# ベーシック圏論輪読会 第 6 回

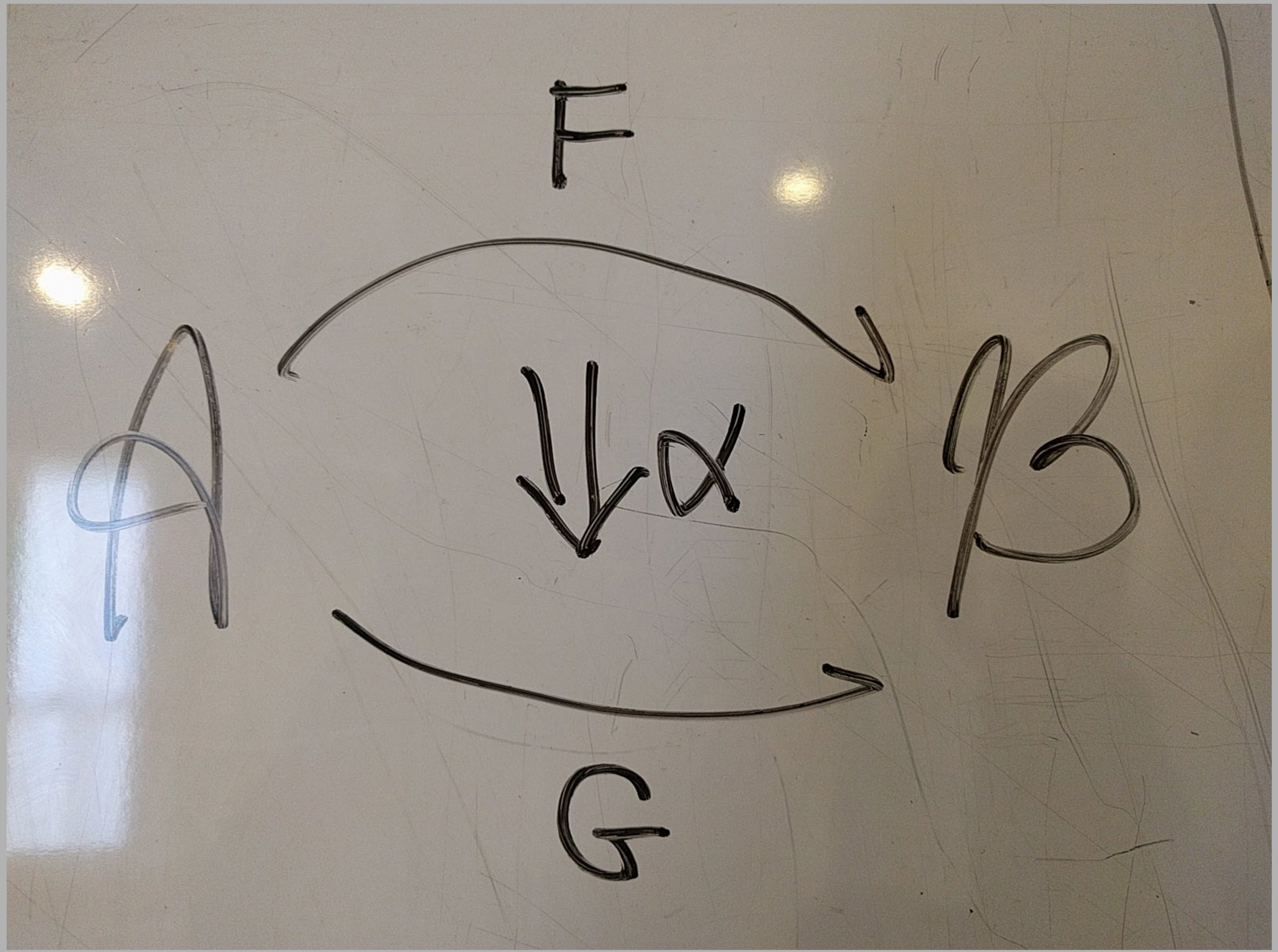
1.3 自然変換 p32-35

yorisilo

# 今日覚えて帰ってほしい事柄

- ☞ 自然変換はこわくない
- ☞ 自然変換のイメージ
- ☞ 自然変換の定義
- ☞ 自然変換の例 (**山場**)

