Resolución de Problemas Vol. 2

Roberto Bosch Cabrera

Concursos Nacionales de Matemática en Cuba (2000 - 2013)

CONCURSOS NACIONALES PREUNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICA (2000-2013)

Roberto Bosch Cabrera

A mis profesores Mariana y Nelson.

Prólogo

Este libro surge ante la necesidad de publicar los Concursos Nacionales de Matemática en Cuba. Presentamos los problemas y soluciones del período $2000 - 2013$ con la excepción de los concursos del 2002 y 2011, los cuales nos fue imposible encontrar. Anterior a este libro han sido publicados algunos concursos dentro de una serie de tres libros por el profesor Mario Díaz. Agradecemos a los profesores Evidio Quintana Fernández, IPVCE V.I.Lenin, Cuba y Enech García Martínez, Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Cuba, por brindarme los originales. Este libro más que una recopilación ha sido un trabajo minucioso con las soluciones de cada problema, las oficiales han sido mejoradas en algunos casos y en otros hemos tenido que resolver los problemas, algunos realmente muy difíciles. En este sentido hemos recibido ayuda de los profesores Ercole Suppa, Liceo Scientifico "Albert Einstein" , Teramo, Italia , Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España y Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, España. También quiero agradecer a Manuel Candales, Ultimate Software, Inc, EE.UU.

Índice general

Problemas

Concurso Nacional (2001)

Día 1

1. En cada casilla de un tablero de 3×3 está escrito un número real. El elemento de la i - ésima fila y la j - ésima columna es igual al módulo de la diferencia de la suma de los elementos de la columna j y la suma de los elementos de la fila i. Pruebe que todo elemento de la tabla es igual a la suma o diferencia de otros dos elementos del tablero.

2. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea K el punto de intersección de la prolongación del lado AB (desde A) con la bisectriz del $\measuredangle ACD$. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, demuestre que $\measuredangle BKC = \measuredangle CDB$.

3. Sea n un número entero positivo.

   a) Pruebe que el número $(2n + 1)^3 - (2n - 1)^3$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

   b) Pruebe que el número $(2n+1)^3-2$ es la suma de $3n-1$ cuadrados perfectos mayores que 1.

Día 2

1. Sea f una función lineal tal que $f(0) = -5$ y $f(f(0)) = -15$. Halle los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las soluciones de la inecuación $f(x) \cdot f(k - x) > 0$, se encuentran en un intervalo de longitud 2.

2. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sobre los lados BC y CD se toman los puntos M y K respectivamente, de modo que $MC = KD$. Sea P el punto de intersección de los segmentos MD y BK. Pruebe que $AP \perp MK$.

3. Demuestre que no existe ningún número natural n tal que la suma de todos los dígitos del número m, donde $m = n(2n-1)$ sea igual a 2000.

4. Las tangentes en cuatro puntos distintos de un arco de circunferencia menor que $180°$ se cortan formando un cuadrilátero convexo $ABCD$.

Pruebe que dos de los vértices pertenecen a una elipse que tiene por focos a los otros dos vértices.

5. Sean p y q dos enteros positivos tal que $1 \leq q \leq p$. Además sea $a = \left(p + \sqrt{p^2 + q}\right)^2$.

   a) Pruebe que el número a es irracional.

   b) Demuestre que $\{a\} > 0{,}75$.

6. Las raíces de la ecuación $ax^2 - 4bx + 4c = 0$ con $a > 0$ pertenecen al intervalo $[2, 3]$. Probar que:

   a) $a \leq b \leq c < a + b$.

   b) $\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} > \frac{c}{b+c}$.

7. Demuestre que la ecuación $x^{19} + x^{17} = x^{16} + x^7 + a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ tiene al menos dos raíces imaginarias.

8. Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación $x + \cos x = 1$.

9. En el triángulo ABC, rectángulo en C, sea F el punto de intersección de la altura CD y la bisectriz AE y G, el punto de intersección de ED y BF. Pruebe que el área del cuadrilátero $CEGF$ es igual al área del triángulo BDG.

Concurso Nacional (2003)

Día 1

1. Dada la siguiente lista de números:

$$1990, 1991, 1992, ..., 2002, 2003, 2003, 2003, ..., 2003$$

donde aparece 12 veces el número 2003. ¿Es posible escribir estos números en algún orden de modo que el número de 100 cifras que se obtiene sea primo?

2. Sean KL y KN las dos tangentes trazadas desde K a la circunferencia Γ donde L y N son los puntos de tangencia. M es un punto arbitrario de la prolongación de KN por N y P es el segundo punto de intersección de Γ con el circuncírculo del $\triangle KLM$. Q es el pie de la perpendicular trazada desde N a ML. Prueba que $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.

3. Un tablero de 4×4 tiene todas sus casillas pintadas de blanco. Una operación permitida es escoger un rectángulo que contiene 3 casillas y pintar cada una de las casillas de la siguiente forma:

   a) Si la casilla es blanca entonces se pinta de negro.

   b) Si la casilla es negra entonces se pinta de blanco.

   Prueba que aplicando varias veces la operación permitida, es imposible conseguir que todo el tablero quede pintado de negro.

Día 2

1. Las raíces de la ecuación $x^2 + (3a + b)x + a^2 + 2b^2 = 0$ son x_1 y x_2 siendo $x_1 \neq x_2$. Determina los valores de a y b para que las raíces de la ecuación $x^2 - 2a(3a + 2b)x + 5a^2b^2 + 4b^4 = 0$ sean x_1^2 y x_2^2.

2. Prueba que si $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}_+$ entonces p es divisible por 2003.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo y T un punto interior a este tal que $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA$. Sean M, N y P los pies de las perpendiculares desde T a BC, CA y AB respectivamente. Prueba que si la circunferencia circunscrita al $\triangle MNP$ corta nuevamente a los lados BC, CA y AB en M_1, N_1, P_1 respectivamente, entonces el $\triangle M_1N_1P_1$ es equilátero.

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(p) = 1$ para todo p primo y $f(ab) = bf(a) + af(b)$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$. Probar que si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ es la distribución canónica de n y p_i no divide a a_i $(i = 1, 2, ..., k)$ entonces $\frac{n}{\text{mcd}(n, f(n))}$ es libre de cuadrados (no divisible por un cuadrado mayor que 1).

5. Sean $a_1, a_2, ..., a_9$ números reales no negativos tales que $a_1 = a_9 = 0$ y al menos uno de los restantes términos es distinto de 0.

   a) Prueba que para algún i $(i = 2, ..., 8)$ se cumple que $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$.

   b) ¿Será cierto el planteamiento anterior si cambiamos el número 2 por 1,9 en la desigualdad?

6. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos sobre una circunferencia, sea I_1 el incentro del triángulo de vértices $P_2P_3P_4$, I_2 el incentro del triángulo $P_1P_3P_4$, I_3 el incentro del triángulo $P_1P_2P_4$, I_4 el incentro del triángulo $P_2P_3P_1$. Prueba que $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo.

7. Sea $S(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Determinar

$$S(S(S(2003^{2003}))).$$

8. Halla todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ tales que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

   a) $f(uv) = f(u)f(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$

   b) $f(\alpha u) = |\alpha| \, f(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$

   c) $f(u) + f(v) \leq |u| + |v| \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$

9. Sea D el punto medio de la base AB del triángulo isósceles y acutángulo ABC, E es un punto sobre AB y O circuncentro del triángulo ACE. Prueba que la recta que pasa por D perpendicular a DO, la recta que pasa por E perpendicular a BC y la recta que pasa por B paralela a AC, se cortan en un punto.

Concurso Nacional (2004)

Día 1

1. Se divide un cuadrado en 25 cuadrados pequeños, iguales entre sí, trazando rectas paralelas a los lados del cuadrado. Se trazan algunas diagonales de cuadrados pequeños de modo tal que no haya dos diagonales con un punto común. ¿Cuál es el número máximo de diagonales que se pueden trazar?

2. Cuando escribimos el número $n > 2$ como suma de algunos enteros positivos consecutivos (al menos dos sumandos), decimos que tenemos una *descomposición elegante* de n. Dos *descomposiciones elegantes* serán diferentes si alguna de ellas contiene algún sumando que no contiene la otra. ¿Cuántas *descomposiciones elegantes* diferentes tiene el número 3^{2004}?

3. En un examen fueron propuestos 6 problemas. Cada problema fue resuelto por exactamente 1000 estudiantes, pero en ningún caso ha ocurrido que dos estudiantes en conjunto, hayan resuelto los 6 problemas. Determinar el menor número de participantes que pudo haber en dicho examen.

Día 2

1. Determina todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} &= 2004 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3 \end{aligned}$$

2. Escribe dos unos, luego un 2 entre ellos, luego un 3 entre los números cuya suma es 3, luego un 4 entre los números cuya suma es 4, como se muestra a continuación: $(1,1), (1,2,1), (1,3,2,3,1), (1,4,3,2,3,4,1)$ y así sucesivamente. Prueba que el número de veces que aparece n, $(n \geq 2)$, es igual al número de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.

3. En el $\triangle ABC$ no isósceles, se trazan las bisectrices interiores de vértices B y C, las cuales cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. La recta EF corta a la prolongación del lado BC en T. En el lado BC se ubica un punto D, de modo que $\frac{DB}{DC} = \frac{TB}{TC}$. Demuestra que AT es bisectriz exterior del ángulo A.

4. Determina todos los pares de números naturales (x, y) para los cuales se cumple que $x^2 = 4y + 3\mathrm{mcm}(x, y)$.

5. Considerar una circunferencia K y un cuadrilátero $ABCD$ inscrito, tal que la diagonal BD no es diámetro de la circunferencia. Demuestra que la intersección de las rectas tangentes a K por los puntos B y D está en la recta AC si y sólo si $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

6. Dada la ecuación $\frac{ax^2-24x+b}{x^2-1} = x$. Encuentra todos los números reales a y b para los cuales tenga dos soluciones reales cuya suma sea igual a 12.

7. Para los números reales α, β, γ con $\beta\gamma \neq 0$ se tiene que $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$. Probar que
$$5(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq \alpha\beta$$

8. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que:

   a) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ para $x, y \geq 0$

   b) $f(2) = 0$

   c) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

9. Se dan el ángulo $XOY = \alpha$ y los puntos A y B sobre OY tales que $OA = a$ y $OB = b$ con $a > b$. Una circunferencia contiene los puntos A y B y es tangente a OX.

   a) Calcula el radio de esa circunferencia en función de a, b y α.

   b) Si a y b son constantes y α varía, muestra que el valor mínimo del radio de la circunferencia es $\frac{a-b}{2}$.

Concurso Nacional (2005)

Día 1

1. Determina el menor número real a tal que existe un cuadrado de lado a que en su interior contiene 5 círculos unitarios sin puntos interiores comunes dos a dos.

2. Se tienen n bombillos en una circunferencia y uno de ellos está marcado. Sea la operación A:
   Tomar un divisor positivo d del número n, comenzando por el bombillo marcado y en sentido horario, contamos alrededor de la circunferencia desde 1 hasta dn, cambiando el estado (encendido o apagado) a aquellos bombillos que les corresponda los múltiplos de d.
   Sea la operación B:
   Aplicar la operación A a todos los divisores positivos de n (al primer divisor que se le aplique es con todos los bombillos apagados y a los restantes divisores es con el estado que resulte del divisor anterior).
   Determina todos los enteros positivos n, tales que al aplicar la operación B, resulten todos los bombillos encendidos.

3. Se tienen dos pilas de cartas, una con n cartas y otra con m cartas. A y B juegan alternadamente realizando en cada turno una de las siguientes operaciones:

   a) Quitar una carta de una pila.
   b) Quitar una carta de cada pila.
   c) Mover una carta de una pila a la otra.

   El jugador A comienza siempre el juego y gana el que coja la última carta. Determina si existe alguna estrategia ganadora en función de m y n, de modo que uno de los jugadores siguiéndola pueda ganar siempre.

Día 2

1. Determina todos los cuadriláteros que puedan ser divididos por una diagonal en dos triángulos de igual área y de igual perímetro.

2. Determine las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ para las que existe un intervalo (h, k) tal que para todo $x \in (h, k)$ se cumple que $f(x)f(x+1) < 0$ y $f(x)f(x-1) < 0$.

3. Determina todas las cuádruplas de números reales que cumplan que el producto de tres cualesquiera de estos números más el cuarto es constante.

4. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que:
$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ para todos x, y reales positivos.

5. En la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el punto P es tomado de modo tal que la perpendicular trazada por el punto P a la recta AC corta a la circunferencia también en el punto Q, la perpendicular trazada por el punto Q a la recta AB corta a la circunferencia también en el punto R y la perpendicular trazada por el punto R a la recta BC corta a la circunferencia también en el punto P. Sea O el centro de esta circunferencia. Prueba que $\measuredangle POC = 90°$.

6. Todas las diferencias positivas $a_i - a_j$ de cinco enteros positivos diferentes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son todas diferentes. Sea A el conjunto formado por los mayores elementos de cada grupo de 5 elementos que cumplan dicha condición. Determina el elemento mínimo de A.

7. Determina todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) que satisfacen $x < y < z, mcd(x, y) = 6, mcd(y, z) = 10, mcd(z, x) = 8$ y $mcm(x, y, z) = 2400$.

8. Hallar el menor número real A, tal que existan dos triángulos distintos, con longitudes de sus lados enteras y de modo que el área de cada uno sea A.

9. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$ reales positivos tales que:

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_i \geq x_i^2$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Demostrar que

$$\frac{x_1}{x_1 y_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 y_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_n y_n + x_1} > \frac{1}{2n}.$$

Concurso Nacional (2006)

Día 1

1. Cada uno de los n estudiantes de una clase le mandó una tarjeta a cada uno de m compañeros. Demostrar que si $2m + 1 > n$, entonces al menos dos estudiantes se mandaron tarjetas entre sí.

2. n personas numeradas desde 1 hasta n están dispuestas en fila. Un *movimiento admisible* consiste en que cada persona cambia a lo sumo una vez su lugar con otra o permanece en su lugar. Por ejemplo

Posición inicial	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
Posición final	2	1	3	6	5	4	$\cdots$	n	$n-1$	$n-2$

es un *movimiento admisible*. ¿Es posible que partiendo de la posición

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n

se llegue a

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$

mediante dos *movimientos admisibles*?

3. Se pintan k casillas de un tablero cuadriculado de $m \times n$ de tal manera que se cumpla la siguiente propiedad:
Si los centros de cuatro casillas son los vértices de un cuadrilátero de lados paralelos a los bordes del tablero, entonces a lo más dos de estas casillas deben estar pintadas.
Encontrar el mayor valor posible de k.

Día 2

1. Determina todos los polinomios mónicos $P(x)$ de grado 3 con coeficientes enteros, que son divisibles por $x-1$, al dividirlos por $x-5$ dejan el mismo resto que al dividirlos por $x+5$ y tienen un cero comprendido entre 2 y 3.

2. Sea U el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, O_1, O_2 y O_3 los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos BCU, CAU y ABU respectivamente. Probar que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ tienen el mismo centro.

3. Sean a, b, c números reales diferentes. Demostrar que

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5$$

4. Sea $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tal que:

   a) $f(n+1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$
   b) $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$

   Encuentra $f(2006)$.

5. La siguiente sucesión de números enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_{400}$ satisface la relación $a_{n+1} = \tau(a_n) + \tau(n)$ para todo $1 \leq n \leq 399$, donde $\tau(k)$ es la cantidad de divisores enteros positivos que tiene k. Probar que en la sucesión no hay más de 210 números primos.

6. Dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 2 están centradas en el punto O. El vértice A del triángulo equilátero ABC se encuentra en la circunferencia mayor, mientras que el punto medio del lado BC se encuentra sobre la circunferencia menor. Si B, O y C no son colineales, ¿qué medida puede tener el ángulo BOC?

7. La sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ satisface que $a_1 = 3, a_2 = -1, a_n a_{n-2} + a_{n-1} = 2$ para todo $n \geq 3$. Calcular $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$.

8. Probar que para cualquier k entero ($k \geq 2$) existe una potencia de 2 que entre sus últimos k dígitos, los nueves constituyen no menos de la mitad. Por ejemplo, para $k = 2$ y $k = 3$ se tienen las potencias $2^{12} = ...\ 96$ y $2^{53} = ...\ 992$.

9. En el cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Sean O el centro de la circunferencia circunscrita a $ABCD$, y E un punto de la prolongación de OC por C. Por E se traza una paralela a CD que corta a la prolongación de OD por D en F. Sea Q un punto interior a $ABCD$, tal que $\measuredangle AFQ = \measuredangle BEQ$ y $\measuredangle FAQ = \measuredangle EBQ$. Probar que $PQ \perp CD$.

Concurso Nacional (2007)

Día 1

1. Se colocan fichas en algunas casillas de un tablero de 8×8 de modo que:

   a) Hay al menos una ficha en cualquier rectángulo de lados 2×1 o 1×2.

   b) Hay al menos dos fichas vecinas en cualquier rectángulo de lados 7×1 o 1×7.

   Hallar la menor cantidad de fichas que pueden tomarse para cumplir con ambas condiciones.

2. Un prisma es llamado *binario* si se le puede asignar a cada uno de sus vértices un número del conjunto $\{-1, 1\}$, de forma tal que el producto de los números asignados a los vértices de cada cara sea igual a -1.

   a) Probar que el número de vértices de los prismas *binarios* es divisible por 8.

   b) Probar que un prisma con 2000 vértices es *binario*.

3. Una competencia de tenis tiene lugar durante cuatro días, el número de participantes es $2n$ con $n \geq 5$. Cada participante juega exactamente una vez diaria (es posible que un par de participantes se encuentre más veces). Prueba que tal competencia puede terminar con exactamente un ganador y exactamente tres jugadores en el segundo lugar y tal que no existan jugadores con los cuatro juegos perdidos.

Día 2

1. Hallar todos los números reales x, y tales que $x^3 - y^3 = 7(x - y)$ y $x^3 + y^3 = 5(x + y)$.

2. Hallar tres enteros positivos diferentes cuya suma sea mínima que cumplan la condición de que la suma de cada pareja de ellos sea un cuadrado perfecto.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia cuyas diagonales son perpendiculares. Denotar por P y Q los pies de las perpendiculares por D y C respectivamente a la recta AB, X es el punto de intersección de las rectas AC y DP, Y es el punto de intersección de las rectas BD y CQ. Demuestra que $XYCD$ es un cuadrado.

4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que:
$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y)$ para todos los x, y reales positivos.

5. Probar que existe un único entero positivo formado solamente por los dígitos 2 y 5, que tiene 2007 dígitos y que es divisible por 2^{2007}.

6. Sea el triángulo ABC acutángulo. Tomemos en el segmento BC dos puntos F y G tales que $BG > BF = GC$ y un punto P interior al triángulo en la bisectriz del $\measuredangle BAC$. Se trazan por P, $PD \| AB$ y $PE \| AC$, $D \in AC$ y $E \in AB$, $\measuredangle FEP = \measuredangle PDG$. Demuestra que $\triangle ABC$ es isósceles.

7. Demostrar que dados n puntos en el plano, no todos alineados, existe una recta que pasa por exactamente dos de ellos.

8. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de los dígitos de $n^2 + 1$. Se define una sucesión $\{a_n\}$, con a_0 entero positivo arbitrario y $a_{n+1} = S(a_n)$. Probar que la sucesión $\{a_n\}$ es periódica con período tres.

9. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC, con $AC = BC$. La recta AO corta el lado BC en D. Si BD y CD son enteros y $AO - CD$ es un número primo, determina esos tres números.

Concurso Nacional (2008)

Día 1

1. Se tiene un tablero de 9×9 donde se quieren situar todos los números del 1 al 81. Probar que existe $k \in \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$ tal que el producto de los números en la fila k difiere del producto de los números de la columna k.

2. Considera un hexágono regular en el plano. Para cada punto P del plano, sea $L(P)$ la suma de las seis distancias de P a las rectas que contienen cada uno de los lados del hexágono dado, y sea $V(P)$ la suma de las seis distancias de P a cada uno de los vértices del hexágono.

   a) ¿Para cuáles puntos P del plano, $L(P)$ toma su menor valor?

   b) ¿Para cuáles puntos P del plano, $V(P)$ toma su menor valor?

3. Diego eligió un número natural y lo escribió tres veces en el pizarrón. A continuación realizó varias veces una operación del siguiente tipo: borrar un número del pizarrón y escribir en su lugar el número igual a la suma de los otros dos menos 1. Al final de este proceso, uno de los tres números es 900. Determinar todos los posibles valores del número que eligió inicialmente.

Día 2

1. Dado un polinomio de grado 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$ se define la función $S(p) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Determina el número real r tal que, para cualquier polinomio $p(x)$ de grado 2 y con raíces reales, se tiene que $S(p) \geq ra^2$.

2. Considera el paralelogramo $ABCD$. Se traza una circunferencia que pasa por A e interseca al lado AD en N, al lado AB en M y a la diagonal AC en P, siendo A, M, N, P puntos distintos. Prueba que $AP \cdot AC = AM \cdot AB + AN \cdot AD$.

3. Prueba que hay infinitos pares ordenados de números enteros positivos (m, n) tales que $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ es un entero positivo.

4. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ para todos los números reales x, y.

5. Se tiene un tablero de 2008×2008 y 2008 fichas, una en cada fila y cada columna del tablero. Es permitido realizar uno de los siguientes movimientos:

   a) Dar dos pasos a la derecha y 10 hacia arriba.
   b) Dar dos pasos a la derecha y 6 hacia abajo.
   c) Dar dos pasos a la izquierda y 6 hacia arriba.
   d) Dar dos pasos a la izquierda y 10 hacia abajo.

   En caso de que no se pueda completar el camino hacia abajo se salta a la parte superior por la misma columna y se continúa el recorrido normalmente, análogamente en los otros sentidos. En cada jugada se va a mover una ficha utilizando cualquiera de las operaciones permitidas. ¿Será posible que en algún momento, después de un número finito de jugadas, las fichas estén ubicadas formando un cuadrado de lado 44 en la esquina superior izquierda del tablero y las 72 restantes estén en la última fila en las primeras 72 casillas?

6. Se tiene un triángulo ABC isósceles de base BC. Por el vértice A se traza una recta r paralela a BC. Los puntos P, Q están situados sobre la mediatriz de AB y AC respectivamente, tal que $PQ \perp BC$. M y N son puntos de la recta r tal que $\measuredangle APM = \measuredangle AQN = 90°$. Probar que $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \leq \frac{2}{AB}$.

7. Sean x, y reales positivos tales que $x^2 + y^2 + x \geq x^4 + y^4 + x^3$. Probar que $\frac{1-x^4}{x^2} \geq \frac{y^2-1}{y}$.

8. Sea ABC un triángulo acutángulo.

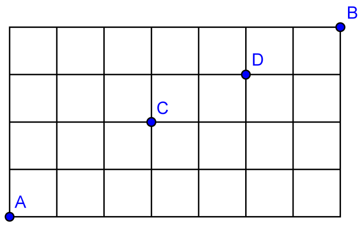
   a) Hallar el conjunto de puntos que son centros de los rectángulos cuyos vértices se encuentran sobre los lados de ABC.
   b) Determina si hay algún punto que es el centro de tres rectángulos diferentes cuyos vértices se encuentran sobre los lados de ABC.

9. Se quiere pintar todos los puntos del plano cuyas coordenadas son enteras, de manera que ningún rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados y vértices enteros del mismo color tenga área igual a una potencia de 2. Probar que es posible hacer esa coloración utilizando solamente dos colores.

Concurso Nacional (2009)

Día 1

1. Juan y Pedro juegan alternadamente sobre la cuadrícula dada. Cada



uno en su turno traza de 1 a 5 recorridos diferentes a los trazados anteriormente, que unan A con B, moviéndose únicamente a la derecha y hacia arriba sobre las líneas de la cuadrícula. Juan empieza jugando. Pierde el que trace un recorrido que pase por C o D. Prueba que uno de ellos puede ganar independientemente de como juegue el otro.

2. En el planeta Hidro habían 2008^2 hidras hace algún tiempo. Una de ellas tenía 1 tentáculo, otra 2, otra 3 y así sucesivamente hasta la última, con 2008^2 tentáculos. Desde entonces ha ocurrido lo siguiente: Si dos hidras se encuentran, se acoplan uniéndose tentáculo a tentáculo y de inmediato, los tentáculos acoplados desaparecen. Las hidras sin tentáculos mueren y a las sobrevivientes del acople les crecen 8 nuevos tentáculos, además de los que ya tienen. Ayer regresó de Hidro una expedición que capturó la última hidra viva, que tiene 23 tentáculos. ¿Será realmente esta la última hidra viva?

3. En cada casilla de un tablero $n \times n$ con $n \geq 2$, se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama *incaico* si para cada casilla, el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas (con un lado en común). ¿Para qué valores de n se pueden obtener tableros *incaicos*?

Día 2

1. Demuestra que cuando un número primo se divide por 30, el resto es 1 o un número primo. Muestra que si se divide por 60 o por 90 no ocurre lo mismo.

2. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. Sean $C_A(A, AI)$ la circunferencia de centro A y radio AI, $C_B(B, BI), C_C(C, CI)$ definidas de manera análoga. Sean X, Y, Z los puntos de intersección (diferentes de I) de C_B y C_C, de C_C y C_A, de C_A y C_B respectivamente. Muestra que si el radio de la circunferencia que pasa por los puntos X, Y, Z es igual al radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C entonces el triángulo ABC es equilátero.

3. Determina el menor valor de $x^2 + y^2 + z^2$, donde x, y, z son números reales, de modo que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

4. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:
   $x + f(xf(y)) = f(y) + yf(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Demuestra que existen infinitos enteros positivos n tales que $\frac{5^n-1}{n+2}$ es un entero.

6. Sean Ω_1 y Ω_2 circunferencias que se intersecan en los puntos A y B y sean O_1 y O_2 sus respectivos centros. Se toman M en Ω_1 y N en Ω_2 al mismo lado que B con respecto al segmento O_1O_2, tales que $MO_1 \| BO_2$ y $BO_1 \| NO_2$. Se trazan las tangentes a Ω_1 y Ω_2 por M y N respectivamente, que se intersecan en K. Demuestra que A, B y K son colineales.

7. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ reales positivos. Probar que

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(2x_k - x_{k+1} - x_{k+2})}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq 0$$

   En la sumatoria se han tomado índices cíclicos, es decir, $x_{n+1} = x_1$ y $x_{n+2} = x_2$.

8. Sea ABC un triángulo isósceles de base BC y $\measuredangle BAC = 20^\circ$. Sea D un punto en el lado AB tal que $AD = BC$. Determina $\measuredangle DCA$.

9. Halla todas las ternas de números primos (p, q, r) para las cuales se cumple que $p \mid 2qr + r$, $q \mid 2pr + p$ y $r \mid 2pq + q$.

Concurso Nacional (2010)

Día 1

1. La combinación para abrir una caja fuerte es un número de cinco cifras diferentes, seleccionadas aleatoriamente del 2 al 9. Para abrir la caja fuerte se necesita además una llave que está rotulada con el número 410639104, que es la suma de todas las combinaciones que no abren la caja. ¿Cuál es la combinación que abre la caja fuerte?

2. Néstor le ordenó a Juan, realizar el siguiente trabajo: dibuja una circunferencia, traza uno de sus diámetros y marca los puntos extremos del diámetro con los números 1 y 2 respectivamente. Sitúa 100 puntos en cada una de las semicircunferencias que determina el diámetro trazado (diferentes de los extremos del diámetro) y marca estos puntos aleatoriamente con los números 1 y 2. Para finalizar pinta de rojo todos los segmentos pequeños que tengan marcas diferentes en sus extremos. Al pasar cierto tiempo Juan terminó el trabajo y le dijo a Néstor "pinté 47 segmentos de rojo". Muestra que si Juan no cometió errores, es falso lo que dijo.

3. Un rectángulo de lados n y p está dividido en np cuadraditos unitarios. Inicialmente hay m cuadraditos unitarios pintados de negro y los restantes pintados de blanco. A continuación ocurre repetidamente el siguiente proceso: si un cuadradito unitario pintado de blanco tiene al menos dos lados en común con cuadraditos pintados de negro entonces su color también se torna negro. Encuentra el menor entero m que satisface la propiedad: existe una posición inicial de m cuadraditos unitarios negros tal que todo el rectángulo $n \times p$ se pinta de negro al repetirse el proceso un número finito de veces.

Día 2

1. Determina todos los enteros a y b, tal que $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ sea una solución de la ecuación $x^2+ax+b=0$. Prueba que para tales a y b el número $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ no es solución de la ecuación dada.

2. Sea $n=(p^2+2)^2-9(p^2-7)$ donde p es un número primo. Determina el menor valor de la suma de los dígitos de n y para qué número primo p se obtiene.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea D un punto tal que $BD \perp AC$ y $DC=AC$. Encuentra la razón $\frac{AD}{AB}$.

4. Prueba que para todos los números reales positivos x, y se verifica la desigualdad $x^4+y^3+x^2+y+1>\frac{9}{2}xy$.

5. Sean $p \geq 2$ un número primo y $a \geq 1$ un entero distinto de p. Encuentra todos los pares (a,p) tales que $a+p \mid a^2+p^2$.

6. Sea ABC un triángulo acutángulo (con $AB \neq AC$) y M el punto medio de BC. La circunferencia de diámetro AM corta a AC en N y a BC otra vez en H. Se toma un punto K sobre AC (entre A y N) tal que $CN=NK$. Los segmentos AH y BK se intersectan en L. La circunferencia que pasa por A, K y L corta a AB en P. Demuestra que C, L y P son colineales.

7. Sean x, y, z números reales positivos tal que $xyz=1$. Prueba que:
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

8. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo que cumple $AB<BC$, $AE<ED$ y $AB+CD+EA=BC+DE$. Se toman puntos variables F, G y H que se mueven respectivamente sobre los segmentos BC, CD y DE. Se definen B' como la proyección de B sobre AF, C' como la proyección de C sobre FG, D' como la proyección de D sobre GH y E' como la proyección de E sobre HA. Demostrar que existe al menos un cuadrilátero $B'C'D'E'$ cuando F, G y H se mueven sobre sus lados, que es un paralelogramo.

9. Sea A el subconjunto de los números naturales tales que la suma de sus dígitos es múltiplo de 2009. Encuentra $x, y \in A$ tal que $y - x > 0$ es mínimo y x también es mínimo.

Concurso Nacional (2012)

Día 1

1. Se tienen 1000 bolas de masa $0,38$ y 5000 bolas de masa $0,038$ que deben empacarse en cajas. Una caja contiene una colección de bolas cuya masa total es a lo sumo 1. Hallar la menor cantidad de cajas que se necesitan.

2. En una escuela con 5 grados diferentes hay 250 hembras y 250 varones. Cada grado tiene la misma cantidad de estudiantes. Para una competencia de conocimientos quiere formarse equipos de una hembra y un varón que sean del mismo grado. Si en cada grado hay al menos 19 hembras y 19 varones. Hallar la mayor cantidad de equipos que pueden formarse.

3. En un tablero de 123×123, cada casilla es pintada de rojo o azul de acuerdo con las condiciones siguientes:

   a) Cada casilla pintada de rojo que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 5 casillas azules entre sus 8 casillas vecinas.

   b) Cada casilla pintada de azul que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 4 casillas rojas entre sus 8 casillas vecinas.

   Determina el número de casillas pintadas de rojo en el tablero.

4. Con 21 fichas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3×7. Demuestra que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Día 2

1. Si $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$ y $x_1+x_2+\cdots+x_{1006} = 503^2$, determina el valor de x_{1006}.

2. Dado el triángulo ABC, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Las rectas LM y LN cortan respectivamente en P y Q a la tangente al circuncírculo en A. Demuestra que $CP \| BQ$.

3. Un profesor de matemática escribe en la pizarra una ecuación cuadrática de la forma $x^2+mx\star n=0$, con m y n enteros. El signo de n está borroso. Aún así Claudia la resuelve y obtiene soluciones enteras, una de las cuales es 2011. Halla todos los posibles valores de m y n.

4. Sean x, y, z reales positivos. Demuestra que:

$$\frac{xz}{x^2+xy+y^2+6z^2}+\frac{zx}{z^2+zy+y^2+6x^2}+\frac{xy}{x^2+xz+z^2+6y^2}\leq\frac{1}{3}.$$

5. Halla todos los pares (m, n) de enteros positivos tales que $m^2+n^2=(m+1)(n+1)$.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y sea AD la altura relativa a la hipotenusa. Sea N la intersección de la bisectriz del ángulo de vértice C con AD. Demuestra que $AD\cdot BC=AB\cdot DC+BD\cdot AN$.

