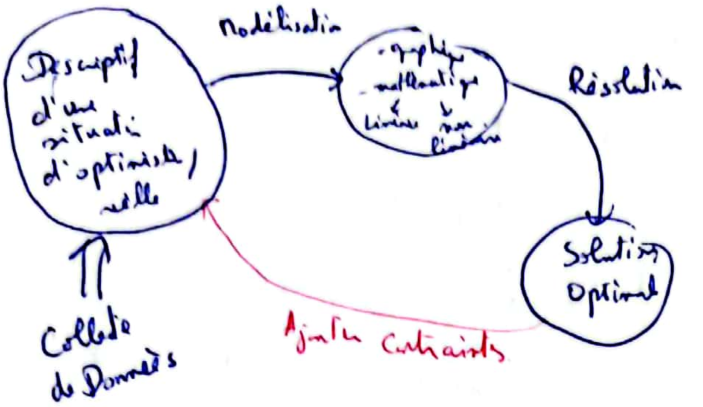


Chap I : Modélisation Linéaire :

I) Objectif :

traduire une situation d'optimisation réelle sous forme d'un modèle mathématique linéaire, en précisant :

- les variables de décision (V.D)
- la (ou les) fonction(s) contrainte(s)
- la fonction objectif (fct économique) : Min ou Max

II) - Forme Générale d'un PL :

Tout programme linéaire (PL) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{Max (ou Min)} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad : f^t \text{ obj}$$

Sous-contrainte (SC)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i \leq b_j \qquad j \in [\![1, m]\!]$$ } une ou plusieurs fct contraintes

$$X_i \geq 0 \quad (x_i : \text{binaire}, X_i : \text{Entier})$$ } type des V.D

$j \in [\![1, m]\!]$: intervalle des entiers.

n : nbre des V.D ($n \geq 2$), m : nbre des contraintes ($m \geq 1$)

X_i : V.D ; C_i : coef de la fct obj

a_{ij} : coef de (s) f^t contrainte(s)

b_j : 2nd membre(s) de(s) fcts contrainte(s)

Exemple :

3 V.D ($n = 3$) et 2 contraintes ($m = 2$)

$$\text{Min } (6x_1 + 3x_2 + 9x_3)$$

SC

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 300$$

$$4x_2 + 6x_3 \leq 200$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$$

III - Démarche de Modélisation.

1) Définir les V.D
2) " les contraintes
3) " l'obj
4) Mise en équations
5) Définir le(s) types de V.D.

IV) Exercices

1) Exemple de production :

Un agriculteur veut cultiver son Terrain (3 hectares) avec 2 Types de légumes (carotte et Tomate)

On donne :

	Engrais A	Engrais B	Anti parasite	Rendement	Prix de vente
Carotte	100g/m²	—	3 l / 10 m²	5 kg/m²	$\frac{3}{2}$ DT/kg
Tomate	120g/m²	90g/m²	$\frac{1}{2}$ l/m²	7 kg/m²	2 DT/kg
stock	700 kg	300 kg	200 litres	//	//

1) x_c : surface pour les carottes (m²)
   x_T : " pour les Tomates (m²)

2) stock (EA, EB, AP)
Surface du Terrain 3 hectares.

3) Maximiser le prix de vente total (Demande)

4) Mise en équation.

Scanné avec CamScanner

$$\text{Max}\left(\frac{3}{2}\times 5\, x_c + 2\times 7\times x_t\right) \text{ DT}$$

SC

ED : $100\, x_c + 120\, x_t \leq 700\times 10^3\, g$

EB : $90\, x_t \leq 300 \cdot 10^3\, g$

AP : $0{,}3\, x_c + 0{,}5\, x_t \leq 200\, l$

S : $x_c + x_t \leq 30000\, m^2$.

La Quantité des carottes ne doit pas dépasser le double de celle tomate

$5x_c \leq 2 \cdot 7\, x_t$

$x_c \geq 0 \;;\; x_t \geq 0$.

2) Diet Problem :

Une clinique qui cherche la formule optimale à servir pour ses patients (120 patients)

On cherche la composition d'un plat à servir par chaque patient / jour.

	vitamine 1	vitamine 2	vitamine 3	Calorie	Prix Achat
légumes	80 g/kg	70 g/kg	-	200 cal/kg	3 DT/kg
Fruit	90 g/kg	-	100 g/kg	300 cal/kg	8 DT/kg
Viande	120 g/kg	95 g/kg	150 g/kg	400 cal/kg	15 DT/kg
Produit à base de lait	-	30 g/l	60 g/l	100 cal/kg	2 DT/l
Minimum plat/patient/jour	250 g	200 g	220 g	900 cal	

