单解释 (Duration: Simple Explanation)

大部分债券价格的变化是由利率变动引起的。久期度量债券对利率变动的敏感性。

4.4 麦考利久期 (Macaulay Duration)

麦考利久期计算的是每个现金流的加权平均时间，权重为现金流现值占总现值的比例。公式如下：

$$D = \frac{PV(t_1)t_1 + PV(t_2)t_2 + \cdots + PV(t_n)t_n}{PV_{\text{total}}} = w_{t_1}t_1 + w_{t_2}t_2 + \cdots + w_{t_n}t_n$$

其中，

$$w_{t_i} = \frac{PV(t_i)}{PV_{\text{total}}}$$

$PV(t_i)$ 是时间 t_i 现金流的现值，使用收益率作为折现率计算，PV_{total} 是所有现金流的现值总和。

4.5 麦考利久期的特点 (Properties of Macaulay Duration)

- 零息债券的麦考利久期等于到期时间。
- 付息债券的麦考利久期小于到期时间。
- 一只具有麦考利久期 D 的债券与同样到期时间的零息债券具有相似的收益率敏感性。

4.6 麦考利久期的公式 (Macaulay Duration Formula)

对于票面利率为 C，收益率为 y，每年付息次数为 m，剩余期数为 n 的债券，麦考利久期的公式为：

$$D = \frac{1 + \frac{y}{m}}{y} - \frac{1 + \frac{y}{m} + n\left(\frac{c}{m} - \frac{y}{m}\right)}{c\left(\left(1 + \frac{y}{m}\right)^n - 1\right) + y}$$

4.7 修正久期 (Modified Duration)

修正久期计算债券价格对收益率变化的敏感性。修正久期的公式为:

$$D_m = -\frac{1}{P(y_0)}\frac{dP(y)}{dy}\bigg|_{y=y_0}$$

其中，P 是债券的价格，修正久期用于确定收益率变化时债券价格的百分比变化。

4.8 麦考利久期与修正久期的关系 (Relation Between Macaulay and Modified Duration)

麦考利久期与修正久期之间的关系为:

$$D_m = \frac{D}{1+y/m}$$

其中，y 是收益率，m 是每年复利的次数。在连续复利的情况下，麦考利久期等于修正久期。

4.9 例子 (Example)

一只10% 票息，30年期的债券，价格为100，麦考利久期为 $D = 9.94$，假设每半年付息一次。该债券的修正久期为:

$$D_m = \frac{D}{1+y/2} = \frac{9.94}{1.05} = 9.47$$

因此，若收益率上升1%，债券价格大约会下降 9.47%。

4.10 久期与即期利率 (Duration with Spot Rates)

若我们计算债券对利率期限结构（即期利率）的敏感性，使用的公式为:

$$PV = \sum_{i=0}^{n}\frac{x_{t_i}}{e^{r(t_i)t_i}}$$

其中，$r(t_i)$ 是时间 t_i 的即期利率，现金流的现值PV对即期利率曲线平行移动的敏感性可以通过对平行移动幅度 α 的导数来计算。

4.11 免疫 (Immunization)

免疫策略是通过构建一个与负债具有相同现值和久期的债券组合来减少利率风险。公式如下:

$$P = xP_1 + yP_2$$

$$D = \frac{xP_1}{P}D_1 + \frac{yP_2}{P}D_2$$

然后通过求解 x 和 y 来确定投资组合。

4.12 Taylor 展开 (Taylor Expansions)

久期和凸度的概念可以用泰勒展开来解释债券价格对利率变化的反应。泰勒展开公式为:

$$P(y) = P(y_0) + P'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P''(y_0)(y - y_0)^2 + \dots$$

通过匹配泰勒展开的项数，可以使投资组合的久期匹配负债的久期，从而实现免疫。

5 Lecture 6: Properties of Stock Returns

5.1 概述 (Introduction)

本节课我们开始对股票进行分析。特别是，我们将定义一些简单的统计工具，概述股票收益的一些属性。

5.2 随机性 (Uncertainty)

- 99.9% 的证券具有随机现金流或随机折现因子。
- 随机现金流估值是现代金融的核心。
- 本次课程将介绍股票和投资组合收益的基本统计属性，并讨论其背后的经济直觉。

5.3 随机变量 (Random Variables)

离散随机变量可以取值 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$，其概率为 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$，满足 $p_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$。

5.4 期望 (Expectation)

期望定义为:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

如果 $Y = a + bX$，则 $E[a + bX] = a + bE[X]$。

5.5 方差 (Variance)

方差定义为:

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

方差衡量随机变量与其均值的离散程度，标准差 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$。

5.6 协方差 (Covariance)

协方差衡量两个变量之间的线性依赖性，定义为：

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

5.7 相关系数 (Correlation)

