Национальный исследовательский университет
ИТМО

Лабораторная работа

по дисциплине «Мтематический анализ»

Logistic map

Выполнил:
студент группы J3113
Жаков Жан Олегович ISU: 410517

Вариант: N = 2

Санкт-Петербург
2025

Easy Level

1. Задача: Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0; 1]$ выполняется:

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

где $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ *(Строгое неравенство $x_n > 0$ выполняется при $r > 0$)*

Доказательство через мат. индукцию:

1. **База индукции ($n = 0$):** По условию задачи задано, что $0 < x_0 < 1$ — верно.

2. **Решение:** Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $0 < x_k < 1$. Докажем, что тогда $0 < x_{k+1} < 1$ (для случая $r > 0$).

   Рассмотрим функцию $f(x) = rx(1 - x)$ на интервале $(0; 1)$.

   - $x_{k+1} > 0$*:* Так как $x_k \in (0; 1)$, то $x_k > 0$ и $(1 - x_k) > 0$. Поскольку мы рассматриваем $r > 0$, произведение трех положительных чисел - положительно:
   $$x_{k+1} = r \cdot x_k \cdot (1 - x_k) > 0$$

   - $x_{k+1} < 1$*:* Рассмотрим функцию $f(x) = -rx^2 + rx$. Это квадратный трехчлен с коэффициентами $a = -r$ и $b = r$. Графиком является парабола с ветвями вниз ($a = -r < 0$).

     Вершины параболы:
     $$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-r}{2(-r)} = \frac{1}{2}$$

     Заметим, что $x_0 = 0.5$ принадлежит интервалу $(0, 1)$, значит максимум на интервале совпадает с вершиной. Найдем значение в вершине:
     $$f(x_0) = f(0.5) = r \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5) = 0.25r$$

     Используя ограничение $r \leq 1$:
     $$x_{k+1} \leq 0.25$$

     Так как $0.25 < 1 \implies x_{k+1} < 1$.

   ЧТД

3. **Вывод:** Согласно принципу математической индукции, утверждение справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Анализ r

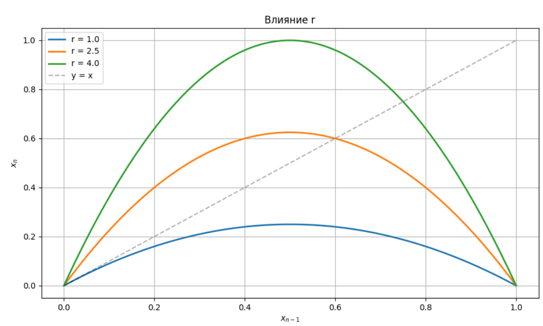
Задание: Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1}? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

Вывод: Зависимость x_n от x_{n-1} задается функцией $f(x) = rx(1-x)$. Графически это парабола с ветвями вниз и корнями в точках 0 и 1.

Параметр r в данном случае это коэффициент по вертикали

- При увеличении r вершина параболы поднимается вверх
- Координата вершины по оси y равна $y_{max} = \frac{r}{4}$
- Увеличение r делает график более крутым в окрестности нуля и единицы

Графическое представление:

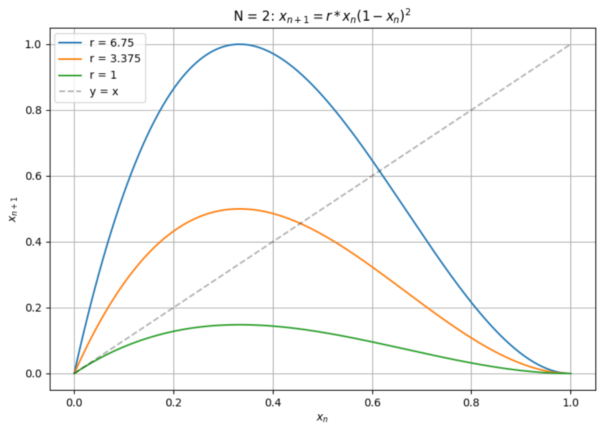


3. Функция. Вариант: $N = 2$

Функция:

$$g(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n)^2$$

1. Графическое представление:



2. Сравнительный анализ:

Сходство с логистическим отображением: Обе функции (классическая $f(x) = rx(1 - x)$ и вариантная $g(x) = rx(1 - x)^2$) демонстрируют схожее поведение.

