PREPAS INTERNATIONALES *Classe :* **Ingé1**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES *Année académique :* **2020-2021**

ANALYSE *Durée* : **2 heures**

(Samedi 20 mars 2021)

Par Dr Hugue Tchantcho

Exercice 1 : [**5 points**]

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses?

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Affirmation 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\pi E(x))$ où E désigne la fonction partie entière. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$.

Affirmation 2 : Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$, telle que : $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Alors $\forall x \in]a,b[, f''(x) > 0$.

Affirmation 3 : Soit f une fonction numérique dérivable sur $[-1,1]$ et s'annulant en -1, 0, 1. On note g la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = 2x^4 + x + f(x)$. Il existe $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Affirmation 4 : Soit f une fonction numérique deux fois dérivable et convexe sur $[0,+\infty[$. L'application g de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - xf'(x)$ est croissante.

Affirmation 5 : Si a et b sont deux réels tels que $1 < a < b$, alors l'application $f : x \mapsto b^x - a^x$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2 : [**6 points**]

On désigne par f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

On se propose de montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n et une fonction polynôme P_n à coefficients réels, tels que pour tout réel x l'on ait : $x^n = P_n(x)f(x) + a_nx + b_n$.

1) Déterminer P_0, a_0, b_0, puis P_1, a_1, b_1 et P_2, a_2, b_2. **1,5pt**

2) Démontrer par récurrence l'existence de P_n, a_n et b_n pour tout n. On établira notamment que pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = xP_n(x) + a_n$, et $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$. **1,5pts**

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$. **1,5pt**

4) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n. **1,5pt**

Exercice 3 : [**9 points**]

Soit $u : [0,+\infty[\to]-\infty,0]$ est une application bijective, strictement décroissante et telle que $u(0) = 0$. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \geq 0 \\ u^{-1}(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

1) Montrer que $f \circ f(x) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. **1pt**

2) Montrer que la fonction f est strictement décroisante. **1pt**

3) Montrer que si u est continue, alors f est continue. **1pt**

4) On suppose que u possède une demi-dérivée à droite en 0 et que $u'_d(0) = 1$. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. **1,5pt**

5) On suppose dans cette question que $u(x) = -x - x^2$ pour tout $x \geq 0$. **1pt**

a) Calculer $f(x)$ pour tout $x \leq 0$. **1pt**

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. **1,5pt**

c) Dessiner l'allure du graphe de f. **1pt**