Fruits disponibles = 70 kg

pour chaque patient, pas plus que $\nearrow$ 2 kg / $\searrow$ 1,1 l

1) x_i : Qté de l'ingrédient "i" dans un plat (kg, kg, kg, l)

2) Fruits disponibles : 70 kg

Max par jour $\nearrow$ 2 kg / $\searrow$ 1,1 l

Qté mini de chaque vitamine dans le plat

3) Minimiser le coût de préparation d'un plat (DNT)

$$\text{Min}\left(3 \cdot x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 2\, x_4\right) \text{ DT}$$

SC

vit 1 : $80 \cdot x_1 + 90x_2 + 120x_3 \geq 250\, g$

vit 2 : $\geq 200\, g$

v :

vit ? : $\geq$

$120\, x_2 \leq 70\, kg$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\, kg$

$x_4 \leq 1{,}1\, l$

$x_i \geq 0$

Scanné avec CamScanner

Suite chap 1:

Exemple de localisation / Installation / Couverture

(installer au moins 1 appareil sur la rue L)

1) Définir les VD:

X_i : point d'installation, $i = \{1, \dots, 8\}$

X : binaire

2) Définir les contraintes:

- chaque rue doit être servie au moins par un appareil

- rue C doit être servie au moins par 2 appareils:

3) Définir l'objectif:

Minimiser le nbre total à installer;

4) Mise en équation

$$\min \left(\sum_{i=1}^{8} x_i \right)$$

Sc:

A : $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

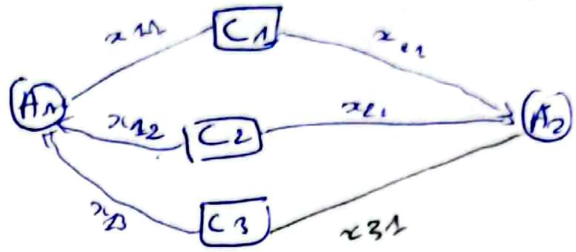
B : $x_4 + x_5 \geq 1$

C : $x_6 + x_7 + x_8 \geq 2$

D :

Problème de mélange:

Pétrole. [illegible]



$$\max \begin{pmatrix} (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \times 640 + (x_{12} + x_{22} + x_{32})\,520 \\ 800 \times (x_{11} + x_{21}) + 200(x_{22} + x_{12}) \\ + 100(x_{23} + x_{32}) \end{pmatrix}$$

$C_1 : (x_{11} + x_{21}) \leq 200$

C_2 :

C_3 :

A_1 (Ess.) $\rightarrow 50\%\, x_{11} + 40\%\, x_{12} + 10\%\, x_{13} \geq 0{,}3\,(x_{11} + x_{12} + x_{13})$

A_1 (Elec) $\rightarrow 10\%\, x_{11} + 30\%\, x_{12} + 80\%\, x_{13} \leq 0{,}4\,(x_{11} + x_{12} + x_{13})$

A_2 (...) $\rightarrow 40\%\, x_{21} + 30\%\, x_{22} + 10\%\, x_{23} \geq 0{,}15\,(x_{21} + x_{22} + x_{23})$

A_2 (Fu) $\rightarrow 10\%\, x_{21} + 30\%\, x_{22} + 80\%\, x_{23} \leq 0{,}6\,(x_{21} + x_{22} + x_{23})$

$X_{ij} \geq 0$ Type de VP.

Scanné avec CamScanner

- Au moins 3 ingrédients / plat
- Si on met de la viande, on doit ajouter les légumes.

- y_i : variable binaire ; $i \in \{1, \dots, 4\}$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 3$ (au moins 3 ingrédients égal à 1)

$y_3 \leq y_1$

si $y_i = 0$, on ne peut pas avoir $x_1 = 0{,}2$ kg (exemple).

$x_i \leq 2 y_i$: juste

$x \leq 80 y_i$ est aussi juste

cette valeur doit être supprimée à 2

puisque chaque patient ne doit pas dépasser 2 K / jour

- Une entreprise de relation public veut effectuer un sondage pour l'un de ses clients. Pour que l'échantillon soit représentatif, on exige :
- Au moins 1000 interviews
- // 400 interviews directs
- // 800 // Téléphonique.

Chaque employé est payé comme suit :

80 DT : employé effectuant des interv. directs / j

50 DT : // // des interv. téléphoniques / j

Chaque employé effectue un seul type d'interview.

Employé (I. Tél) : 60 interview / j

Employé (I. Dir) : 40 interview / j

Variable décision :

X_T : nbre employé effectuant les interview Tél

X_D : nbre employé effectuant les interview Direct

Contraintes 1000, 400, 800

obj : Minimiser les salaires.

