

“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 关于跳台跳水体型系数设置的建模分析

摘要：

针对建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型之间的关系并设置体型校正系数的问题，本文首先以非刚体动力学为基础，简化跳水动作作为 m 周翻腾与 n 周转体的集合，通过简化随时间变化的欧拉方程建立起 kick 动力学模型；其次，运用生物力学求解出跳水时间与运动员体型的关系，并对模型的分析结果进行均一化处理，得到体型校正系数，具有一定的公平性；最后运用自适应遗传算法重新给出一套新的难度系数评价体系。

问题一中，本文首先通过拟合模型对国际泳联十米跳台跳水难度系数进行了趋势拟合，在对其进行充分的讨论后，得出了对解决下面问题有帮助的一些合理的结论。诸如跳水运动中，翻腾周数与转体周数之和不大于 6 周；没有转体动作时，总难度系数与翻腾周数成正相关，而加入转体动作后，总难度系数将变为并不总与翻腾周数成正相关；在考虑总的难度系数 DD 时，应着重考虑翻腾周数的难度系数 A、空中姿势的难度系数 B 和转体周数的难度系数 C 等重要结论。

问题二中，本文利用非刚体动力学，简化随时间变化的欧拉方程，对运动员跳水动作中的翻腾与转体过程进行了动力学系统分析。通过 kick 动力学模型，本文首先得到了运动员完成各个跳水动作的时间随初始角动量与惯性矩等参数的关系；然后，本文的亮点在于通过文献资料法、数理统计法与拟合模型得出了初始角动量随运动员身高、体重的关系；最后，通过生物力学方法简化了运动员的身体模型，得到了各个空中姿态下的惯性矩；进而本文可以建立出完成各个跳水动作时间与运动员体型之间的关系模型。结果如下：

$$\begin{cases} 2\pi m + nS = T_{air} \frac{2E_s}{l} + 2nIT_t \frac{E_t - E_s}{l^2} \\ l = 3.22 \times 10^{-6} H_l^2 M^2 - 0.0411 H_l M + 139.9 \end{cases}$$

$$I_{s,yy} = \begin{cases} \frac{bH_l^3}{12} & A. Strait \\ \frac{11b}{324} H_l^3 + \frac{2bH^2}{9} H_l & B. Pike \\ \frac{a^2 H_l^2}{4\pi} & C. Tuck \end{cases}$$

经 MATLAB 求解，在各个空中姿态下，运动员完成每个跳水动作的时间都与其身高、体重呈正相关关系，但没有转体动作的纯翻腾动作受运动员体重的影响并不大，且大多数跳水动作所需的时间都在 1.7-2.3s 的范围内，如图 9-图 15 所示。模型对不同空中姿态下 5x35、x03 系列动作进行了验证，发现对于体重在 35kg-70kg、身高在 1.4m-1.7m 范围内的运动员，完成一套跳水动作所需的时间明显受运动员体重与身高的影响，最大影响约为 35.29% 左右。

问题三中，本文对问题二的模型结果进行了均一化处理，即为不同身高、体重的运动员分配不同的体型校正系数，使其完成跳水动作的时间与体型校正系数的乘积尽可能相同。通过讨论可知，体型校正系数完全消去跳水时间模型中的身高、体重参量时为最优，继而本文将体型校正系数转化为一个与跳水时间呈负相关关系的、以运动员翻腾与转体周数、身高与体重为自变量的函数模型。模型对不同空中姿态下 5x35、x03 系列动作进行了验证，发现对于体重在 35kg-70kg 范围内、身高在 1.4m-1.7m 范围内的运动员，修正后的模型几乎不受运动员体重与身高的影响，其波动仅为±1.05% 左右，具有一定的公平性。

问题四中，本文基于问题二的模型建立了新的难度系数评价指标。首先，本文通过翻腾周数、转体周数及跳水时间来评价翻腾与转体动作的难度系数 A' ，并且利用遗传算法求解了 A' 表达式中的未知参量；其次，分别用 B' 、 C' 校正由于空中姿势、起跳姿势的不同造成的难度系数变化；然后，用 D' 、 E' 分别表示起跳前正面朝向以及翻腾方向的难度系数与入水过程的难度系数；最后，用 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' 五个难度系数之和综合评定各个跳水动作的难度系数。通过对 26 组跳水动作的验证，对于只有翻腾没有转体的跳水动作，模型得出的结果与附件 1 中规定的难度系数基本没有区别，如 307C 原难度系数为 3.4，新难度系数为 3.5。然而，对于既有翻腾又有转体的跳水动作，模型得出的结果与附件 1 中规定的难度系数存在着比较明显的区别，并且随着翻腾周数与转体周数总和的增加，这一区别越来越大，二者的难度系数差最高达到 0.5，如 5275B 原难度系数为 4.2，新难度系数高达 4.7。这是因为在本文的难度评价模型中，对于既有翻腾又有转体的跳水动作，翻腾周数及转体周数的总和越大，该动作的难度系数越大，且难度系数的增长速度也逐渐变快。

关键词：kick 动力学模型；生物力学；自适应遗传算法；非刚体动力学

摘要	1
1. 问题重述	4
1.1 问题背景	4
1.2 问题分析	4
2. 模型假设和符号说明	6
2.1 模型假设	6
2.2 符号说明	6
3. 问题一的分析与建模	7
3.1 问题一的分析	7
3.2 问题一的结论	11
4. 问题二的分析与建模	11
4.1 问题二的分析	11
4.2 问题二的动力学模型	11
4.2.1 立体角 S 的确定	14
4.2.2 转体周期 Tt 的确定	15
4.2.3 翻腾过程消耗能量 Es 的确定	15
4.2.4 转体过程消耗能量 Et 的确定	15
4.3 动力学模型与运动员体型间的关系	15
4.3.1 角动量与运动员体型的关系	16
4.3.2 惯性矩与运动员体型的关系	17
4.4 模型结果与评价	19
4.4.1 模型适用于各种不同跳水动作的证明	20
4.4.2 模型对典型跳水动作的适用性证明	21
5. 问题三的分析与建模	27
5.1 问题分析	27
5.2 体型校正系数模型	27
5.3 模型结果与评价	28
5.3.1 对 5x35 系列动作的校正效果	28
5.3.2 对 x03 系列动作的校正效果	31
6. 问题四的分析与建模	35
6.1 问题分析	35
6.2 难度系数评价模型	35
6.3 模型结果与评价	40
7. 模型的评价与灵敏度分析	43
参考文献	45

1. 问题重述

1.1 问题背景

国际泳联在跳水竞赛规则中规定了不同跳水动作的代码及其难度系数(见附件 1)，它们与跳水运动员的起跳方式（起跳时运动员正面朝向、翻腾方向）及空中动作（翻腾及转体圈数、身体姿势）有关。裁判员们评分时，根据运动员完成动作的表现优劣及入水效果，各自给出从 10 到 0 的动作评分，然后按一定公式计算该运动员该动作的完成分，此完成分乘以该动作的难度系数即为该运动员该动作的最终得分。

1.2 问题分析

因此，出于公平性考虑，一个跳水动作的难度系数应充分反映该动作的真实难度。但是，有人说，瘦小体型的运动员在做翻腾及转体动作时有体型优势，应当设置体型系数予以校正，请通过建模分析，回答以下问题：

1. 研究分析附件 1 的 APPENDIX 3-4，关于国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，你们可以得到哪些对解决以下问题有意义的结论？
2. 请应用物理学方法，建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高，体重）之间的关系。
3. 请根据你们的模型说明，在 10 米跳台跳水比赛中设置体型校正系数有必要。如果有，校正系数应如何设置？
4. 请尝试基于你们建立的上述模型，给出表 1 中所列的十米跳台跳水动作的难度系数。你们的结果与附件 1 中规定的难度系数有无区别？如果有区别，请作出解释。

表 1: 十米跳台难度系数表 (部分动作)

动作代码	PIKE		TUCK		动作代码	PIKE		TUCK	
	原	新	原	新		原	新	原	新
	B	B	C	C		B	B	C	C
105	2.3		2.1		5154	3.3		3.1	
107	3.0		2.7		5156	3.8		3.6	
109	4.1		3.7		5172	3.6		3.3	
1011	--	--	4.7		5255	3.6		3.4	
205	2.9		2.7		5257	4.1		3.9	
207	3.6		3.3		5271	3.2		2.9	
209	4.5		4.2		5273	3.8		3.5	
305	3.0		2.8		5275	4.2		3.9	
307	3.7		3.4		5353	3.3		3.1	
309	4.8		4.5		5355	3.7		3.5	
405	2.8		2.5		5371	3.3		3.0	
407	3.5		3.2		5373	--	--	3.6	
409	4.4		4.1		5375	--	--	4.0	

[动作代码说明] (1) 第一位数表示起跳前运动员起跳前正面朝向以及翻腾方向, 1、3 表示面朝水池, 2、4 表示背向水池; 1、2 表示向外翻腾, 3、4 表示向内翻腾。(2) 第三位数字表示翻腾圈数, 例如 407, 表示背向水池, 向内翻腾 3 周半。(3) B 表示屈体, C 表示抱膝。(4) 如果第一位数字是 5, 表示有转体动作, 此时, 第二位数字意义同说明 (1), 第三位数字表示翻腾圈数, 第四位数字表示转体圈数, 例如 5375, 表示面向水池向内翻腾 3 周半, 转体 2 周半。

2. 模型假设和符号说明

2.1 模型假设

- a) 假设运动员在跳水过程中，身体由均被视为刚体的三部分组成，分别为躯体、左臂、右臂，各刚体部分可进行相对运动。
- b) 假设运动员所能进行的所有跳水动作均由起跳、翻腾、姿态改变、转体、入水五部分组成，各部分进行的次数视具体跳水动作而定（可以进行 0 次）。
- c) 假设运动员在整个跳水动作中，起跳、姿态改变、入水均瞬间完成，跳水动作所需的时间全部用于翻腾、转体部分。
- d) 假设运动员在整个跳水动作中所受的合外力为零，跳水过程中运动员角动量守恒、能量守恒。
- e) 假设所有运动员身体密度相同，且质量分布均匀。
- f) 忽略一切其它次要因素，仅只考虑纯粹的非刚体系统动力学问题。

2.2 符号说明

符号	说明
m	翻腾周数
n	转体周数
E_s	翻腾过程消耗能量
E_t	转体过程消耗能量
S	立体角
l	角动量
T_t	转体周期（完成一次转体所需时间）
T_{air}	运动员完成一套跳水动作所需的时间
H_l	运动员的身高
M	运动员的体重
DD	难度系数
$\lambda(m, n, H_l, M)$	体型校正系数
$I_{s,yy}$	运动员对翻腾动作轴线的惯性矩
DD'	校正后的难度系数
5x35	不同起跳姿势（ $x=1, 2, 3, 4$ ）下的跳水动作系列
x03	不同起跳姿势（ $x=1, 2, 3, 4, 6$ ）下的跳水动作系列

3. 问题一的分析与建模

3.1 问题一的分析

根据题目，要根据附件一给出的是关于国际泳联十米跳台跳水不同动作的难度系数的确定规则，得到解决其他问题的有意义的结论。因此，本文首先把握全部问题的关键信息，进而在附件一中寻找相关的资料。如题所示，问题二所求的是应用物理学的方法，通过建立模型来描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高、体重）之间的关系；问题三是在问题二的基础上设置体型校正系数；问题四是基于上述所建模型，给出部分动作的难度系数并和附件一中的作比较。在附件一中，已知总难度系数 $DD = A + B + C + D + E$ 。其中 A 表示翻腾周数的难度系数、 B 表示空中姿势的难度系数、 C 表示转体周数的难度系数、 D 表示助跑方式难度系数、 E 表示入水特点难度系数。

本文对附件 1 中《国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则》开展了一系列分析研究，并得到了一些对解决后续问题有意义的结论，结论将详述于本文的 3.2 小节。下面将展现对附件一的分析过程：

i. 对翻腾周数的难度系数 A 的分析：

如图 1 所示，翻腾周数的难度系数 A 与翻腾周数近似成正相关关系。其中，翻腾 1 周半与 2 周、2 周半与 3 周、3 周半与 4 周以及 4 周半与 5 周半之间难度系数有陡增，难度系数分别增加了 0.4、0.4、0.8 和 1。这表明每当运动员能够翻腾 m 周（非整数周，即整数加半周）后，要想再翻腾半周，困难会大幅上升 ($1 \leq m \leq 4$)；对立地，如果运动员一开始能够翻腾 m 周（整数周），那么对于 $(m+0.5)$ 周，运动员相对并不会感到很吃力；此外，翻腾 4 周和 4 周半的难度系数是一样的；翻腾 5 周在附件一的表格中的难度系数并没有体现。

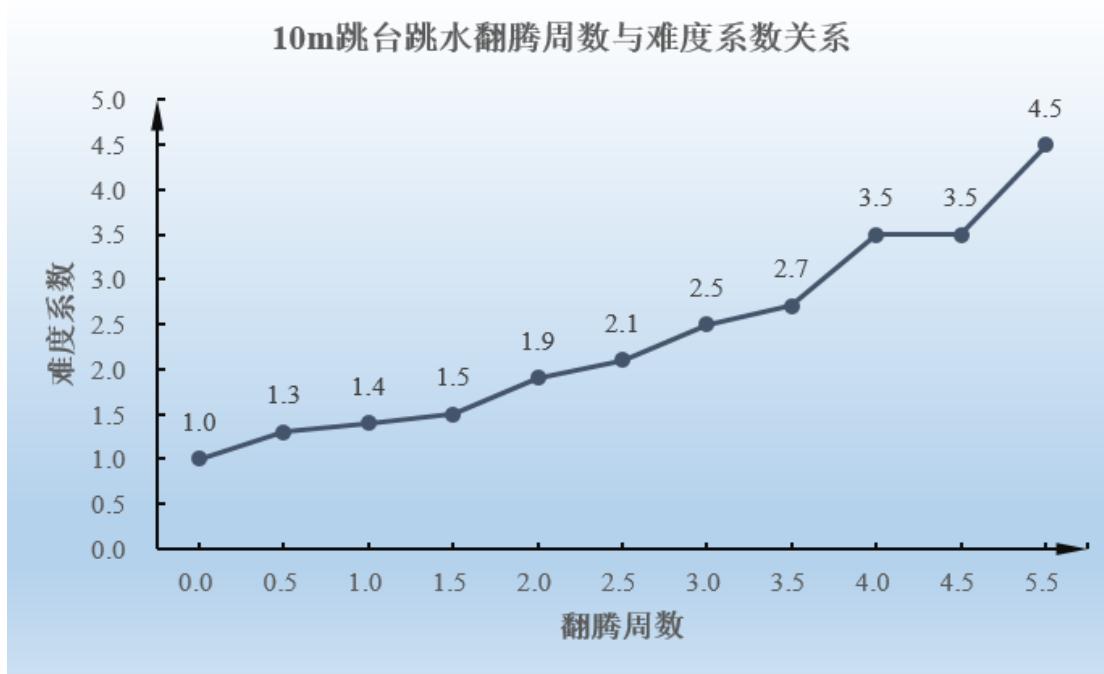


图 1 10m 跳台跳水翻腾周数与翻腾周数的难度系数 A 的关系

对于没有翻腾 5 周的难度系数的情况，本文分析到，运动员正常跳水时，要有起跳后（展开身体）和入水前（展开身体）的时间，如果运动员翻腾 5 周后，

头正好朝向跳台，会导致没有多余的时间来展开身体，来为入水做准备，这样就会导致入水水花大，从而分数低。比较而言，翻腾 5 周半意味着运动员翻腾 5 周半后，头部刚好朝向水面，此时，顺势而入水，无需多余的时间做入水前的准备。同时，本文发现，起跳动作对翻腾周数难度系数的判定没有影响。

ii. 对空中姿势的难度系数 B 的分析：

由附件 1 可知，空中姿势的难度系数共有直体、屈体、抱膝、翻腾兼转体的任意姿势和飞身这 5 种分类；起跳动作共有面对池向前跳水（Fwd）、面对台向后跳水（Back）、面对池反身跳水（Rev）、面对台向内跳水（Inw）和臂立跳水（Arm）。臂力跳水又包括臂立面对池向前跳水（Arm.F）和臂立面对台向后或者面对池反身跳水（Arm.BR）。

