Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Lógica

Luciano García Garrido
Profesor Titular Consultante
Dpto. de Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana, Cuba

Yudivián Almeida Cruz
Profesor Auxiliar
Dpto. de Ciencia de la Computación
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana, Cuba

Tabla de contenidos

Capítulo 1 Conjuntos, relaciones y funciones -1

1.1. Conjuntos -1

1.1.1. Noción de Conjunto -1
1.1.2. Representación de Conjuntos -3
1.1.3. Relación de inclusión -8
1.1.4. Igualdad de conjuntos -10
1.1.5. Conjuntos distinguidos -10
1.1.6. Operaciones entre conjuntos -13
1.1.7. Algebra de conjuntos -20

1.2. Relaciones -28

1.2.1. Pares ordenados -28
1.2.2. Relaciones binarias -31
1.2.3. Operaciones entre relaciones -32
1.2.4. **Propiedades de las relaciones** -33
1.2.5. Relaciones de orden -36
1.2.6. Relaciones de equivalencia -37

1.3. Funciones -43

1.1.1. Tipos de funciones -44
1.1.2. Operaciones con funciones -45
1.1.3. Funciones de *n* variables -47

Capítulo 2 Lógica Proposicional -49

2.1. Proposiciones -49

2.1.1. Lógica proposicional bivalente -51
2.1.2. Lenguaje de la lógica proposicional -53
2.1.3. Definición de las operaciones proposicionales -55
2.1.4. Interpretación de fórmulas -57
2.1.5. Leyes de la lógica proposicional -61
2.1.6 Formas normales proposicionales -63

2.2. Aplicación: Circuitos Lógicos -69

2.2.1. Representación de circuitos lógico -70
2.2.2. Aritmética binaria -72
2.2.3. Diseño y simplificación de circuitos lógicos -74

2.3. Deducción Proposicional -80

2.3.1. Reglas de Inferencia -83
2.3.2. Aplicación: Demostración matemática -91

Capítulo 3 Lógica de Predicados -101

3.1. Predicados. -101

3.1.1. Proposiciones en la lógica de predicados -103
3.1.2. El lenguaje de la lógica de predicados -105
3.1.3. Interpretación de fórmulas -109

3.2. Deducción en lógica de predicados -112

3.1.1. Leyes y reglas de inferencia -113
3.1.2. Aplicación: Demostración matemática -122

A manera de Introducción

El presente libro de texto es una versión ampliada y corregida de su primera edición[1]. El objetivo del libro continúa siendo el mismo: introducir a los estudiantes que cursan el primer año de la carrera de Ciencia de la Computación (CC) en los contenidos básicos de la lógica, presentes en cualquiera de sus aplicaciones en la matemática y en la computación. Como libro de texto supone un aprendizaje supervisado por un tutor en la materia que exponga sus contenidos, oriente y controle su estudio. No obstante, la exposición no deja nada implícito que pudiera dificultar su estudio independiente. El libro puede servir también de texto en todo o en parte en otras carreras en las que la enseñanza de la matemática y de la computación resulta ser esencial. El contenido del libro está divido en tres capítulos los cuales se describen a continuación.

El capítulo 1 introduce los conocimientos básicos de la teoría de conjuntos, La exposición gira en torno a los tres conceptos fundamentales de conjunto, relación y función que constituyen la base de la matemática moderna y por ende de las teorías y modelos de todas las ciencias, en particular la computación. . De hecho estos conceptos se desarrollan desde un punto de vista lógico: se hace una presentación intuitiva de la teoría de conjunto con énfasis en el encadenamiento lógico-definicional de sus conceptos, y luego de introducir el álgebra de conjuntos se desarrolla una exposición elemental del método axiomático, exposición que continúa en los capítulos posteriores.

Los contenidos de la lógica que conforman lo que se ha dado en llamar *lógica clásica* se exponen propiamente en los capítulos 2 y 3, ello corresponde a la división establecida en lógica proposicional y lógica de predicados.

El capítulo 2 introduce la lógica proposicional desarrollando el estudio de las proposiciones, restringido al tipo de proposiciones que se caracterizan en el texto como proposiciones declarativas bivalente. Los desarrollos se concentran en las operaciones proposicionales, para lo cual se define un lenguaje para llevar a cabo dicho estudio en condiciones ideales. Se introduce el álgebra de las proposiciones y se estable su relación con el álgebra de conjuntos identificándose ambas como algebras booleanas. Se extiende la aplicación del método axiomático al álgebra proposicional. Se realiza una ligera

---

[1] García Garrido Luciano *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Lógica Matemática*, Editorial Félix Varela, La Habana, 2002

introducción a una de las aplicaciones más relevantes de la lógica proposicional: el análisis y síntesis de circuitos lógicos.

El desarrollo de la lógica proposicional continua con el estudio del razonamiento deductivo, introduciéndose los conceptos de prueba de proposiciones y las reglas de inferencia proposicionales que permiten realiza demostraciones de proposiciones a partir de proposiciones Se realiza un estudio somero de aplicación al razonamiento ordinario en la demostración matemática.

El capítulo 3, Lógica de predicados, estudia la noción de predicado e introduce los operadores de cuantificación universal y existencial. Nuevamente se desarrolla un lenguaje en el que es posible definir rigurosamente el concepto de predicado y las operadores de cuantificación. Adoptando el método axiomático se entremezclan la exposición de propiedades de los cuantificadores con la introducción de nuevas reglas de inferencia que permiten hacer deducciones empleando los cuantificadores. Se realiza un estudio somero de aplicación al razonamiento ordinario en la demostración matemática.

Para la redacción del presente texto se ha contado con la colaboración del Dr. Yudivián Almeida Cruz, quien es actualmente profesor de la asignatura. De esta forma el libro cuenta con la retroalimentación necesaria para la reformulación de contenido y pedagógica que debe apoyar la redacción de todo libro de texto.

Luciano García Garrido

Capítulo 1 Conjuntos, relaciones y funciones

1.1. Conjuntos

1.1.1. Noción de conjuntos

Considere las siguientes expresiones:

a) Los estudiantes de la maestría de Ciencia de la Computación.

b) Los tomos de poesías de José Martí.

c) Los números naturales.

d) Los números reales entre 0 y 1.

c) Las direcciones electrónicas.

e) Los grupos de clases prácticas de lógica.

Tales expresiones denotan colecciones o, como serán denominadas en este libro, *conjuntos* de entidades de diversa naturaleza (individuos: estudiantes; objetos concretos: tomos; objetos abstractos: números; incluso colecciones de colecciones de entidades: grupos de clase práctica). En una nueva lectura se prefijará "el conjunto de" a cada una de las expresiones anteriores.

De esta manera se ha ejemplificado la noción intuitiva de conjunto. No será difícil para el lector añadir más ejemplos a partir de los dados. Nótese que en el lenguaje natural, por ejemplo, en español, los denominados nombres colectivos tales como "grupo", "familia", "población", "colectivo", "rebaño", "manada", "colonia", "enjambre", etc. que se aplican según cierta similitud reconocible entre entidades y el contexto en cuestión, denotan conjuntos. La palabra "conjunto", que también en el lenguaje ordinario suelen tener usos colectivos específicos, por ejemplo, "conjunto musical", es la que comúnmente se utiliza en el quehacer matemático y computacional en lengua española y será la adoptada en este libro. Otro sinónimo de "conjunto", que aparece en la actividad científica es "clase", por ejemplo, en matemática, "las clases de equivalencia módulo 5" o en biología, "la clase de los vertebrados".

Nótese que se ha introducido una noción intuitiva de conjunto mediante ejemplos y sinónimos pero no se ha definido qué es un conjunto: el concepto de conjunto será tomado en los desarrollos que siguen como un *concepto primitivo*, es decir, como un *concepto no definido*. Vamos a desarrollar una *teoría* elemental sobre los conjuntos basada en este concepto primitivo y otros que a continuación se introducen.

Notación para conjuntos

Para desarrollar la teoría de conjuntos se introducirá paulatinamente una notación que permitirá construir las expresiones de dicha teoría. En primer lugar, para denotar conjuntos cualesquiera se utilizarán letras mayúsculas del alfabeto latino como símbolos de *variables*:

$A, B, C,...$

Luego en las expresiones "sea A el (un) conjunto", A denotará en lo que sigue a conjuntos arbitrarios. No obstante, se utilizarán algunos símbolos de *constante*s para denotar a determinados conjuntos, entre los cuales estarán los siguientes para los conjuntos numéricos fundamentales:

$\mathbf{N}$: conjunto de los números naturales
$\mathbf{Z}$: conjunto de los números enteros
$\mathbf{Q}$: conjunto de los números racionales
$\mathbf{R}$: conjunto de los números reales

Elemento

Se denomina *elemento* (*miembro*) de un conjunto a cada una de las entidades que lo constituyen. Los elementos de un conjunto se representan mediante alguna notación particular que se introduzca para nombrarlos. Por ejemplo, los símbolos que representan los números en el sistema decimal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nombres en un leguaje natural como en español: *María*, *Pedro*, casa, etcétera.

Para denotar en general elementos de un conjunto utilizaremos letras minúsculas del alfabeto latino, como es usual en la notación matemática, algunas como x, y, z serán símbolos de variables para denotar elementos cualesquiera.

Note que la definición de elemento (miembro) dada es también no definida o primitiva.

Relación de pertenencia

Existe una relación fundamental entre un conjunto y cualquiera de sus elementos, la cual se denomina *relación de pertenencia.* Esta relación es precisamente la que afirma que una entidad es un elemento de un conjunto. El enunciado “x pertenece a A” (expresión sinónima: “x es elemento de A”) será representado por

$$x \in A$$

donde x es cualquier entidad y el símbolo $\in$ denota la relación de pertenencia.

Note nuevamente que no se ha definido sino intuitivamente lo que es la relación de pertenencia. Al igual que la noción de conjunto y de elemento se la acepta aquí como un concepto primitivo.

La negación de dicho enunciado “x no pertenece a A” se representa por

$$x \notin A$$

(expresión sinónima: “x no es elemento de A”).

1.1.2. Representación de Conjuntos

La notación introducida para conjuntos mediante variables y constantes es una notación compacta y servirá con esta característica para muchos de los desarrollos que siguen. Sin embargo, en la práctica resulta conveniente una representación de un conjunto que nos permita saber cuáles son precisamente los elementos que lo constituyen. Esta representación puede hacerse de dos formas no excluyentes:

a) Listando todos sus elementos (*representación extensional*)
b) Dando una propiedad que debe ser satisfecha por todos sus elementos (*representación intencional o por propiedad*)

Representación extensional

La práctica usual es representar un conjunto en forma extensional escribiendo, encerrados entre llaves y separados por comas, los nombres con los que denotamos a sus elementos.

Ejemplos:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

{*Andrés, María, Juan*}

*El **orden** en que se representan los elementos de un conjunto y/o su **repetición** en la representación extensional son ajenos a la definición de conjunto*.

Los conjuntos

{3, 1, 1, 2, 0, 7, 5, 6, 4, 8, 6. 10, 9, 3}

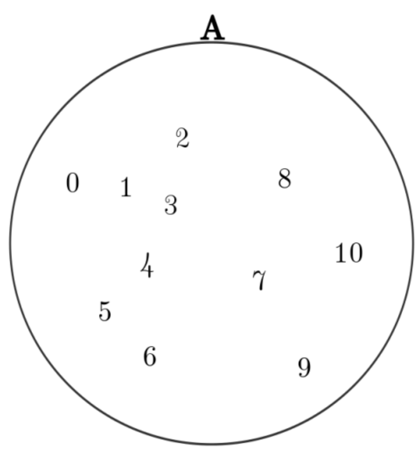
{*María*, *Juan*, *Andrés*}

denotan los mismos conjuntos que las representaciones extensionales anteriores.

Sólo con el objeto de facilitar la exposición que sigue utilizaremos una representación gráfica para conjuntos dados extensionalmente, consistente en un círculo en cuyo interior aparecen los nombres de sus elementos.

Ejemplo:

Para el conjunto A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, la representación gráfica es la siguiente



Representación por propiedad

En este caso se representa un conjunto por una propiedad que debe cumplir cualquier entidad para ser elemento del conjunto de la siguiente forma:

$$\{ x \mid P(x)\}$$

y se lee "el conjunto de las x tales que x cumple la propiedad P".

Una representación más específica que incluye el conjunto del cual se toman las x que satisfacen la propiedad es la siguiente:

$$\{ x \mid x \in A \text{ y } P(x) \}$$

y se lee "el conjunto de las *x* tales que $x \in A$ y $P(x)$"

de manera más compacta:

$$\{ x \in A \mid P(x) \}$$

y se lee "el conjunto de las $x \in A$ tales que $P(x)$"

Ejemplos:

El conjunto de los estudiantes universitarios menores de 19 años de edad:

{*x* | *x* es estudiante universitario y x tiene menos de 19 años de edad}.

El conjunto de los números pares definido como el conjunto de los números múltiplos de 2:

$\{ x \in \mathbf{N} \mid \textit{existe } n \in \mathbf{N} \textit{ tal que } x = 2n \}$

o de modo equivalente como el conjunto de los números divisibles por 2

$\{ x \in \mathbf{N} \mid \textit{existe } n \in \mathbf{N} \textit{ tal que cociente de } x/2 = n \textit{ y resto} = 0 \}$

Los dos últimos ejemplos apuntan a lo siguiente: un mismo conjunto, en este caso el conjunto de los números pares, puede ser definido por propiedades diferentes, luego mientras que la definición extensional de un conjunto como ya fue advertido es única, su definición intencional puede ser múltiple.

.

Conjunto y propiedad ¿Son equivalentes?

Volviendo a la noción de conjuntos, dado que la representación por intensión introducida nos permite definir en la práctica conjuntos mediante propiedades ¿no se podría acaso considerar "propiedad" como sinónimo de "conjunto"?

Esta identificación entre conjunto y propiedad está implícita en la definición de conjuntos dada por el fundador de la teoría de conjuntos, el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) al considerar que "un conjunto es una colección en un todo de entidades determinadas, distintas, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento" (*Principio de abstracción de Cantor*).

Uno de los fundadores de la lógica moderna, el lógico inglés Bertrand Russell (1872-1970) descubrió a principios del siglo XX que tal identificación conduce a una contradicción.

Considere la siguiente propiedad: "x es conjunto y $x \notin x$" y sea $A = \{x \,/\, x \text{ es conjunto y } x \notin x\}$. Vea que según la definición, A es el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismo. Dado que A es un conjunto, se desea verificar si A pertenece o no a A y analice que se descubre la siguiente paradoja: si $A \in A$, entonces $A \notin A$ y si $A \notin A$, entonces $A \in A$, es decir, $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.

Esta contradicción fue descubierta por Russell en los momentos en que otro lógico alemán Gotllob Frege (1848-1925) intentaba fundamentar la aritmética y por ende toda la matemática sobre la noción de conjuntos.

No se ha renunciado por ello a definir conjuntos mediante propiedades, pero si a impedir de alguna forma la posibilidad de que un conjunto que se define esté incluido como elemento en su propia definición, aunque, dicho sea de paso, no siempre una tal definición conduce a una contradicción. Una forma de evitar la paradoja de Russell es utilizar la representación intensional más específica dada en el texto. Note que el conjunto que define la propiedad $P(x)$ es en todo caso un subconjunto del conjunto A ya definido.

Igualdad de conjuntos

La definición extensional de conjuntos nos permite dar una definición de igualdad entre conjuntos.

Principio de extensionalidad: dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos. Es decir,

$A = B$ si y sólo si para toda x, $x \in A$ si y sólo si $x \in B$

La definición revela la naturaleza extensional de la definición matemática de conjuntos: un conjunto queda determinado inequívocamente por sus elementos. Por el contrario, como se ha visto, un mismo conjunto puede ser definido intencionalmente por diferentes propiedades.

La relación de igualdad entre conjuntos cumple tres propiedades importantes que son dadas a continuación:

Para cualquier conjunto A, $A = A$ (*reflexiva*)
Para cualesquiera conjuntos A y B, Si $A = B$, entonces $B = A$ (*simétrica*)
Para cualesquiera conjuntos A, B y C, Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$ (*transitiva*)

La comprensión de estas propiedades resultará muy intuitiva y a su vez derivable de la definición dada de igualdad. Su definición y estudio más riguroso se realizará más adelante.

Conjuntos finitos e infinitos

Un conjunto A es *finito* si tiene un número n de elementos, siendo $n \in \mathbf{N}$. Se dice en este caso que n denota el (número) *cardinal* del conjunto A. La *cardinalidad* de un conjunto A se denota por $|A|$, luego para cualquier conjunto finito A con n elementos $|A| = n$.

Ejemplos:

$|\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}| = 11$

$|\{\textit{Andrés, María, Juan}\}| = 3$

Un conjunto A es *infinito* si no es finito, es decir, si no existe n tal que $|A| = n$.

Por ejemplo, es infinito el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales. A partir de la definición dada podemos demostrar de modo informal que $\mathbf{N}$ no es finito dado que *no existe un número natural mayor que cualquier otro número natural*: bastaría sumar 1 a cualquier candidato n que se propusiera y obtendríamos un número n+1 mayor que n.

Las siguientes son representaciones extensionales de la infinitud de los principales conjuntos numéricos

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3,..., n,\ldots\}$

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n,\ldots, -2, -1, 0, 1, 2,\ldots, n,\ldots\}$.

$\mathbf{Q} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbf{Z}, y \neq 0\}$

$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Un *conjunto unitario* es un conjunto que posee un único elemento.

Ejemplos:

{2}, {Lorna}

1.1.3. Relación de inclusión

Se han introducido como primitivos o sin definiciones los conceptos de conjunto, elemento y relación de pertenencia. A continuación, se observara cómo se pueden utilizar estos conceptos primitivos para introducir otros conceptos mediante definiciones. Un primer ejemplo define una importante relación entre conjuntos, la relación de inclusión.

Definición**:** Si A y B son conjuntos, entonces *A está incluido en B*, lo cual representaremos por

$$A \subseteq B$$

si y sólo si para toda x, si $x \in A$, entonces $x \in B$.

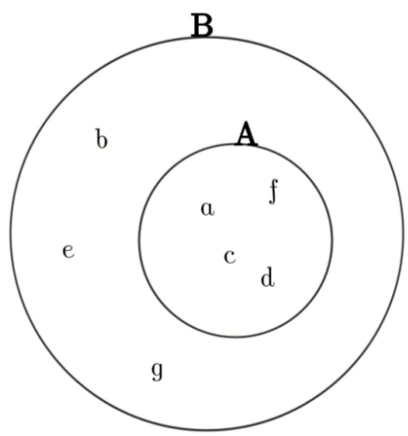
También se dice en este caso que *A es subconjunto de B*.

El hecho de que dos conjuntos A y B no satisfagan esta definición, es decir que A no sea subconjunto de B será denotado por

$$A \nsubseteq B$$

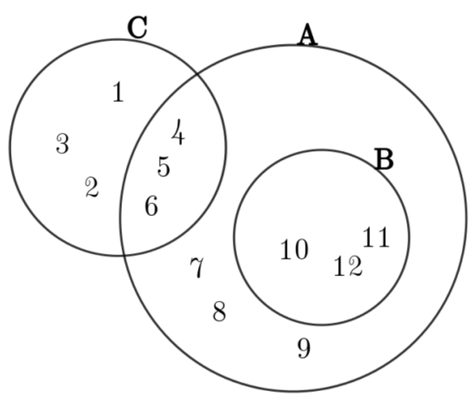
Ejemplo:

Denote A el conjunto $\{a, c, d, f\}$ y B el conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, entonces se verifica que $A \subseteq B$.



Ejemplo:

Denote A el conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, B el conjunto $\{10, 11, 12\}$ y C el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ entonces se verifica que $B \subseteq A$, $A \not\subset B$ y que $A \not\subset C$



La relación de inclusión entre conjuntos cumple tres propiedades importantes que son dadas a continuación:

-Para cualquier conjunto A, $A \subseteq A$ (*reflexiva*)
-Para cualesquiera conjuntos A y B, Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$ (*antisimétrica*)
-Para cualesquiera conjuntos A, B y C, Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$ (*transitiva*)

1.1.4 Igualdad de conjuntos

A partir de la relación de inclusión se puede enfatizar la naturaleza extensional de la definición matemática de conjuntos:

***Definición*:** Si A y B son conjuntos, entonces *A es igual a B*, lo cual denotaremos por

$$A = B,$$

si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Esta definición es equivalente a la definición dada extensionalmente: dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.

La negación de $A = B$ se denota por $A \neq B$ y se lee "*A* es desigual de *B*" ("*A* es distinto de *B*".

Ejemplos:

$\{x \in \mathbf{N} \mid x < 3\} = \{0, 1, 2\}$

$\{x \in \mathbf{N} \mid x < 3\} \neq \{0, 1, 2, 3, 5\}$

1.1.5 Subconjuntos propios de un conjunto

Se introduce la siguiente definición para referirnos a los subconjuntos que se denominan propios de un conjunto, es decir, a los subconjuntos de un conjunto excluido dicho conjunto.

Definición**:** Si A y B son conjuntos, entonces *A es subconjunto propio de B*, lo cual representaremos por

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$$

si y sólo si

$$A \subseteq B \text{ y } A \neq B$$

Analice como la definición de subconjunto propio hace uso de las definiciones previamente dadas de la relación de inclusión y de igualdad entre conjuntos.

El hecho de que dos conjuntos A y B no satisfagan esta definición, es decir que A no sea subconjunto propio de B será denotado por

$$A \not\subset B$$

Ejemplos:

$\{1,2\} \subset \{2,1,4,3\}$

$\{1,2,5\} \not\subset \{2,1,4,3\}$

$\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, c\}$

1.1.5 Conjuntos distinguidos

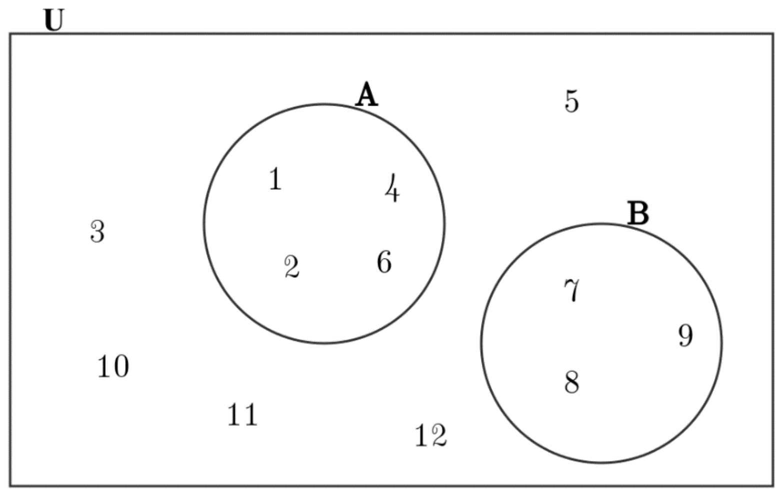
Conjunto universo o dominio

En la práctica resulta conveniente fijar un conjunto que incluya todas las entidades que ocupan nuestra atención en un momento dado. Vamos a llamar *conjunto universo* a este conjunto, también se le suele llamar *dominio* o *espacio*.

Por ejemplo, la teoría de números investiga las propiedades de los números naturales, entonces su dominio es precisamente el conjunto **N** de los números naturales. En análisis matemático, el dominio puede ser el conjunto **R** de los números reales (Análisis Real) o el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$, entre otros.

En los desarrollos que siguen se utilizará el símbolo **U** para denotar un dominio cualquiera.

Nótese que una vez fijado un dominio, todos los conjuntos que se consideran se definen con respecto a dicho dominio y son por lo tanto subconjuntos del mismo. Por lo tanto, dado **U**, para cualquiera que sea el conjunto A que se defina, $A \subseteq \mathbf{U}$.



Conjunto vacío

Es posible definir propiedades las cuales no son cumplimentadas por ninguna entidad. Por ejemplo "x es número natural y x es par e impar". Propiedades como la dada definen un conjunto, que no tiene elementos al cual denominaremos *conjunto vacío* y denotaremos con el símbolo $\varnothing$.

Téngase en cuenta que el conjunto vacío es un conjunto finito dado que contiene 0 elementos.
La relación entre $\varnothing$ y el resto de los conjuntos es la siguiente:

$$\varnothing \subseteq A$$

Analice que el enunciado anterior satisface la definición de la relación de inclusión.

Conjunto potencia

En ocasiones resulta conveniente hacer referencia como un todo a los conjuntos que son subconjuntos de un conjunto dado. Entonces, dado el conjunto A, se define un nuevo conjunto que denominaremos *conjunto potencia de A*, este se denota por 2^A y tiene como elementos todos los subconjuntos de A, es decir:

Definición: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$

Observe que 2^A es un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Si el conjunto A tiene un número finito n de elementos, el número de elementos de 2^A es igual a 2^n, o sea, si $|A| = n$ entonces $|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$

Ejemplo:

Sea $A = \{Pedro, Luisa, Ana\}$, entonces $2^A = \{\{Pedro\}, \{Luisa\}, \{Ana\}, \{Pedro, Luisa\}, \{Pedro, Ana\}, \{Luisa, Ana\}, A, \varnothing\}$ y se verifica que, como $|A| = 3$, $|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

1.1.6 Operaciones entre conjuntos

A partir de conjuntos dados es posible, mediante ciertas operaciones que se definen a continuación, construir nuevos conjuntos.

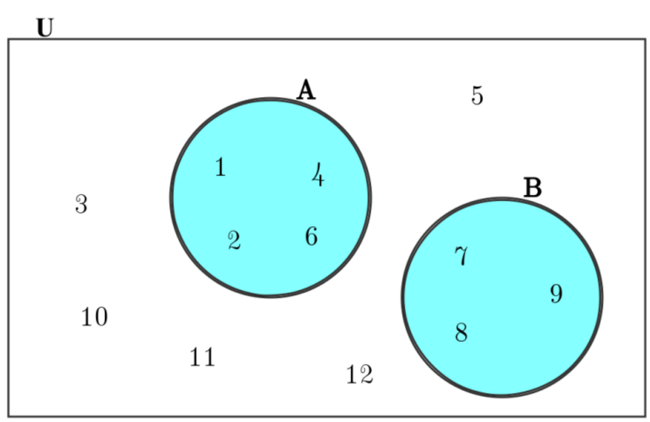
Unión de Conjuntos

Definición: Dados los conjuntos A y B se obtiene, mediante la operación unión, denotada por el símbolo $\cup$, un nuevo conjunto que se denota por $A \cup B$ (se lee: "*A* unión *B*") cuyos elementos son aquellos que pertenecen a A o a B, o a ambos conjuntos, es decir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \text{ pertenece a ambos conjuntos}\}$$

Ejemplos:

a) Sea $A = \{1, 2, 4, 6\}$ y $B = \{7, 8, 9\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$



b) $\mathbf{N} \cup \mathbf{P} = \mathbf{N}$

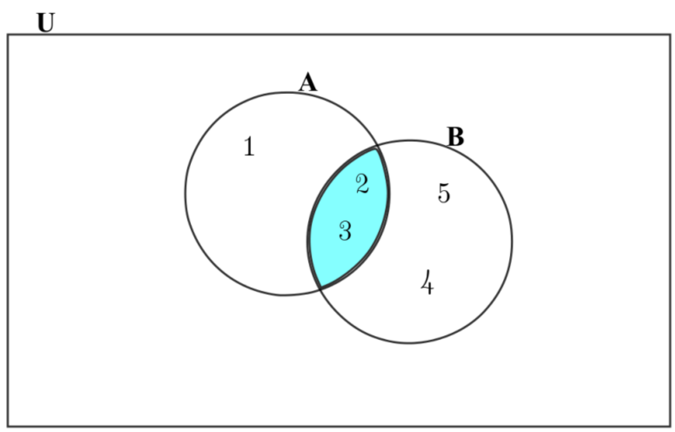
Intersección de conjuntos

Definición**:** Dados los conjuntos A y B se obtiene, mediante la operación *intersección*, denotada mediante el símbolo $\cap$, un nuevo conjunto que se denota por $A \cap B$ (se lee: "A intersección B") cuyos elementos son aquellos que pertenecen tanto a A como a B a la vez, es decir,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\} .$$

Ejemplos:

a) Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$, entonces $A \cap B = \{2,3\}$



b) $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$

Si A y B no tienen ningún elemento en común entonces $A \cap B = \varnothing$ y se dice que A y B son *disjuntos*.

