

# Lecture 12: The Efficient Market Hypothesis

Dr. Martin Widdicks  
Gies College of Business

Fall, 2024

## 第12讲总结：有效市场假说（EMH）

### 有效市场假说的核心概念

- 定义：市场价格完全反映所有可用信息，并且对新信息的反应是即时且无偏的。
- 市场有效性的三种形式：
  1. **弱型有效性（Weak Form Efficiency）** 市场价格反映了历史信息，无法通过技术分析获得超额收益。  
(*Prices reflect historical information; technical analysis cannot generate excess returns.*)
  2. **半强型有效性（Semi-Strong Form Efficiency）** 市场价格反映所有公开信息，基本面分析无法获得超额收益。  
(*Prices reflect all publicly available information; fundamental analysis does not yield excess returns.*)
  3. **强型有效性（Strong Form Efficiency）** 市场价格反映所有公开和非公开信息，即使是内幕信息也无法持续提供超额收益。  
(*Prices reflect all public and private information; even insider information cannot consistently provide excess returns.*)
- 重要意义：
  - 无套利机会（**No arbitrage opportunities**）：有效市场中不存在无风险套利。
  - 价格随机漫步（**Random Walk Hypothesis**）：价格走势随机，无法预测。
  - 主动管理无效（**Active management does not add value**）：主动投资策略通常无法击败市场。

### 支持EMH的证据

- 股价对新闻（如企业行动、会计变更）迅速反应。  
(*Prices adjust quickly to news such as corporate actions and accounting changes.*)
- 实证研究表明，绝大多数共同基金和专业经理在扣除风险和费用后无法击败市场。
- 数据支持弱型有效性：技术交易规则未显示出持续盈利能力。  
(*Weak form efficiency supported by data: no consistent profitability of technical trading rules.*)
- 半强型有效性得到支持：股价对盈利公告等公共信息迅速作出反应。

### 对EMH的批评与挑战

- **市场异常现象（Market anomalies）**：例如1987年股市崩盘、互联网泡沫等，表明市场可能存在无效率。
- **信息成本悖论（Grossman-Stiglitz Paradox）**：如果市场完全有效，投资者将缺乏分析和收集信息的动力。  
(*If markets are fully efficient, there is no incentive to analyze and collect costly information.*)
- 行为因素和非理性投资者可能导致偏离市场效率的现象。

### 内幕交易与市场效率

- 合法与非法内幕交易的区别：
  - 合法内幕交易：公司内部人员在向SEC报告后交易。
  - 非法内幕交易：利用重大非公开信息牟利。
- 研究表明，内幕交易可能在短期内获得异常收益，但长期来看缺乏持续性。

### EMH的实际问题

- 交易成本、监管限制和税收可能影响市场效率。
- 流动性不足和缺失的风险因素可能导致暂时的市场无效率。

## 主要启示

1. **相信市场价格：** 市场价格通常是资产价值的最佳估计。
2. **从价格中提取信息：** 市场价格包含有价值的信息，可用于决策。 (*Market prices contain valuable information for decision-making.*)
3. **不存在金融幻象：** 市场价格难以被操纵或欺骗。
4. **价值来源：** 经济租金来自于优质信息、技术和资源。 (*Economic rents arise from superior information, technology, and resources.*)

## 总结

有效市场假说为理解信息如何反映到市场价格中提供了框架。尽管有大量支持EMH的证据，但异常现象和行为因素也突出了它的局限性。未来将讨论具体的测试方法和可能击败市场的交易策略。

## 第13讲总结：随机漫步假说与有效市场假说

### 课程目标

- 形式化定义随机漫步假说 (Random Walk Hypothesis, RWH) 和有效市场假说 (Efficient Market Hypothesis, EMH)。
- 探讨用于验证两种假说的测试方法。
- 分析交易规则与有效市场假说之间的关系。