飞身表示从跳台往下的瞬间的动作，不能够单独出现。可以与屈体 b 或抱膝 c 一起出现，即两者的难度系数相加。

运动员在选择空中姿势为翻腾兼转体的任意姿势后，当翻腾周数 $m \in [0,1]$ 时，起跳动作避开面对台向内跳水；当翻腾周数 $m \in [1.5, 2.5]$ 时，起跳动作避开面对台向后跳水和面对池反身跳水。

运动员在选择空中姿势为抱膝或屈体且起跳动作为面对台向内跳水后，当翻腾周数 $m \in [0,1]$ 时，需要将空中姿势改为飞身加屈体或飞身加抱膝。

iii. 对转体周数的难度系数 C 的分析：

由附件 1 可知，转体周数难度系数 C 是以翻腾周数 m 加转体周数 n 以及运动员的起跳动作为依据进行评定的。

可以观察到，当转体周数为整数时，都不进行翻腾。换句话说，当转体周数不为整数时，可以边转体边翻腾。

有固定动作组合：

(1) 翻腾半周并转体 n 周 ($n \geq 2$) 的跳水只能在采用直体、屈体或抱膝的空中姿势的情况下实现；

(2) 翻腾一周或一周半并转体 n 周 ($n \geq 2$) 的跳水只能在采用翻腾兼转体的任意姿势的情况下实现；

(3) 翻腾 m 周 ($m \geq 2$) 或并转体 n 周 ($n \geq 2$) 的跳水只能在采用屈体或抱膝的空中姿势的情况下实现；

(4) 臂立起跳且翻腾一周或一周半或两周并转体一周或大于等于两周的跳水只能在采用翻腾兼转体的任意姿势的情况下实现；

(5) 臂立起跳且翻腾 m 周 ($m \geq 25$) 并转体一周的跳水只能在采用屈体或抱膝的空中姿势的情况下实现；

如图 2 所示，在起跳动作一致且翻腾周数相同的情况下，难度系数与转体周数成正相关；然而，在同一起跳动作的前提下，对于相同的转体周数，难度系数并不总与翻腾周数成正相关。

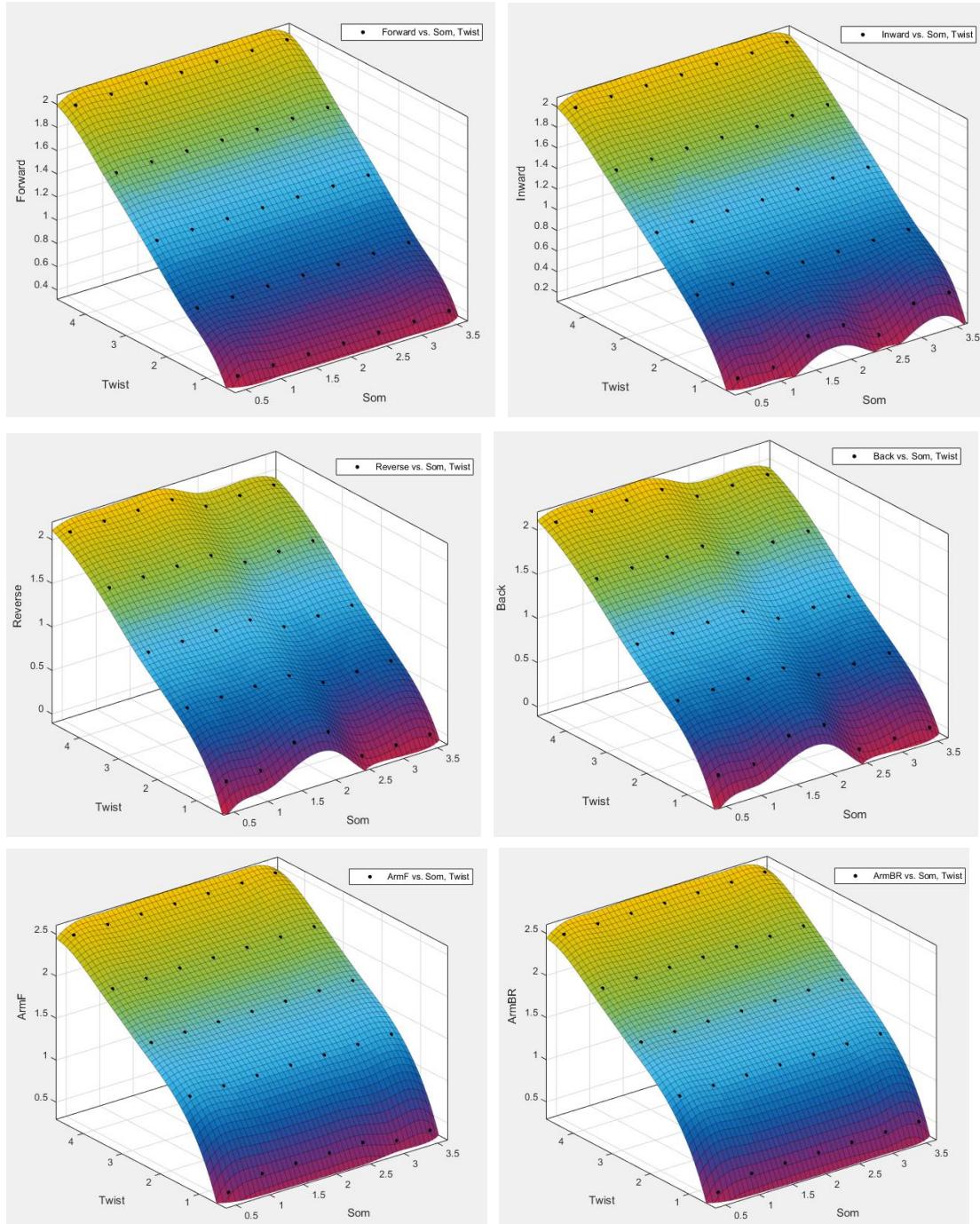


图 2 不同起跳动作下，转体周数的难度系数 C 与转体周数和翻腾周数的关系

iv. 对助跑方式难度系数 D 的分析：

助跑方式难度系数并不总与翻腾周数成正相关关系。面对池向前跳水或臂立跳水时，难度系数随着翻腾周数的增加而增加；面对台向内跳水时，难度系数随着翻腾周数的增加而减小；面对池反身跳水时，难度系数随着翻腾周数的增加先增加后减小。

v. 对入水特点难度系数 E 的分析：

入水时，不带转体。入水特点难度系数与翻腾周数近似成正相关关系。

vi. 对部分跳水动作的难度系数例子的分析：

如图 3 所示，显示的是不同空中姿势的 307 系列、309 系列、5371 系列以及

5257 和 6247 的比较。可以发现，当单单有翻腾动作时，在总的难度系数 DD 中，翻腾周数的难度系数 A 占的最多，远远高于其它几项的难度系数。且总难度系数 DD 随着翻腾周数的增大而增大；当加入转体动作后，在总的难度系数 DD 中，翻腾周数的难度系数 A 占的最多，其次是转体周数的难度系数，总难度系数 DD 随着翻腾周数的增大或转体周数的增大而增大。同时横向比较各个系列，发现采用屈体的空中姿势的难度系数总比采用抱膝的空中姿势的难度系数大。

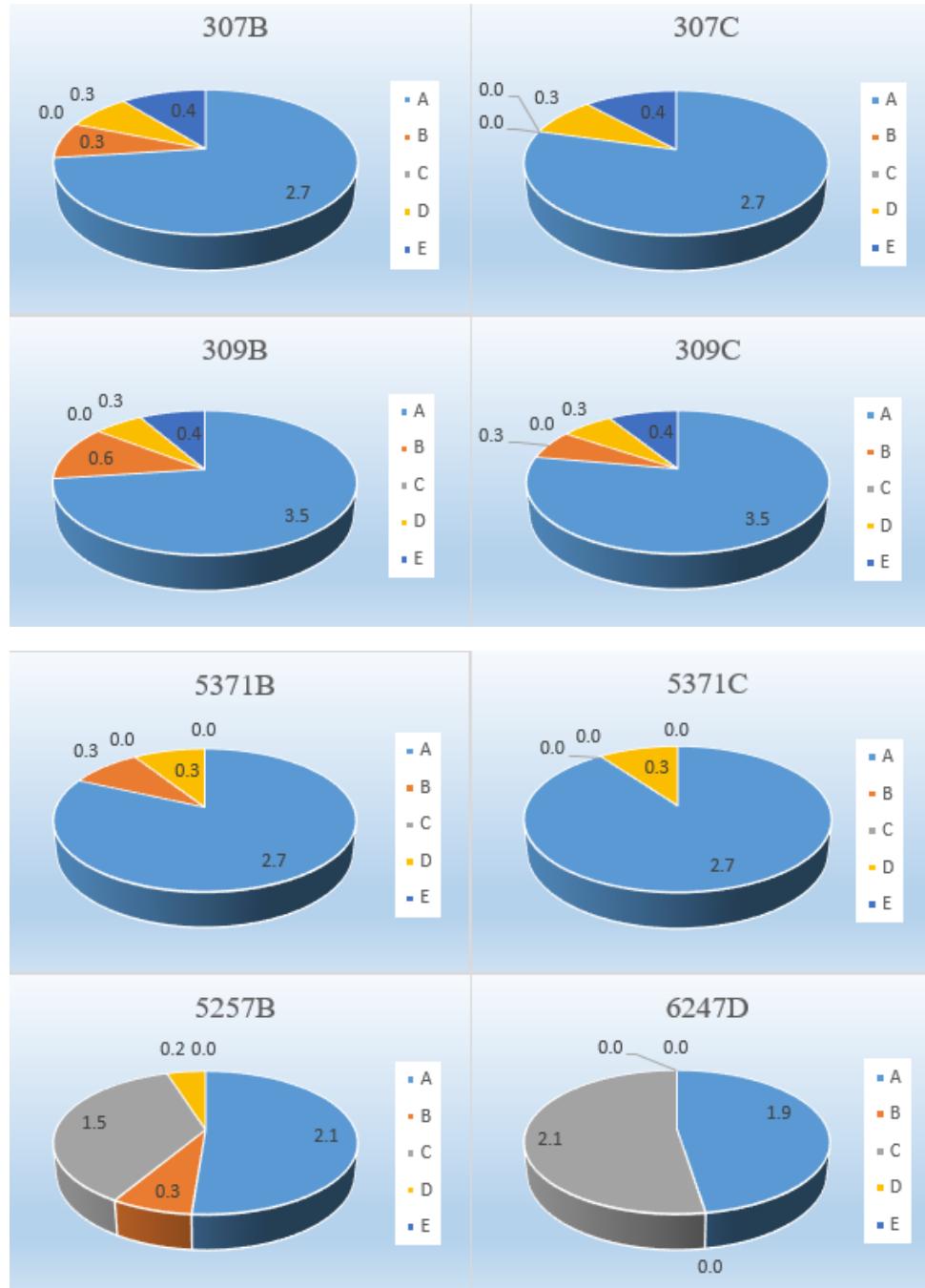


图 3 对不同跳水动作的难度系数 A、B、C、D 和 E 在总难度系数 DD 中的占比
vii. 对附录 4 的分析：

本文发现，在跳水动作代码一样的情况下，采用空中姿势为直体的难度系数比采用屈体的大；采用屈体的难度系数比采用抱膝的难度系数大。

3.2 问题一的结论

综上所述，本文得到了如下对解决以下问题有意义的结论：

- (1) 没有转体动作时，总难度系数 DD 随翻腾周数的增大而增大；
- (2) 在既有转体动作又有翻腾动作时：在翻腾周数相同的情况下难度系数与转体周数成正相关；然而转体周数相同时，难度系数并不总与翻腾周数成正相关；
- (3) 翻腾周数 m 和转体周数 n 之和总小于 6 周，转体周数 n 不大于 4 周半，翻腾周数 m 不大于 5 周半且不能取 5 周；
- (4) 空中姿势为直体的跳水动作的难度系数比屈体的大，空中姿势为屈体的跳水动作的难度系数比抱膝的大；
- (5) 空中姿势中，飞身表示从跳台往下的瞬间的动作，不能够单独出现。可以与屈体或抱膝一起出现，即两者的难度系数相加。转体加翻腾连续地做更容易，身体协调程度越高，难度越高；
- (6) 跳水动作都有固定的组合，考虑不同的翻腾周数和转体周数时需参考附件一中的附录四；
- (7) 在考虑总的难度系数 DD 时，着重考虑翻腾周数的难度系数 A、空中姿势的难度系数 B 和转体周数的难度系数 C。

4. 问题二的分析与建模

4.1 问题二的分析

根据对附件 1《国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则》的分析，在 10 米跳台跳水比赛中，运动员完成各个跳水动作的时间近似等于在空中完成翻腾与转体动作所需时间之和（忽略不同助跑方式对完成跳水动作时间的影响）。而对于不同的跳水动作来说，所需完成的翻腾周数、转体周数大多数是互不相同的，起跳瞬间所需的角动量与翻腾、转体过程消耗的能量也是互不相同的，此外，运动员的惯性矩与自身的体型与姿势相关。本文需要建立运动员跳水过程的动力学模型，以推导出完成一次跳水动作的时间与翻腾周数、转体周数、角动量、惯性矩、翻腾与转体各自消耗的能量之间的关系。在上述关系的基础上，分析角动量、惯性矩与运动员体型（身高，体重）之间的解析关系，即可得到运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型之间的关系。

因此，问题二的解答需要分为两步：

- (1) 应用物理学方法，建立运动员跳水过程的动力学模型，并由模型推导出运动员完成一次跳水动作的时间与翻腾周数、转体周数、角动量、惯性矩、翻腾与转体各自消耗的能量之间的关系；
- (2) 分析角动量、惯性矩与运动员体型（身高，体重）之间的关系，进一步推导运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型间关系的数学模型。

4.2 问题二的动力学模型

在本文的模型中，首先假设运动员为一个具有一定质量与体积的非刚体，用非刚体动力学简化随时间变化的欧拉方程，给出运动员进行翻腾与转体过程的动力学系统分析。在简化后，转体过程变得较直观，而翻腾过程则需要通过几何相位和动力学相位的组合来复现，即简化为围绕空间中的固定角动量矢量的旋转。坐标系的建立以及运动员跳水过程中的姿势变化简图如图 4 所示^[1]。