Ejemplo:

a) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, entonces $A \cap B = \varnothing$

b) $(1, 2) \cap \mathbf{N} = \varnothing$

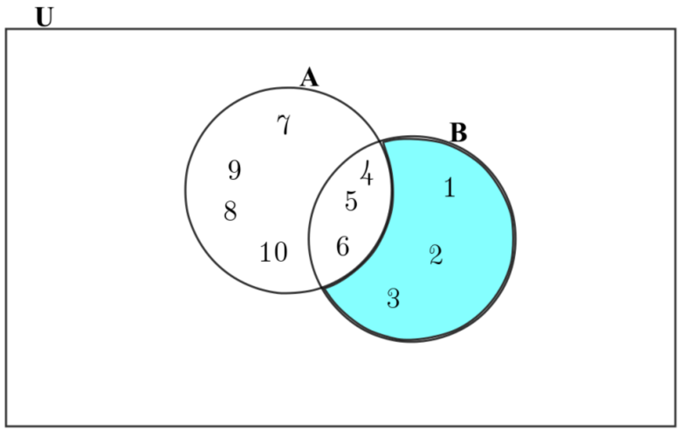
Complemento de un conjunto

***Definición*:** Dados los conjuntos A y B se obtiene, mediante la operación *complemento relativo*, denotada por el símbolo "–", un nuevo conjunto que se denota mediante $A - B$ (se lee: "complemento de B con respecto a A"), cuyos elementos son los elementos que pertenecen a A, pero no a B, es decir,

$$A - B = \{x \mid x \in A \ y \ x \notin B\}$$

Ejemplo:

Sea A = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, entonces $B - A$ = {1, 2, 3}



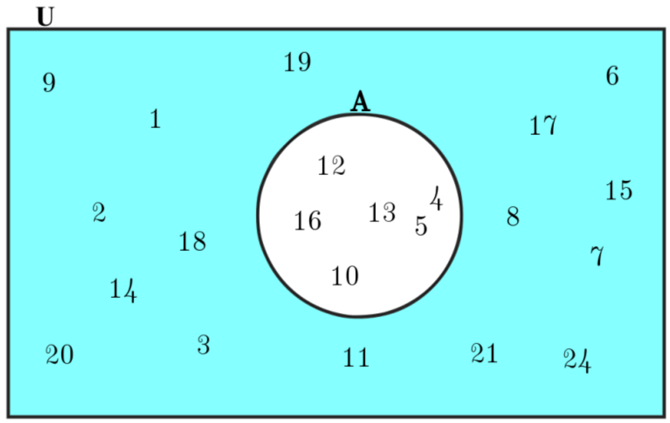
Entre los complementos relativos de un conjunto es muy importante el complemento relativo de un conjunto A con respecto a su dominio **U**. Este complemento se denomina *complemento absoluto* y se denota por A^C, es decir,

$$A^C = \mathbf{U} - A$$

Note que A^C contiene todos los elementos del dominio que no están en A. Cuando hablemos simplemente del complemento de un conjunto A nos estaremos refiriendo a su complemento absoluto.

Ejemplo:

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 24}, A = {4, 5, 10, 12, 13, 16}, entonces A^C = {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 18, 19, 20, 21, 24}



Términos, subtérminos que representan conjuntos

La definición de operaciones entre conjuntos da lugar a términos conjuntuales, es decir a términos, como se les llamará abreviadamente, que representan conjuntos de diversa complejidad estructural, de acuerdo con las siguientes reglas:

i) Una variable o una constante es un término

ii) S $\boldsymbol{A}$ denota un término, entonces $\boldsymbol{A}^C$ es un término

iii) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotan términos, entonces $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ y $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ son términos

Nota: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ representan términos cualesquiera como las reglas indican.

Ejemplos:

a) A, $\varnothing$ son términos por i)

b) $A^C \cap B$ es un término por iii) dado que A^C es un término por ii), dado que A es un término por i) y B es un término por i),

-

El lector verificará cuáles entre las siguientes expresiones son términos, justificando en caso afirmativo con las reglas correspondientes: $A \cup B^C$, $A^C \cap (B \cup C^C)^C$, $A^C \cap B \cup C^{C\,C}$

Más adelante se hará uso de la siguiente definición de subtérmino conjuntual:

i) Si $\boldsymbol{A}$ es un término, entonces $\boldsymbol{A}$ es un subtérmino de $\boldsymbol{A}$

ii) Si $\boldsymbol{A}^C$ es un término, entonces $\boldsymbol{A}$ es un subtérmino de $\boldsymbol{A}^C$

iii) Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ son términos, entonces $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son subtérminos de $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

Ejemplos:

a) B^C es un subtérmino de $A \cup B^C$
b) $(B \cup C^C)$ es un subtérmino de $A^C \cap (B \cup C^C)^C$.

Por *longitud* de un término se define el número de símbolos de constantes, variables y operadores, que lo constituyen.

Fórmulas conjuntuales

La relación de igualdad (=) entre términos da lugar a fórmulas conjuntuales definidas por la siguiente regla

i) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son términos, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ es una fórmula.

A continuación se define la relación de inclusión como una forma abreviada de igualdad.

Definición: $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Ejemplos:

$A^C \cap (B \cup C^C)^C = A^C \cap B^C \cap C$.

Propiedades de las operaciones conjuntuales

Las principales propiedades de las operaciones conjuntuales serán objeto de exposición a continuación.

Estas propiedades se establecen mediante fórmulas conjuntuales, fundamentalmente mediante igualdades y reciben comúnmente el nombre de *leyes*.

Nuevamente, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ representan términos (conjuntuales) cualesquiera.

1. Leyes de idempotencia

(1a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
(1b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

2. Leyes asociativas

(2a) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$
(2b) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$

3. Leyes conmutativas

(3a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$
(3b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$

4. Leyes distributivas

(4a) $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup C)$
(4b) $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$

5. Leyes de identidad

(5a) $\boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}$
(5b) $\boldsymbol{A} \cap \mathbf{U} = \boldsymbol{A}$
(5c) $\boldsymbol{A} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
(5d) $\boldsymbol{A} \cap \varnothing = \varnothing$

6. Leyes de complemento

(6a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^C = \mathbf{U}$
(6b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^C = \varnothing$
(6c) $(\boldsymbol{A}^C)^C = \boldsymbol{A}$
(6d) $\mathbf{U}^C = \varnothing$
(6e) $\varnothing^C = \mathbf{U}$

7. Leyes de De Morgan

(7a) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^C = \boldsymbol{A}^C \cap \boldsymbol{B}^C$
(7b) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^C = \boldsymbol{A}^C \cup \boldsymbol{B}^C$

8. Leyes de Absorción

(8a) $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$
(8b) $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$

Si sustituimos en una ley cualquier variable en todos los lugares en que ocurre en dicha ley siempre por la misma expresión conjuntual, obtendremos un ejemplo concreto de la ley:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B) = (A \cup B)$ es un ejemplo de la ley (1a) donde $\boldsymbol{A}$ es $(A \cup B)$

b) $((B \cap C) \cup B)^C = (B \cap C)^C \cap B^C$ es un ejemplo de la ley (7a) donde $\boldsymbol{A}$ es $(B \cap C)$ y $\boldsymbol{B}$ es B

Simplificación de fórmulas conjuntuales

Una de las aplicaciones fundamentales de las leyes es la simplificación de términos. Véase que ya muchas leyes, por ejemplo (5a) y (6b), expresan precisamente simplificación de términos.

A continuación se describe el proceso de simplificación de términos:

Sea **t** el término que se desea simplificar, entonces la *simplificación* de **t** consiste en una sucesión finita de n términos $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ siendo $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$ y cada $\mathbf{t}_i$, $1 < i \leq n$, es un *paso* de la simplificación tal que $\mathbf{t}_{i+1}$ se obtiene a partir de $\mathbf{t}_i$ por la aplicación de alguna ley $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ de la siguiente manera: si $\mathbf{t}_1$ es un subtérmino de $\mathbf{t}_i$ se sustituye $\mathbf{t}_1$ en $\mathbf{t}_i$ por $\mathbf{t}_2$. El proceso de simplificación termina en $\mathbf{t}_n$, término al cual no es posible aplicar ninguna ley que reduzca su longitud.

Como ejemplo simplificaremos el término $(A \cup \varnothing)^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Se deja al lector analizar la aplicación específica de la ley indicada en cada paso.

$$
\begin{aligned}
(A \cup \varnothing)^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= A^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C)) && \text{- (5a)}\\
&= A^C \cap (A \cap (B \cup C)) && \text{- (4b)}\\
&= (A^C \cap A) \cap (B \cup C) && \text{- (2b)}\\
&= \varnothing \cap (B \cup C) && \text{- (6b)}\\
&= \varnothing && \text{- (5d)}
\end{aligned}
$$

1.1.6 Álgebra de Conjuntos (AC)

Siempre que se tiene una cierta clase de objetos abstractos (en nuestro caso los conjuntos) y se definen determinadas operaciones entre los mismos (en nuestro caso la unión, la intersección y el complemento), se dice que la clase de objetos junto con las operaciones introducidas entre estos objetos constituye una *estructura algebraica*.

Una operación está definida sobre una clase de objetos si su aplicación a objetos de la clase, genera objetos de la clase. Por ejemplo, si se define la unión en cierta clase de conjuntos, se tiene que cumplir que existe en la clase el conjunto unión de dos conjuntos cualesquiera de la clase. Se dice también que la operación es *cerrada* sobre la clase de objetos.

El álgebra es la parte de la matemática encargada de estudiar las estructuras algebraicas. Son objeto especial de estudio por el álgebra las propiedades que caracterizan a las operaciones en las estructuras algebraicas y que tipifican tipos particulares de álgebra.

Entonces, un *algebra de conjuntos* (AC) A es una clase de conjuntos que es cerrada bajo las operaciones de $\cap$, $\cup$ y ^{C}, que satisface las leyes 1.-8. Se denotará por $< A, \cap, \cup, ^C >$ la estructura de un algebra de conjuntos.

De lo hasta aquí estudiado se puede verificar que la definición se cumple para las siguientes estructuras $< A, \cap, ^C >$ y $< A, \cup, ^C >$. Se deja al lector su verificación, estableciendo cómo puede definirse en cada caso la operación omitida. En cualquier caso se debe definir también la relación de inclusión.

Es obvio que no cualquier clase de conjuntos constituye un AC. El lector verificara qué clases de conjuntos de las siguientes constituyen un AC:

a) A = $\{\varnothing, A\}$ para cualquier conjunto A.
b) A = $\{\varnothing, A\} \cap B$ para cualquier B tal que $B \subseteq 2^A$.
c) A = 2^A para cualquier conjunto A.

Axiomatización de AC

Los conocimientos resultantes de la investigación de un dominio son presentados mediante teorías por las ciencias que la realizan. Una *teoría* está constituida por un conjunto de proposiciones con cierta estructuración, dada por cierta relación de dependencia que se observa entre las proposiciones.

Como se ha visto, AC es una teoría constituida por igualdades y en el proceso de simplificación se pudo apreciar ya la relación de dependencia que existe entre dichas igualdades.

El objetivo que se planteará ahora será el de establecer si determinado candidato a igualdad entre términos conjuntuales, es decir, entre conjuntos, es verificable como igualdad. Por ejemplo, $(A \cup \emptyset)^C \cap A = \emptyset$ es una igualdad, mientras que $(A \cap \emptyset)^C \cup A = A^C$ no es una igualdad.

Se necesita diseñar un algoritmo que dado un candidato a igualdad permita decidir si el tal candidato es o no una igualdad de AC. Como en el caso de la simplificación se puede comenzar por aceptar el cumplimiento de las leyes L1-L8 y entonces utilizar el procedimiento de simplificación anteriormente descrito; dado el candidato a igualdad t1 = t2, t1 = t2 se cumple si aplicando el proceso de simplificación tanto a t1 como a t2 se logra obtener en algún paso de ambos procesos el mismo término o dos términos equivalentes. De hecho, sólo es necesario como se verá en el ejemplo que sigue aplicar el proceso a uno solo de los términos, si la igualdad se cumple, el proceso transforma paso a paso el término t1 en el término t2 o viceversa dado la propiedad reflexiva de la igualdad.

Ejemplo:

Suponga que se quiere demostrar que

$$(A \cup \emptyset)^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A^C \cap A) \cap (B \cup C)$$

Se deja al lector analizar la aplicación específica de la ley indicada en cada paso.

$$\begin{aligned}(A \cup \emptyset)^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= A^C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C)) && \text{- (5a)}\\ &= A^C \cap (A \cap (B \cup C)) && \text{- (4b)}\\ &= (A^C \cap A) \cap (B \cup C) && \text{- (2b)}\end{aligned}$$

La teoría de conjuntos es un ejemplo de teoría matemática y AC, como parte de la misma, servirá para realizar una introducción a un método de presentación de teorías muy importante y de amplio uso en particular en matemática: el método axiomático.

Un objetivo fundamental con las teorías científicas es unificar los conocimientos que se tienen sobre un dominio mediante la selección de un conjunto de proposiciones que actúan como principios o leyes, a las cuales se las denomina *axiomas* y a partir de las cuales puedan derivarse el resto de las proposiciones que son verdaderas en la teoría. Tal objetivo constituye la axiomatización de una teoría. Las leyes dadas de AC constiutyen una axiomatización del álgebra de conjuntos a partir de las cuales pueden derivarse el resto de las igualdades entre conjunto de AC, algo que puede demostrarse pero que no es objeto de nuestra exposición.

Ahora bien, asociado a este objetivo, y utilizando AC, se plantea la siguiente cuestión: ¿Es posible definir un álgebra de conjuntos tomando como leyes un número menor que las dadas? Por supuesto, si se toma un número menor que las dadas se tiene que verificar que se cumplen el resto de las leyes que se han considerado definitorias de un álgebra de conjuntos, de hecho, cualquier igualdad que se cumpla entre conjuntos y por supuesto sólo estas.

A continuación se verá que es posible definir un AC haciendo una selección sólo de algunas leyes del álgebra de conjuntos. Se denominará axiomas a las leyes así seleccionadas, siendo un *axioma una proposición que se acepta como verdadera en una teoría*. El resto de las leyes y además todas las igualdades que se cumplen entre conjuntos, serán establecidas por el proceso ya descrito, en esencia, un proceso de razonamiento que denominaremos *deducción o razonamiento igualitario*: toda igualdad que se deduzca igualitariamente será denominada *teorema*.

A todo este proceso de distinguir entre las proposiciones de una teoría entre axiomas y teoremas y de establecer el método de razonamiento que permita deducir los teoremas a partir de los axiomas se denomina *axiomatización*. El estudio de la axiomatización de teoría es un objetivo fundamental de la lógica y será ampliado en los capítulos posteriores de este libro.

Como ejemplo de axiomatización se podría seleccionar el siguiente grupo de leyes del algebra de conjuntos como axiomas:

3. Leyes conmutativas

(3a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$
(3b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$

4. Leyes distributivas

(4a) $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup C)$
(4b) $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$

5. Leyes de identidad

(5a) $\boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}$
(5b) $\boldsymbol{A} \cap \mathbf{U} = \boldsymbol{A}$

6. Leyes de complemento

(6a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^C = \mathbf{U}$
(6b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^C = \varnothing$

A continuación se demuestran como teoremas algunas de las leyes que no fueron seleccionadas como axiomas.

TEOREMA
$A \cup A = A$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A \cup A &= (A \cup A) \cap \mathrm{U} && \text{-(5b)} \\
&= (A \cup A) \cap (A \cup A^C) && \text{-(6a)} \\
&= (A \cup (A \cap A^C) && \text{-(4a)} \\
&= A \cup \varnothing && \text{-(6b)} \\
&= A && \text{-(5a)}
\end{aligned}
$$

Se recuerda que $\boldsymbol{A}$ es una metavariable que toma como valor cualquier término conjuntual. Por lo tanto la demostración es válida por ejemplo, para la siguiente igualdad considerando que $\boldsymbol{A}$ representa el término $(A \cup B) \cup C$:

$$(A \cup B) \cup C \cup (A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$$

También observe que una vez demostrada una identidad entre conjuntos la misma puede ser utilizada en otras demostraciones. Observe que esto sugiere que en ocasiones se hace necesario descubrir cierto orden de precedencia en la demostración de las proposiciones de una teoría.

TEOREMA

(2a) $(A \cup B) \cup C \cup (A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$

Demostración: (Justifique los pasos como ejercicio)

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= (\mathrm{U} \cap (A \cup B)) \cup C \\ &= (\mathrm{U} \cap A) \cup (\mathrm{U} \cap B) \cup C \\ &= A \cup B \cup C \\ &= A \cup (\mathrm{U} \cap B) \cup (\mathrm{U} \cap C) \\ &= A \cup (\mathrm{U} \cap (B \cup C)) \\ &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

TEOREMA

(8a), (8b) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

Demostración

$$\begin{aligned}A \cup (A \cap B) &= (A \cup A) \cap (A \cup B) && \text{-(4a)} \\ &= A \cap (A \cup B) && \text{-(1a)} \\ &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) && \text{-(5b)} \\ &= (A \cup (B \cap B^C)) \cap (A \cup B) && \text{-(6b)} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup B^C) \cap (A \cup B) && \text{-(4a)} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup B^C) && \text{-(1b)} \\ &= A \cup (B \cap B^C) && \text{-(4a)} \\ &= A \cup \varnothing && \text{-(6b)} \\ &= A && \text{-(5a)}\end{aligned}$$

TEOREMA

(7b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Demostración (Justifique los pasos como ejercicio)

Demostrando que $(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) = \varnothing$

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) &= (A \cap B \cap \mathrm{A}^{\mathrm{C}}) \cup (A \cap B \cap B^C) \\ &= (B \cap \varnothing) \cup (A \cap \varnothing) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

Demostrando que $(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C) = \mathbf{U}$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C) &= ((A \cap B) \cup A^C) \cup ((A \cap B) \cup B^C) \\
&= ((A \cup A^C) \cap (B \cup A^C)) \cup ((A \cup B^C) \cap (B \cup B^C)) \\
&= (\mathbf{U} \cap (B \cup A^C)) \cup ((A \cup B^C) \cap \mathbf{U}) \\
&= (B \cup A^C) \cup (A \cup B^C) \\
&= B \cup A^C \cup A \cup B^C \\
&= \mathbf{U} \cup \mathbf{U} \\
&= \mathbf{U}
\end{aligned}
$$

Dado que

$(A \cap B) \cap (A \cap B)^C = \varnothing$

$(A \cap B) \cup (A \cap B)^C = \mathbf{U}$

entonces

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

TEOREMA

(6c) $(A^C)^C = A$

Demostración: Ejercicio

Ejercicios

1. Represente extensionalmente tres conjuntos de objetos que se hallen a su alrededor. Proponga una propiedad para definir cada conjunto. Trate de definir los mismos conjuntos por propiedades distintas a las previamente dadas.

2. Sea el dominio U = {1, 2, 3, 4} y sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Diga si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Justifique sus respuestas.

a) $B \subseteq A$

b) $2 \in B \cap A$

c) $B \subseteq \{A\}$

d) $A \subseteq B$

e) $(B \cap A)^C \subseteq A - B$

3. Diga sin son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Justifique sus respuestas.

a) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

b) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
c) $\varnothing \in \varnothing$
d) $\varnothing \subseteq \varnothing$

4. Establezca si son verdaderos o falsos los enunciados a continuación. Justifique sus respuestas.

a) $\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$
b) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} = \varnothing$
c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\} = \varnothing$
d) $\{\varnothing\} - \varnothing = \varnothing$
e) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$

5. Considere una lista de igualdades e inclusiones y determine i) si se cumplen en cualquier clase de conjuntos (las igualdades son universalmente válidas o simplemente válidas), o ii) si se cumple en alguna clase de conjuntos (las igualdades son consistentes o no contradictorias en alguna clase de conjuntos) en cuyo caso describa la clase que satisface las igualdades, o iii) si no se cumplen en ninguna clase (las igualdades son inconsistentes o contradictorias).

a) $A \subseteq B$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $B^C \subseteq A^C$
b) $A \cup B = \mathbf{U}$, $A^C \subseteq B$, $B^C \subseteq A$
c) $A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq B^C$, $B \subseteq A^C$.

Se verificara como ejemplo la consistencia del caso a):
Suponga que se cumple que $A \subseteq B$ (1), entonces se cumple que $A \cap B = A$ (2) por definición de $\subseteq$. se tiene entonces que $A \cup B$ = B (3) sustituyendo de acuerdo con (2) A por $A \cap B$ en (8a). Finalmente $B^C = (A \cup B)^C$ a partir de (3) y dado que $(A \cup B)^C = (A^{Cc} \cap B^C)$ por (7a), entonces $B^C \subseteq A^C$ por definición de $\subseteq$.

6. Demuestre mediante las leyes del álgebra de conjuntos las siguientes igualdades:

a) $(A \cap B^{Cc})^C = A^{Cc} \cup B$
b) $((A \cap B)^C \cap C)^C = (A \cap B) \cup C^C$
c) $((A \cap B)^C \cap A)^C = B \cup A^C$
d) $((A \cap B) \cap (A^{Cc} \cup B^C) = \mathrm{U}$

7. Sea la estructura $\langle \mathbf{A}, \cup, {}^{C} \rangle$ donde A es una clase de conjuntos no vacía (o al menos de dos elementos de conjuntos y $\cup$ denota la operación de intersección y ^{C} la operación complemento las que satisfacen los siguiente axiomas, para todo conjunto $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ en $\mathbf{A}$

a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$
b) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$
c) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}^{C} = \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{C}^{C}$ si y sólo si $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$.

Primero se necesita definir la operación de $\cap$ entre conjuntos, para lo cual puede servir la siguiente igualdad entre conjuntos de $\mathbf{A}$ de:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} =_{\text{def}} (\boldsymbol{A}^{C} \cup \boldsymbol{B}^{C})^{C} \text{ para todo } \boldsymbol{A} \text{ y } \boldsymbol{B} \text{ en } \mathbf{A}$$

Note que la definición no introduce sino una forma compacta, una *abreviatura* de una clase (de expresiones) de conjuntos en la estructura, para especificarla como definición se utiliza el símbolo $=_{\text{def}}$.

Segundo, se define la inclusión de conjuntos también como una forma compacta de representar la igualdad

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} =_{\text{def}} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}.$$

Se ha visto en los desarrollos la importancia de definir el conjunto vacío (¡¿Por qué?!). Considere su siguiente definición

$$\varnothing =_{\text{def}} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^{C}$$

Pero note que se debe demostrar el siguiente teorema (por qué?):

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^{C} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{B}^{C} \text{ para toda } \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \text{ en } \mathbf{A}.$$

Demostración: Ejercicio.

1.2 Relaciones

Considere los siguientes enunciados:

a) La tierra *gira alrededor del* sol.

b) Andrés *es tan inteligente como* Juan.

c) $2 \leq 3$

d) $5 \in N$

e) Luis *está entre* María *y* Alberto

En cada uno de los enunciados anteriores se afirma que una cierta *relación* se mantiene entre dos o más entidades. Como puede apreciarse, en los ejemplos las relaciones expresan interacción a), comparación b), orden c), pertenencia d), situación e), etc., dentro de las múltiples relaciones que pueden establecerse entre entidades. Observe que todos los hechos, principios y regularidades que se enuncian, en general todo el conocimiento, se refiere a relaciones que afirmamos se mantienen entre diversas entidades. El concepto de relación es, por lo tanto, una estructura esencial de nuestro razonamiento y su estudio, como se podrá apreciar más adelante, ocupa un lugar destacado en la lógica.

Como ya ha comenzado a hacerse evidente a través de los desarrollos anteriores, *el establecimiento de enlaces definicionales entre conceptos es un capacidad esencial de nuestro pensamiento y por ende objeto de estudio de la lógica*. Analicemos ahora cómo puede lograrse una definición del concepto de relación dentro de la teoría de conjuntos. La definición tendrá lugar bajo la dimensión extensional que caracteriza a los conjuntos

1.2.1 Pares ordenados

Dada una relación, los objetos que la mantienen entre sí pertenecen a un dominio dado. Luego, es evidente que una relación podría representarse relacionando todos los *pares, (tríos, etc.) de elementos* de un dominio que mantienen la relación entre sí.

Considere el enunciado a) que consta de la relación binaria (relación entre dos entidades) *girar alrededor de*. El enunciado afirma que dicha relación se mantiene entre los objetos ‘tierra’ y ‘sol’. Luego podemos afirmar que el par de objetos ‘tierra, sol’, es elemento de la relación *girar alrededor de* que restringida a los objetos del sistema solar, puede representarse extensionalmente como el conjunto de pares de objetos del sistema solar en que el uno de ellos gira alrededor del otro. Observe además que los pares de objetos que constituirían esta relación, por ejemplo, el par ‘tierra, sol’, no pueden ser dados en cualquier orden, ya que siguiendo con nuestro ejemplo, el par ‘sol, tierra’, extraído del enunciado falso (y que por mucho tiempo se tomó como verdadero) “el sol gira alrededor de la tierra” no pertenece a la relación en cuestión. De aquí que la relación expresa un orden y por ello se denomina *par ordenado* a todo par elemento de la relación.

El par ordenado, constituido por objetos *a* y *b* cualesquiera, se denotará de la manera siguiente:

$$\langle a, b \rangle$$

y se lee “el par ordenado *a*, *b*”. Se dice del objeto *a* que es el *primer elemento* y del objeto *b* que es el *segundo elemento* del par ordenado $\langle a, b \rangle$. El concepto de par ordenado ha sido informalmente caracterizado como un concepto primitivo. Si se quiere una definición formal se puede adoptar la siguiente definición de Banach-Kuratowski:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

dada en términos exclusivamente de la noción de conjunto. Se deja al lector el análisis de esta definición, así como su utilización para demostrar la igualdad entre pares ordenados:

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$$

Note que a partir de la definición de par ordenado es posible obtener la siguiente definición de *triplo ordenado*

***Definición*:** $\langle x, y, z \rangle = \langle x \langle y, z \rangle \rangle$.

Es decir, un triplo ordenado es un par ordenado cuyo segundo elemento es un par ordenado. En general, se puede definir un *n-uplo ordenado* de la manera siguiente:

***Definición*:** $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \rangle$

Es decir, un n-uplo ordenado es un par ordenado cuyo segundo elemento es un (n-1) uplo ordenado. Dadas estas definiciones, obtenidas todas a partir de la definición de par ordenado, está justificado que en lo adelante hablemos de pares ordenados.

Conjuntos productos

Continuando con el objetivo de lograr una definición conjuntual de las relaciones se definirán conjuntos cuyos elementos son n-uplos ordenados y a los cuales denominaremos conjuntos productos.

***Definición*:** Sean A y B conjuntos no necesariamente distintos, entonces se denomina *conjunto producto o producto cartesiano de A por B* y se denota mediante $A \times B$ al conjunto que tiene como elementos los pares ordenados de la forma $<x, y>$ tales que $x \in A$ y $y \in B$, es decir:

$$A \times B = \{<x, y> \mid x \in A \text{ y } y \in B\} \ .$$

Ejemplos:

a) Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces

$$A \times B = \{<1, a>, <1, b>, <2, a>, <2, b>, <3, a>, <3, b>\}.$$

b) Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces

$$\begin{aligned} A \times B \times A = \{&<1, a, 1>, <1, a, 2>, <1, a, 3>, <1, b, 1>, <1, b, 2>, <1, b, 3>,\\ &<2, a, 1>, <2, \mathrm{a}, 2>, <2, \mathrm{a}, 3>, <2, \mathrm{b}, 1>, <2, \mathrm{b}, 2>, <2, \mathrm{b}, 3>,\\ &<3, \mathrm{a}, 1>, <3, \mathrm{a}, 2>, <3, \mathrm{a}, 3>, <3, \mathrm{b}, 1>, <3, \mathrm{b}, 2>, <3, \mathrm{b}, 3>\} \ . \end{aligned}$$

Observe que un conjunto producto contiene por definición todos los pares ordenados posibles.

Generalizando,

***Definición*:** Sean $A_1, A_2,\dots, A_n$ conjuntos no-vacíos no necesariamente distintos, entonces

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ <x_1, x_2,\dots, x_n> \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \ \dots \ x_n \in A_n \}$$

El lector verificará que la operación producto entre conjuntos no es en general conmutativa. ¿Qué se puede decir en cuanto a la asociatividad?

Las operaciones conjuntuales se aplican por igual a los conjuntos productos. Si resulta interesante analizar las equivalencias distributivas de la operación producto con respecto a las operaciones conjuntuales como las siguientes:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Se dejan sus demostraciones al lector.

1.2.2 Relaciones binarias

A partir de la definición de conjunto producto se procede finalmente a definir rigurosamente el concepto de relación, no perdiéndose en generalidad, como ya se vio, si restringimos nuestra exposición a las relaciones binarias.

Definición: Sean los conjuntos A y B no necesariamente distintos, se dice que R es una *relación binaria de A en B* si R es un subconjunto de pares ordenados de $A \times B$, es decir, si

$$R \subseteq A \times B.$$

Si $A = B$, entonces se dice simplemente que R es una relación binaria en A. Observe que una relación binaria R en un conjunto A sólo contiene los pares ordenados de $A \times A$ que mantienen la relación entre sí.

En la práctica lógico matemática existen dos notaciones fundamentales para establecer que una relación se mantiene entre dos o más elementos. Si R es una relación binaria y $\langle a, b\rangle \in R$, entonces $R(a, b)$ (notación prefija) y aRb (notación infija) son formas alternas de afirmar que "*a* mantiene la relación R con *b*".