- Обе функции равны нулю на концах отрезка ($x = 0$ и $x = 1$)
- Обе функции имеют ровно один максимум внутри интервала

Различие: Главное отличие заключается в форме:

- Классическое отображение — это симметричная парабола
- Отображение варианта $N = 2$ асимметрично. Вершина смещена влево, а спад функции справа от вершины происходит более плавно из-за квадратичного множителя $(1 - x)^2$

Причины сходства и различия:

- *Сходство* вызвано общей физической природой моделей: при малых x рост линеен
- *Различие* вызвано разной математической формой этого ограничения: линейной $(1 - x)$ в классическом случае и нелинейной $(1 - x)^2$ в моем варианте

Normal Level

1. Неподвижные точки

Задание: Найдите все неподвижные точки отображения $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Исследуйте их количество в зависимости от r.

Решение: Неподвижная точка x^* - неподвижная, если $x^* = f(x^*)$ Решаем уравнение:

$$x = rx(1 - x)$$

Перенесем все в одну сторону:

$$rx(1 - x) - x = 0 \implies x \cdot (r(1 - x) - 1) = 0$$

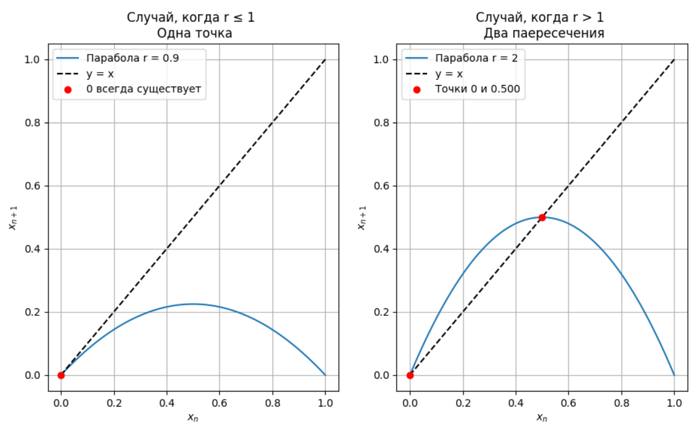
Получаем 2 возможных решения:

1. **Первая точка:** $x_1^* = 0$. (Существует при любых r)
2. **Вторая точка:** $r(1 - x) = 1 \implies 1 - x = \frac{1}{r} \implies x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Анализируем:

- При $r \leq 1$: $x_2^* \leq 0$. Так как мы рассматриваем систему на отрезке $[0, 1]$, тогда смысл имеет только одна точка $x_1^* = 0$
- При $r > 1$: Вторая точка $x_2^* > 0$. В системе существуют 2 неподвижные точки: 0 и $1 - 1/r$.

Максимальное количество: 2 точки, так как уравнение квадратное.



2. Монотонность при $r \in (0; 1]$

Задание: Докажите, что при $r \in (0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Доказательство: Рассмотрим отношение след. члена к предыдущему для $x_n > 0$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{rx_n(1 - x_n)}{x_n} = r(1 - x_n)$$

Тогда:

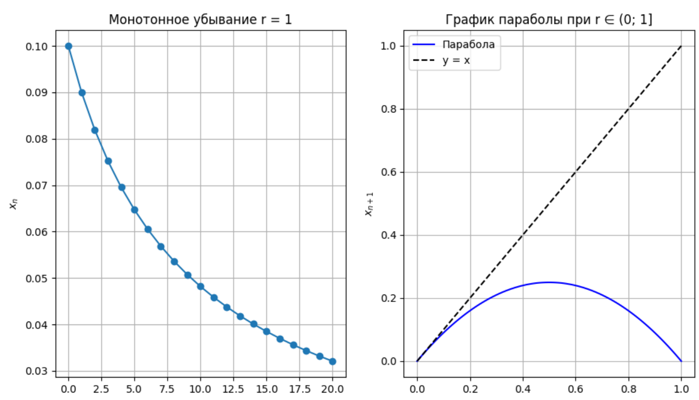
- По условию $r \leq 1$.
- Так как $x_n \in (0, 1)$, то $(1 - x_n) < 1$.

Соответсвенно:

$$r(1 - x_n) < 1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \implies x_{n+1} < x_n$$

Вывод: Последовательность монотонно убывает! Так как она ограничена снизу нулем, она сходится к единственной неподвижной точке $x^* = 0$.



3. Монотонность подпоследовательностей

Задание: Пусть $r \in (2; 3)$, $a_n = x_{2n} > x^*$ и $b_n = x_{2n+1} < x^*$. Что вы можете сказать о монотонности подпоследовательностей?