# 自然変換とは



# 関手の間の射っぽいやつ

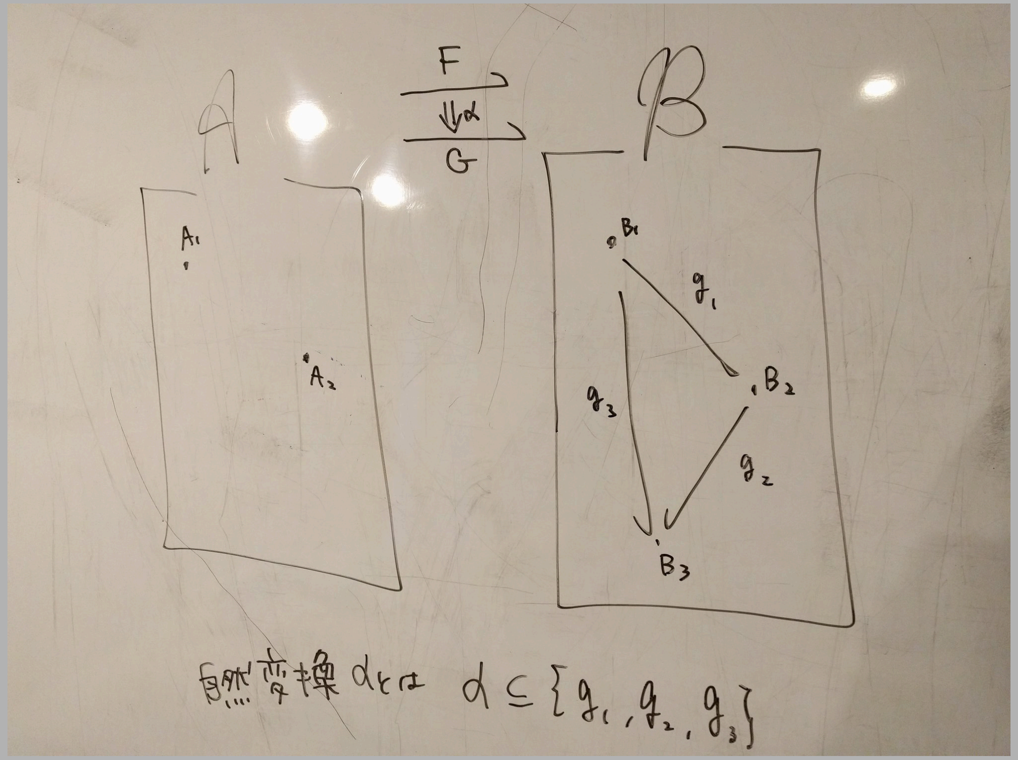
ただし、 圏の射の射の族は考えない。(とりあえず無視してくれ)