Partiendo entonces de la definición de relación binario se pueden establecer las siguientes definiciones de conjuntos asociados a dicha relación.

***Definición*:** Si R es una relación binaria se denota por $Dom(R)$ y se denomina *dominio de R* al conjunto:

$$Dom(R) = \{x \mid \text{existe } y \text{ tal que } \langle x, y\rangle \in R\}$$

***Definición*:** Si R es una relación binaria se denota por $Cod(R)$ y se denomina codo*minio de R* al conjunto:

$$Cod(R) = \{y \mid \text{existe } x \text{ tal que } \langle x, y\rangle \in R\}$$

Ejemplos:

a) La relación < ("*menor que*") en N es una relacion binaria con $Dom(<) = N$ y $Cod(<) = N - \{\varnothing\}$.

b) La relación < ("*menor que*") en R es una relacion binaria con $Dom(<) = Cod(<) = R.$

1.2.3 Operaciones entre relaciones

Nuevamente, dado que las relaciones son conjuntos todas las operaciones conjuntuales definidas entre conjuntos se pueden aplicar también entre relaciones. Por ejemplo la relación $\geq$ en R puede considerarse la unión de la relaciones $>$ y $=$ en R.

Sin embargo, lo importante es que con el nuevo tipo de conjuntos que son las relaciones, es decir, conjuntos de pares ordenados, tiene sentido definir para las relaciones otras operaciones conjuntuales. Así se tiene:

***Definición*:** Sea R una relación, entonces se define a partir de R una nueva relación denominada *inversa de R* y denotada por R^{-1} de la manera siguiente:

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\}$$

Ejemplos:

a)Sea $R = \{<1, 1>, <1,2>, <1, 3>, <1, 4>\}$, entonces $R^{-1} = \{<1, 1>, <2, 1>, <3, 1>, <4, 1>\}$.

b) La inversa de la relación $>$ en R es la relación $<$.

c) *padre* denota en español una relación binaria en el conjunto de los seres humanos. La inversa de padre es la relación *hijo.*

***Definición*:** Si R y S son relaciones, entonces se define a partir de R y S una nueva relación denominada la *compuesta de R con S,* denotada por S o R, de la manera siguiente:

$$S \circ R = \{<x, y> \mid \textit{Existe z tal que} <x, z> \in R \text{ y } <z, y> \in S\}$$

Ejemplos:

a) Sea $R = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$ y $S = \{<2, 3>, <3, 4>, <4, 1>\}$, entonces $S \circ R = \{<1, 3>, <2, 4>, <3, 1>\}$.

b) Considere las relaciones binarias entre los seres humanos *hermana* y *padre*, entonces verifique mediante ejemplos que la compuesta *padre* o *hermana* define la relación binaria *tía*.

1.2.4 Propiedades de las relaciones

Nuestro análisis de las relaciones será completado ahora con el estudio de algunas de sus propiedades fundamentales y la definición de algunos tipos de relaciones de gran importancia.

En las definiciones que siguen supondremos que las relaciones son binarias y que están definidas sobre los elementos de un determinado conjunto *A*, es decir, las relaciones son subconjuntos de A × A. Algunas afirmaciones de las propiedades en los ejemplos se darán sin justificación apelando a la familiaridad del lector con las relaciones usadas para ilustrarlas.

Reflexividad

Primero, analicemos como puede ser el comportamiento de una relación con respecto a cualquier elemento del conjunto donde está definida. La propiedad que define este comportamiento se denomina *reflexividad* y puede ser de dos formas fundamentales:

Definición: Una relación R en A es *reflexiva* si y sólo si para toda $x \in A$ se tiene que $<x, x> \in R$.

Ejemplos:

a) De la definición de la relación $\subseteq$ entre conjuntos se deduce que la misma es reflexiva, es decir, para cualquier conjunto A, $A \subseteq A$ (todo conjunto es subconjunto de sí mismo).

b) La relación $\geq$ en **R** es reflexiva.

c) La relación "ser tan alto como" es reflexiva en cualquier conjunto de seres humanos.

Definición: Una relación R en A es *irreflexiva* si y sólo si para toda $x \in A$ se tiene que $<x, x> \notin R$.

Ejemplos:

a) La relación < ("ser menor que") es irreflexiva en ℝ

b) La relación de subconjunto propio $\subset$ es por definición irreflexiva

c) la relación “ser padre de” es irreflexiva en el conjunto de los seres humanos.

Simetría

Veamos ahora cual es el comportamiento de la relación con respecto a dos elementos no necesariamente distintos del conjunto donde está definida. La propiedad que define este comportamiento se denomina *simetría* y puede adoptar tres formas fundamentales:

Definición**:** Una relación R en A es *simétrica* si y sólo si para toda $x \in A, y \in A$ se tiene que si $<x, y> \in R$, entonces $<y, x> \in R$.

Ejemplos:

a) Sea $A= \{1, 2, 3\}$, entonces la relación
$R = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 1>, <3, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$ es simétrica en A.

b) la relación = (de igualdad) es simétrica en cualquier conjunto numérico.

c) La relación *ser tan alto como* es simétrica en cualquier conjunto de seres humanos

Definición**:** Una relación R en A es *asimétrica* si y sólo si para toda $x \in A, y \in A$ se tiene que si $<x, y> \in R$, entonces $<y, x> \notin R$.

Ejemplos:

a) para todo $n \in \mathbf{N}$, n+1 se denomina el *sucesor inmediato de n*. La relación *ser sucesor inmediato de* constituida por todos los pares de la forma $<n, n+1>$ es asimétrica en $\mathbb{N}$.

b) La relación $<$ es asimétrica en $\mathbf{R}$.

c) La relación $\subset$ es asimétrica entre conjuntos.

Definición**:** Una relación *R* en *A* es *antisimétrica* si y sólo si para toda $x \in A$, $y \in A$, si $<x, y> \in R$ y $<y, x> \in R$, entonces $x = y$.

Ejemplos:

a) La relación $\geq$ (”mayor o igual que”) es antisimétrica en **R**.

b) La relación $\subseteq$ es antisimétrica en el conjunto potencia 2^A de cualquier conjunto A.

Transitividad

A continuación veamos cual es el comportamiento de una relación con respecto a tres elementos no necesariamente distintos del conjunto donde está definida. La propiedad que define este comportamiento se denomina *transitividad* y puede adoptar dos formas fundamentales:

Definición**:** Una relación *R* en *A* es *transitiva* si y sólo si para toda $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ se tiene que si $<x, y> \in R$ y $<y, z> \in R$, entonces $<x, z> \in R$.

Ejemplos:

a) La relación $\geq$ (”mayor o igual que”) es transitiva en **R**.

b) La relación $\subset$ es transitiva entre conjuntos.

c) La relación “ser tan alto como” es transitiva en cualquier conjunto de seres humanos.

Definición**:** Una relación *R* en *A* es *intransitiva* si y sólo si para toda $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ se tiene que si $<x, y> \in R$ y $<y, z> \in R$, entonces $<x, z> \notin R$.

Ejemplos:

a) La relación *ser padre de* es intransitiva en el conjunto de los seres humanos.

b) La relación *ser sucesor inmediato* es intransitiva en **N**.

1.2.5 Relaciones de Orden

Ya se ha aducido que no se considera un orden intrínseco entre los elementos de un conjunto que como entidades abstractas no tienen orden. Esta abstracción va a permitir que puedan introducirse diferentes órdenes en un conjunto. A continuación se definen relaciones fundamentales que permiten introducir un orden entre los elementos de un conjunto.

Definición**:** Una relación R en un conjunto A, se denomina un *orden parcial* de A si y sólo si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva en A.

Ejemplos:

a) La relación $\subseteq$ es un orden parcial en cualquier clase de conjuntos.

b) La relación $\leq$ es un orden parcial en **R**.

La relación $<$ en **R** no es un orden parcial (no es reflexiva), sin embargo puede definirse a partir de la relación $\leq$ en **R** de la siguiente manera:

$$x < y \text{ si y sólo si } x \leq y \text{ y } x \neq y$$

.

Se deja al lector la demostración a partir de la definición dada de que esta relación es irreflexiva, asimétrica y transitiva en **R**. Este tipo de relaciones se conoce como *orden parcial estricto*.

Definición**:** Una relación R en un conjunto A, se denomina un *orden parcial estricto* de A si y sólo si R es irreflexiva (asimétrica) y transitiva en A.

Ejemplos:

a) La relación $\subset$ es un orden parcial en cualquier clase de conjuntos.

b) La relación $<$ es un orden parcial estricto en **R**.

Se deja como ejercicio al lector que demuestre que toda relación irreflexiva y transitiva cumple que es asimétrica y transitiva, y viceversa.

Definición: Una relación R en un conjunto A se denomina un *orden total* (*lineal*) si y sólo si R es un orden parcial y además para toda $x \in A$, $y \in A$, se tiene que $x\ R\ y$ o $y\ R\ x$.

Ejemplo:

a) La relación $\leq$ en **R** es un orden total, es decir, para cualquier par de números reales x, y, se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$.

b) Verifique que la relación de orden parcial $\subseteq$ en 2^A para cualquier conjunto A es un orden parcial que no es total.

Si una relación R en un conjunto A es un orden, entonces su relación inversa R^{-1}[1] es también un orden que tiene las mismas propiedades que R. El lector verificará que la inversa de la relación $<$ en $\mathbb{R}$ es la relación $>$ y es también un orden con las mismas propiedades que $<$.

1.2.6 Relaciones de equivalencia

Además, teniendo en cuenta las propiedades anteriores se define a continuación un tipo de relación muy importante: la relación de equivalencia.

***Definición*:** Una relación binaria R en un conjunto A es una *relación de equivalencia* si y sólo si R es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Ejemplos:

a) La relación *ser tan alto como* es una relación de equivalencia en cualquier conjunto de seres humanos.

b) La relación de igualdad es una relación de equivalencia en cualquier conjunto.

Las relaciones de equivalencia constituyen un poderoso instrumento de definición de entidades abstractas. Así, sea R una relación de equivalencia definida sobre los elementos de un conjunto A y sea $a \in A$, entonces se denomina *clase de equivalencia por R de a* y se denota mediante $[a]$ al conjunto de las x, $x \in A$, que mantienen con a la relación R, es decir,

$$[a] = \{ x \mid \langle a, x \rangle \in R \} .$$

La familia de las clases de equivalencia por R de A se denomina *el cociente de* A *por R* y se denota por A/R, es decir,

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

Así, a partir del conjunto A hemos definido otro conjunto A/R mediante una relación de equivalencia que contiene como elementos clases abstracta de entidades. Este proceso definitorio que se acaba de exponer es de gran importancia en la ciencia en general pues fundamenta procesos clasificatorios y de definiciones abstractas de clases como se verá en el ejemplo matemático a continuación.

Ejemplo:

Considere el conjunto de los enteros $\mathbf{Z}$ y sea R una relación en $\mathbf{Z}$ tal que $R = \{\langle x, y\rangle \mid x - y \textit{ es divisible por } n \textit{ y } n \in \mathbf{N}\}$. Se puede verificar que R es una relación de equivalencia en $\mathbf{Z}$ ya que:

a) $x - x$ es divisible por n (reflexiva),
b) si $x- y$ es divisible por n, entonces $y - x$ es divisible por n (simétrica) y
c) si $x - y$ es divisible por n y $y - z$ es divisible por n, entonces $x - z$ es divisible por n dado que $x - z = (x - y) + (y - z)$.

Para $n = 5$, se tiene que $\mathbf{Z}/R$ tiene como elementos los siguientes 5 conjuntos:

$\{..., -10, -5, 0, 5, 10,...\}$

$\{..., - 9, - 4, 1, 6, 11,...\}$

$\{..., - 8, - 3, 2, 7, 12,...\}$

$\{..., - 7, - 2, 3, 8, 13,...\}$

$\{..., - 6, - 1, 4, 9, 14,...\}$

Partición de conjuntos

Si se observan las clases definidas por R en $\mathbf{Z}$, se verifica que las mismas satisfacen los siguientes condiciones:

a) $\emptyset \notin \mathbf{Z}/R$

b) Cualesquiera dos clases distintas de $\mathbf{Z}/R$ son disjuntas

c) La unión de todas las clases de $\mathbf{Z}/R$ es igual a $\mathbf{Z}$,

Entonces, de manera general

***Definición*:** Se denomina *partición* del conjunto A, a una clase B de subconjuntos de A que satisface las siguientes condiciones:

a) $\emptyset \notin B$

b) Dados dos conjuntos A_i y A_j, $i \neq j$, de B se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$

c) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son los subconjuntos de A que son elementos de B, entonces $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$

Luego, de manera general, se tiene la siguiente proposición:

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces a partir de R puede definirse una partición de A, precisamente A/R, y viceversa, si se tiene una partición B de A entonces puede definirse una relación de equivalencia R en A tal que B= A/R.

Para demostrar esta proposición se necesita demostrar que A/R es una partición de A y, por otro lado, que para una partición B de A existe una relación de equivalencia R que, definida sobre A, cumple que $B= A/R$.

Las principales ideas para demostrar que A/R es una partición parten de la propia definición de A/R:

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

donde cada $[a]$ es una clase de equivalencia de A que cumple:

$$[a] = \{ x \mid \langle a, x\rangle \in R \}$$

donde R es una relación de equivalencia y, por tanto, es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Entonces para demostrar que A/R es una partición es necesario probar que:

a) $\emptyset \notin A/R$,
b) la intersección de clases de equivalencia diferentes de A por R es el vacío
c) y que la unión de todas las clases de equivalencia da como resultado precisamente el conjunto A.

Se cumple que $\emptyset \notin A/R$, pues cada clase de equivalencia cumple que $x \in [x]$ para toda $x \in A$ pues la relación R es reflexiva y, de esta manera, $[x] \neq \emptyset$ para toda $x \in A$.

Además, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, con $a \neq b$, entonces se cumple que $[a] = [b]$ y por tanto son la misma clase de equivalencia.

Esto se cumple porque si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces existe un x, $x \in A$, tal que $x \in [a]$ y $x \in [b]$. Si x es el único elemento de $[a]$ entonces también es el único elemento de $[b]$ cumpliéndose que $a=b=x$ y por tanto $[a]= [b]$.

Ahora, si $x \in [a]$ y existe y, $y \in [a]$, $x \neq y$, entonces, por definición de $[a]$ se cumple que $\langle a,x \rangle \in R$ y $\langle a,y \rangle \in R$. Como R es simétrica se cumple también que $\langle x,a \rangle \in R$ y como también $x \in [b]$ se tiene que $\langle b,x \rangle \in R$ y por tanto $\langle x,b \rangle \in R$. Así, como R es transitiva, si $\langle x,a \rangle \in R$ y $\langle a,y \rangle \in R$ se tiene que $\langle x,y \rangle \in R$. Del mismo modo, como $\langle x,b \rangle \in R$ y $\langle x,y \rangle \in R$ se cumple que $\langle b,y \rangle \in R$, por lo que $y \in [b]$.

Así se verifica que, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces para cualquier y si $y \in [a]$ se cumple que $y \in [b]$ y, por tanto, $[a] = [b]$. Esto demuestra que la intersección de clases de equivalencia diferentes de A por R es el vacío. Finalmente, como R es reflexiva, cada elemento de A está contenido en una clase de equivalencia (al menos la de sí mismo) y, tanto, la unión de todas las clases de equivalencias tendrá a todos los elementos de A, o sea, la unión será precisamente el conjunto A.

Para demostrar la segunda parte de la proposición,

> que para una partición B de A existe una relación de equivalencia R que, definida sobre A, cumple que $B = A/R$ (2),

bastaría con encontrar dicha relación de equivalencia R.

Si tenemos que $B=\{ B_1, B_2, ..., B_n \}$ entonces podemos definir la relación R de la siguiente forma:

$$R=\{\langle x,y \rangle \mid \text{existe i tal que } x \in B_i \text{ y } y \in B_i \}$$

Dejamos al lector la demostración de que R es precisamente una relación de equivalencia.

Ejercicios

1. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $R = \{<x, y> / x, y \in A, x < y\}$. Represente en forma extensional: R, R^{-1}, $R \cup R^{-1}$, $R \cap R^{-1}$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$.

2. Demuestre las equivalencias distributivas de la operación producto dadas en el texto.

3. Sean R y S relaciones no-vacías en un conjunto A. Diga si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Justifique sus respuestas.

    a) Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.
    b) Si R es asimétrica, entonces $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
    c) Si R es asimétrica y transitiva, entonces R es irreflexiva.
    d) Si R es transitiva e irreflexiva, entonces R es asimétrica.

4. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

    a) Halle todas las particiones de A.
    b) Defina extensionalmente una relación de equivalencia para cada una de las particiones de A.

5. Sean R y S relaciones de equivalencia sobre un conjunto A, y sean n y m el número de clases de equivalencia en A/R y A/S respectivamente. A partir de R y S se define la relación P de la manera siguiente:

    $$x\ P\ y \text{ si y sólo si } (x\ R\ y) \text{ y } (x\ S\ y)\ .$$

    Se verifica que P es una relación de equivalencia en A.

    a) ¿Cuál es el menor número de clases de equivalencia de P? ¿Cuál el mayor?
    b) Se define una relación de equivalencia Q como sigue: $x\ Q\ y$ si y sólo si $(x\ R\ y)$ o $(x\ S\ y)$. ¿Cuál es el menor número de clases de equivalencia de Q? ¿Cuál el mayor?

6. Considere la siguiente relación R definida en el conjunto de los enteros **Z** de la manera siguiente: para toda $x, y \in \mathbf{Z}$, $x\ R\ y$ si y sólo si existe $z \in \mathbf{Z}$ tal que $x = y + z$. Determine el tipo de R de acuerdo con las propiedades que cumple según la definición dada. Analice el caso para $z \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

7. Sea la relación denotada por < definida en $\boldsymbol{R}$ de la manera siguiente:

$$x < y \text{ si y sólo si } x \leq y \text{ y } x \neq y.$$

Demuestre que < es irreflexiva, asimétrica y transitiva en $\boldsymbol{R}$.

8. Analice la definición formal de par ordenado y utilícela para demostrar la igualdad entre pares ordenados.

9. Demuestre que la relación X divide a Y es una relación de orden parcial en **N** y verifique que no es un orden total.

10. Digamos que dos enteros son cercanos entre sí, si su diferencia es 2 o menor. Por ejemplo, 3 es cercano a 5, 10 es cercano a 9, pero 8 no es cercano a 4. Sea *R* la relación "cercano a":

    a) Escriba *R* de forma intencional
    b) Demuestre o refute que *R* es:
        i. Reflexiva
        ii. Irreflexiva
        iii. Simétrica
        iv. Asimétrica
        v. Antisimétrica
        vi. Transitiva
        vii. Intransitiva

11. Si *R* y *R'* son relaciones de equivalencia diga y justifique si las siguientes relaciones lo son o no:

    a) $R \cap R'$
    b) $R \cup R'$
    c) $R - R'$

12. Sean *R* y *S* relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto *A*. Demuestre que si $R \subseteq S$ entonces $|A/R| \geq |A/S|$.

1.3. Funciones

Las relaciones permiten dar una definición abstracta del concepto de función usual en matemática y computación. Este concepto se define de manera intuitiva diciendo que *f* es una función definida en un conjunto *A* y con valores en un conjunto *B*, lo cual se denota por

$$f : A \to B$$

si *f* "asocia" ("hace corresponder") a cada elemento de *A* uno y sólo un elemento de *B*.

La definición anterior no es rigurosa dada la imprecisión de las expresiones ("asocia", "hace corresponder") utilizadas. Los desarrollos hasta aquí permiten definir el concepto de función de manera más precisa, rigurosa, como un tipo particular de relaciones que se denominan relaciones funcionales:

***Definición*:** Sea la relación $f \subseteq A \times B$, entonces se dice que *f* es una *relación funcional* o *función parcial de A en B* si y sólo si para toda $x \in A$, si $<x, y> \in f$ y $<x, z> \in f$, entonces $y = z$.

Se tiene que $Dom(f) \subseteq A$, por lo que $Dom(f)$ contiene los elementos de A para el cual se considera *definida* la función. Si $Dom(f) = A$, entonces decimos que *f* es una *función total* de *A* en *B* . Observe que $Cod(f) = f[Dom(f)] = \{y \mid <x, y> \in f \subseteq B$. También se denomina a $f[Dom(f)]$ la *imagen* de *f* determinada en *B* por su dominio $dom(f)$.

En lo que sigue sólo se consideran funciones totales a las que se denominará simplemente funciones.

Si *f* es una función y si $<x, y> \in f$, entonces la determinación única de *y* por *x* a partir de *f* se denota por *f(x)* que se lee indistintamente: "*f* de x", "*f* en x", "la imagen de x por *f*", "el valor de x por *f*". De manera que $f(x)$ es una nueva notación para *y*, es decir, $f(x) = y$ y entonces el par $<x, y>$ puede escribirse también de la forma $<x, f(x)>$.

Ejemplos:

a) La relación $\{<0,1>, <1, 2>, <2, 3>, ..., <n, n + 1>, ... \} \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ es una función, ya que cada elemento *n* de $\mathbb{N}$ mantiene la relación exclusivamente con el elemento $n + 1$ de ***N***. Esta función se denomina *función sucesor*.

b) La relación $\{ <0, 0>, <1, 1>, <2, 2>, ..., <n, n>, ... \} \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ es, como puede verificarse, una función, denominada la *función identidad* en **N**.

c) La relación $\{ <0, n>, <1, n>, <2, n>, ..., <n, n>, ... \} \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ es, como puede verificarse, una función, denominada una *función constante* en $\mathbb{N}$.

d) La relación $\{ <x, x^2>| x\in\mathbf{R} \} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ es la *función cuadrado* en **R**.

e) Sea $f = \{ <x, sen\ x> \mid x\in\mathbf{R} \}$, entonces $dom(f) = \mathbf{R}$ y $f[\mathbf{R}] = \{ y \mid y\in\mathbf{R},\ \text{y} -1 \leq y \leq +1 \}$.

f) Sea $f = \{ <x, 7x + 2> \mid x\in\mathbf{R} \}$, entonces verifique que $dom(f) = f[dom(f)]$.

A continuación se define la igualdad de funciones como un caso particular de la igualdad de conjuntos.

***Definición*:** Sean las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$, se tiene que $f = g$ si y sólo si para toda $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Es decir dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y codominio y las imágenes de cualquier elemento del dominio por ambas funciones es la misma.

1.3.1 Tipos de funciones

El concepto de función que acabamos de definir es el más general, sin embargo, en la práctica, conviene tener en cuenta algunas especificaciones que dan lugar a diferentes tipos de funciones.

***Definición*:** Una función $f: A \rightarrow B$ se denomina *inyectiva* o una *inyección* si y sólo si para toda $x\in A$, $y\in A$, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

Es decir, una función es inyectiva si a elementos distintos de su dominio le corresponden imágenes distintas, es decir, si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

Ejemplos:

El lector verificará que

a) $f = \{< x, a^x > \mid x\in \mathbf{R} \}$ (función exponencial),
b) $f = \{<x, x^3 + 2> \mid x\in\mathbf{R} \}$ (función cubo+2)

son funciones inyectivas, mientras que

d) $f = \{<x, x^2> \mid x \in \mathbf{R}\}$ (función cuadrado)
e) $f = \{<x, |x|> \mid x \in \mathbf{R}\}$ (función valor absoluto)

no son funciones inyectivas.

Definición**:** Una función $f: A \rightarrow B$ se denomina *sobreyectiva* o una *sobreyección* si y sólo si se cumple que para toda y, $y \in B$, existe x, $x \in A$, tal que $y = f(x)$. Es decir, si $f[A] = B$.

Ejemplos:

a) $f = \{ <x, x> \mid x \in \mathbf{R} \}$, la función identidad en **R** es sobreyectiva.

b) Sea $f = \{ <x, x / |x|> \mid x \in \mathbf{R} - \{0\}\}$, la función es sobreyectiva si se toma B = {-1, 1}.

Existen funciones que no cumplimentan ninguna de las dos definiciones anteriores, el lector hallará ejemplos.

Definición: Una función $f: A \rightarrow B$ se denomina *biyectiva* o una *biyección* si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplos:

a) La función identidad definida en cualquier conjunto A es biyectiva.

b) La función $f = \{<<x, y>, <y, x>> \mid <x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$ es biyectiva.

Es fácil demostrar que si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva también lo es su inversa; Una función biyectiva establece lo que se denomina alternativamente una *correspondencia biunívoca* entre los elementos de A y B.

1.3.2 Operaciones con funciones

Considérese ahora las operaciones definidas entre relaciones para el caso particular de las relaciones funcionales. No siempre una operación entre relaciones funcionales da como resultado una relación funcional: la unión de funciones no es en general una función y la intersección de funciones o es vacía o es una función. Los casos de operaciones más interesantes son los de función inversa y composición de funciones.

Sea la función $f: A \to B$, su inversa f^{-1} no es necesariamente una función. Sin embargo, si f es biyectiva entonces se puede verificar que f^{-1} es una función también biyectiva.

Ejemplos:

a) La inversa f^{-1} de la función identidad f de cualquier conjunto A es biyectiva y es igual a f.

b) Sea $f = \{<x, 1/2x> \mid x \in \mathbf{R}\}$, entonces $Dom(f) = \{ x \mid x \in \mathbf{R}$ y $-1 < x \leq 2 \}$ y $f[Dom(f)] = \{y \mid y \in \mathbf{R}$ y $-1/2 \leq y \leq +1 \}$. Se tiene que f es una función biyectiva lo cual se verificará como ejercicio.

Sea $f: A \to B$ y $A' \subseteq A$, entonces la *restricción* de f a A' denotada por $f|A'$ es una función de A' en B definida por $f|A'(x) = f(x)$ para toda $x \in A$. En ocasiones resulta útil definir la restricción de una función y a partir de esta restricción se puede entonces definir una función inversa.

Ejemplos:

Sea $f = \{ < x, x^2 > \mid x \in \mathbf{R} \}$ y sea $\mathbf{R}^{+} = \{ x \mid x \in \mathbf{R}$ y $0 < x < \infty \}$, entonces $f \mid \mathbf{R}^+$ denota la restricción de f a $\mathbf{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$. Se verifica que f no es inyectiva, pero $f \mid \mathbf{R}^+$ lo es, siendo su inversa $(f \mid \mathbf{R}^+)^{-1} = \{ < x, \sqrt{x} > \mid x \in \mathbf{R}^+ \}$.

Sean las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, entonces $g \circ f$ es una función con dominio en A e imagen en C, es decir, $g \circ f: A \to C$.

En notación de conjuntos ya se vio que

$g \circ f = \{ <x, y> \mid$ *Existe z tal que* $<x, z> \in f$ y $<z, y> \in g \}$.

Ejemplos:

a) Sea $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 3, 4, 5 \}$ y $C = \{ 2, 4, 6 \}$. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definidas de la siguiente manera:

$$f = \{<1, 3>, <2, 4>, <3, 5>\},$$
$$g = \{<3, 2>, <4, 6>, <5, 6>\}.$$

La función $g \circ f: A \to C$ se determina de la manera siguiente:

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(3) = 2$$
$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4) = 6$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(5) = 6$$

luego $g \circ f = \{ <1, 2>, <2, 6> <3, 6> \}$.

b) Sea $f = \{< x, x^2 > \mid x \in \mathbb{R} \}$ y $g = \{<x, 1/x> \mid x \in \mathbf{R} \}$, entonces

$$g \circ f = \{ < x, 1/x^2 > \mid x \in \mathbb{R} \} \text{ y } f \circ g = \{ < x, (1/x)^2 > \mid x \in \mathbf{R} \} .$$

De los ejemplos a) y b) se desprende que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$, es decir, *la composición de funciones no es una operación conmutativa*. Sin embargo, la composición de funciones es asociativa, es decir,

$$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = g \circ f \circ h.$$

lo cual es fácil de demostrar y se deja como ejercicio.

Si f y g son funciones inyectivas (sobreyectivas, biyectivas, respectivamente), entonces $f \circ g$ es también inyectiva (sobreyectiva, biyectiva, respectivamente). Se dejan las demostraciones al lector como ejercicio.

1.3.3 Funciones de *n* variables

Hasta ahora hemos definido las relaciones funcionales como un caso especial de relaciones binarias. Existen relaciones funcionales n-arias, por ejemplo la suma y el producto de números reales:

$$+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

Muchas relaciones *n*-arias (*n>2*) entre magnitudes, que la investigación científica ha logrado establecer son también relaciones funcionales. Así, por ejemplo, la relación entre la fuerza *F*, la masa *m* y la aceleración *a* de una partícula material, es establecida por la segunda ley de la mecánica newtoniana mediante la ecuación:

$$F = m \cdot a$$

Esta ecuación define una función de la forma $z = f(x, y)$ es decir, *una función de dos variables*.