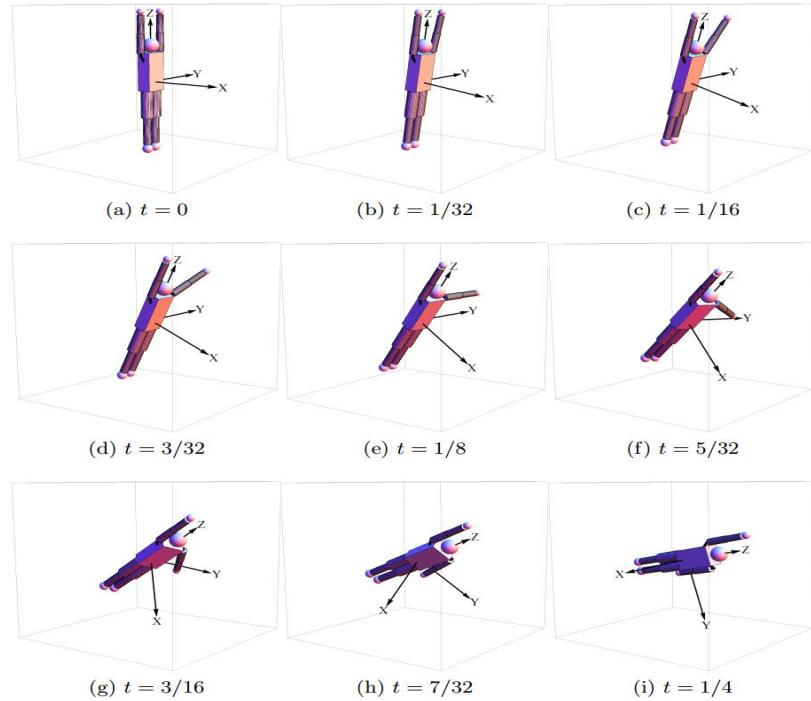


图 4 坐标系的建立方法以及运动员跳水过程中的姿势变化简图

在跳水动作中，翻腾和转体动作的形成，主要是外力矩的作用。如果外力矩为零，即原地垂直起跳，反作用力通过身体重心，那就不可能产生翻腾和转体动作，只能产生一个直上直下的动作。本文认为跳水中的翻腾和转体的形成，主要是外力矩的作用，同时内力也起着一定的作用。据此，为了产生旋转的外力矩，运动员必须使身体“前倾”或“后倒”，使身体重心逐渐地超出支撑面，当支撑反作用力不通过身体中心时，这个支撑力便围绕总重心形成外力矩，人体便产生了转动^[2]，如图 5 所示。

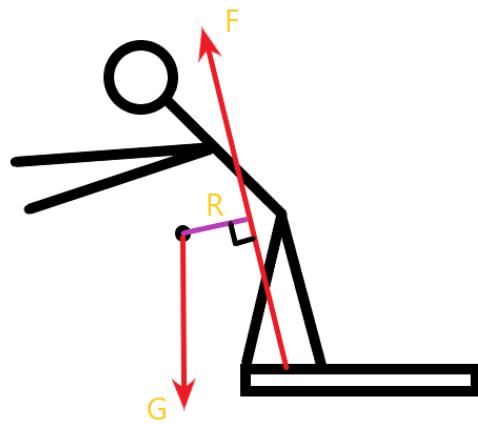


图 5 运动员起跳瞬间的受力分析图

下面介绍本问题中的角动量守恒定理：

当运动员离开跳台后，处于非支撑状态中。而描述转动状态变化和外力矩的关系，可用动量矩原理：

$$J\alpha_0 = M_E \quad (1)$$

其中 J 表示转动惯量（描述使转动加速或减速的难易程度的量）， α_0 表示身体绕转轴转动的角加速度， M_E 为绕转轴的合外力矩。

运动员离开跳台后，没有合外力矩，即 $M_E = 0$ ，从而有 $\alpha_0 = 0$ ，所以有角速度 ω 为常数。所以有：

$$J = I_z \omega = \text{常数} \quad (2)$$

即动量矩是保持不变的。这就是说，合外力矩为零时，人体的角动量保持不变，这就是角动量守恒定律。

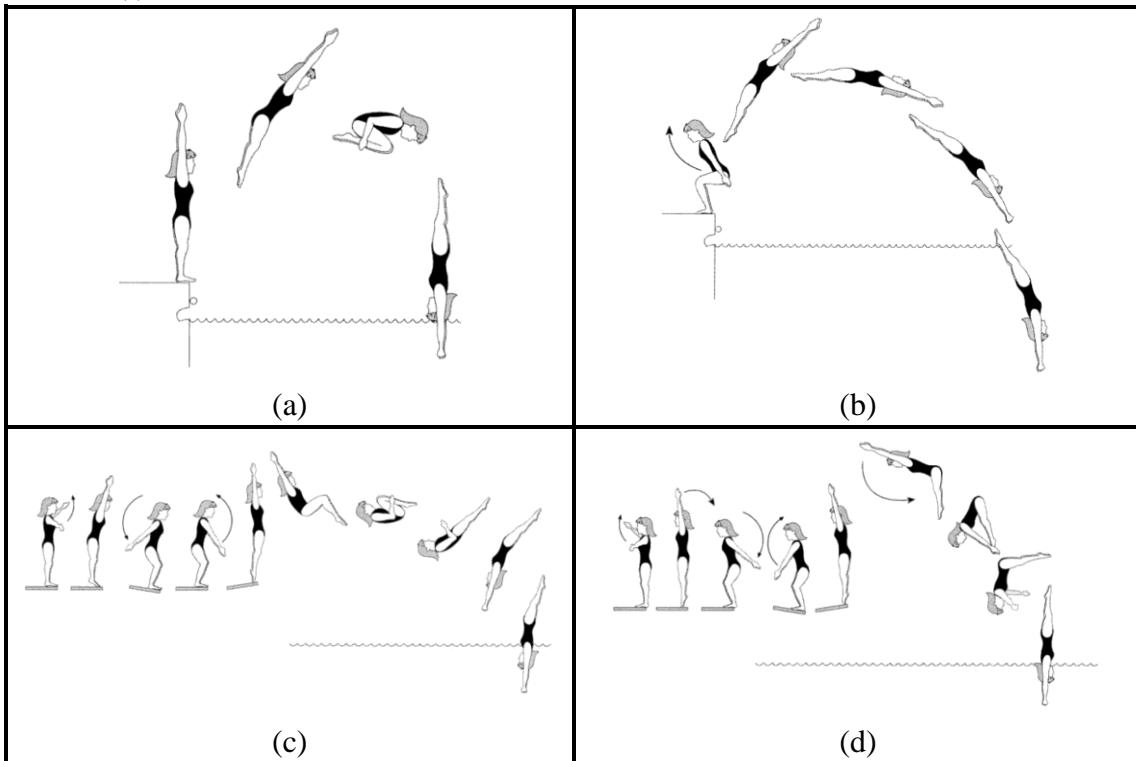
进而地，由于身体对转动轴的转动惯量为：

$$J = \sum_i M_i Y_i^2 = MR^2 \quad (3)$$

其中， \sum_i 表示对身体各个部分的求和； M_i 表示身体的第 i 部分的质量； Y_i 表示与转动轴线的距离； M 表示运动员总的质量， R 表示回转半径。

本文发现，运动员离开跳台后，由于总的角动量保持一致，因此运动员可以通过改变空中姿势（直体、屈体和抱膝）来改变转动的角速度 ω 。

除空中动作外，起跳动作对于一套跳水动作的成功与否也起着重要的作用。图 6(a)-(f) 所示为跳水运动中六组不同的起跳动作，(a) 为面对池向前跳水、(b) 为面对板/台向后跳水、(c) 为面对池反身跳水、(d) 为面对板/台向内跳水、(e) 为转体跳水、(f) 为臂立跳水。



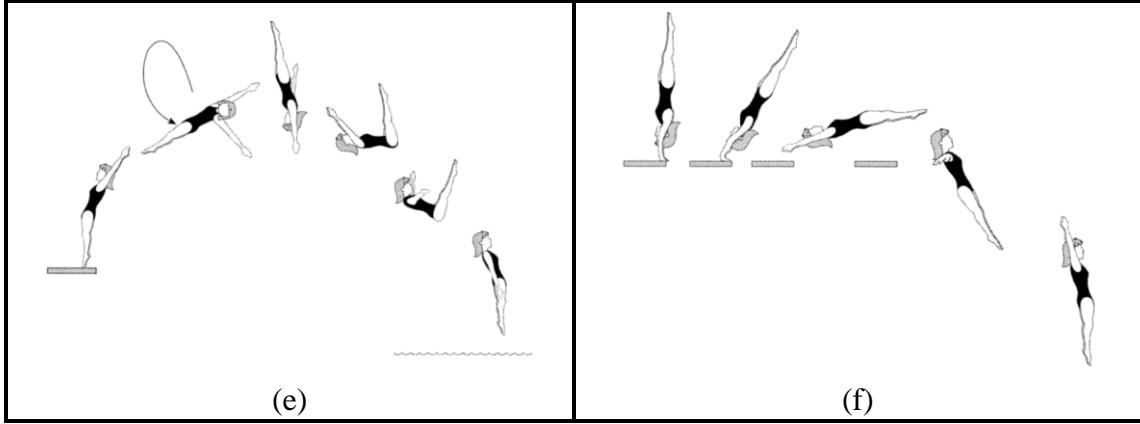


图 6 跳水运动中六组不同的起跳动作^[3]

本文使用 kick 动力学模型来作为运动员跳水过程的动力学模型，在 kick 模型中，运动员完成一套跳水动作所需的时间 T_{air} 与翻腾周数 m 、转体周数 n 、立体角 S 、翻腾过程消耗能量 E_s 、转体过程消耗能量 E_t 、角动量 l 、转体周期（完成一次转体所需时间） T_t 有关，一套需要运动员完成 m 周翻腾与 n 周转体的跳水动作满足如下关系：

$$2\pi m + nS = T_{air} \frac{2E_s}{l} + 2nlT_t \frac{E_t - E_s}{l^2} \quad (4)$$

下面将简述公式 (4) 中各参量的确定方法。

4.2.1 立体角 S 的确定

在公式 (4) 中，立体角 S 可通过公式 (5) 求得：

$$S(h, \rho) = 2\pi - \frac{4hg}{\pi} (\Pi(v, k^2) - K(k^2)) \quad (5)$$

其中， $K(k^2)$ 为第一类完全椭圆积分， $\Pi(v, k^2)$ 为第三类完全椭圆积分， J_x 、 J_y 、 J_z 分别为运动员沿 x 、 y 、 z 轴的转动惯量。参数 k^2 、 v 、 g 、 h 可由下面的公式 (7) 与公式 (8) 求得：

$$\begin{cases} \Pi(v, k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-v \sin^2 \theta)^{\sqrt{1-k^4 \sin^2 \theta}}} \\ E(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^4 \sin^2 \theta} d\theta \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} k^2 = \rho(1-h\rho)/(2h+\rho) \\ v = 1-h\rho \\ g = (1+h/\rho)^{-1/2} \\ h = (E_t J_y / l^2 - 1/2) / \mu \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \rho^2 = (1 - J_y / J_z) / (J_y / J_x - 1) \\ \mu^2 = (J_y / J_x - 1)(1 - J_y / J_z) \end{cases} \quad (8)$$

4.2.2 转体周期 T_t 的确定

在公式 (4) 中, T_t 可通过下述公式 (9) 求得:

$$T_t = \frac{2\pi}{l} \frac{(J_y^{-1} - J_z^{-1})^{-1}}{\sin(\chi + P)} \quad (9)$$

其中, P 的简化公式取决于模型的惯性特性, χ 为倾斜角度, 可通过下述公式 (10) 求得:

$$\chi = \int_0^\pi I_{t,xx}^{-1}(\alpha) A_x(\alpha) d\alpha \quad (10)$$

其中, $I_{t,xx}^{-1}(\alpha)$ 为转体过程中, 绕转体运动轴线的惯性矩的逆矩阵 I_t^{-1} 的 xx 轴分量, $A_x(\alpha)$ 为形状动量。

4.2.3 翻腾过程消耗能量 E_s 的确定

在公式 (4) 中, E_s 可通过下述公式 (11) 求得:

$$E_s = \frac{1}{2} \mathbf{L}_s I_s^{-1} \mathbf{L}_s = \frac{1}{2} l^2 I_{s,yy} \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_s = (0, l, 0)^t \quad (12)$$

其中, \mathbf{L}_s 表示翻腾过程中的角动量矢量, I_s^{-1} 表示翻腾过程中, 绕翻腾运动轴线的惯性矩的逆矩阵。

4.2.4 转体过程消耗能量 E_t 的确定

在公式 (4) 中, E_t 可通过下述公式 (13) 求得:

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{L}_s R_x(\chi) I_t R_x(-\chi) \mathbf{L}_s \quad (13)$$

其中, $R_x(\chi)$ 、 $R_x(-\chi)$ 分别是倾角 χ 、 $-\chi$ 绕 x 轴转动的旋度, I_t 为惯性张量。

4.3 动力学模型与运动员体型间的关系

本小节将分析跳水过程中的角动量 l 、惯性矩 $I_{s,yy}$ 与运动员体型 (身高, 体

重)之间的数学关系,通过将上述关系与 kick 动力学模型联立,进一步推导出运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型间的数学模型。

4.3.1 角动量与运动员体型的关系

由于运动员起跳的初始角动量与跳水动作、运动员的经验与身体素质间存在很大关系,通过物理方法建立初始角动量与运动员体型的理论关系不尽贴合实际。本文使用影像解析法与数理统计法,选择熊倪、孙淑伟、邱波、杨健、火亮、谢思杨、伏明霞、许艳梅 8 名跳台跳水运动员作为样本^{[4]-[7]},使用第 11、12 两届亚运会与巴塞罗那、亚特兰大两届奥运会上的跳水大赛中实测数据分析问题。上述 8 名运动员的起跳角动量与身高、体重如表 2 所示。

表 2 跳水运动员身高、体重与角动量实际数据

姓名	身高 /cm	体重 /kg	身高*体重 /(cm*kg)	角动量 /(kg*m^2/s)
熊倪	166	55	9130	26.55
孙淑伟	142	35	4970	15.39
邱波	163	62	10106	61.3
杨健	167	63	10521	56.9
火亮	162	62	10044	57.1
谢思杨	164	62	10168	54.2
伏明霞	143	48	6864	52.52
许艳梅	164	52	8528	25.22

根据角动量的定义式(14),角动量为物体到原点的矢径和其动量的叉积:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (14)$$

在定义式(14)中,矢径 \mathbf{r} 的大小与运动员的身高成线性关系。根据实测数据表 2 及定义式(14),本文可以通过拟合 8 名运动员实际的起跳角动量、身高体重乘积来探索角动量与运动员体型之间的关系,通过 MATLAB 拟合工具箱,本文得到如图 7 的一根样条曲线,如下图所示。