# (圏の間の射 = 関手)の射っぽいやつ

# 圏論は **射** が命

# 自然変換はこわくない

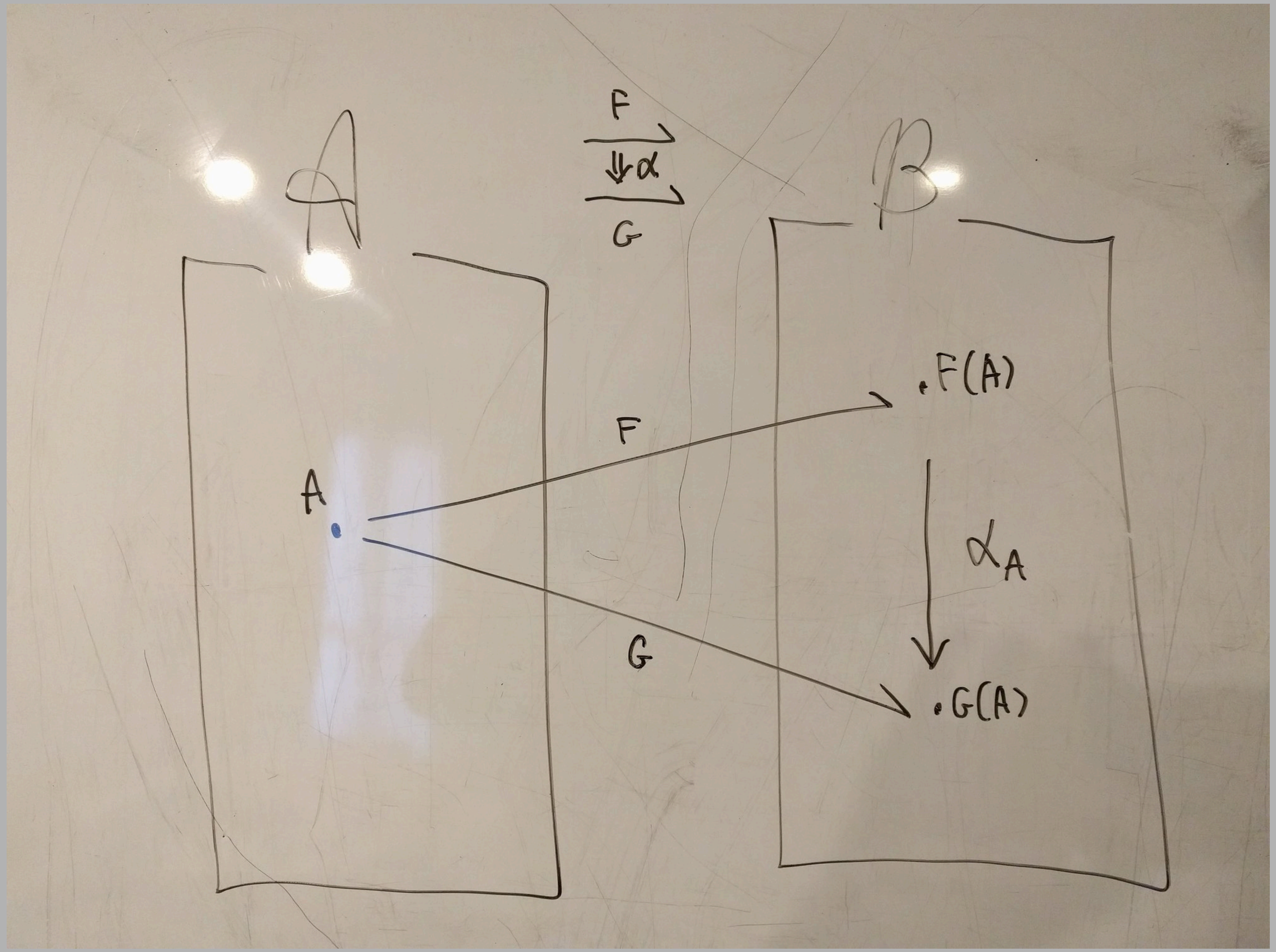
自然変換とは、関手の値域の射の一部



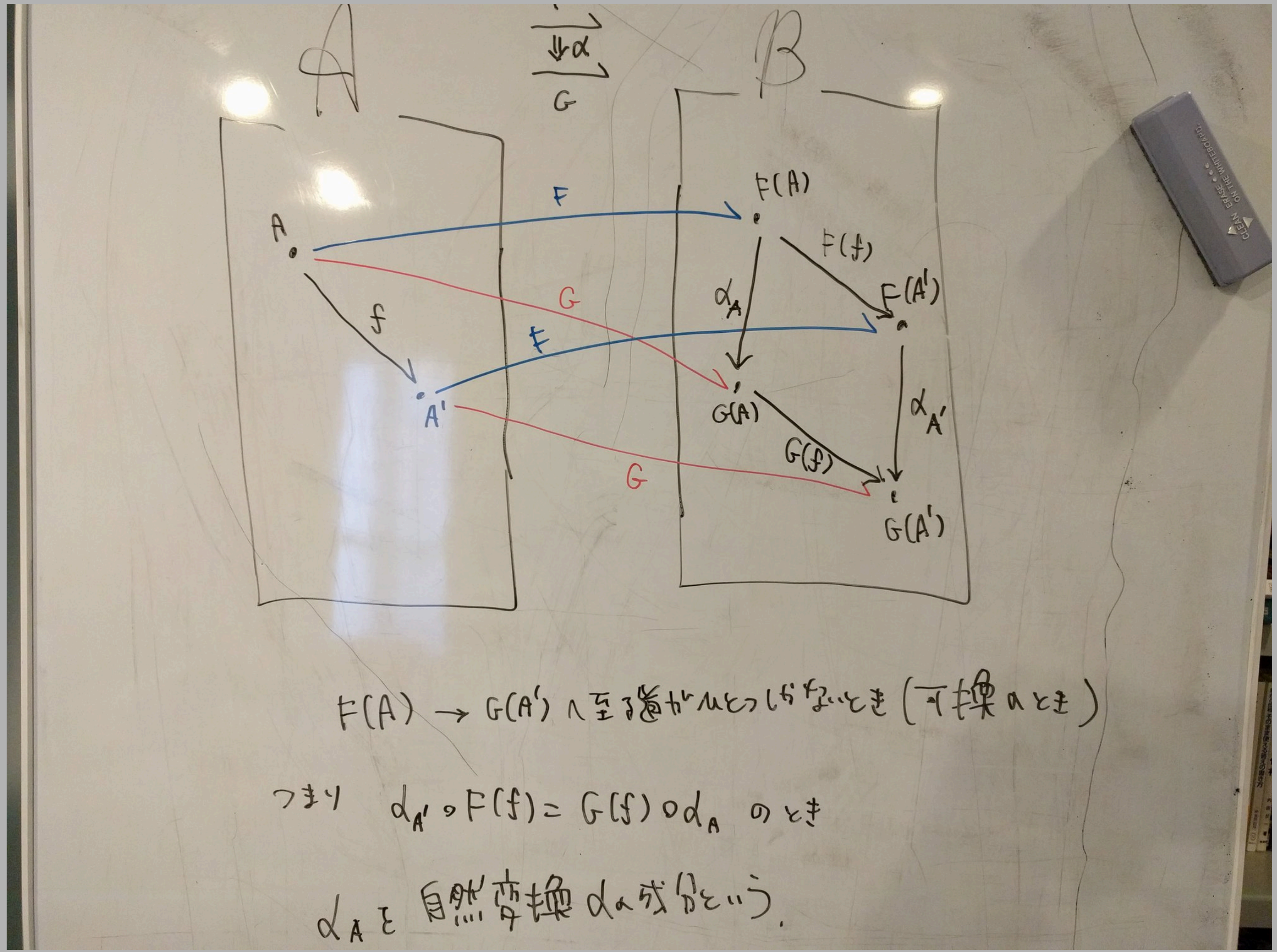

あ、恒等射を入れるの忘れてた。正確には、 $\alpha \subseteq \{g_1, g_2, g_3, 1_{g_1}, 1_{g_2}, 1_{g_3}\}$。
$ob(\mathscr{A})$ をインデックスとした射の族 $\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}$ が $\{g_1, g_2, g_3, 1_{g_1}, 1_{g_2}, 1_{g_3}\}$ に含まれていれば、それらは自然変換の条件を満たしているので、 $\alpha$ は自然変換である。