7. Halla todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x^2+f(y))=y-x^2$ para todo x, y reales.

8. Si los números naturales a, b, c, d verifican las relaciones:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ab+cd)^2\\(a^2+d^2)(b^2+c^2)&=(ad+bc)^2\end{aligned}$$

y el $mcd(a, b, c, d)=1$, demostrar que $a+b+c+d$ es un cuadrado perfecto.

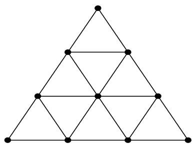
9. Sea O un punto interior al triángulo ABC tal que $\measuredangle BAO=30°, \measuredangle CBO=20°$ y $\measuredangle ABO=\measuredangle ACO=40°$. Sabiendo que el triángulo ABC no es equilátero, halla las amplitudes de sus ángulos interiores.

Concurso Nacional (2013)

Día 1

1. Determine el menor entero $n \geq 2012$ para el cual es posible disponer 16 enteros consecutivos en un tablero de 4×4 de manera que, si se seleccionan 4 elementos de los cuales no haya dos en una misma fila ni en una misma columna, la suma de ellos sea siempre igual a n. Para el n hallado, muestre cómo llenar el tablero.

2. Un triángulo equilátero de lado 3 es dividido en 9 triángulos equiláteros pequeños iguales con lados de longitud 1. Cada vértice de triángulo pequeño (puntos negritos) es numerado con un número diferente del 1 al 10. Dentro de cada triángulo pequeño se escribe la suma de los números correspondientes a sus tres vértices. Demuestre que hay tres triángulos pequeños para los que se verifica que la suma de los números escritos en su interior es al menos 48.



3. Dos jugadores A y B sacan, por turnos, piedras de una pila de N piedras. Juegan en el orden $A,\ B,\ A,\ B,\ A, ...$ A comienza el juego y pierde el que saca la última piedra. B puede sacar en cada jugada $1,\ 2$ o 3 piedras, mientras que A puede sacar en cada turno, $2,\ 3,\ 4$ piedras o 1 piedra en el caso de que sea la última del montón. Determinar para que valores de N tiene estrategia ganadora A , y para que valores la estrategia ganadora es de B.

4. Un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, ..., 30\}$ es llamado *delicioso* si no contiene elementos a y b tales que $a = 3b$. Un subconjunto *delicioso* es llamado *superdelicioso* si además de ser *delicioso* se verifica que

ningún subconjunto *delicioso* tiene más elementos de los que él tiene. Determine el número de subconjuntos *superdeliciosos*.

5. Tres jugadores A, B y C sacan, por turnos, piedras de una pila de N piedras. Juegan en el orden $A,\ B,\ C,\ A,\ B,\ C, \ldots.$ A comienza el juego y pierde el que saca la última piedra. Los jugadores A y C forman equipo contra el B, ellos se ponen de acuerdo en una estrategia conjunta. B puede sacar en cada jugada $1,\ 2,\ 3,\ 4$ o 5 piedras, mientras que A y C pueden sacar, cada uno, $1,\ 2$ o 3 piedras en cada turno. Determinar para que valores de N tienen estrategia ganadora A y C , y para que valores la estrategia ganadora es de B.

6. 2013 personas corren una maratón por una carretera recta de $4m$ de ancho. En cierto momento, no hay dos corredores que estén a menos de $2m$ el uno del otro. Demuestre que hay dos corredores que en ese momento están a más de $1052m$ el uno del otro.

   Nota: Considere los corredores como puntos.

Día 2

1. Cris tiene la ecuación $-2x^2 + bx + c = 0$, y Cristian aumenta los coeficientes de la ecuación de Cris en 1, obteniendo la ecuación $-x^2 + (b+1)\,x + (c+1) = 0$. Mariloli nota que las soluciones reales de la ecuación de Cristian son los cuadrados de las soluciones reales de la ecuación de Cris. Encuentre todos los valores posibles que pueden tomar los coeficientes b y c.

2. Dos triángulos isósceles iguales ABC y ADB, con C y D situados en semiplanos diferentes con respecto a la recta AB, comparten la base AB. Los puntos medios de AC y BC se denotan respectivamente por E y F. Demuestre que DE y DF dividen a AB en tres partes de igual longitud.

3. Encuentre todos los números naturales que son 300 veces la suma de sus dígitos.

4. Decimos que un entero positivo es descompuesto si es primo y además si se traza una línea separándolo en dos números, esos dos números nunca son compuestos. Por ejemplo 1997 es descompuesto ya que es primo, se divide en: 1, 997; 19, 97; 199, 7 y ninguno de esos números es compuesto. ¿Cuántos números descompuestos hay entre 2000 y 3000?

5. Sean los números reales $a,\ b,\ c,\ d$ con $a \geq b$ y $c \geq d$. Demuestre que la ecuación
$$(x+a)(x+d)+(x+b)(x+c)=0$$
tiene raíces reales.

6. Sea ABC un triángulo de lados $BC = 13$, $CA = 14$ y $AB = 15$. Denotamos I al punto de intersección de las bisectrices y M al punto medio de AB. La recta IM corta en P a la altura trazada desde C . Hallar la longitud de CP.

7. Sean x, y , z números reales positivos cuya suma es 2013. Halle el máximo valor posible de
$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)}$$

8. Demuestre que existen infinitos pares (a,b) de números enteros positivos con las propiedades siguientes: $a+b$ divide a $ab+1$, $a-b$ divide a $ab-1$, $b>2$ y $a>b\sqrt{3}-1$.

9. Sea ABC un triángulo con $\measuredangle A = 90°, \measuredangle B = 75°$ y $AB = 2$. Los puntos P y Q de los lados AC y BC respectivamente, son tales que $\measuredangle APB = \measuredangle CPQ$ y $\measuredangle BQA = \measuredangle CQP$. Calcular la medida de QA.

Soluciones

Concurso Nacional (2001)

Día 1

1. En cada casilla de un tablero de 3×3 está escrito un número real. El elemento de la i - ésima fila y la j - ésima columna es igual al módulo de la diferencia de la suma de los elementos de la columna j y la suma de los elementos de la fila i. Pruebe que todo elemento de la tabla es igual a la suma o diferencia de otros dos elementos del tablero.

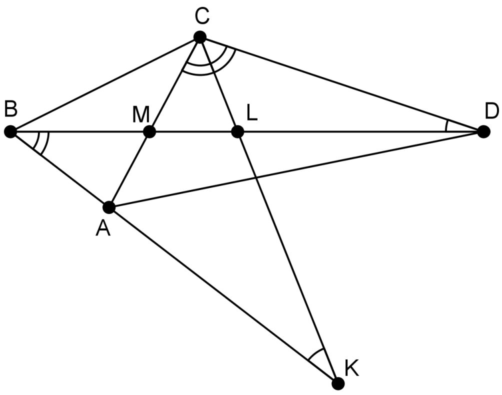
   Solución:

   Sean p_1, p_2 y p_3 la suma de los elementos de la primera, segunda y tercera filas respectivamente, análogamente q_1, q_2 y q_3 para las columnas. Está claro que $p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3$, por tanto el elemento determinado por la primera fila y primera columna es $|p_1 - q_1| = |p_2 + p_3 - q_2 - q_3|$, por lo que $|p_1 - q_1| = c_1 |p2 - q2| + c_2 |p_3 - q_3|$, siendo $c_1 = \pm 1$ y $c_2 = \pm 1$. Como $|p_1 - q_1| \geq 0$, c_1 y c_2 no pueden ser -1 simultáneamente, de lo que se concluye que $|p_1 - q_1|$ puede ser escrito como suma o diferencia de dos elementos de la tabla.

2. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea K el punto de intersección de la prolongación del lado AB (desde A) con la bisectriz del $\measuredangle ACD$. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, demuestre que $\measuredangle BKC = \measuredangle CDB$.

   Solución:

   Sea L la intersección de CK y BD. La condición del problema se puede escribir como $MA(MC+CD) = MB(ML+LD)$. Por el teorema de la bisectriz se cumple que $\frac{MC}{ML} = \frac{CD}{LD}$. Utilizando los resultados anteriores se desprende que $\frac{MA}{MB} = \frac{ML}{MC}$, resultando que los triángulos BMA y CML son semejantes y por tanto $\measuredangle MBA = \measuredangle MCL$, pero $\measuredangle MCL = \measuredangle LCD$, por lo que K, B, C y D son concícliclos y $\measuredangle BKC = \measuredangle CDB$.



3. Sea n un número entero positivo.

   a) Pruebe que el número $(2n+1)^3-(2n-1)^3$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

   b) Pruebe que el número $(2n+1)^3-2$ es la suma de $3n-1$ cuadrados perfectos mayores que 1.

Solución:

a) $(2n+1)^3-(2n-1)^3 = 24n^2+2 = (4n)^2+(2n+1)^2+(2n-1)^2$.

b) $(2n+1)^3-1 = \left[(2n+1)^3-(2n-1)^3\right]+\left[(2n-1)^3-(2n-3)^3\right]+\cdots+\left[3^3-1^3\right]$. En cada pareja de términos del miembro derecho se aplica el resultado del inciso a) y queda la suma de $3n$ cuadrados, pero el último es 1, que pasa restando al miembro izquierdo y se completa la demostración.
Otra forma de resolver este inciso es por inducción completa. Para $n=1$ resulta $25=3^2+4^2$, luego notar que

$$[2(n+1)+1]^3-2 = (2n+1)^3-2+[4(n+1)]^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2.$$

Día 2

1. Sea f una función lineal tal que $f(0) = -5$ y $f(f(0)) = -15$. Halle los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las soluciones de la inecuación $f(x) \cdot f(k-x) > 0$, se encuentran en un intervalo de longitud 2.

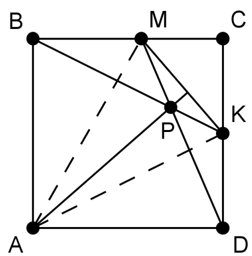
   Solución:

   De $f(0) = -5$ se deduce que $b = -5$ en $f(x) = ax+b$. De $f(-5) = -15$ se deduce que $a = 2$, por lo que $f(x) = 2x - 5$. Entonces debemos resolver la inecuación $(2x-5)(2(k-x)-5) > 0$, o equivalentemente $(2x-5)(2k-2x-5) > 0$, lo cual se cumple si y sólo si $x \in \left[\frac{5}{2}, k - \frac{5}{2}\right]$ o $x \in \left[k - \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$. En cualquier caso debe cumplirse $|5-k| = 2$, de donde $k = 3$ y $k = 7$.

2. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sobre los lados BC y CD se toman los puntos M y K respectivamente, de modo que $MC = KD$. Sea P el punto de intersección de los segmentos MD y BK. Pruebe que $AP \perp MK$.

   Solución:

   Unamos A con M y K. Es fácil probar que $\triangle AKD = \triangle DMC$, por lo que $\measuredangle KAD = \measuredangle MDC$, de donde resulta que $MD \perp AK$. De igual modo se prueba que $KB \perp AM$ y entonces P es el ortocentro del $\triangle AMK$, por lo que se obtiene $AP \perp MK$.



3. Demuestre que no existe ningún número natural n tal que la suma de todos los dígitos del número m, donde $m = n(2n-1)$ sea igual a 2000.

Solución:

Sea $S(n(2n-1))$ la suma de los dígitos del número $n(2n-1)$. Es bien conocido que $n(2n-1) \equiv S(n(2n-1)) \pmod 3$, pero $2000 \equiv 2 \pmod 3$ y $n(2n-1)$ deja resto 0 o 1 en la división por 3.

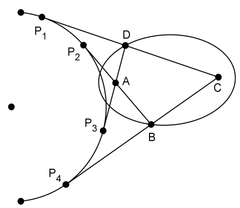
4. Las tangentes en cuatro puntos distintos de un arco de circunferencia menor que 180° se cortan formando un cuadrilátero convexo $ABCD$. Pruebe que dos de los vértices pertenecen a una elipse que tiene por focos a los otros dos vértices.

Solución:

Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 los puntos del arco de circunferencia, y $ABCD$ el cuadrilátero convexo formado por los puntos de intersección de las cuatro tangentes. Como los dos segmentos de tangentes trazadas desde un mismo punto a una misma circunferencia son iguales, entonces se deducen las siguientes igualdades: $DP_1 = DP_3, CP_1 = CP_4, AP_2 = AP_3$ y $BP_2 = BP_4$. Entonces $(AD + CD) - (AB + BC)$ es igual a

$$DP_3 - AP_3 + CP_1 - DP_1 - BP_2 + AP_2 - CP_4 + BP_4 = 0$$

por lo que $AD + CD = AB + BC$, y por definición B y D pertenecen a una misma elipse que tiene por focos A y C.



5. Sean p y q dos enteros positivos tal que $1 \leq q \leq p$. Además sea $a = \left(p + \sqrt{p^2+q}\right)^2$.

   a) Pruebe que el número a es irracional.

   b) Demuestre que $\{a\} > 0{,}75$.

   Solución:

   a) Como $1 \leq q \leq p$ entonces $p^2 < p^2 + q < (p+1)^2$, o sea $p^2 + q$ no puede ser un cuadrado perfecto, y por tanto $a = 2p^2 + q + 2p\sqrt{p^2+q}$ es irracional.

   b) Sea $b = \left(\sqrt{p^2+q} - p\right)^2 = 2p^2 + q - 2p\sqrt{p^2+q} > 0$, entonces se tiene que

$$\sqrt{p^2+q} < \frac{2p^2+q}{2p} \leq \frac{2p^2+p}{2p} = p + \frac{1}{2}$$

   de aquí sigue que $\sqrt{p^2+q} - p < \frac{1}{2}$ y por tanto $b < 0{,}25$. Ahora notar que $a + b$ es entero, de lo cual se deduce

$$\{a\} = a + b - [a] - b > 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

6. Las raíces de la ecuación $ax^2 - 4bx + 4c = 0$ con $a > 0$ pertenecen al intervalo $[2, 3]$. Probar que:

   a) $a \leq b \leq c < a + b$.

   b) $\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} > \frac{c}{b+c}$.

   Solución:

   Sean p y q las raíces de la ecuación dada. Por las relaciones de Vietta se tiene $p + q = \frac{4b}{a}$ y $pq = \frac{4c}{a}$, pero $p + q \geq 4$, entonces $b \geq a$. Las desigualdades $b \leq c < a + b$ son equivalentes a

$$p + q \leq pq < 4 + p + q \Leftrightarrow 0 \leq pq - (p+q) < 4$$

Como $pq - (p+q) = (p-1)(q-1) - 1$ entonces solo resta probar que $1 \leq (p-1)(q-1) < 5$, lo cual es cierto ya que $p, q \in [2, 3]$.

b) De los resultados obtenidos en el inciso a) se tiene que

$$\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} > \frac{c}{b+c}.$$

7. Demuestre que la ecuación $x^{19} + x^{17} = x^{16} + x^7 + a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ tiene al menos dos raíces imaginarias.

Solución:

La ecuación del problema se puede escribir como $x^{19} + x^{17} - x^{16} - x^7 - a = 0$. Ahora por las relaciones de Vietta tenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} &= 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{18}x_{19} &= 1 \end{aligned}$$

pero

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{19})^2 = x_1^2 + \cdots + x_{19}^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{18}x_{19})$$

y entonces resulta $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{19}^2 = -2$, y como la suma de cuadrados en $\mathbb{R}$ es siempre positiva, se concluye que al menos una de las raíces es imaginaria, pero si una ecuación tiene una raíz imaginaria su conjugada también lo es.

Nota: Si cambiamos $x^{16} + x^7 + a$ por un polinomio arbitrario de grado menor o igual que 16 se puede usar la misma idea para probar que existen dos raíces imaginarias.

8. Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación $x + \cos x = 1$.

Solución:

$x = 0$ es solución, probemos que es única. Se tiene que $x = 1 - \cos x$, de donde usando que $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos $0 \leq x \leq 2$. Notar que $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq x$ y con esto queda probada la unicidad.

9. En el triángulo ABC, rectángulo en C, sea F el punto de intersección de la altura CD y la bisectriz AE y G, el punto de intersección de ED y BF. Pruebe que el área del cuadrilátero $CEGF$ es igual al área del triángulo BDG.

   Solución:

   Como AE es bisectriz del $\measuredangle BAC$ se tiene

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} = \cos \measuredangle BAC = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CF}$$

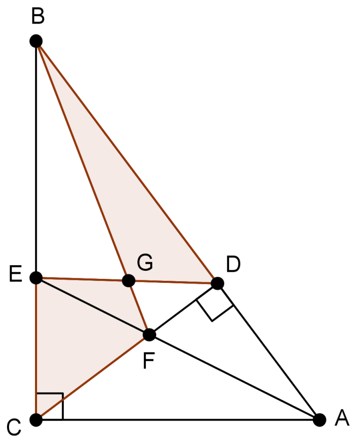
   entonces $CE \cdot CF = BE \cdot DF = (BC - EC)(CD - CF)$, de donde se deduce que $BC \cdot CD = BC \cdot CF + EC \cdot CD$ y multiplicando por $\frac{1}{2}\sin \measuredangle BCD$ queda

$$\begin{aligned} A(BCD) &= A(BCF) + A(ECD) \\ &= A(CEGF) + A(BEG) + A(CEGF) + A(GDF) \end{aligned}$$

   al mismo tiempo

$$A(BCD) = A(CEGF) + A(BEG) + A(BGD) + A(GDF)$$

   igualando se obtiene que $A(CEGF) = A(BGD)$.



Concurso Nacional (2003)

Día 1

1. Dada la siguiente lista de números:

$$1990, 1991, 1992, ..., 2002, 2003, 2003, 2003, ..., 2003$$

donde aparece 12 veces el número 2003. ¿Es posible escribir estos números en algún orden de modo que el número de 100 cifras que se obtiene sea primo?

Solución:

No se puede.
Sea N un número arbitrario de 100 cifras de los que se pueden formar con las condiciones del problema. Demostraremos que N es divisible por 11. En N los dígitos que ocupan las posiciones impares son los dígitos 1^{ro} y 3^{ro} de los números de 4 cifras de la lista y los que ocupan las posiciones pares son los dígitos 2^{do} y 4^{to} de dichos números. Sean

S_I y S_P las sumas de los dígitos que ocupan las posiciones impares y pares, respectivamente, del número N.

$$S_I = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10 veces} + \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{15 veces} + \underbrace{9+9+9+\cdots+9}_{10 veces}$$

en algún orden.

$$S_P = \underbrace{9+9+9+\cdots+9}_{10 veces} + (1+2+3+\cdots+9+1+2) + \underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{12 veces}$$

en algún orden. Entonces $S_I = 130, S_P = 174$ y $S_I - S_P = 130 - 174 = -44$, luego $S_I - S_P$ es divisible por 11. En virtud de la regla de divisibilidad por 11 tenemos que N es divisible por 11 y claramente $N > 11$.

2. Sean KL y KN las dos tangentes trazadas desde K a la circunferencia Γ donde L y N son los puntos de tangencia. M es un punto arbitrario de la prolongación de KN por N y P es el segundo punto de intersección de Γ con el circuncírculo del $\triangle KLM$. Q es el pie de la perpendicular trazada desde N a ML. Prueba que $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.

Solución:

Sea $R = \{\Gamma \cap LM\} \backslash L$ y $T = PR \cap KM$. Como el cuadrilátero $KLPM$ está inscrito en una circunferencia, $\measuredangle MPL = 180° - \measuredangle MKL$, $\measuredangle LPR = \measuredangle KLM$ (inscrito en la circunferencia y seminscrito sobre el mismo arco en Γ). En el triángulo KLM, $\measuredangle KLM = \measuredangle 180° - \measuredangle MKL - \measuredangle KML$. Luego $\measuredangle LPR = 180° - \measuredangle MKL - \measuredangle KML$.

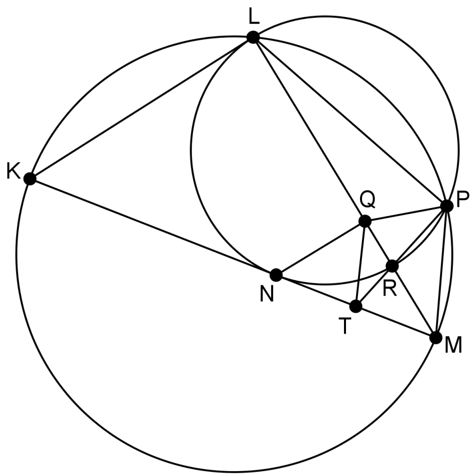
$$\begin{aligned} \measuredangle MPT &= \measuredangle MPL - \measuredangle LPR \\ &= 180° - \measuredangle MKL - (180° - \measuredangle MKL - \measuredangle KML) \\ &= \measuredangle KML \end{aligned}$$

Por tanto $\triangle MPT \sim \triangle MRT$ (ángulo MTP común). De aquí $MT^2 = TR \cdot TP$, pero por potencia de T respecto a Γ se tiene $NT^2 = TR \cdot$

TP, entonces $NT = MT$ y como el triángulo MQN es rectángulo en Q entonces $\measuredangle TQM = \measuredangle KML = \measuredangle MPT$. Por tanto el cuadrilátero $PQTM$ es cíclico de donde $\measuredangle QPT = \measuredangle KML$, luego

$$\measuredangle MPQ = \measuredangle QPT + \measuredangle MPT = \measuredangle KML + \measuredangle KML = 2\measuredangle KML$$

es decir, $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.



3. Un tablero de 4×4 tiene todas sus casillas pintadas de blanco. Una operación permitida es escoger un rectángulo que contiene 3 casillas y pintar cada una de las casillas de la siguiente forma:

   a) Si la casilla es blanca entonces se pinta de negro.
   b) Si la casilla es negra entonces se pinta de blanco.

   Prueba que aplicando varias veces la operación permitida, es imposible conseguir que todo el tablero quede pintado de negro.

Solución:

Vamos a distribuir las letras a, b, c en el tablero de la siguiente forma

a	b	c	a
c	a	b	c
b	c	a	b
a	b	c	a

Notemos que las letras están alternadas tanto en las filas como en las columnas. Esto hace que cada vez que se seleccione un rectángulo con 3 casillas, entonces exactamente una letra a, una letra b y una letra c son seleccionadas. Sean A la cantidad de casillas blancas con la letra a, B la cantidad de casillas blancas con letra b y C la cantidad de casillas blancas con la letra c. Al inicio tenemos: $A = 6, B = 5$ y $C = 5$. Cada vez que seleccionamos un rectángulo formado por 3 casillas, se suma a cada valor de A, B y C los valores $+1$ ó -1. De aquí tenemos que si todas las casillas fueran negras, entonces $A = B = C = 0$. Pero, como iniciamos con $A = 6, B = C = 5$, y alternando simultáneamente por $+1$ ó -1 estos valores, siempre tenemos entre los valores de A, B y C dos números impares y un par o, dos pares y un impar, por lo que la situación $A = B = C = 0$ es imposible.

Día 2

1. Las raíces de la ecuación $x^2 + (3a + b)x + a^2 + 2b^2 = 0$ son x_1 y x_2 siendo $x_1 \neq x_2$. Determina los valores de a y b para que las raíces de la ecuación $x^2 - 2a(3a + 2b)x + 5a^2b^2 + 4b^4 = 0$ sean x_1^2 y x_2^2.

   Solución:

   Como x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación dada, entonces $x_1 + x_2 = -(3a + b)$ y $x_1x_2 = a^2 + 2b^2$ por las relaciones de Vietta en la primera ecuación. Supongamos que x_1^2 y x_2^2 sean las raíces de la segunda ecuación, entonces $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 + 6ab + b^2 - 2(a^2 + 2b^2) = 7a^2 + 6ab - 3b^2$ y $x_1^2x_2^2 = (a^2 + 2b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4$. Tenemos que $7a^2 + 6ab - 3b^2 = 6a^2 + 4ab$ y $a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 = 5a^2b^2 + 4b^4$ nuevamente por las relaciones de Vietta en la segunda ecuación. Entonces $a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$ y $(a + 3b)(a - b) = 0$, por lo que $a = -3b$ o $a = b$. Por otro lado se tiene que $a^2(a^2 - b^2) = 0$ de donde $a = 0$ o $a = \pm b$.

Si $a = 0$, entonces $b = 0$ y las raíces de la ecuación no son diferentes. Si $a = b$, entonces la primera ecuación es $x^2 + 4bx + 3b^2 = 0$, cuyas raíces son $-b$ y $-3b$ y la segunda ecuación es $x^2 - 10b^2x + 9b^4 = 0$ cuyas raíces son b^2 y $9b^2$. Queda entonces que la única solución es para $a = b \neq 0$.

2. Prueba que si $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}_+$ entonces p es divisible por 2003.

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1334}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{667}\right) \\
&= \frac{1}{668} + \cdots + \frac{1}{1335} \\
&= 2003\left(\frac{1}{668 \cdot 1335} + \frac{1}{669 \cdot 1334} + \cdots + \frac{1}{1001 \cdot 1002}\right)
\end{aligned}$$

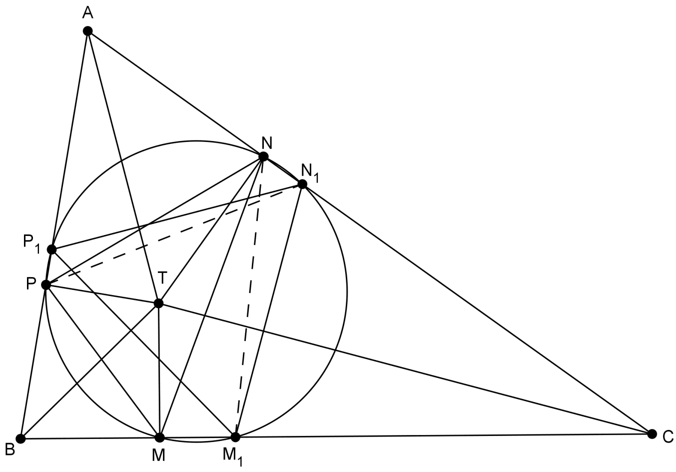
Digamos que $A = \frac{1}{668 \cdot 1335} + \frac{1}{669 \cdot 1334} + \cdots + \frac{1}{1001 \cdot 1002}$, al ser 2003 primo el denominador de A es primo relativo con 2003 pues todos los factores son menores que él. Luego $2003 \mid p$.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo y T un punto interior a este tal que $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA$. Sean M, N y P los pies de las perpendiculares desde T a BC, CA y AB respectivamente. Prueba que si la circunferencia circunscrita al $\triangle MNP$ corta nuevamente a los lados BC, CA y AB en M_1, N_1, P_1 respectivamente, entonces el $\triangle M_1N_1P_1$ es equilátero.

Solución:

Se tiene $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC = \measuredangle CTA = 120°$. Trazamos PN_1 y NM_1.

Ahora $\measuredangle TBA + \measuredangle TAB = 60°$ y $\measuredangle TCA + \measuredangle TAC = 60°$. Entonces



$\measuredangle TBA + \measuredangle TCA = 120° - \measuredangle A$. Como el cuadrilátero $TMBP$ es cíclico se tiene que $\measuredangle TBA = \measuredangle TMP$ y también $TMCN$ es cíclico, entonces $\measuredangle TCA = \measuredangle TMN$. De aquí sigue que $\measuredangle PMN = \measuredangle TMP + \measuredangle TMN = 120° - \measuredangle A$. Por otro lado $\measuredangle PN_1N = \measuredangle PMN = 120° - \measuredangle A$ por ser ángulos inscritos sobre el mismo arco. Entonces $\measuredangle APN_1 = 60°$, de donde $\overset{\frown}{P_1N_1} = 120°$. De forma análoga se obtiene $\measuredangle MPN = 120° - \measuredangle C$, pero al ser $MPNM_1$ cíclico se llega a que $\measuredangle NM_1C = \measuredangle MPN = 120° - \measuredangle C$. Entonces $\measuredangle M_1NC = 60°$ y finalmente $\overset{\frown}{M_1N_1} = 120°$ y $\overset{\frown}{M_1P_1} = 120°$ y por tanto $\triangle M_1N_1P_1$ es equilátero.

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(p) = 1$ para todo p primo y $f(ab) = bf(a) + af(b)$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$. Probar que si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ es la distribución canónica de n y p_i no divide a a_i $(i = 1, 2, ..., k)$ entonces $\frac{n}{\mathrm{mcd}(n, f(n))}$ es libre de cuadrados (no divisible por un cuadrado mayor que 1).

Solución:

$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + af(1) \Rightarrow f(1) = 0$. Probaremos por inducción que $f(p^k) = kp^{k-1}$. Si $k = 1$ entonces $f(p) = 1$ y $f(p^{k+1}) = f(p^k)p + p^k f(p) = kp^{k-1}p + p^k = (k+1)p^k$. Si $n = p^k q$ con q no divisible por p entonces $f(n) = kp^{k-1}q + p^k f(q) = p^{k-1}(kq + pf(q))$, de donde si p no divide a k se tiene $f(n) = p^{k-1}q_1$ donde q_1 no es divisible por p. Por inducción se prueba que si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ y p_i no divide a a_i $(i = 1, 2, ..., k)$ entonces $f(n) = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \cdots p_k^{a_k-1} q_2$ con q_2 no divisible por p_i $(i = 1, 2, ..., k)$. De ahí sigue que $mcd(n, f(n)) = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \cdots p_k^{a_k-1}$ y finalmente $\frac{n}{mcd(n,f(n))} = p_1 p_2 \cdots p_k$ que es libre de cuadrados.

5. Sean $a_1, a_2, ..., a_9$ números reales no negativos tales que $a_1 = a_9 = 0$ y al menos uno de los restantes términos es distinto de 0.

   a) Prueba que para algún i $(i = 2, ..., 8)$ se cumple que $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$.

   b) ¿Será cierto el planteamiento anterior si cambiamos el número 2 por 1,9 en la desigualdad?

Solución:

a) Supongamos lo contrario: $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 2a_i$ para $i = 2, ..., 8$. Sea $a_k = \max\{a_i\}$ con $i = 1, ..., 9$, entonces como $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$ se tendrá necesariamente $a_{k-1} = a_k = a_{k+1}$. Además se cumple que $a_{k-2} + a_k \geq 2a_{k-1}$ de donde $a_{k-2} = a_k$ y así sucesivamente obtenemos $a_1 = a_k$, lo que significa que $a_k = 0$, contradicción.

b) La respuesta es no.
Supongamos lo contrario, es decir $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 1,9a_i$ para $i = 2, ..., 8$. De aquí $a_{i+1} \geq 1,9a_i - a_{i+1}$ con $i = 2, ..., 8$. Sea $a_k = \max\{a_i\}$ $(i = 1, ..., 9)$. Podemos multiplicar todos los números $a_1, a_2, ..., a_9$ por una misma constante positiva sin cambiar las condiciones del problema, de manera que podamos asumir que $a_k = 1$. Entonces $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 1,9$ y tenemos los dos casos siguientes:

I. $a_{k-1} \geq 0,95$ y $a_{k+1} \geq 0,9$.
Si $k \leq 5$ entonces:

$$\begin{aligned} a_{k-2} &\geq 1,9 \cdot 0,95 - 1 = 0,805 \\ a_{k-3} &\geq 1,9 \cdot 0,805 - 1 = 0,5295 \\ a_{k-4} &\geq 1,9 \cdot 0,5295 - 1 = 0,00605 \end{aligned}$$

por tanto $a_1 > 0$, lo cual implica una contradicción.
Si $k \geq 6$ entonces:

$$\begin{aligned} a_{k+2} &\geq 1,9 \cdot 0,9 - 1 = 0,71 \\ a_{k+3} &\geq 1,9 \cdot 0,71 - 1 = 0,349 \end{aligned}$$

por tanto $a_9 > 0$, lo cual implica una contradicción.

