PREPAS INTERNATIONALES 2020/2021

Contrôle d'analyse N°4 (3h) Date : 30/01/2021

Exercice 1/9pts *Cet exercice comprend trois parties indépendantes.*

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.
   (a) De quel type de suite s'agit-il? **0,5pt**
   (b) Exprimer (u_n) en fonction de n tout en justifiant. **1,5pt**
   (c) Etudier la nature de (u_n). **1pt**

2. On définit la suite (v_n) par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 2}{v_n - 1}$.
   (a) De quel type de suite s'agit-il? **0,5pt**
   (b) Exprimer (v_n) en fonction de n tout en justifiant. **1,5pt**
   (c) Etudier la nature de (v_n). **1pt**

3. On définit la suite (w_n) par $w_0 = 3$, $w_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$.
   (a) De quel type de suite s'agit-il? **0,5pt**
   (b) Exprimer (w_n) en fonction de n tout en justifiant. **1,5pt**
   (c) Etudier la nature de (w_n). **1pt**

Exercice 2/10pts

1. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes de la variable réelle x :**1pt×3=3pts**

$$F(x) = x^2 e^{-3x} \qquad G(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \qquad H(x) = \arctan\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2e^x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   (a) La fonction f est-elle continue en 0 à droite? à gauche? Pourquoi? **1,5pt**
   (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **1pt**
   (c) Déterminer l'image par f des intervalles $[-1, +1]$ et $\mathbb{R}$. **1,5pt**

Exercice 3/4pts

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $p_n(x) = 1 - 2nx - x^{2n-1}$.

1. Montrer que p_n est une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. **1pt**
2. En déduire que l'équation $(E_n) : p_n(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une unique racine a_n; puis déterminer a_1. **1pt**
3. Montrer que la suite (a_n) est strictement monotone. **1pt**
4. Montrer que $0 < a_n < \frac{1}{2n}$; puis en déduire la limite et la nature de (a_n). **1pt**