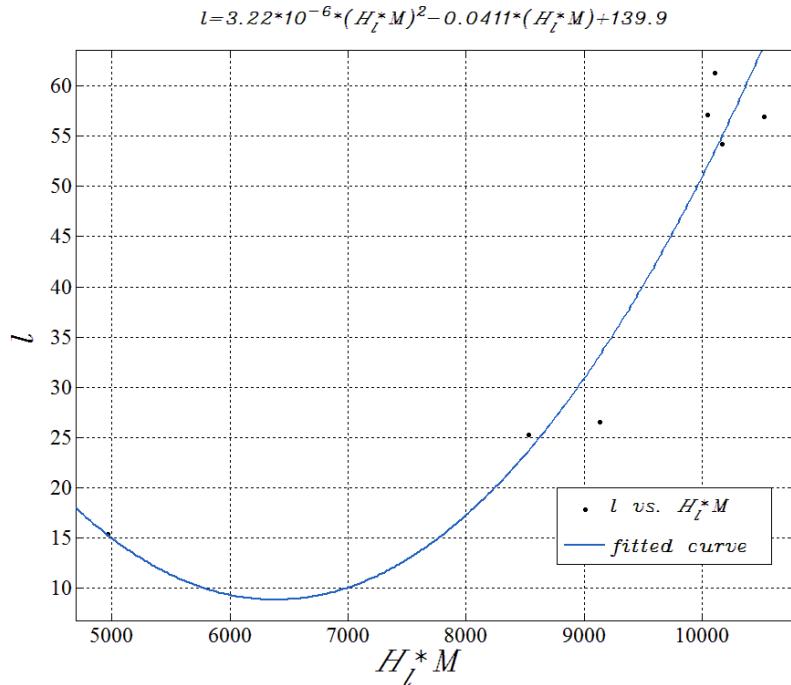


图 7 角动量与运动员体型之间的关系

角动量与运动员体型的拟合方程如公式 (15) 所示，其中， H_l 为运动员身高， M 为运动员体重。

$$l = 3.22 \times 10^{-6} H_l^2 M^2 - 0.0411 H_l M + 139.9 \quad (15)$$

4.3.2 惯性矩与运动员体型的关系

4.3.2.1 直体姿态下的惯性矩计算

直体姿态下的跳水运动员几何模型可以简化为一个质量均匀的长为 a ，宽为 b ，高为 H_l 的长方体，此时运动员身高视为 H_l 做翻腾运动时的旋转轴必过矩形截面形心且平行于 x 轴，则其惯性矩为

$$I_0 = \frac{b H_l^3}{12} \quad (16)$$

4.3.2.2 屈体姿态下的惯性矩计算

首先将屈体姿态下的跳水运动员简化成如图所示的几何模型，该模型由上下两个等宽等高长方体组成，且质量均匀，模型各参数及坐标系的建立方式如图 8 所示。

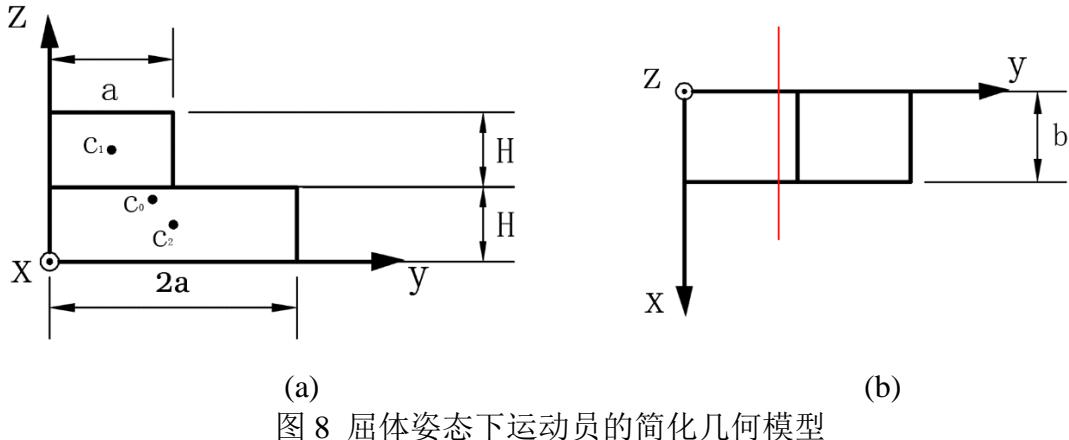


图8 屈体姿态下运动员的简化几何模型

此时，运动员身高为：

$$H_t = 3a \quad (17)$$

为了求得该几何模型的惯性矩，首先需要求得该几何模型的形心坐标。

对于上方长方体1，易知其形心坐标为 $C_1\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3}{2}H\right)$ ，对于下方长方体2，

其形心坐标为 $C_2\left(\frac{b}{2}, a, \frac{H}{2}\right)$ ，根据两长方体的形心坐标，可求得该几何模型的形

心坐标为 $C_0\left(\frac{b}{2}, \frac{5}{6}a, \frac{5}{6}H\right)$ 。

显然，运动员在空中做翻腾动作时，其旋转轴过 C_0 且平行于 x 轴，则运动员进行翻腾动作时的惯性矩即为运动员几何模型对于翻腾运动旋转轴的惯性矩。

首先，对于上方矩形截面，其对自身形心 C_1 的惯性矩为 $\frac{ba^3}{12}$ ，下方矩形对

自身形心 C_2 的惯性矩为 $\frac{2ba^3}{3}$ 。根据惯性矩平行轴定理，可以得出公式 (18)：

$$I_{C_0} = I_C + Al_0^2 \quad (18)$$

其中， l_0 为两平行轴之间的距离。对于上方矩形截面，其对于旋转轴的惯性矩为：

$$I_1 = \frac{ba^3}{12} + ab\left(\frac{a^2}{9} + \frac{4}{9}H^2\right) \quad (19)$$

同理，对于下方矩形截面，其对于旋转轴的惯性矩为：

$$I_2 = \frac{2ba^3}{3} + 2ab\left(\frac{a^2}{36} + \frac{H^2}{9}\right) \quad (20)$$

则屈体姿态下跳水运动员翻腾动作的惯性矩为:

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad (21)$$

联立公式 (17)、(19)、(20)、(21) 可得:

$$I_0 = \frac{11b}{324} H_l^3 + \frac{2bH^2}{9} H_l \quad (22)$$

4.3.2.3 抱膝姿态下的惯性矩计算

首先将抱膝姿态下的跳水运动员几何模型简化成一个质量均匀的圆柱体, 该圆柱体由直体状态下的跳水运动员演变而来, 直体状态下跳水运动员几何模型可以为一个质量均匀的长为 a , 宽为 b , 高为 H_l 的长方体, 由演变前后运动员体积不变, 且 x 轴方向长度不变, 得

$$\frac{\pi D^2}{4} \times b = a \times b \times H_l \quad (23)$$

同样地, 抱膝姿态下, 运动员做翻腾运动时的旋转轴必过圆形截面形心且平行于 x 轴, 则其惯性矩为:

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{64} \quad (24)$$

联立公式 (23) 与公式 (24) 得:

$$I_0 = \frac{a^2 H_l^2}{4\pi} \quad (25)$$

4.4 模型结果与评价

综上所述, 运动员完成各个跳水动作的时间 T_{air} 与其体型(身高 H_l 、体重 M) 的关系如下:

$$\begin{cases} 2\pi m + nS = T_{air} \frac{2E_s}{l} + 2nlT_t \frac{E_t - E_s}{l^2} \\ l = 3.22 \times 10^{-6} H_l^2 M^2 - 0.0411 H_l M + 139.9 \end{cases} \quad (26)$$

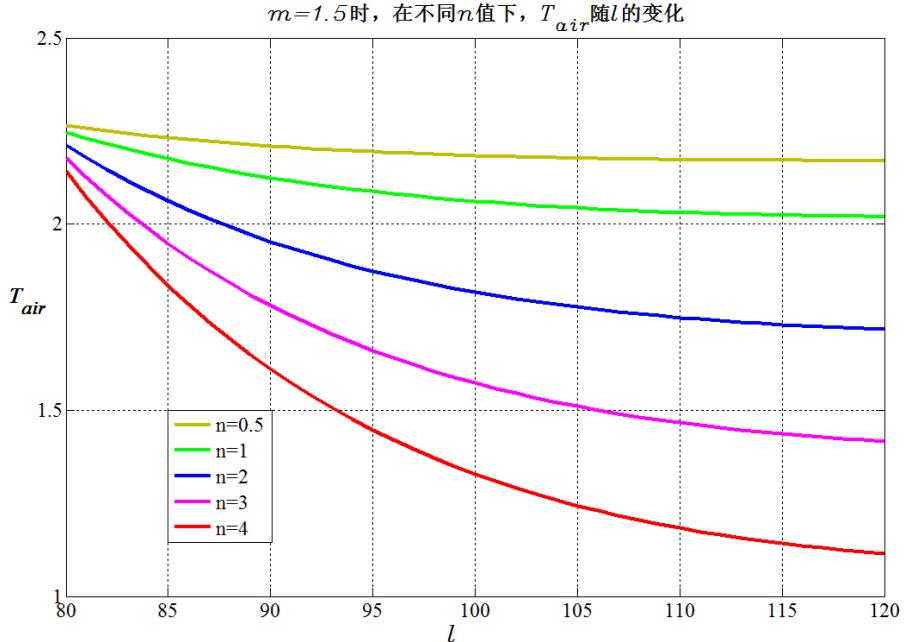
$$I_{s,yy} = \begin{cases} \frac{bH_l^3}{12} & A. Strait \\ \frac{11b}{324} H_l^3 + \frac{2bH^2}{9} H_l & B. Pike \\ \frac{a^2 H_l^2}{4\pi} & C. Tuck \end{cases} \quad (27)$$

在公式 (26) 中, 翻腾过程消耗能量 E_s 是与惯性矩 $I_{s,yy}$ 成正比的参数, 在公式 (27) 中, *A. Strait* 一行为直体姿态下运动员对翻腾动作轴线的惯性矩, *B. Pike*

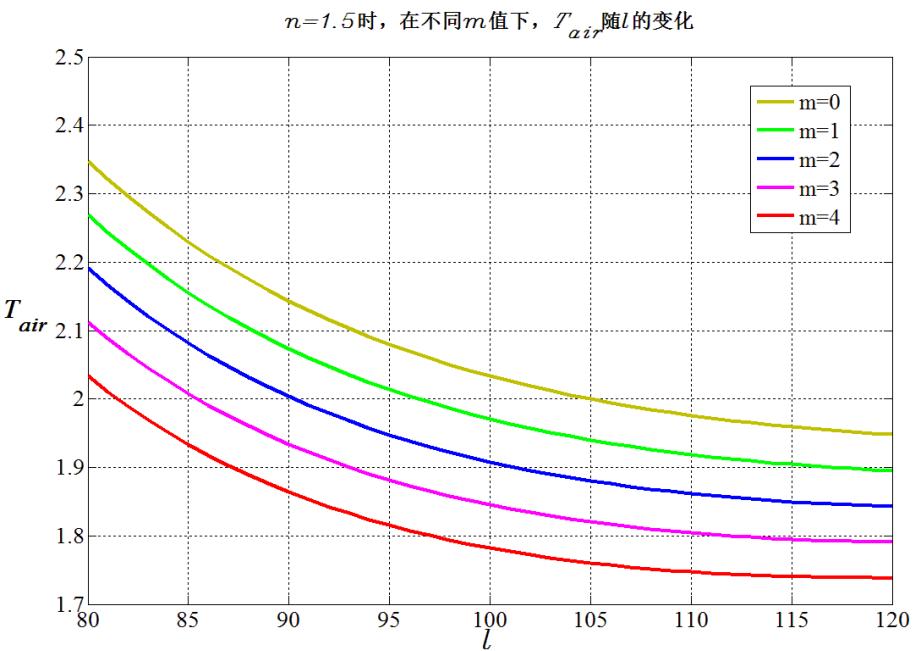
一行为屈体姿态下运动员对翻腾动作轴线的惯性矩, *C. Tuck* 一行为抱膝姿态下运动员对翻腾动作轴线的惯性矩。

4.4.1 模型适用于各种不同跳水动作的证明

首先, 为了直观的说明本文提出的模型适用于各种不同的跳水动作, 本文画出了在不同翻腾周数 m 与转体周数 n 下, 运动员的跳水时间 T_{air} 随其初始角动量 l 的关系, 如图 9 所示。



(a)



(b)

图 9 不同跳水动作下, 运动员的跳水时间随角动量的关系

探究分析：对于每一个跳水动作，都对应不同的翻腾周数 m 和转体周数 n 。在本文中，通过控制变量法，分别探究 m 不变时，运动员完成不同跳水动作的时间 T_{air} 随角动量 l 的变化以及 n 不变时， T_{air} 随 l 的变化。

首先，本文在 $m=1.5$ 时，针对不同的 n 值，研究 T_{air} 与 l 之间的关系。如图 9 (a) 所示：

*在不同的 n 值下， T_{air} 都随着 l 的增大而减小，且 l 越大， T_{air} 下降幅度越缓；
*纵向比较，发现在 l 相等的情况下， n 越大， T_{air} 越小。且 l 越大，相邻两个 n 值对应的 T_{air} 相差越大。

其次，本文在 $n=1.5$ 时，针对不同的 m 值，研究 T_{air} 与 l 之间的关系。如图 9 (b) 所示：

*在不同的 m 值下， T_{air} 都随着 l 的增大而减小，且 T_{air} 下降幅度几乎一致；
*纵向比较，发现在 l 相等的情况下， m 越大， T_{air} 越小。相邻两个 m 值对应的 T_{air} 相差几乎一样。

结果分析：

*本文建立的模型具有一定的普适性，对于不同的跳水动作（ m 不同， n 不同），其 $T_{air}-l$ 曲线的趋势都是一样的。

*对于不同的跳水动作，翻腾周数 m 越大或转体周数 n 越大或角动量 l 越大，运动员的跳水时间 T_{air} 越小。也就说明运动员如果在起跳的瞬间，获得越大的合外力矩 M_E ，就能做出难度系数越大的跳水动作，对应的跳水时间 T_{air} 也越少。

进一步地，对于不同的运动员，起跳时的初始角动量与跳水动作、运动员的经验与体型（身高，体重）间存在很大关系。在空中改变姿势对于不同体型的运动员，其难度也是不一样的。因此，为了获得更高的分数，运动员需要获得更大的初始角动量。而上文中已经对我国部分优秀跳水运动员的初始角动量与体型数据之间的关系进行了拟合，得到了角动量 l 与身高 H_l 、体重 M 的关系表达式。下一步

将探究运动员的跳水时间 T_{air} 与体型（身高 H_l 、体重 M ）的关系。

4.4.2 模型对典型跳水动作的适用性证明

4.4.2.1 5x35 系列动作

在证明本文提出的模型适用于各种不同的跳水动作后，本文将选取一些典型的跳水动作来具体分析运动员的跳水时间 T_{air} 与体型（身高 H_l 、体重 M ）的关

系。根据问题一的所得结论，总难度系数中不考虑运动员起跳动作。所以本文首先选取了 5x35 系列跳水动作（表示翻腾一周半，转体两周半），认为涵盖了所有的 5x(2m)(2n) 和 6 x (2m)(2n) 系列。接着，采用控制变量法，分别控制运动员的体重 M 和身高 H_l ，观察不同空中姿势（直体、屈体和抱膝）时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线。

图 10 为运动员在以直体的空中姿势完成 5x35 的动作时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线：

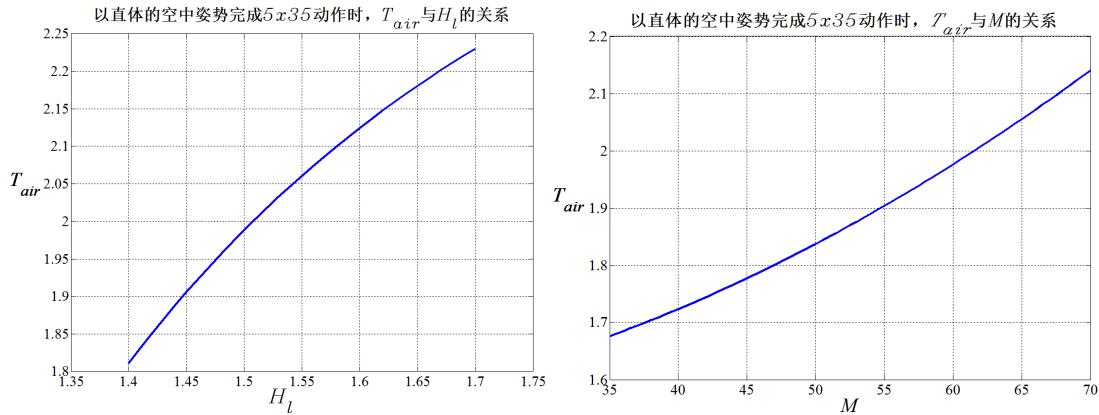


图 10 以直体的空中姿势完成 5x35 动作时， T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 10 可以发现， T_{air} 随着 H_l 的增大而增大，且变动幅度越来越小， T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.4 秒； T_{air} 随着 M 的增大而增大，且变动幅度越来越大， T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.5 秒。

上述模型结果说明，在以直体的空中姿势完成 5x35 的动作时，运动员的身高 H_l 、体重 M 会影响其完成一套跳水动作的时间，且该时间与运动员的身高 H_l 、体重 M 呈明显的正相关关系。

图 11 为运动员在以屈体的空中姿势完成 5x35 的动作时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线：