II. $a_{k-1} \geq 0,9$ y $a_{k+1} \geq 0,95$.
Si $k \leq 4$ entonces:

$$\begin{aligned} a_{k-2} &\geq 1,9 \cdot 0,9 - 1 = 0,71 \\ a_{k-3} &\geq 1,9 \cdot 0,71 - 1 = 0,349 \end{aligned}$$

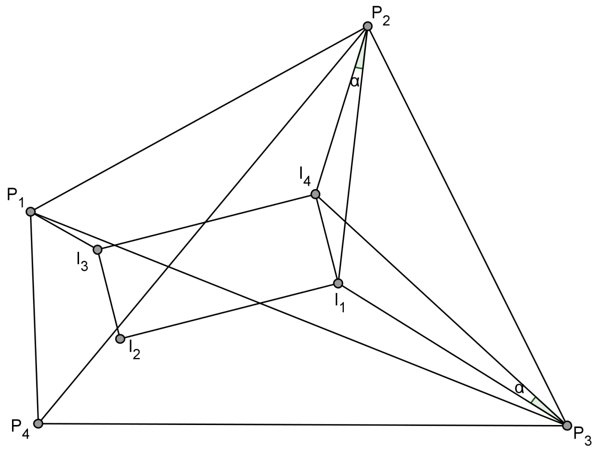
por tanto $a_1 > 0$, lo cual es una contradicción.
Si $k \geq 5$ entonces:

$$\begin{aligned} a_{k+2} &\geq 1,9 \cdot 0,95 - 1 = 0,805 \\ a_{k+3} &\geq 1,9 \cdot 0,805 - 1 = 0,5295 \\ a_{k+4} &\geq 1,9 \cdot 0,5295 - 1 = 0,00605 \end{aligned}$$

por tanto $a_9 > 0$, contradicción.

6. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos sobre una circunferencia, sea I_1 el incentro del triángulo de vértices $P_2P_3P_4$, I_2 el incentro del triángulo $P_1P_3P_4$, I_3 el incentro del triángulo $P_1P_2P_4$, I_4 el incentro del triángulo $P_2P_3P_1$. Prueba que $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo.

Solución: Al ser I_4 incentro del $\triangle P_1P_2P_3$ se tiene que:



$$\measuredangle P_1P_2P_4 + \measuredangle P_4P_2I_4 = \measuredangle I_4P_2I_1 + \measuredangle I_1P_2P_3$$

y al ser I_1 incentro del $\triangle P_2P_3P_4$ se tiene

$$\measuredangle P_4P_2I_4 + \measuredangle I_4P_2I_1 = \measuredangle I_1P_2P_3$$

restando ambas ecuaciones se llega a que $\measuredangle I_4P_2I_1 = \frac{\measuredangle P_1P_2P_4}{2}$. Análogamente se obtiene que $\measuredangle I_1P_3I_4 = \frac{\measuredangle P_4P_3P_1}{2}$, pero $\measuredangle P_1P_2P_4 = \measuredangle P_4P_3P_1$ por ser ángulos inscritos sobre un mismo arco, de donde $\measuredangle I_4P_2I_1 = \measuredangle I_1P_3I_4$, quedando así que el cuadrilátero $P_3I_1I_4P_2$ es cíclico. De modo análogo se prueba que $P_1I_3I_4P_2$ es cíclico también. Entonces $\measuredangle I_1I_4I_3 = 360^\circ - \measuredangle I_3I_4P_2 - \measuredangle I_1I_4P_2 = 360^\circ - (180^\circ - \measuredangle I_3P_1P_2) - (180^\circ - \measuredangle I_1P_3P_2) = \measuredangle I_3P_1P_2 + \measuredangle I_1P_3P_2 = \frac{\measuredangle P_1 + \measuredangle P_3}{2} = 90^\circ$. De forma similar los otros tres ángulos del cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ son rectos, y por ende es un rectángulo.

7. Sea $S(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Determinar

$$S(S(S(2003^{2003}))).$$

Solución:

Se conoce que un número n tiene k dígitos si $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Sea $a = 2003^{2003}$, las relaciones $2003^{2003} < (10^4)^{2003} = 10^{8012}$ implican que el número a tiene a lo sumo 8012 dígitos. Como resultado $S(a) \leq 8012 \cdot 9 = 72108 < 10^5$. Por lo que el número $S(a)$ tiene a lo sumo 5 dígitos y $S(S(a)) \leq 5 \cdot 9 = 45$. Entonces la suma de sus dígitos no excede a $3 + 9 = 12$, de esta forma $S(S(S(a))) \leq 12$. Teniendo en cuenta que $n \equiv S(n) \pmod 9$ para todo n, se tiene que $a \equiv S(a) \equiv S(S(a)) \equiv S(S(S(a))) \pmod 9$. Pero $2003 \equiv -4 \pmod 9$, entonces $2003^{2003} \equiv (-4)^{2003} \equiv (-64)^{667}(-4)^2 \equiv (-1)^{667}16 \equiv 2 \pmod 9$. Entonces $S(S(S(a))) = 2$ o $S(S(S(a))) = 11$. Sería interesante determinar cual de estos valores es realmente.

8. Halla todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ tales que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

   a) $f(uv) = f(u)f(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$

   b) $f(\alpha u) = |\alpha| f(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$

   c) $f(u) + f(v) \leq |u| + |v| \quad \forall u, v \in \mathbb{C}$

   Solución:

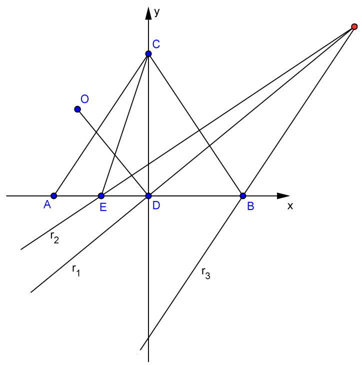
   $f = 0$ es una solución trivial. Supongamos entonces que f no es idénticamente nula. Sea $\overline{u}$ el conjugado de u. Haciendo $v = \alpha \in \mathbb{R}$ en *a*) e igualando a *b*) se tiene que $f(\alpha) = |\alpha|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Haciendo $v = \overline{u}$ en *a*) tenemos que $f(u\overline{u}) = f(u)f(\overline{u})$, pero $u\overline{u} = |u|^2 \in \mathbb{R}$, o sea $f(u)f(\overline{u}) = |u|^2$. Ahora haciendo $v = \overline{u}$ en *c*) se tiene que $f(u)+f(\overline{u}) \leq |u| + |\overline{u}| = 2\,|u|$ y usando la desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica se llega a que $|u| = \sqrt{f(u)f(\overline{u})} \leq \frac{f(u)+f(\overline{u})}{2} \leq |u|$, o sea $f(u) = f(\overline{u})$ y $f(u) + f(\overline{u}) = 2\,|u|$, quedando finalmente $f(u) = |u|$ para todo $u \in \mathbb{C}$. Se comprueba fácilmente que esta función cumple las características del enunciado.

9. Sea D el punto medio de la base AB del triángulo isósceles y acutángulo ABC, E es un punto sobre AB y O circuncentro del triángulo ACE. Prueba que la recta que pasa por D perpendicular a DO, la recta que

pasa por E perpendicular a BC y la recta que pasa por B paralela a AC, se cortan en un punto.

Solución:

Procedamos por Geometría Analítica. Tomamos origen de coordenadas en $D(0,0)$, AB sobre el eje x y la altura que parte de C sobre el eje y. Tenemos entonces que $A(-a,0), B(a,0), C(0,h)$ y $E(e,0)$. Sea



$O(x,y)$ el circuncentro del $\triangle ACE$, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OC^2 \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = x^2 + (y-h)^2 \\ OA^2 &= OE^2 \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = (x-e)^2 + y^2 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema anterior queda $O\left(\frac{e-a}{2}, \frac{h^2-ae}{2h}\right)$. Sean r_1 la recta que pasa por D perpendicular a DO, r_2 la recta que pasa por E perpendicular a BC y r_3 la recta que pasa por B paralela a AC. Se prueba fácilmente que sus respectivas ecuaciones son:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & : & \dfrac{h(a-e)}{h^2-ae}x - y = 0 \\ r_2 & : & \dfrac{a}{h}x - y - \dfrac{ae}{h} = 0 \\ r_3 & : & \dfrac{h}{a}x - y - h = 0 \end{array}$$

Solo queda probar que

$$\begin{vmatrix} \frac{h(a-e)}{h^2-ae} & -1 & 0 \\ \frac{a}{h} & -1 & -\frac{ae}{h} \\ \frac{h}{a} & -1 & -h \end{vmatrix} = 0$$

lo cual sigue después de simples cálculos al desarrollar el determinante por la tercera columna.

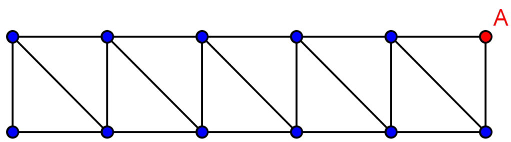
Concurso Nacional (2004)

Día 1

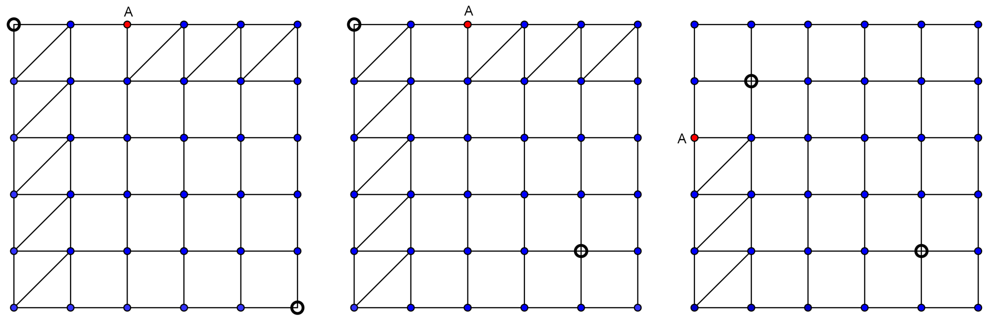
1. Se divide un cuadrado en 25 cuadrados pequeños, iguales entre sí, trazando rectas paralelas a los lados del cuadrado. Se trazan algunas diagonales de cuadrados pequeños de modo tal que no haya dos diagonales con un punto común. ¿Cuál es el número máximo de diagonales que se pueden trazar?

   Solución:

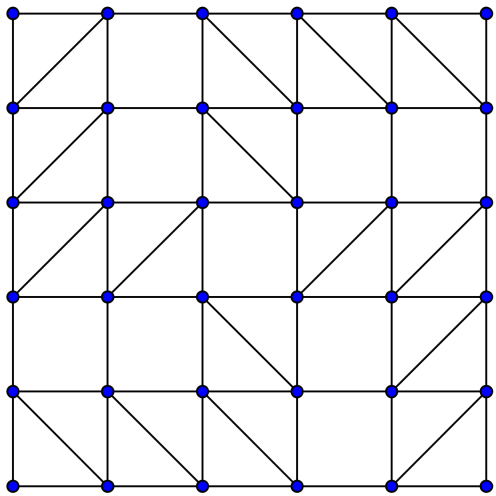
   Cada diagonal que se trace ocupará 2 de los 36 vértices originados como intercepción de los segmentos perpendiculares entre sí. Según el enunciado ningún punto puede estar ocupado por más de una diagonal, entonces si podemos ubicar k diagonales, habremos ocupado $2k$ vértices (siempre par). Demostremos que $k \leq 16 \Leftrightarrow 2k \leq 32 \Leftrightarrow 36 - 2k \geq 4$, o sea, que la cantidad de puntos sin ocupar debe ser mayor o igual que 4. Con ello probaríamos que a lo sumo puedo distribuir 16 diagonales. Reduciéndolo al absurdo, supongamos que quedan desocupados 2 puntos o ninguno. En este último caso, al considerar la primera fila ocurrirá que el punto A queda desocupado, contradicción. Usando esta figura queda claro que las columnas y filas de los bor-

   des del cuadrado no pueden tener todos sus puntos ocupados, por eso si quedan desocupados 2 puntos, solo pueden darse las siguientes 3 configuraciones (las simétricas son análogas).



En todos los casos el punto A queda desocupado, contradicción, luego $k \leq 16$, demos la distribución para $k = 16$:



2. Cuando escribimos el número $n > 2$ como suma de algunos enteros positivos consecutivos (al menos dos sumandos), decimos que tenemos una *descomposición elegante* de n. Dos *descomposiciones elegantes* serán diferentes si alguna de ellas contiene algún sumando que no

contiene la otra. ¿Cuántas *descomposiciones elegantes* diferentes tiene el número 3^{2004}?

Solución:

Caso I. Si la descomposición elegante contiene un número par de sumandos, es decir $(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+2r)=3^{2004}$ con $k \geq 0, r \geq 1$. Luego $2rk+r(2r+1)=3^{2004}$, entonces $r(2k+2r+1)=3^{2004}$ de donde se concluye que $r \mid 3^{2004}$, luego $r=3^a$ con $a \geq 0$, entonces $3^a(2k+2\cdot 3^a+1)=3^{2004}$, de aquí tenemos que para cada $0 \leq a \leq 1001$, se obtiene un valor entero positivo para k. En cambio, para $a \geq 1002$ la ecuación no tiene solución positiva para k. Por lo tanto, en este caso se tienen 1002 descomposiciones elegantes.

Caso II. Si la descomposición elegante contiene un número impar de sumandos, es decir $(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+2r+1)=3^{2004}$ con $k \geq 0, r \geq 1$. Luego $(2r+1)k+(r+1)(2r+1)=3^{2004}$, entonces $(2r+1)(k+r+1)=3^{2004}$ de donde se concluye que $(2r+1) \mid 3^{2004}$, luego $2r+1=3^a$ con $a \geq 1$, entonces $3^a\left(k+\frac{3^a+1}{2}\right)=3^{2004}$, de aquí se puede observar que para cada $0 \leq a \leq 1001$, se obtiene un valor entero positivo para k. En cambio, para $a \geq 1002$ la ecuación no tiene solución positiva para k. Por lo tanto, en este caso se tienen 1002 descomposiciones elegantes. En total hay 2004 descomposiciones elegantes.

3. En un examen fueron propuestos 6 problemas. Cada problema fue resuelto por exactamente 1000 estudiantes, pero en ningún caso ha ocurrido que dos estudiantes en conjunto, hayan resuelto los 6 problemas. Determinar el menor número de participantes que pudo haber en dicho examen.

Solución:

Está claro que ningún estudiante resolvió los 6 problemas, pues de haberlo hecho, el conjunto formado por tal estudiante y cualquiera de los restantes habría resuelto los 6 problemas, lo que contradice el enunciado. Si hubiera un estudiante con 5 problemas resueltos, dado que el problema que no resolvió fue resuelto por 1000 estudiantes, entonces cualquiera de estos 1000 y el que resolvió los otros 5 problemas habrían resuelto en conjunto los 6 problemas. Nuevamente tenemos una contradicción. Por lo tanto, la máxima cantidad de problemas que pudo haber resuelto un participante es 4. Supongamos que hubo un estudiante que resolvió 4 problemas y denotamos por **a** y **b** los dos problemas que no resolvió. Por las condiciones del enunciado, hay 1000 estudiantes que resolvieron el problema **b**. Si hubiera un estudiante que resolvió los dos problemas **a** y **b**, ese estudiante y el que resolvió los otros 4 habrían resuelto los 6 problemas. Como sabemos que esto no ocurrió, los 1000 estudiantes que resolvieron el problema **a** son todos distintos de los 1000 que resolvieron el problema **b**, y además tenemos al estudiante que no resolvió ni **a** ni **b**. Luego hay al menos $1000+1000+1 = 2001$ estudiantes. Por otro lado, si la máxima cantidad de problemas resueltos por un estudiante fuera 3 y denotamos por n al número de estudiantes, la cantidad total de soluciones es menor o igual que $3n$. Como para cada uno de los 6 problemas hay exactamente 1000 soluciones, la cantidad de soluciones es igual a $6 \cdot 1000 = 6000$ y tenemos que $6000 \leq 3n$, o lo que es lo mismo $n \geq 2000$. Si la máxima cantidad de problemas que resolvió un estudiante fuera 2, razonando como en el párrafo anterior se obtiene $6000 \leq 2n$, es decir, $n \geq 3000$. Y si cada estudiante resolvió a lo sumo un problema tenemos $n \geq 6000$. En consecuencia, el número total de estudiantes es mayor o igual que 2000. Veamos que es posible que haya exactamente 2000 estudiantes. Sean **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** los 6 problemas y consideremos los siguientes conjuntos de 3 problemas:

$$\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, e, f\}, \{c, d, f\}$$

Los 200 estudiantes se dividen en 4 grupos de 500, y los 500 estudiantes de cada grupo resolvieron exactamente los 3 problemas de uno de los conjuntos. Como cada problema figura en exactamente dos conjuntos, resulta que cada problema fue resuelto por exactamente

$500 + 500 = 1000$ estudiantes. Está claro que dos estudiantes de un mismo grupo en conjunto resuelven solo 3 problemas. Si dos estudiantes son de dos grupos distintos, como cualquier pareja de conjuntos tiene exactamente un problema en común, los dos estudiantes en conjunto resolvieron 5 problemas. Por lo tanto, en ningún caso dos estudiantes en conjunto resolvieron los 6 problemas. Así queda demostrado que la distribución satisface los requisitos del enunciado, y el menor número de participantes en el examen es 2000.

Día 2

1. Determina todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} &= 2004 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3 \end{aligned}$$

Solución:

La primera ecuación puede presentarse en la forma

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_{2004} - 1) = 0$$

y la segunda

$$x_1^3(x1 - 1) + x_2^3(x_2 - 1) + \cdots + x_{2004}^3(x_{2004} - 1) = 0$$

Sustrayendo las dos ecuaciones obtenidas se tiene

$$(x_1^3 - 1)(x_1 - 1) + (x_2^3 - 1)(x_2 - 1) + \cdots + (x_{2004}^3 - 1)(x_{2004} - 1) = 0$$

Por tanto tenemos

$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + \cdots + (x_{2004} - 1)^2(x_{2004}^2 + x_{2004} + 1) = 0$$

Note que $x^2 + x + 1 > 0$ para todo x real, de donde se deduce que $x_1 = x_2 = ... = x_{2004} = 1$.

2. Escribe dos unos, luego un 2 entre ellos, luego un 3 entre los números cuya suma es 3, luego un 4 entre los números cuya suma es 4, como se muestra a continuación: $(1,1),(1,2,1),(1,3,2,3,1),(1,4,3,2,3,4,1)$ y así sucesivamente. Prueba que el número de veces que aparece n, $(n \geq 2)$, es igual al número de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.

   Solución:

   Demostraremos por inducción que en el paso n, $(n \geq 2)$, al considerar todos los pares de números "vecinos"tenemos todos los pares (x,y) con $x+y \geq n+1$ y $mcd(x,y)=1$, $1 \leq x,y \leq n$. Esto implica el resultado pedido. Para $n=2$ la demostración es cierta. Vamos al paso inductivo. En el paso $n+1$ será escrito un $n+1$ entre cualesquiera dos números cuya suma es $n+1$, luego, por la hipótesis de inducción, serán introducidos todos los pares $(x,n+1);(n+1,n+1-x)$ con $mcd(x,n+1-x)=1$ o sea, con $mcd(x,n+1)=1$ y $mcd(n+1,n+1-x)=1$. Observemos, entonces, que tenemos todos los pares (x,y) con $x+y \geq n+2$ y $mcd(x,y)=1$, con $1 \leq x,y \leq n+1$, completando la demostración.

3. En el $\triangle ABC$ no isósceles, se trazan las bisectrices interiores de vértices B y C, las cuales cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. La recta EF corta a la prolongación del lado BC en T. En el lado BC se ubica un punto D, de modo que $\frac{DB}{DC}=\frac{TB}{TC}$. Demuestra que AT es bisectriz exterior del ángulo A.

   Solución:

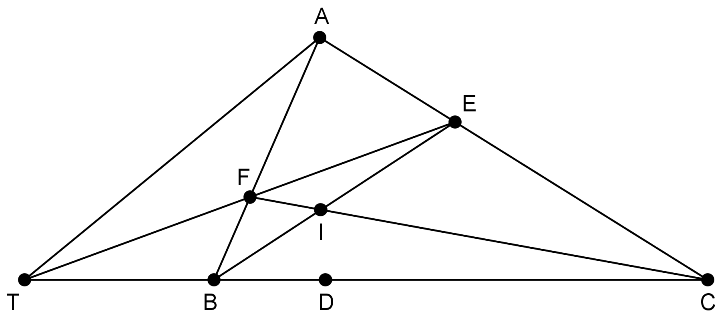
   Para que AT sea bisectriz exterior del ángulo A, tiene que cumplirse que $\frac{TB}{TC}=\frac{AB}{AC}$, pero como $\frac{DB}{DC}=\frac{TB}{TC}$ entonces debemos probar que $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$, es decir, que D sea el pie de la bisectriz interior del vértice A. Para demostrar esto probemos que AD pasa por el incentro I del triángulo ABC. Esto último se cumple si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

por el teorema de Ceva. Pero como tenemos que la transversal EFT corta los lados del triángulo ABC, podemos aplicar el teorema de Menelao:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

y como $\frac{BT}{TC} = \frac{BD}{DC}$ se cumple lo que queríamos probar. Luego AT es bisectriz exterior del ángulo A.



4. Determina todos los pares de números naturales (x, y) para los cuales se cumple que $x^2 = 4y + 3\text{mcm}(x, y)$.

Solución:

De acuerdo a la ecuación se tiene que

$$x \mid mcm(x, y) \Rightarrow x \mid 4y \Rightarrow mcm(x, y) \mid 4y$$

De donde $mcm(x, y) = y, 2y, 4y$. Veamos cada caso:

Caso I. $mcm(x, y) = y$.
Entonces $y = kx$ con $k \in \mathbb{N}$ y sustituyendo en la ecuación tenemos $x^2 = 4kx + 3kx = 7kx$, quedando la solución $(x, y) = (7k, 7k^2)$.

Caso II. $mcm(x, y) = 2y$.
Entonces $2y = kx$ con $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $x^2 = 2kx + 3kx = 5kx$, de donde $x = 5k, 2y = 5k^2$, entonces k es par y estaríamos en el primer caso.

Caso III. $mcm(x, y) = 4y$.
Entonces $4y = kx$ con $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $x^2 = kx + 3kx = 4kx$, de donde $x = 4k, y = k^2$, entonces $mcm(4k, 4k^2) = 4k^2$, lo cual se cumple si y sólo si k es impar porque de ser $k = 2t$ con $t \in \mathbb{N}$ se tiene $8t^2 = mcm(8t, 4t^2) = 16t^2$ y sería $t = 0$.

Resumiendo, las soluciones a la ecuación original son los pares $(7k, 7k^2)$ con k natural arbitrario y $(4k, k^2)$ con k impar.

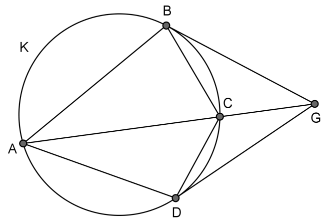
5. Considerar una circunferencia K y un cuadrilátero $ABCD$ inscrito, tal que la diagonal BD no es diámetro de la circunferencia. Demuestra que la intersección de las rectas tangentes a K por los puntos B y D está en la recta AC si y sólo si $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Solución:

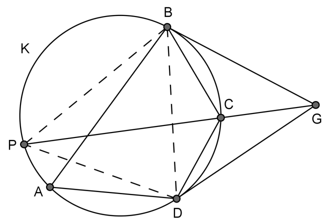
Como BD no es diámetro de K las tangentes a K por los puntos B y D no son paralelas, entonces ellas se cortan en un punto G.

1) Asumamos que G está en la recta AC entonces $\triangle ABG \sim \triangle BCG$ pues $\measuredangle AGB = \measuredangle CGB$ y $\measuredangle BAG = \measuredangle CBG$. Luego $\frac{AB}{BC} = \frac{GB}{GC}$. Análogamente se cumple que $\triangle ADG \sim \triangle DCG$, entonces $\frac{AD}{CD} = \frac{GD}{GC}$. Como $GB = GD$, por ser tangentes desde G a K, se tiene que $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

2) Asumamos que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ y que G está en el mismo semiplano determinado por BD y C. Supongamos que la recta GC



no corta a la circunferencia K en A, sino en P. Para el cuadrilátero $PBCD$ podemos usar lo probado en 1), luego se cumple $PB \cdot CD = PD \cdot BC$, comparando esta relacin con $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ veremos que $\frac{PB}{AB} = \frac{PD}{AD}$ y $\measuredangle BPD = \measuredangle BAD$, luego $\triangle BPD \sim \triangle BAD$. Como los ángulos iguales están a un mismo lado con respecto a BD, entonces $A = P$ y el punto G está situado en AC.



6. Dada la ecuación $\frac{ax^2-24x+b}{x^2-1} = x$. Encuentra todos los números reales a y b para los cuales tenga dos soluciones reales cuya suma sea igual a 12.

Solución:

Multiplicando ambos miembros por x^2-1 se obtiene $x^3 - ax^2 + 23x - b = 0$. Sean x_1, x_2, x_3 las raíces de esta ecuación, por las relaciones de

Vietta se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 23 \\ x_1x_2x_3 &= b \end{aligned}$$

Notar que pueden ocurrir los casos siguientes:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (-1, s, 12 - s) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (1, s, 12 - s) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (s, s, 12 - s) \end{aligned}$$

con $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Consideremos cada caso por separado:

Caso I. $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$
Sustituyendo en el sistema de ecuaciones queda $a = 11, s^2 - 12s + 35 = 0$ con soluciones $s = 5, s = 7$ y $b = -s(12 - s)$, por tanto $(a, b) = (11, -35)$.

Caso II. $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$
Queda $s^2 - 12s + 11 = 0$ con soluciones $s = 1, s = 11$.

Caso III. $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$
Queda $a = s + 12, s^2 - 24s + 23 = 0$ con soluciones $s = 1, s = 23$ y $b = s^2(12 - s)$, por tanto $(a, b) = (35, -5819)$.
Resumiendo, los pares (a, b) que satisfacen son $(11, -35)$ y $(35, -5819)$.

7. Para los números reales α, β, γ con $\beta\gamma \neq 0$ se tiene que $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$. Probar que

$$5(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq \alpha\beta$$

Solución:

$$\frac{1 - \gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0 \Leftrightarrow \beta\gamma(1 - \gamma^2) \geq 0$$

Ahora se tiene

$$\begin{aligned} 10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma^3) &\geq 2\alpha\beta \\ \Leftrightarrow 10\alpha^2+10\beta^2+10\gamma^2-10\beta\gamma^3-2\alpha\beta &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+9\alpha^2-10\beta\gamma+9\beta^2+10\gamma^2+10\beta\gamma-10\beta\gamma^3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+9\alpha^2+10\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{13}{2}\beta^2+10\beta\gamma(1-\gamma^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Lo cual queda demostrado pues todos los sumandos son no negativos.

8. Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ tal que:

   a) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$ para $x,y\geq 0$
   b) $f(2)=0$
   c) $f(x)\neq 0$ para $0\leq x<2$.

   Solución:

   Haciendo $y=2$ en $a)$ se tiene que $f(x+2)=0$ para todo $x\geq 0$, de donde $f(x)=0$ para $x\geq 2$. Entonces se cumple que

$$xf(y)\geq 2 \Leftrightarrow f(xf(y))=0 \Leftrightarrow f(x+y)=0 \Leftrightarrow x+y\geq 2$$

   De aquí obtenemos que

$$\frac{2}{2-y}\leq f(y)\leq \frac{2}{x} \quad \text{si} \quad x+y<2$$

   Ahora hacemos $x=2-y-\frac{1}{n}$ para y fijo y con $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $x>0$. Haciendo n tender a infinito nos queda que $f(y)=\frac{2}{2-y}$ para $0\leq y<2$. Finalmente

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{si} \quad 0\leq x<2 \\ 0 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

   Esta función satisface las condiciones $a), b), c)$ claramente.

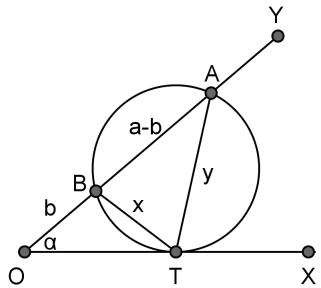
9. Se dan el ángulo $XOY = \alpha$ y los puntos A y B sobre OY tales que $OA = a$ y $OB = b$ con $a > b$. Una circunferencia contiene los puntos A y B y es tangente a OX.

   a) Calcula el radio de esa circunferencia en función de a, b y α.

   b) Si a y b son constantes y α varía, muestra que el valor mínimo del radio de la circunferencia es $\frac{a-b}{2}$.

Solución:

a) Sea T el punto de tangencia de la circunferencia con OX. Sean $TB = x$ y $TA = y$. Por la potencia del punto O se tiene $OT^2 = OA \cdot OB$, o sea $OT = \sqrt{ab}$. Aplicando la ley de los cosenos en los triángulos OTB y OTA



tenemos:

$$x^2 = b^2 + ab - 2b\sqrt{ab}\cos\alpha \tag{1}$$

$$y^2 = a^2 + ab - 2a\sqrt{ab}\cos\alpha \tag{2}$$

Se cumple que $A_{OTB} = \frac{1}{2}b\sqrt{ab}\sin\alpha$ y $\frac{A_{TBA}}{A_{OTB}} = \frac{a-b}{b}$ por lo que

$$A_{TBA} = \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{ab}\sin\alpha \tag{3}$$

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle TBA$, se tiene entonces

$$A_{TBA} = \frac{(a-b)xy}{4R} \tag{4}$$

Igualando (3) a (4) y elevando al cuadrado queda

$$R^2 = \frac{x^2y^2}{4ab\sin\alpha}$$

Sustituyendo (1) y (2) se obtiene

$$R = \frac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

b) Se tiene que $2R\sin\alpha = a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha$, de donde $R\sin\alpha+\sqrt{ab}\cos\alpha = \frac{a+b}{2}$. Dividiendo por $\sqrt{R^2+ab}$ tenemos

$$\frac{R\sin\alpha}{\sqrt{R^2+ab}} + \frac{\sqrt{ab}\cos\alpha}{\sqrt{R^2+ab}} = \frac{a+b}{2\sqrt{R^2+ab}}$$

Sea β el ángulo tal que $\cos\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2+ab}}$ y $\sin\beta = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{R^2+ab}}$ entonces $\sin(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{2\sqrt{R^2+ab}}$, por tanto $\frac{a+b}{2\sqrt{R^2+ab}} \leq 1$, lo cual es equivalente a $R \geq \frac{a-b}{2}$.

Concurso Nacional (2005)

Día 1

1. Determina el menor número real a tal que existe un cuadrado de lado a que en su interior contiene 5 círculos unitarios sin puntos interiores comunes dos a dos.

   Solución:

   Sea $PQRS$ un cuadrado con dicha propiedad. Como los círculos son de diámetro 2, $a > 2$. Sea $P'Q'R'S'$ el cuadrado dentro de $PQRS$ cuyos lados están a distancia 1 de los lados de $PQRS$, de esta forma los lados de $P'Q'R'S'$ tienen longitud $a-2$. Como los 5 círculos están dentro de $PQRS$ los 5 centros están dentro de $P'Q'R'S'$. Dividamos $P'Q'R'S'$ en 4 cuadrados iguales uniendo los puntos medios de los lados opuestos, cada uno de estos cuadrados es de lado $\left(\frac{a-2}{2}\right) = \frac{a}{2} - 1$. Por el principio de Dirichlet (o principio del palomar) al menos dos de los 5 centros están en un mismo cuadrado pequeño y la distancia entre estos dos centros es a lo sumo $\sqrt{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right)$(la diagonal). Como la distancia entre dos centros cualesquiera tiene que ser al menos 2 (por la condición de que dos círculos no pueden tener puntos interiores comunes), entonces $\sqrt{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right) \geq 2$ resolviendo queda $a \geq 2 + 2\sqrt{2}$. Luego si $a = 2+2\sqrt{2}$ se pueden ubicar los centros de los 5 círculos del siguiente modo: uno en el centro de $PQRS$ y los otros 4 que coincidan con P', Q', R' y S'. Entonces $a = 2 + 2\sqrt{2}$.

2. Se tienen n bombillos en una circunferencia y uno de ellos está marcado. Sea la operación A:
   Tomar un divisor positivo d del número n, comenzando por el bombillo marcado y en sentido horario, contamos alrededor de la circunferencia desde 1 hasta dn, cambiando el estado (encendido o apagado) a aquellos bombillos que les corresponda los múltiplos de d.
   Sea la operación B:
   Aplicar la operación A a todos los divisores positivos de n (al primer

divisor que se le aplique es con todos los bombillos apagados y a los restantes divisores es con el estado que resulte del divisor anterior). Determina todos los enteros positivos n, tales que al aplicar la operación B, resulten todos los bombillos encendidos.

