



Première Année

Devoir d'Algèbre

Mercredi 20 Janvier 2021

Durée : 1 heure

**Exercice 1** :(7pts)

Soit  $P$  le polynôme  $P = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 4X \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Déterminer les racines de  $P$ .
2. En déduire la décomposition de Gauss de  $P$ .
3. On pose  $F = \frac{X+1}{P}$ .

3.1. Écrire, en justifiant, la forme de la décomposition de  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

3.2. Donner alors la décomposition de  $F$  en éléments simples.

**Exercice 2** :(5pts)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a, b, c$  des réels. Donner la négation des assertions suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ .
2.  $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \leq A, f(x) \leq M$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Rightarrow x > 0$ .
4.  $a \leq -2$  ou  $a \geq 3$ .
5.  $a \leq 5$  et  $a > -1$ .

**Exercice 3** :(8pts)

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  et dans  $\mathbb{C}(X)$  les fractions rationnelles :

$$F = \frac{1}{X^6 - 1} \text{ et } G = \frac{1}{X^5 - 1}.$$