### 随机漫步假说 (RWH)

- 定义：随机漫步假说认为收益不可从历史值预测。收益的特性包括：
  1. 收益的均值是平稳的：  $E[rt] = \mu$ 。
  2. 收益之间不相关：  $\text{corr}(rt, rt + \tau) = 0, \tau \neq 0$ 。
- 含义：
  - 线性预测器无法预测未来收益。
  - 非线性预测器也无效。
  - 残差  $\epsilon_t = rt - \mu$  可以视为无记忆的鞅差序列 (martingale difference)。
- 注意：拒绝随机漫步假说不等于拒绝弱型市场有效性。

### 交易规则与有效市场假说 (EMH)

- 交易规则定义：利用价格历史信息  $I_t = \{p_t, p_{t-1}, \dots\}$ ，生成投资决策  $q_{t+1}$  的方法。
- 信息性交易规则：如果交易规则可以预测收益 ( $E[rt + 1 | q_{t+1}]$  取决于  $q_{t+1}$ )，则说明随机漫步假说可能不成立。
- 弱型有效市场假说：没有交易规则在调整风险后能获得超过无风险利率的净收益。
- EMH的评估注意点：
  - 净收益需要扣除交易成本（如交易费用、买卖价差、信息成本等）。
  - 需要通过假设检验排除偶然性导致的高收益。
  - 考虑风险调整的复杂性，尤其是国际维度的风险。

### 测试方法

- 方差比检验 (Variance Ratio Test) :
  - 对于随机漫步假说，  $V(N) = NV(1)$ ，即多期收益的方差为单期收益方差的  $N$  倍。
  - 检验步骤：
    1. 计算收益的样本均值与方差。
    2. 计算方差比：  $\hat{V}_R(N) = \hat{V}(N)/N\hat{V}(1)$ 。
    3. 通过统计量  $z_N$  判断随机漫步假说是否成立。
- 交易规则示例：

- **双均线规则（BLL）**：根据短期均线与长期均线的相对位置生成买卖信号。结果显示“买入日”平均收益为正，“卖出日”平均收益为负。
- **滤波规则（Filter Rule）**：根据汇率价格的上升或下降趋势生成买卖信号，通常基于过去价格变化的百分比计算。

## 测试结果与市场效率的影响

- **BLL规则**：
  - 研究表明在 90 年的数据中，“买入日”的平均年收益为 12%，“卖出日”为 -7%。
  - 测试显示规则具有信息性，但考虑交易成本后，净收益可能不足以证明市场无效率。
- **滤波规则**：
  - 在1976-1980年的研究中，平均年超额收益为 2.5%，但在扣除交易成本后，部分收益被抵消。
  - 1980年代有显著交易利润，但1990年代后此规律消失。
- **其他市场**：
  - 英国市场（FT-30指数）显示类似结果，但交易成本使得策略收益不足以证明市场无效率。
  - 外汇市场的交易策略在1990年前有显著收益，之后则逐渐消失。

## 结论

- 随机漫步假说与有效市场假说提供了分析市场效率的重要框架。
- 方差比检验常用于验证随机漫步假说，交易规则则用于测试有效市场假说。
- 交易规则（如BLL和滤波规则）尽管在历史数据中显示信息性，但考虑交易成本后，市场效率仍未被完全否定。

## 第13b讲总结：高级交易策略——反向投资、价值投资与动量策略

### 课程目标

- 探讨学术文献中的高级交易策略，包括反向投资、价值投资和动量策略。
- 分析这些策略的实施方法及其历史表现。
- 利用这些策略的表现评估市场效率假说（Efficient Market Hypothesis, EMH）。

### 反向投资策略（Contrarian Strategy）

- **假设**：如果市场存在过度反应，价格应随着时间出现逆转。
- De Bondt 和 Thaler 的研究：
  - 使用1926-1982年的月度数据，将股票按照过去36个月表现排序。
  - 选取表现最差和最好的股票，并跟踪未来60个月的收益表现。
- **结论**：表现差的股票在未来收益较高，而表现好的股票收益较低，这支持市场存在过度反应的假说。

