PI - PRÉPAS-INTERNATIONALES INGÉNIEURIE GÉNÉRALE

Première Année

Devoir d'Algèbre

Samedi 19 Juin 2021 Durée : 3 heures

Exercice 1 :(2pts)

Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Exercice 2 :(5pts)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Exprimer les déterminants sous la forme la plus factorisée possible :

1) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 3 :(4pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle inversible ?

2) Si A est inversible, déterminer l'inverse de A : A^{-1}.

Exercice 4 :(5pts)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre en discutant suivant les valeurs de a et b le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = & 1 \\ x + aby + z = & b \\ x + by + az = & 1 \end{cases}$$

Exercice 5 :(4pts)

$E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$. f est l'endomorphisme de matrice A dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer son polynôme caractéristique.

2) Calculer ses valeurs propres.

3) Donner une base des sous-espaces propres.

4) Décider si f est diagonalisable. Justifier.