PRÉPAS INTERNATIONALES *Classe :* **1ère Année**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES *Année scolaire :* **2020-2021**

DEVOIR SURVEILLE D'ANALYSE *Durée* : **1h 30**
(Samedi 19 décembre 2020)

Exercice 1: [8 points]

Une liasse de billets de banque vient d'être dérobée par l'un des quatre membres du personnel d'une agence de banque, présents le jour du vol. Le directeur de cette agence interroge les quatre membres du service soupçonnés du vol : Antoine, Bernard, Christine et Dominique. Dominique accuse Bernard. Bernard accuse Christine. Antoine dit être innocent. Christine affirme que Bernard est un menteur.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Il y a au moins un menteur parmi les 4 membres soupçonnés.

B. Si on sait qu'il n'y a qu'un seul menteur alors le voleur est Bernard.

C. Si on sait qu'il y a 3 menteurs alors le voleur est Antoine.

D. Si on connaît le nombre de menteurs on peut donner le nom du voleur.

Pour chaque item, signaler avec justification s'il est vrai ou faux. *Une réponse exacte et bien justifiée rapporte 2 points, une réponse exacte et mal justifiée rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point, Une réponse inexacte avec tentative de justification enlève 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à 0.*

Exercice 2: [3 points]

1) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. **1,5pt**

2) calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels a et b strictement positifs tels que a^b soit rationnel. **1,5pt**

Exercice 3: [9 points]

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante et soit $A = \left\{x \in [0,1], f(x) \leq x\right\}$.

1) Montrer que A admet une borne inférieure que l'on notera α. **1pt**

2) Montrer que l'on a $\alpha \in [0,1]$. **1pt**

3) Montrer que $f(\alpha)$ est un minorant de A. En déduire que $\alpha \in A$. **2pt**

4) On suppose $\alpha = 0$. Montrer que $f(0) = 0$. **2pt**

5) On suppose $\alpha \in]0,1]$. Montrer que le nombre $f(\alpha)$ est un majorant de $[0,\alpha[$. **2pt**

6) En déduire que $f(\alpha) = \alpha$. **1pt**