Note que una relación funcional binaria define una función de una variable, una relación funcional ternaria define una función de 2 variables y que, en general, una relación funcional $n+1$-aria define una función de n variables. Todos los desarrollos realizados son generalizables a funciones de n variables.

Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones R son funciones?

   a) $R = \{\langle x, x+x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$
   b) $R = \{\langle x, x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$
   c) $R = \{\langle x, x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$
   d) $R = \{\langle \log x, x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$
   e) $R = \{\langle x, \log x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$

2. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Para cada una de las relaciones R que se dan a continuación, determine si R es una función parcial, una función total, una función inyectiva o una función sobreyectiva.

   a) $R = \{ \langle 0, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle \}$
   b) $R = \{ \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 0, 2\rangle \}$
   c) $R = \{ \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 1, 4\rangle \}$
   d) $R = \{ \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle 3, 2\rangle \}$

3. Sean $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ funciones. Demuestre que:

   a) Si f es sobreyectiva y g es sobreyectiva, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.
   b) Si f es inyectiva y g es inyectiva, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
   c) Si $f \circ g$ es sobreyectiva, g no es necesariamente sobreyectiva.
   d) Si $f \circ g$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.
   e) Si $f \circ g$ es inyectiva, f no es necesariamente inyectiva.
   f) Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.

4. Sea R una relación definida sobre un conjunto A. Demuestre que R es una relación de equivalencia si y solo si existe una función $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ que cumple que para todo par de valores $a\in A, b\in A$ se cumple que $\langle a,b\rangle\in R$ si y solo si $f(a)=f(b)$.

5. Sea A un conjunto dado y sean Q el conjunto de todas las relaciones de equivalencia que se pueden definir sobre A y P el conjunto de todas las particiones de A. Demuestre que es posible encontrar una función biyectiva $f: Q \rightarrow P$

Capítulo 2 Lógica Proposicional

2.1. Proposiciones

Los siguientes son ejemplos de *proposiciones*:

a) Ana lee un libro.
b) Luis no es médico.
c) La Tierra efectúa un movimiento de rotación sobre su eje y un movimiento de traslación alrededor del Sol.
d) 2 es un número par o divisible por sí mismo.
e) Si llueve, entonces suspendemos la fiesta.
f) Es posible que llueva mañana.
g) Es necesario que alguien lo ayude.
h) Salga usted.
i) ¿Hay alguna forma de vida en el planeta Marte?
j) Se debe aminorar la marcha de un vehículo en las intersecciones.

El lector, a partir de estos ejemplos podrá formular otros. Se observará que en gramática se denominan *oraciones* a los ejemplos anteriores. La palabra "oración" tiene una connotación lingüística: cierto tipo de expresiones de un lenguaje natural como el español se denominan oraciones. Por otra parte la palabra "proposición" tiene una connotación lógica: las proposiciones expresan información, conocimiento resultado de nuestra actividad pensante que puede consistir esencialmente en:

- la afirmación (negación) de que un objeto tenga una propiedad dada o de que exista una relación entre dos o más objetos: a), b)
- conexión lógica entre proposiciones: c), d), e)
- posibilidad de ocurrencia de un hecho: f)
- necesidad de un estado de cosas: g)
- comunicación de una orden: h)
- planteamiento de una interrogante: i)
- enunciado de un precepto legal: j)

Se puede considerar que las proposiciones constituyen el *sentido* o *significado* asociado a una oración. Para que se tenga una idea de la diferencia entre la aproximación gramatical y la lógica, considere las dos oraciones siguientes:

a) Todos los hombres son mortales
b) Ningún hombre es inmortal

Desde un punto de vista gramatical se trata de dos oraciones diferentes ya que diferentes son sus estructuras sintácticas, como puede advertir cualquier hablante español. Sin embargo, intuitivamente se puede apreciar que *son oraciones que expresan el mismo significado*. Como se verá más adelante, está apreciación intuitiva es confirmada por la lógica, asociando estructuras lógicas distintas pero lógicamente equivalentes a ambas oraciones.

Analizando las proposiciones dadas, es decir el significado que expresan, la lógica las clasifica de la manera siguiente:

- a) – e) son proposiciones *declarativas*, es decir, proposiciones que afirman o niegan que un objeto o conjunto de objetos tenga una propiedad o que determinados objetos mantengan determinada relación (interacción, dependencia, etc.) entre sí.

- d) – j) son proposiciones *modales*, es decir, proposiciones en las cuales ocurren ciertos operadores que introducen cierta modalidad del significado expresando *necesidad* ("es necesario que"), *posibilidad* ("es posible que")), *mandato* (modo imperativo del verbo), *interrogación* (signo de interrogación), *norma* ("se debe").

Todas estas proposiciones son de empleo común en las múltiples situaciones comunicativas del ser humano y se han desarrollado lógicas para su estudio. De paso, a) – e) tienen también una modalidad, a saber, su declaratividad, a veces sobre todo para enfatizar, decir lo que otro afirma, lo que se piensa, etc. se utilizan también operadores ("decir que", "afirmar que", "pensar que", etc.).

Este libro se concentrará en el estudio de las proposiciones declarativas. Se trata del tipo de proposiciones que de manera esencial y regular se utilizan en el quehacer común y científico y constituyen un punto de partida en el estudio de la lógica. Por lo tanto, a partir de ahora cuando se hable de proposiciones se estará haciendo referencia solamente a las proposiciones declarativas tales como a) - e).

El estudio que se realizará de las proposiciones será divido en dos partes. La primera parte que constituye el contenido del presente capítulo se denomina lógica proposicional, la segunda denominada Lógica de predicados constituye el contenido del siguiente capítulo. Es a través del estudio de ambos capítulos que el lector tendrá una concepción acabada del estudio que realiza la lógica

2.1.1 Lógica proposicional bivalente

Operaciones proposicionales

La lógica proposicional se concentra en el estudio de determinadas operaciones que se aplican a proposiciones: ciertos operadores lógicos, denominados *operadores proposicionales*, conectan proposiciones dadas, dando lugar a nuevas proposiciones. A continuación, se presentan y analizan ejemplos de proposiciones en las que ocurren operadores proposicionales denotados por determinadas unidades lingüísticas en lengua española, los cuales aparecen resaltados en itálica:

a) Laura estudia matemática.
b) el libro *no* contiene figuras.
c) Antonio vive en México *o* en La Habana
d) Luisa es casada *y* tiene tres hijos.
e) *Si* AB es paralela a CD, *entonces* CD es paralela a AB.
f) $A \subseteq B$ *si y solo si* $A \cup B = A$

Una proposición como a) será considerada un ejemplo de *proposición elemental*, es decir, proposición en la cual (al menos explícitamente) no interviene ninguna operación proposicional. En gramática se considera que el ejemplo dado es una oración simple, es decir, una oración compuesta exclusivamente de un sujeto (Laura) y un predicado (estudia matemática). Lo anterior no define de manera rigurosa, formal, qué es una proposición elemental.

La proposición b) es un ejemplo de *negación*, es decir, es una proposición resultado de aplicar a otra proposición una operación lógica denominada *negación* representada lingüísticamente por *no*.

La proposición c) es un ejemplo de *disyunción*, es decir, es una proposición que resulta de aplicar a dos proposiciones una operación lógica denominada *disyunción* representada lingüísticamente por *o*.

La proposición d) es un ejemplo de *conjunción*, es decir, es una proposición que resulta de aplicar a dos proposiciones una operación lógica denominada *conjunción* representada lingüísticamente por *y*.

La proposición e) es un ejemplo de *implicación (condicional)*, es decir, es una proposición que resulta de aplicar a dos proposiciones una operación lógica denominada *condicional* representada lingüísticamente por *si*..., *entonces*...”

La proposición f) es un ejemplo de *bicondicional*, es decir, es una proposición que resulta de aplicar a dos proposiciones una operación lógica denominada bicondicional representada lingüísticamente por *si y solo si*.

Muchas proposiciones resultan ser una composición de varias proposiciones elementales conectadas por varios operadores proposicionales como muestran los siguientes ejemplos:

a) *Si* 2 es un número primo *y* par, *entonces* 2 *no* es impar.

b) *No es cierto que* Pedro y Rosa vinieron a verme.

c) *Si* AB *no* es paralela a CD, *entonces* CD *no* es paralela a AB *y*, además, *si* CD es paralela a CF, *entonces* CF *no* es paralela a AB.

Como puede apreciarse la proposición a), es una condicional cuyo operador se aplica entre una conjunción “2 es un numero primo y par” y una negación “2 no es impar”. La proposición b) es una negación cuyo operador representado en este caso por la expresión “*no es cierto que*” se aplica a la conjunción “Pedro y Rosa vinieron a verme”. La proposición c) es una conjunción lógica que conecta condicionales en las que a su vez ocurren negaciones como analizará el lector.

Proposiciones bivalentes

Una de las características fundamentales de las proposiciones declarativas y que las distingue con respecto a otros tipos de proposiciones, es la de tener lo que en lógica se denomina un *valor de verdad* que en el caso particular que se estudiará en este libro, quiere decir que una proposición puede tener uno de dos *valores de verdad*, es decir, la proposición puede ser *verdadera* o *falsa*. El estudio de la lógica proposicional queda pues restringido en este libro al estudio de las *proposiciones bivalentes*. En resumen, cuando se hable de proposiciones a seca se estará haciendo referencia exclusivamente a *proposiciones declarativas bivalentes*.

Para realizar el estudio de las proposiciones se adopta en lógica proposicional un punto de vista *extensional*, caracterizado por los dos aspectos siguientes:

a) se hace abstracción del significado que expresan las proposiciones y *se considera solamente el valor de verdad (verdadero, falso) de las mismas*.
b) los operadores proposicionales se definen como *funciones de verdad*, es decir, como *funciones que determinan el valor de verdad de una proposición a partir de los valores de verdad de las proposiciones a las que se aplican.*

Como se verificará más adelante, un resultado de este punto de vista extensional es que

> *Las definiciones abstractas de las operaciones proposicionales como funciones de verdad no necesariamente captan todo el uso y matices de operaciones análogas en el razonamiento ordinario,*

Sin embargo,

> *Si capturan el uso de estas operaciones en gran parte del discurso científico, por ejemplo, en la matemática ordinaria y, como se verá más adelante, constituyen la base de los procesos de información que realizan las computadoras.*

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de la lógica proposicional es proponer teorías que caractericen estas operaciones permitiendo la construcción de sistemas de cálculo y razonamiento que puedan servir de modelos para la solución de diversas clases de problemas.

Lenguaje de la lógica proposicional

Para desarrollar la lógica proposicional se construye un lenguaje que se denomina *lenguaje de la lógica proposicional*. Éste lenguaje precisa de tres elementos: el conjunto de símbolos válidos (el alfabeto), la manera de escribir las expresiones del lenguaje (la sintaxis) y el significado asociado a estas expresiones (la semántica).

Alfabeto

El alfabeto del lenguaje de la lógica proposicional consta de los siguientes símbolos:

i) *variables*: tales como p, q y r que serán usados para representar proposiciones elementales cualesquiera o su valor de verdad.

ii) *constantes proposicionales*: los símbolos **1** y **0** que denotarán siempre los valores de verdad *verdadero* y *falso* respectivamente.

iii) *operadores proposicionales*: $\neg$ (negación), $\vee$ (disyunción), $\wedge$ (conjunción), $\Rightarrow$ (condicional), $\Leftrightarrow$ (bicondicional), es decir, símbolos para denotar las operaciones proposicionales.

iv) *signos auxiliares de escritura*: [,] para agrupar operacionalmente a las proposiciones de manera que quede claro a qué proposiciones se aplica una operación proposicional evitando así la ambigüedad en la lectura.

Sintaxis: Fórmulas

La sintaxis de un lenguaje determina qué secuencias de símbolos constituyen las estructuras de las expresiones permisibles en el lenguaje. Ya se han visto ejemplos de proposiciones que tienen una estructura proposicional compleja dada por una composición de operaciones proposicionales. Esta estructura proposicional será representada en el lenguaje proposicional por un tipo de expresión al que se llamará *fórmula* (de la lógica proposicional).

Las siguientes reglas definen la sintaxis de las fórmulas del lenguaje proposicional:

i) Una variable o una constante proposicional es una *fórmula*.
ii) Si **A** es una *fórmula*, entonces ¬[**A**] es una *fórmula*.
iii) Si **A** y **B** son *fórmulas*, entonces [**A** ∨ **B**], [**A** ∧ **B**], [**A** ⇒ **B**] y [**A** ⇔ **B**] son *fórmulas*.

Debe observarse que los símbolos **A**, **B** y todas las letras del alfabeto latino que aparecerán en mayúscula y negritas en el texto no pertenecen al lenguaje proposicional, se trata de símbolos de variables que se añaden a la lengua española con la cual se describe el lenguaje de la lógica proposicional y que, como las reglas expresan, pueden representar cualquier fórmula. Cuando se usa un lenguaje para describir otro lenguaje se llama al primero *metalenguaje* y al segundo l*enguaje objeto*. Por lo tanto, el lenguaje objeto o lenguaje que describimos es el lenguaje de la lógica proposicional, mientras que la lengua española enriquecida con nuevos símbolos (**A**, **B**) y expresiones redefinidas (fórmula) es el metalenguaje con el cual lo describimos. Tiene sentido llamar, pues, a **A** y a **B** *metavariables*, es decir, variables del metalenguaje en el que hemos formulado las reglas *sintácticas* de formación de fórmulas del lenguaje proposicional.

Se observa que las reglas de formación de fórmulas constituyen el núcleo de un procedimiento tanto para *generar* como para *reconocer* las fórmulas de la lógica proposicional. Existen dos estrategias fundamentales para verificar si una expresión es una fórmula válida de la lógica proposicional: *bottom-up* (*de abajo-arriba*) y *top-down* (*de arriba-abajo*).

Ejemplos:

- [¬[p] ∧ ¬[q ∨ r]] es una fórmula, lo cual puede verificarse analizando la fórmula mediante la estrategia *bottom-up*.

Bottom-up:
p es fórmula por i) y entonces $\neg[p]$ es fórmula por ii), q y r son fórmulas por i), entonces $[q \vee r]$ es fórmula por iii), luego $\neg[q \vee r]$ es fórmula por ii). Dado que $\neg[p]$ y $\neg[q \vee r]$ son fórmulas, entonces $[\neg[p] \wedge \neg\ [q \vee r]]$ es fórmula por iii).

Del mismo modo, la fórmula también puede verificarse mediante la estrategia *top-down*.

Top-down:
$[\neg[p] \wedge \neg[q \vee r]]$ es una fórmula, si $\neg[p]$ y $\neg[q \vee r]$ son fórmulas . $\neg[p]$ es fórmula, si p es fórmula. $\neg[q \vee r]$ es fórmula, si $q \vee r$ es fórmula y $q \vee r$ es fórmula, si q y r son fórmulas.-

Un ejemplo de fórmula no válida sería: $\neg[p] \Rightarrow \neg\ [\ \wedge r]]$
$\neg[p] \Rightarrow \neg\ [\ \wedge r]]$ no es una fórmula, dado que $\wedge\ r$ no es una fórmula.

Semántica: el significado de las fórmulas

La semántica de un lenguaje determina qué significados se asocian a las expresiones de dicho lenguaje. En el caso de la lógica proposicional la semántica determina el significado de las fórmulas. Como fue establecido anteriormente en lógica proposicional sólo se considera el valor de verdad, verdadero (**1**) o falso (**0**) de las proposiciones. Luego es necesario definir ahora el valor de verdad de las fórmulas que representan las estructuras que pueden tener las proposiciones.

El significado o como se le llamará más adelante la interpretación de una fórmula se establecerá a continuación en dos partes, definiendo primero los operadores proposicionales y a partir de sus definiciones estableciendo el posible significado de una fórmula, es decir, su valor de verdad, introduciendo el concepto de interpretación de una fórmula.

2.1.3 Definición de las operaciones proposicionales

Como fue ya mencionado, se definirán los operadores proposicionales como *funciones de verdad*, es decir, como funciones que a partir de los valores de verdad que toman las proposiciones a las que se aplican un operador proposicional, a las cuales se llamará *operandos*, determinan un valor de verdad de la proposición que generan. Se definirán a continuación los operadores proposicionales en términos de las fórmulas más elementales (Regla (i)), en particular las variables proposicionales.

En las definiciones que sigue las variables p y q representan proposiciones cualesquiera y la expresión “(la proposición) p es **1** (**0**)” equivale a decir “el valor de verdad de la proposición p es verdadero (falso)”:

Negación: Dada una proposición p, su negación $\neg p$ es otra proposición tal que si p es **1**, entonces $\neg p$ es **0** y si p es **0**, entonces $\neg p$ es **1**. Es decir, la negación es una operación que cambia el valor de verdad de la proposición a la cual se aplica. La tabla que aparece a continuación llamada *tabla de verdad* resume lo anterior:

p	$\neg p$
1	**0**
0	**1**

Disyunción: $p \vee q$ es **1** si al menos una de sus dos proposiciones componentes p o q es **1**. En caso contrario $p \vee q$ es **0**. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

Analice que la definición dada de la disyunción no se corresponde del todo con la funcionalidad de la disyunción ordinaria en lengua española, donde esta operación tiene en general un carácter excluyente.

Conjunción: $p \wedge q$ es **1** sólo si sus dos proposiciones componentes p y q son ambas **1**. En los restantes casos $p \wedge q$ es **0**. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Implicación (Condicional): $p \Rightarrow q$ es **1** si al menos p es **0** o q es **1**. Alternativamente, $p \Rightarrow q$ solo es **0** cuando p es **1** y q es **0**.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Esta definición de la condicional o implicación es una de las posibles abstracciones o variantes de la condicional que se utiliza en el razonamiento ordinario. Para distinguirla de otras definiciones de la implicación se la denomina *implicación material*. En este libro, al ser la única estudiada, se la llamará solamente implicación o condicional. Como se apreciará más tarde, la definición dada representa el uso más común de esta operación en el área de la matemática y de la computación.

Se dice que p es el *implicante* (*condicionante, antecedente*) y que q es el *implicado* (*condicionado*, *consecuente*) de $p \Rightarrow q$**.**

Bicondicional: $p \Leftrightarrow q$ es **1** si p y q tienen ambas el mismo valor de verdad y tiene valor **0** en caso contrario, como muestra su tabla de verdad:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

2.1.4 Interpretación de fórmulas

Una fórmula **A** es una proposición si no hay ocurrencia de variables proposicionales en **A**, por ejemplo, **0** $\Rightarrow$ **1**, cuyo valor es 1. Si en una fórmula ocurre al menos una variable proposicional, es claro que su valor depende de los dos valores que puede tener dicha variable. Por lo tanto, representando las variables en una fórmula el valor de verdad que pueden tener las proposiciones elementales que la constituyen, entonces los valores de verdad que pueden asociarse a una fórmula dependerán del valor de verdad que tomen sus variables proposicionales.

A este fin, para una fórmula **A** se define una *interpretación* de **A** como la asignación de un valor de verdad a cada una de las variables proposicionales que ocurren en **A**. De acuerdo con el número *n* de variables proposicionales distintas que ocurran en **A**, dicha fórmula tendrá 2^n interpretaciones, es decir, 2^n es el número total de combinaciones de valores de verdad **0** y **1** o interpretaciones que puede tener una fórmula con *n* variables proposicionales distintas. Entonces

Una interpretación de una fórmula **A** *determina un valor de verdad de* **A**.

¿Cómo se calcula este valor? Por supuesto que haciendo uso de las definiciones de los operadores proposicionales. Para una fórmula dada, se puede construir una tabla de verdad con el siguiente formato:

Variables proposicionales	Fórmula
Interpretaciones	Valores de verdad

Ejemplo:

Hallando los valores valor de verdad de la fórmula $[[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow r]] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$ para cada una de sus interpretaciones. La siguiente tabla de verdad muestra en su parte izquierda todas las interpretaciones o combinaciones de valores de verdad de la fórmula dada, y en su parte derecha los valores de verdad correspondientes a cada interpretación:

p	q	r	$[[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow r]] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$
1	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**

Se deja como ejercicio verificar cómo fueron hallados los valores de la fórmula para cada interpretación, teniendo en cuenta que los paréntesis que ocurren en la fórmula agrupan un operador con las fórmulas que constituyen sus operandos. Observe que la fórmula es una implicación dado que el operador más externo de acuerdo con la parentización es el operador $\Rightarrow$ bajo el cual se listan los valores de verdad de la fórmula para cada interpretación. .

Definición: Una fórmula **A** es *verdadera por una interpretación* si y sólo si **A** es **1** por dicha interpretación. De lo contrario, **A** es *falsa* (**0**) *por dicha interpretación*.

Definición: Una fórmula **A** es *satisfacible* si y sólo si **A** es verdadera por al menos una interpretación.

Definición: una fórmula **A** es *válida* o una *tautología* si **A** es verdadera por toda interpretación.

Definición: Una fórmula **A** es *insatisfacible* o una *contradicción* si y sólo si no es satisfacible, es decir, si **A** es falsa por toda interpretación.

Ejemplos:

> La fórmula $p \Rightarrow [q \vee r]$ es satisfacible, la fórmula $\neg[p \wedge q] \Rightarrow [\neg p \vee \neg q]$ es válida (una tautología) y la fórmula $[\neg p \vee q] \wedge\neg[\neg p \vee q]$ es insatisfacible, como podrá verificarse en cada caso construyendo la tabla de verdad correspondiente.

Notar que una fórmula **A** es una tautología si y sólo si ¬**A** es una contradicción y que **A** es una contradicción si y sólo si ¬**A** es tautología.

Relación de equivalencia lógica entre fórmulas

Una relación muy importante entre fórmulas es la de equivalencia lógica.

Definición: **A** *es lógicamente equivalente a* **B**, lo cual denotaremos por **A** ≅ **B**, si la fórmula **A** ⇔ **B** es una tautología. Luego dos fórmulas son lógicamente equivalentes si y sólo si tienen siempre para la misma interpretación el mismo valor de verdad.

Ejemplos:

a) $p \Rightarrow q \cong \neg p \vee q$

b) $[p \Rightarrow q] \cong \neg[p \wedge \neg q]$

Se deja como ejercicio la verificación de las equivalencias lógicas.

Note que las equivalencias a) y b) establecen explícitamente definiciones de la operación condicional en términos de la negación y de la disyunción en el caso de a) y de la negación y la conjunción en el caso de b).

c) $p \Leftrightarrow q \cong [p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]$

Note que c) es una definición de la bicondicional en términos de la conjunción y la implicación.

Aplicando los conocimientos sobre las propiedades de las relaciones se verifica que la la relación de equivalencia lógica satisface las propiedades de una relación de equivalencia, según demostrará el lector como ejercicio:

1) **A** ≅ **A** (*reflexiva*)
2) Si **A** ≅ **B**, entonces **B** ≅**A** (*simétrica*)
3) Si **A** ≅ **B** y **B** ≅ **C**, entonces **A** ≅ **C** (*transitiva*)

Relación de implicación lógica entre fórmulas

Definición: **A** *implica lógicamente a* **B**, lo cual se denotará por **A** ⇛ **B**, si la fórmula **A** ⇒ **B** es una tautología. Es decir, **A** implica lógicamente a **B** si y sólo si no existe ninguna interpretación para la cual **A** es **1** y **B** es **0**. De manera equivalente **A** implica lógicamente a **B** si **B** es **1** para cualquier interpretación para la que A es **1**.

Ejemplos:

Las fórmulas $\neg[p \wedge q] \Rrightarrow [\neg p \vee \neg q]$ y $[[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow r]] \Rrightarrow [p \Rightarrow r]$ son implicaciones lógicas.

Aplicando nuestro conocimiento de las relaciones se puede demostrar que la relación de implicación lógica satisface las propiedades de una relación de orden parcial, según demostrará el lector como ejercicio:

1) **A** ⇛ **A** (*reflexiva*)
2) Si **A** ⇛**B** y **B** ⇛ **A**, entonces **A** ≅**B** (*antisimétrica*)
3) Si **A** ⇛ **B** y **B** ⇛ **C** entonces **A** ⇛ **C** (*transitiva*)

2.1.5 Leyes de la lógica proposicional

A partir de las relaciones definidas se da a continuación una lista de equivalencias e implicaciones lógicas importantes a las que se denominará de manera general *leyes de la lógica proposicional*. Las metavariables **A**, **B** y **C** como siempre representan fórmulas cualesquiera, y las constantes proposicionales **1** y **0** denotan cualquier tautología y cualquier contradicción respectivamente. Entre paréntesis aparecen algunos nombres por los que se hace referencia a estas leyes por su importancia.

Equivalencias lógicas

L1. $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \cong \mathbf{A}$	(idempotencia de $\vee$)
L2. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \cong \mathbf{A}$	(idempotencia de $\wedge$)
L3. $[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \vee \mathbf{C} \cong \mathbf{A} \vee [\mathbf{B} \vee \mathbf{C}]$	(asociatividad de $\vee$)
L4. $[\mathbf{A} \wedge B] \wedge \mathbf{C} \cong \mathbf{A} \wedge [\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}]$	(asociatividad de $\wedge$)
L5. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \cong \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$	(conmutatividad de $\vee$)
L6. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \cong \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$	(conmutatividad de $\wedge$)
L7. $\mathbf{A} \vee [\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}] \cong [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \wedge [\mathbf{A} \vee \mathbf{C}]$	(distributividad de $\vee$)
L8. $\mathbf{A} \wedge [\mathbf{B} \vee \mathbf{C}] \cong [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \vee [\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}]$	(distributividad de $\wedge$)
L9. $\mathbf{A} \vee [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \cong \mathbf{A}$	(primera de absorción)
L10. $\mathbf{A} \wedge [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \cong \mathbf{A}$	(segunda de absorción)
L11. $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} \cong \mathbf{A}$	
L12. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{1} \cong \mathbf{A}$	
L13. $\mathbf{A} \vee \mathbf{1} \cong \mathbf{1}$	
L14. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$	
L15. $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A} \cong \mathbf{1}$	(tercero excluido)
L16. $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \cong \mathbf{0}$	(contradicción)
L17. $\neg[\neg\mathbf{A}] \cong \mathbf{A}$	(doble negación)
L18. $\neg\mathbf{1} \cong \mathbf{0}$	
L19. $\neg\mathbf{0} \cong \mathbf{1}$	
L20. $\neg[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \cong \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$	(De Morgan)
L21. $\neg[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \cong \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$	(De Morgan)
L22. $A \Rightarrow B \cong \neg A \vee B$	(Definición de $\Rightarrow$)
L23. $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B} \cong [\ \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}\ ] \wedge [\ \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}\ ]$	(Definición de $\Leftrightarrow$)

Implicaciones lógicas

L24. $\mathbf{A} \Rrightarrow \mathbf{B} \Rightarrow [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]$
L25. $[\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}] \Rrightarrow \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$
L26. $[\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}\ ] \Rrightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$
L27. $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \Rrightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
L28. $\mathbf{A} \Rrightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
L29. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \Rrightarrow \mathbf{A}$
L30. $\mathbf{A} \Rrightarrow \mathrm{B} \Rightarrow \mathbf{A}$

Notar que toda equivalencia lógica es, a su vez, una implicación lógica. Esto no ocurre en sentido contrario, o sea, una implicación no es siempre una equivalencia lógica.

Reemplazamiento de fórmulas

Definición: Si **A** es una fórmula, se dice que la propia **A** y cualquier sucesión de símbolos de **A** que sea una fórmula es una *subfórmula* de A.

Ejemplos:

Las fórmulas $p \Rightarrow \neg q$, $\neg q$ y $q \Rightarrow p$ son subfórmulas de la fórmula
$[p \Rightarrow \neg q] \Leftrightarrow [[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]]$.

Teorema del reemplazamiento: Sean **C** y **D** fórmulas tales que $\mathbf{C} \cong \mathrm{D}$ y sea **C** una subfórmula de la fórmula **A**. Entonces si **A'** es la fórmula que resulta de *reemplazar* una o más ocurrencias de **C** por **D** en A se tiene que $\mathbf{A} \cong \mathbf{A'}$**.**

Se deja propuesta lector la demostración del teorema (sugerencia: considere las interpretaciones de l total de variables proposicionales que ocurren tanto en **A** como en **A'**).
Ejemplos:

Se tiene por L22 que $p \Rightarrow q \cong \neg p \vee q$ luego por el teorema del reemplazamiento
$[p \Rightarrow \neg q] \Leftrightarrow [[p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]] \cong [p \Rightarrow \neg q] \Leftrightarrow [[\neg p \vee q] \wedge [q \Rightarrow p]]$.

Álgebra de Proposiciones. Algebras Booleanas

Si el lector compara las primeras 23 equivalencias lógicas L1-L23 con las 19 leyes dadas del algebra de conjuntos notará una total analogía entre las mismas. Deberá tener en cuenta que L22 y L23 permiten prescindir de los operadores de implicación y bicondicional y considerar sólo los operadores negación, disyunción y conjunción y que las constantes **1** y **0** están definidas por las leyes L15 y L16 respectivamente. Esta analogía indica que se tienen todos los elementos para formular un *álgebra de proposiciones*.