Mise en équation :

$$\text{Min}\left(80 x_D + 50 \times X_T\right) \text{DT}$$

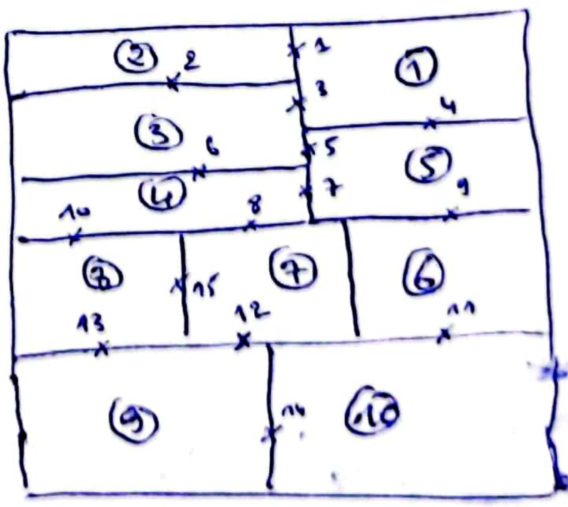
Sc :

- $x_T \times 60 \geq 800$
- $x_D \times 40 \geq 400$
- $(x_T \times 60) + (x_D \times 40) \geq 1000$

$X_T \geq 0$, $X_D \geq 0$ } X_T, X_D entiers positifs

- Prb. de localisation :

On cherche à assurer une couverture Totale de l'un Batiment à travers des caméras 360°



. Salle 5 et 7 au moins 2 caméras.

. Au moins une caméra pour le reste des salles.

1) V.D : x_i : emplact des caméras
$i \in \{1, \dots, 15\}$

2) Contraintes : Assurer la couverture de toutes les salles

3) obj : Minimiser le nbre de caméras à installer.

4) Mise en équation :

$$\text{Min} \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right)$$

Sc

salle 1 :

$x_1 + x_3 + x_4 \geq 1$

salle 2

$x_1 + x_2 \geq 1$

salle 3 :

$x_2 + x_3 + x_6 \geq 1$

salle 5 :

$x_4 + x_5 + x_7 + x_9 \geq 2$

x_i : V binaire

salle 7

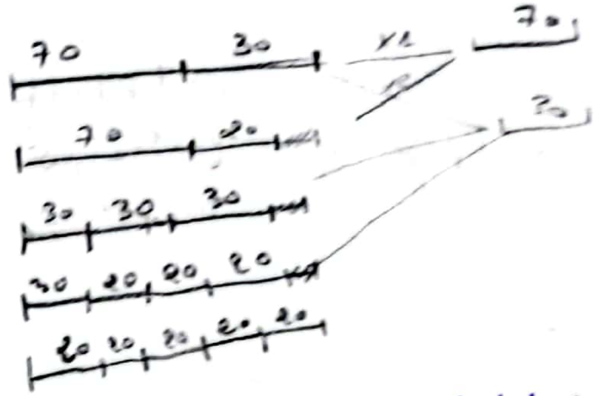
$x_8 + x_{11} + x_{12} \geq 2$

Prb. de découpe :

On a un stock de 5000 rouleaux standards de largeur 1 m.

On vient de recevoir une commande spécifique

largeur	Qté
70 cm	1500
30 cm	2800
20 cm	3600



1) V.D. x_i : Qté des rouleaux standard à découper selon la config "i"
$i \in \{1, \dots, 6\}$

2) Contraintes :
Qté /larg. : 1500, 2800 et 3600
Stock : 5000

3)
$$\text{Min} \left(\sum_{i=1}^{6} x_i \right)$$

Sc

1) $(x_1 + x_2) \geq 1500$

2) $x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 2800$

3) $x_2 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \geq 3600$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 5000$

x_i : entiers positifs

Scanné avec CamScanner

- Salle 5 et 7 au moins 2 caméras.
- Au moins une caméra pour le reste des salles.

1) V.D : x_i : emplact des caméras

$i \in \{1, \dots, 15\}$

2) Contraintes : Assurer la couverture de toute les salles

3) obj : Minimiser le nbre de caméra à installer.