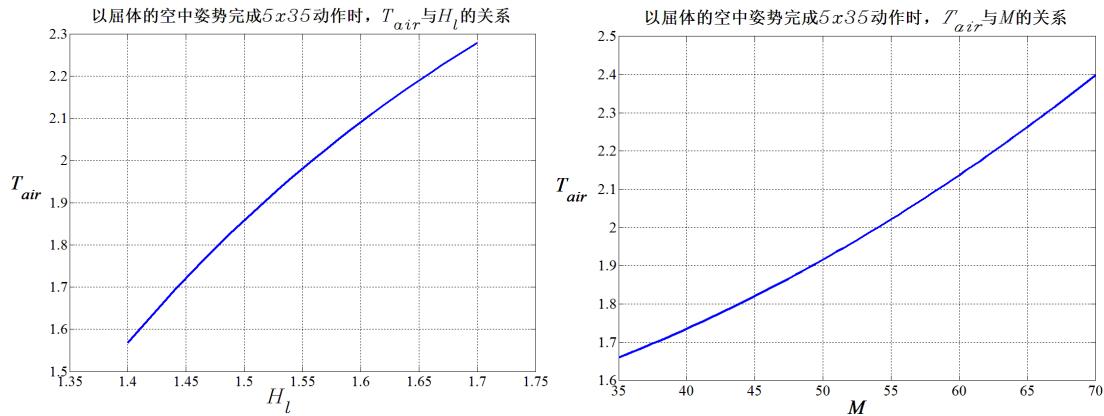


图 11 以屈体的空中姿势完成 5x35 动作时, T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 11 可以发现, T_{air} 随着 H_l 的增大而增大, 且变动幅度越来越小; T_{air} 随着 M 的增大而增大, 且变动幅度越来越大, T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.7 秒。

上述模型结果说明在以屈体的空中姿势完成 5x35 的动作时, 运动员的身高 H_l 、体重 M 会影响其完成一套跳水动作的时间, 且该时间与运动员的身高 H_l 、体重 M 呈明显的正相关关系, 以屈体的空中姿势完成 5x35 的动作比以直体的空中姿势完成更容易受到运动员的身高、体重的影响。

图 12 为运动员在以抱膝的空中姿势完成 5x35 的动作时, 运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型 (身高 H_l 、体重 M) 间的关系曲线:

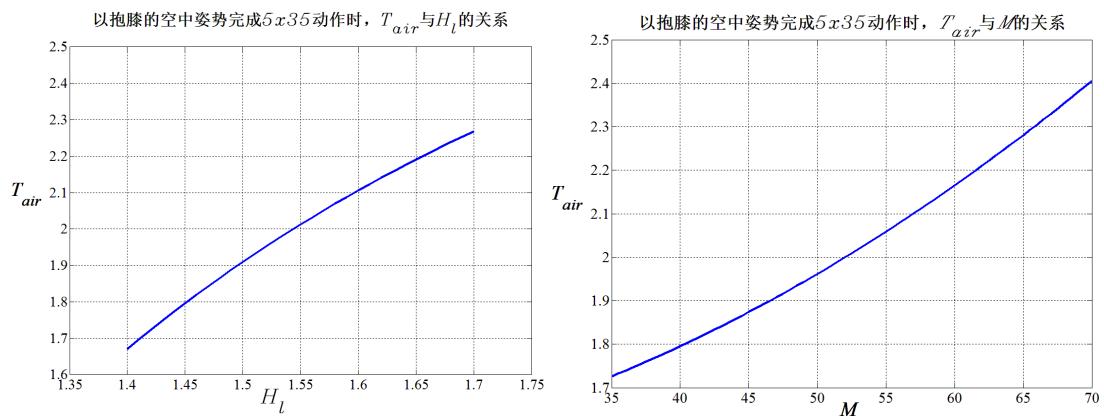


图 12 以抱膝的空中姿势完成 5x35 动作时, T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 12 可以发现, T_{air} 随着 H_l 的增大而增大, 且变动幅度越来越小; T_{air} 随着 M 的增大而增大, 且变动幅度越来越大, T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.7 秒。

上述模型结果说明在以抱膝的空中姿势完成 5x35 的动作时，运动员的身高 H_l 、体重 M 会影响其完成一套跳水动作的时间，且该时间与运动员的身高 H_l 、体重 M 呈明显的正相关关系，与运动员以屈体的空中姿势完成跳水动作所相似的是，以抱膝的空中姿势完成 5x35 的动作比以直体的空中姿势完成更容易受到运动员的身高、体重的影响。

结果分析：

*无论空中姿势是直体、屈体还是抱膝，运动员的跳水时间 T_{air} 随身高 H_l 、体重 M 的变化趋势是一样的，即都随着身高 H_l 、体重 M 的增大而增大。

*体型越大（身高 H_l 或体重越大）的人，完成同一跳水动作时，所用的时间就越多。在空中时，由于角动量守恒，体型越大的人转动半径越大、质量越大，使得其角速度减小。同时，在做屈体或抱膝的空中姿势时，体型更大的人起跳后快速收腹使身体成屈体或抱膝的时间相对更长，腹肌肌力相对小，使动作显得缓慢，而影响后继的转动速度，从而最终影响了跳水的时间^[4]。

4.4.2.2 x03 系列动作

对于没有转体动作的跳水动作，本文选用 x03 系列作为观察对象，认为涵盖了所有的 x0(2m) 系列和 x1(2m) 系列。同样地，采用控制变量法，分别控制运动员的体重 M 和身高 H_l ，观察不同空中姿势（直体、屈体和抱膝）时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线。

图 13 为运动员在以直体的空中姿势完成 x03 的动作时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线：

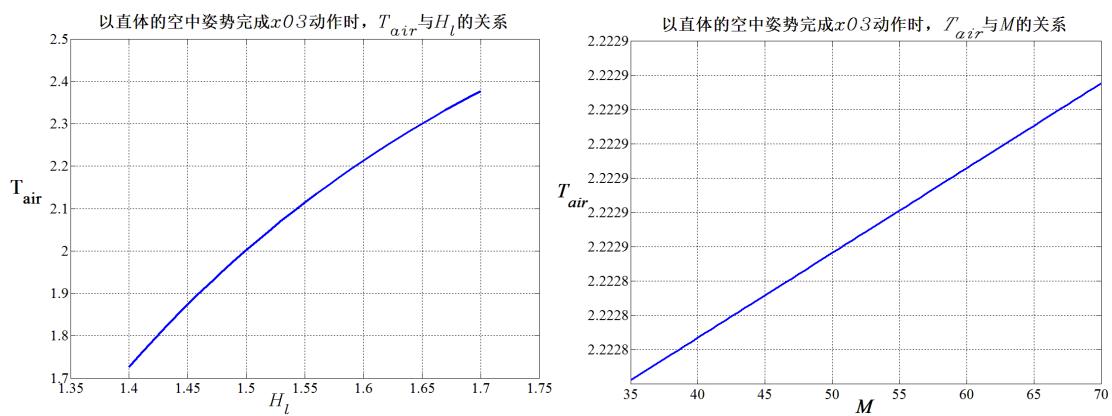


图 13 以直体的空中姿势完成 x03 动作时， T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 13 可以发现， T_{air} 随着 H_l 的增大而增大，且变动幅度越来越小， T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.7 秒；但 T_{air} 随着 M 的增大却几乎不变。

上述模型结果说明在以直体的空中姿势完成 x03 的动作时，运动员的身高 H_l

会影响其完成一套跳水动作的时间 T_{air} ，且该时间与运动员的身高 H_l 呈明显的正相关关系。对于运动员完成一套跳水动作的时间 T_{air} 而言，体重 M 的影响不大。

图 14 为运动员在以屈体的空中姿势完成 x03 的动作时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线：

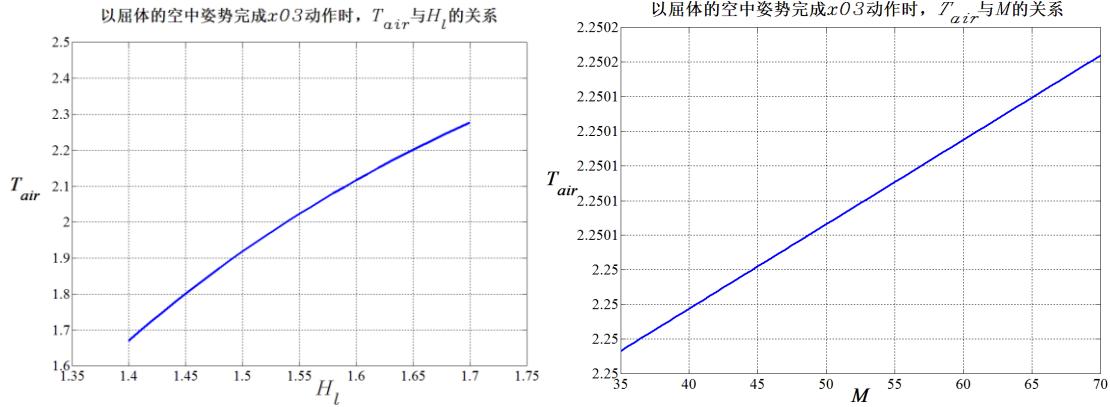


图 14 以屈体的空中姿势完成 x03 动作时， T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 14 可以发现， T_{air} 随着 H_l 的增大而增大，且变动幅度越来越小， T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.6 秒；但 T_{air} 随着 M 的增大却几乎不变。

上述模型结果说明在以屈体的空中姿势完成 x03 的动作时，运动员的身高 H_l 会影响其完成一套跳水动作的时间 T_{air} ，且该时间与运动员的身高 H_l 呈明显的正相关关系。对于运动员完成一套跳水动作的时间 T_{air} 而言，体重 M 的影响不大。而且，与以直体的空中姿势完成跳水动作相比，以屈体的空中姿势完成 x03 的动作受运动员的身高的影响略微小一点。

图 15 为运动员在以抱膝的空中姿势完成 x03 的动作时，运动员的跳水时间 T_{air} 与运动员的体型（身高 H_l 、体重 M ）间的关系曲线：

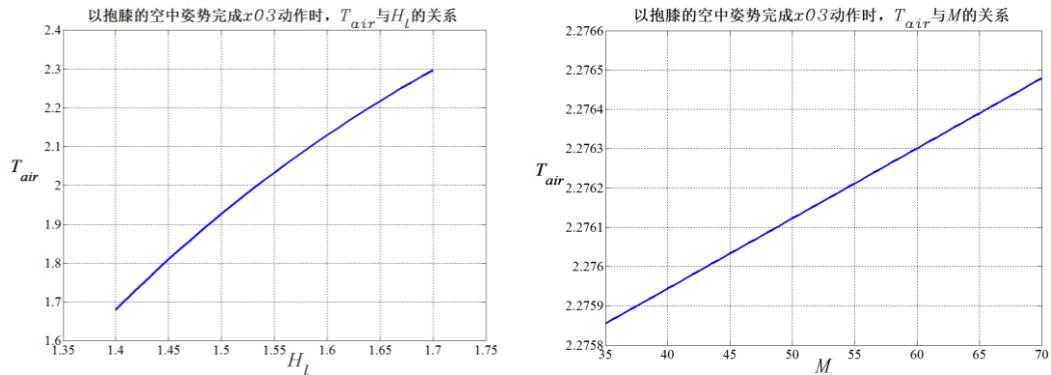


图 15 以抱膝的空中姿势完成 x03 动作时， T_{air} 与 H_l 、 M 的关系曲线

观察图 15 可以发现, T_{air} 随着 H_l 的增大而增大, 且变动幅度越来越小, T_{air} 的最大值与最小值之间相差了 0.6 秒; 但 T_{air} 随着 M 的增大却几乎不变。

上述模型结果说明在以抱膝的空中姿势完成 x03 的动作时, 运动员的身高 H_l 会影响其完成一套跳水动作的时间 T_{air} , 且该时间与运动员的身高 H_l 呈明显的正相关关系。对于运动员完成一套跳水动作的时间 T_{air} 而言, 体重 M 的影响不大。与运动员以屈体的空中姿势完成跳水动作所相似的是, 以抱膝的空中姿势完成 x03 的动作受运动员身高的影响比直体姿势完成略微小一点。

结果分析:

*无论空中姿势是直体、屈体还是抱膝, 运动员的跳水时间 T_{air} 随身高 H_l 、体重 M 的变化趋势是一样的, 即都随着身高 H_l 、体重 M 的增大而增大。

*相比于既有翻腾又有转体的跳水动作 5x03 系列, 单单只有翻腾的跳水动作 x03 系列的跳水时间对运动员的体重 M 的敏感度很低, 几乎不变。

综上所述: 首先, 本章应用物理学方法, 建立了描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型 (身高, 体重) 之间的模型, 并验证了其良好的普适性:

$$\begin{cases} 2\pi m + nS = T_{air} \frac{2E_s}{l} + 2nlT_t \frac{E_t - E_s}{l^2} \\ l = 3.22 \times 10^{-6} H_l^2 M^2 - 0.0411 H_l M + 139.9 \end{cases}$$

$$I_{s,yy} = \begin{cases} \frac{bH_l^3}{12} & A. Strait \\ \frac{11b}{324} H_l^3 + \frac{2bH_l^2}{9} H_l & B. Pike \\ \frac{a^2 H_l^2}{4\pi} & C. Tuck \end{cases}$$

然后, 在该模型中具体探究运动员的跳水时间 T_{air} 和其体型 (高 H_l 、体重 M) 之间的关系。发现, 无论空中姿势是直体、屈体还是抱膝, 完成的跳水动作是 5x35 系列还是 x03 系列, 运动员的跳水时间 T_{air} 随身高 H_l 、体重 M 的变化趋势是一样的, 即都随着身高 H_l 、体重 M 的增大而增大。但是, 相比于既有翻腾又有转体的跳水动作 (5x(2m)(2n) 系列和 6x(2m)(2n) 系列), 单单只有翻腾的跳水动作 (x0(2m) 系列和 x1(2m) 系列) 的跳水时间对运动员的体重 M 的敏感度很低, 几乎不变。

5. 问题三的分析与建模

5.1 问题分析

从问题二的模型结果可以看出，运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高，体重）之间存在着明显的关系。随着运动员身高与体重的增加，运动员完成跳水动作的时间也随之增加。而从图 9 (a) 和图 9 (b) 中本文可以发现，随着翻腾周数 m 与转体周数 n 的增加，运动员完成一套跳水动作的时间减少。身高较高的运动员因转动半径更大而转速更小，体重较重的运动员因为其质量 M 更大难以获得较大的起跳速度。问题二的结果与上述分析明显反映出身材矮小、体重轻巧的运动员更易于获得较大的转动速度，身体更灵活，更易于做出难度系数较大的跳水动作。

基于以上分析，在 10 米跳台跳水比赛中，设置体型校正系数是有必要的。本文根据不同体型的运动员完成各个跳水动作时间的一致性，设置与运动员身高、体重、跳水动作相关的体型校正系数。根据问题二的结果与分析，跳水动作时间可以间接反映出该跳水动作的难度，要想让同一跳水动作对于不同体型的运动员具有相同的难度，就必须为不同体型的运动员完成跳水动作的时间分配不同的权重。

因此，问题三的解答需要分为两步：

- (1) 通过问题二中运动员跳水过程的动力学模型，推导出运动员完成一次跳水动作的时间 T_{air} 与其翻腾周数 m 、转体周数 n 、身高 H_l 、体重 M 之间的关系；
- (2) 为不同身高、体重的运动员分配不同的体型校正系数，使其完成跳水动作的时间 T_{air} 与权重 λ 的乘积尽可能相同。