Como ejercicio el lector reformulará en el álgebra proposicional todo el estudio axiomático realizado del álgebra de conjuntos, definiendo una teoría axiomática del álgebra proposicional siguiendo los mismos pasos realizados en la axiomatización presentada del álgebra de conjuntos y realizando las demostraciones de teoremas análogos.

El álgebra de conjuntos y el álgebra proposicional constituyen dos ejemplos relevantes de *álgebras de Boole* o álgebra booleana, un concepto abstracto de estructura algebraica que como se verá más adelante con una de sus aplicaciones, tiene una importancia enorme sobre todo en computación. La denominación del álgebra como de Boole rinde homenaje a George Boole (1815-1864) destacado matemático y lógico inglés cuyo libro *The Laws of Thought* (Las leyes del Pensamiento) contiene los primeros desarrollos de un algebra booleana.

2.1.6 Formas normales proposicionales

Se ha visto que algunas operaciones lógicas son definibles en términos de otras: de acuerdo con L22 la implicación es definible en términos de la negación y la disyunción. Utilizando las leyes de Morgan, L20 y L21, se puede definir la disyunción en términos de la negación y la conjunción o la conjunción en términos de la negación y la disyunción.

Los desarrollos que siguen dan cuenta de resultados fundamentales sobre representaciones de fórmulas de gran trascendencia sobre todo en los usos computacionales de la lógica en la solución de problemas. Se introducirán representaciones equivalentes de fórmulas cualesquiera denominadas de manera general *formas normales*, así como algunos procedimientos efectivos o algoritmos asociados al hallazgo y uso de tales representaciones.

Definición: Una fórmula **A** se denomina un *literal*, si **A** es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Si un literal es una variable proposicional se denomina *literal positivo*, en el otro caso se denomina un *literal negativo*.

Ejemplos:

p, ¬q son literales, p es un literal positivo y ¬q un literal negativo.

Definición: Una fórmula **A** se denomina *cláusula*, si **A** es una disyunción de literales.

Ejemplos:

$p \vee q$, $p \vee \neg q \vee r$ son cláusulas. ¿Son **0** y $\neg q$ cláusulas?

Definición: Una fórmula **A** se denomina una *forma normal conjuntiva* (FNC) si **A** es de la forma $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n$, y cada $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, es una disyunción de literales o cláusula.

Ejemplos:

p ¬q, p ∨ ¬q, [p ∨¬q] ∧ [¬p ∨¬q ∨¬r] ∧[q∨r]

Definición: Una fórmula **A** se denomina una *forma normal disyuntiva* (FND) si **A** es de la forma $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$, y cada $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, es una conjunción de literales.

Ejemplos:

p, ¬q, p ∧¬q, [p ∧¬q] ∨ [¬p ∧¬q ∧¬r] ∨ [q ∧r].

Teorema: Para toda fórmula **A** puede hallarse una formula **A**' en FNC (FND) tal que **A** ≅ **A**'.

La demostración de este teorema es constructiva y consiste en transformar la fórmula **A** en una FNC (FND) **A**' aplicando repetidamente leyes que preservan la equivalencia lógica de las fórmulas. Un algoritmo que realizara la transformación utilizaría las siguientes instrucciones que relacionan las leyes utilizables y su propósito.

a) Utilizar las leyes L22 y L23 para eliminar los operadores ⇒, ⇔ que ocurran en una fórmula.

b) Utilizar L17 (doble negación) y L20 y L21 (leyes de De Morgan) para eliminar toda negación (¬) que no ocurra en literales.

c) Utilizar L7 y L8 (leyes distributivas) para obtener la forma normal deseada.

d) Utilizar otras leyes para simplificar la fórmula.

Ejemplos:

Dada la fórmula $[p \Rightarrow \neg q] \Rightarrow \neg [p \wedge r]$, entonces

$$
\begin{aligned}
[p \Rightarrow \neg q] \Rightarrow \neg [p \wedge r] &\cong \neg [p \Rightarrow \neg q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L22}\\
&\cong \neg [\neg p \vee \neg q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L22}\\
&\cong [\neg\neg p \wedge \neg\neg q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L20}\\
&\cong [p \wedge q] \vee \neg p \vee \neg r] && \text{L21}\\
&\cong [[\neg p \vee p] \wedge [\neg p \vee q]] \vee \neg r && \text{L7}\\
&\cong [1 \wedge [\neg p \vee q]] \vee \neg r && \text{L15}\\
&\cong \neg p \vee q \vee \neg r && \text{L12}
\end{aligned}
$$

El término izquierdo de la última equivalencia representa una FND (también una FNC) de la fórmula dada.

Una FNC de una fórmula permite determinar si una fórmula es una tautología, una FND permite determinar si la fórmula es una contradicción.

Para determinar si una FNC (FND) de una fórmula es una tautología (contradicción) basta verificar si en cada una de sus disyunciones (conjunciones) de literales ocurren literales complementarios, es decir, una variable proposicional y su negación.

Ejemplos:

a) $[\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \mathrm{p}] \vee [p \wedge r \wedge \neg r]$
b) $[\neg p \vee \neg q \vee p] \wedge [r \vee q \vee \neg r]$

FND (FNC) completas

Se definen a continuación dos nuevas formas normales a partir de una FND y de una FNC de una fórmula, las cuales aparte de permitir nuevas decisiones sobre la evaluación de la fórmula, tendrán más adelante una aplicación importante.

Definición: Dada una fórmula **A**, **A’** se denomina una FND (FNC) *completa* de **A** si en cada implicante (cláusula) de **A’** ocurren todas las variables proposicionales distintas de A bien en un literal positivo o negativo.

Teorema: para toda fórmula **A** es posible hallar una FND (FNC) completa **A’**, tal que **A** $\cong$ **A**’.

La demostración de este teorema es constructiva y consiste en obtener primero una FND (FNC) **A’** de la fórmula **A** e introducir todas las variables de A que no ocurren en un implicante (cláusula) de A’ mediante el par de leyes L11, L16 (L12, L15) y realizando las trasformaciones necesarias.

Ejemplos:

Sea la fórmula $[p \vee \neg q] \Rightarrow \neg [p \wedge r]$. La siguiente

$$
\begin{aligned}
[p \vee \neg q] \Rightarrow \neg [p \wedge r] &\cong \neg [p \vee \neg q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L22}\\
&\cong [\neg p \wedge \neg\neg q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L20}\\
&\cong [\neg p \wedge q] \vee \neg [p \wedge r] && \text{L17}\\
&\cong [\neg p \wedge q] \vee [\neg p \vee \neg r] && \text{L21}\\
&\cong [\neg p \vee \neg p \vee \neg r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] && \text{L7}\\
&\cong [\neg p \vee \neg r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] && \text{L1}\\
&\cong [\neg p \vee \neg r \vee \mathbf{0}] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] && \text{L11}\\
&\cong [\neg p \vee \neg r \vee [q \wedge \neg q]] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] && \text{L16}\\
&\cong [\neg p \vee q \vee \neg r] \wedge [\neg p \vee \neg q \vee \neg r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] && \text{L7}
\end{aligned}
$$

Se verifica que la última fórmula es una FNC completa. Se deja al lector hallar una FND completa para la fórmula dada como ejercicio.

Sean la fórmulas **A** y **B** y **A’** una FND completa de **A** y **B’** una FND completa de **B**. Entonces **A** $\cong$ **B** si **A’** $\cong$ **B’**. Lo mismo puede afirmarse con respecto a la FNC completa.

Ejercicios

1. Haga análisis bottom-up y top-down de las siguientes expresiones para determinar si son fórmulas: $[p \wedge q] \Rightarrow [\neg r \Rightarrow \neg p]$, $[\neg p \wedge q] \Rightarrow [r \Rightarrow \neg p]$

2. En las siguientes expresiones *p*, *q* y *r* representan proposiciones. Sustituya en cada una de ellas las representaciones lingüísticas de las operaciones proposicionales que conecta a *p*, *q* y *r* por su notación correspondiente en el lenguaje de la lógica proposicional.

   a) Si no *p*, entonces ni *q* ni *r*
   b) Si no es cierto que *p* y *q*, entonces no *p*
   c) Siempre que *p*, *q*
   d) Si no es el caso que *p* implica *q*, entonces *q* tampoco implica *r*

1. 3.- Establezca la estructura lógico-proposicional de las siguientes proposiciones matemáticas:
   a. (Sugerencia: proceda de manera gradual sustituyendo por variables proposicionales todas las proposiciones elementales (proposiciones que no contienen explícitamente operaciones proposicionales) y sustituyendo después las representaciones lingüísticas de las operaciones proposicionales por la notación correspondiente.)

      a) $x + y > 2$
      b) $x = 1$ ó $y + 2 = 2$
      c) $y < 2$ y $z = 10$
      d) Si $x > 0$, entonces y < 2
      e) Si $z > 10$, entonces $x + z > 10$ y $z < 10$
      f) *n* es par si y sólo si *n* es divisible por 2
      g) Si *x* es primo y par, entonces $x = 2$
      h) Si $x < y$, entonces $x < y$ o $x = y$
      i) $A \subset B$, si $A \subseteq B$ y $A \neq B$
      j) $x > 0$ siempre que $x > 0$
      k) Si $x = y$, entonces $x/z = y/z$, excepto cuando $z = 0$
      l) $(n - 1)! + 1$ no es divisible por *n* a menos que *n* sea primo

3. Halle los valores de las siguientes fórmulas para cada una de sus interpretaciones y diga cuáles son satisfacibles, cuales son insatisfacibles y cuáles son tautologías.

   a) $[p \Rightarrow [\neg q \Rightarrow p]]$

m) b) $\neg[[p \wedge \neg p] \vee \neg q]$

b) $\neg[\neg p \vee [\neg q \Rightarrow p]]$

4. Determine qué ley de la lógica proposicional justifica a cada una las siguientes fórmulas como una tautología.

   a) $[p \vee [q \vee r]] \Leftrightarrow [[p \vee q] \vee r]$
   b) $[\neg p \Rightarrow [\neg q \Rightarrow [r \wedge \neg r]]] \Rightarrow [\neg p \Rightarrow q]$
   c) $[\neg[p \Rightarrow q] \wedge [r \vee \neg r]] \Rightarrow [p \vee \neg p]$

5. Demuestre el teorema del reemplazamiento.

6. Aplicando las leyes de la lógica proposicional simplifique las siguientes fórmulas:

   a) $\neg\neg[p \Rightarrow q] \wedge \neg[p \wedge \neg p]$
   b) $[r \Rightarrow q] \vee [\neg p \Rightarrow [p \Rightarrow [r \wedge \neg \mathrm{r}]]]$
   c) $[\neg[p \Rightarrow q] \wedge [r \vee \neg \mathrm{r}]] \vee [p \vee \neg p]$

7. Defina una axiomatización del álgebra proposicional (Sugerencia: Analice la axiomatización hecha previamente al Algebra de Conjuntos)

8. Demuestre que las siguientes fórmulas son tautologías:

   a) $[\neg q \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow [p \Rightarrow q]$
   b) $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [[p \wedge \neg q] \Rightarrow [b \wedge \neg b]]$
   c) $[[p \Rightarrow q] \wedge [r \Rightarrow q]] \Rightarrow [[p \wedge r] \Rightarrow q]$

9. Demuestre que si $p \cong [r \vee s]$ entonces $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [[r \Rightarrow q] \Rightarrow [[s \Rightarrow q]]$ es una tautología.

2.2 Aplicación: Circuitos lógicos

Los desarrollos de la lógica proposicional hasta aquí expuestos tienen entre sus aplicaciones más relevantes una tecnológica relacionada con los problemas de diseño y verificación de circuitos lógicos digitales, es decir, circuitos que realizan funciones lógicas bivalentes y que por lo tanto se utilizan en el procesamiento de la información representada digitalmente en las computadoras.

La más importante de las máquinas lógicas creadas por el hombre para el procesamiento de información lo es sin duda la computadora. Una computadora es un sistema que recibe como información *datos* de una clase de problemas y un programa que representa un *algoritmo* o procedimiento para resolver dicha clase de problemas. La computadora emite como salida una solución del problema, como resultado de aplicar el programa a los datos.

El componente fundamental de una computadora lo es la Unidad de Procesamiento y Control (UPC), que realiza todos los procesos de transformación de la información que tienen lugar en una computadora. La UPC tiene dos subcomponentes funcionales muy importantes, la unidad lógico-aritmética (ULA) y la unidad de control (UC), siendo la ULA, el subcomponente que realiza los procesos de transformación de información.

La ULA y por ende toda la computadora procesa información en forma digital, específicamente, información que es representada en un lenguaje binario o de dos símbolos los que se denotarán por **0** y **1 y a** los que se denomina *bits*. Un bit representa la unidad elemental de información en una computadora.

Se denomina *carácter* a todo símbolo que se introduce en una computadora, por ejemplo, presionando una tecla en su teclado. El alfabeto de caracteres de una computadora incluye esencialmente las letras del alfabeto latino, los dígitos del 0 al 9, signos de puntuación tales como ".", ",", ":" y caracteres que tienen como nombres "espacio", "return", "fin de línea", etc . Para representar cada uno de estos caracteres en la computadora, existen sistemas de representación binaria standardizados siendo el más comúnmente utilizado el sistema *ASCII* (*American Standard Code for Information Interchange*). Mediante el código ASCII se asigna a cada carácter una cadena o sucesión de 8 bits denominada *byte*. A continuación se dan ejemplos de caracteres y sus correspondientes representaciones en bytes en el código *ASCII*:

A 0100 0001
B 0100 0010
:   0011 1010

Toda la información que es suministrada a una computadora es representada en este lenguaje binario y de aquí la naturaleza bivalente de las componentes elementales de los circuitos electrónicos componentes de la ULA que operan sobre estas representaciones. La información es cargada y transportada a través de estos circuitos electrónicos en forma discontinua o discreta. La información fluye como una sucesión de señales que es comúnmente realizada con pulsos eléctricos constituidos por dos niveles de voltaje distinguibles como “alto” y “bajo” voltaje en el circuito, a las cuales se asocian los símbolos del lenguaje binario **1** y **0** respectivamente como indica la Figura 1.

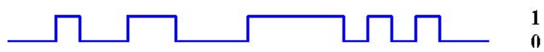


Figura 1: Representación del flujo de información digital

Los circuitos electrónicos de la ULA transforman la información que reciben realizando esencialmente funciones lógicas: la información codificada mediante **1**s y **0**s sufre transformaciones en estos circuitos que son todas describibles mediante la lógica proposicional bivalente. Por ello se conoce a estos circuitos con el nombre de *circuitos lógicos*, nombre con el cual se hará referencia de ahora en adelante a los mismos.

2.2.1 Representación de circuitos lógicos

Los circuitos lógicos se construyen conectando entre si diferentes componentes electrónicos elementales. Haciendo abstracción de su realización electrónica estos componentes serán representados por las operaciones lógicas fundamentales de negación, disyunción y conjunción tal como se muestra en la Figuras 2, 3 y 4 en las cuales aparece un diagrama que representa a cada componente electrónico fundamental y al cual se asocia la operación de la lógica proposicional que realiza.

Para abreviar la representación Se brinda en cada caso un ejemplo de flujo de información digital de entrada al componente y el correspondiente flujo de información de salida que este suministra.

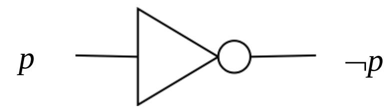


Figura 2: Componente electrónico **No**

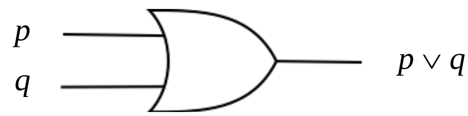


Figura 3: Componente electrónico **O**

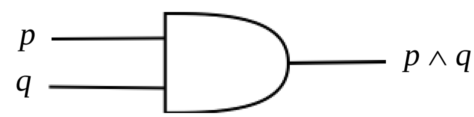


Figura 4: Componente electrónico **Y**

En la Figura 5 se presenta como primer ejemplo de un circuito lógico un *comparador binario*. Se verifica que este circuito compara los bits que recibe por sus entradas y responde con salida **0** (**1**) si son iguales (desiguales). El lector verificará que la función que realiza el comparador binario se corresponde con la fórmula asociada.

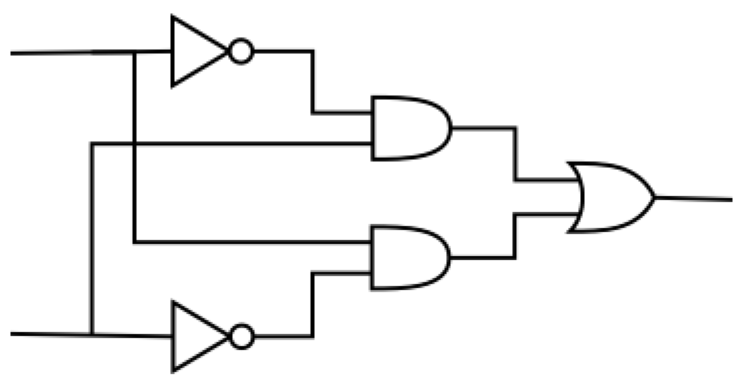


Figura 5: Comparador binario

Otros componentes lógicos utilizados en el diseño de circuitos son los componentes NOR y NAND.

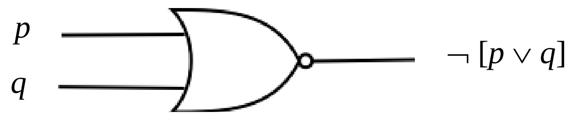


Figura 6: Componente NOR

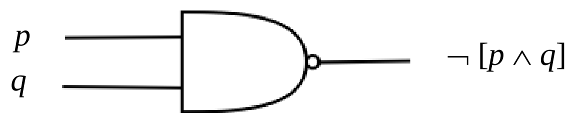


Figura 7: Componente NAND

Todo circuito lógico puede ser representado utilizando solamente componentes NOR (NAND). Del mismo modo, para cada circuito representado únicamente utilizando componentes NOR existe uno equivalente utilizando solamente componentes NAND.

Se deja al lector la demostración de las proposiciones anteriores

2.2.2 Aritmética binaria

La ULA no sólo realiza operaciones lógicas, también, sobre la base de estas operaciones aritméticas como su nombre lo indica. Para ello utiliza la *aritmética binaria*, es decir, una representación binaria de los números naturales a los cuales se aplican las operaciones aritméticas usuales, como se verá a continuación, definidas por procedimientos adecuados a la representación binaria basados en la lógica proposicional.

Para proceder a describir algunos circuitos lógicos capaces de realizar operaciones aritméticas, se darán algunos detalles de la aritmética binaria. El sistema binario o de base 2 de representación de los números, como el usual sistema decimal o de base 10, es un sistema posicional. El sistema binario consta exclusivamente de los símbolos “0” y “1”, los cuales precisamente denotan los números 0 y 1 respectivamente. Cualquier otro número es representable por una cadena de bits (de 0s y 1s), en la cual la posición del bit en la cadena es significativa como los símbolos numéricos que representan un número en el sistema decimal: los números 0 y 1 en una posición o columna multiplican una potencia de 2, la base del sistema, y su posición determina a que potencia de 2 multiplican. Por ejemplo, la cadena de bits 0100 representa el número natural representado por el 20 en el sistema decimal:

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 0 = 20$$

A continuación veamos las tablas correspondientes a las operaciones de suma y resta de la aritmética binaria y ejemplos de suma y resta.

Suma Parcial (SP)	Arrastre (A)	Resta Parcial	Préstamo (P)
1 + 1 = 0	1	1 - 1 = 0	0
1 + 0 = 1	0	1 - 0 = 1	0
0 + 1 = 1	0	0 - 1 = 1	1
0 + 0 = 0	0	0 - 0 = 0	0

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \underline{+\ 01101} \\ 100000 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 10011 \\ \underline{-01101} \\ 00110 \end{array}$$

A continuación el diagrama de un circuito lógico *semisumador* que realiza la suma binaria parcial según describe la tabla dada

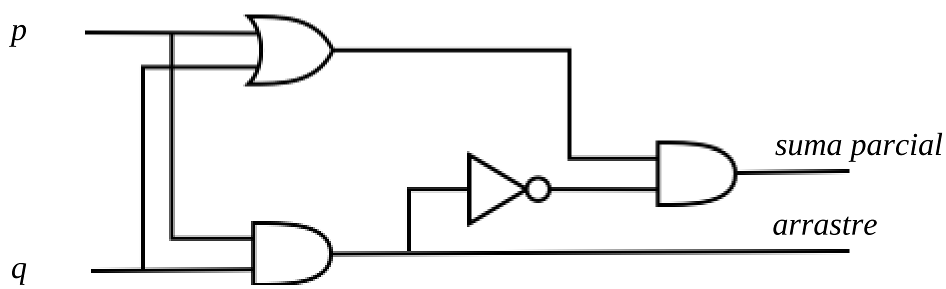


Figura 6: Semisumador

Dos semisumadoras convenientemente conectadas permiten obtener un *sumador*, es decir, un circuito que incorpora el arrastre (A) como muestra el siguiente esquema:

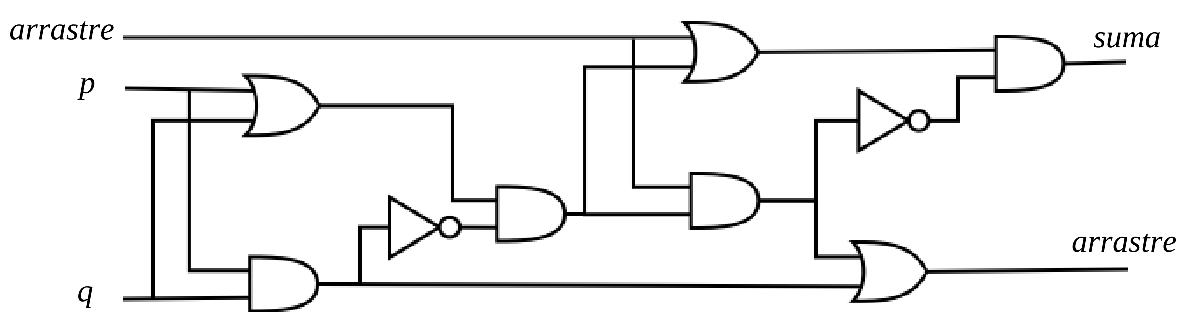


Figura 7: Sumador

Se deja al lector la verificación de que el sumador realiza la suma de dos bits más el arrastre. Así mismo, se deja al lector el diseño de los circuitos que realizan tanto la resta parcial como la resta total.

2.2.3 Diseño y simplificación de circuitos lógicos

Los dos problemas fundamentales en la construcción e implementación de un circuito lógico lo constituyen su diseño y verificación. asociado al mismo su posible diseño óptímo o simplificación.

El *diseño* ha de realizarse partiendo de una especificación que recoge la funcionalidad que debe tener el circuito lógico y consiste entonces en crear un circuito lógico que (supuestamente) implemente (ejecute) la especificación dada.

La *verificación* es el proceso inverso al diseño y su objetivo consiste en confirmar si el circuito lógico diseñado satisface la especificación dada, en particular si está libre de errores que produzcan por ejemplo salidas ajenas a la funcionalidad deseada.

Si se tiene en cuenta que en la actualidad la realización tecnológica de un circuito lógico puede contener cientos de millones de componentes, se tendrá al mismo tiempo una idea de la complejidad del proceso de diseño y, en especial, de verificación de un circuito lógico y de la importancia de tales procesos para la reducción de costos, tiempo de construcción y esencialmente para lograr la realización sin errores que a su vez pueden ser costosos y graves en la aplicación posterior del circuito.

La base fundamental y el "cuello de botella" en el desarrollo de ambos procesos la constituye la representación de los datos. La especificación del circuito puede darse de varias maneras por ejemplo mediante una tabla. En lo que sigue se considera que la tabla corresponde a una FND equivalente a la fórmula asociada por diseño al circuito.

En los desarrollos que siguen nos restringiremos a considerar el hallazgo de una simplificación del circuito a partir de su FND completa.

A' se denomina *una subconjunción de literales* de la conjunción de literales A si A' es una subfórmula de A, A' es un subconjunción propia de A si A' es una subconjunción de A distinta de A.

Una conjunción de literales **A'** se denomina un *implicante* de una FND completa **A** si **A'** $\Rrightarrow$ **A**. Resulta inmediato que toda conjunción de literales de una FND completa **A** es un implicante de **A** por lo tanto, en lo que sigue, nos referiremos siempre como implicantes a las conjunciones de literales de una FND. Finalmente **A’** es un *implicante primo* de una FND completa **A** si **A’** es un implicante de **A** y no existe ninguna subconjunción propia de **A’** que sea un implicante de **A.**

Dada la fórmula que describe la función de un circuito lógico es posible en teoría enfrentar el problema de su simplificación. De acuerdo con el método de Quine-McCluskey se procede a partir de la FND completa de la fórmula a obtener una fórmula lógicamente equivalente que constituirá una FND mínima de la fórmula que describe el circuito. El método lo constituyen los siguientes instrucciones:

(i) Obtención de la FND completa de la fórmula dada.

(ii) Aplicación reiterada y exhaustiva de la ley L2 bajo la forma $[A \wedge B] \vee [A \wedge \neg B]$ para obtener los implicantes primos de la FND completa, donde B es una variable proposicional y A es una conjunción de literales.

(iii) Selección mínima de implicantes primos cuya disyunción sea lógicamente equivalente a la FND completa. Tal disyunción será la FND mínima buscada de la fórmula.

Mediante un ejemplo desarrollaremos los pasos prácticos del método. Sea la FND completa FND1:

$$[p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s] \vee [p \wedge q \wedge \neg r \wedge s] \vee [p \wedge q \wedge r \wedge \neg s] \vee [p \wedge q \wedge r \wedge s] \vee$$
$$[p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s] \vee [p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s] \vee [\neg p \wedge q \wedge r \wedge s] \vee [\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s]$$

Con vistas a facilitar la aplicación de la ley L12 se recurre a una representación tabular de la FND1. Mediante una interpretación que asigna valor 1 a cada una de las variables de la FND1 se tiene la siguiente evaluación de sus implicantes:

Tabla 1

p	*q*	*r*	*s*	Implicantes
1	**1**	**0**	**0**	$p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$
1	**1**	**0**	**1**	$p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$
1	**1**	**1**	**0**	$p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
1	**1**	**1**	**1**	$p \wedge q \wedge r \wedge s$
1	**0**	**1**	**0**	$p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
1	**0**	**0**	**1**	$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$
0	**1**	**1**	**1**	$\neg p \wedge q \wedge r \wedge s$
0	**1**	**0**	**0**	$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$

Partiendo de la Tabla 1 puede aplicarse L12 para iniciar la simplificación examinando todos los posibles pares de la fila. Se puede observar que la aplicación de L12 se facilita si se tiene en cuenta lo siguiente: L12 es aplicable entre dos filas sólo si las mismas difieren en una posición, por lo tanto sólo si una de las filas contiene un **1** más que la otra.
Lo anterior indica la sustitución de la tabla 1 por la siguiente Tabla 2

Tabla 2

	p	*q*	*r*	*s*
#1	**0**	**1**	**0**	**0**
	1	**1**	**0**	**0**
#2	**1**	**0**	**1**	**0**
	1	**0**	**0**	**1**
	1	**1**	**0**	**1**
#3	**1**	**1**	**1**	**0**
	0	**1**	**1**	**1**
#4	**1**	**1**	**1**	**1**

En la Tabla 2 se han agrupado los implicantes por la cantidad de 1s que en ellos ocurren en los grupos #1-#4, los cuales están dispuestos en forma consecutiva para facilitar la simplificación.

Aplicando L12 en la tabla 2 entre #1 y #2 se obtiene la Tabla 3, donde el carácter – indica la variable eliminada y 100 es la conjunción de literales común a ambos implicantes.

Tabla 3

	p	*q*	*r*	*s*
#1	**-**	**1**	**0**	**0**
#2	**1**	**0**	**1**	**0**
	1	**0**	**0**	**1**
	1	**1**	**0**	**1**
#3	**1**	**1**	**1**	**0**
	0	**1**	**1**	**1**
#4	**1**	**1**	**1**	**1**

Se deja al lector la continua y exhaustiva aplicación de L12 hasta obtener la siguiente Tabla Final:

Tabla Final

			p	q	r	s
#1			**-**	**1**	**0**	**0**
#2			**1**	**-**	**1**	**0**
			1	**-**	**0**	**1**
#3			**-**	**1**	**1**	**1**

Observe que no es posible aplicar L12 en la tabla final, luego, los implicantes a los cuales corresponden las filas de valores de dicha tabla, a saber,

$$q \wedge \neg r \wedge \neg s,\ p \wedge r \wedge \neg s,\ p \wedge \neg r \wedge s,\ q \wedge r \wedge s$$

son los implicantes primos de la FND1. Luego

$$[q \wedge \neg r \wedge \neg s] \vee [p \wedge r \wedge \neg s] \vee [p \wedge \neg r \wedge s] \vee [q \wedge r \wedge s]$$

es la FND1 mínima buscada.