4) Mise en équation

$$\min \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right)$$

Sc

salle 1 :

$x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$

salle 2

$x_1 + x_2 \geq 1$

salle 3 :

$x_2 + x_3 + x_6 \geq 1$

salle 5 :

$x_4 + x_5 + x_7 + x_9 \geq 2$

salle 7

$x_8 + x_{15} + x_{12} \geq 2$

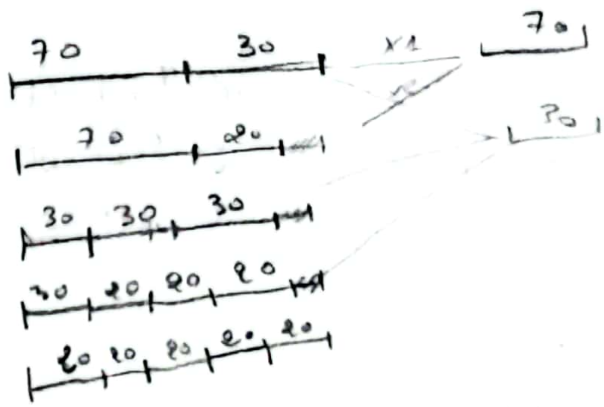
x_i : V Binaire

Pnb. de découpe :

On a un stock de 5000 rouleaux standards de largeur 1 m.

On vient de recevoir une commande spécifique

largeur	Qté
70 cm	1500
30 cm	2800
20 cm	3600



1) V.D. x_i : Qté des rouleaux standard à découper selon la config "i"

$i \in \{1, \dots 6\}$

2) Contraintes :

Qté / largeur : 1500, 2800 et 3600

Stock : 5000

3)

$$\min \left(\sum_{i=1}^{6} x_i \right)$$

Sc

1) $(x_1 + x_2) \geq 1500$

2) $x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 2800$

3) $x_2 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \geq 3600$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 5000$

x_i : entiers positifs

Scanné avec CamScanner

6)

Exemple

$\max (10x_1 + 15x_2 + 60x_3 + 95x_4)$

Sc.

$x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 2$

$x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5$

$x_3 + 2x_4 \leq 3$

$x_i \geq 0$

D'après l'algo Simplexe.

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
e_3	1	0						
$-Z$								155

2)

$\cancel{x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 2}$

$\cancel{x_2 + 2x_3 + x_4} \leq 5$

$\cancel{x_3 + 2x_4 + 1} \leq 1.$

$x_4 = \cancel{1}$

$\cancel{x_2 = 4}$

$\cancel{e_3 = 1}$

3)
1) Donner la sol de (P)
2) Déduire les contraintes saturées de (P)
3) Donner le Dual (D) de (P)
4) Déduire la sol de (D)
4) Déduire les contraintes saturées de (D)
5) "

1) Condition d'arrêt vérifiée pour un Pb de maximisation de la tab simplexe

$x_1^* = 0,\ x_2^* = 4\ ;\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 1$

$e_1^* = 0\ ;\ e_2^* = 0,\ e_3^* = 1,\ Z^* = 155$

2) $e_1^* = e_2^* = 0$ donc contraintes ① et ② saturées

3) $\min (2y_1 + 5y_2 + 3y_3)$

sc :

(1) $y_1 \geq 10$

$\boxed{(2)\ y_2 \geq 15}$ saturée.

(3) $y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 60$

(4) $2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 95$

(5) $y_1 \geq 0\ ;\ y_2 \geq 0\ ;\ y_3 \geq 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $x_1^* \cdot s_1^* = 0$

$x_2^* \cdot s_2^* = 0 \Rightarrow \boxed{s_2^* = 0}$

$x_3^* \cdot s_3^* = 0$

$x_4^* \cdot s_4^* = 0 \Rightarrow \boxed{s_4^* = 0}$

$y_1^* \cdot e_1^* = 0$

$y_2^* \cdot e_2^* = 0$

$y_3^* \cdot e_3^* = 0 \Rightarrow \boxed{y_3^* = 0}$

$y_1^* = 40$

$y_2^* = 15$

$y_3^* = 0$

$s_1^* = 30$

$\boxed{s_2^* = 0}$

$s_3^* = 10$

$s_4^* = 1$

$C^* = 155$

① $\Rightarrow y_1^* - s_1^* = 10$

② $\Rightarrow y_2^* = 15$

③ $y_1^* + 30 - s_3^* = 60 \Rightarrow \boxed{s_3^* = 10}$

④ $2y_1^* + 15 = 95 \Rightarrow \boxed{y_1^* = 40}$

$\Rightarrow s_1^* = 30$

Remarque :

$\Rightarrow$ la dernière ligne du Tableau simplexe représente la sol (D) (quand il y a) si il ne demande pas de fournir (TEC) (Théorème des écarts complémentaires)

Scanné avec CamScanner

Les combos Coûts / coûts magiques / Coût du Dual du chemin

Tableau simplexe précédent, la sol optimal du Dual (ou Primal) selon le cas (il faut respecter le signe de chaque variable)

Exercice

Donnez la sol de (P) :

Max $(6x_1 + 9x_2 + 10x_3)$

Sc :

$5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$

$6x_2 + 7x_3 \leq 15$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Dual

Min $(10y_1 + 15y_2)$

Sc :