5.2 体型校正系数模型

在体型校正系数模型中，本文假设运动员在完成起跳后至入水前的时间内，跳水过程的所有能量都用于完成转体动作与翻腾动作。即假设在不同动作的衔接过程中，姿势变化是瞬时且不消耗能量的。

基于以上假设与分析，跳水过程所需的总能量 E 满足如下关系式：

$$E = E_s + E_t \quad (28)$$

联立公式 (9) (11) (26) (27) (28) 可得运动员完成一次跳水动作的时间 T_{air}

与其翻腾周数 m 、转体周数 n 、身高 H_l 、体重 M 之间的关系：

$$T_{air} = \frac{1}{I_{s,yy}} \left(2\pi m + nS - 4\pi n \frac{(J_y^{-1} - J_z^{-1})^{-1}}{\sin(\chi + P)} \left(\frac{E}{l^2} - I_{s,yy} \right) \right) \quad (29)$$

本文使用运动员完成一次跳水动作的时间 T_{air} 来表征该跳水动作的难度系数，为了让同一跳水动作对于不同体型的运动员具有相同的难度，给出如下难度修正公式，以尽可能消去难度系数 DD 中的身高 H_l 、体重 M 参量：

$$DD = T_{air} \cdot \lambda(m, n, H_l, M) \quad (30)$$

联立公式 (29) (30) 可得体型校正系数的表达式:

$$\lambda(m, n, H_l, M) = \frac{I_{s,yy}}{2\pi m + Sn - K_0 \left(\frac{E}{l^2} - I_{s,yy} \right) n} \cdot DD \quad (31)$$

上述体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 是与运动员身高 H_l 、体重 M 、翻腾周数 m 、转体周数 n 有关的函数, 其中 K_0 为常数, 其表达式如公式 (32) 所示:

$$K_0 = \frac{4\pi}{(J_y^{-1} - J_z^{-1}) \sin(\chi + P)} \quad (32)$$

角动量 l 与惯性矩 $I_{s,yy}$ 是与运动员身高、体重有关的物理量, 公式的合理性已在前文小节 (4.3) 中给出说明, 公式如下:

$$l = 3.22 \times 10^{-6} H_l^2 M^2 - 0.0411 H_l M + 139.9 \quad (33)$$

$$I_{s,yy} = \begin{cases} \frac{bH_l^3}{12} & A. Strait \\ \frac{11b}{324} H_l^3 + \frac{2bH^2}{9} H_l & B. Pike \\ \frac{a^2 H_l^2}{4\pi} & C. Tuck \end{cases} \quad (34)$$

代入第 11、12 两届亚运会与巴塞罗那、亚特兰大两届奥运会跳水比赛中的实测数据发现: 在符合实际情况的合理取值范围内, K_0 、 S 、 E 的取值对于体型校正系数没有明显的影响。因此, 本文使用文献资料法与数理统计法, 将 K_0 、 S 、 E 视为定值, 并对其进行了合理的取值。本文将在接下来的小节 (5.3) 中, 以两组跳水动作为例, 验证该体型校正系数模型的修正效果。

5.3 模型结果与评价

为了验证本文所提出的体型校正系数模型的修正效果, 本文取不同体型的运动员以直体、屈体、抱膝三种空中姿势完成 5x35、x03 动作为典例进行分析。

5.3.1 对 5x35 系列动作的校正效果

(a) 直体姿势

下图 16 为运动员在以直体的空中姿势完成 5x35 的动作时, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势, 图 17 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后, 模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线:

基于 $5 \times 35A$ 动作的体型校正系数

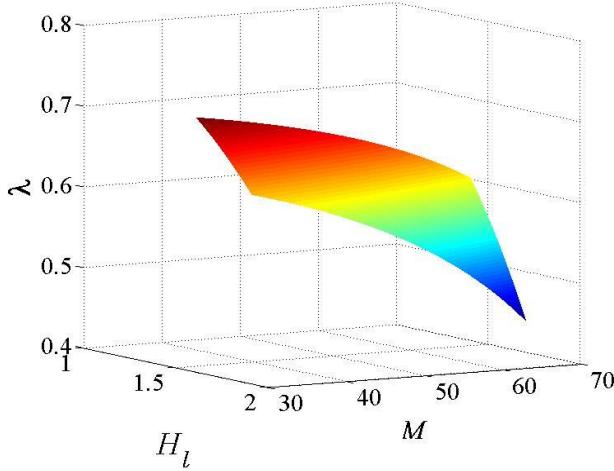


图 16 基于 $5 \times 35A$ 动作的体型校正系数

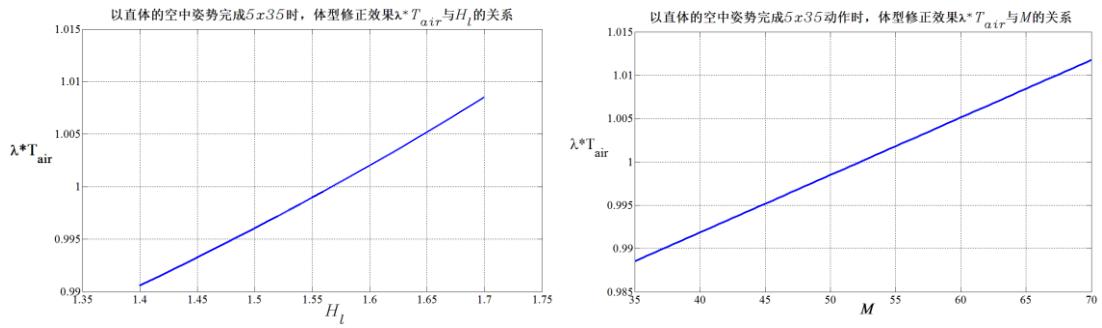


图 17 直体姿势下完成 5×35 时, 体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 16 和图 17 可以看出, 直体姿势下, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 和体重 M 的增加而减小。在误差允许的范围内, 可以认为经过体型修正系数修正后, 该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素(包括身高 H_l 和体重 M)的影响。

(b) 屈体姿势

下图 18 为运动员在以屈体的空中姿势完成 5×35 的动作时, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势, 图 19 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后, 模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线:

基于 $5 \times 35B$ 动作的体型校正系数

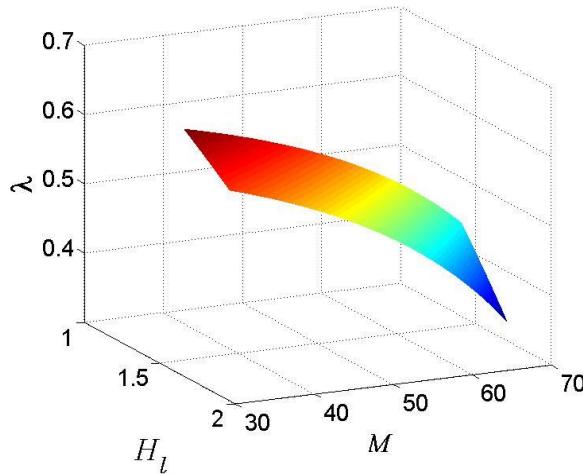


图 18 基于 $5 \times 35B$ 动作的体型校正系数

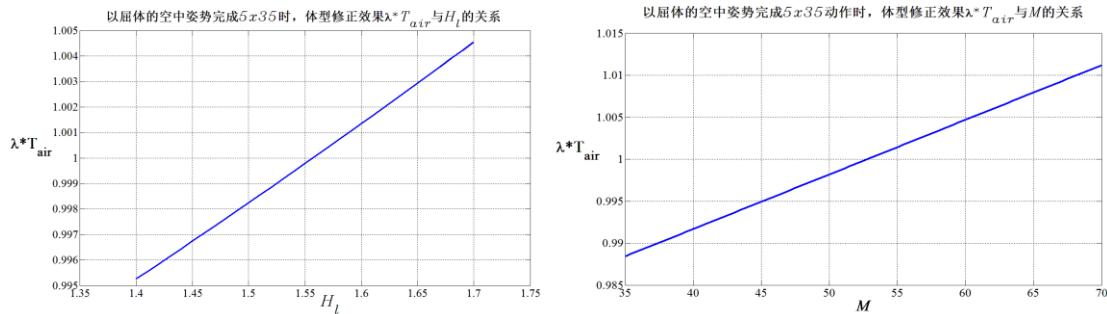


图 19 屈体姿势下完成 5×35 时, 体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 18 和图 19 可以看出, 同样的, 屈体姿势下, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 和体重 M 的增加而减小。在误差允许的范围内, 可以认为经过体型修正系数修正后, 该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素(包括身高 H_l 和体重 M)的影响。

(c) 抱膝姿势

下图 20 为运动员在以抱膝的空中姿势完成 5×35 的动作时, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势, 图 21 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后, 模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线:

基于 $5 \times 35C$ 动作的体型校正系数

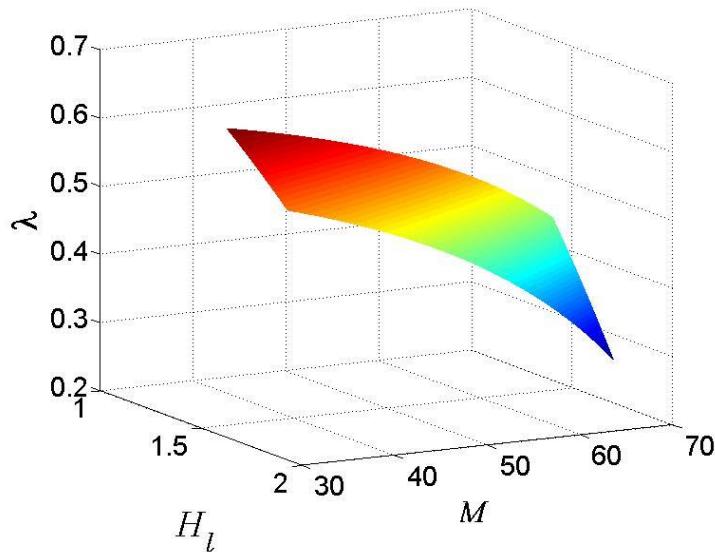


图 20 基于 $5 \times 35C$ 动作的体型校正系数

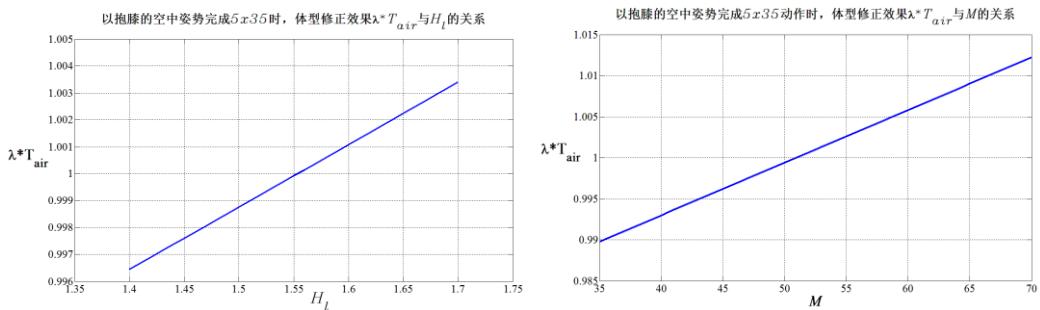


图 21 抱膝姿势下完成 5×35 时，体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 20 和图 21 可以看出，相同的，在抱膝姿势下，体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 和体重 M 的增加而减小。在误差允许的范围内，可以认为经过体型修正系数修正后，该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素（包括身高 H_l 和体重 M ）的影响。

5.3.2 对 x03 系列动作的校正效果

(a) 直体姿势

下图 22 为运动员在以直体的空中姿势完成 x03 的动作时，体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势，图 23 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后，模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线：

基于x03A动作的体型校正系数

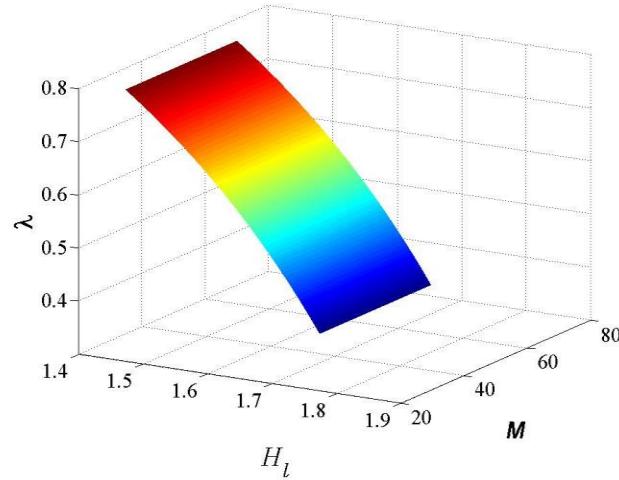


图 22 基于 x03A 动作的体型校正系数

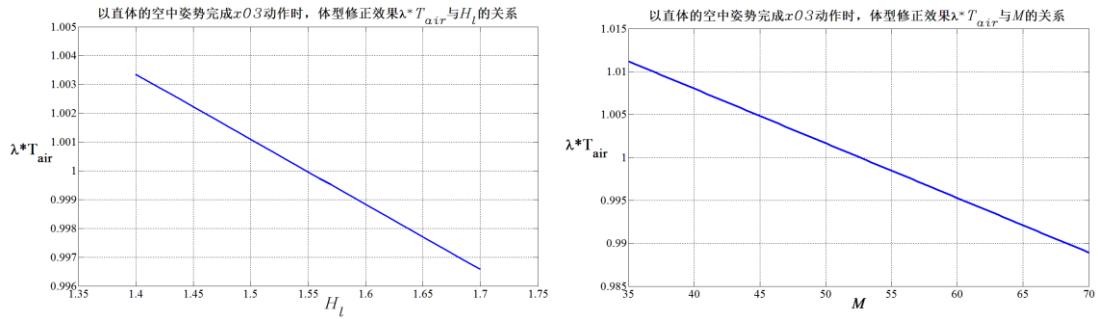


图 23 直体姿势下完成 x03 时, 体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 22 和图 23 可以看出, 直体姿势下, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 的增加而减小, 基本不随体重 M 变化。在误差允许的范围内, 可以认为经过体型修正系数修正后, 该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素(包括身高 H_l 和体重 M)的影响。

(b) 屈体姿势

下图 24 为运动员在以屈体的空中姿势完成 x03 的动作时, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势, 图 25 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后, 模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线:

基于x03B动作的体型校正系数

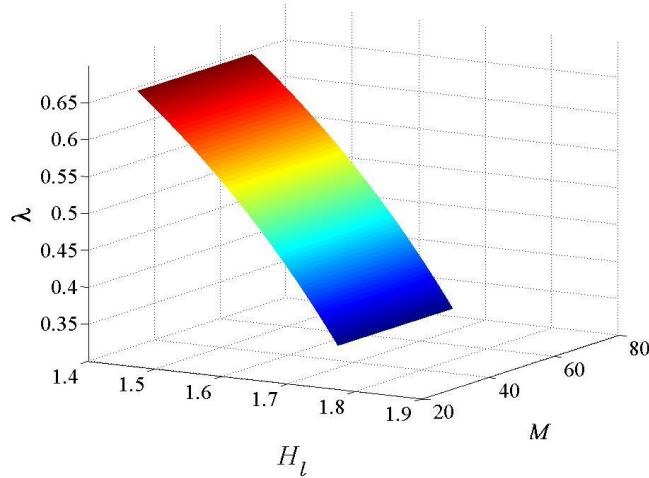


图 24 基于 x03B 动作的体型校正系数

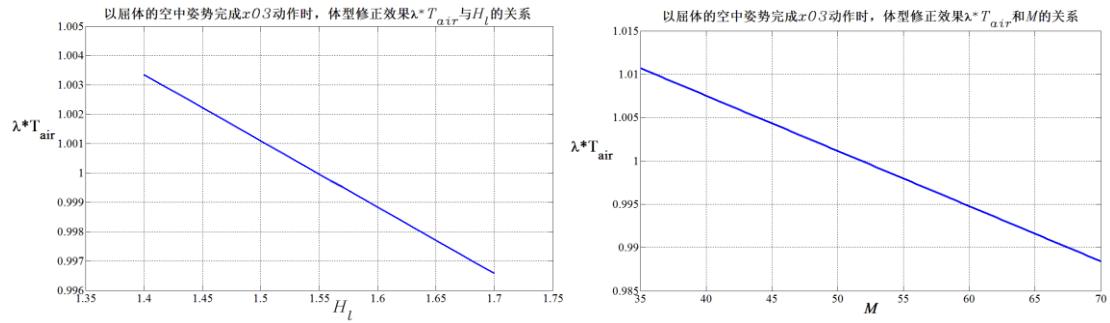


图 25 屈体姿势下完成 x03 时, 体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 24 和图 25 可以看出, 同样的, 在屈体姿态下, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 的增加而减小, 基本不随体重 M 变化。在误差允许的范围内, 可以认为经过体型修正系数修正后, 该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素 (包括身高 H_l 和体重 M) 的影响。

