

ベーシック圏論輪読会 第6回

1.3 自然変換 p32-35

yorisilo

今日覚えて帰ってほしい事柄

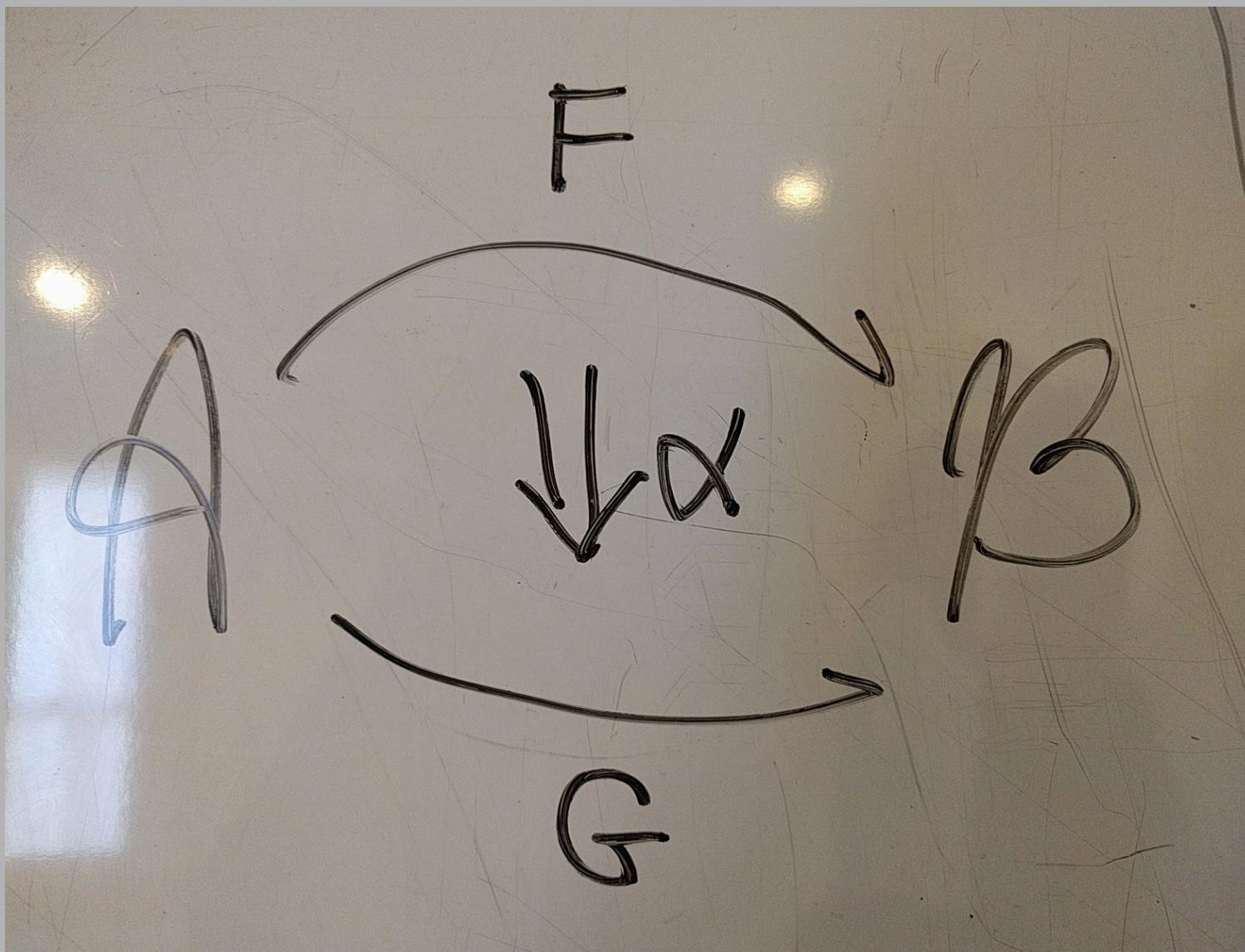
👉 自然変換はこわくない

👉 自然変換のイメージ

👉 自然変換の定義

👉 自然変換の例 (**山場**)

自然変換とは



関手の間の射っぽいやつ

ただし、囲の射の射の族は考えない。(とりあえず無視してくれ)