Solución:

Note que para un divisor positivo dado d, del número natural n, todos los estados de los bombillos que tienen números divisibles por d, son cambiados, y solo ellos. Como hay exactamente $\frac{n}{d}$ de tales bombillos y se hacen exactamente n cambios, el estado de cada uno de estos bombillos es cambiado exactamente d veces. En particular, para $d = 1$ el estado de cada bombillo es cambiado exactamente una vez. Para lograr que al final todos los bombillos resulten encendidos, es necesario que cada uno de ellos haga un número impar de cambios de estado. Como hemos demostrado el estado del bombillo m, es cambiado una vez por el divisor 1, y adicionalmente, por cada divisor $d > 1$, que es al mismo tiempo divisor de m, y en total son $d > 1$ cambios, por lo que las condiciones del problema son satisfechas cuando todos los divisores $d > 1$ del número n son pares, condición que cumplen todas las potencias de dos.

Suponga ahora que el número n tenga divisores impares mayores que 1, y sea d' el menor de ellos. Entonces el estado del bombillo d' es cambiado una vez por el divisor 1, d' veces por el divisor d', y ninguna otra vez por los restantes divisores de n, ya que d' no es divisible por ninguno de ellos. Luego el bombillo d' es cambiado de estado un número par de veces y al final quedaría apagado. Por lo que las condiciones del problema se cumplen si y sólo si $n = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

3. Se tienen dos pilas de cartas, una con n cartas y otra con m cartas. A y B juegan alternadamente realizando en cada turno una de las siguientes operaciones:

   a) Quitar una carta de una pila.

b) Quitar una carta de cada pila.
c) Mover una carta de una pila a la otra.

El jugador A comienza siempre el juego y gana el que coja la última carta. Determina si existe alguna estrategia ganadora en función de m y n, de modo que uno de los jugadores siguiéndola pueda ganar siempre.

Solución:

Si m y n son pares gana B, en caso contrario gana A.

Como el juego termina cuando no queden cartas en ninguna pila, la idea es dejar una cantidad par de cartas en cada pila después de cada jugada. Si inicialmente una de las pilas tiene una cantidad impar de cartas, A retira una de esa pila, si ambas cantidades son impares quita una de cada una. Los movimientos de B siempre dejarán al menos una pila con una cantidad impar de cartas y A repetirá la jugada realizada en la jugada anterior.

Si en las dos pilas inicialmente hay una cantidad par de cartas después que A juega siempre quedará al menos una pila con una cantidad impar de cartas, y entonces B seguirá la misma estrategia que siguió A en los casos anteriores.

Día 2

1. Determina todos los cuadriláteros que puedan ser divididos por una diagonal en dos triángulos de igual área y de igual perímetro.

   Solución:

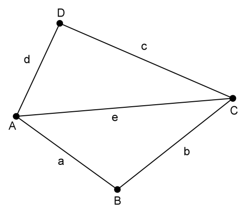
   1er. caso: cuadriláteros convexos.
   Supongamos que en el cuadrilátero $ABCD$ convexo la diagonal AC satisface las condiciones del problema, entonces:

$$a + b = c + d \tag{5}$$

y

$$(a+b+e)(a+b-e)(a+e-b)(b+e-a) = (d+e+c)(d+e-c)(d+c-e)(c+e-d) \quad (6)$$

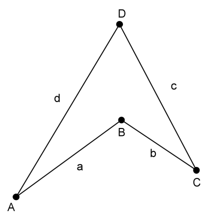
Dividiendo ambos miembros de (6) por $(a+b+e) = (d+e+c)$ y por $a+b-e = d+c-e \neq 0$ (por desigualdad triangular), resulta que $e^2 - (a-b)^2 = e^2 - (c-d)^2$, luego $(a-b)^2 - (c-d)^2 = 0$ y entonces $(a-b+c-d)(a-b-c+d) = 0$. Si $a-b+c-d = 0$ por (5) resulta que $a = d$ y $b = c$ y $ABCD$ es un trapezoide simétrico.



2do. caso: cuadriláteros no convexos.

a) Si dos lados opuestos se cortan es imposible, ya que cada diagonal divide al cuadrilátero en una sola figura.

b) Si no tiene dos lados opuestos que se corten resulta un cuadrilátero como se muestra en la figura, que resolviendo uno de los sistemas como en el 1er. caso resulta otra solución con $d = c$ y $a = b$ y el otro sistema conduce a casos ya estudiados.



2. Determine las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ para las que existe un intervalo (h, k) tal que para todo $x \in (h, k)$ se cumple que $f(x)f(x+1) < 0$ y $f(x)f(x-1) < 0$.

Solución:

Si f es positiva o negativa no cumple la condición dada, por tanto $D > 0$, es decir $b^2 - 4ac > 0$. Luego f tiene dos ceros, sean estos x_1 y x_2. Entonces $|x_1 - x_2| < 1$ y el intervalo a considerar es el formado por los ceros. Por tanto se debe cumplir:

$$\left| \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right| < 1$$

El conjunto de funciones cuadráticas que cumplen la condición pedida, son las que sus coeficientes a, b y c cumplen la condición $0 < b^2 - 4ac < a^2$.

3. Determina todas las cuádruplas de números reales que cumplan que el producto de tres cualesquiera de estos números más el cuarto es constante.

Solución:

Este problema se reduce a determinar todas las soluciones (a, b, c, d) del sistema de ecuaciones $abc + d = abd + c = acd + b = bcd + a$. Este sistema es simétrico en todas las variables y toda permutación de una solución es también solución. Podemos diferenciar algunos casos:

a) $a = b = c = d$.

b) $a = b = c \neq d$.

c) $a = b \neq c = d$.

d) $a = b \neq c \neq d$.

e) $a \neq b \neq c \neq d$.

Notemos que en la primera ecuación:

$$abc + d = abd + c \Leftrightarrow abc - abd - c + d = 0 \Leftrightarrow (c-d)(ab-1) = 0$$

y en el sistema de ecuaciones también se verifica de forma análoga que:

$$\begin{array}{rcl} (a-b)(cd-1) & = & 0 \\ (a-c)(bd-1) & = & 0 \\ (a-d)(bc-1) & = & 0 \\ (b-c)(ad-1) & = & 0 \\ (b-d)(ac-1) & = & 0 \end{array}$$

Analicemos ahora los casos anteriores:

a) $S_1 = \{(r,r,r,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

b) $S_2 = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, r), (\pm 1, \pm 1, r, \pm 1), (\pm 1, r, \pm 1, \pm 1), (r, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \mid r \in \mathbb{R}$

c) $S_3 = \left\{(r, r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}), (r, \frac{1}{r}, r, \frac{1}{r}), (r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, r) \mid r \in \mathbb{R}^*\right\}$

d) No existen soluciones.

e) No existen soluciones.

La solución del sistema de ecuaciones es el conjunto $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

4. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que:
$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ para todos x, y reales positivos.

Solución:

Tomando $y = 1$, tenemos $f(x) \cdot f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$. Tomando también $x = 1$, obtenemos la ecuación cuadrática $f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$, que tiene las soluciones $f(1) = -1$ y $f(1) = 2$. Entonces $f(1) - 1 \neq 0$, de donde

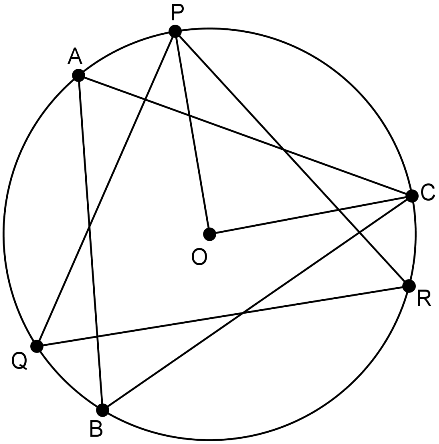
$$f(x) = \left(\frac{1}{f(1)-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

ahora $f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ o $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. La primera no satisface las condiciones iniciales para $x = y = \frac{1}{2}$ y la segunda cumple.

5. En la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el punto P es tomado de modo tal que la perpendicular trazada por el punto P a la recta AC corta a la circunferencia también en el punto Q, la perpendicular trazada por el punto Q a la recta AB corta a la circunferencia también en el punto R y la perpendicular trazada por el punto R a la recta BC corta a la circunferencia también en el punto P. Sea O el centro de esta circunferencia. Prueba que $\measuredangle POC = 90°$.

   Solución:

   Rotemos el triángulo PQR $90°$ en contra de las manecillas del reloj y denotemos el triángulo obtenido $P'Q'R'$. Como $PQ \perp AC, QR \perp AB$ y $RP \perp BC, P'Q' \parallel AC, Q'R' \parallel AB$ y $R'P' \parallel BC$, por tanto el triángulo $Q'P'R'$ es semejante al triángulo ABC y como ambos tienen la misma circunferencia circunscrita ellos son congruentes y ellos coinciden o son rotaciones de $180°$ con centro en el centro de la circunferencia. En el primer caso $C = P'$, y en el segundo caso los puntos C y P' son los extremos del mismo diámetro. Rotando el triángulo $P'Q'R'$ obtenemos en ambos casos que $\measuredangle POC = 90°$.



6. Todas las diferencias positivas $a_i - a_j$ de cinco enteros positivos diferentes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son todas diferentes. Sea A el conjunto formado por los mayores elementos de cada grupo de 5 elementos que cumplan dicha condición. Determina el elemento mínimo de A.

   Solución:

   Sea $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Como las 10 diferencias $a_i - a_j$ son todas diferentes, la mayor diferencia $(a_5 - a_1)$ tiene que ser mayor o igual que 10, por lo que $a_5 \geq 11$. En el caso que $a_5 = 11$, las diferencias tienen que ser exactamente $1, 2, 3, ..., 10$, entonces:

   $55 = 1+2+3+\cdots+10 = (a_5-a_4)+(a_5-a_3)+(a_5-a_2)+(a_5-a_1)+(a_4-a_3)+(a_4-a_2)+(a_4-a_1)+(a_3-a_2)+(a_3-a_1)+(a_2-a_1) = -4a_1-2a_2+2a_4+4a_5$, pero esto es imposible porque 55 es impar y el miembro derecho es par, por lo que el mayor de los números tiene que ser mayor o igual que 12, y el caso $1, 3, 8, 11, 12$ cumple las condiciones del problema. Luego, el menor valor es 12.

7. Determina todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) que satis-

facen $x < y < z, mcd(x, y) = 6, mcd(y, z) = 10, mcd(z, x) = 8$ y $mcm(x, y, z) = 2400$.

Solución:

Como 6 y 8 ambos dividen a x, $mcm(6, 8) = 24$ divide a x. Similarmente $mcm(6, 10) = 30$ divide a y, $mcm(10, 8) = 40$ divide a z. Por tanto existen enteros positivos x', y', z' tal que $x = 24x', y = 30y', z = 40z'$ y

$$\begin{aligned} 6 &= mcd(x, y) = mcd(24x', 30y') = 6mcd(4x', 5y') \\ 10 &= mcd(y, z) = mcd(30y', 40z') = 10mcd(3y', 4z') \\ 8 &= mcd(z, x) = mcd(40z', 24x') = 8mcd(5z', 3x'). \end{aligned}$$

Esas ecuaciones implican $mcd(4x', 5y') = 1, mcd(3y', 4z') = 1$ y $mcd(5z', 3x') = 1$. Por tanto x', y', z' son primos relativos dos a dos y $mcd(x', 5) = 1, mcd(y', 4) = 1$ y $mcd(z', 3) = 1$.

Demostremos ahora que $mcm(24x', 30y', 40z') = mcm(120x', 120y', 120z')$. Para esto es suficiente probar que cada lado de la ecuación divide al otro. Evidentemente el miembro izquierdo divide al derecho. Para la otra dirección, probemos que $120x', 120y', 120z'$ todas dividen al miembro izquierdo. Realmente $24x'$ y 5 dividen al miembro izquierdo y como $mcd(x', 5) = 1$ tenemos que $mcd(24x', 5) = 1$ obteniendo que $24x' \cdot 5 = 120x'$ que divide al miembro izquierdo. Similarmente probamos que $120y'$ y $120z'$ dividen también al miembro izquierdo. Ahora

$$\begin{aligned} 2004 &= mcm(x, y, z) = mcm(24x', 30y', 40z') = mcm(120x'120y', 120z') \\ &= 120mcm(x', y', z') = 120x'y'z'. \end{aligned}$$

Por tanto $x'y'z' = 20$ y como x', y', z' son primos dos a dos, ellos son iguales (en algún orden) a $1, 1, 20$ ó $1, 4, 5$. Requiriendo $x < y < z$ para los números $x = 24x', y = 30y', z = 40z'$, el primer caso implica que $x' = 1, y' = 1, z' = 20$. En el segundo caso tenemos dos posibilidades: $x' = 1, y' = 4, z' = 5$ o $x' = 1, y' = 5, z' = 4$. Las ternas (x, y, z) son $(24, 30, 800), (24, 120, 200)$ y $(24, 150, 160)$ respectivamente. La primera y la tercera ternas satisfacen las condiciones del problema pero la segunda no, porque $mcd(120, 200) = 40 > 10$.

8. Hallar el menor número real A, tal que existan dos triángulos distintos, con longitudes de sus lados enteras y de modo que el área de cada uno sea A.

Solución:

Sea $S(a, b, c) = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$. El área de un triángulo con lados a, b, c puede ser determinado por la fórmula de Herón y es igual a $\frac{\sqrt{S(a,b,c)}}{4}$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $b = c + x$ y $a = b + y = c + x + y$, donde $x, y \geq 0$. Entonces

$$S(a, b, c) = S(c+x+y, c+x, c) = (3c+2x+y)(c-y)(c+y)(c+2x+y)$$

por tanto $y < c$. Por otra parte tenemos, si c, x, y son números reales que satisfacen $x, y \geq 0$ y $y < c$, existe un triángulo con lados $c + x + y, c + x$ y c (se satisfacen todas las desigualdades triangulares). Demostraremos que los números menores que 63 no pueden ser expresados de dos modos diferentes en la forma $S(c+x+y, c+x, c)$, donde x, y, c son enteros y $x, y \geq 0$, $y < c$. Note que cuando x crece, el valor de la expresión $S(c+x+y, c+x, c)$ también crece. Tomando en cuenta esto podemos considerar todas las posibilidades para c.

a) Con $c \geq 3$. Obtenemos $S(c+x+y, c+x, c) \geq 3c \cdot 1 \cdot c \cdot c = 3c^3 \geq 81 > 63$.

b) Si $c = 1$, tenemos $y = 0$ y para $x = 0, 1, 2, 3$ tenemos $3, 15, 35, 63$ como los valores para la expresión $S(c + x + y, c + x, c)$ respectivamente.

c) Con $c = 2$. Si $y = 0$, entonces para $x = 0, 1$ la expresión $S(c+x+y, c + x, c)$ toma los valores 48 y 128 respectivamente. Si $y = 1$, entonces para $x = 0$ tenemos $S(c + x + y, c + x, c) = 63$.

Por tanto $S(4,4,1) = S(3,2,2) = 63$ y la respectiva área es $A = \frac{63}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

9. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$ reales positivos tales que: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_i \geq x_i^2$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Demostrar que

$$\frac{x_1}{x_1y_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2y_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_ny_n + x_1} > \frac{1}{2n}.$$

Solución:

Se tiene

$$\begin{array}{rcl} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 & \geq & y_1^2 \\ & \vdots & \\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 & \geq & y_n^2 \\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 & > & x_1^2 \\ & \vdots & \\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 & > & x_n^2 \end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} 2n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 & > & y_1^2 + \cdots + y_n^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ \Leftrightarrow \dfrac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} & > & \dfrac{1}{2n} \end{array}$$

Por la desigualdad de reacomodo obtenemos:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$$

por otra parte

$$\begin{array}{rcl} y_1 \geq x_1^2 & \Leftrightarrow & y_1^2 \geq x_1^2y_1 \\ & \vdots & \\ y_n \geq x_n^2 & \Leftrightarrow & y_n^2 \geq x_n^2y_n \end{array}$$

entonces $y_1^2+\cdots+y_n^2 \geq x_1^2y_1+\cdots+x_n^2y_n$. Sumando

$$y_1^2+\cdots+y_n^2+x_1^2+\cdots+x_n^2 \geq x_1^2y_1+\cdots+x_n^2y_n+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$$

Acomodando

$$y_1^2+\cdots+y_n^2+x_1^2+\cdots+x_n^2 \geq x_1(x_1y_1+x_2)+\cdots+x_n(x_ny_n+x_1)$$

Luego

$$\frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{x_1(x_1y_1+x_2)+\cdots+x_n(x_ny_n+x_1)} \geq \frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{y_1^2+\cdots+y_n^2+x_1^2+\cdots+x_n^2} > \frac{1}{2n}$$

Pero usando la desigualdad de Bergstrőm se tiene

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{x_1(x_1y_1+x_2)}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n(x_ny_n+x_1)} &\geq \frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{x_1(x_1y_1+x_2)+\cdots+x_n(x_ny_n+x_1)} \\ &> \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Concurso Nacional (2006)

Día 1

1. Cada uno de los n estudiantes de una clase le mandó una tarjeta a cada uno de m compañeros. Demostrar que si $2m + 1 > n$, entonces al menos dos estudiantes se mandaron tarjetas entre sí.

   Solución:

   Sean $E_1, E_2, ..., E_n$ los n estudiantes. Consideremos dos columnas idénticas cada una formada por los n estudiantes. Trabajaremos por reducción al absurdo, suponer que no existen dos estudiantes los cuales se mandaron tarjetas entre sí. Esto significa que en cada rectángulo con los dos vértices de arriba E_i y los dos vértices de abajo E_j hay a lo sumo una diagonal. Pero en total se tienen $1+2+\cdots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$ rectángulos, los cuales aportan a lo más $\frac{(n-1)n}{2}$ diagonales. Teniendo en cuenta que existen mn diagonales, se llega a que $mn \leq \frac{(n-1)n}{2}$, lo cual es equivalente a $2m+1 \leq n$, contradicción. De esta forma hemos probado que existen dos estudiantes que se mandaron tarjetas entre sí.

2. n personas numeradas desde 1 hasta n están dispuestas en fila. Un *movimiento admisible* consiste en que cada persona cambia a lo sumo una vez su lugar con otra o permanece en su lugar. Por ejemplo

Posición inicial	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
Posición final	2	1	3	6	5	4	$\cdots$	n	$n-1$	$n-2$

es un *movimiento admisible*. ¿Es posible que partiendo de la posición

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n

se llegue a

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$

mediante dos *movimientos admisibles*?

Solución:

La respuesta es si. Intercambiar dos números lo denotaremos por $\leftrightarrow$. Entonces el primer movimiento es el siguiente:

$$1 \leftrightarrow 2, \quad 3 \leftrightarrow n, \quad 4 \leftrightarrow n-1, \quad 5 \leftrightarrow n-2, \quad 6 \leftrightarrow n-3, \quad \cdots$$

El segundo movimiento es:

$$2 \leftrightarrow n, \quad n-1 \leftrightarrow 3, \quad n-2 \leftrightarrow 4, \quad n-3 \leftrightarrow 5 \quad \cdots$$

3. Se pintan k casillas de un tablero cuadriculado de $m \times n$ de tal manera que se cumpla la siguiente propiedad:
Si los centros de cuatro casillas son los vértices de un cuadrilátero de lados paralelos a los bordes del tablero, entonces a lo más dos de estas casillas deben estar pintadas.
Encontrar el mayor valor posible de k.

Solución:

La condición propuesta tiene la siguiente consecuencia inmediata: si dos casillas pintadas están en la misma fila o en la misma columna, entonces no hay más casillas pintadas en la misma fila o columna respectivamente. Si esta condición se cumple, es decir si para todo par de casillas pintadas las cuales comparten una fila o columna, no más casillas están pintadas en sus columnas o filas, respectivamente, entonces claramente la condición dada en el planteamiento del problema también se cumple, de donde son equivalentes. Asumamos sin pérdida de generalidad (podemos intercambiar filas y columnas rotando el tablero sin alterar el problema) que $m \geq n$. Entonces $k \leq m$ cuando $n \in \{1, 2\}$, y $k \leq m+n-2$ cuando $n \geq 2$. Probaremos este resultado considerando valores crecientes de n.

Si $n = 1$, el tablero contiene exactamente m casillas y todas estas claramente pueden ser pintadas. Si $n = 2$, asumamos que $p > m+n-2 = m$ casillas pueden ser pintadas. Por tanto, una fila (la i-ésima) existe tal que ambas casillas están pintadas. No más casillas pueden ser pintadas en ninguna columna, o $k \leq 2 \leq m$, contradicción. Sin embargo, $m = m + n - 2$ casillas pueden ser pintadas al pintar una columna completa.
Si $n \geq 3$, asumamos que $p \geq m + n - 2$ casillas pueden ser pintadas. Seleccionemos la fila que tiene más casillas pintadas y asumamos que son u. Entonces $u \geq 2$ porque existen más de m casillas pintadas pero solo m filas. Claramente, no otras casillas están pintadas en las u columnas para las cuales una casilla existe en la fila seleccionada. Consideremos el tablero que resulta al borrar la fila y las u columnas que contienen estas u casillas pintadas, el cual claramente satisface la condición planteada. Este tiene $p - u$ casillas pintadas, $m - 1$ filas, y $n-u$ columnas. Claramente, $p-u \geq m+n-2-u = (m-1)+(n-u)-1$. Si nosotros hacemos v pasos como este, por inducción trivial obtenemos un tablero $m - v \times n - U$ con al menos $(m - v) + (n - U) - 2 + v$ casillas pintadas, donde U es la suma de los u en cada uno de estos v pasos. Mientras $n - U > 2$, podemos continuar este proceso, hasta que $n - U = 2$ o $n - U = 1$. En el primer caso tendríamos un tablero $m-v\times 2$ con al menos $(m-v)+v > m-v$ casillas pintadas, contradicción. En el segundo caso, se tendría un tablero $m - v \times 1$ con al menos $m-v+(v-1) \geq m-v$ casillas pintadas, posible si y sólo si $v = 1$, con $U = u = n - 1$. En otras palabras, cuando $n \geq 3$, a lo sumo $m + n - 2$ casillas pueden ser pintadas, si y sólo si pintamos todas casillas en una fila, y todas las casillas en una columna, excepto para la casilla en su intersección la cual se queda sin pintar. Recuperando generalidad, concluimos que $k \leq m + n - 2$ cuando $\text{mín}\{m, n\} \geq 2$ pintando una fila completa y una columna completa, excepto para la casilla que está en su intersección, y $k \leq \text{máx}\{m, n\}$ cuando $\text{mín}\{m, n\} \leq 2$ pintando todas las casillas en una fila(cuando $n \geq m$) o en una columna (cuando $m \geq n$).

Día 2

1. Determina todos los polinomios mónicos $P(x)$ de grado 3 con coeficientes enteros, que son divisibles por $x-1$, al dividirlos por $x-5$ dejan el mismo resto que al dividirlos por $x+5$ y tienen un cero comprendido entre 2 y 3.

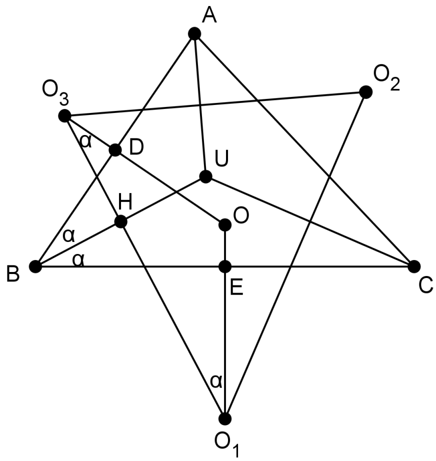
   Solución:

   Sea $p(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Al ser divisible por $x-1$ se tiene que $p(1) = 1+a+b+c = 0$. Por otro lado se cumple que $p(5) = p(-5)$, lo cual implica que $b = -25$, y entonces $a+c = 24$. De esta forma podemos escribir $p(x) = x^3+ax^2-25x+24-a = (x-1)(x^2+(a+1)x+a-24)$. Entonces la cuadrática $x^2+(a+1)x+a-24$ tiene al menos un cero en el intervalo $(2,3)$. Como su discriminante es $(a-1)^2+96 > 0$ no tiene cero doble, si tuviera dos raíces distintas $x_1, x_2 \in [2,3]$ por las relaciones de Vietta se cumple $x_1+x_2 = -(a+1)$ y $x_1x_2 = a-24$, y por tanto $a \in [-7,5]$ y al mismo tiempo $a \in [28,33]$ lo cual es imposible. Entonces solo puede ocurrir que $p(2)p(3) < 0$, es decir $(3a-18)(8a-24) < 0$, de donde queda $a \in (3,6)$ y finalmente $a = 4$ o $a = 5$. Los únicos polinomios que satisfacen todas las hipótesis son $p(x) = x^3+4x^2-25x+20$ y $p(x) = x^3+5x^2-25x+19$.

2. Sea U el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, O_1, O_2 y O_3 los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos BCU, CAU y ABU respectivamente. Probar que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ tienen el mismo centro.

   Solución:

   Sean D el punto medio de AB y E el punto medio de BC. Está claro que O, D, O_3 están alineados, lo mismo pasa con O, E, O_1. Sea H el punto medio de BU, entonces O_1, H, O_3 están alineados. Ahora se tiene que $\measuredangle ABU = \measuredangle CBU = \alpha$ por ser BU bisectriz del ángulo B. Está claro que $\measuredangle OO_3O_1 = \measuredangle ABU = \alpha$ y $\measuredangle OO_1O_3 = \measuredangle CBU = \alpha$, quedando que el triángulo OO_1O_3 es isósceles de base O_1O_3, por tanto



$OO_1 = OO_3$. Análogamente se demuestra que $OO_1 = OO_2$ y entonces los circuncentros de los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ coinciden.

3. Sean a, b, c números reales diferentes. Demostrar que

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5$$

Solución:

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\
= \; & ab(a-b) + bc[b-a+a-c] + ca(c-a) \\
= \; & (a-b)(ab-bc) + (c-a)(ca-bc) \\
= \; & b(a-b)(a-c) + c(c-a)(a-b) \\
= \; & (a-b)(c-a)[c-b] \\
= \; & -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

En lo adelante $\sum$ significa suma cíclica. Sigue que

$$\begin{aligned}\sum \frac{a}{a-b}\left(1-\frac{b}{b-c}\right) &= -\sum \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \\ &= -\sum \frac{ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1\end{aligned}$$

es decir,

$$\sum \frac{a}{a-b} = 1 + \sum \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\sum \left(\frac{a}{a-b}+1\right)^2 &= 3 + \sum \left(\frac{a}{a-b}\right)^2 + 2\sum \frac{a}{a-b} \\ &= 3 + \sum \left(\frac{a}{a-b}\right)^2 + 2\left[1 + \sum \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c}\right] \\ &= 5 + \left(\sum \frac{a}{a-b}\right)^2\end{aligned}$$

y con esto queda demostrada la desigualdad, se tiene igualdad si y sólo si $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a} = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tal que:

   a) $f(n+1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$

   b) $f(n+f(m)) = f(n) + m + 1$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$

   Encuentra $f(2006)$.

   Solución:

   Sea $m = 0$, entonces $f(n + f(0)) = f(n) + 1$. Pongamos $f(0) = k$ y supongamos que $k \geq 2$. Se tiene que $f(n) < f(n+1) < f(n+2) \leq f(n+k) = f(n) + 1$ lo cual es una contradicción pues entre $f(n)$ y $f(n)+1$ no puede existir ningún entero. Por tanto $k = 0$ o $k = 1$. Si

$k=0$ entonces $f(n)=f(n)+1$, lo cual es imposible. Si $k=1$ entonces $f(n+1)=f(n)+1$, así

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0)+1 \Rightarrow f(1)=2 \\ f(2) &= f(1)+1 \Rightarrow f(2)=3 \\ &\vdots \\ f(x) &= f(x-1)+1 \Rightarrow f(x)=x+1 \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que esta función satisface $a)$ y $b)$, de donde $f(2006)=2007$.

5. La siguiente sucesión de números enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_{400}$ satisface la relación $a_{n+1}=\tau(a_n)+\tau(n)$ para todo $1 \leq n \leq 399$, donde $\tau(k)$ es la cantidad de divisores enteros positivos que tiene k. Probar que en la sucesión no hay más de 210 números primos.

   Solución:

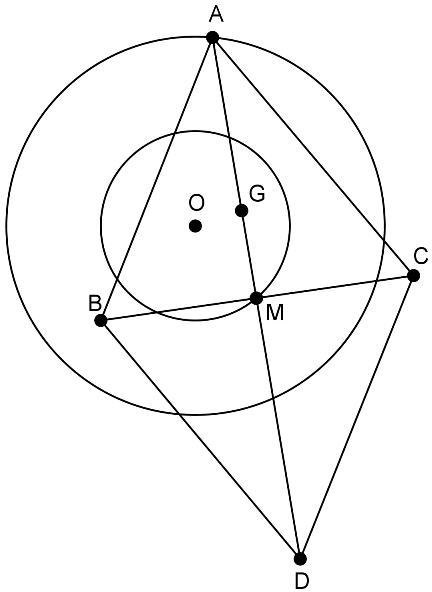
   Sean a_k y a_{k+1} dos números primos. Luego $a_{k+1}=\tau(a_k)+\tau(k)=2+\tau(k)$, pero al ser a_{k+1} impar se deduce que $\tau(k)$ es impar, de donde k es un cuadrado perfecto. En otras palabras, si k no es un cuadrado perfecto, entonces es imposible que a_k y a_{k+1} sean ambos números primos. Si consideramos todos los a_i con $k^2 < i < (k+1)^2$ tenemos los siguientes $2k$ números: $a_{k^2+1}, a_{k^2+2}, \cdots, a_{k^2+2k}$, y con ellos formamos k parejas de índices consecutivos, podemos afirmar que en cada pareja hay a lo más un número primo. Luego, entre los siguientes 380 números:

$$\begin{array}{r} a_2, a_3 \\ a_5, a_6, a_7, a_8 \\ a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} \\ \vdots \\ a_{362}, a_{363}, \cdots, a_{399} \end{array}$$

hay a lo más $1+2+3+\cdots+19 = 190$ números primos. Adicionalmente, los números $a_1, a_4, a_9, ..., a_{396}, a_{400}$ también pueden ser primos. Por lo tanto, a lo sumo se tienen $190 + 20 = 210$ números primos.

6. Dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 2 están centradas en el punto O. El vértice A del triángulo equilátero ABC se encuentra en la circunferencia mayor, mientras que el punto medio del lado BC se encuentra sobre la circunferencia menor. Si B, O y C no son colineales, ¿qué medida puede tener el ángulo BOC?

   Sean M el punto medio del lado BC y G el centro del $\triangle ABC$. Construimos el $\triangle DBC$ equilátero simétrico del $\triangle ABC$ con respecto a BC. Como G es centro del $\triangle ABC$, entonces $\measuredangle BGC = 120°$. Luego, el



   cuadrilátero $BGCD$ es cíclico (puesto que $\measuredangle BGC + \measuredangle BDC = 180°$). Llamaremos Γ a la circunferencia que pasa por B, G, C y D. En el $\triangle AOM$ se tiene $AO : OM = 2 = AG : GM$, entonces OG es bisectriz del $\measuredangle AOM$ por el teorema de la bisectriz interior. Como D es el simétrico de A, se cumple que D, M y A son colineales y $DA : DM = 2$. Nuevamente en el $\triangle AOM$ se tiene $AO : OM = 2 = DA : DM$, entonces OD es bisectriz exterior del $\measuredangle AOM$ por el teorema de la bisectriz exterior. Pero como la bisectriz interior y la bisectriz exterior de un mismo ángulo son perpendiculares, entonces $\measuredangle GOD = 90°$. Además como GD es perpendicular a la cuerda BC de Γ en su punto medio, GD será un diámetro de Γ. En consecuencia, dado que $\measuredangle GOD = 90°$, el punto O también se encuentra sobre Γ. Finalmente, $\measuredangle BOC = \measuredangle BGC = 120°$. Sin embargo, este análisis ha sido realizado considerando que O es interior al $\triangle ABC$. Si O fuera exterior a este triángulo, se encontrará en el arco $B\overset{\frown}{D}C$ de Γ y su valor resultará la mitad del arco $B\overset{\frown}{G}C$, es decir, $\measuredangle BOC = 60°$. En conclusión, si O es interior al triángulo ABC, se tiene $\measuredangle BOC = 120°$, pero si es exterior $\measuredangle BOC = 60°$.