Si bien es efectivo el método de simplificación desarrollado no resulta práctico sobre todo cuando el número de variables en la especificación del circuito es grande. No obstante el método ha constituido una base teórica para el desarrollo de métodos más eficientes.

Ejercicios

1. Represente el diagrama del circuito lógico que realizaría la función descrita por:

   a) $\neg[[p \vee q] \wedge\neg[p \wedge q]]$
   b) $[\neg p \vee\neg q] \wedge [p \wedge q]$

   Determine además si son equivalentes y describa con palabras la función que realizan.

2. Halle las fórmulas que definen la función que realizan los circuitos lógicos de las Figuras 8 y 9 y determine si son o no equivalentes.

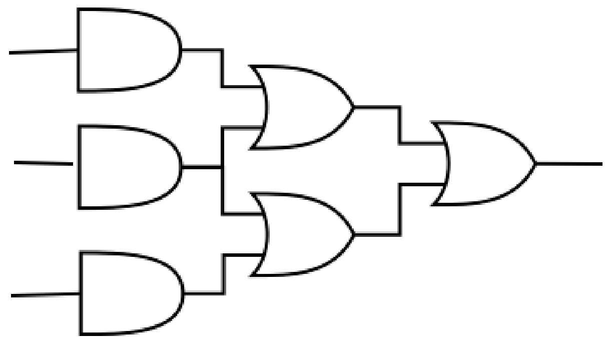


Figura 8. Determinar function

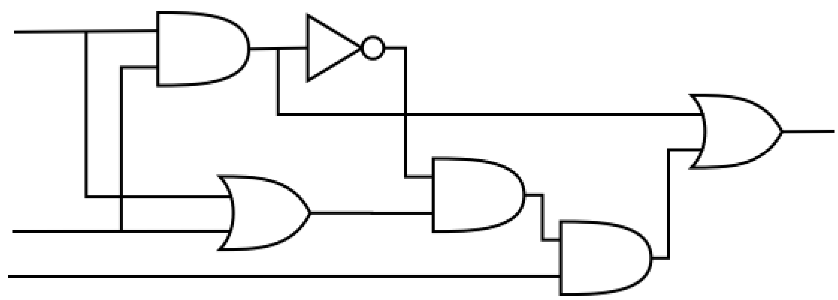


Figura 9. Determinar función

3. Diseñe circuitos equivalentes al comparador binario, el semisumador y el sumador utilizando solamente componentes NAND (NOR).

4. Una FND puede ser realizada por un circuito lógico de dos niveles, un primeor nivel sería realizable con componentes Y y un segundo nivel con componentes O. Construya los diagramas correspondientes a la realización de los circuito representados por la FND1 y su FND1 mínima.

5. Considere la siguiente FND completa

   a) $[\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s] \vee [\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s] \vee [\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s] \vee [p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s] \vee$
   b) $[p \wedge \neg q \wedge r \wedge s] \vee [p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s] \vee [p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s] \vee [p \wedge q \wedge r \wedge \neg s] \vee$
   c) $[p \wedge q \wedge r \wedge s]$

   Halle la FND mínima equivalente.

6. Encuentre un circuito con solo 4 componentes que permita representar una fórmula equivalente a la siguiente fórmula lógica:

   $$[p \Rightarrow r] \wedge [q \Rightarrow [[p \Rightarrow \mathrm{q}] \Rightarrow r]] \wedge [q \Rightarrow p]$$

7. Encuentre dos circuitos, uno utilizando solo componentes NAND y otro conformado solo por componentes NOR, para representar las siguientes fórmulas lógicas:

   a) $[p \vee q] \Rightarrow r$
   b) $\neg p \Leftrightarrow [\neg q \wedge \neg r]$

8. Represente el circuito equivalente a las formulas cuyos valores de verdad se expresan en las siguientes tablas de verdad:

   a)

p	*q*	*s1*	*s2*	*s3*
1	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**

   b)

p	*q*	*r*	*s1*
1	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**

2.3. Deducción Proposicional

Constantemente los seres humanos razonan a partir de conocimiento que han adquirido para llegar a nuevo conocimiento.

Ejemplo:

(Determinación de "abuelidad"):

Considere conocimiento adquirido las siguientes proposiciones:
(1) El padre del padre o la madre de una persona es abuelo de esa persona (definición de abuelo)
(2) José es padre de Luis (un hecho)
(3) Luis es padre de Ana (un hecho)

Nuevo conocimiento al que puede llegarse:
(4) José es abuelo de Ana

La forma de razonamiento por la que pasamos del conocimiento de (1)-(3) a (4) se denomina *deducción*.

La deducción no sólo está presente en el razonamiento común: no existe ciencia alguna donde no intervenga la deducción como una de las formas relevantes del razonamiento científico. En matemática, la deducción constituye una forma fundamental de razonamiento. En todas las ciencias la deducción es un método fundamental en la estructuración de teorías. El lector ya ha tenido dos acercamientos en este sentido a la deducción en matemática a través del algebra de conjuntos y el álgebra proposicional en las cuales la deducción se aplica en la demostración de igualdades entre conjuntos o de equivalencias lógicas entre proposiciones respectivamente.

En lo que sigue se ampliarán los conocimientos del lector sobre la deducción a nivel de la lógica proposicional y de su aplicación en la matemática, se repetirán algunos conceptos básicos ya presentados.

En matemática, la aplicación frecuente de la deducción ocurre en la generación de una *demostración* (*prueba*) para una proposición matemática dentro de una teoría matemática. En tal caso el problema consiste en *el establecimiento de la verdad de una proposición partiendo de la verdad de otras proposiciones*, algunas aceptadas como verdaderas otras quizás ya previamente demostradas.

El conjunto de las proposiciones aceptadas como verdaderas, sin demostración, se denominan *axiomas* y constituyen las proposiciones que caracterizan lo que se denomina una *teoría T*. Una proposición que se intenta deducir a partir de los axiomas de una teoría se denomina *teorema y una demostración* o *prueba* es el nombre que toma el texto que hace explícito el razonamiento mediante el cual se deduce el teorema. Los axiomas caracterizan la teoría, la cual además de los axiomas incluye todas las proposiciones demostrables a partir de los axiomas o teoremas.

La madurez de los conocimientos en un área científica determinada permite la reconstrucción y organización de los conocimientos en teorías. El proceso de reconstrucción de una teoría en los términos planteados se denomina una *axiomatización* de la teoría. El proceso utilizado para tal reconstrucción se denomina el *método axiomático* de presentación de teorías y es objeto de estudio de la lógica.

La axiomatización de una teoría depende fundamentalmente de la definición lógica que se introduzca del concepto de deducción. A continuación una definición rigurosa de dicho concepto a nivel de la lógica proposicional y que refleja su uso en la matemática ordinaria, así como su uso básico en computación.

Sea *T* una *teoría* y **A** una proposición, entonces

$$T \vdash A$$

denota que **A** *se deduce de T*. El símbolo ⊢ se denomina el *operador de deducción*, cuya definición comienza adscribiéndole las cuatro propiedades fundamentales siguientes:

(i) $T \vdash \mathbf{A}$, si **A** es una tautología

es decir las tautologías (fórmulas válidas), son deducibles en cualquier teoría por su definición estrictamente lógica.

(ii) $T \vdash \mathbf{A}$, si $\mathbf{A} \in T$, es decir, si A es un axioma de la teoría.

(iii) $T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$

Una proposición **A** cuya verdad se presupone (quizás temporalmente) en una teoría T, la cual se denomina *hipótesis*, es deducible trivialmente.

(iv) si $T \vdash \mathbf{A}$, entonces $T, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$

Si una proposición **A** es deducible de *T*, lo sigue siendo aunque se agregue a *T* un nuevo axioma o proposición **B** cuya verdad se presupone. La propiedad (iv) caracteriza a la lógica que se desarrolla en este libro como *monotónica*, es decir, una lógica en la que la inserción de nuevos axiomas o presuposiciones no invalida teoremas previamente demostrados y por lo tanto el número de proposiciones demostrables como teoremas no disminuye.

Formalmente, una *demostración* como teorema de una proposición **B** es un texto consistente en una sucesión ordenada finita de expresiones de la forma

$T \vdash \mathbf{A_1}$ - justificación$_1$

$T \vdash \mathbf{A_2}$ - justificación$_2$

…

$T \vdash \mathbf{A_n} = \mathbf{B}$ - justificación$_n$

siendo cada expresión

$T \vdash \mathbf{A_i}$ - justificación$_i$ $(1 \geq i \leq n)$

denominada un *paso* (*deductivo)* en la demostración de **B**, ocurriendo **B** en el paso *n* de la demostración. Note que un paso en una demostración contiene obligatoriamente lo que se denomina su justificación.

Las propiedades anteriores del operador de deducción son utilizadas como pasos en una demostración y a continuación se presenta como serán escritos con las justificaciones correspondientes:

$T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$ -hipótesis

$T \vdash \mathbf{A}$ -axioma

Dado que una proposición demostrada o teorema de T puede incorporarse en la demostración de otra proposición se incorpora

$T \vdash \mathbf{A}$ -teorema

El paso de monotonicidad queda implícito por lo dicho anteriormente.

2.3.1 Reglas de Inferencia

Los pasos anteriormente introducidos son importantes para construir demostraciones, pero no permiten realizar siquiera la deducción de la "abuelidad" de una persona (verifíquese con el ejemplo dado al principio del epígrafe). Luego se necesita introducir nuevas formas de pasos deductivos que permitan ampliar la capacidad deductiva necesaria para demostrar proposiciones como teoremas en una teoría.

El estudio de los procedimientos que permiten introducir y justificar pasos en una demostración es el objetivo de la *teoría de la deducción* de la lógica. Estos procedimientos están constituidos fundamentalmente por lo que se denominan *reglas de inferencias (deductivas)* cuyo estudio se desarrollará ahora a nivel de la lógica proposicional.

Las reglas de inferencia deductiva constituyen el método fundamental de generación y justificación lógica de pasos en una demostración y son las que completan la caracterización formal de un concepto de deducción o razonamiento deductivo.

La estructura general de una *regla de inferencia (deductiva)* es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{Premisas}}{\boldsymbol{Conclusi\acute{o}n}}$$

Donde ***Premisas*** denota un conjunto de pasos previos en una demostración, por lo mismo ya justificados, y ***Conclusión*** denota el nuevo paso que se inserta en la demostración al aplicar la regla, su inserción por lo tanto estará justificada por la propia regla.

Las reglas que serán definidas a continuación serán incorporadas al método deductivo que se utilizará en la demostración de teoremas en una teoría, en particular, como se mostrará más adelante son de uso ordinario en las demostraciones matemáticas. Se denominará *postulados* de una teoría al conjunto de las tautologías y las reglas de inferencia que caracterizan el método de deducción lógica aplicado en una teoría.

Regla de separación (modus ponens)

Todo proceso de deducción consta al menos implícitamente de una regla de inferencia deductiva denominada *regla de separación* o *modus ponens* cuyo esquema general es el siguiente:

(RI1) ***Modus Ponens***:

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash \mathbf{A} \\ T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \end{array}}{T \vdash \mathbf{B}}$$

cuya lectura puede ser la siguiente: "A partir de que en una demostración exista un paso de la forma $T \vdash \mathbf{A}$ y otro paso de la forma $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, entonces se puede insertar $T \vdash \mathbf{B}$ como un nuevo paso en la demostración. Note que $T \vdash \mathbf{A}$ y $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ son las premisas de la regla y $T \vdash \mathbf{B}$ su conclusión.

Como se verá, por su constante empleo en la obtención de otras reglas, (RI1) es una regla de inferencia fundamental en la lógica deductiva y la regla de inferencia fundamental a nivel de la lógica proposicional bivalente. Adoptando un punto de vista axiomático tomamos a (RI1) como un *postulado* que se acepta sin demostración en nuestros desarrollos.

Una regla de inferencia deductiva debe tener una propiedad esencial que se denomina *sanidad*: *si las premisas de una regla de inferencia son verdaderas la conclusión que se obtenga con la regla debe ser también verdadera.*

Recurriendo al concepto de interpretación de la lógica proposicional puede verse que el paso de **A** y $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ a **B** que permite esta regla es "sano": verifíquese que si **A** y $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ son proposiciones verdaderas para una interpretación, entonces, como puede apreciarse en la tabla veritativa de la condicional, se puede afirmar "por separado" que **B** es también verdadera. Luego la regla RI1 es sana.

El empleo de RI1 tanto en el razonamiento ordinario como en el científico es constante, de hecho como podrá constatar el lector, cada vez que se aplica una definición se está aplicando RI1.

Regla de introducción de la implicación

La regla que se introducirá a continuación establece que, para demostrar $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ a partir de una teoría *T*, se puede tomar como *hipótesis, es decir, adicionar temporalmente* **A**, el condicionante de la implicación, a la teoría, entonces demostrando a partir de *T* y de **A**, la proposición **B**, se puede afirmar que $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ se deduce de *T*.

(RI2) $\Rightarrow$***-introducción***

$$\frac{T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Aunque se introduce esta regla también como un postulado más de la lógica proposicional, se brinda una demostración informal de la misma haciendo uso de una de las variantes del principio de inducción matemática:

Demostración:
Sea $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ las proposiciones de parte derecha del operador de deducción ($\vdash$) que aparecen en los pasos de una demostración de **B** a partir de $T \cap \{\mathbf{A}\}$, siendo $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}$. Se demostrará por inducción sobre i, para $1 \leq i \leq n$, que $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}_i$

a) $i = 1$: entonces $\mathbf{B}_1 \in T$ o $\mathbf{B}_1$ es una tautología, o es **A**. Para los dos primeros casos se inserta como paso en la demostración la tautología $\mathbf{B}_1 \Rightarrow [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}_1]$ y se aplica la regla (RI1). Para el caso restante $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}_1$ es una tautología.

b) Supóngase que se cumple $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}_k$ para todo $k < i$ pasos. Entonces $\mathbf{B}_i \in T$ o $\mathbf{B}_i$ es una tautología, o $\mathbf{B}_i$ es **A** o $\mathbf{B}_i$ se deduce por la regla (RI1) a partir de premisas $\mathbf{B}_j$ y $\mathbf{B}_m$, $j < i$, $m < i$, y $\mathbf{B}_m$ es de la forma $\mathbf{B}_j \Rightarrow \mathbf{B}_i$. Se deja como ejercicio la continuación de la demostración.

Se puede considerar que la regla (RI2) *es una representación abreviada de su propia demostración*, es decir, los pasos que van desde el paso $T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ (premisa de la regla) hasta el paso $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (conclusión de la regla) se dan de una vez por todas en la demostración lógica de la regla, la cual da licencia al "salto" de la premisa a la conclusión en cualquier demostración que satisfaga la premisa de la regla. Lo anterior es aplicable al resto de las reglas de inferencia que serán introducidas.

Todas las reglas a continuación son reglas deducidas dentro de la lógica. En sus demostraciones se utilizará postulados (leyes de la lógica proposicional y reglas de inferencia) ya previamente introducidos. Tratándose pues de demostraciones lógicas se incluyen los siguientes pasos exclusivamente para sus demostraciones:

El paso por la inclusión de una ley lógica:

$T \vdash \mathbf{B}$ - L*n*

El paso donde se introduce una premisa de la regla a demostrar:

$T \vdash \mathbf{B}$ - premisa

Finalmente, para toda demostración, no sólo demostraciones lógicas, la aplicación de una regla depende de que sus premisas ocurran como pasos previos en una demostración. Luego para justificar un paso por la aplicación de una regla resulta conveniente numerar los pasos para hacer referencia a la ocurrencia de sus premisas en la demostración. De esta manera la aplicación de una regla se introduce mediante un paso de la forma

$T \vdash \mathbf{B}$ - RI*n*, (i). ((j))

Donde **B** representa la conclusión de la Regla, (i), ((j)) el paso (los pasos) previo(s) que se toman como premisas para la aplicación de la regla y RIn la regla que se aplica.

Todo lo anterior queda ejemplificado en las demostraciones de reglas a continuación.

Regla de introducción de la conjunción:

(RI3) $\wedge$-***introducción***:

$$\frac{\begin{array}{c} T \vdash \mathbf{A} \\ T \vdash \mathbf{B} \end{array}}{T \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}$$

Demostración:

(1) $T \vdash \mathbf{A}$ -premisa
(2) $T \vdash \mathbf{B}$ -premisa
(3) $\vdash \mathbf{A} \Rightarrow [\mathbf{B} \Rightarrow [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]]$ -L24
(4) $\vdash \mathbf{B} \Rightarrow [\boldsymbol{A} \wedge \mathbf{B}]$ -(RI1), (1) y (3)
(5) $T \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ -(RI1), (2) y (4).

Regla de eliminación de la conjunción

(RI4) $\wedge$-***eliminación***:

$$\frac{T \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{T \vdash \mathbf{A}}$$

Demostración de (RI4):

□ (1) $T \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ -premisa
□ (2) $\vdash [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \Rightarrow \mathbf{A}$ -L29
□ (3) $\vdash \mathbf{A}$ - (RI1), (1) y (2).

Regla de introducción de la conjunción

(RI5) $\vee$-***introducción***

$$\frac{T \vdash \mathbf{A}}{T \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}$$

Demostración de (RI5):

□ (1) $T \vdash \mathbf{A}$ -premisa
□ (2) $\vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ -L28
(3) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ - (RI1), (1) y (2).

Reglas de prueba por casos

(RI6a) ***prueba por casos***

$$\frac{\begin{array}{c} T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} \\ T \vdash \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} \end{array}}{T \vdash [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \Rightarrow \mathbf{C}}$$

Demostración(RI6a):

(1) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ -premisa
(2) $T \vdash \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ -premisa
(3) $\vdash [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}] \wedge [\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}]$ -(RI3), (1), (2)
(4) $\vdash [\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}] \wedge [\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C}]$ -L22
(5) $\vdash [\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}] \vee \mathbf{C}$ -L7

(6) $\vdash \neg[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \vee \mathbf{C}$ -L20
(7) $T \vdash [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \Rightarrow \mathbf{C}$ - L22

(RI6b) ***prueba por casos***

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \\ T \vdash \neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \end{array}}{T \vdash \mathbf{B}}$$

Demostración(RI6b):

(1) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ -premisa
(2) $T \vdash \neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ -premisa
(3) $\vdash [\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}] \Rightarrow \mathbf{B}$ -(RI6a), (1), (2)
(4) $\vdash 1 \Rightarrow \mathbf{B}$ -L15
(5) $\vdash \neg\mathbf{1} \vee \mathbf{B}$ -L22
(6) $\vdash \mathbf{0} \vee \mathbf{B}$ -L18
(7) $T \vdash \mathbf{B}$ - L11

Regla de prueba del contrarrecíproco

(RI7) ***prueba del contrarrecíproco***:

$$\frac{T \vdash \neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración(RI7):

(1) $T \vdash \neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ -premisa
(2) $\vdash \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$ -L22
(3) $\vdash \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$ -L17
(4) $\vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ -L5
(5) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ -L22

Regla de transitividad de la implicación

(RI8) ***⇒-transitividad***:

$$\frac{\begin{array}{c} T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} \\ T \vdash \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B} \end{array}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración (RI8):

(1) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ -premisa
(2) $T \vdash \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}$ -premisa
(3) $\vdash [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}] \wedge [\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}]$ -(RI3), (1), (2)
(4) $\vdash [[\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}] \wedge [\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}]] \Rightarrow [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}]$ -L25
(5 $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ -(RI1), (3), (4).

Reglas de reducción al absurdo

(RI9a) ***Reducción al absurdo***:

$$\frac{T, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}}{T \vdash \mathbf{A}}$$

Demostración (RI9a):

(1) $T, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}$ -premisa
(2) $T \vdash \neg\mathbf{A} \Rightarrow [\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}]$ - (RI2), (1)
(3) $\vdash \neg\neg\mathbf{A} \vee [\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}]$ -L22
(4) $\vdash \mathbf{A} \vee [\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}]$ -L17
(5) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{0}$ -L16
(6) $T \vdash \mathbf{A}$ -L11.

.

(RI9b) ***Reducción al absurdo***:

$$\frac{T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \mathbf{C} \land \neg\mathbf{C}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración (RI9b):

(1) $T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \mathbf{C} \land \neg\mathbf{C}$	-premisa
(2) $T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$	-(RI9a), (1)
(3) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	-(RI2), (2)

(RI9c) ***Reducción al absurdo***:

$$\frac{T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \mathbf{B}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración (RI9c):

(1) $T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \mathbf{B}$	-premisa
(2) $T, \mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}$	- (RI2), (1)
(3) $\vdash \neg\neg\mathbf{B} \lor \mathbf{B}$	-L22
(4) $\vdash \mathbf{B} \lor \mathbf{B}$	-L17
(5) $\vdash \mathbf{B}$	-L1
(6) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	-(RI2), (5)

(RI9d) ***Reducción al absurdo***:

$$\frac{T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \neg\mathbf{A}}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración (RI9d):

(1) $T, \mathbf{A}, \neg\mathbf{B} \vdash \neg\mathbf{A}$	-premisa
(2) $T, \neg\mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$	- (RI2), (1)
(3) $\vdash \neg\mathbf{A} \lor \neg\mathbf{A}$	-L22
(4) $\vdash \neg\mathbf{A}$	-L1
(5) $T \vdash \neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$	-(RI2), (4)
(6) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	-(RI7), (5)

Reglas de Prueba de disyunciones

(RI10) ***Prueba de disyunciones***:

$$\frac{\begin{array}{c} T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \\ T \vdash \neg\, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} \end{array}}{T \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}}$$

Demostración (RI10):

(1)	$T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	-premisa
(2)	$T \vdash \neg\, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$	-premisa
(3)	$\vdash [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\neg\, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}]$	-(RI3), (1), (2)
(4)	$\vdash \big[[\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\neg\, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}]\big] \Rightarrow [\mathbf{B} \vee \mathbf{C}]$	-L26
(5)	$T \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$	-(RI1), (3), (4). .

Regla de prueba de necesidad y suficiencia

(RI11) ***Prueba de necesidad y suficiencia***:

$$\frac{\begin{array}{c} T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \\ T \vdash \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \end{array}}{T \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}}$$

Demostración (RI11):

(1)	$T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	-premisa
(2)	$T \vdash \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$	-premisa
(3)	$\vdash [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}] \wedge [\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}]$	-(RI3), (1), (2)
(4)	$\vdash \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$	-L23

2.3.2 Aplicación: Demostración matemática

A continuación se ejemplifica el uso de algunas reglas de inferencia de la lógica proposicional para *analizar lógicamente* demostraciones de teoremas en Matemática. Toda demostración matemática consta al menos de una regla de inferencia, y en la mayoría de los casos una demostración combina varias reglas de inferencia. Siempre hay una regla en una demostración que es la que establece en su conclusión la proposición que se quiere demostrar o teorema.

En la práctica matemática las demostraciones no son tan explícitas como las que se realizan en lógica, el texto demostrativo de un teorema se hace con vista a su comprensión por seres humanos que son capaces de suplir con la ayuda de su razonamiento y utilizando sus conocimientos y entrenamiento previo en matemática lo que una prueba deja implícita. ¿Cuánto puede dejarse implícito en una prueba matemática?

No hay regla, primero se deja implícita la justificación lógica de la prueba: se supone que todo matemático con cierta madurez en su profesión está familiarizado en la práctica con los métodos de definición y de demostración lógica de uso corriente en su ciencia y, segundo, se deja implícito cuanto conocimiento matemático es necesario para seguir la prueba en dependencia del nivel de estudio o de especialización al cual va dirigida la prueba. No obstante, muchos de los errores e insuficiencias que se pueden advertir en algunas demostraciones matemáticas, así como la incapacidad para comprender las mismas o suplir sus ausencias por parte del iniciado tienen su fuente en este modo implícito de proceder. No hay la menor duda que una familiarización con el método de deducción implícito en las demostraciones matemáticas brinda capacidad de análisis para analizar y comprenderlas.

Ejemplificaremos el uso de las reglas de inferencia en matemática a continuación basándonos fundamentalmente en una presentación abreviada de la teoría de los números racionales $\mathbf{Q}$

Por sus conocimientos previos el lector sabe que a partir del conjunto de los números naturales

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

se construye el conjunto de los números enteros

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, ..\}$$

que permiten encontrar una solución siempre para la ecuación a - x = b. A su vez a partir de $\mathbb{Z}$ se define el conjunto de los números racionales

$$\mathbf{Q} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$$

que permite encontrar una solución siempre para la ecuación ax = b. Se tiene también que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Se denotará por T($\mathbf{Q}$) la teoría de los números racionales, es decir, el conjunto de todas las proposiciones que afirman propiedades de los números racionales. Sin embargo, aplicando el método axiomático ya estudiado, se selecciona un conjunto de proposiciones que se consideran esenciales para la caracterización o definición de **Q**, tales proposiciones representan los axiomas de la teoría sobre **Q**, mientras que el resto de las proposiciones serán los teoremas a demostrar sobre **Q**. Por lo tanto, T(**Q**) denotará el siguiente conjunto de axiomas que caracterizan a **Q** (las variables x, y, z toman valores en **Q**) **:**

Q 1: La suma + y el producto × son operaciones cerradas.
Q 2: La suma y el producto son asociativos:

$$x + (y + z) = (x + y) + z,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

Q 3: La suma y el producto son conmutativos:

$$x + y = y + x,\ x \times y = y \times x$$

Q 4: El producto es distributivo sobre la suma:

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z).$$

Q 5: El 0 es identidad aditiva:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

Q 6: El 1 es identidad multiplicativa:

$$x \times 1 = 1 \times x = x$$

Q 7: Para todo x existe un inverso aditivo denotado por x^{-1} tal que

$$x + x^{-1} = x^{-1} + x = 0.$$

Q 8: Para toda x existe un inverso multiplicativo denotado por $1/x$ tal que:

$$x \times 1/x = 1/x \times x = 1$$

Note que T(**Q**) es una teoría que hace uso de la relación de igualdad (=), luego es válido en las demostraciones de teoremas en T(**Q**), utilizar pasos justificados por las propiedades fundamentales de la igualdad ya enunciadas (= es reflexiva, simétrica y transitiva).

Prueba "directa"

Muchas proposiciones matemáticas que se desean demostrar son proposiciones condicionales, es decir, proposiciones de la forma **A** ⇒ **B**. Las pruebas denominadas frecuentemente "directas" en matemática son pruebas en las cuales se presupone como hipótesis el antecedente **A** de la implicación y demostrando entonces el consecuente **B**, se considera demostrado **A** ⇒ **B** . Tales demostraciones hacen un uso explícito o no de la regla (RI2) (⇒-introducción) como verificará el lector.

Ejemplo:

> Observe que los axiomas 1) - 7) caracterizan el conjunto de los enteros **Z**: la operación de división no es cerrada sobre los enteros dado que no para todo entero x existe el inverso multiplicativo $1/x$, tal que $x \times 1/x = 1$. Se denotará por T(**Z**) la teoría de los enteros

Sin embargo algunas proposiciones como la siguiente se pueden demostrar sobre la división de enteros:

Definición: Para $x, y \in \mathbf{Z}$, *divide* $(x, y) \Leftrightarrow$ existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que $y = xn$

Teorema T($\mathbf{Z}$)_1: sean $x, y, z \in \mathbf{Z}$, Si *divide* (x, y) y *divide* (x, z), entonces *divide* $(x, y + z)$

Demostración:

> Sea una x tal que *divide* (x, y) y *divide* (x, z). existen enteros m y n tales que $y = xm$ y $z = xn$. Por lo que $y + z = xm + xn = x(m + n)$.

A continuación se realiza un análisis lógico de la demostración.

