

Exercice 1/4pts Soit l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y' - y = 2x^3 + x.$$

1. Résoudre (E) sur les intervalles de \mathbb{R}^* . **2pts**
2. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}^* . **1pt**
3. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} . **1pt**

Exercice 2/5pts On considère

$$(E') : x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

1. Résoudre (E') en la ramenant sous la forme $y' = f(x, y)$ où f est homogène. **2pts**
2. On pose $z = y^2$.
 - (a) Montrer que (E') devient $(E'') : axz' + bz = cx^2$ où a , b et c sont des réels à déterminer. **1,5pt**
 - (b) Résoudre (E'') et en déduire les solutions de (E') . **1,5pt**

Exercice 3/6pts Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

1. Déterminer les développements limités d'ordre 4 de $\cos x$ et $\sqrt{1-x^2}$. **2pts**
2. En déduire la limite de $f(x)$ en 0. **2pts**
3. Montrer que la courbe $(C) : y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une asymptote horizontale dont on donnera la position par rapport à (C) . **2pts**

Exercice 4/5pts On considère les courbes

$$(C) : \begin{cases} x &= t + \frac{1}{t} \\ y &= t + \frac{1}{2t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*$$

1. Etudier les branches de (C) . **2pts**
2. Dresser le tableau des variations conjointes de x et y . **2pts**
3. Tracé (C) . **1pt**