# 自然変換のイメージ

# 自然変換のイメージ



# 自然変換のイメージ



A
⇓α
G
B
F
F(A)
F(f)
F(A')
f
α_A
α_A'
G(A)
G(f)
G(A')
A'
F(A) → G(A') へ至る道がひとつしかないとき（可換のとき）
つまり α_A' ∘ F(f) = G(f) ∘ α_A のとき
α_A を 自然変換 α の成分という.

# 自然変換の定義

関手 $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$とする。
自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、

☞ $\alpha = \{\alpha_x \in Mor(\mathscr{B}) \mid x \in ob(\mathscr{A})\}$ という $\mathscr{B}$ の射の族[1][2]であり

☞ $\forall f \in Mor(\mathscr{A})$ について、可換になるもの ($\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$)

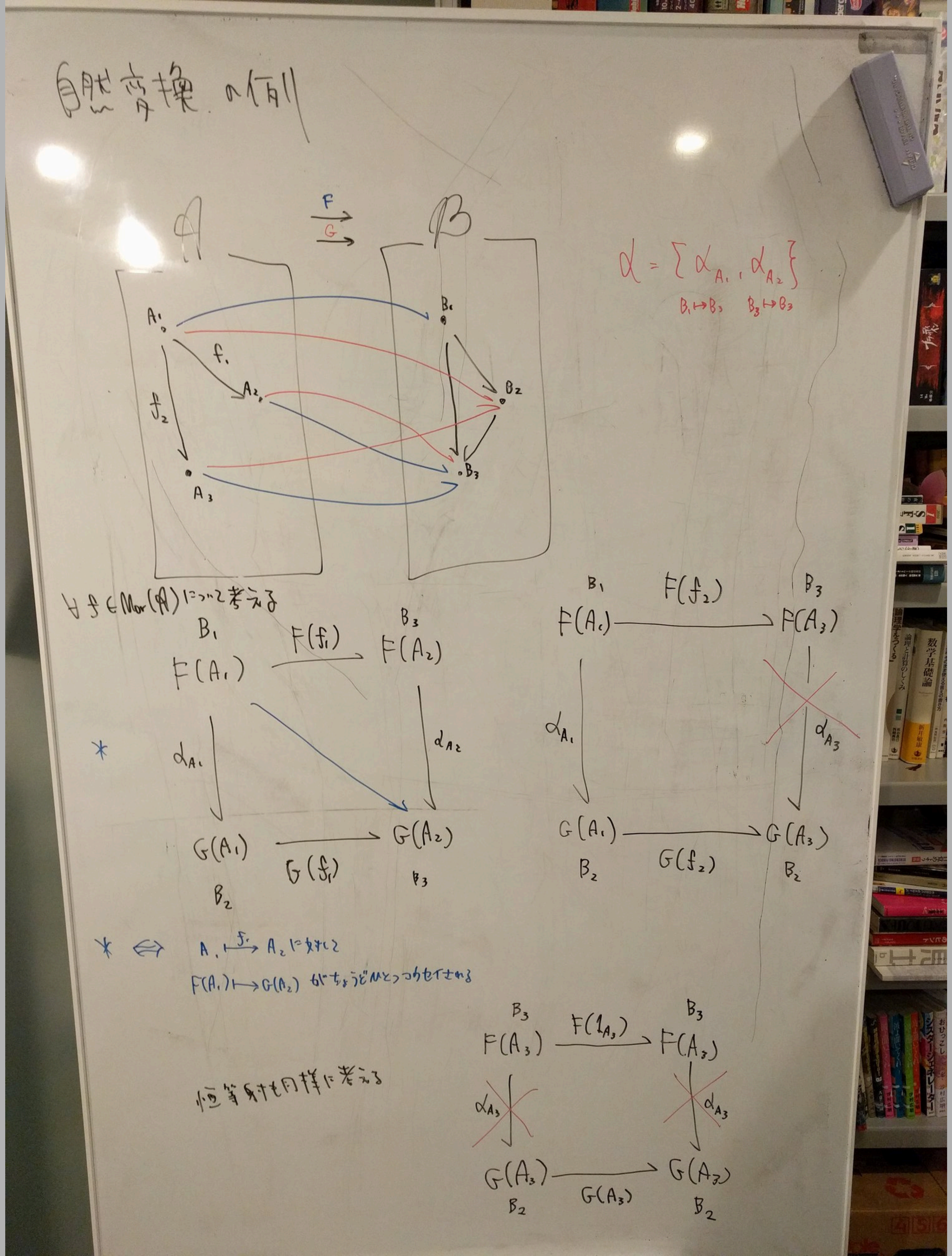
$$
\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\
{\scriptstyle \alpha_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{A'}} \\
G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(A')
\end{array}
$$