### 价值投资策略（Value Investing Strategy）

- **定义**：选择低市盈率（高E/P）、低市净率（高B/M）、低市现率（高C/P）等特性的股票。
- **研究**：LSV（1994）研究了1963-1990年间价值策略的表现：
  - 价值股票表现优于“魅力股票”（Glamour Stocks）。
  - 价值股票收益更高可能是因为：
    - \* **风险解释**：高价值指标代表高风险因子。
    - \* **反向投资解释**：投资者过度乐观于魅力股票，而低估价值股票。
- **双维度策略**：结合多个价值指标的策略比单一指标策略表现更优，年化超额收益约为10

## 动量策略 (Momentum Strategy)

- 假设：短期内市场对公司特定信息的反应存在延迟。
- Jegadeesh 和 Titman (1993) 的研究：
  - 根据过去1-4个季度的股票收益排序，构建对冲组合（买入赢家、卖出输家）。
  - 平均年化收益达12
- 进一步研究表明：
  - 动量收益与系统性风险无关。
  - 行为模型解释：市场对好消息初期反应不足，随后过度反应，导致长周期回撤。

## 净发行策略 (Net Issuance Strategy)

- 假设：公司在股价高时发行股票，在股价低时回购股票。
- Richardson 和 Sloan (1995) 的研究：
  - 定义外部融资变动： $\Delta XFIN = \Delta CEQUITY + \Delta PEEQUITY + \Delta DEBT$ 。
  - 将公司按外部融资变动排序，构建多空组合：
    - \* 净发行公司未来1年平均表现差约10
    - \* 净回购公司未来1年平均超额收益约5
- 结论：多空组合1年平均收益约15

## 结论

- 历史上，反向投资、价值投资和动量策略显示了显著的超额收益，这对市场效率提出了质疑。
- 然而，这些收益可能部分受交易成本、风险调整以及行为偏差影响。
- 进一步研究可以使用当前数据测试这些策略的有效性。

## 第14讲总结：金融衍生品简介

### 课程目标

- 了解衍生品的定义及其在公众视野中的角色。
- 探讨基本衍生品合约及其用途，包括远期合约和期权合约。
- 分析使用衍生品的动机及典型交易参与者。

### 衍生品定义

- 衍生品是一种基于其他资产（标的资产）价值的金融工具。
- 标的资产示例：石油、SP 500指数、债券、黄金、天气等。

### 衍生品用途

- 风险管理（对冲）：例如通过期货合约对冲商品价格波动。
- 投机：利用衍生品高杠杆性进行市场预测。
- 降低交易成本：使用衍生品合约替代标的资产交易。
- 规避监管限制：通过衍生品合约实现资产配置而避免特定税收或监管条款。

## 远期合约

- 定义： 一方同意在未来某日期以特定价格从另一方购买经济商品的合约。
- 特点：
  - 合约的初始成本为零。
  - 多头（买方）从标的资产价格上涨中获益，价格下跌则亏损。
  - 空头（卖方）从标的资产价格下跌中获益，价格上涨则亏损。
- 应用：
  - 外汇市场： 银行通过远期合约进行外汇交易以规避信用风险。
  - 农业市场： 农民通过远期合约锁定未来收成价格。
- 结算方式： 可通过实物交割或现金结算完成合约。

## 期权合约

- 定义： 赋予持有者在未来某一时间以特定价格买入或卖出标的资产的权利，但没有义务。
- 主要类型：
  - 看涨期权（Call Option）： 持有者有权买入标的资产。
  - 看跌期权（Put Option）： 持有者有权卖出标的资产。
- 美式期权 vs. 欧式期权：
  - 美式期权可在到期日前任意时间行使。
  - 欧式期权只能在到期日行使。
- 杠杆作用： 相较于直接持有标的资产，期权提供更高的潜在收益（及风险）。
- 盈利图：
  - 看涨期权： 最大亏损为期权费，最大收益没有上限。
  - 看跌期权： 最大亏损为期权费，最大收益有限。