(巻の間の射 = 関手) の射っぽい

やつ

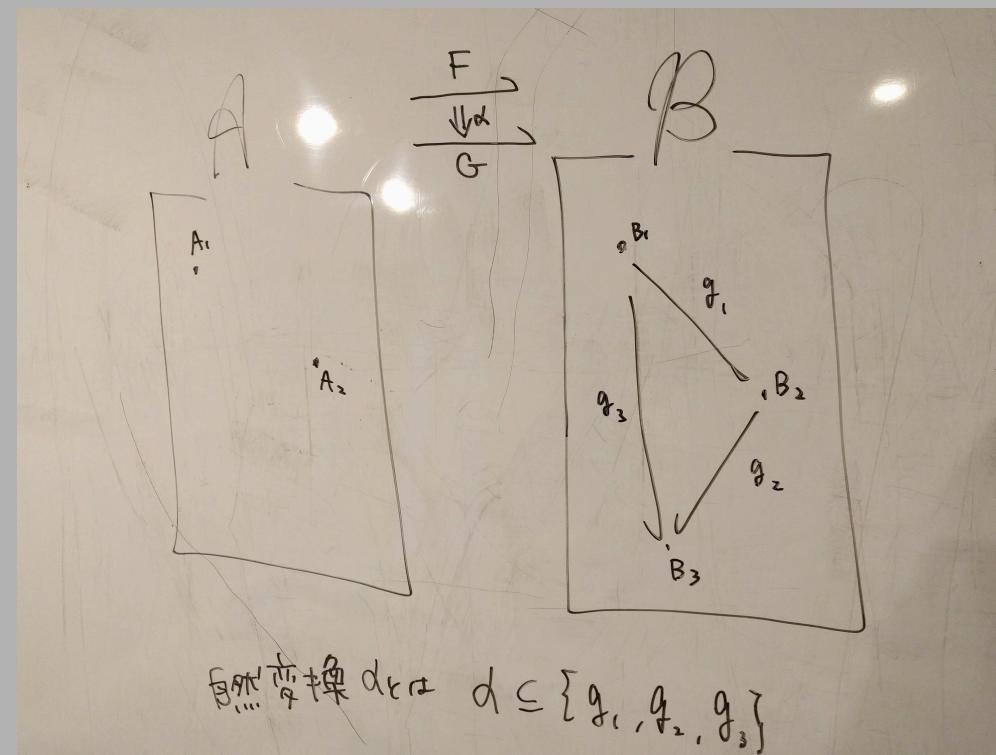
卷

三
論
語
彙
ま
よ

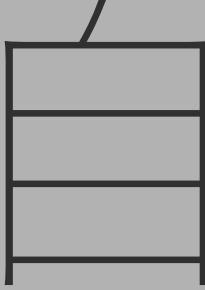
射
力
が
い
じ
き

自然変換はこわくない

自然変換とは、関手の値域の射の一部

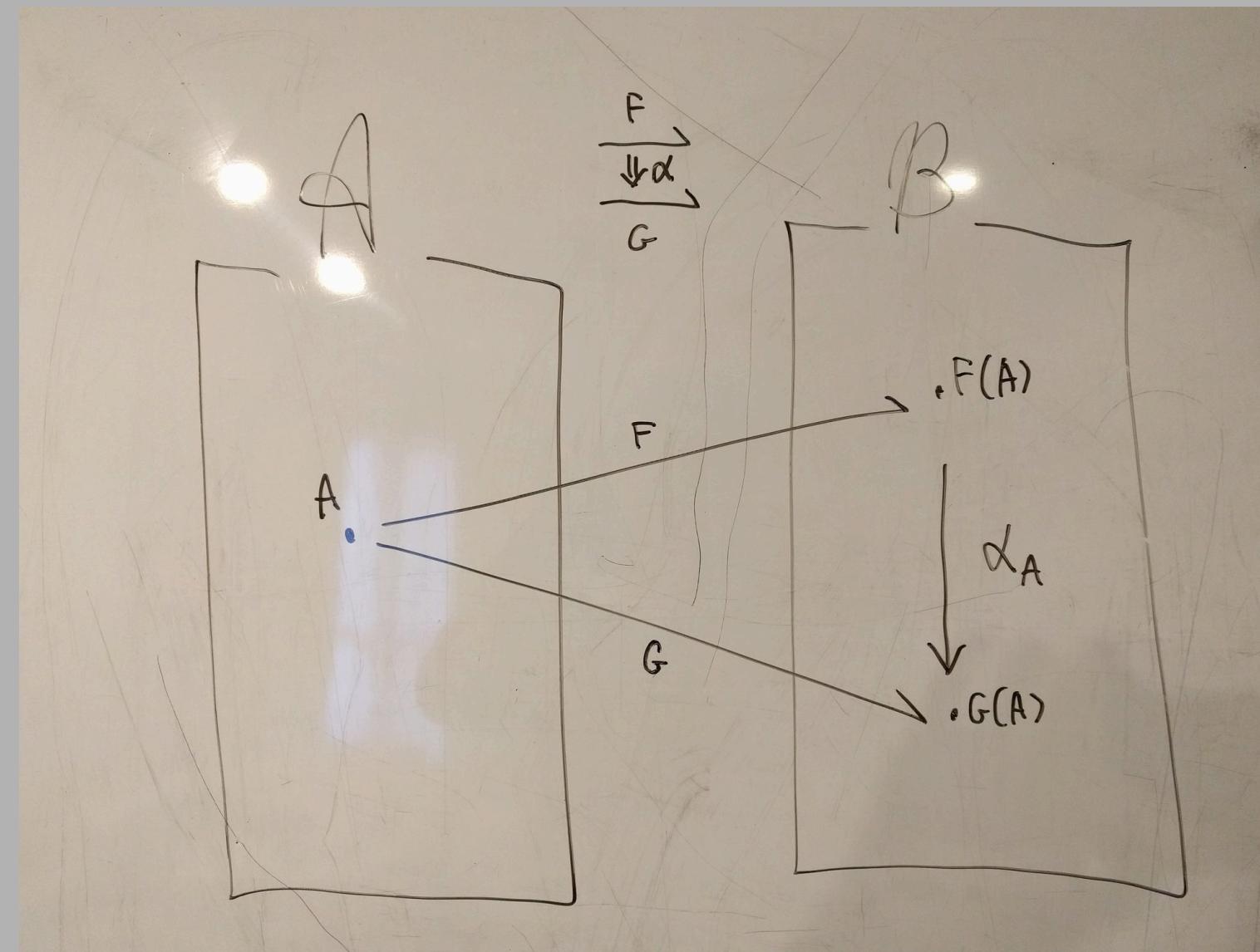


あ、恒等射を入れるの忘れてた。正確には、 $\alpha \subseteq \{g_1, g_2, g_3, 1_{g_1}, 1_{g_2}, 1_{g_3}\}$ 。
 $ob(\mathcal{A})$ をインデックスとした射の族 $\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}$ が $\{g_1, g_2, g_3, 1_{g_1}, 1_{g_2}, 1_{g_3}\}$ に含まれていれば、それらは自然変換の条件を満たしているので、 α は自然変換である。