$5y_1 \geq 6$

$2y_1 + 6y_2 \geq 9$

$y_1 + 7y_2 \geq 10$

$y_1 \leq 0$; $y_2 \geq 0$

~~On pose~~

$\cancel{Y_1 = -y_1}$

dém

$\cancel{5y_1 \geq 6}$

$\cancel{2y_1 + 6y_2 \geq 9}$

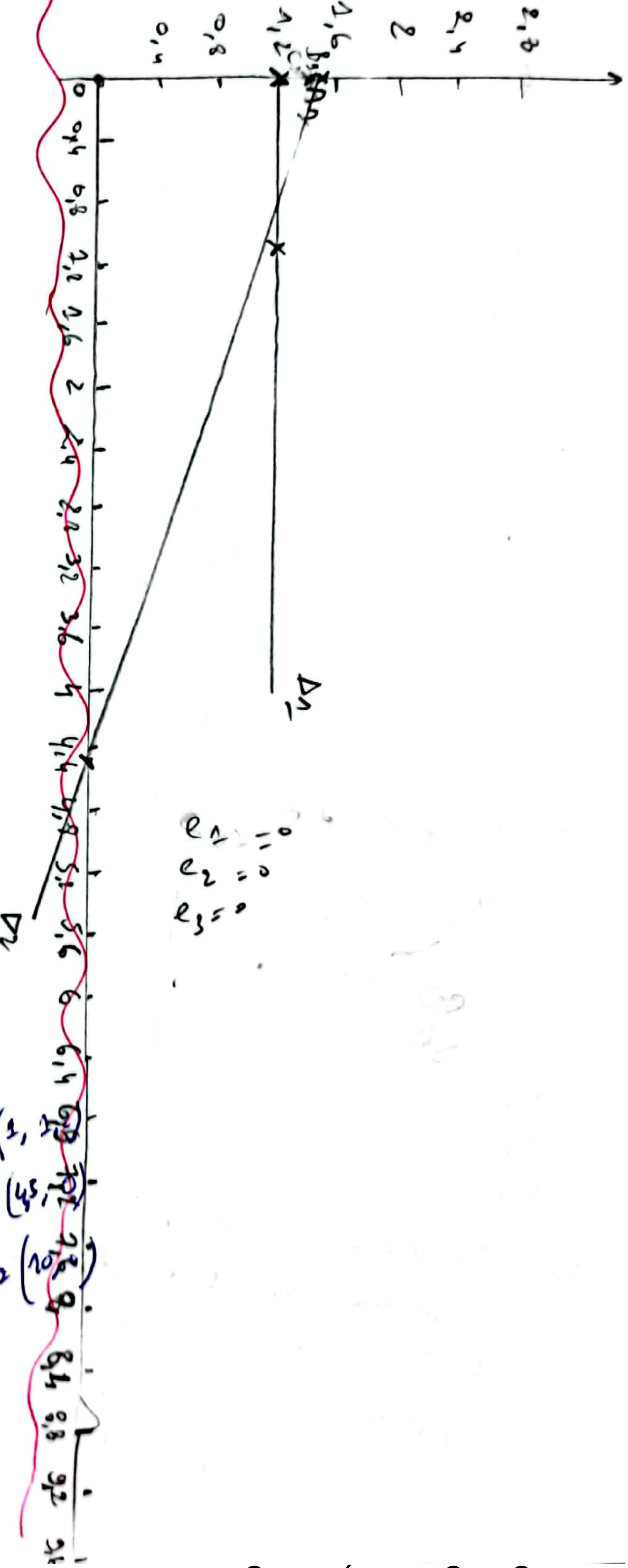
→ D_1 : $5y_1 = 6$; $A_1(0 ; 1,2)$; $A_2(1, 1,2)$

D_2 : $2y_1 + 6y_2 = 9$; $B_1(0 ; 1,5)$; $B_2(4,5, \ldots)$

D_3 : $y_1 + 7y_2 = 10$; $C_1(0 ; 1,4)$; $C_2(10, \ldots)$

3) choix du repère, échelle : 0,4

traçons du repère $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$



Scanné avec CamScanner

Chapitre : Résolution graphique :

I) objectifs :

quelque soit nbre des contraintes

Résoudre graphiquement un PL à 2 VD (pb plan)

Rq : cette méthode est inapplicable à 3 VD.

II) Etapes à suivres.