相关系数衡量两个变量之间的线性关系，定义为：

$$\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

相关系数的范围为 $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$。

5.8 收益 (Returns)

假设时间 t 时资产价格为 p_t，且时间 $t-1$ 时购买该资产，t 时收到股息 d_t，则收益 r_t 定义为：

$$r_t = \frac{p_t + d_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$

连续复利收益的定义为：

$$r_t = \ln(p_t + d_t) - \ln(p_{t-1})$$

5.9 标准差与波动率 (Standard Deviation and Volatility)

波动率通常表示为连续复利收益的标准差 σ。要将每日波动率扩展到年波动率，可以将日波动率乘以 $\sqrt{365}$。

5.10 自相关 (Autocorrelation)

自相关是指时间序列数据的内部相关性。通过计算不同时间点之间的相关系数，可以衡量是否存在线性关系。

5.11 收益分布 (Distribution of Returns)

股票收益分布通常不遵循正态分布，具有以下特征：

- 大致对称
- 具有肥尾现象（fat tails）
- 峰值较高

5.12 极端事件 (Extreme Events)

极端事件是指收益超过三倍标准差的观察值。对于日收益，它们通常每年发生约三次，超过四倍标准差的事件每年不到一次。

5.13 波动性聚集 (Volatility Clustering)

波动性聚集指的是大波动往往伴随着大波动，而小波动往往伴随着小波动。这反映了收益波动的非均匀性。

5.14 非正态性 (Non-Normality)

由于不同波动率期间的收益来自不同的分布，股票收益的生成过程通常不是正态的，导致分布的峰度较大。

5.15 总结 (Conclusions)

我们定义了一些关键的统计属性，特别是独立性和相关性的区别。我们还讨论了股票收益的一些通用发现，最重要的是它们不符合正态分布，并且存在波动性聚集的证据。

6 Lecture 7: Mean Variance Analysis I

6.1 概述 (Introduction)

本节课我们将开始研究均值-方差有效投资组合的构建。我们首先讨论两个风险资产的情况，虽然这是一种简化，但有助于我们理解基本的直觉，之后再扩展到更大数量资产的问题。

6.2 投资组合描述 (Describing a Portfolio)

假设可以投资 n 种资产，定义如下：

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

其中 w_i 是资产的权重，r_i 是资产的收益率。使用权重计算投资组合收益非常方便。

6.3 投资组合收益 (Return on a Portfolio)

投资组合的收益可以表示为：

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

其中，r_i 是各个资产的随机收益，r_P 是这些随机变量的加权和。

6.4 投资组合期望收益 (Expected Return on a Portfolio)

投资组合的期望收益为:

$$E[r_P] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[r_i]$$

或者更简洁地表示为:

$$E[r_P] = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

6.5 投资组合方差 (Variance of a Portfolio)

投资组合收益的方差为:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

其中，σ_{ij} 是资产 i 和资产 j 的协方差。

6.6 示例 (Example)

考虑两个资产，给定 $r_1 = 0.12, \sigma_1 = 0.20, r_2 = 0.15, \sigma_2 = 0.18, \sigma_{12} = 0.01$，权重 $w_1 = 0.25, w_2 = 0.75$，则:

$$r_P = (0.25)(0.12) + (0.75)(0.15) = 0.1425$$

投资组合的方差为:

$$\sigma_P^2 = (0.25)^2(0.20)^2 + 2(0.25)(0.75)(0.01) + (0.75)^2(0.18)^2 = 0.0245$$

6.7 分散化 (Diversification)

通过构建投资组合，可以降低风险（方差）而不降低预期收益。例如，对于 n 个不相关资产且具有相同均值和方差的情况:

$$r_P = r$$

投资组合的方差为:

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

因此，方差因 n 的增加而减少，从而降低了风险。

6.8 有效前沿 (Efficient Frontier)

有效前沿是最小方差集合的上半部分，它代表了给定方差下的最大期望收益。

6.9 线性代数 (Linear Algebra)

假设有随机变量向量 X，其协方差矩阵为 Σ，那么投资组合的期望收益和方差可以使用矩阵形式表示：

$$r_P = w^T r$$

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w$$

6.10 总结 (Conclusions)

我们研究了两个资产的均值-方差分析，了解了分散化的效果以及有效投资组合的定义。通过数值例子，我们引入了一些有助于解决更大问题的矩阵符号。

7 Lecture 8: Mean Variance Analysis II

7.1 概述 (Introduction)

在本讲中，我们将形式化投资组合的构建，讨论如何确定在 n 个风险资产中的最优投资权重。为此，我们将使用一些优化和线性代数的结果。最终，我们会发现这些计算可以简化为"二基金定理"，或在最简单的情况下"单基金定理"，即每个投资者都将以相同比例持有风险资产。