Доказательство:

Используем тождество для разности значений функции $f(x) = rx(1-x)$:

$$f(u) - f(v) = r(u-v)(1-(u+v))$$

1. Докажем, что четные члены убывают ($x_{2n+2} < x_{2n}$):

1. Сравним x_{2n+1} и x_{2n-1} (предыдущий нечетный). Мы знаем, что $x_{2n} < x_{2n-2}$ (предположение индукции). Применим для $u = x_{2n}, v = x_{2n-2}$, тогда:

   $$x_{2n+1} - x_{2n-1} = r(x_{2n} - x_{2n-2})(1 - (x_{2n} + x_{2n-2}))$$

   - $(x_{2n} - x_{2n-2})$ отрицательно
   - Сумма $(x_{2n} + x_{2n-2})$. Оба числа больше x^*. При $r > 2$ точка $x^* > 0.5$. Значит, сумма больше 1
   - Скобка $(1 - \dots)$ отрицательна

   Минус на минус дает плюс => $x_{2n+1} > x_{2n-1}$. **Вывод:** Если четные убывали, то следующие нечетные возрастают.

2. **Вернемся к четным:** Теперь сравним x_{2n+2} и x_{2n}. Мы только что выяснили, что нечетные возрастают: $x_{2n+1} > x_{2n-1}$. Применим и для $u = x_{2n+1}, v = x_{2n-1}$:

   $$x_{2n+2} - x_{2n} = r(x_{2n+1} - x_{2n-1})(1 - (x_{2n+1} + x_{2n-1}))$$

   - $(x_{2n+1} - x_{2n-1})$ положительно (доказал выше)
   - Сумма $(x_{2n+1} + x_{2n-1})$. Оба числа меньше x^* по усл.. При $r \in (2, 3)$ точка $x^* \approx 0,6$. Сумма двух чисел, меньших $0,6$, При установившемся колебательном режиме вокруг неустойчивой точки x^*, сумма соседних элементов цикла всегда превышает 1. Следовательно, множитель $(1 - (x_{2n+1} + x_{2n-1}))$ - отрицательный.
   - Скобка $(1 - \dots)$ - отрицательна

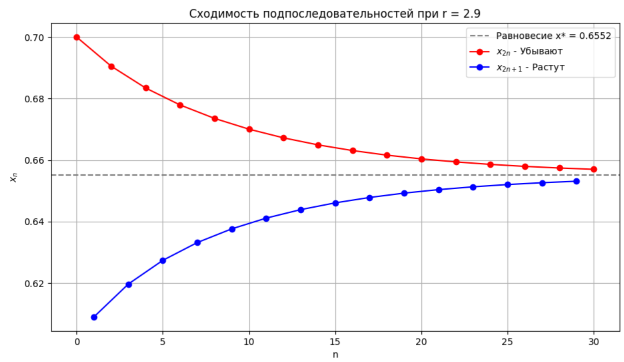
   Плюс на минус дает минус. Значит, $x_{2n+2} < x_{2n}$. **Вывод:** Четные члены убывают!

Итог индукции: Было показана такая цепочка:

$$(x_{2n} < x_{2n-2}) \implies (x_{2n+1} > x_{2n-1}) \implies (x_{2n+2} < x_{2n})$$

Если четные убывают, то нечетные возрастают, а следующие четные снова убывают. Так как база индукции ($x_2 < x_0$) верна, то утверждение верно для всех n.

Графическая проверка:



4. Исследование функции варианта: $N = 2$

Функция: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)^2$.

1. Неподвижная точка: Решаем уравнение $x = rx(1 - x)^2$:

$$1 = r(1 - x)^2 \implies 1 - x = \frac{1}{\sqrt{r}} \implies x^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{r}}$$

2. Сходимость к нулю при $r \in (0; 1)$:

Рассмотрим отношение x_{n+1} к x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{rx_n(1 - x_n)^2}{x_n} = r(1 - x_n)^2$$

Оценим правую часть: Так как $x_n \in (0, 1)$, то $(1 - x_n)^2 < 1$. Домножив на r, получаем:

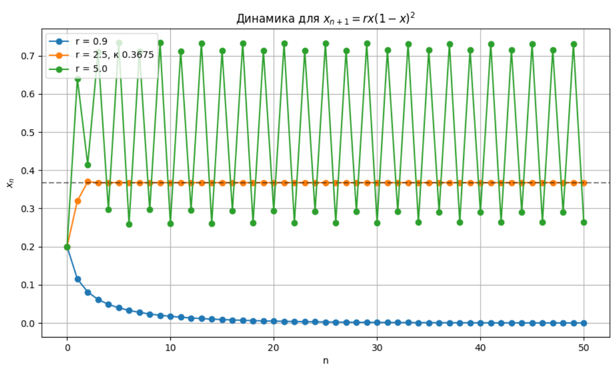
$$r(1 - x_n)^2 < r$$

Тогда:

$$x_{n+1} < r \cdot x_n$$

Поскольку по условию $r < 1$, то каждый следующий член последовательности уменьшается как минимум в $1/r$ раз по сравнению с предыдущим. Значит, последовательность монотонно сходится к нулю.