> Teorema T($\mathbf{Z}$)_1: $T, x, y, z \in \mathbf{Z} \vdash [divide\ (x, y) \wedge divide\ (x, z)] \Rightarrow divide\ (x, y + z)$

Demostración:

(1) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y) \vdash divide\ (x, y)$ -hipótesis
(2) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y) \vdash y = xm$ -definición, (1)
(3) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash divide\ (x, z)$ -hipótesis
(4) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash z = xn$ -definición, (3)
(5) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash y + z = xm + xn$ - $\mathbb{Q}1$
(6) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash xm + xn = x(m + n)$ - $\mathbb{Q}4$
(7) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash y + z = x(m + n)$ - = es simétrica y transitiva
(8) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y), divide\ (x, z) \vdash divide\ (x, y + z)$ -definición, (7)
(9) T($\mathbf{Z}$), $divide\ (x, y) \vdash divide\ (x, z) \Rightarrow divide\ (x, y + z)$ - RI2, (8)
(10) T($\mathbf{Z}$) $\vdash divide\ (x, y) \Rightarrow [divide\ (x, z) \Rightarrow divide\ (x, y + z)]$ -RI2, (9)
(11) T($\mathbf{Z}$) $\vdash \neg divide\ (x, y) \vee [\neg divide\ (x, z) \vee divide\ (x, y + z)]$ -L22
(12) T($\mathbf{Z}$) $\vdash [\neg divide\ (x, y) \vee \neg divide\ (x, z)] \vee divide\ (x, y + z)$ -L3
(13) T($\mathbf{Z}$) $\vdash \neg[divide\ (x, y) \wedge divide\ (x, z)] \vee divide\ (x, y + z)$ -L21
(11) T($\mathbf{Z}$) $\vdash [divide\ (x, y) \wedge divide\ (x, z)] \Rightarrow divide\ (x, y + z)]$ - L22

Prueba del contrarrecíproco

En ocasiones para demostrar $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, resulta más viable obtener primero una demostración de su contrarrecíproco $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ y aplicando (R17), la regla del contrarrecíproco, se logra la demostración de $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$.

En la demostración del teorema que daremos a continuación se ejemplifica (RI7) y se hace uso también de (RI8).

Teorema T(**Z**)_2: $T, x \in \mathbf{Z} \ \vdash divide(2, x^2) \Rightarrow divide(2, x)$

Demostración:

Sea un entero x tal que 2 no divide a x, entonces $x = 2m + 1$ para algún entero m. Entonces $x^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Luego 2 no divide a x^2. Se deja al lector la justificación de los pasos en el siguiente análisis lógico de la demostración.

(1) $T, \neg[2 \text{ divide a } x] \vdash \neg[2 \text{ divide a } x]$ -
(2) $T, \neg[2 \text{ divide a } x] \vdash x = 2m + 1$ -
(4) $\vdash x = 2m + 1 \Rightarrow x^2 = 4m^2 + 4m + 1$ -
(5) $\vdash x^2 = 4m^2 + 4m + 1 \Rightarrow \neg[2 \text{ divide a } x^2]$ -
(6) $T \ \vdash \neg[2 \text{ divide a } x] \Rightarrow \neg[2 \text{ divide a } x^2]$ -
(7) $\vdash 2 \text{ divide a } x^2 \Rightarrow 2 \text{ divide a } x$ -

Prueba por casos

El siguiente teorema muestra una aplicación de la regla de inferencia (RI6a) de prueba por casos. Se deja al lector los detalles de la aplicación.

Se realizará la demostración en el dominio de los números reales. Para cualquier $x \in \mathbf{R}$, se define el *valor absoluto* de x de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema: para $x, y \in \mathbf{R}$, $|xy| = |x||y|$

Demostración:

La definición de valor absoluto contempla dos casos dada la posibilidad de que x sea un real positivo o negativo. En el teorema a demostrar en el que se trata de establecer que el valor absoluto del producto de dos números reales es igual al producto de sus valores absolutos ocurren dos variables x, y. correspondientes a dos números reales, por lo que se presentan cuatro casos para realizar la demostración:

Caso 1: x, y son reales positivos.
Caso2: x, y son reales negativos.
Caso 3 Al menos x o y es 0
Caso 4: x es un real negativo y y un real positivo mayor que 0 o viceversa.

El lector comprobara que los cuatros casos son suficientes para la demostración que sigue, cuyos pasos justificará.

Caso1: $x > 0 \wedge y > 0$
$xy > 0$, $|xy| = xy$, $|x| = x$, $|y| = y$, luego $|xy| = xy = |x||y|$.

Caso 2: $x < 0 \wedge y < 0$
$xy > 0$, $|xy| = xy$, $|x| = -x$, $|y| = -y$, luego $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Caso3: $x = 0 \vee y = 0$
Sea x = 0 o y =0 se tiene que xy = 0, |xy| = 0, |x| = 0 o |y| = 0 luego |xy| = 0 = |x||y|.

Caso 4: $[x < 0 \wedge y > 0] \vee [x > 0 \wedge y < 0]$
Sea $x < 0 \wedge y > 0$, $xy < 0$, $|xy| = -(xy)$, , $|x| = -x$, $|y| = y$, luego $|xy| = -(xy) = (-x)y = |x||y|$.

Se invita al lector a realizar un análisis lógico de la demostración siguiendo los ejemplos dados al respecto. Para abreviar, obvie los pasos que se justifican por la relación de igualdad.

Pruebas por reducción al absurdo

En la demostración del siguiente teorema se emplea fundamentalmente la regla (RI9a) de reducción al absurdo.

Se procede a demostrar tanto $T, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ como $T, \neg\mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{B}$. A partir de aquí, por (RI2) se obtiene $T, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}$, y ya puede aplicarse entonces (RI9a). Este es el caso de los teoremas en los cuales para demostrar la proposición **A** se toma como hipótesis , $\neg$**A** y se genera una contradicción $\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}$ en la demostración.

En el teroema que sigue se denota la raíz cuadrad de $x \in \mathbf{R}$ como es usual en matemática $\sqrt{x}$.

Teorema: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

Demostración:

> Supóngase lo contrario, que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Entonces $\sqrt{2}$ es representable como p/q, para p, $q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ y p y q no tienen factor común (de lo contrario se procede a su simplificación). Entonces $\sqrt{2}q = p$ *y* elevando al cuadrado ambos términos se tiene $2q^2 = p^2$. Por el teorema DM2, p es par dado que p^2 es par. Luego para algún $m \in \mathbf{Z}$, $p = 2m$. Entonces $2q^2 = 4m^{2}$ y dividiendo ambos términos por 2 se tiene $q^2 = 2m^2$, luego nuevamente por el teorema DM2, q es par. Siendo números pares p y q, entonces tienen a 2 como un factor común, lo que contradice la presuposición hecha de que p y q no tienen factor común.
>
> Se deja al lector como ejercicio la realización del análisis lógico-proposicional de este teorema.

Pruebas de necesidad y suficiencia

Una forma muy corriente de enunciar un teorema es la siguiente: “Una condición necesaria y suficiente para que se cumpla **A** es que se cumpla **B**”. Desde un punto de vista lógico se trata de la demostración de la equivalencia entre las proposiciones **A** y **B**, es decir, de la demostración de

$$\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$$

De acuerdo con (RI11), para demostrar **A** ⇔ **B** hay que demostrar tanto que **A** ⇒ **B** como que **B** ⇒ **A**. Cuando se demuestra **A** ⇒ **B** se dice que se está demostrando la *necesidad* (verdad) de **B** cuando **A** se considera verdadera, es decir, que bajo la hipótesis de que **A** es verdadera se sigue necesariamente que **B** es verdadera. Cuando se demuestra **B** ⇒ **A** se está demostrando la *suficiencia* de **B** para que **A** sea verdadera, es decir, que basta que **B** sea verdadera para que **A** lo sea también. Por supuesto, desde un punto de vista lógico, cuando se demuestra la necesidad de **B** con respecto a **A** se demuestra al mismo tiempo la suficiencia de **A** con respecto a **B** y, viceversa, cuando se demuestra la suficiencia de ***B*** con respecto a **A** se está demostrando la necesidad de **A** con respecto a ***B***. Por lo tanto, qué proposición se escoge para demostrar que ella es condición necesaria y suficiente para que se cumpla la otra no depende sino de la teoría en cuestión que desarrollamos y de la importancia que tenga para la teoría cada una de las dos proposiciones equivalentes.

Ejemplo:

Teorema: Una condición necesaria y suficiente para que a, b sean raíces de la ecuación $x^2 + px - q = 0$ donde $p^2 > 4q$ es que $a + b = -p$ y $ab = q$ siendo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

En este teorema hay dos proposiciones cuya equivalencia lógica tiene que ser demostrada:

Sea **A** la proposición "a y b son raíces de la ecuación $x^2 + px - q = 0$" y **B** la proposición "$a + b = -p \wedge ab = q$", es decir, "una condición necesaria y suficiente para **A** es que **B**". Se puede demostrar primero que **B** es una condición necesaria para **A**, es decir, que
A ⇒ **B**.

Esta demostración se lleva a cabo tomando como hipótesis a **A** y deduciendo entonces **B**, luego se aplica (RI2) para obtener **A** ⇒ **B**. Se deja al lector realizar el análisis lógico de la siguiente demostración:

$a = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ y $b = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$, entonces $a + b = -p$ y $ab = \frac{(-p)^2-(p^2-4q)}{4} = q$,

Luego $a + b = -p$ y $ab = q$.

La demostración de que **B** es una condición suficiente para **A**, es decir, que **B** ⇒ **A** se puede realizar también aplicando (RI2) y es un simple ejercicio algebraico cuya realización se deja al lector.

Ejercicios

1. Realice las demostraciones de las reglas de inferencia deductivas propuestas como ejercicio.
2. Demuestre las siguientes implicaciones lógicas:

   a) ⊢ [**A** ⇒ [**B** ∧ **C**]] ⇒ [[**A** ⇒ **B**] ∧ [**A** ⇒ **C**]]
   b) ⊢ [**A** ⇒ **B**] ⇒ [[**A** ∧ **C**] ⇒ **B**]

3. Demuestre utilizando exclusivamente (RI1):

   a) ⊢ **A** ⇒ **A**

b) $\vdash [\neg \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}] \Rightarrow \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$

4. Complete y justifique los pasos en la siguiente demostración:

Teorema: $T \vdash R\ es\ simétrica \ \Leftrightarrow R = R^{-1}$

Demostración:

(1) $T, R\ es\ simétrica$	$\vdash < x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \in R$	-
(2)	$\vdash < y, x > \in R \Rightarrow < x, y > \in R^{-1}$	-
(3)	$\vdash < x, y > \in R \Rightarrow < x, y > \in R^{-1}$	-
(4)	$\vdash R \subseteq R^{-1}$	–
(5)	$\vdash < x, y > \in R^{-1} \Rightarrow < y, x > \in R$	
(6)	$\vdash < y, x > \in R \Rightarrow < x, y > \in R$	-
(7)	$\vdash < x, y > \in R^{-1} \Rightarrow < x, y > \in R$	
(8)	$\vdash R^{-1} \subseteq R$	
(9)	$\vdash R \subseteq R^{-1} \wedge R^{-1} \subseteq R$	
(10)	$\vdash R = R^{-1}$	
(11)	$T \vdash R\ es\ simétrica \ \Rightarrow R = R^{-1}$	

5. Analice las siguientes demostraciones de teoremas adaptadas de libros de Análisis Matemático y de Geometría Elemental respectivamente, y diga qué reglas de inferencia se utiliza en las demostraciones.

a) Teorema: Dos perpendiculares *cd* y *ef* a una misma recta *ab* son paralelas entre si

Demostración: Supongamos que *cd* y *ef* no son paralelas. En este caso tendrían que encontrarse en un cierto punto *m* y entonces existirían dos perpendiculares desde ese punto *m* a la misma recta *ab*, lo cual es un absurdo.

b) Teorema: Si una sucesión $\{c_n\}$ es convergente, entonces la condición $c_n \geq 0$ implica lim $c_n \geq 0$.

Demostración: Sea lim $c_n = h$ y supongamos que $h < 0$, o lo que es lo mismo, $-h > 0$. Entonces tenemos $| c_n - h| < -h$ para un n suficientemente grande y de ahí que $| c_n - h| < h$, de donde $c_n < 0$ lo cual niega nuestra suposición.

6. Demuestre los siguientes teoremas:

   a) $T \vdash P \Rightarrow P$
   b) $T, P, P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$
   c) $T, [P \wedge\ Q] \Rightarrow R, Q \Rightarrow P, Q \vdash R$
   d) $T\ P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R, \vdash P \Rightarrow [\ Q \wedge R]$
   e) $T, P \vdash Q \Rightarrow P$
   f) $T, P \Rightarrow [Q \Rightarrow R] \vdash Q \Rightarrow [\ P \Rightarrow R]$
   g) $T, P \vee [Q \wedge\ R] \vdash P \vee Q$
   h) $T, P \vdash [P \Rightarrow Q] \Rightarrow Q$
   i) $T, P \Rightarrow Q \vdash [Q \Rightarrow R] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$

7. Demuestre formalmente las siguientes proposiciones:

   a) $[\mathrm{A} \Rightarrow [\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}]] \Rrightarrow [[\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}] \wedge [\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}]]$
   b) $[\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}] \Rrightarrow [[\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}] \Rightarrow \mathrm{B}]]$

8. Demuestre formalmente:

   a) $T, p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, \neg q \vee \neg s\ \vdash \neg p \vee \neg r$
   b) $T, [p \Rightarrow q] \Rightarrow [q \Rightarrow p]\ \vdash q \Rightarrow p$

Capítulo 3 Lógica de Predicados

3.1. Predicados

Analice los siguientes ejemplos de expresiones matemáticas y ponga especial atención a su estructura y partes componentes:

i) $x \leq x$
ii) $x > 0$
iii) $2 + 3 = y$
iv) $2 * x * y = 1$

De acuerdo con la notación usual en matemática:

x, *y*, *z* son símbolos de *variables*.

0, 1, 2, 3 son símbolos de c*onstantes*.

<, >, = son símbolos de *relaciones*.

+ , $*$ son símbolos de *funciones*.

En una interpretación usual en matemática, seleccionando el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales como el *dominio de interpretación* se tiene que:

a) *x*, *y*, *z* toman valores en $\mathbb{R}$,
b) 0, 1, 2, 3 denotan determinados números reales,
c) $\leq$, >, = denotan determinadas relaciones binarias en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
d) + y $*$ denotan determinadas funciones con dominio en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y codominio en $\mathbb{R}$.

Note que las expresiones 0, 1, 2 + 3, $2 * x * y$ son utilizadas en los enunciados dados para denotar a elementos del dominio, en el caso de las expresiones en las que aparecen variables, cuando damos a dichas variables un valor determinado. Se llamará *términos* a estas expresiones. Observe que los términos pueden tener a su vez *subtérminos*, por ejemplo, $2 * x * y$ contiene los subtérminos $2 * x$, y *y*. Se denominará *término básico* a un término en el que no hay ocurrencia alguna de variable, por ejemplo, 1, 0, 2 + 3 son términos básicos. Note que los términos básicos son genuinos nombres que denotan elementos bien determinados del dominio, por ejemplo, 2 + 3 denota el número también denotado por la constante 5.

La interpretación arriba descrita es estándar en la matemática ordinaria, pero *no debemos confundir un símbolo con lo que el símbolo denota bajo una interpretación*: el número que en el sistema decimal se denota por el símbolo 1 se denota en números romanos por el símbolo “I” y además nótese que 1.0 es también un modo de denotarlo como número real. Por otra parte, nada impide tomar los mismos símbolos para denotar otras entidades en otros dominios. En la práctica matemática casi siempre se trabaja en un domino prefijado, por ejemplo, análisis *real*, y una vez introducida la denotación de los símbolos esta es fija.

En los enunciados dados, mientras que los símbolos de constantes, relaciones y funciones tienen una interpretación fija, no es este el caso de las variables: una interpretación de las expresiones a) – d) sólo establece de manera general el dominio que contiene los elementos que una variable puede tomar como valor. Esta indeterminación con respecto al valor que pueden tomar las variables da lugar a que desde un punto de vista lógico las expresiones a) - d) no sean consideradas proposiciones: sólo en dependencia de los valores que tomen las variables, las expresiones anteriores dan lugar a proposiciones, es decir, a expresiones que son verdaderas o falsas como puede intuitivamente verificarse. Entonces ¿qué son y qué denotan las expresiones anteriores desde un punto de vista lógico?

En lógica, las anteriores expresiones se denominan *predicados n-arios*, donde *n* denota el número de variables que ocurren en el predicado n-ario o su *aridad*. Por ejemplo, a) es un *predicado unario* (en una variable) y d) es un *predicado binario* (en dos variables). *Un predicado n-ario denota, bajo una interpretación, una relación n-aria en un dominio.* La diferencia entre un predicado n-ario y la relación que denota se basa en las ya estudiadas representaciones extensional e intencional (por significado) de una relación: un predicado n-ario es un significado para una relación definida extensionalmente en un dominio como un conjunto de n-uplos ordenados de elementos del dominio en el cual interpretamos el predicado.

Nuevamente, en lógica, *bajo una interpretación, un predicado describe, es decir, define, atribuyéndole un significado, una relación.* Se ha visto que una misma relación en un dominio puede tener asociados diferentes predicados que la definan, es decir diferentes definiciones por comprensión o significado. En la práctica a veces las denominaciones de predicado n-ario y relación n-aria se intercambian.

Ya en los desarrollos de la teoría de conjuntos se utilizaron predicados n-arios para definir conjuntos y relaciones El concepto de *propiedad* se corresponde con el de predicado unario: un predicado unario describe una propiedad que define un conjunto en un dominio, a saber, todos los elementos del dominio que satisfacen la propiedad que define el predicado unario.

3.1.1 Proposiciones en la lógica de predicados

¿Cómo pueden construirse proposiciones a partir de predicados n-arios interpretados en un dominio ***D***? Hay dos procedimientos que pueden aplicarse indistintamente y entremezclarse. Se expondrán a través de ejemplos de las expresiones a) – d) interpretadas en $\mathbb{R}$:

***Sustitución de las variables por términos básicos*:** consiste en sustituir cada variable que aparezca en un predicado n-ario siempre por el mismo término básico. Es el procedimiento que se utiliza para afirmar que entre determinados elementos del dominio que son denotados por los términos básicos se cumple la relación que denota el predicado.

Ejemplos:

a') $2 \leq 2$, sustituyendo x por 2 en a).

b') $3 + 0.5 > 0$, sustituyendo x por $3 + 0.5$ en b).

c') $2 + 3 = 7$, sustituyendo x por 7 en c).

d') $2 * 1/2 * 1 = 1$, sustituyendo x por $1/2$ y y por 1 en d).

Se aprecia intuitivamente que a') - d') no contienen variables y son por tanto proposiciones, en el sentido de que son expresiones verdaderas o falsas en $\mathbb{R}$, de acuerdo con la interpretación en $\mathbb{R}$, a'), b') y d') son proposiciones verdaderas y c') es falsa.

***Cuantificación de las variables*:** consiste en prefijar al predicado una de las dos expresiones siguientes para cada una de las variables distintas que ocurra en el predicado:

"Para toda (variable),"
"Existe (variable) tal que"

Ejemplos:

a") Para toda x, $x \leq x$

b") Existe x tal que $x > 0$

c") Existe x tal que $2 + 3 = x$

d") Existe y, Para toda x, tal que $2 * x * y = 1$

Se dice entonces que la variable x (y) siendo *libre* en a) - d), está *acotada* en a”) - d”). Las expresiones “Para toda(variable),” y “Existe(variable) tal que” se denominan *cuantificador universal* y *cuantificador existencial* respectivamente. Las expresiones a”) - d”) al no contener variables son proposiciones. Se deja al lector el aplicar sus conocimientos previos de matemática de manera intuitiva y verificar que a”) - c”) son proposiciones verdaderas en $\mathbb{R}$ y que d’’) es falsa en $\mathbb{R}$.

Usaremos para el cuantificador universal la notación $\forall(\ )$ y para el cuantificador existencial la notación $\exists(\ )$. Ambos cuantificadores son genuinos operadores lógicos que generan proposiciones a partir de predicados n-arios. Veamos a continuación las definiciones respectivas de estos operadores lógicos.

El cuantificador universal

En lo que sigue, según la notación ya introducida, $\mathbf{A}(x)$ denota un predicado unario en x que ha sido interpretado en un dominio $\boldsymbol{D}$.

> $\forall(x)\mathbf{A}(x)$ *es verdadera en el dominio* $\boldsymbol{D}$ si y solo si para todo valor de x en $\boldsymbol{D}$, se tiene que $\mathbf{A}(x)$ es verdadera en $\boldsymbol{D}$.

Ejemplos:

– $\forall(x)\ x \leq x$ es verdadera en $\mathbb{R}$**,** dado que $x \leq x$ es verdadera en $\mathbb{R}$ para todo valor de x en $\mathbb{R}$.
– $\forall(x)\ 2 + 3 = x$ es falsa en $\mathbb{R}$, dado que $2 + 3 = x$ no es verdadera para todo valor de x en $\mathbb{R}$.

Sea el dominio $\boldsymbol{D}$ de interpretación de $\mathbf{A}(x)$, finito o infinito. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ las constantes que denotan a todos los elementos de D, entonces

$$\forall(x)\mathbf{A}(x) \cong \mathbf{A}(a_1) \wedge \mathbf{A}(a_2) \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}(a_n) \ldots$$

Luego, el cuantificador universal aplicado a $\mathbf{A}(x)$ es equivalente a la conjunción finita o infinita de todas las proposiciones $\mathbf{A}(a_1), \mathbf{A}(a_2), \ldots, \mathbf{A}(a_n), \ldots$ Se establece por definición que si $\boldsymbol{D} = \varnothing$, entonces $\forall(x)\ \mathbf{A}(x)$ es verdadera en $\boldsymbol{D}$.

El cuantificador existencial

$\exists(x)\mathbf{A}(x)$ *es verdadera en el dominio* ***D*** si y solo si para al menos un valor de x en ***D***, se tiene que $\mathbf{A}(x)$ es verdadera en ***D***.

Ejemplos:

–$\exists(x)\ x \leq 0$ es verdadera en $\mathbb{R}$ dado que $x \leq 0$ es verdadera en $\mathbb{R}$ para al menos un valor que tome la variable x en $\mathbb{R}$, para $x = -2$. Verifique que la proposición es falsa en $\mathbb{N}$.

-$\exists(x)\ 2x = 3$ es verdadera en $\mathbb{R}$, dado que $2x = 3$ es verdadera para al menos un valor que tome la variable x en $\mathbb{R}$, para $x = 3/2$. Verifique que la proposición es falsa en $\mathbb{Z}$.

Sea el dominio D de interpretación de $\mathbf{A}(x)$ finito o infinito. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$las constantes que denotan a todos los elementos de ***D***, entonces

$$\exists(x)A(x) \cong \mathbf{A}(a_1) \vee \mathbf{A}(a_2) \vee \ldots \vee \mathbf{A}(a_n) \ldots$$

Luego el cuantificador universal aplicado a $\mathbf{A}(x)$ es equivalente a la disyunción finita o infinita de todas las proposiciones $\mathbf{A}(a_1)$, $\mathbf{A}(a_2)$, ..., $\mathbf{A}(a_n)$, ... Se establece por definición que si $\boldsymbol{D} = \varnothing$, entonces $\exists(x)\ \mathbf{A}(x)$ es falsa en ***D***.

3.1.2 El lenguaje de la lógica de predicados

Los cuantificadores constituyen el objetivo principal en el estudio de la lógica de predicados. Primero debe especificarse un lenguaje en el cual se pueda llevar a cabo ese estudio en condiciones ideales como se hizo anteriormente en el caso de la lógica proposicional. Este lenguaje se denominará lenguaje de la lógica de predicados. Como podrá paulatinamente apreciarse, este lenguaje es lo suficientemente rico como para servir de base lingüística a la mayoría de las teorías matemáticas conocidas. Para la comprensión de este lenguaje se deberán tener en cuenta los desarrollos intuitivos precedentes.

Alfabeto

El lenguaje de la lógica de predicados tiene un alfabeto con las siguientes tipos de símbolos:

i) *constantes (individuales)*: se usarán generalmente las primeras letras del alfabeto latino con subíndices numérico cuando sea necesario: a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc. De acuerdo con la teoría sobre un dominio D que queramos describir mediante la lógica de predicados, se pueden adoptar como símbolos de constantes individuales aquellos símbolos que usualmente se utilizan como tales en la exposición de dicha teoría. Así, por ejemplo, se pueden incluir los símbolos de constantes que denotan números naturales 0, 1,2,... o la constante π. El adjetivo "individual" en "constante individual" se refiere al hecho de que estos símbolos sirven para denotar elementos (individuos) del dominio D.

ii) *variables (individuales)*: se denotarán como es costumbre en la práctica matemática por las últimas letras del alfabeto latino con subíndices numéricos si fuese necesario: *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z*, etc. Las variables individuales toman como valores, como ya fue expuesto, elementos del dominio y serán los únicos símbolos de variables que aparecerán en los desarrollos, salvo alguna excepción que se haga en un momento particular, por lo cual las llamaremos simplemente variables.

iii) *funciones n-arias*: Las letras minúsculas del alfabeto latino con subíndice numérico natural si fuese necesario, *f*, *g*, *h*, etcétera. Aquí también, de acuerdo con la teoría para la cual se toma como base lingüística la lógica de predicados, se pueden adoptar como símbolos de constantes funcionales aquellos que usualmente denotan las funciones de dicha teoría. Así, por ejemplo, si se trata de la aritmética podemos incluir los símbolos de funciones binarias + y $*$. También los símbolos de funciones n-arias pueden ser introducidos por definición. Nótese que en una interpretación en un dominio dado, los símbolos de funciones n-arias tendrán una denotación fija y son por lo tanto también constantes, es decir constantes funcionales.

iv) *relaciones n-arias*: las letras minúsculas del alfabeto latino *p*, *q*, *r*, con subíndice numérico si fuese necesario, p_1, q_1, r_1, etc. De nuevo aquí, de acuerdo con la teoría que se describa mediante la lógica de predicados podemos adoptar como símbolos de relaciones aquellos que usualmente denotan las relaciones de dicha teoría. Así, por ejemplo, si se trata de la teoría de los números reales podemos incluir los símbolos de relaciones binarias = y <. También los símbolos de relaciones n-arias pueden ser introducidos por definición, como ya hemos hecho en los desarrollos de la teoría de conjuntos.

v) *constantes proposicionales*: los valores de verdad **0** (falso) y **1** (verdadero)

vi) *operadores proposicionales*: $\neg$ (*negación*), $\vee$ (*disyunción*), $\wedge$ (*conjunción*), $\Rightarrow$ (*implicación*), $\Leftrightarrow$ (*bicondicional*)

vii) *operadores de cuantificación*; ∀( ) *cuantificador universal*, ∃( ) *cuantificador existencial*.

viii) signos *auxiliares de escritura*: [,], (,).

Con el alfabeto dado se construyen los dos tipos de expresiones fundamentales de la lógica de predicados, los términos y las fórmulas.

Términos

A continuación se define de manera precisa la clase de los términos.

i) Toda constante individual y toda variable es un *término*.

ii) Si ***t****1*,..., ***t****n* son términos y *f* es un símbolo de función n-aria, entonces *f(****t****1*, ..., ***t****n)* es un *término*.

iii) Todo término es el resultado solamente de la aplicación un numero finito de veces de i) y ii).

Ejemplos:

Son términos: *a*, *b*, *x*, *y*, 2, 3, *f*(*x*), *g*(*a*, *f*(*y*)), *g*(*y*, *h*(*f*(*a*), *x*)), +(*x*, *y* * 3), 4 * (*x* + *y*)/1.5. Sin embargo, *xf* y *af*(*x*)*f* no son términos.

Un término ***t*** se denomina *término básico* si no tiene ocurrencia alguna de variable.

Ejemplos:

a, b, h(f(a), 2)), 4 * (-5 +1/2)

Fórmulas

A continuación se define de manera precisa la clase de las fórmulas.

Definición**:** Sean ***t****1*,..., ***t****n* términos, y sea *r* un símbolo de relación n-aria, entonces $r(t_1, ..., t_n)$ es una *fórmula elemental* o *átomo*.

Ejemplos:

Son fórmulas elementales $=(f(x), y)$, $<(x, g(x))$, $=(2, x)$, *padre_de(josé, eva)* que en la notación infija usual para relaciones binarias se escriben $f(x) = y$, $x < g(x)$, $2 = x$, *josé padre_de eva* respectivamente.

A continuación se definen las expresiones que son fórmulas:

i. Toda fórmula elemental es una *fórmula*.
ii. Si **A** es una fórmula, entonces $\neg[\mathbf{A}]$ es una *fórmula*
iii. Si **A** y **B** son fórmulas, entonces $[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}]$ ($[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]$, $[\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}]$, $[\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}]$) es una *fórmula*
iv. Si **A** es una fórmula donde x ocurre libre, entonces $\forall(x)\mathbf{A}$ y $\exists(x)\mathbf{A}$ son *fórmulas*.
v. Toda fórmula es el resultado solamente de la aplicación un número finito de veces de las reglas i)-iv).

Ejemplos:

Son formulas:
$x + y = y$, $f(x, y) < g(x, y)$, $a > b + c$, $x + y \neq y$, $x < y \vee y = 2$, $\neg[x > y \wedge y > x]$,
$x > y \Rightarrow y \leq x$, $divide(2, 4) \Leftrightarrow 4 = 2 * x$, $\forall(x)\ x < 2$, $\exists(x) 4 = 2 * x$,
$\forall(x)\exists(y)\ x > y \Rightarrow y \leq x$, $\neg\forall(x)\exists(y)\ y \leq x$, $\exists(x)padre(x, eva)$.