7.2 投资组合描述 (Describing a Portfolio)

对于每个期望回报，找到最小方差（或标准差）投资组合：

7.3 符号表示 (Notation)

有 n 个风险资产，其收益率为 $r_1, r_2, \ldots, r_n$，投资组合的收益率为 r_P，其均值为 $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$，协方差为 σ_{ij}，投资组合的标准差为 σ_P。

在矩阵表示中：

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_n \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

7.4 均值-方差优化 (Mean-Variance Optimization)

均值-方差优化问题为：

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = r_p \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

其中，w_i 是投资权重。允许做空（即 w_i 可以为负），并假设所有资产都存在风险。

7.5 矩阵表示 (Matrix Notation)

均值-方差问题可以用矩阵形式表示为：

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{2}w'\Sigma w$$

$$\text{Subject to} \quad w'\bar{r} = r_p \quad \text{and} \quad w'1 = 1$$

其中 w' 为权重向量的转置，Σ 为协方差矩阵。

7.6 拉格朗日乘子法 (Lagrangian Method)

拉格朗日函数为：

$$L(w, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}w'\Sigma w - \lambda(w'\bar{r} - r_p) - \mu(w'1 - 1)$$

通过对 w, λ, μ 求偏导并令其等于零，得到方程组的最优解。

7.7 解的推导 (Solution Derivation)

根据方程组推导出解：

$$\Sigma w + \lambda\bar{r} + \mu 1 = 0$$

$$w'\bar{r} = r_p \quad \text{and} \quad w'1 = 1$$

7.8 二基金定理 (Two-Fund Theorem)

在允许做空的情况下，二基金定理表明：所有投资者只需要投资于两个最小方差的组合。

7.9 示例 (Example)

假设有11只股票，预期月回报如下（使用资本资产定价模型估计）。通过优化，得到每个期望回报对应的投资权重。

7.10 问题 (Issues in Mean-Variance Optimization)

由于均值估计的不确定性，解对预期回报的估计非常敏感。改变少量的回报估计会显著影响结果。

7.11 总结 (Conclusions)

我们已经解决了均值-方差优化问题，得到了投资组合的闭式解。下一讲中，我们将引入风险资产的投资组合问题。

8 Lecture 9: Capital Asset Pricing Model (CAPM)

8.1 概述 (Introduction)

在本讲中，我们将介绍资产定价模型中最著名的模型——资本资产定价模型（CAPM）。CAPM 直接源于均值-方差分析，指出风险资产的预期收益仅依赖于其与市场的协方差。这个模型虽然看似简单，但能够非常便捷地计算资产和投资组合的预期收益。我们还将通过经验测试来检验该模型如何描述资产的收益。

8.2 资本资产定价模型 (Capital Asset Pricing Model)

资本资产定价模型（CAPM）是解释资产预期收益的模型，通常仅应用于普通股。CAPM 公式为：

$$r_i - r_f = \beta_i(r_M - r_f)$$

其中：

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_M)}{\mathrm{var}(r_M)}$$

r_M 是市场组合的收益率，市场组合是所有资产的价值加权组合。

8.3 市场模型 (Market Model)

CAPM 与“市场模型”有关，市场模型通过下式表达资产的收益：

$$r_i = \alpha + \beta r_M + \epsilon_i$$

其中，ϵ_i 是与市场收益率无关的误差项。CAPM 强加了一个限制条件，即 $\alpha = r_f(1-\beta)$。

8.4 均值-方差优化的推导 (Derivation of Mean-Variance Optimization)

我们假设允许做空，并且存在一个无风险资产（例如短期国债）的收益率 r_f。风险资产的权重为 $w = (w_1, \ldots, w_n)'$，均值-方差优化问题为：

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{2} w' \Sigma w$$

$$\text{Subject to} \quad r_f + w'(r - r_f) = r_p$$

其一阶条件为：

$$0 = \Sigma w + \lambda(r - r_f 1)$$

$$0 = r_f + (r - r_f 1)' w - r_p$$

8.5 解 (Solution)

我们可以通过一阶条件推导出:

$$w = \lambda \Sigma^{-1}(r_f 1 - r)$$

并且 $\lambda = \frac{r_p - r_f}{(r - r_f 1)' \Sigma^{-1}(r - r_f 1)}$。由此可得风险资产始终按相同比例持有。

8.6 一基金定理 (One-Fund Theorem)

任何有效投资组合都可以表示为 αw^* 的形式，其中 w^* 是某个固定的风险投资组合。

8.7 资本市场线 (Capital Market Line)

