Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Ejercicios Resueltos 3

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Empleando razonamientos similares a los expuestos para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ¿podrías hallar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$?

Respuesta

Del álgebra elemental se conoce la descomposición

$$1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 = (1 - a_1x)(1 - a_2x)(1 - a_3x),$$

donde $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$ y $\frac{1}{a_3}$ son las raíces del polinomio, que además cumplen la relación:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 \tag{0.1}$$

En segundo lugar veamos cuáles son los desarrollos en serie de las funciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots \\ \frac{\operatorname{senh} x}{x} &= 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} \dots \end{aligned}$$

Además se conoce que las raíces de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ son $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ...
y las raíces de $\frac{\operatorname{senh} x}{x}$ son $\pm i\pi$, $\pm 2i\pi$, $\pm 3i\pi$, ...

Si se asume que estas funciones se pueden escribir en forma de "polinomio *infinito*", como los productos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{senh} x}{x} &= \left(1+\frac{x}{i\pi}\right)\left(1-\frac{x}{i\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2i\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2i\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3i\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3i\pi}\right)\dots\\ &= \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots\end{aligned}$$

Entonces se puede obtener:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{senh} x}{x} &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots\\ &= \left(1-\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{81\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{256\pi^4}\right)\dots\end{aligned}$$

La representación como "polinomio *infinito*" es

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1 - x^4\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!3!}+\frac{1}{5!}\right)+\dots$$

De donde usando la generalización de la relación (0.1) (y reemplazando x por x^4), se obtiene:

$$\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{16\pi^4}+\frac{1}{81\pi^4}+\frac{1}{256\pi^4}+\dots = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{120}+\frac{1}{120}-\frac{1}{36} = \frac{1}{90}$$

Por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Ejercicio 2

Calcula las sumas:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Respuesta

a) Consideremos las sumas parciales de la serie hasta el $k-$ésimo término

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k} \frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k} \left[\frac{(n+1)}{(n+1)(n-1)}\right] - \left[\frac{(n-1)}{(n+1)(n-1)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n-1)} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n+1)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n-1)} + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n+1)} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)}\right) + \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\right)\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

b) Consideremos las sumas parciales de la serie hasta el $k-$ésimo término

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n+1} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + 1\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Calcula la suma de las series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

Respuesta

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{n!} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n^2}{n!}+\frac{3n}{n!}+\frac{2}{n!}\right]\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n+(1-1)}{(n-1)!}+\frac{3}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\right]\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{3}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\right]\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\right]\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\
&= e+4\,(e-1)+2\,(e-2)=7e-8
\end{aligned}$$

Se puede garantizar convergencia absoluta de la serie, por tanto, podemos separar las sumas en $(*)$.

b) Consideremos las sumas parciales de la serie hasta el $k-$ésimo término

$$\begin{aligned}
S(k) &= \sum_{n=0}^{k}\arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \sum_{n=0}^{k}\arctan\left[\frac{n+1+(-n)}{1-(-n)(n+1)}\right]\\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{k}\left[\arctan(n+1)-\arctan(n)\right]\\
&= \arctan(k+1)-\arctan 0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

En $(\star)$ se utilizó la propiedad

$$\arctan\left[\frac{u+v}{1-uv}\right] = \arctan u + \arctan v$$

y el hecho de que la función $f(x)=\arctan(x)$ es impar.

Ejercicio 4

Halle el término general a_n y la suma de la serie cuyas sumas parciales son

$$S_n = \frac{n+1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Respuesta

Determinemos el término general:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}.$$

Pero esta expresión de a_n es válida para $n > 1$, pues S_0 no está definido, de modo que $a_1 = S_1 = 2$.

Entonces

$$S = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n(n-1)} = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Debemos hallar

$$\bar{S} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right].$$

Hallemos las sumas parciales de $\bar{S}$, denotadas por $\bar{S}(k)$:

$$\begin{aligned} \bar{S}(k) &= \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{k} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{(2)-1} - \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Cuando k se hace tan grande como se quiera, la cantidad anterior se acerca tanto como se quiera a 1, por lo que

$$\bar{S} = 1.$$

Por tanto,

$$S = 2 - \bar{S} = 2 - 1 = 1.$$

Por otra parte, la suma no es más que $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.