7. La sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ satisface que $a_1 = 3, a_2 = -1, a_n a_{n-2} + a_{n-1} = 2$ para todo $n \geq 3$. Calcular $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$.

Solución:

Calculemos los 14 primeros términos de la sucesión:

$$3, -1, 1, -1, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, 1, \frac{5}{7}, \frac{9}{7}$$

vemos que a partir del sexto se tiene el siguiente patrón:

$$\begin{aligned} a_{3k} &= 1 \\ a_{3k+1} &= \frac{2k-3}{2k-1} \\ a_{3k+2} &= \frac{2k+1}{2k-1} \end{aligned}$$

es decir, para $k \geq 2$. Esto se demuestra fácilmente por inducción usando la relación que se da en el enunciado del problema. Notar ahora que $a_{3k}+a_{3k+1}+a_{3k+2}=3$ para $k\geq 2$, de donde $a_1+a_2+\cdots+a_{99}=3-1+1-1+3+3\cdot 31+1=99$.

8. Probar que para cualquier k entero ($k\geq 2$) existe una potencia de 2 que entre sus últimos k dígitos, los nueves constituyen no menos de la mitad. Por ejemplo, para $k=2$ y $k=3$ se tienen las potencias $2^{12}=...96$ y $2^{53}=...992$.
Solución:

Probaremos que las potencias de 2 con exponente $2\cdot 5^{k-1}+k$ satisfacen esta propiedad. Por el teorema de Euler tenemos $4^{\phi(5^k)}\equiv 1(5^k)$. De donde

$$\begin{aligned} 4^{5^k-5^{k-1}} &\equiv 1(5^k) \\ 4^{4\cdot 5^{k-1}} &\equiv 1(5^k) \\ \left(4^{5^{k-1}}\right)^4 &\equiv 1(5^k) \end{aligned}$$

Sea ahora $4^{5^{k-1}}=\alpha$. Se cumple que $5^k\mid \alpha^4-1$, en otras palabras $5^k\mid(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)$, y por tanto teniendo en cuenta divisibilidad por 5 se llega a que $5^k\mid 2^{2\cdot 5^{k-1}}+1$. O sea

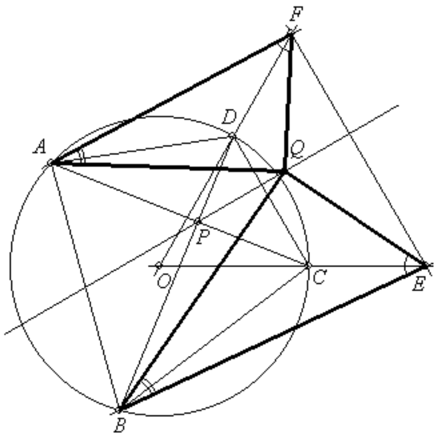
$$\begin{aligned} 2^{2\cdot 5^{k-1}} &\equiv -1(5^k) \\ 2^{2\cdot 5^{k-1}+k} &\equiv -2^k(5^k) \\ 2^{2\cdot 5^{k-1}+k} &\equiv 10^k-2^k(5^k) \end{aligned}$$

para terminar verificamos que $\log(10^k)-\log(2^k)=\log(5^k)=k\log(5)=k(0{,}698...)>\frac{k}{2}$.

9. En el cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Sean O el centro de la circunferencia circunscrita a $ABCD$, y E un punto de la prolongación de OC por C. Por E se traza una paralela a CD que corta a la prolongación de OD por D en F. Sea Q un punto interior a $ABCD$, tal que $\measuredangle AFQ=\measuredangle BEQ$ y $\measuredangle FAQ=\measuredangle EBQ$. Probar que $PQ\perp CD$.

Solución:

Sean σ_A la semejanza directa de centro A tal que $\sigma_A(D) = P$ y σ_B la semejanza directa de centro B tal que $\sigma_B(P) = C$.



La razón de semejanza de la semejanza $\sigma_B \circ \sigma_A$ será

$$\frac{AP}{AD} \cdot \frac{BC}{BP} = 1,$$

ya que los triángulos PAD y PBC son (inversamente) semejantes.

Por otro lado, el ángulo de rotación de $\sigma_B \circ \sigma_A$ será, por ser A, B, C, D concíclicos,

$$\measuredangle(AD, AP) + \measuredangle(BP, BC) = \measuredangle(AD, AC) + \measuredangle(BD, BC) = \measuredangle(OD, OC),$$

por lo que $\sigma_B \circ \sigma_A$ es la rotación ρ de centro O que lleva D a C.

Si llamamos $Q = \sigma_A(F)$ entonces $\sigma_B(Q) = \sigma_B(\sigma_A(F)) = \rho(F) = E$. Los triángulos QAF y QBE son directamente semejantes a PAD y PBC, respectivamente, y por tanto son inversamente semejantes. Por tanto, el punto Q cumple la condición del enunciado.

Como la recta PQ es el resultado de aplicar σ_A a la recta $DF = OD$, la recta PQ forma con la recta OD un ángulo $\angle DAP = \frac{1}{2}\angle DOC$, por lo que PQ es paralela a la bisectriz del ángulo COD y debe ser perpendicular a CD.

Concurso Nacional (2007)

Día 1

1. Se colocan fichas en algunas casillas de un tablero de 8×8 de modo que:

    a) Hay al menos una ficha en cualquier rectángulo de lados 2×1 o 1×2.

    b) Hay al menos dos fichas vecinas en cualquier rectángulo de lados 7×1 o 1×7.

    Hallar la menor cantidad de fichas necesarias para cumplir con ambas condiciones.

    Solución:

    El mínimo necesario de fichas es 37.

    Notar que la condición a) obliga a que cada fila (columna) tenga al menos 4 fichas. Entonces en total habrán al menos 32 fichas.

    Lema: No pueden haber dos filas(columnas) consecutivas con exactamente 4 fichas cada una.

    Demostración:

    Si dos filas consecutivas tienen exactamente 4 fichas, entonces las fichas de la segunda tienen que estar exactamente debajo de los huecos de la primera, porque si no, aparece un rectángulo de 2×1 vertical que no tiene fichas, y eso no puede ser por la condición a). Pero por la condición b) en la primera fila hay dos fichas vecinas, entonces las dos casillas que caen debajo en la segunda fila estarían vacías, imposible por a).

□

Como resultado del *lema* serán necesarias al menos 36 fichas. Ahora notar que las filas con solo 4 fichas tendrán huecos en los extremos. Para probar esto supongamos que hay una fila con una ficha en la primera casilla (sin pérdida de generalidad). Tenemos cuatro bloques consecutivos de 2 casillas cada uno. En cada bloque tiene que haber exactamente una ficha. De donde la distribución de fichas en esa fila será necesariamente

♣		♣		♣		♣	

por la condición a). Pero entonces no se cumple b).
Si se pudiera con 36 fichas, tiene que haber exactamente 4 filas con 4 fichas, y 4 con 5 fichas. Ya que si hay una fila con $6, 7$ u 8 fichas entonces obligatoriamente existirán dos filas consecutivas con 4 fichas, lo cual contradice el *lema*. Cada columna tiene que tener al menos 4 fichas. En particular las columnas de los extremos. Entonces las filas con 5 fichas tienen que tener fichas en los extremos. Si una fila tiene 5 fichas, y fichas en los extremos, entonces condiciones a) y b) aplicadas a esa fila implican que la segunda casilla y la séptima estén vacías. Condición b) aplicada a la primera columna implica que hay dos filas consecutivas con 5 fichas. Entonces la segunda columna tiene dos huecos consecutivos, imposible por a). Por lo tanto no se puede con 36 fichas. Finalmente mostramos una configuración con 37 fichas.

	♣	♣		♣		♣	
♣		♣	♣		♣		♣
	♣		♣	♣		♣	
♣		♣		♣	♣		♣
♣	♣		♣		♣	♣	
	♣	♣		♣		♣	♣
♣		♣	♣		♣		♣
	♣		♣	♣		♣	

2. Un prisma es llamado *binario* si se le puede asignar a cada uno de sus vértices un número del conjunto $\{-1, 1\}$, de forma tal que el producto de los números asignados a los vértices de cada cara sea igual a -1.

   a) Probar que el número de vértices de los prismas *binarios* es divisible por 8.

   b) Probar que un prisma con 2000 vértices es *binario*.

   Solución:

   A modo de aclaración consideramos un prisma como la figura geométrica formada por dos polígonos regulares de n lados (sin perder generalidad para este problema), uno arriba y otro abajo unidos vértice a vértice por aristas.

   a) Considerando el producto de todos los números escritos en cada cara se tiene $(-1)^{n+2} = \prod_L \cdot \prod_{sup} \cdot \prod_{inf} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$, entonces n es par. Ahora consideramos un bloque de 3 caras laterales consecutivas, la cantidad de -1 en cada cara puede ser 1 ó 3. Dado que 1 en el medio implica otro 1, ya sea a izquierda ó derecha, y lo mismo pasa para un 3, las posibles configuraciones son las siguientes: $(1, 1, 1); (1, 1, 3); (3, 1, 1); (3, 3, 1); (1, 3, 3); (3, 3, 3)$. En cualquier caso el bloque aporta $2, 4, 6$ cantidad de -1. Si ahora $n = 4k+2$, entonces tenemos k bloques y una cara sobrante, de donde la cantidad de $-1(V_{-1})$ será impar. Pero al mismo tiempo $(-1)^{V_{-1}} = \prod_v = \prod_{sup} \cdot \prod_{inf} = 1$, por tanto V_{-1} es par, contradicción. Finalmente $V = 2n = 8k$.

   b) Haciendo un corte por una arista lateral y expandiendo el prisma obtenemos una franja formada por 1000 caras laterales. La distribución para que sea binario es la siguiente: en el primer bloque de 3 caras consecutivas escribimos

$$\begin{array}{c} 1\ 1\ 1\ -1 \\ 1\ -1\ 1\ 1 \end{array}$$

y se repite este patrón hasta llegar al último bloque, donde ponemos

$$\begin{array}{c} 1\ 1\ -1\ -1 \\ 1\ -1\ -1\ 1 \end{array}$$

y para terminar la última arista es la que coincide con la primera (la del corte), sería $1, 1$.

Nota: Para un poliedro en general, el inciso a) es falso. Porque existen *poliedros binarios* con cualquier cantidad de vértices mayor o igual que 4. Cuando la cantidad de vértices es $2k$, se considera la pirámide con base un polígono regular de $(2k-1)$ lados y se escribe -1 en cada vértice. Cuando son $2k+1$ vértices, se hace una copia de esta pirámide y se pega por la base, y nuevamente se asigna -1 a cada vértice. Surge entonces la pregunta, existe algún poliedro (no un prisma) con 2000 vértices que sea *binario*?

3. Una competencia de tenis tiene lugar durante cuatro días, el número de participantes es $2n$ con $n \geq 5$. Cada participante juega exactamente una vez diaria (es posible que un par de participantes se encuentre más veces). Prueba que tal competencia puede terminar con exactamente un ganador y exactamente tres jugadores en el segundo lugar y tal que no existan jugadores con los cuatro juegos perdidos.

   Solución:

   Denotemos los días por D_1, D_2, D_3, D_4 y los participantes por $P_1, P_2, ..., P_{2n}$. La puntuación de un juego perdido será 0 y de un juego ganado 1. Veamos la distribución siguiente la cual resuelve el problema:

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	1	1	1	1
P_2	1	1	1	0
P_3	1	1	1	0
P_4	1	1	1	0
	1	0	1	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	1	0	1	0
	0	1	0	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	1	0	1
P_{2n-4}	0	1	0	0
P_{2n-3}	0	0	0	1
P_{2n-2}	0	0	0	1
P_{2n-1}	0	0	0	1
P_{2n}	0	0	0	1

Día 2

1. Hallar todos los números reales x, y tales que $x^3 - y^3 = 7(x - y)$ y $x^3 + y^3 = 5(x + y)$.

   Solución:

   El sistema se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2-7) &= 0 \qquad (7)\\
(x+y)(x^2-xy+y^2-5) &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

   Si $x-y=0$ entonces $x=y$ y sustituyendo en (8) queda $2x(x^2-5)=0$, por tanto $x = 0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ y salen las soluciones $(0,0)$; $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$; $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$. Ahora si $x+y=0$ tenemos $y=-x$ y sustituyendo en (7) obtenemos $2x(x^2-7)=0$, entonces $x = 0, x = \sqrt{7}, x = -\sqrt{7}$ y se tienen las soluciones $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ y $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$. Una vez analizados estos casos queda por estudiar el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2-7 &= 0 \\ x^2-xy+y^2-5 &= 0, \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos $x^2+y^2=6$ que al sustituir resulta $xy=1$ o equivalentemente $y=\frac{1}{x}$, entonces $x^2+\frac{1}{x^2}=6$, ahora hacemos $z=x^2$, de donde queda por resolver la cuadrática $z^2-6z+1=0$, con soluciones $z_1=3-2\sqrt{2}$ y $z_2=3+2\sqrt{2}$. Finalmente por esta via salen cuatro nuevas soluciones

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)$$
$$\left(-\sqrt{3-2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)$$
$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)$$
$$\left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right).$$

2. Hallar tres enteros positivos diferentes cuya suma sea mínima que cumplan la condición de que la suma de cada pareja de ellos sea un cuadrado perfecto.

Solución:

Sean a, b, c estos tres números, entonces debe cumplirse

$$\begin{aligned} a+b &= x^2 \\ b+c &= y^2 \\ c+a &= z^2 \end{aligned}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad $a < b < c$, entonces $x < z < y$. Resolviendo el sistema de ecuaciones queda

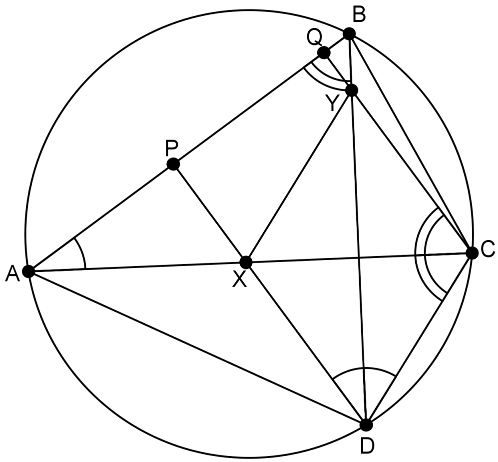
$$\begin{aligned} a &= \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2} \\ b &= \frac{y^2 - z^2 + x^2}{2} \\ c &= \frac{z^2 - x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$

por tanto $a + b + c$ será mínimo cuando $x^2 + y^2 + z^2$ sea mínimo. De la primera ecuación sigue que $x^2 + z^2 > y^2$, o equivalentemente $x^2 > (y - z)(y + z)$. Ahora si $x = 3$ queda $9 > (y - z)(y + z) \geq 9$ contradicción. Si $x = 4$ obtenemos $16 > (y-z)(y+z)$, pero $y+z \geq 11$, entonces $y-z = 1$ y $y+z = 11, 12, 13, 14, 15$, al resolver estos sistemas algunos son insolubles en enteros y otros las soluciones que dan no satisfacen que a, b, c sean enteros. Ahora si $x = 5$ tomamos $y = 7$ y $z = 6$ con lo cual queda $a = 6, b = 19, c = 30$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia cuyas diagonales son perpendiculares. Denotar por P y Q los pies de las perpendiculares por D y C respectivamente a la recta AB, X es el punto de intersección de las rectas AC y DP, Y es el punto de intersección de las rectas BD y CQ. Demuestra que $XYCD$ es un rombo.

Solución:

Tenemos que $\measuredangle BAC = \measuredangle PDB$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$, por tanto $DX = DC$. Análogamente $\measuredangle ABD = \measuredangle QCA$ y $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, de donde $DC = CY$, pero $DX \parallel CY$ entonces $XY = DC$ y queda probado que $XYCD$ es un rombo.



4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:
$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y)$ para todos los x, y reales positivos.

Solución:

Haciendo $y = 0$ obtenemos $x^2(f(x) + f(0)) = xf(0)$, de donde si $x \neq 0$ queda $f(x) = \frac{f(0)(1-x)}{x}$, ahora si $f(0) \neq 0$ cuando sustituimos en la ecuación funcional original vemos que no satisface. Finalmente la única solución es $f(x) = 0$.

5. Probar que existe un único entero positivo formado solamente por los dígitos 2 y 5, que tiene 2007 dígitos y que es divisible por 2^{2007}.

Solución:

Demostremos por inducción la siguiente proposición más general:

$$P(k) : \forall k \in \mathbb{N} \text{ existe un único } x_k \in \mathbb{N}_0 \tag{9}$$

formado solamente por las cifras $2, 5$, que tiene k cifras y es divisible por 2^k.

Paso Base. $P(1)$ es cierta: basta considerar $x_k = 2$.

Paso Inductivo. Supongamos que $P(k)$ es cierta y sea $x_k = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k}$ la representación de x_k en base 10. Por hipótesis inductiva existe $q \in \mathbb{N}_0$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 5\}$ tal que

$$x_k = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k} = q \cdot 2^k$$

Verifiquemos que el número

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= 5 \cdot 10^k + x_k, \text{si q es impar} \\ &:= 2 \cdot 10^k + x_k, \text{si q es par} \end{aligned}$$

- si q es impar tenemos que $5^{k+1} + q$ es par, por lo cual

$$x_{k+1} = 5 \cdot 10^k + x_k = 5 \cdot 10^k + q \cdot 2^k = 2^{k+1} \cdot \frac{5^{k+1} + q}{2} \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \overline{5\underbrace{00\cdots 0}_{k\ cifras}} + \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k\ cifras} = \underbrace{\overline{5 a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k+1\ cifras}$$

- si q es par

$$x_{k+1} = 2 \cdot 10^k + x_k = 2 \cdot 10^k + q \cdot 2^k = 2^{k+1}\left(5^k + q\right) \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \overline{2\underbrace{00\cdots 0}_{k\ cifras}} + \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k\ cifras} = \underbrace{\overline{2 a_1 a_2 \cdots a_k}}_{k+1\ cifras}$$

Para concluir demostraremos que x_{k+1} verifica (9): si A es un número entero positivo que verifica (9) ahora el número B definido como

$$\begin{aligned} B &:= A - 5 \cdot 10^k, \text{si la primera cifra de A es 5} && (10) \\ &:= A - 2 \cdot 10^k, \text{si la primera cifra de A es 2} && (11) \end{aligned}$$

tiene k cifras (todas iguales a 2 o 5) y es divisible por 2^k, siendo $B = x_k$ en cuanto por hipótesis inductiva, este es el único número de k cifras que verifica ([**?**]). Haciendo $B = x_k$ se verifica fácilmente que $A = x_{k+1}$. $\square$

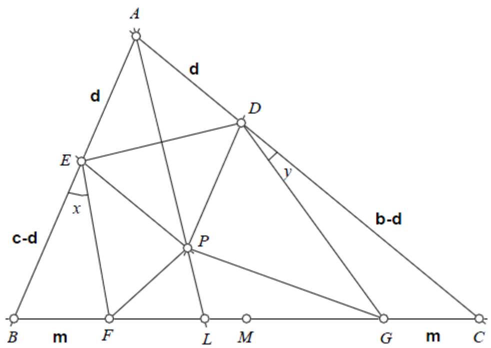
Observación: La fórmula (11) provee un algoritmo recursivo para calcular los términos de la sucesión x_k. Por ejemplo, usando (11) escribimos los primeros 9 términos de $\{x_k\}$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k	2	52	552	5552	55552	255552	5255552	55255552	255255552
q	1	13	69	347	1736	3933	41059	215842	498546

6. Sea el triángulo ABC acutángulo. Tomemos en el segmento BC dos puntos F y G tales que $BG > BF = GC$ y un punto P interior al triángulo en la bisectriz del $\measuredangle BAC$. Se trazan por P, $PD \| AB$ y $PE \| AC$, $D \in AC$ y $E \in AB$, $\measuredangle FEP = \measuredangle PDG$. Demuestra que $\triangle ABC$ es isósceles.

Solución:

Dado que el punto P pertenece a la bisectriz del $\angle BAC$ el cuadrilátero $ABCD$ es un rombo, de donde $AE = ED$. Sea M, el punto medio de BC y L el pie de la bisectriz.



Denotemos $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AE = AD = d$, $BF = GC = m$, $\measuredangle BEF = x$, $\measuredangle GDC = y$ como se indica en la figura.

Observemos que $AP = 2d\cos\frac{A}{2}$, $AL = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ y usando que $AP \leq AL$ llegamos a

$$2d\cos\frac{A}{2} \leq \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad d \leq \frac{bc}{b+c} \tag{12}$$

Usando $BF + GC < BC$ obtenemos

$$m + m < a \quad \Rightarrow \quad m < \frac{a}{2} \tag{13}$$

Por el Teorema de los Cosenos aplicado a $\triangle EBF$ y $\triangle DGC$ sigue que

$$EF^2 = BF^2 + BE^2 - 2\cdot BF\cdot BE\cdot \cos B = m^2 + (c-d)^2 - 2m(c-d)\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \tag{14}$$

$$GD^2 = GC^2 + GD^2 - 2\cdot GC\cdot GD\cdot \cos C = m^2 + (b-d)^2 - 2m(b-d)\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \tag{15}$$

Dado que $\measuredangle FEP = \measuredangle PDG$ resulta

$$x = \angle BEF - \angle FEP = 180^\circ - \angle BAC - \angle FEP = \angle PDG - \angle PDG = y$$

Por tanto $\cos x = \cos y$ y aplicando nuevamente el Teorema de los Cosenos queda

$$\frac{EB^2 + EF^2 - BF^2}{2\cdot AE\cdot EF} = \frac{DC^2 + DG^2 - GC^2}{2\cdot DC\cdot DG} \tag{16}$$

$$\frac{(c-d)^2 + EF^2 - m^2}{(c-d)\cdot EF} = \frac{(b-d)^2 + EF^2 - m^2}{(b-d)\cdot DG} \tag{17}$$

Sustituyendo las fórmulas (14) y (15) en (16) y elevando al cuadrado

$$m^2(b-c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)\cdot$$

$$\cdot\left(bd + cd + am - b^2 - c^2\right)(ab + ac - ad - bm - cm) = 0 \tag{18}$$

Por la ecuación anterior resulta $m^2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c) \neq 0$; dado que $\triangle ABC$ es acutángulo resulta $a^2 < b^2 + c^2$ y ahora, teniendo en cuenta (12) y (13), obtenemos

$$\begin{aligned} bd + cd + am - b^2 - c^2 &= d(b+c) + am - b^2 - c^2 \\ &\leq bc + \frac{a^2}{2} - b^2 - c^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[a^2 - b^2 - c^2 - \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\right] \\ &< -\frac{1}{2}(b-c)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

de ahí sigue que

$$bd + cd + am - b^2 - c^2 < 0,$$

Por (12) queda $d < b + c$ y ahora, usando $m < \frac{a}{2}$

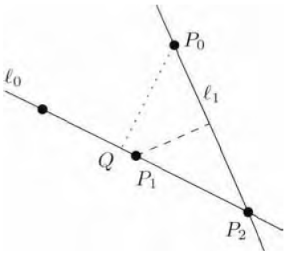
$$\begin{aligned} ab + ac - ad - bm - cm &= (b+c)(a-m) - ad \\ &> (b+c)\frac{a}{2} - ad \\ &= \frac{a}{2}(b + c - 2d) > 0 \end{aligned}$$

Por tanto inferimos que $b = c$, quedando $\triangle ABC$ isósceles.

7. Demostrar que dados n puntos en el plano, no todos alineados, existe una recta que pasa por exactamente dos de ellos.

Solución:

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de n puntos y consideremos el conjunto $\mathcal{L}$ de todas las rectas que pasan por al menos dos puntos de $\mathcal{P}$. Entre todos los pares (P, l) con P que no pertenece a l, seleccionar un par (P_0, l_0) tal que P_0 tiene la menor distancia a l_0, con Q siendo el punto sobre l_0 más cercano a P_0 (es decir, sobre la recta que pasa por P_0 perpendicular a l_0). Esta recta l_0 es justamente la que estamos buscando. De no ser así, entonces l_0 contiene al menos tres puntos de $\mathcal{P}$, y por tanto dos de estos, digamos P_1 y P_2, se encuentran a la derecha de Q (sin pérdida de generalidad). Asumiremos que P_1 se ubica entre Q y P_2, donde P_1 puede coincidir con Q. La figura muestra la configuración. Sigue que la distancia de P_1 a la recta l_1 determinada por P_0 y P_2 es menor que la distancia de P_0 a l_0, y esto contradice nuestra elección de l_0 y P_0.



8. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n^2+1. Se define una sucesión $\{a_n\}$, con a_0 entero positivo arbitrario y $a_{n+1} = S(a_n)$. Probar que la sucesión $\{a_n\}$ es periódica con período tres.

Solución:

Como $S(5) = 8, S(8) = 11$ y $S(11) = 5$, es suficiente probar que para todo entero positivo a_0 existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in 5, 8, 11$. Sea m el número de dígitos de a_0. Procedamos por inducción en m. Para $m \leq 2$ se comprueba directamente. Si $a_0 \in \{5, 8, 11\}$ no hay nada que probar. Si a_0 es un número de dos dígitos, entonces $a_0^2 < 10000$, de donde $a_1 \leq 37$, analizemos entonces los casos cuando $a_0 \leq 37$.

- Si $a_0 \in \{2, 7, 20\}$, entonces $a_1 = 5$. Si $a_0 \in \{1, 10, 26, 28\}$ entonces $a_1 \in \{2, 20\}$, por tanto $a_2 = 5$. Finalmente, si $a_0 \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 27, 30, 33\}$, entonces $a_3 = 5$.
- Si $a_0 \in \{4, 13, 23, 32\}$, entonces $a_1 = 8$.

- Si $a_0 \in \{17, 19, 21, 35, 37\}$, entonces $a_1 = 11$. Si $a_0 \in \{14, 22, 24, 31, 36\}$, entonces $a_1 \in \{17, 19\}$, y $a_2 = 11$. Finalmente, si $a_0 \in \{16, 25, 29, 34\}$, entonces $a_3 = 11$.

Por tanto, hemos probado que si a_0 es un número con uno o dos dígitos, entonces $a_n \in \{5, 8, 11\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, i.e. la sucesión es $3-$ periódica. Sea $m \geq 2$ y supongamos que el planteamiento es cierto para todo $k \leq m$. Sea a_0 un número con $(m+1)$ dígitos. Entonces, $10^m \leq a_0 < 10^{m+1}$, lo cual implica que $10^{2m} \leq a_0^2 < 10^{2(m+1)}$. Entonces,

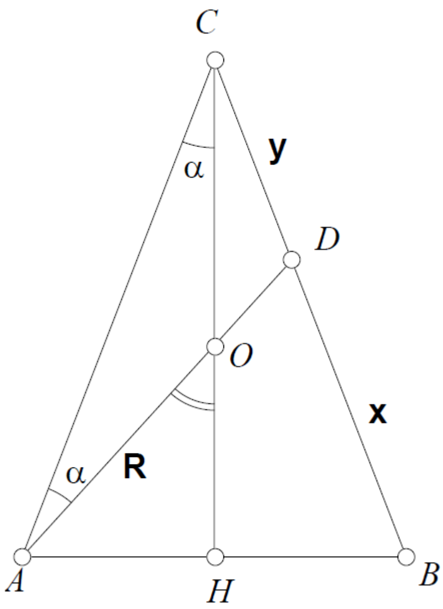
$$a_1 = S(a_0) \leq 9 \cdot 2(m+1) + 1 < 10^m,$$

y por hipótesis de inducción, la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es $3-$ periódica.

9. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC, con $AC = BC$. La recta AO corta el lado BC en D. Si BD y CD son enteros y $AO - CD$ es un número primo, determina esos tres números.

Solución:

Sea H el pie de la perpendicular desde C hasta AB y denotemos $AO = R$, $BD = x$, $DC = y$, $AO - CD = p$, $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ como indica la figura.



Aplicando el Teorema de los Senos en $\triangle AOC$ y $\triangle ACD$ queda

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{x+y}{\sin 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x+y}{2R}$$

$$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad AD = 2y\cos\alpha = \frac{y(x+y)}{R}$$

Por el Teorema de la Bisectriz aplicado al $\triangle ACD$, tenemos

$$\frac{AO}{OD} = \frac{x+y}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{AO} = \frac{x+2y}{x+y} \quad \Rightarrow \quad AD = R\cdot\frac{x+2y}{x+y}$$

Por tanto

$$\frac{y(x+y)}{R} = R\cdot\frac{x+2y}{x+y} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{y(x+y)^2}{x+2y}$$

Esta ecuación se puede escribir como una cuadrática en x:

$$yx^2 + (2y^2 - R^2)x + y^3 - 2R^2y = 0 \tag{19}$$

con discriminante

$$\Delta_1 = R^2(4y^2 + R^2)$$

entonces para que la ecuación (19) tenga soluciones enteras debe cumplirse que Δ_1 es un cuadrado perfecto, en otras palabras $(2y)^2 + R^2 = z^2$. La solución a esta última es la terna pitagórica

$$\begin{aligned} y &= mnv \\ R &= v(m^2 - n^2) \\ z &= v(m^2 + n^2) \end{aligned}$$

donde m, n son primos relativos y de diferente paridad. Sigue que $\Delta_1 = v^4(m^4 - n^4)^2$, por tanto las soluciones de (19) son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{vm(m^2 - 2n^2)}{n} \\ x_2 &= \frac{vn(n^2 - 2m^2)}{m} \end{aligned}$$

La condición $R - y = p$ se escribe como $v(m^2 - mn - n^2) = p$, si $v = 1$ entonces $n \mid m^2 - 2n^2$ y por tanto $n \mid m^2$, lo cual es imposible dado que m, n son primos relativos. Queda la posibilidad $m^2 - mn - n^2 = 1$ y $v = p$. Tenemos entonces $n = 1, m = 2$ lo cual genera las infinitas soluciones $(x, y, p) = (4p, 2p, p)$ ó $n = v = p$ quedando

$$\begin{aligned} x &= m(mp + 1 - p^2) \\ y &= p^2m \\ R &= p^2m + p \end{aligned}$$

Sustituyendo $n = p$ sigue $m^2 - pm - (p^2 + 1) = 0$, con discriminante $\Delta_2 = 5p^2 + 4$. Debemos buscar los p tal que $5p^2 + 4 = w^2$, esta ecuación se escribe como $5p^2 = w^2 - 4 = (w - 2)(w + 2)$, w deberá ser de la forma $5k + 2$, sustituyendo sale $p^2 = k(5k + 4)$ y finalmente $k = 1$ y $p = 3$. Obtenemos de esta manera $(x, y, p) = (35, 45, 3)$.

Concurso Nacional (2008)

Día 1

1. Se tiene un tablero de 9×9 donde se quieren situar todos los números del 1 al 81. Probar que existe $k \in \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$ tal que el producto de los números en la fila k difiere del producto de los números de la columna k.

   Solución:

   Supongamos que para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$ el producto de los elementos de la fila i es igual al producto de los elementos de la columna i. Para lograr esto todos los números primos entre $\frac{81}{2}$ y 81 deben estar en la diagonal principal del tablero, ya que en caso contrario un producto sería divisible por alguno de estos primos y el otro no. Pero hay exactamente 10 números primos que son $41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73$ y 79, de donde todos no podrán ser ubicados.

2. Considera un hexágono regular en el plano. Para cada punto P del plano, sea $L(P)$ la suma de las seis distancias de P a las rectas que contienen cada uno de los lados del hexágono dado, y sea $V(P)$ la suma de las seis distancias de P a cada uno de los vértices del hexágono.

   a) ¿Para cuáles puntos P del plano, $L(P)$ toma su menor valor?

   b) ¿Para cuáles puntos P del plano, $V(P)$ toma su menor valor?