---

[1] $(F(A) \overset{\alpha_A}{\mapsto} G(A))_{A \in ob(\mathscr{A})}$ と同意

[2] $F(f) \overset{\alpha_f}{\mapsto} G(f)$ みたいなものは考えない。(関手の codomain の射の射の族は考えない)

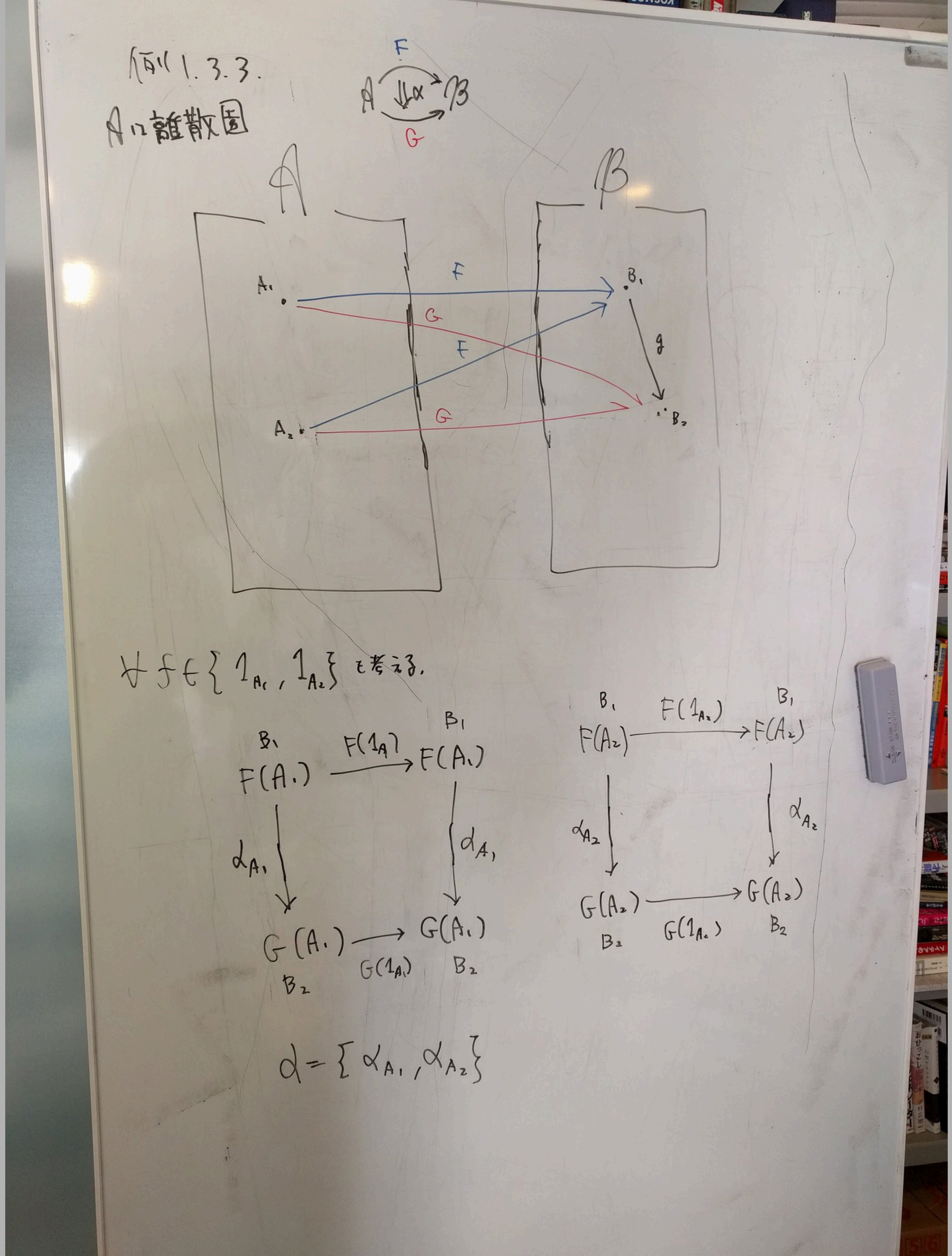
# 自然変換の例



自然変換の例
F
G
$\alpha = \{\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}\}$
$B_1 \mapsto B_3$ $B_3 \mapsto B_3$
∀f∈Mor(A)について考える
F(A₁) F(f₁) F(A₂)
G(A₁) G(f₁) G(A₂)
αA₁ αA₂
F(f₂) F(A₃) G(f₂) G(A₃) αA₃
A₁ ↦ A₂ に対して
F(A₁) ↦ G(A₂) がちょうどひとつコウセイされる
恒等射も同様に考える
F(1A₃)