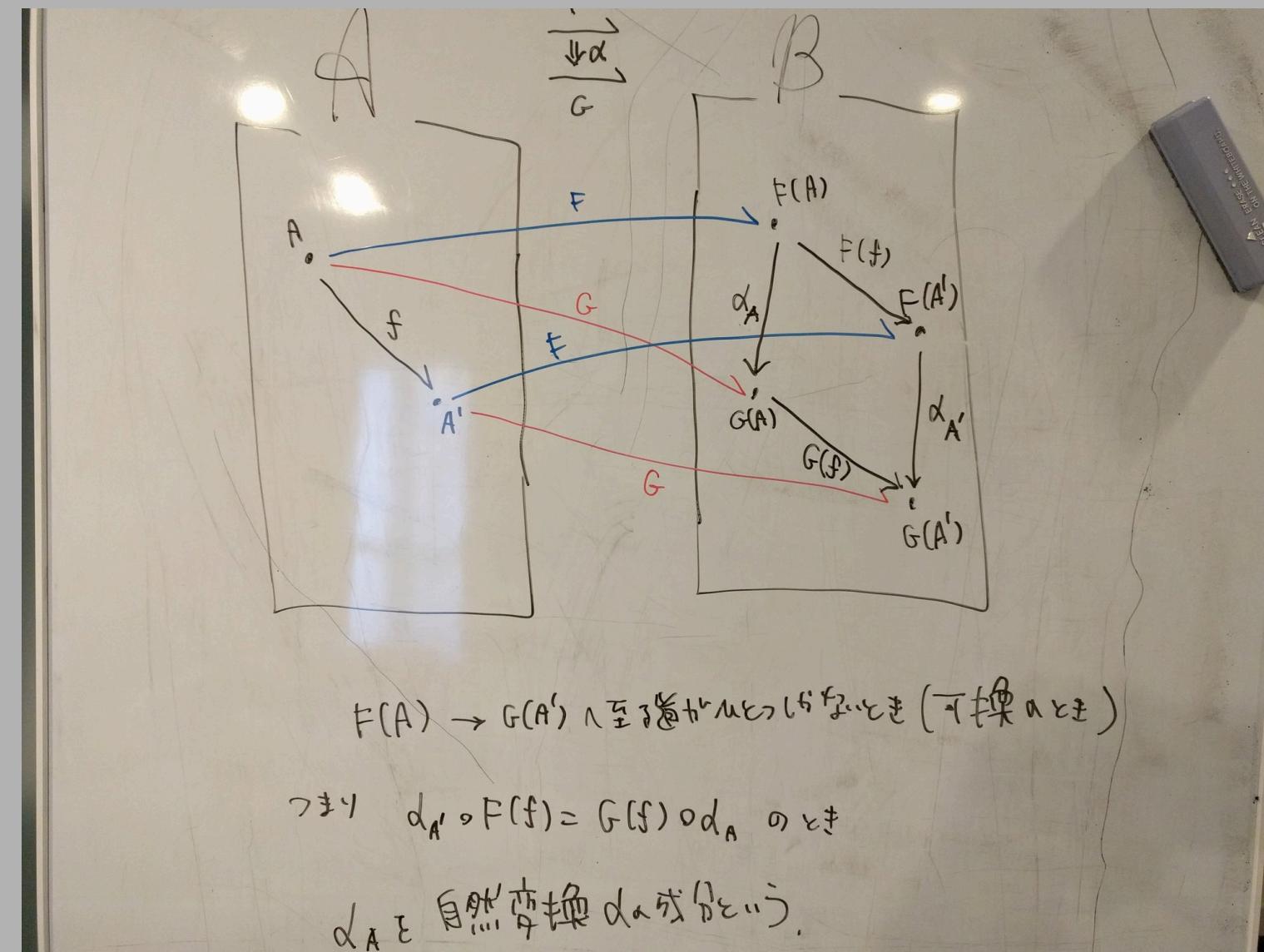


自然変換のイニシエーション

自然変換のイメージ



自然変換のイメージ



自然変換の定義

関手 $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ とする。

自然変換 $\alpha : F \rightarrow G$ とは、

☞ $\alpha = \{\alpha_x \in \text{Mor}(\mathcal{B}) \mid x \in \text{ob}(\mathcal{A})\}$ という \mathcal{B} の射の族¹²であり

☞ $\forall f \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ について、可換になるもの ($\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$)

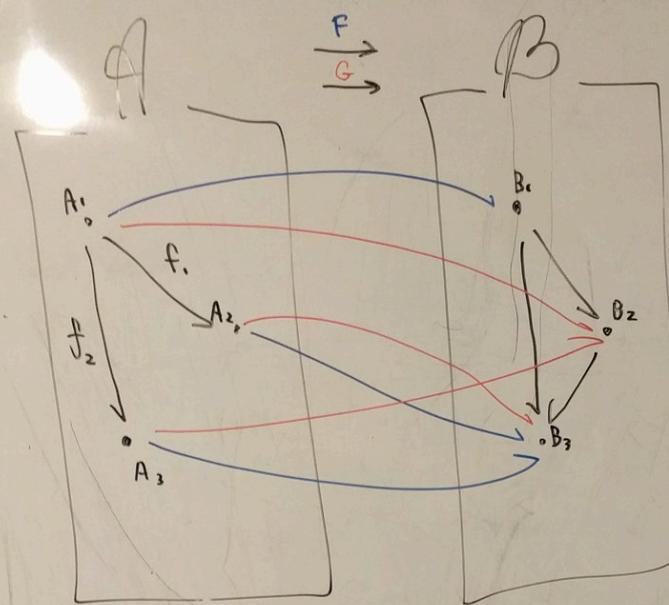
$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

¹ $(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A))_{A \in \text{ob}(\mathcal{A})}$ と同意

² $F(f) \xrightarrow{\alpha_f} G(f)$ みたいなものは考えない。(関手の codomain の射の族は考えない)

