Première Année

Devoir d'Algèbre

Samedi 8 Mai 2021 Durée : 2 heures

Exercice 1 :(2pts)

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1,0,t), (1,1,t), (t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :(5pts)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? Justifier.

a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=0\}$

b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=2\}$

c) $E_3 = \{(x,y \in \mathbb{R}^2; y=x^2\}$

d) $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4; x=y=2z=4t\}$.

Exercice 3 :(5pts)

Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, on considre l'ensemble $F=\{(x,y,z,t) \in E/x=y \text{ et } x-y+t=0\}$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et déterminer une base de F ;

b) Déterminer un supplémentaire de F dans E ;

c) Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

Exercice 4 :(5pts)

Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(x+y+z, -x+2y+2z)$.

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer $Kerf$ et Imf

3) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

Exercice 5 :(3pts)

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$