   Solución:

   Sea a la longitud del lado del hexágono con vértices $A_1, A_2, ..., A_6$.

   a) Si P es interior o está sobre uno de los lados del hexágono entonces $L(P) = 3\sqrt{3}a$. Si P es exterior entonces hay dos sumas igual a $\sqrt{3}a$ y otra mayor. De donde $L(P)$ es mínimo en el primer caso.

b) Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} PA_1 + PA_4 &\geq A_1A_4 \\ PA_2 + PA_5 &\geq A_2A_5 \\ PA_3 + PA_6 &\geq A_3A_6 \end{aligned}$$

de donde $V(P)$ es mínimo cuando P coincide con el centro del hexágono.

3. Diego eligió un número natural y lo escribió tres veces en el pizarrón. A continuación realizó varias veces una operación del siguiente tipo: borrar un número del pizarrón y escribir en su lugar el número igual a la suma de los otros dos menos 1. Al final de este proceso, uno de los tres números es 900. Determinar todos los posibles valores del número que eligió inicialmente.

Solución:

Sea a el número inicial de Diego. Después de varios pasos los tres números del pizarrón serán de la forma $k(a-1)+1, j(a-1)+1, h(a-1)+1$, donde k, j y h son enteros positivos. En efecto, al comienzo, $k = j = h = 1$, y al realizar un nuevo paso reemplazará $k(a-1)+1$ por $j(a-1)+1+h(a-1)+1-1 = (j+h)(a-1)+1$, o reemplazará $j(a-1)+1$ por $k(a-1)+1+h(a-1)+1-1 = (k+h)(a-1)+1$, o reemplazará $h(a-1)+1$ por $k(a-1)+1+j(a-1)+1-1 = (k+j)(a-1)+1$, luego, el nuevo número también es de la forma $x(a-1)+1$ con x entero positivo. Si en algún momento tiene el 900, debe ser $900 = x(a-1)+1$, es decir $899 = 29 \cdot 31 = x(a-1)$, luego los únicos valores posibles para $a-1$ son $1, 29, 31$ y 899, que corresponden respectivamente a los valores de $a = 2, 30, 32$ y 900. Todos ellos pueden lograrse. Si Diego comienza con $(2, 2, 2)$, reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercero igual a 2; el primero recorrerá los números impares de uno en uno desde 3 hasta llegar a 899, y el segundo recorrerá los números pares de uno en uno hasta llegar a 900.

$$(2,2,2) \to (3,2,2) \to (3,4,2) \to (5;4;2) \to \cdots \to (899,898,2) \to (899,900,2)$$

Si Diego comienza con $(30, 30, 30)$, reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercero igual a 30; el primero recorrerá los números de 58 en 58 a partir de 59 hasta llegar a 871, y el segundo recorrerá los números de 58 en 58 a partir de 30 hasta llegar a 900.

$$(30, 30, 30) \to (59, 30, 30) \to (59, 88, 30) \to \cdots \to (871, 842, 30) \to (871, 900, 30)$$

Si Diego comienza con $(32, 32, 32)$ reemplazando en cada operación alternadamente el primero y el segundo número, tendremos siempre el tercero igual a 32; el primero recorrerá los números de 62 en 62 a partir del 63 hasta llegar a 869, y el segundo recorrerá los números de 62 en 62 a partir de 32 hasta llegar a 900.

$$(32, 32, 32) \to (63, 32, 32) \to (63, 94, 32) \to \cdots \to (869, 838, 32) \to (869, 900, 32)$$

Obviamente si Diego comienza con $(900, 900, 900)$ puede obtener uno de los números igual a 900.

Día 2

1. Dado un polinomio de grado 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$ se define la función $S(p) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Determina el número real r tal que, para cualquier polinomio $p(x)$ de grado 2 y con raíces reales, se tiene que $S(p) \geq ra^2$.

   Solución:

   Sean r_1 y r_2 las raíces reales de $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces por

Vietta $b = -a(r_1 + r_2)$ y $c = ar_1r_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
S(P) &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\
&= a^2\left[(1 + r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2 + r_1r_2)^2 + (r_1r_2 - 1)^2\right] \\
&= 2a^2(r_1^2r_2^2 + r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2 + r_1 + r_2 + 1) \\
&= 2a^2\left[\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\left[\left(r_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \\
&\geq \frac{9}{8}a^2
\end{aligned}$$

De donde $r = \frac{9}{8}$.

2. Considera el paralelogramo $ABCD$. Se traza una circunferencia que pasa por A e interseca al lado AD en N, al lado AB en M y a la diagonal AC en P, siendo A, M, N, P puntos distintos. Prueba que $AP \cdot AC = AM \cdot AB + AN \cdot AD$.

Solución:

Como el cuadrilátero $AMPN$ es cíclico, aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene que

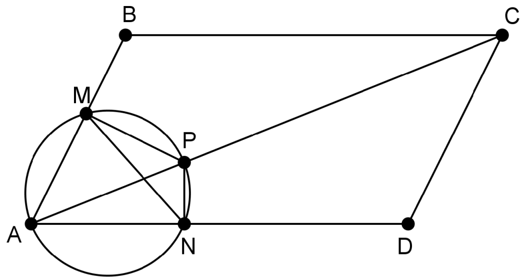
$$AP \cdot MN = AN \cdot PM + NP \cdot AM \tag{20}$$

Por otro lado $\measuredangle NPM = 180° - \measuredangle MAN = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle PNM = \measuredangle BAC$, concluyendo que los triángulos ABC y NPM son semejantes. Entonces $\frac{AB}{PN} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{PM}$ y sustituyendo en (20) queda $AP \cdot AC = AM \cdot AB + AN \cdot AD$.

3. Prueba que hay infinitos pares ordenados de números enteros positivos (m, n) tales que $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ es un entero positivo.

Solución:

Observemos que una solución es para $m = 1$ y $n = 2$. Si tenemos



una solución $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}=k$ con m y n enteros positivos diferentes y sin pérdida de generalidad $m<n$, entonces podemos escribir la igualdad como $k=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{m}+m+1\right)$ de donde obtenemos $kn=\frac{n(n+1)}{m}+m+1$ y como kn es un entero $m\mid n(n+1)$; consideremos que $r=\frac{n(n+1)}{m}$, entonces la expresión queda $k=\frac{1}{n}(r+m+1)=\frac{1}{n}\left(r+\frac{n(n+1)}{r}+1\right)=\frac{r+1}{n}+\frac{n+1}{r}$. Por lo tanto si el par (m,n) es solución, entonces el par (n,r) también y como $mr=n(n+1)$, tenemos que $mr>n^2>m^2$. De donde $n+r>n+m$. De esta forma para cualquier solución (m,n) con $m<n$, podemos generar una nueva solución (n,r) donde la suma de los elementos es mayor, por lo que hay infinitas soluciones diferentes.

4. Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(xy+f(x))=xf(y)+f(x)$ para todos los números reales x,y.

Solución:

Las funciones $f(x)=0$ y $f(x)=x$ satisfacen las condiciones. Veremos que son las únicas. Notemos que para $a,b\in\mathbb{R}$ si $f(a)=f(b)\neq 0$ entonces $a=b$ ya que

$$\begin{aligned}(a+1)f(a) &= af(b)+f(a)=f(ab+f(a))=f(ba+f(b))\\ &= bf(a)+f(b)=(b+1)f(b)\end{aligned}$$

Haciendo $x = y = 0$ queda $f(f(0)) = f(0)$, de donde $f(0) = 0$ porque si $f(0) \neq 0$ entonces $f(0) = 0$, contradicción. Sigue que

$$f(f(x)) = f(x \cdot 0 + f(x)) = xf(0) + f(x) = f(x)$$

Supongamos que f no es idénticamente nula, entonces existe $a \neq 0$ tal que $f(a) \neq 0$, pero como $f(f(a)) = f(a)$ entonces $f(a) = a$. Solo resta probar que el único valor donde f se anula es el cero. Para esto tomamos $x = a$ y $f(y) = 0$ en la ecuación original quedando

$$f(ay + a) = f(ay + f(a)) = af(y) + f(a) = f(a)$$

entonces $ay + a = a$, de donde $y = 0$.

5. Se tiene un tablero de 2008×2008 y 2008 fichas, una en cada fila y cada columna del tablero. Es permitido realizar uno de los siguientes movimientos:

   a) Dar dos pasos a la derecha y 10 hacia arriba.
   b) Dar dos pasos a la derecha y 6 hacia abajo.
   c) Dar dos pasos a la izquierda y 6 hacia arriba.
   d) Dar dos pasos a la izquierda y 10 hacia abajo.

   En caso de que no se pueda completar el camino hacia abajo se salta a la parte superior por la misma columna y se continúa el recorrido normalmente, análogamente en los otros sentidos. En cada jugada se va a mover una ficha utilizando cualquiera de las operaciones permitidas. ¿Será posible que en algún momento, después de un número finito de jugadas, las fichas estén ubicadas formando un cuadrado de lado 44 en la esquina superior izquierda del tablero y las 72 restantes estén en la última fila en las primeras 72 casillas?

   Solución:

   Si una ficha está en la casilla (i, j), donde la primera componente denota la fila y la segunda la columna, aplicando la operación $a)$ pasa a $(i-10, j+2)$, y vemos que $i-10+j+2 = i+j-8 \equiv i+j \ (mod\ 8)$. Por la segunda operación se pasa a la casilla $(i+6, j+2)$ y vemos que $i+6+j+2 = i+j+8 \equiv i+j \ (mod\ 8)$. Por la tercera operación se pasa a $(i-6, j-2)$ y vemos que $i-6+j-2 = i+j-8 \equiv i+j \ (mod\ 8)$. Por la cuarta operación se pasa a $(i+10, j-2)$ y vemos que $i+10+j-2 = i+j+8 \equiv i+j \ (mod\ 8)$. Cuando se salta a la parte superior, a la inferior, a la derecha o a la izquierda se conserva la congruencia módulo 8, puesto que $2008 \equiv 0 \ (mod\ 8)$. Luego cada ficha se mueve en cada jugada a una casilla que conserva la congruencia módulo 8 de la suma de los números que corresponden a su fila y columna, luego hay que analizar si la posición inicial y la final son congruentes módulo 8. En la posición inicial las fichas recorren por fila y columna todos los números desde 1 hasta 2008. Luego la suma de estos elementos es $2(1+2+\cdots+2008) = 2008 \cdot 2009 \equiv 0 \ (mod\ 8)$. En la posición final $44 \cdot 2 \cdot (1+2+\cdots+44) = 88 \cdot 22 \cdot 45 \equiv 0 \ (mod\ 8)$, $2008 \cdot 72 \equiv 0 \ (mod\ 8)$ y $1+2+\cdots+72 = 36 \cdot 73 \equiv 4 \ (mod\ 8)$. Luego la suma en la posición final es congruente con 4 módulo 8, por lo tanto es imposible.

6. Se tiene un triángulo ABC isósceles de base BC. Por el vértice A se traza una recta r paralela a BC. Los puntos P, Q están situados sobre la mediatriz de AB y AC respectivamente, tal que $PQ \perp BC$. M y N son puntos de la recta r tal que $\measuredangle APM = \measuredangle AQN = 90°$. Probar que $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \leq \frac{2}{AB}$.

   Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} AN &= \frac{AQ}{\cos\measuredangle QAN} \\ AM &= \frac{AP}{\cos\measuredangle PAM} \\ AP &= \frac{\frac{AB}{2}}{\cos(\measuredangle B - \measuredangle PAM)} \\ AQ &= \frac{\frac{AB}{2}}{-\cos(\measuredangle B + \measuredangle QAN)} \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} AN &= \frac{\frac{AB}{2}}{-\cos\measuredangle QAN\cos(\measuredangle B + \measuredangle QAN)} \\ AM &= \frac{\frac{AB}{2}}{\cos\measuredangle PAM\cos(B - \measuredangle PAM)} \end{aligned}$$

Entonces $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \leq \frac{2}{AB}$

$$\Leftrightarrow -2\cos\measuredangle QAN\cos(\measuredangle B + \measuredangle QAN) + 2\cos\measuredangle PAM\cos(B - \measuredangle PAM) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\cos\measuredangle B - \cos(\measuredangle B + 2\measuredangle QAN) + \cos(2\measuredangle PAM - \measuredangle B) + \cos\measuredangle B \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sin(\measuredangle PAM + \measuredangle QAN)\sin(\measuredangle B + \measuredangle QAN - \measuredangle PAM) \leq 1$$

claramente cierto.

7. Sean x, y reales positivos tales que $x^2 + y^2 + x \geq x^4 + y^4 + x^3$. Probar que $\frac{1-x^4}{x^2} \geq \frac{y^2-1}{y}$.

Solución:

Se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - x^2 &\geq x^2 - x^4 + x - x^3 \\ \Leftrightarrow 1 - x^4 &\geq x^4 - x^6 + x^3 - x^5 \\ \Leftrightarrow x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x^3 + 2x^2 + x + 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -y+\frac{1}{y} &\geq y^2-y^4 \\ \Leftrightarrow -y^2+1 &\geq y^3-y^5 \\ \Leftrightarrow y^5-y^3-y^2+1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (y-1)^2(y+1)(y^2+y+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

sumando tenemos $\frac{1}{x^2}-x^2-y+\frac{1}{y}\geq x^2-x^4+x-x^3+y^2-y^4\geq 0$, y con esto queda probada la desigualdad.

8. Sea ABC un triángulo acutángulo.

   a) Hallar el conjunto de puntos que son centros de los rectángulos cuyos vértices se encuentran sobre los lados de ABC.

   b) Determina si hay algún punto que es el centro de tres rectángulos diferentes cuyos vértices se encuentran sobre los lados de ABC.

Solución:

a) El conjunto es la unión de los tres segmentos cuyos puntos extremos son los puntos medios de cada uno de los lados y el punto medio de sus alturas relativas. Probaremos que cada rectángulo que tiene dos vértices sobre un lado, sean P y Q esos puntos situados sobre el lado AB, el vértice R está sobre BC y el vértice S está sobre AC. Dado que $RS \parallel AB$, determina completamente el rectángulo tan largo como su intersección con la altura CH, interior al rectángulo por ser acutángulo. Sea M' el punto medio de la altura CH, N el punto medio de RS y N' su proyección sobre AB, O el punto medio de NN' lo cual es también el centro del rectángulo. Por el teorema de Thales N está sobre la mediana CM. De forma similar en el triángulo CHM se prueba que O está sobre MM' por ser $CH \parallel NN'$. Dado cualquier punto O sobre MM' (diferente de uno de los extremos), sea N el punto de intersección de CM con la recta trazada desde O perpendicular a AB. La recta que pasa por N y es paralela a AB determina el rectángulo pedido.

b) Utilizando argumentos similares debe haber al menos un punto que satisface lo requerido. Sean K y L los puntos medios de AB y BC respectivamente, D, E y F los puntos medios de las alturas AG, BH y CI respectivamente. Por el teorema de Thales D, E y F están sobre el triángulo KLM donde KF, LD y ME son cevianas. De donde se obtiene que $\frac{KE}{EL} = \frac{AH}{HC}$ y de forma similar con D y F, llegando a obtener que $\frac{KE}{EL} \cdot \frac{LF}{FM} \cdot \frac{MD}{DK} = \frac{AH}{HC} \cdot \frac{BJ}{LA} \cdot \frac{CG}{GB}$. Utilizando el teorema de Ceva aplicado a las alturas de ABC, entonces KF, LD y ME son concurrentes.

9. Se quiere pintar todos los puntos del plano cuyas coordenadas son enteras, de manera que ningún rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados y vértices enteros del mismo color tenga área igual a una potencia de 2. Probar que es posible hacer esa coloración utilizando solamente dos colores.

Solución:

Pintemos de azul todos los puntos (x, y) tales que $x + y$ es múltiplo de 3 y de verde todos los otros puntos de coordenadas enteras y veamos que esta coloración cumple las condiciones pedidas.

Caso I: Consideremos un rectángulo cuyos vértices son todos azules. Sean (a, b) y (a, d) dos de estos vértices adyacentes. Entonces $a + b$ y $a + d$ son ambos múltiplos de 3 y $d - b$ es también un múltiplo de 3. Consecuentemente el área del rectángulo es un múltiplo de 3 por lo que no puede ser una potencia de 2.
Caso II: Consideremos un rectángulo R con todos los vértices verdes y cuya área sea una potencia de 2, designemos por $(a, b), (a, d), (c, b)$ y (c, d) los vértices de R y consideremos que $c > a$ y $d > b$. Como el área es una potencia de 2, existen p y q enteros no negativos tales que $c - a = 2^p$ y $d - b = 2^q$. Sea $x = a + b$, como los vértices son verdes,

entonces $x \neq 0$ $(mod\ 3)$. Notar además que

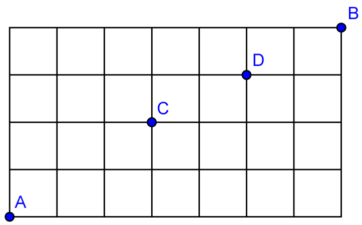
$$x + (-1)^p \neq 0\ (3) \text{ ya que} x + (-1)^p \equiv x + 2^p = b + c \neq 0\ (3)$$
$$x + (-1)^q \neq 0\ (3) \text{ ya que} x + (-1)^q \equiv x + 2^q = a + d \neq 0\ (3)$$

$x + (-1)^p + (-1)^q \neq 0\ (3)$ ya que $x + (-1)^p + (-1)^q \equiv x + 2^p + 2^q = c + d \neq 0\ (3)$ Ahora si $x \equiv 1(3)$ entonces $x + (-1)^p \equiv 2(3)$ y $x + (-1)^q \equiv 2(3)$ de donde p, q son pares y por tanto $x + (-1)^p + (-1)^q \equiv 0(3)$, contradicción. Si $x \equiv 2(3)$ entonces $x + (-1)^p \equiv 1(3)$ y $x + (-1)^q \equiv 1(3)$ de donde p, q son impares y entonces $x + (-1)^p + (-1)^q \equiv 0(3)$, nuevamente una contradicción.

Concurso Nacional (2009)

Día 1

1. Juan y Pedro juegan alternadamente sobre la cuadrícula dada. Cada



uno en su turno traza de 1 a 5 recorridos diferentes a los trazados anteriormente, que unan A con B, moviéndose únicamente a la derecha y hacia arriba sobre las líneas de la cuadrícula. Juan empieza jugando. Pierde el que trace un recorrido que pase por C o D. Prueba que uno de ellos puede ganar independientemente de como juegue el otro.

Solución:

La cantidad de caminos que no pasan ni por C ni por D son

$$C(A,B) - C(A,C,B) - C(A,D,B) + C(A,C,D,B)$$

que es igual a

$$\begin{aligned}
&= C(A,B) - C(A,C)\cdot C(C,B) - C(A,D)\cdot C(D,B) + \\
&+ C(A,C)\cdot C(C,D)\cdot C(D,B) \\
&= \binom{11}{4} - \binom{5}{2}\binom{6}{2} - \binom{8}{3}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1} \\
&= 102.
\end{aligned}$$

Debido a que en una cuadrícula de $m \times n$ la cantidad de caminos desde el extremo inferior izquierdo hasta el extremo superior derecho, yendo

para arriba y para la derecha es $\binom{m+n}{m}$, ya que son $m+n$ movidas en total, m para arriba, n para la derecha, y las puedes poner en el orden que sea.
102 es múltiplo de 6 así que el segundo jugador (Pedro) tiene estrategia ganadora. La estrategia es trazar $6-k$ caminos diferentes si el primer jugador (Juan) trazó k caminos en el turno anterior. De esa forma, siempre aumenta en 6 la cantidad de caminos trazados después del turno del segundo jugador. De esa forma el segundo jugador va a ser el que dibuja el último camino *bueno* , y entonces ya no hay más caminos *buenos* para que el primer jugador trace en su turno, y pierde Juan.

2. En el planeta Hidro habían 2008^2 hidras hace algún tiempo. Una de ellas tenía 1 tentáculo, otra 2, otra 3 y así sucesivamente hasta la última, con 2008^2 tentáculos. Desde entonces ha ocurrido lo siguiente: Si dos hidras se encuentran, se acoplan uniéndose tentáculo a tentáculo y de inmediato, los tentáculos acoplados desaparecen. Las hidras sin tentáculos mueren y a las sobrevivientes del acople les crecen 8 nuevos tentáculos, además de los que ya tienen. Ayer regresó de Hidro una expedición que capturó la última hidra viva, que tiene 23 tentáculos. ¿Será realmente esta la última hidra viva?

   Solución:

   Denotemos por S la suma de los tentáculos de todas las hidras. Después de un acople la paridad de S permanece invariante. Entonces al ser $1+2+3+\cdots+2008^2$ par y 23 impar, llegamos a la conclusión de que no es realmente la última hidra viva.

3. En cada casilla de un tablero $n \times n$ con $n \geq 2$, se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama *incaico* si para cada casilla, el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas (con un lado en común). ¿Para qué valores de n se pueden obtener tableros *incaicos*?

Solución:

Para n impar $n \geq 3$, es posible la distribución siguiendo uno de los siguientes modelos: donde cada 1 es igual a la diferencia de un 2 y un

Si n es de la forma $n = 4k + 1; k \geq 1$:

2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2

Figura 1

Si n es de la forma $n = 4k + 3; k \geq 0$:

2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1

Figura 2

1, cada -1 es igual a la diferencia de un 1 y un 2, y cada 2 es igual a la diferencia de un 1 y un -1.

Para n par, $n \geq 4$, es posible la distribución a partir de un tablero impar al que se le añade una fila a la derecha y una columna inferior, siguiendo uno de los siguientes modelos:

Si n es de la forma $n = 4k + 2; k \geq 1$, se parte del tablero de lado $(4k + 1)$

2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
-1	1	-2	-1	-1	1	-2	-1	-1	...	-1	1	-2	-1	3	2

Figura 3

Si es de la forma $n = 4k + 4; k \geq 0$, se parte del tablero de lado $(4k + 3)$:

2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	...	2	-1	2	-1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	...	-1	2	-1	2	-1	2
1	-2	-1	3	1	-2	-1	3	1	...	-1	3	1	-2	-1	3

Figura 4

Donde la fila y columna añadidas está formada por "paquetes" de cuatro casillas más algunas en la esquina inferior derecha. Para $n = 2$ no es posible construir tableros *incaicos*. Para probarlo, supongamos que existe el siguiente tablero incaico:

a	b
c	d

Como las casillas con los números a y d tienen solo dos casillas vecinas, $|a| = |d| = |b - c|$. Luego, $a = d$ o $a = -d$. También, $b = c$ o $b = -c$.

Si $a = d$, entonces $|c| = |a - d| = 0$, lo cual no es admisible, pues $c \neq 0$. Lo mismo sucede si $b = c$. Entonces, $a = -d$ y $b = -c$. De aquí, $|c| = |a - d| = 2\,|a|$ y $|a| = |c - b| = 2\,|c|$. Pero al resolver el sistema formado por $|c| = 2\,|a|$ y $|a| = 2\,|c|$ se obtiene $a = c = 0$ que tampoco es admisible.

Día 2

1. Demuestra que cuando un número primo se divide por 30, el resto es 1 o un número primo. Muestra que si se divide por 60 o por 90 no ocurre lo mismo.

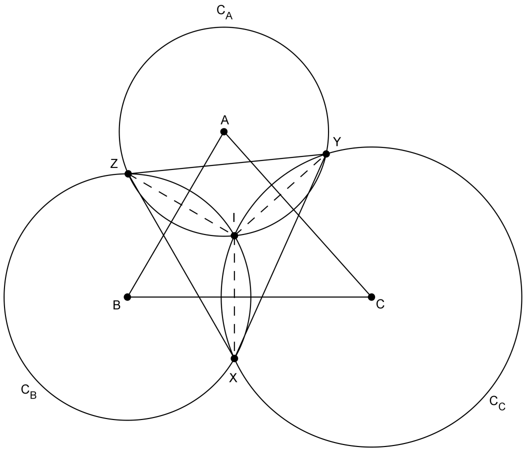
   Solución:

   Supongamos lo contrario, es decir, que al dividir por 30 el resto pertenece al conjunto $\{2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28\}$. Entonces este resto sería divisible por $2, 3$ o 5, contradicción con la primalidad al ser divisores de 30. Para la segunda parte considerar $109 = 60 \cdot 1 + 49$ y $139 = 90 \cdot 1 + 49$.

2. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. Sean $C_A(A, AI)$ la circunferencia de centro A y radio AI, $C_B(B, BI), C_C(C, CI)$ definidas de manera análoga. Sean X, Y, Z los puntos de intersección (diferentes de I) de C_B y C_C, de C_C y C_A, de C_A y C_B respectivamente. Muestra que si el radio de la circunferencia que pasa por los puntos X, Y, Z es igual al radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C entonces el triángulo ABC es equilátero.

   Solución:

   Trazamos IX, IY, IZ los cuales al ser ejes radicales serán perpendiculares a BC, CA, AB respectivamente. Entonces $IX = IY = IZ = 2r$ donde r es el inradio de ABC. Por las condiciones del problema se deduce que $R = 2r$ donde R es el circunradio de ABC. Entonces como $R \geq 2r$ (desigualdad de Euler) y tenemos igualdad, se llega a que ABC es equilátero.



3. Determina el menor valor de $x^2 + y^2 + z^2$, donde x, y, z son números reales, de modo que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

Solución:

Tenemos que

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1$$

de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x + y + z} + (xy + yz + zx)$$

entonces

$$(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{(x + y + z)^3 + 2}{3(x + y + z)} \geq 1$$

por desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica. Entonces el mínimo buscado es 1.

4. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:
$x + f(xf(y)) = f(y) + yf(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución:

Haciendo $x = 0$ se tiene que $f(0) = f(y) + yf(0)$, o equivalentemente $f(y) = f(0)(1 - y)$. Ahora haciendo $x = 1, y = 0$ obtenemos $1 + f(f(0)) = f(0)$, pero $f(f(0)) = f(0)(1 - f(0))$, al simultanear queda $f(0) = -1$ o $f(0) = 1$. En el primer caso $f(x) = x - 1$ que satisface la ecuación funcional original, y en el segundo caso $f(x) = 1 - x$ que no satisface la ecuación original.

5. Demuestra que existen infinitos enteros positivos n tales que $\frac{5^n-1}{n+2}$ es un entero.

   Solución:

   $n = 2p - 2$ con p primo y $p \geq 7$ satisface. La condición $n+2 \mid 5^n - 1$ se traduce en $2p \mid 5^{2p-2} - 1$. Claramente $5^{2p-2} - 1$ es par. Veamos ahora que es divisible por p.

   $$5^{2p-2} = 25^{p-1} \equiv 1(p)$$

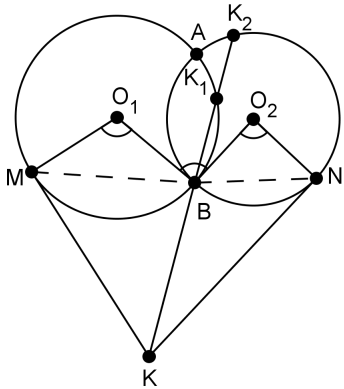
   por el pequeño teorema de Fermat.

6. Sean Ω_1 y Ω_2 circunferencias que se intersecan en los puntos A y B y sean O_1 y O_2 sus respectivos centros. Se toman M en Ω_1 y N en Ω_2 al mismo lado que B con respecto al segmento O_1O_2, tales que $MO_1 \| BO_2$ y $BO_1 \| NO_2$. Se trazan las tangentes a Ω_1 y Ω_2 por M y N respectivamente, que se intersecan en K. Demuestra que A, B y K son colineales.

   Solución:

   $\measuredangle MO_1B = \measuredangle O_1BO_2 = \measuredangle BO_2N = \alpha$ por ser alternos entre paralelas. Al ser $\triangle MO_1B$ y $\triangle BO_2N$ isósceles tenemos $\measuredangle O_1BM = \measuredangle O_2BN = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, de ahí que M, B, N están alineados. $\triangle KMN$ isósceles de base MN porque $\measuredangle KMN = \measuredangle KNM = 90^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Es decir,

$KM = KN$. Supongamos ahora que la prolongación de KB corta a Ω_1 en K_1 y a Ω_2 en K_2. Se cumple que $KM^2 = KB \cdot KK_1$ y $KN^2 = KB \cdot KK_2$, obteniéndose $KK_1 = KK_2$, en otras palabras, K, B, A están alineados.



7. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ reales positivos. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(2x_k - x_{k+1} - x_{k+2})}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq 0$$

En la sumatoria se han tomado índices cíclicos, es decir, $x_{n+1} = x_1$ y $x_{n+2} = x_2$.

Solución:

La desigualdad a probar es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\frac{x_{k+1}+x_{k+2}}{2}} \geq x_1 + \cdots + x_n$$

lo cual es cierto por la desigualdad de Bergstrőm.

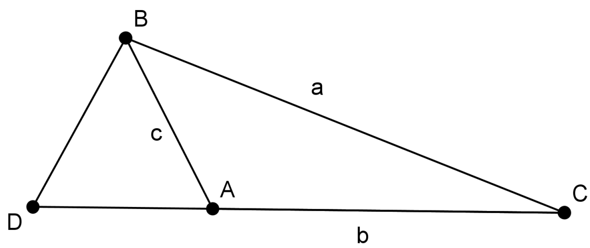
8. Sea ABC un triángulo isósceles de base BC y $\measuredangle BAC = 20°$. Sea D un punto en el lado AB tal que $AD = BC$. Determina $\measuredangle DCA$.

Solución:

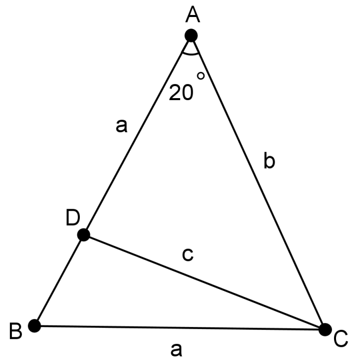
Comenzamos con el siguiente lema:

Lema: Si entre los lados a, b, c de un triángulo se cumple que $a^2 = b^2 + bc$ entonces $\measuredangle A = 2\measuredangle B$.

Demostración: Sea dado el triángulo ABC. Sobre la prolongación del lado AC trazamos $AD = c$. De la igualdad $a^2 = b^2 + bc$ se deduce $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$. Esto significa que los triángulos CAB y CBD son semejantes y $\measuredangle A = \measuredangle CBD$. Además, $\measuredangle B = \measuredangle BDA = \measuredangle DBA$. Por consiguiente, $\measuredangle A = \measuredangle B + \measuredangle DBA = 2\measuredangle B$. Retomando el problema original, sea



$BC = AD = a$ y $AC = b, CD = c$. Por la ley de los cosenos en el triángulo ADC tenemos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 20°$. Ahora probaremos que $c^2 = a^2 + ab$, lo cual por el lema aplicado al triángulo ADC garantiza que $\measuredangle DCA = 10°$. Veamos,



$$
\begin{aligned}
a^2+b^2-2ab\cos 20^\circ &= a^2+ab\\
\Leftrightarrow b &= a(1+2\cos 20^\circ)\\
\Leftrightarrow \frac{b}{a} &= 1+2\cos 20^\circ\\
\Leftrightarrow \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} &= 1+2\cos 20^\circ\\
\Leftrightarrow \sin 80^\circ &= \sin 20^\circ+\sin 40^\circ\\
\Leftrightarrow \sin 80^\circ &= 2\sin 30^\circ\cos 10^\circ\\
\Leftrightarrow \sin 80^\circ &= \cos 10^\circ
\end{aligned}
$$

y con esto queda probado que $\measuredangle DCA = 10^\circ$.

9. Halla todas las ternas de números primos (p, q, r) para las cuales se cumple que $p \mid 2qr + r$, $q \mid 2pr + p$ y $r \mid 2pq + q$.

Solución:

Si uno de los primos es 2, digamos p, entonces $p \mid (2q+1)r$ implica que $p = r = 2$ y $r \mid (2p+1)q$ implica que $r = q = 2$. Asumamos ahora que todos los primos son impares. Entonces $p \mid (2q+1)r$ implica que

$$1)p = r \quad 2)p = 2q + 1 \quad 3)p \mid (2q + 1) \quad y \quad p \leq \frac{2q + 1}{3}$$

Para q y r tenemos:

$$1)q = p \quad 2)q = 2r + 1 \quad 3)q \mid (2r + 1) \quad y \quad q \leq \frac{2r + 1}{3}$$
$$1)r = q \quad 2)r = 2p + 1 \quad 3)r \mid (2p + 1) \quad y \quad r \leq \frac{2p + 1}{3}$$

Dividamos el resto de la demostración en varios casos.