自然変換の例

自然変換の例



$$\alpha = \{\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}\}$$

$B_1 \mapsto B_3, B_3 \mapsto B_3$

$\forall f \in \text{Mor}(A)$ について考へる

$$B_1 \xrightarrow{F(f_1)} F(A_1) \quad B_3 \xrightarrow{F(f_3)} F(A_3)$$

$$G(A_1) \xrightarrow{G(f_1)} G(A_2) \quad B_2 \xrightarrow{B_3} B_3$$

$\alpha_{A_1} \downarrow \quad \downarrow \alpha_{A_2}$

$\ast \Leftrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2$ について

$F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} G(A_2)$ が恒等的であることを示す

恒等的同一性を示す

$$B_1 \xrightarrow{F(f_2)} F(A_1) \xrightarrow{F(\alpha_{A_1})} F(A_3) \quad B_3 \xrightarrow{B_2} B_2$$

$$G(A_1) \xrightarrow{G(f_2)} G(A_2) \quad B_2 \xrightarrow{G(A_3)} G(A_3) \quad B_2$$

$\alpha_{A_1} \downarrow \quad \downarrow \alpha_{A_3}$

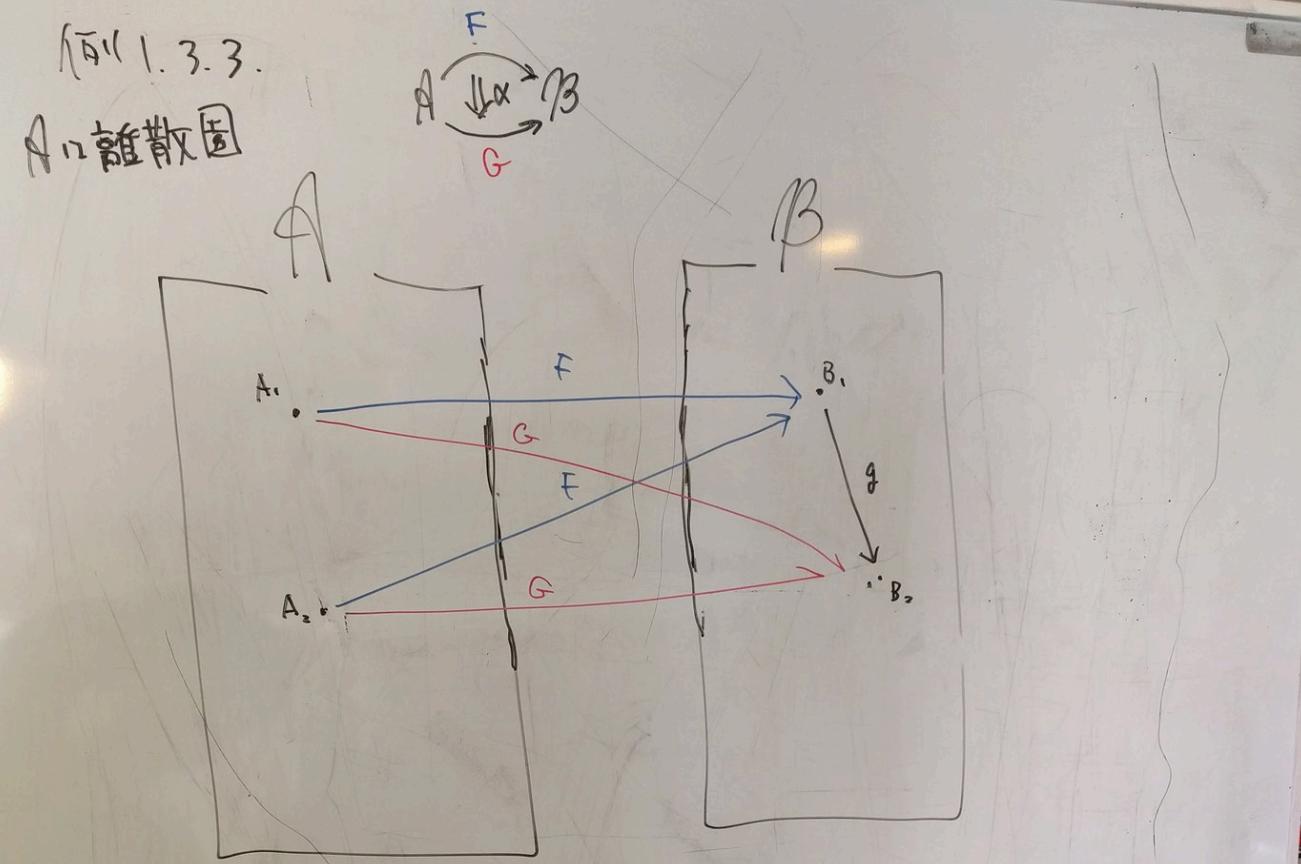
$$F(A_3) \xrightarrow{F(\alpha_{A_3})} F(A_3) \quad B_3 \xrightarrow{B_3} B_3$$