## 参与者

- 终端用户： 为对冲、投机、降低成本或规避监管而使用衍生品。
- 做市商： 为买卖双方提供流动性并通过价差获利。
- 经济观察者： 监管交易并评估市场状况。

## 结论

- 远期合约允许双方锁定未来价格以管理风险，但存在信用风险。
- 期权通过支付溢价提供标的资产价格变动的灵活性和杠杆。
- 衍生品是金融市场中重要的工具，未来课程将深入讨论其定价与应用。

## 第15讲总结：金融远期与期货定价

### 课程目标

- 理解远期与期货合约的基本特性。
- 探讨如何利用远期合约创建合成仓位并开发套利策略。
- 研究远期价格与现货价格的关系以及影响其关系的因素。
- 分析强约束条件下的远期价格模型。

## 无套利原则

- 定义：无套利机会意味着市场中不存在零风险、零成本的获利机会。
- 无套利规则：如果两个资产在未来产生完全相同的现金流，则它们今天的价格必须相等。
- 套利的条件：
  - 无风险。
  - 无净投资。
  - 严格正的收益。

## 远期合约的定价

- 对于无红利资产：

$$F_{0,T} = S_0(1 + rT)$$

- 对于支付离散红利的资产：

$$F_{0,T} = S_0(1 + rT) - FV(\text{Dividends})$$

- 对于支付连续红利的资产：

$$F_{0,T} = S_0 e^{(r-d)T}$$

## 套利策略

- 现金与持有套利 (Cash-and-Carry Arbitrage) :

$$\text{当 } F_{0,T} > S_0(1 + rT) - FV(\text{Dividends})$$

买入现货并做空远期。

- 反向现金与持有套利 (Reverse Cash-and-Carry Arbitrage) :

$$\text{当 } F_{0,T} < S_0(1 + rT) - FV(\text{Dividends})$$

卖空现货并做多远期。

## 外汇远期合约

- 覆盖利率平价关系 (Covered Interest Parity) :

$$F_{0,\tau} = \left( \frac{1 + r_{\text{usd}}(0, \tau)\tau}{1 + r_{\text{eur}}(0, \tau)\tau} \right) e_0$$

其中， $F_{0,\tau}$  为远期汇率， $e_0$  为现货汇率， $r_{\text{usd}}$  和  $r_{\text{eur}}$  分别为美元和欧元的利率。

## 小测验 (Quiz)

1. 哪种情况下进行现金与持有套利？  
答案：当  $F_{0,T} > S_0(1 + rT) - FV(\text{Dividends})$ 。
2. 哪种情况下进行反向现金与持有套利？  
答案：当  $F_{0,T} < S_0(1 + rT) - FV(\text{Dividends})$ 。
3. 远期价格与合约期限的关系是什么（假设利率为正）？  
答案：随着合约期限增加，远期价格上升。
4. 如果现货价格为 0.80/磅，1 年期无风险利率为 1%，但远期价格为 0.85/磅，你的策略是什么？  
答案：暂不采取行动，等待更多信息。

## 结论

- 远期合约价格通过无套利原则确定，与现货价格和其他因素（如利率、红利）紧密相关。
- 套利策略（如现金与持有套利和反向套利）有助于维持市场价格的均衡。
- 强约束条件下（如借贷利率差异），远期价格存在上、下限。
- 外汇远期价格的覆盖利率平价关系体现了汇率与利率之间的相互作用。

# 第16讲总结：期权投资组合

## 课程目标

- 探讨基本的保险策略，如保护性头寸（protective positions）。
- 研究期权组合策略，包括价差（spreads）、蝶式策略（butterfly spreads）和跨式策略（straddles）。
- 理解买入期权（call）、卖出期权（put）及远期合约之间的关系，即“看跌-看涨平价”（put-call parity）。
- 探索期权在构造特定收益曲线中的灵活性。