$\text{Max}\ (20x_1 + 30x_2)$

SC

1. $x_1 + 2x_2 \leq 200$
2. $x_1 + x_2 \geq 20$
3. $2x_1 + x_2 \leq 220$
4. $2x_2 \leq 180$

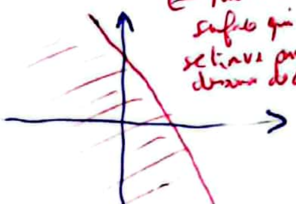
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 = 200$: droite

infinité des pts $M(x_1, x_2)$ / $x_1 + 2x_2 = 200$

$x_1 + 2x_2 \leq 200$

← Toute la surface qui se trouve en dessous de la



1. écrire toutes les contraintes sous forme des égalités.
2. Déterminer 2 points pour chaque droite

D_1 : $x_1 + 2x_2 = 200$; $A(100, 50)$, $A_1(200, 0)$, $A_2(0, 100)$

D_2 : $x_1 + x_2 = 20$; $B_1(20, 0)$; $B_2(0, 20)$; $B_3(10, 10)$

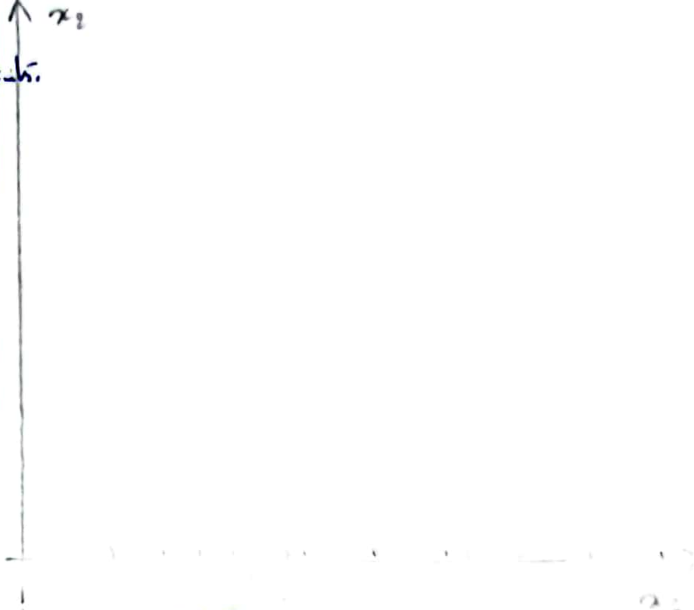
D_3 : $2x_1 + x_2 = 220$; $C_1(110 ; 0)$; $C_2(0, 220)$

D_4 : $2x_2 = 180$: $D_1(0, 90)$; $D_2(20, 90)$

x_1 peut être n'importe quelle valeur mais x_2 doit être $\underline{90}$

3. choisir le repère : échelle de 20 pour x_1 et x_2
4. Tracer le repère : on a CNT $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

mais on peut choisir $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$.



D : ABCDEF.

D : Domaine des solutions réalisables / admissibles

$\forall M \in D$: vérifie toutes les contraintes

la sol optimale $\in D$

D ne dépend que des contraintes.

Pour trouver la sol optimale, on doit faire à la Max $(20x_1 + 30x_2) = Z$

Trouver la sol optimale :

<u>Méthode 1</u> : Méthode des sommets / dénombrement

Il suffit de remplacer les coordonnées de chaque sommet dans la fct objectif "Z"

$A(20 ; 0) \Rightarrow Z_A = 20.20 + 0 = 400$

$B(110 ; 0) \Rightarrow Z_B = 20.110 + 0 = 2200$

$C(80 ; 60) \Rightarrow Z_C = 20.80 + 30.60 = 3400$

$D(20 ; 90) \Rightarrow Z_D = 20 \times 20 + 30 \times 90 = 3100$

$E(0, 90) \Rightarrow Z_E = 0 + 30 \times 90 = 2700$

$F(0 ; 20) \Rightarrow Z_F = 0 + 30 \times 20 = 600$

Solution optimale : $x_1^* = 80$; $x_2^* = 60$

$Z^* = 3400$ (cas de maximisation)

Scanné avec CamScanner

Méthode 2 : Méthode des gradient :

$Z = 20x_1 + 30x_2$; $\forall Z \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ infinité de droites qui sont parallèles

$20x_1 + 30x_2 = 1000 \Rightarrow$ une droite D_1

$20x_1 + 30x_2 = 2000 \Rightarrow$ une Droite D_2

$\Big\}$ $D_1 // D_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{Grad}\, Z \begin{pmatrix} \partial Z / \partial x_1 \\ \partial Z / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$: Vecteur gradient de Z : $\vec{u}$

$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, Z \perp$ à Toutes les droites "Z"

$\hookrightarrow$ indique le sens de maximisation de Z

Scanné avec CamScanner

Chap: Algo. Simplexe

IV) Application de l'algorithme :

Soit le PL ci-dessous :