- i) Si al menos dos condiciones del tipo 1) se cumplen entonces $p = q = r$.
- ii) Si tenemos una condición de tipo 1), digamos $p = r$, entonces $r \mid (2p + 1)$ es imposible.
- iii) Si tenemos todas las condiciones de tipo 3) entonces

$$p \leq \frac{(2q + 1)}{3} \leq \frac{(4r + 5)}{9} \leq \frac{(8p + 19)}{27}$$

  es decir $p \leq 1$, lo cual es imposible.
- iv) Si se cumplen todas las condiciones de tipo 2) entonces $p = 2q + 1 = 4r + 3 = 8p + 7$, quedando $p = -1$ lo cual es imposible.
- v) Si tenemos una condición de tipo 2), digamos $p = 2q + 1$, y dos condiciones de tipo 3) entonces

$$q \leq \frac{(2r + 1)}{3} \leq \frac{(4p + 5)}{9} = \frac{(8q + 9)}{9}$$

  por tanto $q \leq 9$, lo cual implica que $q = 3, 5, 7$ y $p = 7, 11, 15$ y $r \mid 15, 23, 31$ y $q \mid 31, 47, 63$ lo cual es imposible.
- vi) Si tenemos una condición de tipo 3), digamos $p \mid (2q + 1)$ y $p \leq \frac{2q+1}{3}$, y dos condiciones de tipo 2), $q = 2r + 1, r = 2p + 1$, entonces p divide $2q + 1 = 4r + 3 = 8p + 7$

quedando $p = 7$ y $r = 15$ lo cual es imposible.

Concurso Nacional (2010)

Día 1

1. La combinación para abrir una caja fuerte es un número de cinco cifras diferentes, seleccionadas aleatoriamente del 2 al 9. Para abrir la caja fuerte se necesita además una llave que está rotulada con el número 410639104, que es la suma de todas las combinaciones que no abren la caja. ¿Cuál es la combinación que abre la caja fuerte?

   Solución:

   La suma S de todas las combinaciones posibles es un número de la forma $a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ donde

   $$a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = (2+3+\cdots+9)\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 44\cdot 840 = 36960$$

   por tanto $S = 36960(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 410662560$ y la combinación que abre la caja fuerte es $410662560 - 410639104 = 23456$.

2. Néstor le ordenó a Juan, realizar el siguiente trabajo: dibuja una circunferencia, traza uno de sus diámetros y marca los puntos extremos del diámetro con lo números 1 y 2 respectivamente. Sitúa 100 puntos en cada una de las semicircunferencias que determina el diámetro trazado (diferentes de los extremos del diámetro) y marca estos puntos aleatoriamente con los números 1 y 2. Para finalizar pinta de rojo todos los segmentos pequeños que tengan marcas diferentes en sus extremos. Al pasar cierto tiempo Juan terminó el trabajo y le dijo a Néstor "pinté 47 segmentos de rojo". Muestra que si Juan no cometió errores, es falso lo que dijo.

   Solución:

   Sea AB el diámetro y C_1 y C_2 las semicircunferencias. Denotemos por x el número de puntos de C_1 marcados con 1 y $100 - x$ los puntos marcados con 2. Sea y el número de puntos de C_2 marcados con 2 y

$100-y$ los puntos marcados con 1. Entonces la cantidad de segmentos rojos será:

$$\begin{aligned} N &= x(100-x)+y(100-y)+xy+(100-x)(100-y) \\ &+ 100-x+y+100-y+x \\ &= 10200-(x-y)^2 \end{aligned}$$

Si $N = 47$ tendríamos $(x-y)^2 = 10153$, lo cual es imposible ya que 10153 no es un cuadrado.

3. Un rectángulo de lados n y p está dividido en np cuadraditos unitarios. Inicialmente hay m cuadraditos unitarios pintados de negro y los restantes pintados de blanco. A continuación ocurre repetidamente el siguiente proceso: si un cuadradito unitario pintado de blanco tiene al menos dos lados en común con cuadraditos pintados de negro entonces su color también se torna negro. Encuentra el menor entero m que satisface la propiedad: existe una posición inicial de m cuadraditos unitarios negros tal que todo el rectángulo $n \times p$ se pinta de negro al repetirse el proceso un número finito de veces.

   Solución:

   Asumamos sin pérdida de generalidad que $n \leq p$. Coloquemos los cuadraditos negros en la diagonal principal del cuadrado $n \times n$ de la parte izquierda del rectángulo. Si $n < p$, entonces en el rectángulo $n \times (p-n)$ de la derecha, colocamos los cuadraditos negros en la última fila de la siguiente forma: se coloca un cuadrado negro en la última casilla, no se coloca en la penúltima, se coloca en la antepenúltima y así sucesivamente se va alternando. Sigue verificar que una posición inicial de este tipo conduce a que todo el rectángulo quede pintado de negro después de un número finito de operaciones. Si n y p son de la misma paridad, el número de cuadraditos negros en una posición inicial de este tipo es $m = n + \frac{p-n}{2} = \frac{n+p}{2}$, y si son de diferente paridad es $m = n + \frac{p-n+1}{2} = \frac{n+p+1}{2}$. Probemos ahora que un número menor de cuadraditos unitarios no pinta de negro todo el rectángulo.

El perímetro de la región pintada de negro es un semi-invariante respecto al proceso descrito en el problema, este permanece constante o disminuye. El perímetro máximo que se puede tener en cualquier posición inicial es $4m$ de donde si $m \leq \frac{n+p}{2} - 1$ o $m \leq \frac{n+p+1}{2} - 1$ se tiene $4m \leq 2n + 2p - 4 < 2n + 2p$ o $4m \leq 2n + 2p - 2 < 2n + 2p$, pero el perímetro de todo el rectángulo es $2n + 2p$.

Día 2

1. Determina todos los enteros a y b, tal que $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ sea una solución de la ecuación $x^2+ax+b=0$. Prueba que para tales a y b el número $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ no es solución de la ecuación dada.

   Solución:

   Note que $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}=\sqrt{1+2\sqrt{2009}+2009}=\sqrt{(1+\sqrt{2009})^2}=1+\sqrt{2009}$. De manera similar $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1$. Como $1+\sqrt{2009}$ es la solución de la ecuación cuadrática $x^2+ax+b=0$, tenemos $2010+2\sqrt{2009}+a(1+\sqrt{2009})+b=0$ ó $\sqrt{2009}(2+a)=-b-2010-a$, el miembro derecho es un entero, luego el izquierdo también tiene que serlo. Esto implica que $2+a=0$, entonces $a=-2$, y por tanto $b=-2008$. Las dos soluciones de la ecuación cuadrática $x^2-2x-2008=0$ son $1+\sqrt{2009}$ y $1-\sqrt{2009}$, luego $\sqrt{2009}-1$ no puede ser solución.

2. Sea $n=(p^2+2)^2-9(p^2-7)$ donde p es un número primo. Determina el menor valor de la suma de los dígitos de n y para qué número primo p se obtiene.

   Solución:

   Se tiene que $n=p^4-5p^2+4+63=(p^2-1)(p^2-4)+63=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+63$. Para $p=2, n=63$ y para $p=3, n=103$. Cuando $p\neq 3$ se tiene que los productos $(p-2)(p-1)$ y $(p+1)(p+2)$ son ambos múltiplos de 3 y n es un múltiplo de 9 por lo que la suma de los dígitos es múltiplo de 9. De aquí sigue que la menor suma es 4 y corresponde a $p=3$.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea D un punto tal que $BD\perp AC$ y $DC=AC$. Encuentra la razón $\frac{AD}{AB}$.

   Solución:

Sean $a = BC, b = CA, c = AB$ y $d = AD$. Por hipótesis $CD = CA = b$. Sea E la intersección de AC con BD. Como BD es perpendicular a AC, se tiene por el teorema de Pitágoras que: $d^2 - b^2 = AE^2 - EC^2 = c^2 - a^2$, luego $d^2 = c^2 + b^2 - a^2$. De nuevo por Pitágoras $b^2 - a^2 = c^2$. Luego $d^2 = 2c^2$ y entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{d}{c} = \sqrt{2}$.

4. Prueba que para todos los números reales positivos x, y se verifica la desigualdad $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$.

Solución:

Como $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ se tiene que $x^4 + 1 \geq 2x^2$ y similarmente como $y > 0, y^3 + y \geq 2y^2$, adicionando esas dos desigualdades tenemos $x^4+y^3+y+1 \geq 2x^2+2y^2$, lo cual implica que $x^4+y^3+x^2+y+1 \geq 3x^2+2y^2$, sólo resta probar que $3x^2 + 2y^2 > \frac{9}{2}xy$, aplicando la desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica obtenemos $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6}xy$, y como $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, se tiene lo deseado.

5. Sean $p \geq 2$ un número primo y $a \geq 1$ un entero distinto de p. Encuentra todos los pares (a, p) tales que $a + p \mid a^2 + p^2$.

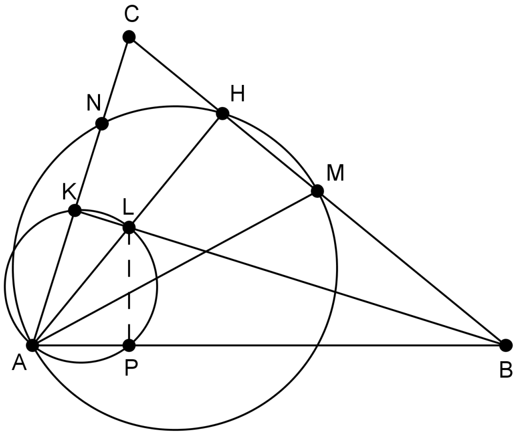
Solución:

Notemos que todos los pares $(a, p) = (p^2 - p, p)$ con $p > 2$ y $(a, p) = (2p^2 - p, p)$ cumplen las condiciones. Probemos que son los únicos. Como $a^2+p^2 = (a+p)^2 - 2ap$ se tiene que la condición dada es equivalente a que $a + p \mid 2ap$. Sea $a + p = d$ ó $a + p = dp$, donde d es un divisor de $2a$. En el primer caso, si $d = 2a$, se tiene que $a = p$, que no está permitido, si $d \leq \frac{2a}{q} \leq a$ es un divisor propio de $2a$ (aquí se considera que q es algún factor primo de $2a$) lo que es imposible ya que $a + p > a$. Así que sólo el segundo caso es posible, lo que conduce a que $a = p(d - 1)$. Pero d es un divisor de $2a = 2p(d - 1)$, y al ser d primo relativo con $d - 1$ tenemos que d es un divisor de $2p$, por lo que $d = 1, 2, p, 2p$. Si $d = 1, 2$ obtenemos que $a + p = p, 2p$ que conduce a que $a = 0$ ó $a = p$ que no son posibles y los casos $d = p, 2p$ nos llevan a las dos soluciones encontradas.

6. Sea ABC un triángulo acutángulo (con $AB \neq AC$) y M el punto medio de BC. La circunferencia de diámetro AM corta a AC en N y a BC otra vez en H. Se toma un punto K sobre AC (entre A y N) tal que $CN = NK$. Los segmentos AH y BK se intersectan en L. La circunferencia que pasa por A, K y L corta a AB en P. Demuestra que C, L y P son colineales.

   Solución:

   Como AM es diámetro de la circunferencia que corta a BC en H, tenemos que $\measuredangle AHM = 90°$. Por otro lado, la potencia de C respecto a la circunferencia de diámetro AM es $CM \cdot CH$, pero como M es punto medio de BC, se tiene que $\frac{BC \cdot CH}{2} = CN \cdot CA$ de donde $\frac{BC}{CA} = \frac{2CN}{CH} = \frac{CK}{CH}$. Equivalentemente, $CB \cdot CH = CK \cdot CA$, y por lo tanto el cuadrilátero $AKHB$ es cíclico. Como $\measuredangle AHM = 90°$, entonces $\measuredangle AKB = 90°$. Luego L es el ortocentro del triángulo ABC. Por último, como $AKLP$ es cíclico, por estar los cuatro vértices sobre la misma circunferencia, $\measuredangle APL = 90°$, de donde la recta PL debe ser altura de ABC, y por lo tanto, pasa por L. Por lo tanto C, L y P son colineales.



Comentario: Otra forma de probar que L es ortocentro del triángulo ABC es la siguiente: como $\frac{BM}{MC} = \frac{KN}{NC} = 1$ se tiene que BK es paralela a MN, por lo que BK es perpendicular a AC y entonces BK es altura.

7. Sean x, y, z números reales positivos tal que $xyz = 1$. Prueba que:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

Solución:

Observe que

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2-xy+y^2) \geq x^2+xy+y^2 \Leftrightarrow 2(x-y)^2 \geq 0$$

entonces

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \cdot (x+y) \geq \frac{1}{3}(x+y)$$

y usando estas desigualdades tenemos

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{2}{3}(x+y+z)$$

finalmente, por la desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica obtenemos

$$\frac{2}{3}(x+y+z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2\sqrt[3]{1} = 2$$

como se quería.

8. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo que cumple $AB < BC$, $AE < ED$ y $AB + CD + EA = BC + DE$. Se toman puntos variables F, G y H que se mueven respectivamente sobre los segmentos BC, CD y DE. Se definen B' como la proyección de B sobre AF, C' como la proyección de C sobre FG, D' como la proyección de D sobre GH y E' como la proyección de E sobre HA. Demostrar que existe al menos un cuadrilátero $B'C'D'E'$ cuando F, G y H se mueven sobre sus lados, que es un paralelogramo.

   Solución:

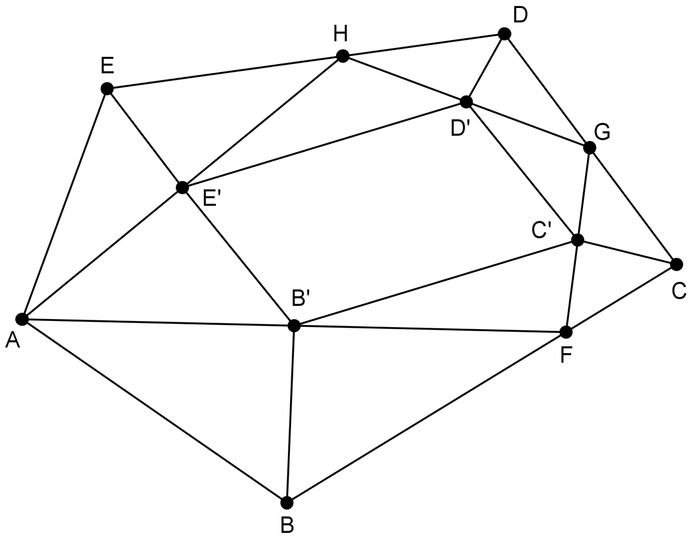
   Tomemos F sobre BC tal que $AB = BF$. Como $AB < BC$, garantizamos que F está en BC. Análogamente tomemos H sobre ED tal que $AE = EH$. Como $AE < ED$, H está en DE. De $AB + CD + EA = BC + DE$ se deduce que $CD = CF + DH$. Tomemos G en CD tal que $CG = CF$. Entonces también se cumplirá que $GD = DH$. Como los triángulos $\triangle BAF, \triangle CFG, \triangle DGH, \triangle EHA$ son isósceles, entonces B', C', D' y E' son respectivamente los puntos medios de AF, FG, GH y HA, por consiguiente $C'B' \parallel GA \parallel D'E'$ y $B'E' \parallel FH \parallel C'D'$, concluyendo que $B'C'D'E'$ es un paralelogramo.

9. Sea A el subconjunto de los números naturales tales que la suma de sus dígitos es múltiplo de 2009. Encuentra $x, y \in A$ tal que $y - x > 0$ es mínimo y x también es mínimo.

   Solución:

   Está claro que $y - x \geq 1$. Probemos que el mínimo es 1. Sea

$$x = u \cdot 10^n + 9 \cdot 10^{n-1} + \cdots + 9 \tag{21}$$



donde u es un entero no negativo cuya última cifra no es 9. Entonces $s(x) = s(u) + 9n$, donde $s(m)$ es la suma de los dígitos de m, y como $x + 1 = (u + 1)10^n$, se tiene que $s(x + 1) = s(u) + 1$. Por lo tanto bastará encontrar n tal que $9n \equiv 1(2009)$, y después encontrar cualquier u tal que $s(u) \equiv 2008(2009)$ y entonces x y $x+1$ pertenecen a A y su diferencia es 1. Como $9n \equiv 1(2009)$, se tiene que

$$n \equiv 893(2009) \tag{22}$$

Como cualquier número x se puede escribir de la forma (21) para algún n y u, con la condición (22) entonces $n = 893$ sirve. También se tomará u el menor entero cuyo último dígito no es 9 y $s(u) \equiv 2008(2009)$. Este mínimo es $u = 2999..,98$ donde el número de 9 consecutivos es 222. Por lo que $x = 299..,9899..,9$ donde el 9 aparece primero 222 veces y después del 8 aparece 893 veces. La suma de los dígitos de x es $10045 = 5 \cdot 2009$.

Concurso Nacional (2012)

Día 1

1. Se tienen 1000 bolas de masa $0,38$ y 5000 bolas de masa $0,038$ que deben empacarse en cajas. Una caja contiene una colección de bolas cuya masa total es a lo sumo 1. Hallar la menor cantidad de cajas que se necesitan.

   Solución:

   En cada caja hay $0, 1$ o 2 bolas de masa $0,38$ porque $3 \cdot 0,38 = 1,14 > 1$. En estos casos la caja puede contener a lo sumo

   $$\lfloor \frac{1}{0,038} \rfloor = 26, \quad \lfloor \frac{1-0,38}{0,038} \rfloor = 16, \quad \lfloor \frac{1-2\cdot 0,38}{0,038} \rfloor = 6$$

   bolas con masa $0,038$ respectivamente. Sean x_0, x_1 y x_2 la cantidad de cajas con cada una de las cantidades respectivamente, entonces $26x_0+16x_1+6x_2 \geq 5000$ y $x_1+2x_2 \geq 1000$. Multiplicando la segunda desigualdad por 10 y adicionándola con la primera se tiene $26(x_0 + x_1 + x_2) = 15000$ por lo que $x_0 + x_1 + x_2 \geq 576,9$ y como los tres son enteros $x_0 + x_1 + x_2 \geq 577$, entonces con 577 cajas es posible. Ahora $x_0 = 0, x_1 = 154$ y $x_2 = 423$. Entonces $x_0 + x_1 + x_2 = 577$; $x_1 + 2x_2 = 1000$ y $26x_0 + 16x_1 + 6x_2 = 5002 > 5000$. Estas relaciones muestran que con 577 cajas es suficiente.

2. En una escuela con 5 grados diferentes hay 250 hembras y 250 varones. Cada grado tiene la misma cantidad de estudiantes. Para una competencia de conocimientos quiere formarse equipos de una hembra y un varón que sean del mismo grado. Si en cada grado hay al menos 19 hembras y 19 varones. Hallar la mayor cantidad de equipos que pueden formarse.

   Solución:

Sean h_i y v_i la cantidad de hembras y de varones por cada grado $i, 1 \leq i \leq 5$. Consideremos por cada grado que $h_i + v_i = 100$ y la cantidad de equipos a formar por cada grado es el menor entre h_i y v_i, la cantidad de equipos a formar es la suma de los menores números que se tomen por cada grado, luego de esto tenemos que hay tres h_i o tres v_i que son menores. Consideremos sin pérdida de generalidad que estos son h_1, h_2 y h_3, entonces v_4 y v_5, ambos son mayores o iguales que 19 y como $h_4 + v_4 = h_5 + v_5 = 100$, cada uno de h_4 y h_5 es al menos $100 - 19 = 81$, entonces $h_1 + h_2 + h_3 = 250 - (h4 + h5) \geq 250 - 2 \cdot 81 = 88$. Como $h_i \leq v_i$, $1 \leq i \leq 3$, la cantidad de equipos en los grados $1, 2$ y 3 es $h_1 + h_2 + h_3$ es al menos 88. También al menos 19 equipos pueden formarse en cada uno de los grados 4 y 5, teniendo que $88 + 2 \cdot 19 = 126$ equipos que pueden formarse. Un ejemplo de cómo se formarían los equipos es $(h1, h2, h3, h4, h5) = (29, 29, 30, 81, 81)$ y $(v1, v2, v3, v4, v5) = (71, 71, 70, 19, 19)$.

3. En un tablero de 123×123, cada casilla es pintada de rojo o azul de acuerdo con las condiciones siguientes:

   a) Cada casilla pintada de rojo que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 5 casillas azules entre sus 8 casillas vecinas.

   b) Cada casilla pintada de azul que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 4 casillas rojas entre sus 8 casillas vecinas.

   Determina el número de casillas pintadas de rojo en el tablero.

   Solución:

   Observemos primero que $123 \cdot 123 = 9 \cdot 41^2$. Dividamos el tablero en 41^2 subtableros de 3×3 y analicemos que sucede en cada uno de ellos. Si la casilla central de un subtablero de 3×3 está pintada de azul, entonces a su alrededor hay 4 casillas rojas. Ahora, si la casilla central de un subtablero de 3×3 está pintada de rojo, entonces a su alrededor habrá 5 casillas azules, y por tanto, en dicho subtablero habrá 5 casillas azules y 4 rojas como aparece en el tablero. Por lo tanto, sin importar de que color esté pintada la casilla central de cualquier subtablero de 3×3 siempre hay 5 casillas azules y 4 rojas. Como hay 41^2 subtableros de 3×3, tenemos $5 \cdot 41^2 = 8405$ casillas azules y $4 \cdot 41^2 = 6724$ casillas rojas.

4. Con 21 fichas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3×7. Demuestra que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

   Solución:

   Colocaremos el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas. Asignaremos el dígito 0 al color blanco y el dígito 1 al color negro. De este modo cada fila representa un número escrito en base 2. Si dos números escritos en base 2 son iguales, sus filas forman un rectángulo. Luego, todas las filas han de representar números distintos en base 2. Observemos que si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo el negro, necesariamente habrá un rectángulo ya que no podemos colocar en ninguna fila dos fichas negras y sólo podemos llenar un máximo de 4 filas de las restantes sin que se forme un rectángulo. Por lo expuesto en el párrafo anterior, debemos excluir a los números 000 y 111. Ahora bien, existen $8 = 2^3$ números de tres dígitos escritos en base 2, pero quitando los anteriores quedan 6 y tenemos 7 filas, por lo que necesariamente hemos de repetir algún número y se formará un rectángulo.

Día 2

1. Si $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$ y $x_1+x_2+\cdots+x_{1006} = 503^2$, determina el valor de x_{1006}.

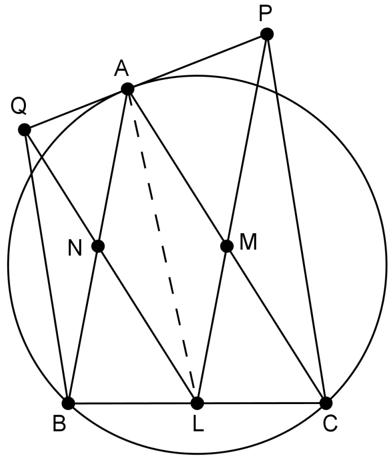
   Solución:

   Sean $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011} = a$. Como $\frac{x_k}{x_k+(2k-1)} = a$, entonces $x_k = \frac{a}{1-a}(2k-1)$ para $k = 1, 2, ..., 1006$. De donde se tiene $\frac{a}{1-a}(1+3+\cdots+2011) = 503^2$, pero $1+3+\cdots+2011 = 1006^2$, entonces $\frac{a}{1-a}1006^2 = 503^2$, por lo que $\frac{a}{1-a} = \frac{1}{4}$. Finalmente $x_{1006} = \frac{2011}{4}$.

2. Dado el triángulo ABC, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Las rectas LM y LN cortan respectivamente en P y Q a la tangente al circuncírculo en A. Demuestra que $CP \| BQ$.

Solución:

$\measuredangle QAB = \measuredangle ACB$ por ser semi-inscrito e inscrito en el mismo arco. $\measuredangle ACB = \measuredangle NLB$ por correspondientes entre paralelas. Luego el cuadrilátero $QALB$ es cíclico. Análogamente $PALC$ es cíclico. Con esto $\measuredangle QBL = \measuredangle LAP = 180° - \measuredangle LCP$, por lo tanto $CP \| BQ$.



3. Un profesor de matemática escribe en la pizarra una ecuación cuadrática de la forma $x^2+mx{\star}n = 0$, con m y n enteros. El signo de n está borroso. Aún así Claudia la resuelve y obtiene soluciones enteras, una de las cuales es 2011. Halla todos los posibles valores de m y n.

Solución:

Suponga primero que 2011 es una solución de la ecuación $x^2+mx+n =$

0. Sea a la otra solución de esta ecuación, y sean b y c las soluciones a la ecuación $x^2 + mx - n = 0$. Por las relaciones de Vietta en ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} a + 2011 &= -m \\ n &= 2011a \\ b + c &= -m \\ bc &= -n \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene que

$$bc = -2011a = 2011(2011 + m) = 2011(2011 - b - c)$$

o bien

$$(b + 2011)(c + 2011) = 2 \cdot 2011^2$$

Los divisores de $2 \cdot 2011^2$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 2011, \pm 2 \cdot 2011, \pm 2011^2, \pm 2 \cdot 2011^2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|b + 2011| \leq |c + 2011|$. Luego hay tres casos a considerar

$$\begin{aligned} b + 2011 = \pm 1, &\qquad c + 2011 = \pm 2 \cdot 2011 \\ b + 2011 = \pm 2, &\qquad c + 2011 = \pm 2011^2 \\ b + 2011 = \pm 2011, &\qquad c + 2011 = \pm 2 \cdot 2011 \end{aligned}$$

De donde salen los pares (m, n) siguientes:

$$\begin{aligned} (-1, 4042110) \\ (8045, -12138396) \\ (-4040101, 8120598990) \\ (4048145, -8144863716) \\ (-2011, 0) \\ (10055, -24264726) \end{aligned}$$

Considerando el caso en que 2011 sea solución de la ecuación $x^2 + mx - n = 0$ se obtienen las mismas soluciones con el signo invertido para n, y así concluye el problema.

4. Sean x, y, z reales positivos. Demuestra que:

$$\frac{xz}{x^2+xy+y^2+6z^2}+\frac{zx}{z^2+zy+y^2+6x^2}+\frac{xy}{x^2+xz+z^2+6y^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Solución:

Note que $a^2+ab+b^2 \geq 0$ para cualesquiera a y b reales. Así $(z-x)^2+(z-x)(z-y)+(z-y)^2 \geq 0$, y por lo tanto $x^2+xy+y^2+3z^2 \geq 3z(x+y)$. Esto implica que $x^2+xy+y^2+6z^2 \geq 3z(x+y+z)$ o lo que es lo mismo

$$\frac{xz}{x^2+xy+y^2+6z^2}\leq\frac{x}{3(x+y+z)}$$

Tomando la suma con las otras dos desigualdades similares se concluye la prueba.

5. Halla todos los pares (m, n) de enteros positivos tales que $m^2+n^2=(m+1)(n+1)$.

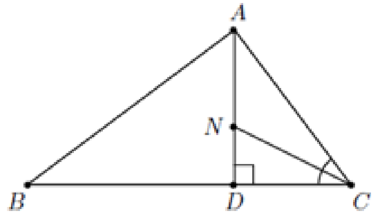
Solución:

La ecuación original se puede escribir como una cuadrática en m de la siguiente forma $m^2-(n+1)m+n^2-n-1=0$, cuyo discriminante $\Delta=-3(n-1)^2+8<0$ para $n \geq 3$, entonces para estos valores de n no hay solución real, y en particular no hay solución entera. Si $n=1$ o $n=2$ se obtienen las ecuaciones $m^2-2m-1=0$ y $m^2-3m+1=0$ ambas sin soluciones enteras.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y sea AD la altura relativa a la hipotenusa. Sea N la intersección de la bisectriz del ángulo de vértice C con AD. Demuestra que $AD \cdot BC = AB \cdot DC + BD \cdot AN$.

Solución:

Sean $BC=a, CA=b, AB=c$, como los triángulos ACD y ABC son semejantes, se tiene $\frac{b}{a}=\frac{AD}{c}=\frac{CD}{b}$ de donde $AD=\frac{bc}{a}$ y $CD=\frac{b^2}{a}$.



Entonces $BD = a - \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a}$. Como CN es bisectriz en el triángulo ADC queda

$$\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{AN + ND}{ND} = \frac{AC + CD}{CD} \Rightarrow \frac{\frac{bc}{a}}{ND} = \frac{b + \frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a}}$$

por tanto $ND = \frac{b^2 c}{a(a+b)}$. Sigue que $AN = AD - ND = \frac{bc}{a+b}$. Debemos probar entonces que

$$\frac{bc}{a} \cdot a = c \cdot \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \cdot \frac{bc}{a+b}$$

lo cual es equivalente a $a^2 = b^2 + c^2$, cierto por el teorema de Pitágoras.

7. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x^2 + f(y)) = y - x^2$ para todo x, y reales.

Solución:

Tomemos $x = 0$ en la ecuación dada, obteniendo $f(f(y)) = y$ para todo y real. De esta forma obtenemos que

$$f(y - x^2) = f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y) \quad \text{para todo} \quad x, y \quad \text{reales} \tag{23}$$

Tomando $y = x^2$ en (23) tenemos $f(0) = x^2 + f(x^2)$, que es $f(x^2) = -x^2 + f(0)$, tomando $y = 0$ en (23) tenemos $f(-x^2) = x^2 + f(0)$. Sea $c = f(0)$, entonces $f(x) = -x + c$ para todo x real. Es fácil verificar que todas las funciones de la forma $f(x) = -x + c$ satisfacen la condición del problema.

8. Si los números naturales a, b, c, d verifican las relaciones:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ab+cd)^2\\ (a^2+d^2)(b^2+c^2) &= (ad+bc)^2\end{aligned}$$

y el $mcd(a,b,c,d) = 1$, demostrar que $a+b+c+d$ es un cuadrado perfecto.

Solución:

Note que $(ab+cd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2 \geq (ad+bc)^2$, de la misma forma $(ad+bc)^2 \geq (ab+cd)^2$. Esto implica que $ad+bc = ab+cd$ y $ac = bd$. De la primera ecuación se sigue que $(a-c)(b-d) = 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = c$, entonces $a^2 = bd$. Como el máximo común divisor de a, b, c, d es 1, entonces b y d son coprimos, pues de lo contrario el divisor común también dividiría a y c. Esto implica que $b = r^2, d = s^2$ y $a = rs$, para algún par de enteros positivos r y s. De lo anterior se concluye que $a+b+c+d = (r+s)^2$ por lo que $a+b+c+d$ es un cuadrado perfecto.

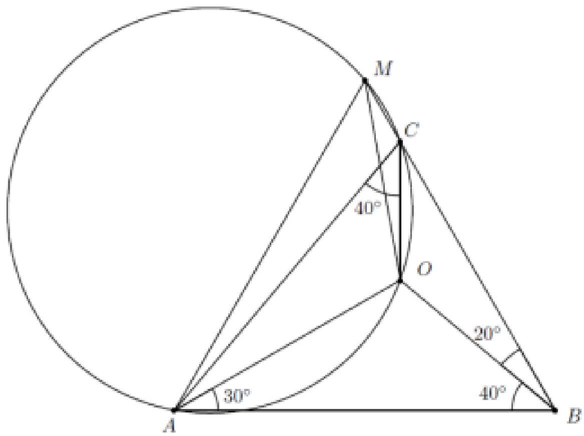
9. Sea O un punto interior al triángulo ABC tal que $\measuredangle BAO = 30°, \measuredangle CBO = 20°$ y $\measuredangle ABO = \measuredangle ACO = 40°$. Sabiendo que el triángulo ABC no es equilátero, halla las amplitudes de sus ángulos interiores.