资本市场线描述了有效投资组合的标准差与预期收益之间的关系:

$$r_p = r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_M}(r_M - r_f)$$

8.8 推导 CAPM (Deriving the CAPM)

通过重新排列均值-方差优化问题的一阶条件，我们得到:

$$r_i - r_f = \frac{\text{cov}(r_i, w'r)}{\text{var}(w'r)} \times w'(r - r_f 1)$$

如果 w 是市场组合，则该式变为:

$$r_i - r_f = \beta_i(r_M - r_f)$$

这就是 CAPM 的公式。

8.9 投资组合的 Beta (Beta of a Portfolio)

对于具有权重 $w_1, w_2, \ldots, w_n$ 的投资组合，其收益的 β_p 为:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

投资组合的 Beta 是其成分资产 Beta 的加权平均值。

8.10 证券市场线 (Security Market Line)

证券市场线公式表达了资产预期收益与 Beta 之间的关系:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f)$$

此公式适用于所有资产和投资组合。

8.11 经验测试 (Empirical Tests)

CAPM 预测截距项 γ_0 不应显著不同于零，且斜率 γ_1 应等于 $r_M - r_f$。然而，实证研究表明低 Beta 资产的收益高于预测值，而高 Beta 资产的收益则低于预测值。

8.12 替代模型 (Alternatives to CAPM)

其他替代模型包括套利定价理论（APT）、Fama 和 French 的三因子模型、跨期 CAPM (ICAPM) 等。这些模型为 CAPM 的扩展，加入了更多风险因素。

8.13 结论 (Conclusions)

我们推导了 CAPM，并看到它是均值-方差分析的自然结果。尽管 CAPM 是一个简单且影响广泛的公式，但其实际表现并不理想。我们将在下一节课中探讨更加复杂的多因素模型。

9 Introduction to Factor Models

因子模型用于通过多个风险因子来描述资产回报。这些模型允许我们基于这些因子分析回报，并为与这些因子相关的风险溢价提供解释。在本讲座中，我们介绍了不同的因子模型及其在金融中的影响。

9.1 Single-Factor Model (单因子模型)

最简单的因子模型是单因子模型，可以写成：

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \epsilon_i$$

其中：

- r_i 是资产 i 的回报，
- α_i 是截距项，
- β_i 是资产对市场因子的敏感度，
- r_m 是市场因子的回报，
- ϵ_i 是未被因子解释的特质风险（idiosyncratic risk）。

9.2 Arbitrage Pricing Theory (APT) (套利定价理论)

套利定价理论 (APT) 将单因子模型推广到多个因子。APT 的一般形式为：

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \cdots + \beta_{in} f_n + \epsilon_i$$

其中：

- r_i 是资产 i 的回报，
- α_i 是截距项，
- β_{ij} 是资产 i 对因子 j 的敏感度，
- f_j 是因子 j 的回报，
- ϵ_i 是特质风险（idiosyncratic risk）。

9.3 Factor Risk Premium (因子风险溢价)

一个投资组合的回报可以表达为：

$$r_p = \alpha_p + \beta_{p1} f_1 + \cdots + \beta_{pn} f_n + \epsilon_p$$

其中 r_p 是投资组合的回报，α_p、β_{pj}、f_j 和 ϵ_p 的定义与上面相同。

预期回报与各因子的风险溢价相关，公式如下：

$$E(r_i) - r_f = \beta_{i1}\lambda_1 + \beta_{i2}\lambda_2 + \cdots + \beta_{in}\lambda_n$$

其中 λ_j 是与因子 j 相关的风险溢价，r_f 是无风险利率（risk-free rate）。

9.4 Fama-French Three-Factor Model (Fama-French 三因子模型)

Fama-French 三因子模型在资本资产定价模型（CAPM）的基础上，增加了两个额外的因子：规模（Size, SMB）和价值（Value, HML）。该模型表示为：

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f) + s_i \mathrm{SMB} + h_i \mathrm{HML} + \epsilon_i$$

其中：

- SMB 是规模因子（Small Minus Big），
- HML 是价值因子（High Minus Low），
- s_i 是资产对规模因子的敏感度，
- h_i 是资产对价值因子的敏感度。

9.5 Empirical Tests (实证检验)

为了检验因子模型的表现，可以使用历史回报数据来估计系数（如 α, β, s, h）。关键的性能度量包括：

- α：测量异常表现（超出或低于因子解释的部分）。
- R^2：衡量模型解释回报变动的程度。

较高的 R^2 表示模型可以解释更大部分的回报波动。

10 Conclusions (结论)

因子模型为基于多个风险因子理解资产回报提供了有用的框架。通过这些模型，我们可以解释风险溢价并分析投资组合的表现。通过增加更多的因子（如 Fama-French 模型中的因子），我们可以更好地捕捉资产