$\min (10y_1 + 15y_2 - 60y_3 - 95y_4)$

SC :

$y_1 - y_3 - 2y_4 \geq -2$

$y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -5$

$y_3 + 2y_4 \leq 3$

$y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0;\ y_3 \geq 0;\ y_4 \geq 0$

1) Mettre le PL dans la forme Canonique.
2) Vérifier que tous les 2nd membre des contraintes sont (+)
3) Mettre le PL sous la forme standard
4) Trouver une sol initiale (Annuler Toutes les V.D)
5) Tracer le Tab simplexe initial (associé à la sol initiale)

1) on pose $Y_1 = -y_1$ et $Y_2 = -y_2$

$-1 \times (-Y_1 - y_3 - 2y_4 \geq -2)$

$-1 \times (-Y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -5)$

$y_3 + 2y_4 \leq 3$

2) $Y_1 + y_3 + 2y_4 \leq 2$

$Y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 5$

$y_3 + 2y_4 \leq 3$

2) $Y_1 = -y_1$ et $Y_2 = -y_2$

$-\cancel{Y_1} - y_3 - 2y_4 - e_1 = -2$

$-\cancel{Y_2} - 2y_3 - y_4 - e_2 = -5$

$y_3 + 2y_4 + s_1 = 3$

$e_1, e_2, s_1 \geq 0$

4)

Soit le PL ci-dessous :

$\min (10y_1 + 15y_2 - 60y_3 - 95y_4) = Z$

$-10y' - 15y'' - 60y_3 - 95y_4$

SC :

$y_1 - y_3 - 2y_4 \geq -2$

$y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -5$

$y_3 + 2y_4 \leq 3$

$y_1 \leq 0;\ y_2 \leq 0;\ y_3 \geq 0;\ y_4 \geq 0$

on pose $y' = y_1$ et $y'' = -y_2$

$-\max (10y' + 15y'' + 60y_3 + 95y_4)$

SC :

$y' + y_3 + 2y_4 + e_1 = 2$

$y'' + 2y_3 + y_4 + e_2 = 5$

$y_3 + 2y_4 + e_3 = 3$

$y' \geq 0;\ y'' \geq 0;\ y_3 \geq 0;\ y_4 \geq 0$

$e_1 \geq 0;\ e_2 \geq 0;\ e_3 \geq 0$

Scanné avec CamScanner

$y' = y'' = y_3 = y_4 = 0$ (VHB = 0, −z = 0) (var hors base)

$e_1 = 2$; $e_2 = 5$; $e_3 = 3$, $z = 0$ (colonne = colonne dual)

pivot

V. base	y'	y''	y_3	y_4	e_1	e_2	e_3	b_i		l_i
e_1	1	0	1	2	1	0	0	2	contrainte (1)	2/2
e_2	0	1	2	1	0	1	0	5	contrainte (2)	5/2
e_3	0	0	1	1	0	0	1	3	contrainte (3)	3/2
$-z$	10	15	60	95	0	0	0	0	ligne objectif	

colonne pivot

$-z = 10y' + 15y'' + 60y_3 + 55y_4 = 0$

Bonus :

1) trouver une variable entrante à la base. (le plus grand coef (+) dans la ligne obj : Max). Si Min on doit choisir la plus petite valeur négative)

2) Trouver une var sortante de la base (la plus petite limitation "l_i" positive et finie)

3) Tracer le tab suivant.

$$l_i = \frac{b_i}{a_{ip}}$$

b_i → 2ème membre de ligne "i"

a_{ip} → coef de la ligne "i".

	y'	y''	y_3	y_4	e_1	e_2	e_3	b_i	
y_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	2/0
e_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	4	4/1
e_3	-1	0	0	0	-1	0	1	1	2/
$-z$	$-\frac{75}{2}$	15	$\frac{25}{2}$	0	$-\frac{55}{2}$	0	0	-55	

la plus petite positive

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \times 7}{1}$

itération 3 :

	y'	y''	y_3	y_4	e_1	e_2	e_3	b_i
y_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
y''	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
e_3	-1	0	0	0	-1	0	1	1
$-z$	-30	0	-10	0	-40	-15	0	-155

$y' = 0$; $y'' = 4$; $y_3 = 0$; $y_4 = 1$

$e_1 = 0$; $e_2 = 0$; $e_3 = 1$, $z = 155$

Condition d'arrêt :

Tous les coef de la ligne obj sont "≤0" (Maximisation). (le cas contraire de la minimisation)

$$\boxed{\text{Min}(f) = -\text{Max}(-f)}$$

Rq : 1) Les coefficients de la ligne objective sont appelées :

Coûts marginaux ou les ombres coûts (shadow Price ou les coût du Dual (Dual Price).