3. Графики динамики:



Hard Level

1. Исследование длины цикла при $r \in (3; r_\infty)$

Задание: Как изменяется длина цикла при увеличении $r \in (3; r_\infty)$, если $r_\infty \approx 3.5699456$? Какие ограничения действуют?

Рассуждение: Цикл длины m означает, что система возвращается в исходное состояние через m шагов. Алгебраически это соответствует решению уравнения:

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{m\ \text{раз}} = x$$

При r < 3 мы видели, что m = 1 (неподвижная точка). При переходе через r = 3 эта точка теряет устойчивость, и мы ищем m > 1

Ход эксперимента:

```
from numpy import arange


def formula(x, r):
    return r * x * (1 - x)

def cylegth(r):
    x = 0.1
    for _ in range(2000):
        x = formula(x, r)


    path = []
    for _ in range(100):
        x = formula(x, r)
        val = round(x, 4)
        if val not in path:
            path.append(val)

    return len(path)

for r in arange(2.0, 3.569945, 0.0001):
    length = cylegth(r)
    print(f"r = {r:.7f}, m = {length}")
```

Данный код помогает увидеть, что при увеличении параметра r от 2 до r_∞ длина цикла m изменяется дискретно, принимая только значения степеней двойки: 1, 2, 4, 8, 16, и т д. Так, каждый переход к следующему значению происходит при определённых критических значениях, которые сходятся в $r_\infty \approx 3.5699456$

Полученные данные: В ходе эксперимента были зафиксированы следующие интервалы устойчивости циклов:

- **Интервал 1 ($3.0 < r \lesssim 3.449$):** Программа почти стабильно выдает результат m = 2, но на границе происходит бифуркация
- **Интервал 2 ($3.45 < r \lesssim 3.544$):** Также как и в первом случае результат был стабильно m = 4 и на границе перехода происходит бифуркация
- **Интервал 3 ($3.545 < r \lesssim 3.564$):** Все тоже самое и длина цикла снова удваивается m = 8
- **Интервал 4 ($3.565 < r \lesssim 3.569$):** Фиксируется цикл длины m = 16, а затем (в очень узком диапазоне) m = 32

Вот краткий и удобный вывод (вырезка самых интересных):

```
r = 3.200, m = 2
r = 3.500, m = 4
r = 3.550, m = 8
r = 3.565, m = 16
r = 3.569, m = 32
```

Анализ: Наблюдая последовательность полученных значений длины цикла:

$$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \ldots$$

можно сделать строгий вывод о закономерности. Длина цикла m в диапазоне $(3; r_\infty)$ ограничена множеством значений, являющихся степенями двойки

Ответ:

1. При увеличении r происходит удвоение периода
2. Ограничение на m задается формулой: $m = 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Другие значения m, нечетные или не являющиеся степенью двойкив, этом диапазоне невозможны

2. Лестница Ламерея

Задание: Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

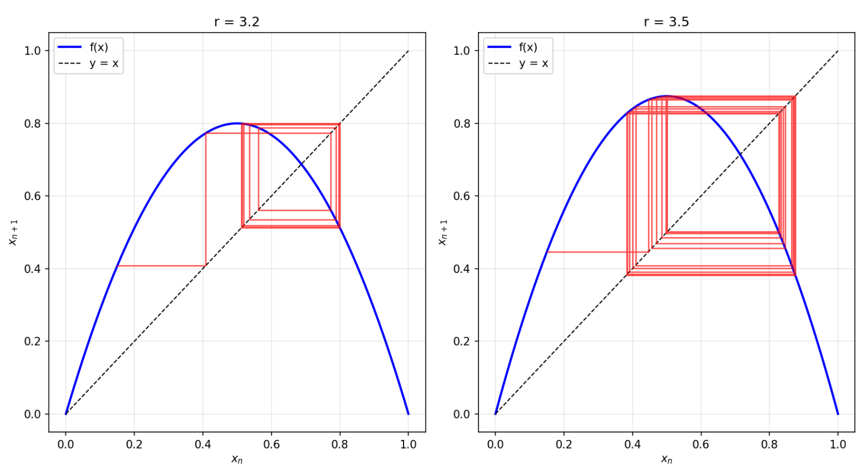
Код построения (Python):

```
def lamerey(f, r, x0 = 0.2, steps = 40):
    xs, ys = [], []
    x = x0
    for _ in range(steps):
        y = f(x, r)
        xs.append(x); ys.append(y)
        xs.append(y); ys.append(y)
        x = y
    return xs, ys
```

