Prepas π-internationales_Cycle ingénieur_ Février 2021

Première Année Cycle Ingenieur_Epreuve d'Algèbre

Durée: 3 heures

Exercice 1. (4 points). On considère le polynôme
$$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$$
où a, b, c sont des nombres réels.

(1) Déterminer les réels a, b et c sachant que P est factorisable par $(X-1)^3$.
(2) Déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
(3) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{201} + X - 1$ par $(X-1)^2$

Exercice 2. (4 points).

(1) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $F = \frac{1}{X^2(X-1)^3}$
(2) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $G = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$

Exercice 3. (3 points).

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
(2) On considère le nombre complexe $u = \sqrt{3} + i$. Déterminer sous forme algèbrique la racine carrée de u.
(3) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. (4 points). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et x_0 un point de I.

(1) Donner la négation des propositions suivantes:
$$P : \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I, \left(\ 0 < |x - x_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon\ \right)$$
$$Q : \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I, \forall y \in I, \left(\ |x-y| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \right)$$
(2) Traduire à l'aide des quatificateurs les phrases suivantes:
- L'application f est une application constante sur I.
- L'application f possède au moins un point fixe dans I.
- L'application f est monotone.
- L'application f est injective.

Exercice 5. (2,5 points). Recopier et compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose. " $\Rightarrow$ ", " $\Leftarrow$ "; " $\Leftrightarrow$ ", $\vee$, $\wedge$.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 4 \cdots\cdots\ x = 2$.
(2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $(x^2 = 4) \cdots\cdots\ (x = -2\ \cdots\cdots x = 2)$.
(3) $\forall x \in \mathbb{R}$: $(x^2 = 4 \cdots\cdots\ x \geq 1) \cdots\cdots\ (x = 2)$.
(4) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(x = \pi \cdots\cdots\ x = \frac{\pi}{2}\right) \cdots\cdots\ (e^{2i\pi x}$ est un réel$)$.
(5) $\forall x \in \mathbb{R}$: $(0 < |x-1| \leq 1) \cdots\cdots\ (x \in]0, 2[)$.

Exercice 6. (2,5 points). Soient p, q et r trois proposition mathématiques telles
$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$$
est une proposition fausse.

(1) Dresser la table de vérité de $A : (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$.
(2) Donner la valeur de vérité de $p \Rightarrow q$.
(3) Les propositions q et r sont-elles équivalentes? Justifier.
(4) On donne $B : p \wedge (\neg q \vee \neg r)$, les propositions A et B sont-elles équivalentes? Justifier votre réponse.
(5) Déduire une formule simple de la négation de A.