2) Pour chaque unité de la variable entrante, la fonction objective augmente (ou diminue) de la valeur de nombre coût de cette variable.

3) On peut appliquer l'algo Simplex pour un cas de minimisation (Toutes les contraintes sont de signe inférieur ou égale) et VD sont ≥0). Dans ce cas :

Scanné avec CamScanner

- Var entrante : le plus petit ombre coût négatif.

- Var sortante : la plus petite limitation positive et finie.

- Cond d'arrêt : Tous les coût marginaux sont (+)

$\text{Min}\,(30y_1 - 20y_2 - 10y_3)$

sc :

$6y_1 + 2y_2 - 4y_3 \leq 24$

$4y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq 12$

$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$

Forme itération simplex :

$+\text{Min}\,(30y_1 - 20y_2 - 10y_3)$

SC :

$6y_1 + 2y_2 - 4y_3 - e_1 = 24$

$4y_1 - 2y_2 + 3y_3 - e_2 = 12$

$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$; $e_1 \geq 0$

$e_2 \geq 0$

	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	bi
e_1	6	2	-4	1	0	24
e_2	4	-2	3	0	1	12
$-Z$	30	-20	-10	0	0	0

	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	bi
y_2	3	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	12
e_2	10	0	-1	2	1	36
$-Z$	90	0	-50	-10	0	+240

$y_1 = 0$

$y_2 = 12$

$y_3 = 0$

$e_1 = 0$

$e_2 = 36$

$Z = -240$

Rq :

4) Si on trouve une variable entrante à la base sans trouver une variable sortante donc la sol est non ~~base~~ borneé.

$Z \longrightarrow \infty$.

5) Si on atteint la condition d'arrêt avec une variable hors base ayant un ombre coût nul, donc la solution optimal n'est pas unique.

Scanné avec CamScanner

chap 4 : Dualité.

I) objectif :

L'obj de ce chapitre est de :

- Construire un PL appelé Dual à partir d'un PL initial appelé Primal.

- Déduire la sol optimal d'un PL à partir de celle de son Primal / Dual.

II) Tout PL peut s'écrire sous une forme matricielle

Par exempl.

$\text{Max}\ {}^{t}C.x$ | C : Vecteur Profit

sc | X : // VD

$Ax \leq b$ | bi : // contraint

$x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ | A : matrice //

$\text{Max}\ (3x_1 + 12x_2 - 4x_3)$

Sc :

$x_1 + 2x_3 \leq 100$

$4x_1 + 6x_2 - 9x_3 \geq 200$

$x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0$

on pose $x_3' = -x_3$

$x_1 - 2x_3' \leq 100$

$4x_1 + 6x_2 + 9x_3' \geq 200$

$-4x_1 - 6x_2 - 9x_3' \leq -200$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \end{pmatrix}$

$\text{Max}\ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}}_{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix}}_{X} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \end{pmatrix}}_{b}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

III) Construction d'un Dual :

Primal / Dual → Dual / Primal

Max	Min
nbre des V.D	nbre des contraints.
nbre des contraints	nbre des V.D.
coef de la fct obj	2ème membre des contraints.
2ème membre des contraint	coef de la fct objectif
Signe des VD	Signes des contraints
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
$\in \mathbb{R}$	$=$
Signes des contraints	Signe des V.D
$\geq$	≤ 0
$\leq$	≥ 0
$=$	$\in \mathbb{R}$
matrice contraint $A = {}^{t}B$ (transposé)	matrice contrainte $B = {}^{t}A$

Exempl :

IV - Résolution Primal / Dual (5

$$\text{Max}(3x_1 + 2x_2 + 5x_3)$$

Sc

$2x_1 + 6x_2 \geq 10$

$x_2 + 9x_3 \geq 20$

$x_1 \geq 0 \; ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$

$$\text{Min}(10y_1 + 20y_2)$$

Sc

$2y_1 \quad 3$

$6y_1 + y_2 \quad 2$

$9y_2 \quad 5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min}(30x_1 - 10x_2 + 50x_3 + 40x_4)$$

Sc

$x_1 + 2x_3 + 5x_4 \geq 500$

$2x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 600$

$2x_2 + 4x_3 \leq 700$

$x_1 \geq 0 \; ; x_2 \in \mathbb{R}$

$x_3 \leq 0 \; ; x_4 \geq 0$

$$\text{Max}(500y_1 + 600y_2 + 700y_3)$$

Sc :

$y_1 + 2y_2 \leq 30$

$9y_2 + 2y_3 = -20$

$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 50$

$5y_1 + 7y_2 + \leq 40$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \in \mathbb{R}$

$y_3 \leq 0$

Scanné avec CamScanner