Алгоритм работает так:

1. Начинаем с точки x_0 (например, 0.15).
2. На каждом шаге:
   - Рисуем вертикальную линию от (x_n, x_n) до $(x_n, f(x_n))$ — поднимаемся к параболе
   - Рисуем горизонтальную линию от $(x_n, f(x_n))$ до $(f(x_n), f(x_n))$ — переходим к диагонали y=x
3. Повторяем 25-40 раз, пока траектория не выйдет на режим цикла

Результаты визуализации: Я построил графики для 2 значений параметра: r = 3.2 и r = 3.5



Выводы (Как выглядят циклы):

- **Для r = 3.2 (цикл периода 2):** Лестница закручивается в замкнутый прямоугольник. Красная траектория образует коробочку, вершины которой лежат на параболе и диагонали. Система вечно прыгает между двумя такими точками.
- **Для r = 3.5 (цикл периода 4):** Лестница образует более сложную замкнутую фигуру, которая последовательно обходит 4 точки на параболе. Система колеблется между четырьмя значениями.

Общий вывод: Лестница Ламерея наглядно показывает динамику системы. Цикл порядка m выглядит как замкнутая ломаная линия, имеющая m точек пересечения с графиком функции. Чем выше порядок цикла, тем сложнее геометрая фигура =)

3. THE LAST ONE. Вариант: N = 2

Задание: Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения g(xn) с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

$$g(x) = rx(1-x)^2$$

Ход работы: Я использовал тот же метод численного эксперимента, что и в пункте 1. Изменяя параметр r, искал значения, при которых возникают устойчивые циклы.

Результаты:

- При $r \approx 4.5$: Система входит в устойчивый цикл длины 2. Значения колеблются между двумя уровнями
- При $r \approx 5.4$: Цикл теряет устойчивость и превращается в цикл длины 4. Значения прыгают по четырем уровням

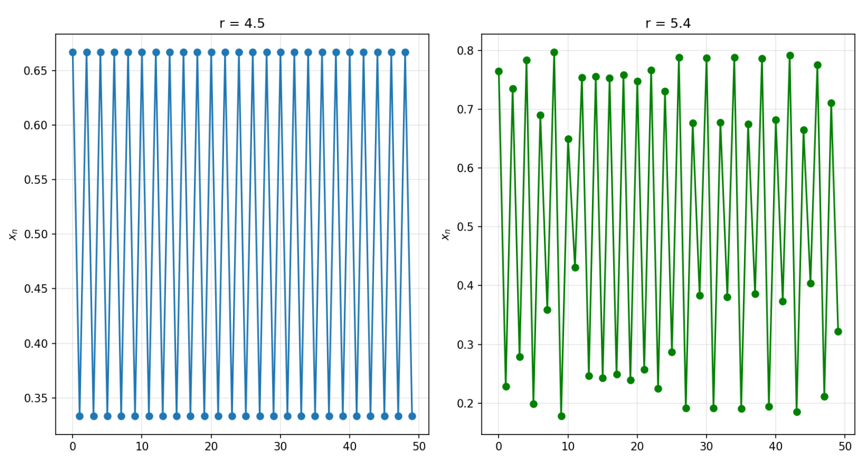
Можно ли решить аналитически? Я попытался найти значения r для циклов аналитически. Неподвижная точка находится просто:

$$x^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Однако для цикла длины 2 возникает уравнение 4-й степени, а для цикла длины 4 — уравнение 16-й степени. Общего аналитического решения для таких уравнений я не нашел.

Поэтому я подбирал значения r и наблюдал, при каких появляются циклы нужной длины

Графическое подтверждение:



Вывод о сходстве с логистическим отображением: Поведение функции $g(x) = rx(1-x)^2$ идентично логистическому отображению.

1. Здесь также наблюдается явление удвоения периода: при увеличении параметра r длина цикла последовательно удваивается ($1 \to 2 \to 4 \to 8\dots$)

2. Различие заключается только в конкретных значениях r, при которых происходят бифуркация. Для варианта N = 2 эти значения смещены, например, цикл 2 возникает при $r \approx 4.5$, а не при $r \approx 3.0$, как в классическом.

Вывод: Эта функция демонстрирует те же закономерности, что и логистическое отображение, что свидетельствует об универсальности законов нелинейной динамики.