Solución:

Observemos que $\measuredangle ABC = \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = 40° + 20° = 60°$. Sea M el punto en que la recta simétrica de AB respecto a AO corta a la recta BC, entonces $\measuredangle BAM = 60° = \measuredangle ABM$ y $\triangle ABM$ es equilátero. Es claro que M es el simétrico de B respecto a la recta AO, por tanto $\measuredangle AMO = \measuredangle ABO = 40°$ y $\measuredangle AOM = \measuredangle AOB = 110°$. Además, por ser O interior al $\triangle ABC$, los puntos C y B deben estar en semiplanos opuestos respecto a la recta AO, es decir que C y M deben estar en el mismo semiplano respecto a AO. Por lo tanto A, O, C y M son concíclicos. Como $M \neq C$ (ya que $\triangle ABC$ no es equilátero) sólo hay dos posibilidades:

I. Si C está en diferente semiplano que O respecto a la recta AM, entonces $\measuredangle ACM = 180° - \measuredangle AOM = 70°$. Pero $\measuredangle BAC > \measuredangle BAM = 60°$, y los ángulos del $\triangle ABC$ sumarían más de $180°$, absurdo.

II. Si C y O están en el mismo semiplano respecto a la recta AM, entonces $\measuredangle ACM = \measuredangle AOM = 110°$ y $\measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ACM = 70°$, de donde $\measuredangle BAC = 180° - (70° + 60°) = 50°$. Por lo tanto los ángulos del $\triangle ABC$ son $50°, 60°$ y $70°$.



Concurso Nacional (2013)

Día 1

1. Determine el menor entero $n \geq 2012$ para el cual es posible disponer 16 enteros consecutivos en un tablero de 4×4 de manera que, si se seleccionan 4 elementos de los cuales no haya dos en una misma fila ni en una misma columna, la suma de ellos sea siempre igual a n. Para el n hallado, muestre cómo llenar el tablero.

   Solución:

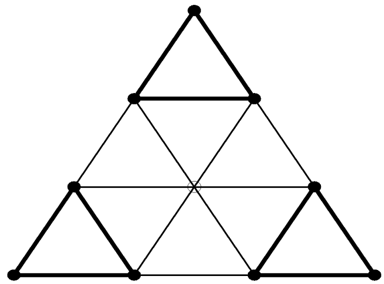
   Si es posible hacerlo entonces la suma de todos los elementos sería $4n$. Pero la suma de 16 enteros consecutivos es $a + (a+1) + \cdots + (a+15) = 8(2a+15)$. Igualando resulta que $4n = 8(2a+15)$, entonces $n = 4a + 30 = 4(a+7) + 2$. Es decir que n debe dejar resto 2 al dividirlo entre 4, lo que descarta a 2012 y a 2013. Para $n = 2014$ demos la distribución, notar que $a = \frac{2014-30}{4} = 496$:

496	497	498	499
500	501	502	503
504	505	506	507
508	509	510	511

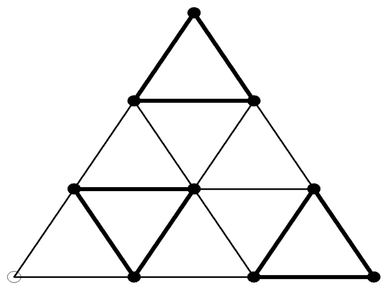
2. Un triángulo equilátero de lado 3 es dividido en 9 triángulos equiláteros pequeños iguales con lados de longitud 1. Cada vértice de triángulo pequeño (puntos negritos) es numerado con un número diferente del 1 al 10. Dentro de cada triángulo pequeño se escribe la suma de los números correspondientes a sus tres vértices. Demuestre que hay tres triángulos pequeños para los que se verifica que la suma de los números escritos en su interior es al menos 48.

   Solución:

Denotemos por c el número escrito en el centro. Si $c \leq 7$ entonces $55 - c \geq 48$ y tomamos los triángulos esquinas. Ahora si $c = 8, 9, 10$



entonces existe un vértice esquina menor o igual que 7, supongamos sin pérdida de generalidad (por la simetría) que es el vértice inferior izquierdo, entonces tomamos los triángulos sombreados como muestra la figura que tendrán suma al menos $55 - 7 = 48$:



3. Dos jugadores A y B sacan, por turnos, piedras de una pila de N piedras. Juegan en el orden $A,\ B,\ A,\ B,\ A, \ldots.$ A comienza el juego y pierde el que saca la última piedra. B puede sacar en cada jugada $1,\ 2$ o 3 piedras, mientras que A puede sacar en cada turno, $2,\ 3,\ 4$ piedras o 1 piedra en el caso de que sea la última del montón. Determinar para que valores de N tiene estrategia ganadora A , y para que

valores la estrategia ganadora es de B.

Solución:

Analicemos el juego para los primeros valores de N, construyendo una tabla en la que en cada casilla aparecerá un signo $+$, si al que le corresponde jugar tiene una estrategia ganadora y un signo $-$, si no tiene estrategia ganadora.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
B	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Como podemos observar la tabla es periódica de orden 5 y puesto que siempre comienza A, A tendrá una estrategia ganadora si N deja resto 3, 4 o 0 en la división por 5 y por el contrario B tendrá estrategia ganadora si N deja resto 1 o 2 en la división por 5.

Denotemos por N_i la cantidad de piedras después de la jugada i. Además, llamémosle posición ganadora a un valor de N_i para el cual A tiene una estrategia ganadora y posición perdedora si el que tiene la estrategia ganadora es B.

Para demostrarlo, mostraremos que para 5 números consecutivos de la forma $5k+3$, $5k+4$, $5k+5$, $5k+6$, $5k+7$, los tres primeros son posiciones ganadoras y los restantes posiciones perdedoras.

Como A comienza, si hay 1 o 2 piedras pierde porque tiene que cogerlas. Para $k=0$ los números son $3,\ 4,\ 5, 6,\ 7$. Es claro que $3,\ 4,\ 5$ son posiciones ganadoras pues A puede dejar exactamente una piedra en su primera jugada sacando $2,\ 3$ o 4 respectivamente. Ahora, sea $N_0 = 6, 7$, la primera jugada de A deja N_1 piedras donde $N_1 \geq 6-4 = 2$ y $N_1 \leq 7-2 = 5$. Si $N_1 = 2, 3, 4, 5$ entonces B saca $1, 1,\ 2,\ 3$ piedras, respectivamente, dejándole 1 o 2 piedras a A (posiciones perdedoras para A). En conclusión $6,\ 7$ son posiciones perdedoras.

El argumento es similar para una 5-upla $5k+3$, $5k+4$, $5k+5$, $5k+6$, $5k+7$, con $k \geq 1$. Si $N_0 = 5k+3$, $5k+4$, $5k+5$, A juega, respectivamente, 2, 3, 4 y le deja a B, $N_1 = 5k+1$ piedras. Ahora debe jugar B y a continuación A. La jugada de A puede ser desde 4 hasta 2 inclusive, de modo que él puede completar a 5 con cualquier jugada $1, 2, 3$ de B. Luego, al cabo de una ronda completa B, A; $N_3 = (5k+1) - 5$ piedras para B. Bastará que A repita el mismo procedimiento para que le deje a B, en algún momento, una piedra. Entonces las posiciones $5k+3$, $5k+4$, $5k+5$, son ganadoras.

Sea ahora, $N_0 = 5k+6$, $5k+7$. La primera jugada de A deja $N_1 = 5k+m$ piedras con $m = 2, 3, 4, 5$ entonces B juega, respectivamente $1, 1, 2, 3$ lo que deja $N_2 = 5k+n$ con $n = 1, 2$ piedras a A. En este caso es B el que puede completar 5 a la jugada de A llevando el juego a la posición $N_4 = 5\,(k-1)\,n$ con $n = 1, 2$. Es evidente que si B se mantiene jugando de la misma manera, eventualmente A encontrará 1 o 2 piedras en su jugada y perderá el juego. Luego las posiciones $5k+6$, $5k+7$ son posiciones perdedoras.

4. Un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, ..., 30\}$ es llamado *delicioso* si no contiene elementos a y b tales que $a = 3b$. Un subconjunto *delicioso* es llamado *superdelicioso* si además de ser *delicioso* se verifica que ningún subconjunto *delicioso* tiene más elementos de los que él tiene. Determine el número de subconjuntos *superdeliciosos.*

Soluciones:

Hagamos una partición del conjunto $\{1, 2, 3, ..., 30\}$ en 20 subconjuntos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \{1,3,9,27\}\,, \\ \{2,6,18\}\,, \\ \{4,12\}\,,\ \ \{5,15\}\,,\ \ \{7,21\}\,,\ \ \{8,24\}\,,\ \ \{10,30\}\,, \\ \{11\}\,,\ \ \{13\}\,,\ \ \{14\}\,,\ \ \{16\}\,,\ \ \{17\}\,,\ \ \{19\}\,,\ \ \{20\}\,, \\ \{22\}\,,\ \ \{23\}\,,\ \ \{25\}\,,\ \ \{26\}\,,\ \ \{28\}\,,\ \ \{29\}\,. \end{aligned}$$

Un subconjunto es delicioso, si y sólo si, no contiene dos elementos consecutivos de cualquiera de los 20 subconjuntos de la partición. Así, un subconjunto delicioso contiene a lo sumo 2 elementos de cada subconjunto en las dos primeras filas y a lo sumo 1 elemento de cada uno de los subconjuntos de las restantes filas. Por lo tanto, un subconjunto superdelicioso tiene exactamente 2 elementos de cada subconjunto de las dos primeras filas y 1 elemento de las filas restantes. Así hay

$$3 \cdot 1 \cdot 2^5 \cdot 1^{13} = 96$$

conjuntos superdeliciosos.

Note que hay 3 maneras de seleccionar dos elementos no consecutivos del conjunto $\{1, 3, 9, 27\}$, y una manera de seleccionar dos elementos no consecutivos del conjunto $\{2, 6, 18\}$.

5. Tres jugadores A, B y C sacan, por turnos, piedras de una pila de N piedras. Juegan en el orden A, B, C, A, B, C,.... A comienza el juego y pierde el que saca la última piedra. Los jugadores A y C forman equipo contra el B, ellos se ponen de acuerdo en una estrategia conjunta. B puede sacar en cada jugada 1, 2, 3, 4 o 5 piedras, mientras que A y C pueden sacar, cada uno, 1, 2 o 3 piedras en cada turno. Determinar para que valores de N tienen estrategia ganadora A y C , y para que valores la estrategia ganadora es de B.

Solución:

Analicemos el juego para los primeros valores de N, construyendo una tabla en la que en cada columna aparecerá un signo $+$, si al que le corresponde jugar tiene una estrategia ganadora y un signo $-$, si no tiene estrategia ganadora. Los signos para A y C corresponden a la estrategia conjunta si le toca jugar a A o C respectivamente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
B	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
C	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Como podemos observar la tabla es periódica de orden 7 y puesto que siempre comienza A, B tendrá una estrategia ganadora si N deja resto 0, 1, 5 o 6 en la división por 7 y por el contrario A y C tendrán estrategia ganadora si N deja resto 2, 3 o 4 en la división por 7.

Denotemos por N_i la cantidad de piedras después de la jugada i. Además, llamémosle posición ganadora a un valor de N_i para la que el equipo AC tiene una estrategia ganadora y posición perdedora si el que tiene la estrategia ganadora es B.

Para demostrarlo, mostraremos que para 7 números consecutivos de la forma $7k+2$, $7k+3$,..., $7k+8$, los tres primeros son posiciones ganadoras y los restantes posiciones perdedoras.

Para $k=0$ los números son $2,\ 3, ...,\ 8$. Es claro que $2,\ 3,\ 4$ son posiciones ganadoras pues A puede dejar exactamente una piedra en su primera jugada sacando $1,\ 2$ o 3 respectivamente. Ahora, sea $N_0 \in \{5,6,7,8\}$. La primera jugada de A deja N_1 piedras donde $N_1 \geq 5-3 = 2$ y $N_1 \leq 8-1 = 7$. Si N_1 es igual a $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ entonces B saca $5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$ piedras, respectivamente, dejándole una piedra a C. Si $N_1 = 7$ B juega 5 dejando dos piedras, pero ahora C y A tienen que jugar en ese orden y uno de ellos coge la última piedra. En conclusión $5,\ 6,\ 7,\ 8$ son posiciones perdedoras.

El argumento es similar para una 7-upla $7k+2$, $7k+3$,..., $7k+8$, con $k \geq 1$. Si $N_0 = 7k+2, 7k+3, 7k+4$, A juega, respectivamente, 1, 2, 3 y le deja a B $N_1 = 7k+1$ piedras. Ahora debe jugar B y después C y A, en ese orden. La jugada combinada de C, A puede ser desde 6 hasta 2 inclusive, de modo que ellos pueden completar a 7 con cualquier jugada $1, ..., 5$ de B. Luego, al cabo de una ronda completa B, C, A $N_4 = (7k+1) - 7$ piedras para B. Bastará para que A y C repitan el mismo procedimiento para que le dejen a B, en algún momento, una piedra. Entonces las posiciones $7k+2$, $7k+3$, $7k+4$ son ganadoras.

Sea ahora, $N_0 = 7k+5, 7k+6, 7k+7$. La primera jugada de A deja $N_1 = 7k+m$ piedras con $m = 2, 3, 4, 5, 6$ entonces B juega, respectivamente $1, 2, 3, 4, 5$ lo que deja $N_2 = 7k+1$ piedras al equipo AC (ahora juega primero C y después A). En este caso es B el que puede completar 7 a la jugada consecutiva de C, A llevando el juego a la posición $N_5 = 7\,(k-1)+1$. Es evidente que si B se mantiene jugando de la misma manera, eventualmente C encontrará una sola piedra en su jugada y perderá el equipo AC. Luego las posiciones $7k+5$, $7k+6$, $7k+7$ son posiciones perdedoras.

Por último, para $N_0 = 7k+8$. Si en su primera jugada, A juega 2 o 3, entonces B puede llevar la posición a $N_2 = 7k+1$ que ya vimos que hace que pierda el equipo AC. Si A juega 1, entonces B juega 5 y lleva a C a la posición $N_2 = 7k+2$ desde la cual puede dedicarse a completar 7 para cada jugada consecutiva C, A logrando que en algún momento C encuentre en su turno dos piedras, situación ya analizada. Consecuentemente, la posición $7k+8$ es también una posición perdedora.

6. 2013 personas corren una maratón por una carretera recta de $4m$ de ancho. En cierto momento, no hay dos corredores que estén a menos de $2m$ el uno del otro. Demuestre que hay dos corredores que en ese momento están a más de $1051m$ el uno del otro.

   Nota: Considere los corredores como puntos.

   Solución:

   Consideremos a los corredores como centros de círculos de $1m$ de radio, entonces los círculos están contenidos en un rectángulo de $6m$ por $(x+2)m$, donde x es la mayor distancia entre los corredores. Como no hay dos corredores que estén a menos de $2m$ el uno del otro, los círculos son disjuntos o tienen un único punto en común. Luego, el área del rectángulo es mayor que la suma de las áreas de los círculos

$$\begin{aligned} 6\,(x+2) &> 2013\pi \\ x &> \frac{2013\pi - 12}{6} \\ x &> 1051 \end{aligned}$$

y consecuentemente el primer corredor y el último están a más de $1051m$ el uno del otro.

Día 2

1. Cris tiene la ecuación $-2x^2 + bx + c = 0$, y Cristian aumenta los coeficientes de la ecuación de Cris en 1, obteniendo la ecuación $-x^2 + (b+1)\,x + (c+1) = 0$. Mariloli nota que las soluciones reales de la ecuación de Cristian son los cuadrados de las soluciones reales de la ecuación de Cris. Encuentre todos los valores posibles que pueden tomar los coeficientes b y c.

   Solución:

   Sean α y β las soluciones de la primera ecuación y α^2 y β^2 las soluciones de la segunda ecuación. Utilizando Vietta para el término independiente en cada ecuación obtenemos

$$\alpha\beta = -\frac{c}{2} \tag{24}$$

$$\alpha^2\beta^2 = -c-1 \tag{25}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \left(-\frac{c}{2}\right)^2 &= -c-1 \\ c^2+4c+4 &= 0 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

   y sustituyendo en (24), $\alpha\beta = 1$.

   Por las relaciones de Vietta para el coeficiente de la variable lineal en las dos ecuaciones

$$\alpha+\beta = \frac{b}{2} \tag{26}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = b+1 \tag{27}$$

elevando al cuadrado (26)

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{b^2}{4}$$

y como $\alpha\beta = 1$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2}{4} - 2$$

ahora, utilizando además (27)

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} - 2 &= b + 1 \\ b^2 - 4b - 12 &= 0 \end{aligned}$$

entonces $b = 6$ o $b = -2$, pero la ecuación de Cris no tiene soluciones reales si $b = -2$, por lo que los valores buscados son $b = 6$ y $c = -2$.

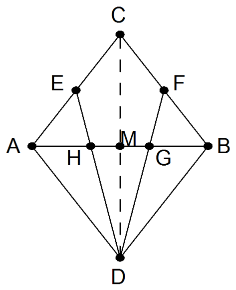
2. Dos triángulos isósceles iguales ABC y ADB, con C y D situados en semiplanos diferentes con respecto a la recta AB, comparten la base AB. Los puntos medios de AC y BC se denotan respectivamente por E y F. Demuestre que DE y DF dividen a AB en tres partes de igual longitud.

   Solución:

   Denotemos las intersecciones de DE, DF y CD con AB por H, G y M respectivamente. Consideremos ahora el triángulo ADC, en este triángulo DE y AM son medianas que se intersecan en H, por lo que $HM = \frac{1}{2}AH$ y de manera análoga $GM = \frac{1}{2}GB$. Además la figura es simétrica respecto a CD, con lo que queda probado que $AH = HG = GB$.

3. Encuentre todos los números naturales que son 300 veces la suma de sus dígitos.

   Solución:



Si el número buscado tiene $n+1$ dígitos entonces puede ser representado de la forma

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

donde los a_i $(i = 0, 1, ..., n)$ son dígitos y de acuerdo con la condición dada

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0 = 300 \left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right)$$

y de aquí que necesariamente $a_0 = a_1 = 0$ pues el número es múltiplo de 100, entonces, sustituyendo a_0 y a_1 por 0, y dividiendo por 100:

$$10^{n-2} a_n + 10^{n-3} a_{n-1} + \cdots + 10 a_3 + a_2 = 3 \left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2\right),$$

de donde

$$\left(10^{n-2} - 3\right) a_n + \left(10^{n-3} - 3\right) a_{n-1} + \cdots + 7 a_3 + (-2) a_2 = 0, \quad (28)$$

pero

$$-2a_2 \geq -18,$$

y consecuentemente

$$0 \leq \left(10^{n-2} - 3\right) a_n + \left(10^{n-3} - 3\right) a_{n-1} + \cdots + 7 a_3 \leq 18$$

por lo que todos los a_i con $i \geq 4$ son necesariamente ceros, y sustituyendo en (28)

$$7a_3 - 2a_2 = 0$$

que tiene como únicas soluciones $a_2 = 7,\ a_3 = 2$ o $a_2 = a_3 = 0$. Luego, los únicos números que satisfacen la condición dada son: 2700 y 0.

4. Decimos que un entero positivo es descompuesto si es primo y además si se traza una línea separándolo en dos números, esos dos números nunca son compuestos. Por ejemplo 1997 es descompuesto ya que es primo, se divide en: 1, 997; 19, 97; 199, 7 y ninguno de esos números es compuesto. ¿Cuántos números descompuestos hay entre 2000 y 3000?

   Solución:

   La respuesta es no. Supongamos por absurdo que $2000 \leq n \leq 3000$ es descompuesto. Ya que 3000 no es primo, podemos asumir que la cifra de los millares de n es 2.

   Los dígitos de las centenas, decenas y unidades no pueden ser pares ya que se formarían números pares al leerse desde el 2 de los millares. De la misma manera, los dígitos de las centenas, decenas y unidades no podrán ser 5. Así, quedan disponibles solamente los dígitos $1, 3, 7$ y 9. Como 21 y 27 son múltiplos de 3, el dígito de las centenas tendrá que ocuparse con un 3 o un 9. Sin embargo, los números $231, 237, 291$ y 297 son múltiplos de 3, por lo que las decenas solamente podrán ocuparse con 3 o 9. De la misma forma $2331, 2337, 2391, 2397, 2931, 2937, 2991$ y 2097 son todos múltiplos de 3 , por lo que el dígito de las unidades solamente podrá ocuparse con 3 o 9. En consecuencia los dígitos de las centenas, decenas y unidades son todos 3 0 9, por lo que el número que se forma con ellos es múltiplo de 3. Esto contradice la suposición de que n es descompuesto. Por tanto no existen números descompuestos entre 2000 y 3000.

5. Sean los números reales $a,\ b,\ c,\ d$ con $a \geq b$ y $c \geq d$. Demuestre que la ecuación

$$(x+a)(x+d) + (x+b)(x+c) = 0$$

tiene raíces reales.

Solución:

La ecuación es equivalente a

$$2x^2 + (a+b+c+d)x + ad + bc = 0$$

la cual tendrá raíces reales si y sólo si su discriminante

$$(a+b+c+d)^2 - 8(ad+bc) \geq 0$$

Pero en efecto esto se cumple ya que

$$(a+b+c+d)^2 - 8(ad+bc) = (a+b-c-d)^2 + 4(a-b)(c-d) \geq 0.$$

6. Sea ABC un triángulo de lados $BC = 13$, $CA = 14$ y $AB = 15$. Denotamos I al punto de intersección de las bisectrices y M al punto medio de AB. La recta IM corta en P a la altura trazada desde C . Hallar la longitud de CP.

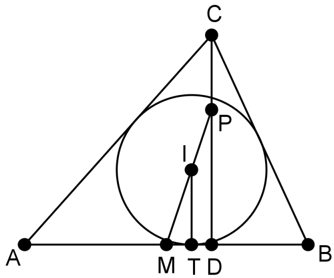
Solución:

El triángulo ABC es acutángulo ($15^2 < 14^2 + 13^2$) por lo que el pie de la altura trazada desde C es un punto D interior al lado AB. El simiperímetro del triángulo ABC es $\frac{1}{2}(AB+BC+CA) = 21$, entonces por la fórmula de Herón su área es

$$(ABC) = \sqrt{21\,(21-13)\,(21-14)\,(21-15)} = 84$$

De aquí $CD = \frac{2(ABC)}{AB} = \frac{56}{5}$. Ahora el triángulo rectángulo ACD conduce a $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{42}{5}$. Luego, $BD = AB - AD = \frac{33}{5}$. También podemos calcular el radio r de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC por la fórmula $(ABC) = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)\,r$ de donde $r = 4$.

Notemos que D está en el segmento BM, porque $BD < \frac{1}{2}AB$. Si T es el punto de tangencia de AB con la circunferencia inscrita, entonces $IT = r = 4$ y $IT \perp AB$, luego, $IT \parallel CD$. De modo que los triángulos IMT y PMD son semejantes. Calculemos TM y DM. $DM = BM - BD = \frac{1}{2}AD - BD = \frac{9}{10}$, para TM observamos primero que $BT = \frac{1}{2}(BC + AB - AC) = 7$, lo que significa que T pertenece al segmento MD (pues $BD < BT < BM$) y $TM = BM - BT = \frac{1}{2}AB - BT = \frac{1}{2}$. Ahora, la semejanza conduce a $\frac{DP}{TI} = \frac{DM}{TM}$, $DP = TI\frac{DM}{TM} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{2}}4 = \frac{36}{5}$. Finalmente, $CP = CD - DP = 4$.



7. Sean x, y , z números reales positivos cuya suma es 2013. Halle el máximo valor posible de

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)}$$

Solución:

El máximo buscado es 2013, ya que se cumple

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)} \leq x+y+z$$

usando la desigualdad de Muirhead con igualdad si $x = y = z = \frac{2013}{3}$. Veamos la demostración. Queremos probar que

$$(x+y+z)(x^4+y^4+z^4) \geq (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$$

abriendo paréntesis esto es equivalente a

$$x^4y+x^4z+y^4x+y^4z+z^4x+z^4y \geq x^3y^2+x^3z^2+y^3x^2+y^3z^2+z^3x^2+z^3y^2$$

lo cual es consecuencia de la desigualdad de Muirhead porque $[4,1,0] \succ [3,2,0]$, notar que

$$\begin{aligned} 4+1+0 &= 3+2+0=5 \\ 4+1 &= 3+2 \\ 4 &> 3. \end{aligned}$$

Solución alternativa:

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow xy(x+y)(x-y)^2+xz(x+z)(x-z)^2+yz(y+z)(y-z)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Demuestre que existen infinitos pares (a,b) de números enteros positivos con las propiedades siguientes: $a+b$ divide a $ab+1$, $a-b$ divide a $ab-1$, $b>2$ y $a>b\sqrt{3}-1$.

Solución:

Observe que: $b^2-1 = b\,(a+b)-(ab+1)$ y $b^2-1 = b\,(a-b)-(ab-1)$. Por lo tanto, $a+b$ y $a-b$ dividen ambos a b^2-1. Así, el $mcm\,(a+b,a-b)$ divide a b^2-1 . Puesto que ambos son positivos $mcm\,(a+b,a-b) \leq b^2-1$.

Sea $d = mcd\,(a,b)$. Entonces $d \mid ab$ y $d \mid a+b \mid ab+1$. Por lo tanto $d \mid 1$ mostrando que $d=1$. Si $e = mcd\,(a+b,a-b)$, entonces $e \mid 2a$ y $e \mid 2b$ así que $e \mid mcd\,(2a,2b)$. Pero $mcd\,(2a,2b) = 2mcd\,(a,b) = 2$. Así $e \mid 2$ y consecuentemente $e \leq 2$. Por lo tanto

$$mcm\,(a+b,a-b) = \frac{(a+b)\,(a-b)}{mcd\,(a+b,a-b)} \geq \frac{a^2-b^2}{2}$$

siguiendo que $a^2-b^2 \leq 2\left(b^2-1\right)$ o $a^2-3b^2 \leq -2$.

Supongamos que a y b son enteros positivos tales que $a^2 - 3b^2 = -2$. Entonces a y b tienen la misma paridad. Para tal par (a, b) tenemos,

$$\begin{aligned} ab+1 &= ab + \frac{3b^2 - a^2}{2} = (a+b)\,\frac{3b-a}{2}, \\ ab-1 &= ab - \frac{3b^2 - a^2}{2} = (a-b)\,\frac{a+3b}{2}. \end{aligned}$$

Por cosiguiente $a+b \mid ab+1$ y $a-b \mid ab-1$. También observamos que

$$\sqrt{3}b = \sqrt{a^2+2} < \sqrt{a^2+2a+1} = a+1,$$

así que $a > \sqrt{3}b - 1$.

Busquemos las soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2 - 3y^2 = -2$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones que pueden ser descritas como sigue:

La ecuación $x^2 - 3y^2 = -2$ tiene una solución particular $(1, 1)$. Consideremos la ecuación $x^2 - 3y^2 = 1$. Esta tiene infinitas soluciones (u_n, v_n) dadas por la expresión

$$u_n + \sqrt{3}v_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n.$$

Sean $a_n = u_n + 3v_n$ y $b_n = u_n + v_n$. Entonces

$$a_n^2 - 3b_n^2 = -2\left(u_n^2 - 3v_n^2\right) = -2$$

Para $n \geq 1$ obtenemos $b_n > 2$.

9. Sea ABC un triángulo con $\measuredangle A = 90^\circ, \measuredangle B = 75^\circ$ y $AB = 2$. Los puntos P y Q de los lados AC y BC respectivamente, son tales que $\measuredangle APB = \measuredangle CPQ$ y $\measuredangle BQA = \measuredangle CQP$. Calcular la medida de QA.

Solución:

Reflejamos el triángulo por la recta AC y obtenemos el triángulo congruente ADC. Es claro que D pertenece a la prolongación de BA más allá de A pues $\measuredangle A = 90°$, y entonces $AD = AB = 2$. Si R es el simétrico de Q entonces $\measuredangle CPR = \measuredangle CPQ$. Como $\measuredangle APB = \measuredangle CPQ$ y A, P y C son colineales entonces B, P y R son colineales. La simetría también nos da que $\measuredangle DRA = \measuredangle CRP$.

A continuación reflejamos el triángulo ADC en la recta CD y obtenemos el triángulo rectángulo CDE donde E es el simétrico de A. Ahora, $\measuredangle DRE = \measuredangle DRA$ por la simetría. Como $\measuredangle DRA = \measuredangle CRP$ y C, R y D son colineales entonces P, R y E también son colineales.

En resumen, los puntos B, P, R y E están sobre una recta, y la simetría nos da que $PQ = PR$, $AQ = AR = RE$, $AD = DE = AB = 2$ y $\measuredangle ADC = \measuredangle EDC = \measuredangle ABC = 75°$. De modo que si EF es la perpendicular trazada por E a BD entonces $\measuredangle EDF = 30°$. Luego, en el triángulo rectángulo EDF con $\measuredangle EDF = 30°$ y $DE = 2$, $EF = 1$ y $DF = \sqrt{3}$. Entonces $BF = BD + DF = 4 + \sqrt{3}$ y

$$BE = \sqrt{BF^2 + FE^2} = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$$

Observemos que DR es la bisectriz interior del ángulo BDE en el triángulo BDE, y además $BD = 4$ y $DE = 2$. Luego

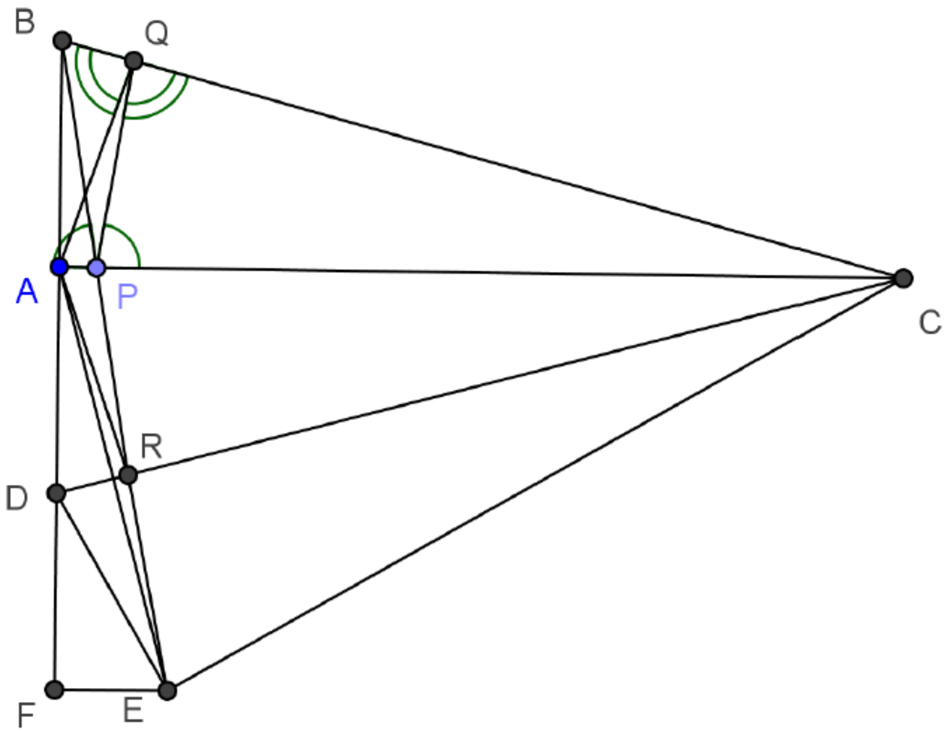
$$\frac{BR}{RE} = \frac{BD}{DE} = 2$$

lo que muestra que

$$RE = \frac{1}{3}BE = \frac{2}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$$

y en consecuencia

$$AQ = RE = \frac{2}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$$


B
Q
A
P
C
R
D
F
E

Este es el segundo volumen de la colección Resolución de Problemas. En este aparecen recopilados los Concursos Nacionales de Matemática durante el período (2000 - 2013). El autor ha llevado a cabo un trabajo minucioso con las soluciones de cada problema, las oficiales han sido mejoradas en algunos casos y en otros se han tenido que resolver nuevamente los problemas, algunos muy difíciles y desafiantes.

El autor es Licenciado en Matemática por la Universidad de La Habana. Después de graduarse se ha especializado en Resolución de Problemas. Tiene varias publicaciones sobre este tema y contribuciones en la Revista Escolar OIM, Cabri y Mathematical Reflections (de la cual fue editor asistente). Ha impartido conferencias en Metroplex Math Circle (EE.UU). Medallista de Bronce en la Olimpiada Iberoamericana Universitaria de Matemáticas y entrenador invitado en la preselección cubana.