Tema I
Espacios y subespacios vectoriales

Conferencia 2:
Combinación lineal de un sistema de vectores. Subespacio generado.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Sumario:

- ✓ Combinación lineal de vectores de un sistema finito e infinito
- ✓ Subespacio generado por un sistema de vectores.

Bibliografía

Álgebra. Tomo I. Págs. 26-38.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Combinación lineal

En Introducción al Álgebra Lineal vimos que resulta importante combinarlas operaciones de suma y producto de un escalar por un elemento de conjuntos tales como $\mathbb{K}^n$ y $M_{nxm}(\mathbb{K})$ (que ahora conocemos son espacios vectoriales sobre K para dichas operaciones).

Recordemos que un vector fila (o columna) de una matriz resulta superfluo en el análisis del rango de ésta, si puede expresarse como combinación lineal de las restantes filas (o columnas).

Combinación lineal

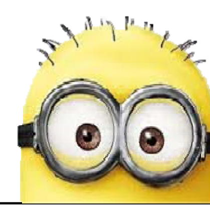
Definición: Sea E e.v. sobre $\mathbb{K}$ se denomina **sistema de vectores** de E, a toda secuencia ordenada de vectores de E.

Nota: En un sistema de vectores pueden existir elementos repetidos.

Definición: Sea E e.v sobre $\mathbb{K}$, $(v_1,...,v_n)$ un sistema finito de vectores de E y $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ una familia de escalares de $\mathbb{K}$. Se denomina **combinación lineal** del sistema de vectores $(v_1,...,v_n)$ con los escalares $(\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{K})$ a la expresión:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

λ_i coeficientes de la combinación lineal.



Combinación lineal

Ejemplos:

1. En $(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}, +, \cdot)$ siendo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ dado el sistema $S = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ cualquier elemento $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{K}^3$ satisface que:

En general, en $E = \mathbb{K}^n$, dado el sistema de vectores:

$$S = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

Se tiene que cualquier elemento $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de $\mathbb{K}^n$ satisface:

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Combinación lineal

Ejemplos:

2. En $\left(M_2(\mathbb{C}),\mathbb{R},+,\cdot\right)$ tomemos el sistema:

$$S=\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1+2i & 3\end{pmatrix}\right)$$

Podemos formar la c.l.

Combinación lineal

Ejemplos:

3. En $E=\mathbb{R}_n[x]$ consideremos el sistema:

$$S=(1,x,x^2,\ldots,x^{n-1}),$$

de polinomios homogéneos, se tiene que cualquier polinomio: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$,

4. En $E=F\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ consideremos el sistema:

$$S=(\cos^2 t,\operatorname{sen}^2 t),$$

la función $f(t)=1$ es c.l. del sistema.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Combinación lineal

Ejemplos:

5. En $(\mathbb{C},\mathbb{R},+,\cdot)=\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ consideremos el sistema: $S=(1,i)$, se tiene que cualquier $z=a+bi$, de $\mathbb{C}$ como R-espacio, resulta c.l. del sistema.

6. En $E=\mathbb{K}^n$ recordemos la combinación lineal trivial de un sistema $S=(v_1,v_2,\ldots,v_m)$:

$0v_1+0v_2+\ldots+0v_m$ cuyo resultado es el vetor nulo de .

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Combinación lineal

Combinación lineal de una familia infinita de vectores:

Definición: Dada una familia de vectores $S=(v_i)_{i\in I}$ de un K-espacio vectorial E, llamamos combinación lineal (c.l.) de los vectores de la familia S a toda expresión del tipo:

$$\sum_{i\in I}\alpha_i v_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{K}, \forall i \in I$ son coeficientes cero excepto un número finito de ellos.

Combinación lineal

Combinación lineal de una familia infinita de vectores:

Ejemplos:

En $E = \mathbb{R}[x]$, consideremos la familia:

$$S = (x^i)_{\forall i \in \mathbb{Z}_+} = (1, x, x^2, ..., x^n, ...)$$

El polinomio $p(x) = 1 + 2x + x^2$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + ... + 0 \cdot x^n + ...$$

Combinación lineal

Combinación lineal de una familia infinita de vectores:

Como puede verse, existe una correspondencia biunívoca entre el polinomio p(x) y la sucesión de sus coeficientes:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \sim (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots) \sim \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Subespacio generado

Del concepto de subespacio, conocemos que en $E=\mathbb{R}^3$, dos de sus subespacios son $\left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$ y $\mathbb{R}^3$.