(c) 抱膝姿势

下图 26 为运动员在以抱膝的空中姿势完成 x03 的动作时, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化趋势, 图 27 为用体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 修正后, 模型的结果随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线:

基于x03C动作的体型校正系数

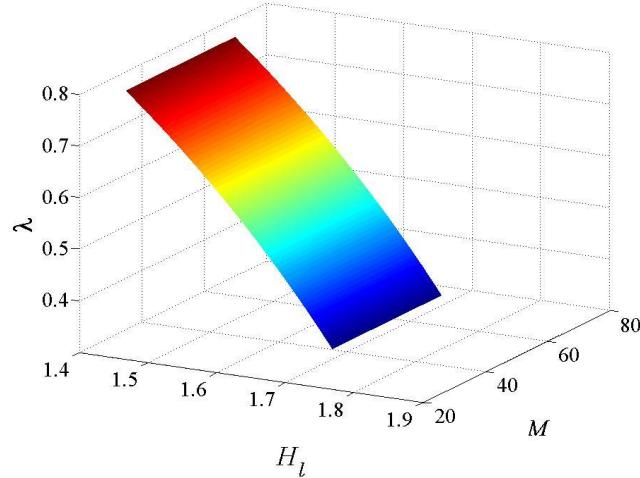


图 26 基于 x03C 动作的体型校正系数

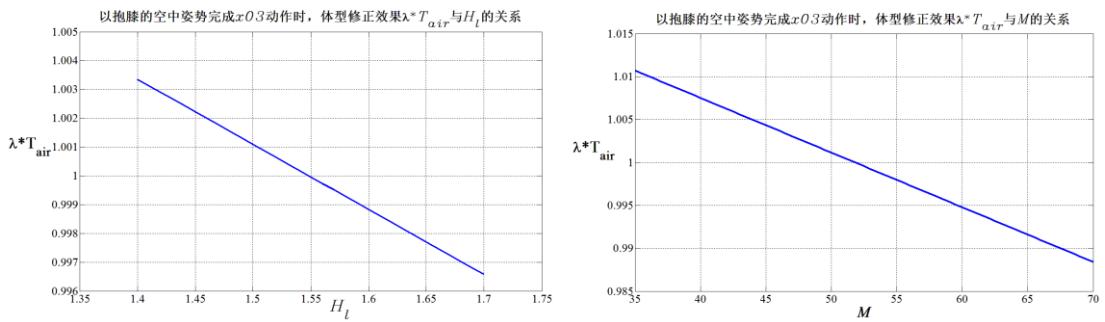


图 27 抱膝姿势下完成 x03 时, 体型修正效果分别随运动员身高 H_l 和体重 M 的变化曲线

从上图 26 和图 27 可以看出, 相同的, 在抱膝姿势下, 体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 随身高 H_l 的增加而减小, 基本不随体重 M 变化。在误差允许的范围内, 可以认为经过体型修正系数修正后, 该动作的完成情况不再受到跳水运动员体型因素 (包括身高 H_l 和体重 M)。

综上所述, 在 10 米跳台跳水中, 设置体型校正系数是有必要的。并且通过体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 的修正, 模型的结果几乎不受运动员体型 (身高 H_l 和体重 M) 的影响, 所以本文认为, 本文设置的体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 起到了较好的效果。

6. 问题四的分析与建模

6.1 问题分析

问题四需要本文基于已经建立的上述模型，给出表 1 中所列的十米跳台跳水动作的难度系数，分析模型的结果与附件 1 中规定的难度系数有无区别，并且作出合理的解释。在问题二中，本文建立了描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高，体重）之间关系的模型，并且发现身材短小、体重轻巧的运动员能在更短的时间内完成更加复杂的动作，动作的难度系数与运动员完成这一套动作所需时间存在某种关系；在问题三中，本文讨论了在 10 米跳台跳水比赛中设置体型校正系数的必要性，并给出了合理的体型校正系数模型。

基于上述模型，本文使用运动员完成一套跳水动作所需时间来评价跳水动作的难度系数。根据问题二的模型结果，本文发现：在角动量相同的情况下，一套简单的动作从离开跳台到入水过程经历的时间较长，而一套复杂的跳水动作反而需要较少的时间。

基于以上分析，问题四的解答需要分为两步：

- (1) 建立运动员完成一套跳水动作所需的时间与该跳水动作难度系数之间的模型；
- (2) 使用建立的难度系数评价模型评价表 1 中所列的十米跳台跳水动作的难度系数，分析模型的结果与附件 1 中规定的难度系数有无区别，并且作出合理的解释。

6.2 难度系数评价模型

根据附件 1 中《国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则》，一套跳水动作的难度系数可以由 DD 表示， DD 的表达式如公式 (32) 所示：

$$DD = A + B + C + D + E \quad (35)$$

其中， A 为翻腾过程的难度系数， B 为空中姿势的难度系数， C 为转体过程的难度系数， D 为起跳前正面朝向以及翻腾方向的难度系数， E 为入水过程的难度系数。

本文提出的难度系数评价模型只对翻腾过程、转体过程与空中姿势进行难度系数的修正，运动员起跳前的正面朝向、翻腾方向与跳水完成时的入水方式仍然沿用国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则。

根据国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，一套跳水动作的难度系数 DD 的计算方式如表 3 所示。

表 3 国际泳联十米跳台跳水难度系数计算方法

序号	动作代码	A'	B'		C	D	E	DD	
			PIKE	TUCK				PIKE	TUCK
1	105	2.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	2.3	2.1
2	107	2.7	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0	2.7
3	109	3.5	0.4	0.0	0.0	0.2	0.0	4.1	3.7
4	1011	4.5	--	0.0	0.0	0.2	0.0	--	4.7
5	205	2.1	0.3	0.1	0.0	0.2	0.3	2.9	2.7
6	207	2.7	0.3	0.0	0.0	0.2	0.4	3.6	3.3
7	209	3.5	0.4	0.1	0.0	0.2	0.4	4.5	4.2
8	305	2.1	0.2	0.0	0.0	0.4	0.3	3.0	2.8
9	307	2.7	0.3	0.0	0.0	0.3	0.4	3.7	3.4
10	309	3.5	0.6	0.3	0.0	0.3	0.4	4.8	4.5
11	405	2.1	0.5	0.2	0.0	0.2	0.0	2.8	2.5
12	407	2.7	0.6	0.3	0.0	0.2	0.0	3.5	3.2
13	409	3.5	0.7	0.4	0.0	0.2	0.0	4.4	4.1
14	5154	2.1	0.2	0.0	1.0	0.0	0.0	3.3	3.1
15	5156	2.1	0.2	0.0	1.5	0.0	0.0	3.8	3.6
16	5172	2.7	0.3	0.0	0.6	0.0	0.0	3.6	3.3
17	5255	2.1	0.3	0.1	1.0	0.2	0.0	3.6	3.4
18	5257	2.1	0.3	0.1	1.5	0.2	0.0	4.1	3.9
19	5271	2.7	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	3.2	2.9
20	5273	2.7	0.3	0.0	0.6	0.2	0.0	3.8	3.5
21	5275	2.7	0.3	0.0	1.0	0.2	0.0	4.2	3.9
22	5353	2.1	0.2	0.0	0.6	0.4	0.0	3.3	3.1
23	5355	2.1	0.2	0.0	1.0	0.4	0.0	3.7	3.5
24	5371	2.7	0.3	0.0	0.0	0.3	0.0	3.3	3.0
25	5373	2.7	--	0.0	0.6	0.3	0.0	--	3.6
26	5375	2.7	--	0.0	1.0	0.3	0.0	--	4.0

根据表 3 可以看出，难度系数 A 与 C 是综合难度系数的重要评价指标，在综合难度系数中占有较大的比重。这侧面反映出难度系数的评定与运动员完成的翻腾周数 m 及转体周数 n 存在着很大关系。在问题二中，本文建立了运动员完成一套跳水动作所需的时间 T_{air} 与翻腾周数 m 及转体周数 n 之间的模型，并且在前文说明了完成一套跳水动作所需时间 T_{air} 与该跳水动作难度系数 DD 的相关性。

在问题四中，本文将建立一种基于运动员完成一套跳水动作所需时间 T_{air} 的难度评价模型，通过翻腾周数 m 、转体周数 n 及时间 T_{air} 来评价翻腾与转体动作的综合难度系数 A' ，在此基础上分别用 B' 、 C' 校正空中姿势、起跳姿势的不同造成的难度系数变化，并沿用国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则中，起

跳前正面朝向以及翻腾方向的难度系数 D 与入水过程的难度系数 E , 综合评定各个跳水动作的难度系数。

对于翻腾与转体动作的综合难度系数 A' , 其表达式如公式 (36) 所示:

$$A' = \frac{1}{T_{air}} (k_1 m^\alpha + k_2 n^\beta) \quad (36)$$

在公式 (36) 中, k_1 、 k_2 、 α 、 β 为常数。

由式 (36) 可知, 参数优化模型的待求参数为 $(k_1, k_2, \alpha, \beta)$ 。对于以上 4 项参数的求解方法, 若采用全局搜索优化方法会导致求解程序效率极低, 短时间内不能获得满意结果。

遗传算法^{[8]-[9]}是一种概率化搜索方法, 模拟自然演化原理的人工适应系统能自动获取和指导优化的搜索空间, 自适应地调整搜索方式。

GA 算法的优化流程图如图 28 所示:

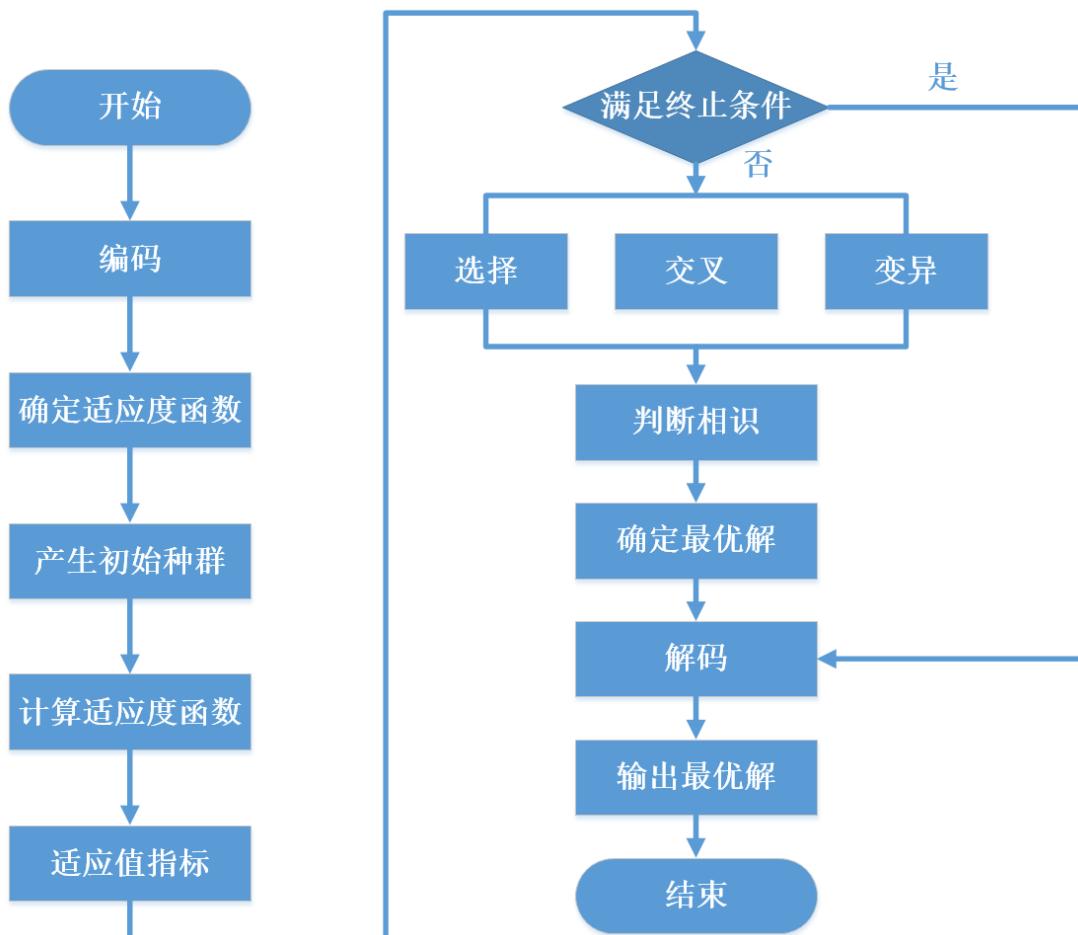


图 28 GA 算法的优化流程图

传统遗传算法参数中交叉概率和变异概率的选择是影响遗传算法行为和性能的最关键因素。若交叉概率过大, 遗传模式被破坏几率变大, 使得具有高度适应度的个体很快被破坏; 若交叉概率过小, 会使搜索过程缓慢, 一直停滞不前。

美国密歇根大学 Holland 等提出一种自适应遗传算法, 交叉概率与变异概率

能够随着个体适应度大小而自动改变。当种群个体适应度趋于一致或者局部最优时，增加交叉概率和变异概率；当群体适应度比较分散时，使得交叉概率和变异概率减小。

本文采用自适应遗传算法对待求参数进行迭代优化，自适应算法的交叉概率 A'_c 和变异概率 A'_m 的计算方法如下：

$$A'_c = \begin{cases} \frac{k_1(f_{\max} - f)}{f_{\max} - f_{avg}} & , f \geq f_{avg} \\ k_2 & , f < f_{avg} \end{cases} \quad (37)$$

$$A'_m = \begin{cases} \frac{k_3(f_{\max} - f')}{f_{\max} - f_{avg}} & , f' \geq f_{avg} \\ k_4 & , f' < f_{avg} \end{cases} \quad (38)$$

其中， f_{\max} ：群体中的最大适应度值；

f_{avg} ：群体中的平均适应度值；

f ：要交叉的两个个体中较大适应度值；

f' ：要变异个体的适应度值；

k_1 、 k_2 、 k_3 和 k_4 为常数。

接着，确定遗传算法目标函数。结合本题，本文建立参数求解模型，目的是得到一组参数 $(k_1, k_2, \alpha, \beta)$ 使得得到的新的翻腾与转体动作的综合难度系数 A' 能充分考虑到体型的影响。同时要兼顾《国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则》中动作的原始难度系数，因此，该模型的目标函数即为对应于每一个跳水动作的新的翻腾与转体动作综合难度系数 A' 与原始难度系数中 $A+B+C$ 之间的差的和的最小值，即：

$$\min sum = \sum_{i=1}^n |A'_i - (A_i + B_i + C_i)| \quad (39)$$

其中， sum ：对应于每一个跳水动作的新的翻腾与转体动作综合难度系数 A' 与原始难度系数中 $(A+B+C)$ 之间的差的和的最小值；

A'_i ：对应于第 i 个跳水动作的新的综合难度评价系数 A' 的值；

$(A_i + B_i + C_i)$ ：对应于第 i 个跳水动作的原始难度系数 $(A+B+C)$ 的值；

n ：跳水动作的个数，本题中为 $n = 26$ 。

然后，依据题目给出的一组难度系数值作为初始种群，用以多次迭代得出最

优参数组合。根据遗传算法的特点，同时优化迭代多个参数时，需对参数的搜索范围进行限定，可大幅度提高运算效率。范围的设定要依据其实际的物理意义；若没有实际的物理意义，可以参照初始值的大小，适当扩大，以保证相对的全局最优解。

