Examen Final Algebra I 2016-2017
Ciencia de la Computación
Nombre: Grupo:

1. Dados los polinomios $p(x)=x^6+(a+1)x^4+(a+4)x^2+4,\ a\in\mathbb{R}$ y $q(x)=x^6+3x^4-4$.

1.1 Pruebe que $x-i$ divide a $p(x)$.

1.2 Pruebe que $(x^2+2)^2$ divide $q(x)$, sin utilizar la división en galera.

1.3 Pruebe que existe $a\in\mathbb{R}$, tal que $mcd(p(x),q(x))=(x^2+2)^2$. Halle $a\in\mathbb{R}$.

1.4 Plantee la descomposición de $\dfrac{x+1}{q(x)}$ en fracciones simples sobre $\mathbb{R}(x)$ y $\mathbb{C}(x)$.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+\ \ ky+\qquad\quad z+\qquad\ 3w=0 \\ 4x+2ky+(-k+2)z+(-k+8)w=3 \qquad a,k\in\mathbb{K} \\ -2kx+\qquad\qquad\qquad\quad (4-k)w=a \end{cases}$$

2.1 Para que valores de los parámetros $a,k\in\mathbb{K}$ el sistema tiene una variable libre.

2.2 Obtenga una solución particular del sistema del dado para $a=-6,k=2$.

3. Sea E el espacio de las matrices triangulares superiores de orden 3 y S un sistema de vectores de E

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

3.1 Halle el subespacio vectorial generado por S.

3.2 Halle una base de $L[S]$ a partir de un sistema l.i. maximal de S.

3.3 Sea W el espacio de las matrices triangulares superiores de orden 3 de traza nula. Obtenga, de ser posible, una base de W a partir de una base de $L[S]$.

4. Sea el espacio vectorial $E=\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$, $V\subseteq_S E$ $V=\{(a+bi,c+di)/2a-b+c=0,4a+b+2c=0\}$, encuentre, si es posible:

4.1 un subespacio de E, cuya suma con V sea directa pero que no suplementen sobre E.

4.2 un subespacio de E suplementario con V sobre E que contenga a todos los múltiplos de $(2,-4+3i)$.

4.3 un subespacio de E en el cual V y el subespacio generado por $(1+2i,3+4i)$ sean suplementarios.

5. Responda verdadero o falso y justifique cada respuesta.

5.1 __El producto de una raíz de 1 de grado a por otra raíz de 1 de grado b es una raíz de 1 de grado ab.

5.2 __Sea $W=\mathbb{R}_4[x]$ y $V\subseteq_S W, V=\{p(x)\in W\ /\ p(0)=p(1)=p(-1)=0\}$ entonces $\dim W+\dim V=6$.

5.3 __Sean $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ nilpotentes $(\exists r\in\mathbb{N}: A^r=B^r=0)$ si $AB=BA$ entonces AB es nilpotente.

5.4 __En el e.v. $M_n(\mathbb{R})$ el subconjunto de las matrices con determinante no nulo es un subespacio vectorial.

__Nota__: En todos los ejercicios debe justificar rigurosamente su respuesta, apoyándose en la teoría vista a lo largo del curso.

__Nota__: Al entregar el examen, cada ejercicio debe estar en hojas independientes.

¡¡¡Éxito!!!