$$G(A_3) \xrightarrow{G(A_3)} G(A_3) \quad B_2 \xrightarrow{B_2} B_2$$

$\alpha_{A_3} \times \quad \times \alpha_{A_3}$

自然変換の例

A が離散圏の場合その1



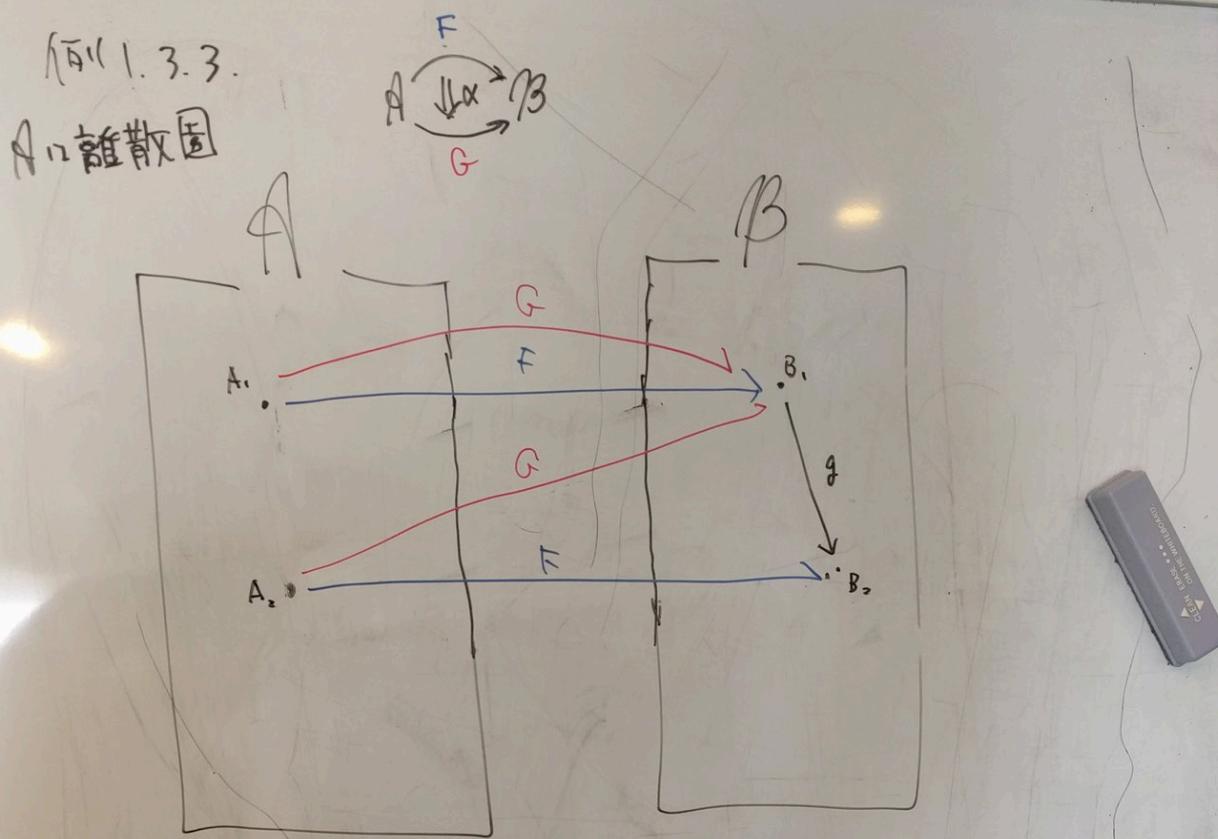
かつ $\{1_{A_1}, 1_{A_2}\}$ を考えよ。

$$\begin{array}{ccc}
 B_1 & \xrightarrow{F(1_A)} & B_1 \\
 F(A_1) & \downarrow d_{A_1} & \downarrow d_{A_2} \\
 G(A_1) & \xrightarrow{G(1_A)} & B_2 \\
 B_2 & & B_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 B_1 & \xrightarrow{F(1_{A_2})} & B_1 \\
 F(A_2) & \downarrow d_{A_2} & \downarrow d_{A_2} \\
 G(A_2) & \xrightarrow{G(1_{A_2})} & B_2 \\
 B_2 & & B_2
 \end{array}$$

