PREPAS INTERNATIONALES 2020/2021

Contrôle d'analyse N°6 (2h) Date : 08/05/2021

Exercice 1/11pts

1. Calculer chacune des intégrales suivantes : **1,5pt×4=6pts**

$$I_1 = \int_0^2 x\left|x-1\right| dx \qquad I_3 = \int_0^{\ln(2)} x^2 e^{-x} dx$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx \qquad I_4 = \int_0^1 \arcsin\left(x\right) dx$$

2. On donne

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1+2\sin x} dx \text{ et } J = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$$

   Calculer I et J par l'un des changements de variable $u = \sqrt{x}$ ou $t = \sin x$.**2pts×2=11pts**

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+2k)^2}$. **2pts**

Exercice 2/4pts

On pose

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n \left(1-x\right)^m dx \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $I_{n+m,0}$. **1pt**
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n,m} = \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$. **1pt**
3. En déduire par récurrence sur m que $I_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m)} I_{n+m,0}$. **1pt**
4. En déduire la valeur exacte de $I_{2021,2022}$. **1pt**

Exercice 3/4pts Soit la fonction g définie par :

$$g\left(x\right) = \arcsin\left(1-2x^2\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g. **1pt**
2. Calculer la dérivée de g. **1pt**
3. Montrer que $\forall x \in \left]0,1\right[$, $g'\left(x\right) = a\left(\arcsin x\right)'$ où a est un réel à déterminer. **1pt**
4. En déduire une expression plus simple de $g\left(x\right)$ sur $[0,1]$; puis sur $[-1,0]$. **1pt**