依据上述的数学模型和方法，运用 Matlab 软件编写自适应遗传算法程序模型，设置了 500 次迭代，经过多次运算，得到一组最优参数如表 4，使得 sum 最小。

表 4 自适应遗传算法求解最优参数值

参数	最优参数
k_1	2.1
k_2	0.45
α	0.85
β	0.01

所以得到翻腾与转体动作的综合难度系数 A' 的表达式为：

$$A' = \frac{1}{T_{air}} (2.1m^{0.85} + 0.45n^{0.01}) \quad (40)$$

综上所述，新的难度系数评价模型如公式 (41) 所示：

$$DD' = A' + B' + C' + D' + E' \quad (41)$$

其中， DD' 为校正后的难度系数， A' 为翻腾与转体动作的综合难度系数， B' 为空中姿势的难度校正系数， C' 为起跳姿势的难度校正系数， D' 为助跑方式的难度系数， E' 为入水方式的难度系数，各难度系数的表达式如公式 (42) - (47) 所示：

$$A' = \frac{1}{T_{air}} (2.1m^{0.85} + 0.45n^{0.01}) \quad (42)$$

$$B' = \begin{cases} 0.3 & B.PIKE \\ 0 & C.TUCK \end{cases} \quad (43)$$

$$C' = \begin{cases} 0.3 & INWARD \\ 0 & NOT\ INWARD \end{cases} \quad (44)$$

$$D' = D \quad (45)$$

$$E' = E \quad (46)$$

$$T_{air} = \frac{1}{I_{s,yy}} \left(2\pi m + nS - 4\pi n \frac{(J_y^{-1} - J_z^{-1})^{-1}}{\sin(\chi + P)} \left(\frac{E}{l^2} - I_{s,yy} \right) \right) \quad (47)$$

在新的难度系数评价模型中，本文对翻腾动作、转体动作与空中姿势的难度重新进行了评价。而评价起跳前正面朝向以及翻腾方向的难度系数 D 与入水过程的难度系数 E ，则继续沿用国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则。如表 5、表 6 所示。

表 5 起跳前正面朝向以及翻腾方向的难度系数 D

助跑方式	Forward		Back		Reverse			Inward	
翻腾周数	0.5-3.5	4.0-5.5	0.5-3.0	3.5-4.5	0.5-2.0	2.5-3.0	3.5-4.5	0.5-1.0	1.5-4.5
难度系数	0	0.2	0.2	0.2	0.3	0.4	0.3	0.3	0.2

表 6 入水过程的难度系数 E

翻腾周数	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.5
Forward/Inward	-	0.1	-	0.2	-	0.2	-	0.0	-	-
Back/ Reverse	0.1	-	0.2	-	0.3	-	0.4	-	0.4	0.0

6.3 模型结果与评价

根据小节（6.2）中的难度系数评价模型，本文对十米跳台跳水比赛中的一些经典动作重新进行了难度系数评价，最终的难度系数 DD' 以及 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' 每一项的值如表 7 所示，以直观的说明本文提出的新难度系数的计算过程。上述十米跳台跳水动作的新难度系数与国际泳联给出的难度系数在下表 8 中给出了比较。在该难度评价模型中， A' 是随翻腾周数 m 与转体周数 n 相关的重要参数， A' 随 m 和 n 的变化趋势如图 29 所示。

表 7 一些经典跳水动作的难度系数评价明细表

序号	动作代码	A'	B'		C'	D'	E'	DD'	
			PIKE	TUCK				PIKE	TUCK
1	105	2.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	2.3	2.0
2	107	2.8	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1	2.8
3	109	3.6	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	4.1	3.8
4	1011	4.4	--	0.0	0.0	0.2	0.0	--	4.6
5	205	2.0	0.3	0.0	0.0	0.2	0.3	2.8	2.5
6	207	2.8	0.3	0.0	0.0	0.2	0.4	3.7	3.4
7	209	3.6	0.3	0.0	0.0	0.2	0.4	4.5	4.2
8	305	2.0	0.3	0.0	0.0	0.4	0.3	3.0	2.7
9	307	2.8	0.3	0.0	0.0	0.3	0.4	3.8	3.5
10	309	3.6	0.3	0.0	0.0	0.3	0.4	4.6	4.3
11	405	2.0	0.3	0.0	0.3	0.2	0.0	2.8	2.5
12	407	2.8	0.3	0.0	0.3	0.2	0.0	3.6	3.3
13	409	3.6	0.3	0.0	0.3	0.2	0.0	4.4	4.1
14	5154	2.9	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	3.2	2.9
15	5156	3.3	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	3.6	3.3

16	5172	3.4	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	3.7	3.4
17	5255	3.1	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	3.6	3.3
18	5257	3.6	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	4.1	3.8
19	5271	3.2	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	3.7	3.4
20	5273	3.6	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	4.1	3.8
21	5275	4.2	0.3	0.0	0.0	0.2	0.0	4.7	4.4
22	5353	2.7	0.3	0.0	0.0	0.4	0.0	3.4	3.1
23	5355	3.1	0.3	0.0	0.0	0.4	0.0	3.8	3.5
24	5371	3.2	0.3	0.0	0.0	0.3	0.0	3.8	3.5
25	5373	3.6	--	0.0	0.0	0.3	0.0	--	3.9
26	5375	4.2	--	0.0	0.0	0.3	0.0	--	4.5

表 8: 十米跳台难度系数表 (部分动作)

动作代码	PIKE		TUCK		动作代码	PIKE		TUCK	
	原	新	原	新		原	新	原	新
	B	B	C	C		B	B	C	C
105	2.3	2.3	2.1	2.0	5154	3.3	3.2	3.1	2.9
107	3.0	3.1	2.7	2.8	5156	3.8	3.6	3.6	3.3
109	4.1	4.1	3.7	3.8	5172	3.6	3.7	3.3	3.4
1011	--	--	4.7	4.6	5255	3.6	3.6	3.4	3.3
205	2.9	2.8	2.7	2.5	5257	4.1	4.1	3.9	3.8
207	3.6	3.7	3.3	3.4	5271	3.2	3.7	2.9	3.4
209	4.5	4.5	4.2	4.2	5273	3.8	4.1	3.5	3.8
305	3.0	3.0	2.8	2.7	5275	4.2	4.7	3.9	4.4
307	3.7	3.8	3.4	3.5	5353	3.3	3.4	3.1	3.1
309	4.8	4.6	4.5	4.3	5355	3.7	3.8	3.5	3.5
405	2.8	2.8	2.5	2.5	5371	3.3	3.8	3.0	3.5
407	3.5	3.6	3.2	3.3	5373	--	--	3.6	3.9
409	4.4	4.4	4.1	4.1	5375	--	--	4.0	4.5

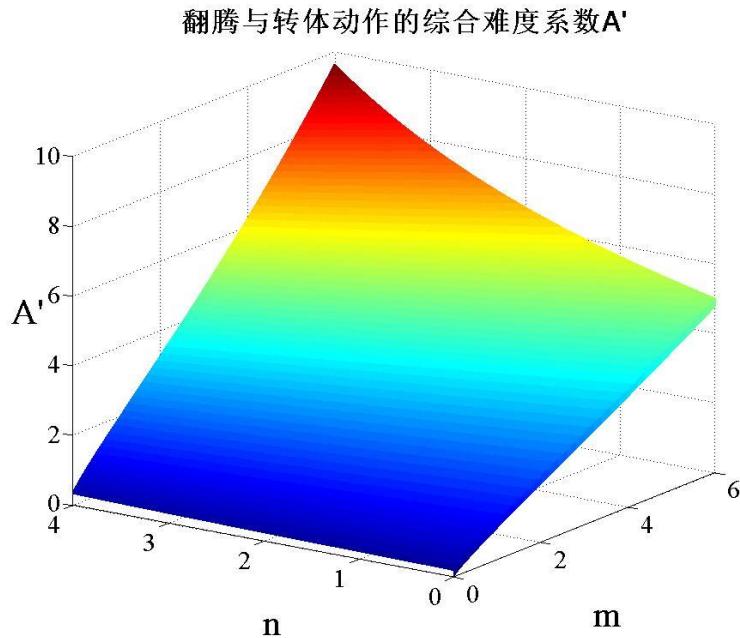


图 29 难度系数 A' 随翻腾周数 m 和转体周数 n 的变化趋势

结果分析：

由表 8 本文可以看出，对于只有翻腾没有转体的跳水动作，模型得出的结果与附件 1 中规定的难度系数基本没有区别。然而，对于既有翻腾又有转体的跳水动作，模型得出的结果与附件 1 中规定的难度系数存在着比较明显的区别，并且随着翻腾周数与转体周数总和的增加，这一区别越来越大。

造成这一现象的原因在于，本模型是基于运动员完成一套跳水动作所需的时间 T_{air} 与翻腾周数 m 及转体周数 n 之间的关系建立起来的。在问题二的模型结果中本文发现，随着翻腾周数 m 及转体周数 n 的增加，运动员完成一套跳水动作所需的时间 T_{air} 越来越少，随 m 和 n 总和的增加，跳水动作的难度增加速度越来越快。同时本文认为，跳水动作的难度并不与翻腾周数 m 及转体周数 n 呈简单的线性关系，随动作复杂度（ m 和 n 总和）的提高，难度系数应有某种程度的飞跃。

综上所述，在本文的难度评价模型中，对于既有翻腾又有转体的跳水动作，翻腾周数 m 及转体周数 n 的总和越大，该动作的难度系数越大，难度系数的增长速度也逐渐变快，这与问题二中的模型结果相符，并且也具有一定的实际意义，本文提出的难度系数模型是合理的。

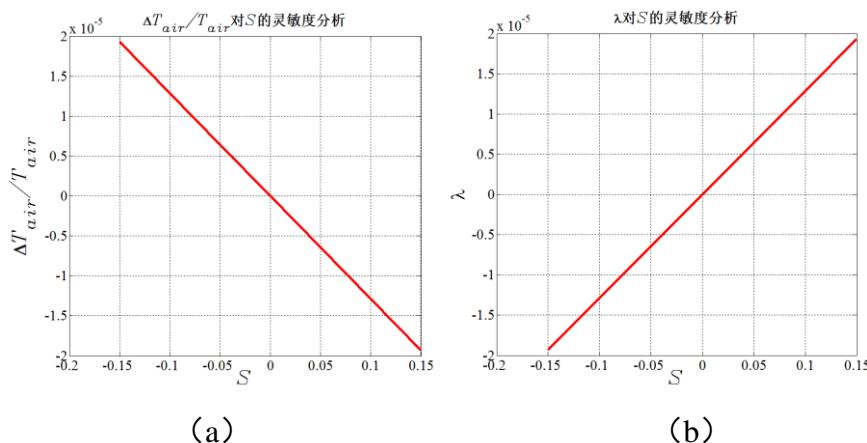
7. 模型的评价与灵敏度分析

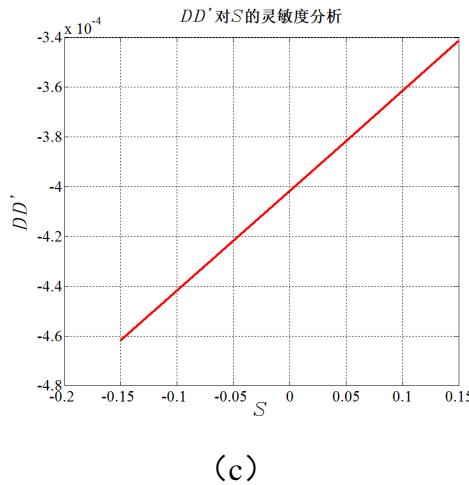
立体角 S 是本文模型中的重要参数之一，在不同的跳水动作及跳水过程中，立体角 S 并不是恒定不变的，立体角 S 的变化会改变运动员完成一套跳水动作的时间 T_{air} 。由于本文问题三、问题四的模型是基于时间 T_{air} 模型建立的，所以立体角 S 的变化对于问题三中的体型校正系数 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 、问题四中的难度系数 DD' 也可能会产生某种影响。

为了研究立体角 S 对模型的影响，验证模型的合理性，在灵敏度分析中，本文改变了立体角 S ，以分析本文提出的模型对 S 的灵敏度。表 9 给出了当立体角 S 波动-15%~15%时，问题二的模型结果 T_{air} 、问题三的模型结果 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 、问题四的模型结果 DD' 的变化情况，以此分析本文各个模型的灵敏度以及合理性。 T_{air} 、 $\lambda(m, n, H_l, M)$ 、 DD' 的变化率随立体角 S 变化率的曲线如图 30 (a-c) 所示。

表 9 对 S 的灵敏度分析

S	T_{air}	$\lambda(m, n, H_l, M)$	DD'
-15%	0.0019%	-0.0019%	-0.0462%
-10%	0.0013%	-0.0013%	-0.0442%
-5%	0.0006%	-0.0006%	-0.0422%
0%	0.0000%	0.0000%	-0.0402%
5%	-0.0006%	0.0006%	-0.0382%
10%	-0.0013%	0.0013%	-0.0362%
15%	-0.0019%	0.0019%	-0.0341%





(c)

图 30 $\Delta T_{air} / T_{air}$ 、 λ 和 DD' 对 S 的灵敏度分析

结果分析：

通过表 9 与图 30 (a-c) 可以看出，当立体角 S 波动-15%~15% 时，问题二的模型结果 T_{air} 、问题三的模型结果 $\lambda(m, n, H_t, M)$ 、问题四的模型结果 DD' 几乎没有变化，本文提出的各个模型不会因立体角 S 的波动得出不合理的结果，具有一定的合理性与鲁棒性。

参考文献

- [1]Dullin H R, Tong W. Twisting Somersault[J]. Physics, 2016.
- [2]李连在, 成尔恒. 跳板跳水翻腾兼转体动作的力学原理和技术分析初探[C]//中国运动生物力学学术会议. 1981.
- [3]Middlesex County Amateur Swimming Association, About Diving,
<https://uk.teamunify.com/TabGeneric.jsp?tabid=88063&team=reczzmcauk>,
2018-09-16.
- [4]曹立业. 我国优秀男子跳台跳水运动员 626B 技术动作的生物力学分析[J]. 当代体育科技, 2016, 6 (08) :124–126.
- [5]何建龙. 我国优秀男子跳台跳水运动员 626B 技术动作的生物力学分析[A]. 中国体育科学学会运动生物力学分会. 第十七届全国运动生物力学学术交流大会论文摘要汇编[C]. 中国体育科学学会运动生物力学分会:, 2014:1.
- [6]第十一届亚运会跳水比赛现场测试数据与分析 [J]. 中国体育科技, 1991 (07) :1–62.
- [7]孙亦光, 吴延禧. 我国跳台跳水优秀选手起跳技术的生物力学研究 [J]. 体育科学, 1997 (04) :71–78.
- [8]龚纯, 王正林, 精通 MATLAB 最优化计算 [M], 北京: 电子工业出版社, 313–344, 2012.
- [9]Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems[M].[S.I.]: MTP Press.1975.