$$\alpha = \{\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}\}$$

自然変換の例

A が離散圏の場合その2



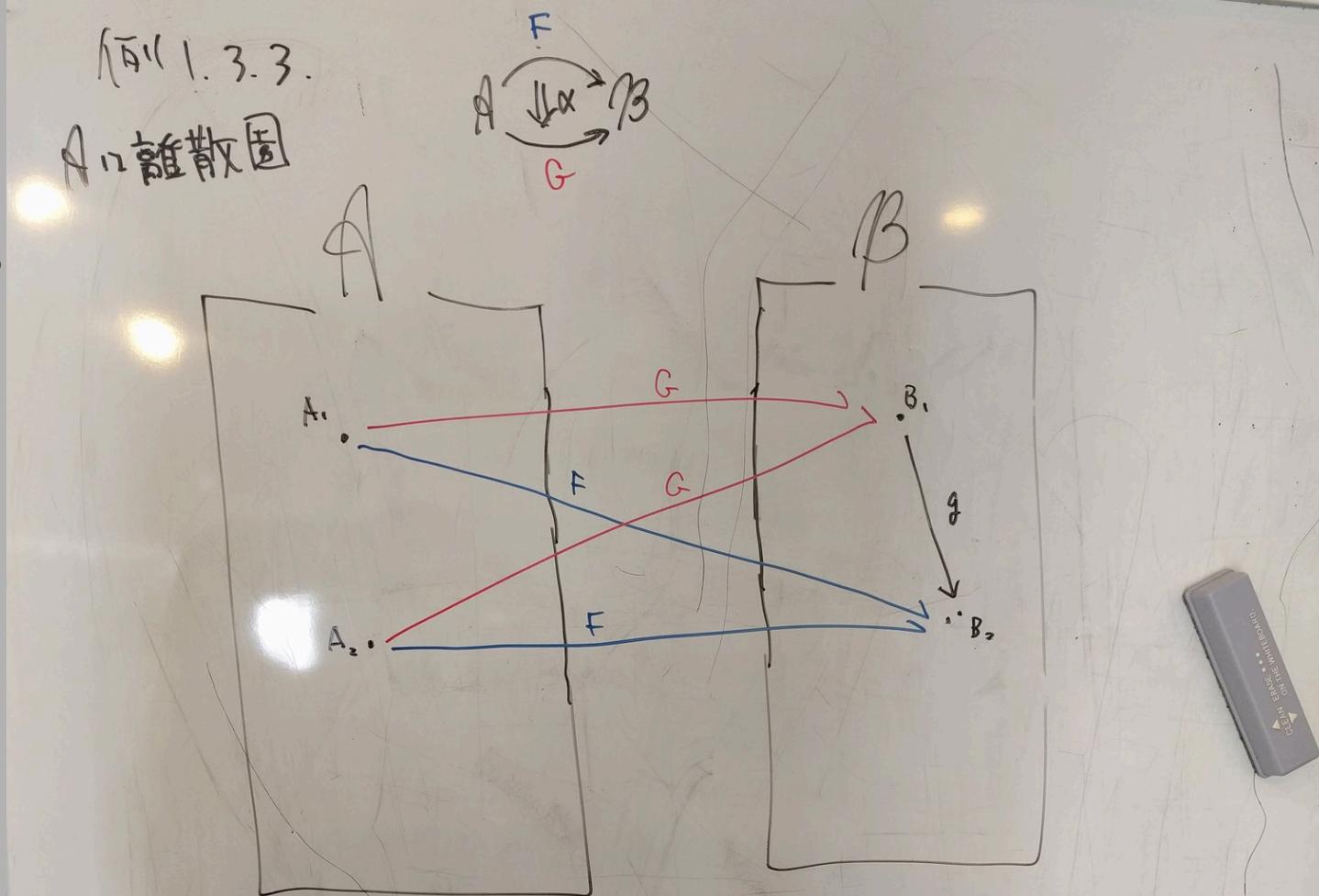
$\{f \in \{1_{A_1}, 1_{A_2}\} \text{ で}\}$

$$\begin{array}{ccc}
 B_1 & \xrightarrow{F(1_A)} & B_1 \\
 F(A_1) & \xrightarrow{\quad} & F(A_1) \\
 d_{A_1} \downarrow & & \downarrow d_{A_1} \\
 G(A_1) & \xrightarrow{G(1_A)} & B_1 \\
 B_1 & & B_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 B_2 & \xrightarrow{F(1_{A_2})} & B_2 \\
 F(A_2) & \xrightarrow{\quad} & F(A_2) \\
 \cancel{d_{A_2}} \downarrow & & \cancel{d_{A_2}} \downarrow \\
 G(A_2) & \xrightarrow{G(1_{A_2})} & B_2 \\
 B_2 & & B_2
 \end{array}$$

