PREPAS INTERNATIONALES 2020/2021

Contrôle N°1 de Mathématiques (1h30) 21/11/2020

Exercice 1/8pts Soient p et q deux propositions mathématiques.

1. A l'aide d'une table de vérité, montrer que $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\rceil p \vee q)$. **1,5pt**
2. En déduire une proposition équivalente à $\rceil (p \Longrightarrow q)$. **1,5pt**
3. Pour $(p) : 2^{2020} < 2020^2$ et $(q) : \dfrac{357}{336}$ est décimal, compléter le tableau par les valeurs de vérité :

p	q	$\rceil p \wedge q$	$p \Longleftrightarrow q$	$\rceil p \vee (q \Longrightarrow p)$	$\rceil q \wedge (q \Longleftrightarrow \rceil p)$

$\mathbf{0,5pt \times 6 = 3pts}$

4. Donner la valeur de vérité en prouvant; puis la négation des propositions (r) et (s). **2pts**

$$(r) : \forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \leq 0 \text{ ou } x^3 \geq 0\right) \text{ et } (s) : \exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \leq 0 \text{ ou } x^3 \geq 0\right)$$

Exercice 2/7pts

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a **2pts**

$$1\,(1!) + 2\,(2!) + ... + n\,(n!) = (n+1)! - 1.$$

2. Sacant que π est irrationnel, montrer par l'absurde que $\dfrac{\pi}{2\pi + 1}$ n'est pas rationnel. **2pts**
3. On pose $f(x) = x^2 - x + 1 - |x - 1|$.
   (a) Montrer que pour $x \leq 1$, on a $f(x) = (x-1)^2 + 1$. **1pt**
   (b) Par disjonction des cas, en déduire que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **2pts**

Exercice 3/6pts On pose

$$A = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{p} : n \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que $\dfrac{1}{2} \in A$. **1pt**
2. Montrer que $\forall x \in A, x \leq 1$. **1pt**
3. Montrer que $\forall x \in A, \exists a \in A / a < x$. **1pt**
4. Vérifier que la somme S et le produit P sont à termes télescopiques et les calculer. **1,5pt+1,5pt=3pts**

$$S = \sum_{k=10}^{2020} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$P = \prod_{k=10}^{2020} \frac{(k)^2}{(k+2)^2}$$