Notemos que, salvo el subespacio trivial nulo, ningún otro s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ puede estar formado por un solo vector, pues por la segunda condición de subespacio…

(El análisis anterior es válido para todo e.v. E)
Entonces puede asegurarse que el menor subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\overline{x}$ no nulo es: $\left\{\alpha\overline{x}, \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}_{\overline{x}}$
Es decir, la recta generada por el vector $\overline{x}$ de $\mathbb{R}^3$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Subespacio generado

Análogamente, si $\overline{x}, \overline{y} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ y son no proporcionales, el menor subespacio que los contiene es:

$$\left\{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_{\overline{xy}}$$

Es decir, el plano generado por estos vectores.

Consideremos ahora un sistema $S = \left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$ de un K-espacio vectorial E.

Veamos cómo encontrar el menor subespacio que contiene a S.

Subespacio generado

Ejemplo 8:

$$E = M_2(\mathbb{R}) \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

continuación ejemplo 8

¿Podrá escribirse cualquier vector de $M_2(\mathbb{R})$ como combinación lineal de los vectores de S?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar α, β, γ tales que el siguiente sistema sea compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{rg}(A) = 3$

$\text{rg}(A|b) = 4$

$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$

El sistema es incompatible

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

continuación ejemplo 8

¿Cuáles son todos los vectores que se pueden obtener como combinación lineal de S ?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c, d tales que el siguiente sistema **siempre** resulte compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

continuación ejemplo 8

Hallar a, b, c, d tales que el siguiente sistema **siempre** resulte compatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & d-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-b+a \\ 0 & 0 & 1 & d-b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-b+a \\ 0 & 0 & 0 & -a-c+d \end{array}\right)$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : -a-c+d = 0;\ a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Es fácil verificar que $V \subset_S M_2(\mathbb{R})$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Subespacio generado

Lema: Dado un sistema finito de vectores $S=\{v_1,...,v_n\}$ de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ entonces:

$$V=\left\{v\in E\,/\,v=\sum\lambda_i v_i,\ \forall\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}\right\}$$

es un s.e.v. de E y cualquier otro s.e.v. de E que contenga a S también contiene a V.

Notación: $L[S]$**(subespacio generado por** S**)**

$$L[S]=\left\{v\in E\,/\,v=\sum\lambda_i v_i,\ \forall\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}\right\}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Demostración:

$L[S] \subseteq_S E$

1. $0v_1 + \ldots + 0v_n = 0_E \in L[S] \Rightarrow L[S] \neq \varnothing$

2. $u, w \in L[S] \Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$

$$\alpha u + \beta w = \alpha(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + \beta(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)v_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)v_n$$
$$= \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n \Rightarrow \alpha u + \beta w \in L[S]$$
$$\Rightarrow L[S] \subseteq_S E$$

Quedando demostrando que V es el menor subespacio de E que contiene a S, pues si un s.e.v. contiene a un sistema de vectores, también contiene a sus combinaciones lineales.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Ejemplo 9: $E=\mathbb{R}_4[x] \quad S=\left\{x^2+1,\ x+1,\ x^2-x\right\}$

$$L[S]=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_4[x]\,/\,\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R},\ p(x)=\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x+1)+\alpha_3(x^2-x)\right\}$$

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 1 & -1 & -b+d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -b-c+d \end{array}\right)$$

Condiciones de compatibilidad

$$L[S]=\left\{ax^3+bx^2+cx+d\,/\,a=0\wedge -b-c+d=0, b, c, d\in\mathbb{R}\right\}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

¿Existirá algún vector en el sistema que no aporte información?

¿Existirá algún vector del sistema que se pueda obtener a partir del resto?

Para el ejemplo anterior:

$$x^2 - x = 1(x^2 + 1) - 1(x + 1)$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

¿De qué hemos hablado hoy?

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Estudio individual

Verifique que el subespacio generado por:
$u=(1,0,-1,-2)$ y $v=(0,1,2,3)$ de $\mathbb{K}^4$, coincide con el conjunto solución del SEL dado por las ecuaciones:

$$x-2y+z=0,\ -2x+3y-t=0,\ \ y-2z+t.$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.