$$\alpha = \{\alpha_A\}$$

自然変換の例

A が離散圏の場合その3



$\alpha, \beta \in \{1_{A_1}, 1_{A_2}\}$ を考えよ。

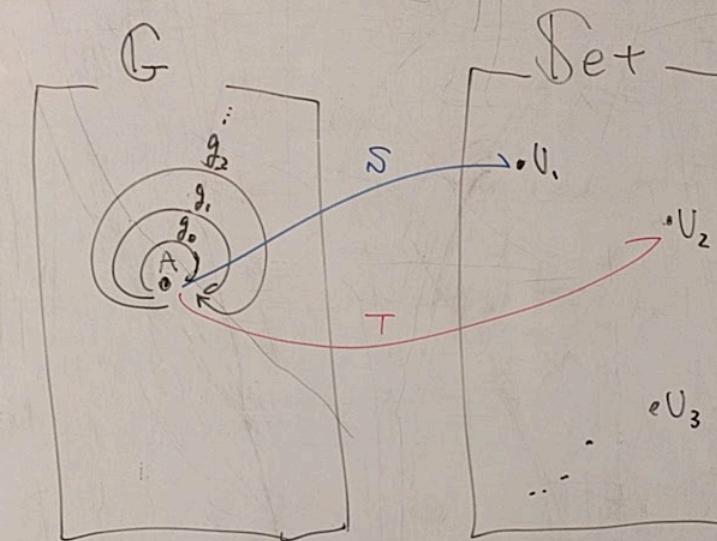
$$\begin{array}{ccc}
 & B_2 & \\
 F(A_1) & \xrightarrow{F(1_{A_1})} & F(A_2) \\
 \downarrow \alpha_{A_1} \times & & \downarrow \alpha_{A_2} \times \\
 G(A_1) & \xrightarrow{G(1_{A_1})} & G(A_2) \\
 & B_1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & B_2 & \\
 F(A_2) & \xrightarrow{F(1_{A_2})} & F(A_1) \\
 \downarrow \alpha_{A_2} \times & & \downarrow \alpha_{A_1} \times \\
 G(A_2) & \xrightarrow{G(1_{A_2})} & G(A_1) \\
 & B_1 &
 \end{array}$$

自然変換の例 群とSetのやつ

$$G \xrightarrow{\alpha} \text{Set}$$

G : 群を表す図 (G, \cdot)

Set : 集合を写像



$$e = 1_A, \quad g \cdot g' = g \circ g' \quad S(g \circ g') = S(g) \circ S(g')$$

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{S(g_0)} & S(A) \\ d_A \downarrow & \curvearrowright & \downarrow d_A \\ T(A) & \xrightarrow{T(g_0)} & T(A) \end{array}$$

$\forall g \in G, \forall g' \in \text{Mor}(G), S(g) : U_1 \rightarrow U_1$
 $(S(g))(u) = g \cdot u$ 表記
 $G \times U_1 \rightarrow U_1$
 $(g, u) \mapsto g \cdot u$

$$d_A \circ S(g_0) = T(g_0) \circ d_A \quad \forall g, g' \in G, u \in U_1 \vdash (g \cdot g') \cdot u = g \cdot (g' \cdot u)$$

$U_1 \rightarrow U_2 \quad U_1 \rightarrow U_1 \quad U_2 \rightarrow U_2 \quad U_1 \rightarrow U_2$

$$\forall s \in S, g \in G \quad d : S \rightarrow T \quad \alpha(g \cdot s) = g \cdot \alpha(s)$$

$$g \cdot 1 \cdot u = u$$

左端

自然交換

やつぱりこわい



参考文献

自然変換 via bitterharvest's diary

ベーシック圏論 - 圈・関手・自然変換 via cympfh.cc

mein

作用について

- ☞ $T \times S \rightarrow S$ の形の写像を、 T の S への 左作用という。
- ☞ $S \times T \rightarrow S$ の形の写像を、 T の S への 右作用という。

関手の定義

⇒ 定義域の対象すべてを移す

⇒ 定義域の射すべてを移す

関手則

$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f} A''$ であるような $\forall f \in \mathcal{A}(A, A')$, $g \in \mathcal{A}(A', A'')$ に対して、 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$\forall A \in ob(\mathcal{A})$ に対して、 $F(1_A) = 1_{F(A)}$