## 保护性策略

### 保护性卖权（Protective Put）

- 在持有基础资产的同时，买入一份卖权，以对冲资产价格下跌的风险。
- 示例：买入 Dollar Tree 股票（92.875/10.25 的溢价购买行权价为 95 的卖权，总成本为 103.125）。
- 组合结果显示：下行损失被限制，但回报也因此减少。

### 备兑买权（Covered Call）

- 持有基础资产并卖出一份买权，通过收取溢价减少潜在损失。
- 示例：买入 Dollar Tree 股票，同时以 11.25 的溢价卖出 95 的买权，总净支出为 81.625。

## 看跌-看涨平价

定义：

$$P_t + S_t = C_t + Ke^{-r(T-t)}$$

- 表明卖权、买权与远期合约之间的关系。
- 可用于识别套利机会或估算期权价格。

小测验：

- 问题：Best Buy 的期权，行权价为 80（<79.70），股票价格为 74，卖权价格为 6，买权价格为 10。套利机会是否存在？

## 组合策略

### 牛市价差（Bull Spread）

- 同时买入较低行权价的买权，卖出较高行权价的买权。
- 示例：买入 95 的买权（11.25），卖出 100 的买权（9.125），总成本 2.125。

### 蝶式价差（Butterfly Spread）

- 构造：买入 90 的买权（15），买入 100 的买权（10.375），卖出 2 份 95 的买权（20）。
- 适合认为价格不会大幅波动的投资者。

### 跨式策略（Straddle）

- 同时买入同一行权价的买权和卖权。
- 示例：行权价为 95 的买权（11.25）和卖权（10.25），总成本为 21.50。
- 适合认为股票价格将有较大波动的投资者。

小测验：

- 问题：哪类投资者会卖出跨式策略？  
答案：认为股票波动性较低，价格趋于稳定的投资者。

## 总结

- 学习了基本期权策略（如保护性卖权、备兑买权）及其保险功能。
- 理解了复杂组合（如价差、蝶式、跨式）的构造及适用场景。
- 掌握了看跌-看涨平价公式及其在套利中的应用。
- 通过期权灵活性构造特定收益曲线，满足客户需求或设计定制化金融工具。

# 第17讲总结：期权定价界限

## 课程目标

- 研究期权价格的上下界，从而理解期权的合理定价范围。
- 分析影响期权价格的关键因素，如内在价值、时间溢价以及分红的影响。
- 探讨美式期权和欧式期权的关系，以及“看跌-看涨平价”（Put-Call Parity, PCP）的扩展应用。

## 基本概念

- **内在价值（Intrinsic Value）**：如果现在立即执行期权，其价值为  $\max(S_t - K, 0)$ （看涨期权）或  $\max(K - S_t, 0)$ （看跌期权）。
- **时间溢价（Time Premium）**：期权未到期时的附加价值，反映了价格波动的可能性。
- **美式期权与欧式期权关系**：

$$C_t \geq c_t \quad \text{和} \quad P_t \geq p_t$$

美式期权由于可以提前行权，提供了额外的灵活性，因此价格高于或等于对应的欧式期权。

## 期权价格的界限

### 看涨期权（Call Option）

- 欧式期权下界：  $c_t \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0)$
- 欧式期权上界：  $c_t \leq S_t$
- 美式期权下界：  $C_t \geq \max(S_t - K, 0)$
- 美式期权上界：  $C_t \leq S_t$
- **结论**：在无分红的情况下，美式看涨期权不应早于到期行权，因此  $C_t = c_t$ 。

### 看跌期权（Put Option）

- 欧式期权下界：  $p_t \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0)$
- 欧式期权上界：  $p_t \leq Ke^{-r(T-t)}$
- 美式期权下界：  $P_t \geq \max(K - S_t, 0)$
- 美式期权上界：  $P_t \leq K$