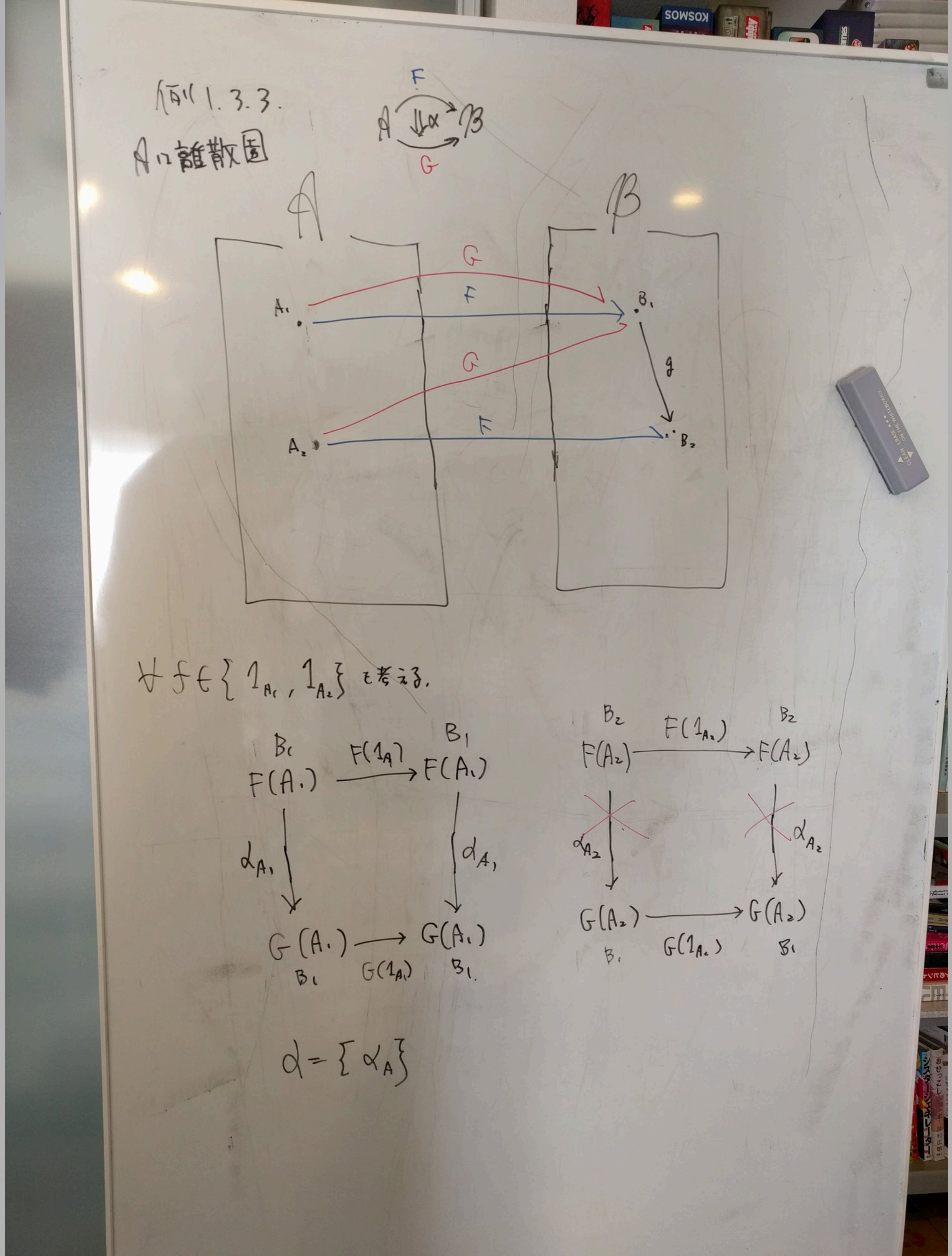
# 自然変換の例

## A が離散圏の場合その1



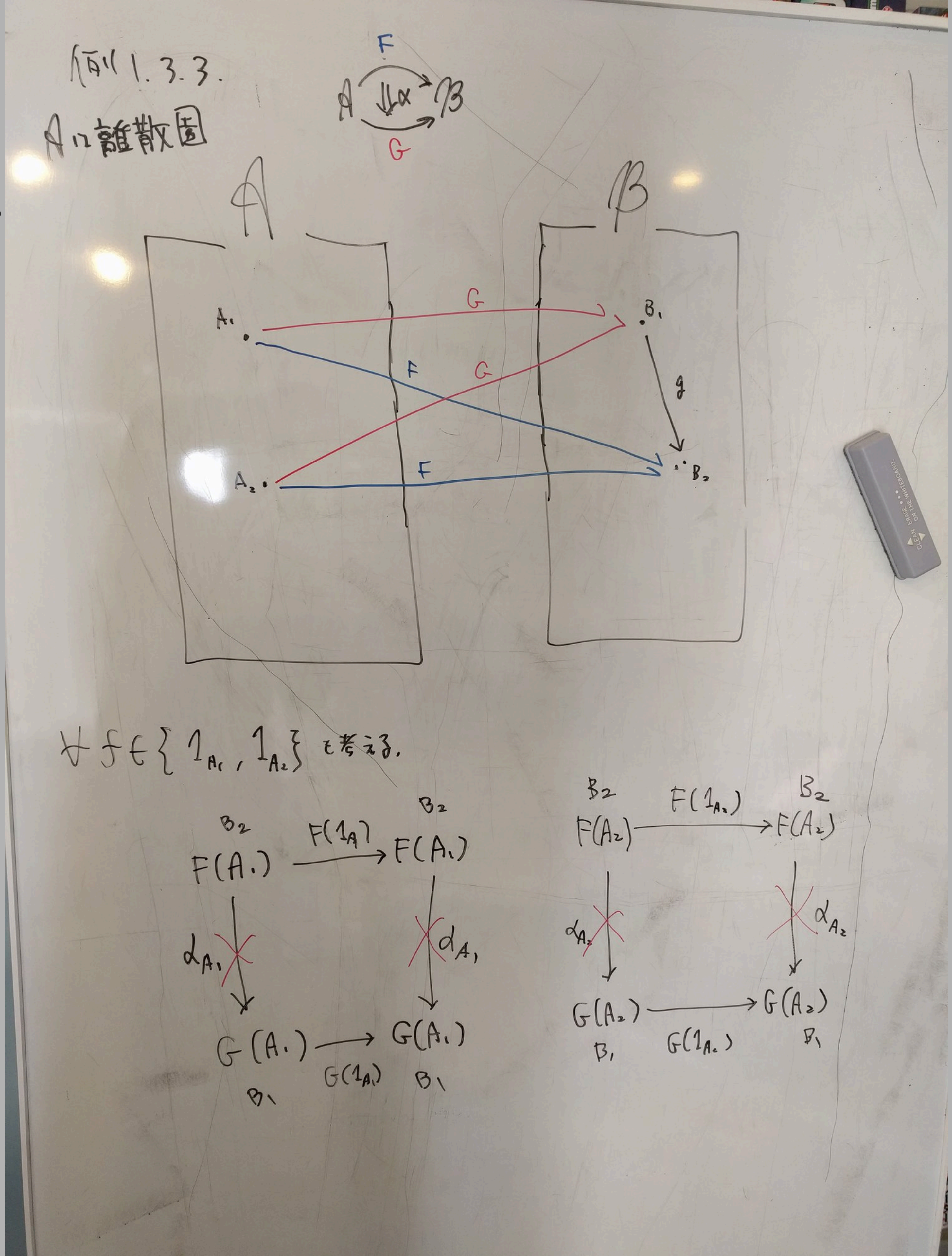
# 自然変換の例

## A が離散圏の場合その2



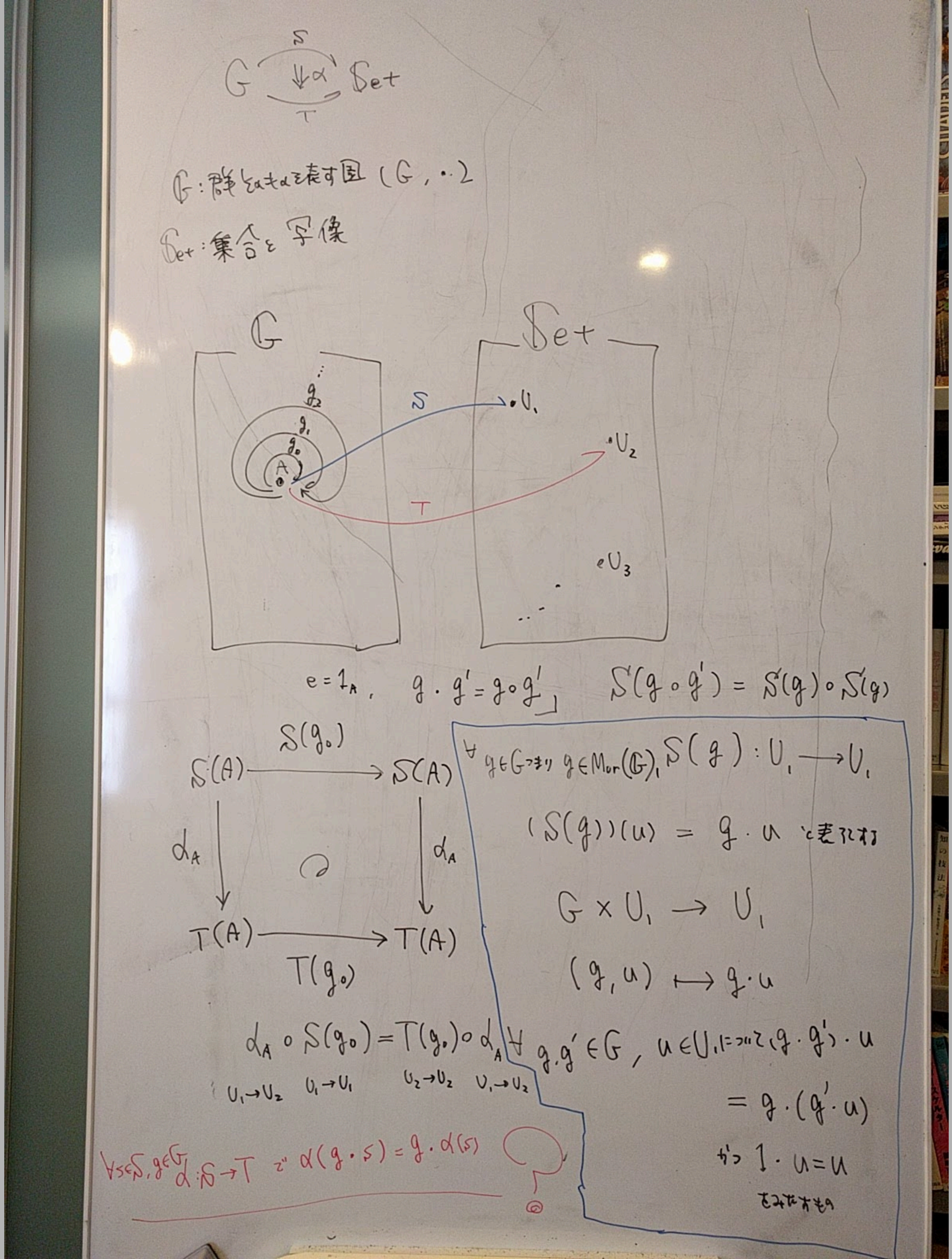
# 自然変換の例

## A が離散圏の場合その3



# 自然変換の例

## 群とSetのやつ



# 自然変換

やっぱりこわい 😱

# 参考文献

自然変換 via bitterharvest's diary

ベーシック圏論 - 圏・関手・自然変換 via cympfh.cc

# memo

# 作用について

☞ $T \times S \to S$ の形の写像を、$T$ の $S$ への 左作用という。

☞ $S \times T \to S$ の形の写像を、$T$ の $S$ への 右作用という。

# 関手の定義

☞ 定義域の対象すべてを移す

☞ 定義域の射すべてを移す

関手則

$$
\begin{aligned}
A \overset{f}{\mapsto} A' \overset{f}{\mapsto} A'' \text{であるような} \forall f \in \mathscr{A}(A, A'),\, g \in \mathscr{A}(A', A'') \text{ に対して、} F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \\
\forall A \in ob(\mathscr{A}) \text{ に対して、} F(1_A) &= 1_{F(A)}
\end{aligned}
$$