### 看跌-看涨平价（Put-Call Parity, PCP）

- 基本公式：

$$p_t + S_t = c_t + Ke^{-r(T-t)}$$

- 扩展公式（考虑离散分红）：

$$c_t - p_t = S_t - PV(D) - PV(K)$$

- 扩展公式（考虑连续分红）：

$$c_t - p_t = S_t e^{-d(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

- 作用：帮助确定期权定价的合理性，找到套利机会。

## 分红对期权价格的影响

- 分红会导致标的资产价格下降：
  - 降低看涨期权的内在价值。
  - 增加看跌期权的内在价值。
- 美式看涨期权可能在分红支付前提前行权。
- 修改后的上下界：

$$c_t \geq S_t - PV(D) - Ke^{-r(T-t)}$$

$$p_t \geq Ke^{-r(T-t)} - S_t + PV(D)$$



## 小测验总结

- **问题1:** 如果美式看涨期权的时间溢价为正, 是否应该提前行权?  
**答案:** 否。
- **问题2:** 在标的资产价格波动较大时, 时间溢价会如何变化?  
**答案:** 时间溢价会增加。
- **问题3:** 美式看跌期权的合理上下界是什么?  
**答案:**  $\max(K - S_t, 0) \leq P_t \leq K$

## 总结

- 确定了欧式和美式期权价格的上下界, 这些界限独立于标的资产的未来价格分布。
- 在无分红情况下, 提前行权美式看涨期权并不优化。
- 分红的存在改变了期权定价界限, 同时影响了提前行权的决策。

## 第18讲总结: 二叉树期权定价模型

### 课程目标

- 学习如何通过二叉树模型推导期权的合理定价。
- 理解关键概念, 包括复制组合 (Replicating Portfolio) 和风险中性定价 (Risk-Neutral Valuation) 。
- 学习多时间步长情景下的期权估值方法。

### 基本概念

- **二叉树模型 (Binomial Model)** : 假设标的资产价格在每个时间点只能有两个可能值, 即上升 ( $u$ ) 或下降 ( $d$ ) 。

- **复制组合 (Replicating Portfolio)** :

$$\Pi = \Delta S + B$$

通过持有 $\Delta$ 单位的标的资产和 $B$ 的无风险投资, 复制期权在所有状态下的价值。

- **风险中性概率 (Risk-Neutral Probability)** :

$$\pi = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

在风险中性世界中, 投资者期望回报等于无风险利率。

### 单步模型

- 假设初始股票价格 $S_0 = 100$ , 在一年后, 股票价格可能变为 $S_u = 120$ 或 $S_d = 90$ 。
- 看涨期权的价值:

$$C_u = \max(S_u - K, 0), \quad C_d = \max(S_d - K, 0)$$

- 使用无套利原则计算期权初始价值 $C_0$ :

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS_0 - dS_0}, \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)e^{r\Delta t}}$$

$$C_0 = \Delta S_0 + B$$

- 示例结果:

$$C_0 = 3.63$$

### 多步模型

- 多步模型通过不断细分时间段实现更高的精度。
- 每个时间步的公式:

$$V_{i,j} = e^{-r\Delta t} (\pi V_{i+1,j+1} + (1 - \pi) V_{i+1,j})$$

- 示例: 三步二叉树模型计算最终的期权价值 $V_{0,0} = 10.822$ 。
- 模型确保二叉树“重组” (Recombination), 即 $ud = du$ 。

## 风险中性定价的含义

- 风险中性概率 $\pi$ 可被视为期权在不同状态下的风险中性概率。
- 在风险中性世界中，期权的预期回报等于无风险利率：

$$C_0 = \frac{E^{RN}[\text{Payoff}]}{1 + r_f}$$

- 实际上，风险中性假设是便于计算的工具，与投资者的真实风险偏好无关。

## 套利策略

- 如果市场期权价格高于理论价格：
  - 卖出期权，买入复制组合。
- 如果市场期权价格低于理论价格：
  - 买入期权，卖出复制组合。
- 示例：如果 $C_{\text{market}} = 4.0$ （高于理论价格3.63），套利策略的净收益为0.37。

## 总结

- 二叉树模型通过假设标的资产价格的有限变化，提供了简单有效的期权定价方法。
- 无套利原则和复制组合使我们能够精确估值期权。
- 风险中性概率使得期权价格可以解释为贴现后的预期收益，而无需知道投资者的实际风险偏好。
- 该模型可以扩展至多时间步长，并适用于更复杂的衍生品定价问题。

## 第19讲总结：扩展二叉树期权定价模型

### 课程目标

- 探讨多步二叉树模型在定价复杂期权中的应用：
  - 美式期权的定价。
  - 考虑标的资产分红的期权定价。
- 理解自融资组合（Self-Financing Portfolio）的概念及其在多步定价中的作用。

### 基本概念

- 自融资组合：复制组合在每个时间点都自动调整而无需额外注资，其价值在整个期限内完全复制期权的表现。
- 分红的影响：
  - 连续分红（Continuous Dividends）：分红建模为标的资产的连续收益率，调整风险中性概率 $\pi$ 。
  - 比例离散分红（Proportional Discrete Dividends）：分红按股价比例支付，调整二叉树节点处的价格。
  - 固定离散分红（Fixed Discrete Dividends）：分红为固定值，这种方法更真实但计算复杂。
- 美式期权：允许在到期前任何时间行权，其定价需同时考虑持有期权（Continuation Value）和提前行权的价值（Early Exercise Value）。

### 扩展模型计算步骤

#### 1. 构建二叉树：

- 固定参数： $r, \sigma, S_0, K, T$ 。
- 选择分红模型（连续或离散）。
- 计算时间步长 $\Delta t$ 、上升因子 $u$ 和下降因子 $d$ ：

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad u = e^{r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{r\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- 构建标的资产价格树:

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}$$

考虑离散分红的情况:

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j} (1 - D)^k$$

其中  $k$  表示已支付的分红次数。

## 2. 终点回溯:

- 在到期时间节点计算欧式期权的收益:

$$V_{N,j} = \max(S_{N,j} - K, 0) \quad (\text{看涨期权})$$

- 对于美式期权, 需比较持有价值与提前行权价值:

$$V_{i,j} = \max(e^{-r\Delta t}[\pi V_{i+1,j+1} + (1 - \pi)V_{i+1,j}], V_{x,i,j})$$

## 美式期权的定价

- 美式期权定价需在每个节点选择是否行权:

– 提前行权的价值:

$$V_{x,i,j} = \begin{cases} S_{i,j} - K & (\text{看涨期权}) \\ K - S_{i,j} & (\text{看跌期权}) \end{cases}$$

– 持有价值 (Continuation Value) :

$$V_{h,i,j} = e^{-r\Delta t}[\pi V_{i+1,j+1} + (1 - \pi)V_{i+1,j}]$$

- 早行权的优化时机:

- 对于美式看涨期权, 仅在分红日前提前行权才可能是最优。
- 分红导致股价下降, 使提前行权更具吸引力。

## 示例结果

- 标的资产:  $S_0 = 40$ ,  $K = 40$ ,  $T = 1$ 年,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $N = 50$ 。
- 分红: 季度离散分红, 每次为股价的1%。
- 结果:
  - 欧式期权价值:  $V_E = 4.556$ 。
  - 美式期权价值:  $V_A = 4.646$ 。
  - 美式期权溢价来自提前行权的灵活性。

## 总结

- 扩展的二叉树模型允许处理分红和美式期权的复杂情况。
- 自融资组合在多步定价中确保无套利并精确复制期权价值。
- 分红对期权定价的影响取决于其支付方式 (连续或离散)。
- 美式期权的早行权价值提供了额外的定价挑战。