A continuación se establece una definición rigurosa de que se ha de entender por un predicado.

Definición: Una fórmula **A** se denomina un *predicado* si y sólo si **A** contiene al menos una ocurrencia libre de variable.

Se usará en lo que sigue las expresiones $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{A}(x, y)$,…, $\mathbf{A}(x_1, x_2 \dots, x_n)$ para hacer referencia de manera general a predicados unarios, binarios y n-arios respectivamente.

Ejemplos:

$R(2, x)$, $\exists(x)\ x < y$, $\forall(x)\exists(y)\ x + y = z$ son predicados unarios, $padre(x, y)$ es un predicado binario, $esta\_entre(x, y, z)$ es un predicado ternario.

Definición: Una fórmula **A** se denomina *proposición* si y sólo si no contiene ocurrencia alguna de variable libre.

De la definición anterior se desprende que en la lógica de predicados una *proposición elemental* puede definirse como una fórmula elemental cuyos términos son todos términos básicos.

Ejemplos:

> $R(2, f(3), 4)$, $\forall(x)\exists(z)[x + 5 = z]$, $\forall(x)\forall(y)\exists(z)[x + y = z]$ $\}$ $)[y + x = z]$ son proposiciones siendo $R(2, f(3), 4)$ una proposición elemental.

3.1.3 Interpretación de fórmulas

En la lógica proposicional se definió la interpretación de una fórmula como una asignación de valores veritativos **0** y **1** a las variables proposicionales de la fórmula. En la lógica de predicados con la aparición de los predicados y la cuantificación, es decir, de fórmulas cuya evaluación depende de su interpretación en un dominio que puede ser infinito, como se ha visto en los ejemplos dados, el concepto de interpretación es más complejo.

Para definir una interpretación de una fórmula **A** de la lógica de predicados en un dominio D es necesario observar las siguientes *reglas de interpretación* (I1 – I4):

> (I1) Si x es una variable libre de **A**, entonces x tiene como dominio de valores a $\boldsymbol{D}$.
>
> (I2) Si a es una constante de **A**, entonces a bajo una interpretación en D, la cual representaremos por $\bar{a}$, denota un elemento de $\boldsymbol{D}$, es decir, $\bar{a} \in D$.
>
> (I3) Si f es un símbolo de función n-aria de **A**, entonces f denota bajo una interpretación en D, la cual representaremos por $\bar{f}$, una función: $\bar{f}$: $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} \times \ldots \times \boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{D}$.
>
> (I4) Si r es un símbolo de relación n-aria de **A**, entonces r denota bajo una interpretación en D, la cual representaremos por $\bar{r}$, una relación n-aria en $\boldsymbol{D}$, es decir
> $\bar{r} \subseteq \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} \times \ldots \times \boldsymbol{D}$.

Definición: Dada una interpretación de una fórmula **A** en un dominio ***D***, se establece por recurrencia sobre la estructura de **A** cuando **A** *es verdadera en **D*** mediante las siguientes *reglas de evaluación* (V1 – V6):

(V1) Si **A** es una fórmula elemental de la forma $r(a_1, ..., a_n)$, entonces **A** *es verdadera en **D*** si $< \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n > \in \bar{r}$.

Las reglas (V2) – (V6), a continuación, son las reglas ya dadas de evaluación de fórmulas en la lógica proposicional:

(V2) Si **A** es la fórmula ¬**B**, entonces **A** *es verdadera en **D*** si **B** es falsa en ***D***.

(V3) Si **A** es la fórmula **B** ∨ **C**, entonces **A** *es verdadera en **D*** si al menos una de las dos fórmulas **B** ó **C** es verdadera en ***D***.

(V4) Si **A** es la fórmula **B** ∧ **C**, entonces **A** *es verdadera en **D*** si ambas fórmulas **B** y **C** son verdaderas en ***D***.

(V5) Si **A** es la fórmula **B** ⇒ **C**, entonces **A** *es verdadera en **D*** si **B** es falsa en ***D*** o **C** es verdadera en ***D***.

(V6) Si **A** es la fórmula **B** ⇔ **C**, entonces **A** *es verdadera en **D*** si **B** y **C** son a la vez ambas verdaderas o ambas falsas en ***D***.

A continuación, las reglas de evaluación de fórmulas con cuantificadores:

(V7) Si **A** es la fórmula ∀(*x*)**B**(*x*), entonces **A** *es verdadera en **D*** si y sólo si **B**(*x*) es verdadera para todo valor de *x* en ***D***.

(V8) Si **A** es la fórmula ∃(*x*)**B**(*x*), entonces **A** *es verdadera en **D*** si y sólo si **B**(*x*) es verdadera para al menos un valor de *x* en ***D***.

A partir de las reglas (V7) y (V8) se obtienen las siguientes formulaciones para sus casos falsos:

-Si **A** es la fórmula ∀(*x*)**B**(*x*), entonces **A** *es falsa en **D*** si y sólo si **B**(*x*) es falsa para al menos un valor de *x* en ***D***.

-Si **A** es la fórmula ∃(*x*)**B**(*x*), entonces **A** *es falsa en **D*** si y sólo si **B**(*x*) es falsa para todo valor de *x* en ***D***.

Ejemplos**:**

Determinando el valor de verdad de las fórmulas

a) $\exists(x)r(x, a) \wedge \exists(y)r(f(b), y)$

b) $\forall(x)\ \exists(y)\ r(x, y)$

c) $\exists(y)\forall(x)r(x, y)$

d) $\exists(y)\forall(x)r(x, y) \Rightarrow \forall(x)\ \exists(y)r(x,y)$

e) $\forall(x)\ \exists(y)\ r(x, y) \Rightarrow \exists(y)\forall(x)r(x, y)$

f) $\neg[\forall(x)r(x, a)] \Rightarrow \exists(y)r(f(a), y)$

interpretadas de la siguiente manera:

el dominio de interpretación es $\boldsymbol{D} = \{ 1, 2, 3 \}$:

x, y toman valores en $\boldsymbol{D}$

$\bar{a}$ denota el número 1

$\bar{b}$ denota el número 2

$\bar{r}$ denota la relación $\{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <3, 3> \} \subseteq \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D}$

$\bar{f}$ denota la función$\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>\}$, es decir, $\bar{f}(1) = 2$, $\bar{f}(2)= 3$, $\bar{f}(3)= 1$.

a) $\exists(x)r(x, a)\wedge\exists(y)r(f(b), y)$

$\exists(x)r(x, a)\wedge\exists(y)r(f(b), y)$ es verdadera en $\boldsymbol{D}$, si las fórmulas $\exists(x)r(x,a)$ y $\exists(y)r(f(b), y)$ son verdaderas en D por (V4). La fórmula $\exists(x)r(x, a)$ es verdadera en D por (v7), si existe un valor de x en D tal que la fórmula $r(x, a)$ es verdadera en D. Para x = 1, se tiene que $<1, \bar{a} > \in, \bar{r}$**.** Luego para x = 1 $r(x, a)$ es verdadera en D por (V). luego $\exists(x)r(x, a)$ es verdadera en D por (V7)

La fórmula $\exists(y)r(f(b), y)$ es verdadera en D por (v7), si existe un valor de y en D tal que la fórmula $r(f(b), y)$ es verdadera en D, Para $y = 3$ y dado que $\bar{f}(2)= 3$, se tiene que $<3, 3>\in \bar{r}$. Luego para y =3, $r(f(b), y)$ es verdadera en D por (V1). luego $\exists(x)r(x, a)$ es verdadera en D.

Luego $\exists(x)r(x, a)\wedge\exists(y)r(f(b), y)$ es verdadera en ***D*** por (V4)

b) $\forall(x)\ \exists(y)\ r(x, y)$

$\forall(x)\ \exists(y)\ r(x, y)$ es verdadero en D si $\exists(y)\ r(x, y)$ es verdadero en D para todo valor de x en D y $\exists(y)\ r(x, y)$ es verdadero en D si para todo valor de x en D existe un valor de y en D tal que $<x, y> \in \bar{r}$. La aplicación de las reglas revela que hay una dependencia del cuantificador existencial con respecto al cuantificador universal en la fórmula. Se debe verificar que para todo valor de x existe un valor de y. Para x=1, y= 1, para x= 2 y= 3, y para x = 3, y=3.

c) $\exists(y)\forall(x)r(x, y)$

$\exists(y)\forall(x)r(x, y)$ es verdadero en D si $\forall(x)r(x, y)$ es 1 para al menos un valor de y en D y $\forall(x)r(x, y)$ es 1 en D si para al menos un valor de y en D $<x, y> \in \bar{r}$ para todo valor de x. en este caso existe dependencia del cuantificador universal con respecto al existencia, primero se toma un valor fijo de y y se debe verificar que la formula es 1 para todo valor de y. El lector verificará que la fórmula es falso en D.

Se deja al lector la verificación de las fórmulas d), e) y f).

Las definiciones de fórmula satisfacible, insatisfacible y tautología dadas para la lógica proposicional se extienden a las fórmulas de la lógica de predicados. Como ejercicio, el lector determinara qué tipo de validez le corresponde a cada una de las fórmulas a)-g).

3.2. Deducción en la lógica de predicados

Este epígrafe continúa con el estudio de la deducción lógica. *Todas las leyes y reglas de inferencia de la lógica proposicional son leyes y reglas de inferencia de la lógica de predicados*. A ellas se añaden a continuación leyes y reglas de inferencia de la lógica de predicados manteniendo la numeración ya empleada. Las leyes son fórmulas válidas es decir verdaderas bajo cualquier interpretación en cualquier dominio y enuncian propiedades fundamentales de los cuantificadores. Las reglas de inferencia son sanas, es decir, si sus premisas son verdaderas, sus conclusiones son verdaderas e introducen condiciones para deducir con el empleo de cuantificadores

Las leyes L31 y L32 se introducen como *axiomas lógicos*, es decir, como proposiciones de la lógica de predicados que se aceptan como verdaderas para cualquier interpretación en cualquier dominio. El resto de las leyes que se introduzcan serán demostradas. En todos los casos en que ocurra **B** se trata de una fórmula en la que no hay ocurrencia alguna de la variable *x*

3.2.1 Leyes y Reglas de la lógica de predicados

La siguiente ley afirma que si $\forall(x)\mathbf{A}(x)$ es verdadero en un dominio entonces cualquiera que sea el elemento del dominio denotado por t, $\mathbf{A}(\boldsymbol{t})$ es verdadero..

L31. $\forall(x)\mathbf{A}(x) \Rrightarrow \mathbf{A}(\boldsymbol{t})$

Condición: t es un término básico

L32. $\forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}] \cong \exists(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}$

L33. $\forall(x)\neg\mathbf{A}(x) \cong \neg\exists(x)\mathbf{A}(x)$

Demostración (L33):

(1) $\forall(x)[\mathbf{A}(x)\Rightarrow \mathbf{0}] \cong \exists(x)\mathbf{A}(x)\Rightarrow\mathbf{0}$ -L32

(2) $\forall(x)[\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{0}] \cong \neg\exists(x)\mathbf{A}(x) \vee\mathbf{0}$ -L22

(3) $\forall(x)\neg\mathbf{A}(x) \cong \neg\exists(x)\mathbf{A}(x)$ -L11

L34. $\forall(x)\mathbf{A}(x) \cong \neg\exists(x)\neg\mathbf{A}(x)$

Demostración (L34):

(1) $\neg\exists(x)\neg\mathbf{A}(x) \cong \forall(x)\neg\neg\mathbf{A}(x)$ -L33

(2) $\cong \forall(x)\mathbf{A}(x)$ -L17

L35. $\neg\forall(x)\mathbf{A}(x) \cong \exists(x)\neg\mathbf{A}(x)$

Demostración (L35):

(1) $\neg\forall(x)\mathbf{A}(x) \cong \neg[\forall(x)\mathbf{A}(x)]$

(2) $\cong \neg[\neg\exists(x)\neg\mathbf{A}(x)]$ -L34

(3) $\cong \exists(x)\neg\mathbf{A}(x)$ -L17

L36. $\exists(x)\ \mathbf{A}(x) \cong \neg\forall(x)\neg\mathbf{A}(x)$

Demostración (L36):

(1)	$\exists(x)\ \mathbf{A}(x) \cong \neg[\neg\exists(x)\ \mathbf{A}(x)]$	-L17
(2)	$\cong \neg\forall(x)\neg\mathbf{A}(x)$	-L33

L37. $\forall(x)[\mathbf{A}(x) \vee \mathrm{B}] \cong \forall(x)\mathbf{A}(x) \vee \mathrm{B}$

Demostración (L37):

(1)	$\forall(x)[\mathbf{A}(x) \vee \mathrm{B}] \cong \forall(x)[\neg\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}]$	-L22
(2)	$\cong \exists(x)\ \neg\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}$	-L33
(3)	$\cong \neg\exists(x)\ \neg\mathbf{A}(x) \vee \mathrm{B}$	-L22
(4)	$\cong \forall(x)\mathbf{A}(x) \vee \mathrm{B}$	-L34

L38. $\exists(x)\ [\mathbf{A}(x) \wedge \mathrm{B}] \cong \exists(x)\ \mathbf{A}(x) \wedge \mathrm{B}$

Demostración (L38):

(1)	$\exists(x)\ [\mathbf{A}(x) \wedge \mathrm{B}] \cong \exists(x)\ \neg\ [\neg\mathbf{A}(x) \vee \neg\mathrm{B}]$	-L20
(2)	$\cong \neg\forall(x)\ [\neg\mathbf{A}(x) \vee \neg\mathrm{B}]$	-L35
(3)	$\cong \neg[\forall(x)\neg\mathbf{A}(x) \vee \neg\mathrm{B}]$	-L37
(4)	$\cong \neg\forall(x)\ \neg\mathbf{A}(x) \wedge \neg\neg\mathrm{B}$	-L20
(5)	$\cong \neg\forall(x)\ \neg\mathbf{A}(x) \wedge \mathrm{B}$	-L17
(6)	$\cong \exists(x)\ \mathbf{A}(x) \wedge \mathrm{B}$	-L36

L39. $\mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \exists(x)\ \mathbf{A}(x)$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en $\mathbf{A}$(t).

Demostración (L39):

(1)	$T \vdash \forall(x)\ \neg\mathbf{A}\ (x) \Rightarrow \neg\mathbf{A}(\mathrm{t})$	-L31
(2)	$\vdash \neg\neg\mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \neg\forall(x)\neg\mathbf{A}(x)$	-RI7, (1)
(3)	$\vdash \mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \neg\forall(x)\neg\mathbf{A}(x)$	-L17
(1)	$\vdash \mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \exists(x)\mathbf{A}(x)$	-L36

L40. $\forall(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \exists(x)\mathbf{A}(x)$

Demostración (L40):

(1)	$T \vdash \forall(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathrm{t})$	-L31
(2)	$\vdash \mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \exists(x)\mathbf{A}(x)$	-L39
(3)	$\vdash \forall(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \exists(x)\mathbf{A}(x)$	-RI8, (1), (2)

Lógica de predicados y razonamiento ordinario

Considere la siguiente deducción

i) Todos los hombres son mortales,
ii) Sócrates es hombre,
luego,
iii) Sócrates es mortal.

Se tratará de demostrar la validez de esta simple inferencia a partir de la lógica proposicional. Dado que i), ii) y iii) son tres proposiciones distintas, las representaremos por tres constantes proposicionales distintas, a saber, *p*, *q* y *r*, donde *p* y *q* que representan a i) y ii) respectivamente son aceptadas como verdaderas, por lo tanto, son premisas de la deducción y *r* que representa a iii) es su conclusión. Analizando las reglas de inferencia proposicional estudiadas se llegará a la conclusión de que no hay entre dichas reglas ninguna que permita deducir *r* a partir de *p* y *q*. En efecto, para hacer dicha deducción se necesita tener en cuenta la estructura interna de las proposiciones *p*, *q* y *r*, específicamente las propiedades que expresan los predicado unarios “ser hombre” y “ser mortal” y como son relacionadas por la operación lógica de cuantificación universal. A la luz de lo hasta aquí aprendido se verifica que i) se compone de un predicado en x que establece que si x es una entidad en el dominio de los seres humanos, entonces x es una entidad en el dominio de los mortales. El cuantificador universal al cuantificar a x afirma que el predicado se cumple para todo ser humano.

Considere ahora la siguiente representación en el lenguaje de la lógica de predicados de i), ii) y iii):

i’) $\forall(x)\,[hombre(x) \Rightarrow mortal(x)]$

ii’) $hombre(Sócrates)$

iii’) $mortal(Sócrates)$

Veamos ahora la siguiente deducción de iii') a partir de i') y ii').

(1) $\forall(x)[hombre(x) \Rightarrow mortal(x)]$, *hombre(Sócrates)*
$\vdash \forall(x)[hombre(x) \Rightarrow mortal(x)]$ -hipótesis
(2) $\vdash$ *hombre(Sócrates)* -hipótesis
(3) $\vdash \forall(x)[hombre(x) \Rightarrow mortal(x)] \Rightarrow [hombre(Sócrates) \Rightarrow mortal(Sócrates)]$ -L31
(4) $\vdash$ *hombre(Sócrates)* $\Rightarrow$ *mortal(Sócrates)* -RI1, (1), (3)
(5) $\vdash$ *mortal(Sócrates)* -RI1, (2), (4)

Se observará que en esta demostración se introduce un paso, a saber el paso (3) en el cual se aplica L31 particularizada con los predicados y nombres de individuos involucrados en la deducción que se intenta realizar.

Intuitivamente se considera una proposición equivalente a i) la siguiente:

Ningún hombre es inmortal

Una representación de su significado en el lenguaje de la lógica de predicados es la siguiente:

$$\neg\exists(x)[hombre(x) \wedge \neg mortal(x)$$

Utilizando las leyes hasta aquí estudiadas se deja al lector la demostración de la siguiente igualdad:

$$\forall(x)\ [hombre(x) \Rightarrow mortal(x)] \cong \neg\exists(x)[hombre(x) \wedge \neg mortal(x)$$

Reglas de inferencia de la lógica de predicados

Se introducen a continuación reglas de inferencia deductiva fundamentales de la lógica de predicados. Ya se advirtió que todas las reglas de inferencia de la lógica proposicional, RI1 – RI11, se adoptan en la lógica de predicados. Sólo habrá que señalar una condición para utilizar la regla RI2 (Teorema de la deducción) la cual será introducida más adelante.

Las reglas de inferencia de la lógica de predicados establecen condiciones para introducir pasos en las deducciones involucrando a los cuantificadores, de esta forma la lógica de predicados amplia la inferencia deductiva y sus posibles aplicaciones.

Comienza la introducción de las reglas de inferencia de la lógica de predicados con la regla de Generalización (RI12) la cual será aceptada como un *postulado*, es decir sin demostración

.

Regla de Generalización

(RI12) ***Generalización****:*

$$\frac{T \vdash \mathbf{A}(x)}{T \vdash \forall(x)\mathbf{A}(x)}$$

Nota sobre el teorema de la deducción

Note que la regla (RI12) permite cuantificar universalmente una variable que ocurra libre en un paso de una demostración. Teniendo en cuenta esta posibilidad una observación debe hacerse con respecto a la aplicación de la regla RI2 (teorema de la deducción). Supóngase que se realiza la siguiente demostración

$T, r(x) \vdash \forall(x)r(x)$

$T \vdash r(x) \Rightarrow \forall(x)r(x)$

Supóngase que se realiza una interpretación de r en un dominio de al menos dos elementos $D = \{a, b\}$ tal que $r(a)$ es verdadera y $r(b)$ es falsa. Entonces puede verificarse por las reglas de interpretación que la fórmula $r(x) \Rightarrow \forall(x)r(x)$ es falsa por esta interpretación. Luego se aceptará la aplicación de la regla (RI2) bajo cierta condición:

(RI2)

$$\frac{T, B \vdash \mathbf{A}(x)}{T \vdash B \Rightarrow \forall(x)\mathbf{A}(x)}$$

Condición: No ha habido aplicación de la regla (RI12) en la que la variable que se haya acotado por su aplicación sea libre en ***B***.

Todas las reglas que serán introducidas a partir de ahora son reglas derivadas y, por lo tanto, redundantes. Sin embargo, como en el caso de las reglas derivadas de la lógica proposicional facilitan la realización de deducciones.

Regla de introducción del cuantificador universal

(RI13) $\forall$**−introducción**

$$\frac{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}(x)}{T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \forall(x)\mathbf{B}(x)}$$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en **A**(t).

Demostración (RI13):

(1) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}(x)$ -premisa

(2) $T, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}(x)$ -propiedad de $\vdash$

(3) $\vdash \mathbf{A}$ -hipótesis

(4) $\vdash \mathbf{B}(x)$ -RI1, (3), (2)

(5) $\vdash \forall(x)\mathbf{B}(x)$ -RI12, (4)

(6) $T \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \forall(x)\mathbf{B}(x)$ -RI2, (5)

Regla de particularización

(RI14) ***particularización***:

$$\frac{T \vdash \forall(x)\mathbf{A}(x)}{\vdash \mathbf{A}(\mathrm{t})}$$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en **A**(t).

Demostración (RI14):

(1) $T \vdash \forall(x)\mathbf{A}(x)$ -premisa

(2) $\vdash \forall(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathrm{t})$ -L31

(3) $\vdash \mathbf{A}(\mathrm{t})$ -RI1, (1), (2)

Regla de existencia

(RI15) ***existencia***: $T \vdash \mathbf{A}(t)$

$$\frac{T \vdash \mathbf{A}(\mathrm{t})}{\vdash \exists(x)\mathbf{A}(x)}$$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en **A**(t).

Demostración (RI15):

(1)	T |- $\mathbf{A}(\mathrm{t})$	-premisa
(2)	|- $\mathbf{A}(\mathrm{t}) \Rightarrow \exists(x)\, \mathbf{A}(x)$	-L39
(3)	|- $\exists(x)\mathbf{A}(x)$	-RI1, (1), (2).

Regla de introducción del cuantificador existencial

(RI16) ∃−**introducción**

$$\frac{T \vdash \mathbf{A}(x)\Rightarrow\mathbf{B}}{T \vdash \exists(x)\mathbf{A}(x)\Rightarrow\mathbf{B}}$$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en **A**(t).

Demostración (RI16):

(1)	T |- $\mathbf{A}(x)\Rightarrow\mathbf{B}$	-premisa
(2)	|- $\forall(x)[\mathbf{A}(x)\Rightarrow\mathbf{B}]$	- RI12, (1)
(3)	|- $\forall(x)[\, \neg\mathbf{A}(x) \vee\mathbf{B}]$	-L22
(4)	|- $\forall(x)\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}$	-L5
(5)	|- $\neg\forall(x)\neg\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}$	-L22
(6)	|- $\exists(x)\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}$	-L36

Regla de sustitución de variables por términos

(RI17) ***Sustitución***:

$$\frac{T \vdash \mathbf{A}(x)}{T \vdash \mathbf{A}(\mathrm{t})}$$

Condición: Si x es variable de t, x es libre en **A**(t).

Demostración (RI15):

(1)	T |- $\mathbf{A}(x)$	-premisa
(2)	|- $\forall(x)\mathbf{A}\,(x)$	-RI12, (1)
(3)	|- $\mathbf{A}(\mathrm{t})$	-RI14, (2)

Leyes de la lógica de predicados (continuación)

Las reglas de inferencia dadas nos permiten ahora introducir deductivamente nuevas leyes de la lógica de predicados.

L41. $\forall(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}] \cong \forall(x)\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}$

Demostración (L41):

□	(1)	$T, \forall(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}] \vdash \forall(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}]$	-por hipótesis
□	(2)	$\vdash \mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}$	-(RI14), (1)
□	(3)	$\vdash \mathbf{A}(x)$	-(RI4a), (2)
□	(4)	$\vdash \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}(x)$	-L6
□	(5)	$\vdash \mathbf{B}$	-(RI4a), (4)
□	(6)	$\vdash \forall(x)\mathbf{A}(x)$	- (RI12), (5)
□	(7)	$\vdash \forall(x)\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}$	- (RI3), (6), (5)
□	(8)	$T \vdash \forall(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}] \Rightarrow \forall(x)\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}$	- (RI2), (7)

Se deja al lector la demostración en el otro sentido y la conclusión.

L42. $\exists(x)\ [\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}] \cong \exists(x)\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}$

Demostración: Ejercicio.

L43. $\forall(x)\ [\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}(x)] \cong \mathbf{A} \Rightarrow \forall(x)\mathbf{B}(x)$

Demostración: Ejercicio.

L44. $\exists(x)\ [\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(x)] \cong \exists(x)\mathbf{A}(x) \vee \exists(x)\ \mathbf{B}(x)$

Demostración: Ejercicio.

L45. $\exists(x)\,[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)] \Rrightarrow \exists(x)\mathbf{A}(x) \wedge \exists(x)\,\mathbf{B}(x)]$

Demostración (L45):

□	(1)	$T, \mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x) \vdash \mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)$	-por hipótesis
□	(2)	$\vdash \mathbf{A}(x)$	-(RI5a), (1)
□	(3)	$\vdash \mathbf{B}(x)$	-(RI5b), (1)
□	(4)	$\vdash \exists(x)\mathbf{A}(x)$	-(RI15), (2)
□	(5)	$\vdash \exists(x)\mathbf{B}(x)$	-(RI15), (3)
□	(6)	$\vdash \exists(x)\mathbf{A}(x) \wedge \exists(x)\mathbf{B}(x)$	-(RI3), (4), (5)
□	(7)	$T \vdash [\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)] \Rightarrow [\exists(x)\mathbf{A}(x) \wedge \exists(x)\mathbf{B}(x)]$	-(RI2), (6)
□	(8)	$\vdash \exists(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)] \Rightarrow [\exists(x)\mathbf{A}(x) \wedge \exists(x)\,\mathbf{B}(x)]$	-(RI16), (7)
□			

Ejercicio: establezca mediante un contraejemplo que muestre porque no es válida la formula

$[\exists(x)\,\mathbf{A}(x) \wedge \exists(x)\,\mathbf{B}(x)] \Rrightarrow \exists(x)\,[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)]$

L46. $\forall(x)[\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)] \cong \forall(x)\,\mathbf{A}(x) \wedge \forall(x)\mathbf{B}(x)$

Demostración: Ejercicio.

L47. $\forall(x)\,\mathbf{A}(x) \vee \forall(x)\,\mathbf{B}(x) \Rrightarrow \forall(x)\,[\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(x)]$

Demostración: Ejercicio.

Ejercicio: establezca mediante un contraejemplo que muestre porque no es válida la fórmula:

$\forall(x)\,[\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(x)] \Rrightarrow \forall(x)\,\mathbf{A}(x) \vee \forall(x)\,\mathbf{B}(x)$

L48. $\forall(x)\,\forall(\mathrm{y})\,\mathbf{A}(x, \mathrm{y}) \cong \forall(\mathrm{y})\,\forall(x)\,\mathbf{A}(x, \mathrm{y})$

Demostración: Ejercicio.

L49. $\exists(x)\,\exists(\mathrm{y})\,\mathbf{A}(x, \mathrm{y}) \cong \exists(\mathrm{y})\,\exists(x)\,\mathbf{A}(x, \mathrm{y})$

Demostración: Ejercicio.

L50. $\exists(x)\ \forall(y)\ \mathbf{A}(x, y) \Rightarrow \forall(y)\exists(x)\ \mathbf{A}(x, y)$

Demostración: Ejercicio.

Ejercicio: establezca mediante un contraejemplo que muestre porque no es válida la fórmula:

$$\forall(y)\exists(x)\ \mathbf{A}(x, y) \ \Rightarrow\ \exists(x)\ \forall(y)\ \mathbf{A}(x, y)$$

3.2.2 Aplicación: Demostración matemática

Lógica de predicados y teoría de números

Como se ha dicho anteriormente el lenguaje de la lógica de predicados resulta ser suficiente para la expresión de la mayor parte de las teorías matemáticas. A continuación se ejemplifica su utilización en la teoría de números.

Una fundamentación axiomática de la teoría de números la constituyen las siguientes proposiciones denominadas los axiomas Dedekind-Peano:

P1: Para todo número natural existe uno y sólo un sucesor (inmediato).
P2: El 0 no es sucesor de ningún número natural.
P3: Dos números naturales distintos no tienen el mismo sucesor.
P4: Si una propiedad se cumple para el 0 y si cumpliéndose para cualquier número natural se cumple también para el sucesor de dicho número natural, entonces la propiedad se cumple para todo número natural.

La referencia a los objetos matemáticos "números naturales" en las proposiciones es una referencia explícita al dominio $\mathbb{N}$ donde estos axiomas se afirman como verdaderos. De hecho los axiomas tratan de caracterizar o definir a $\mathbb{N}$ y se deja al lector la interpretación intuitiva de los mismos en $\mathbb{N}$.

Para llevar a cabo una representación en el lenguaje de la lógica de predicados de las proposiciones P1 – P4, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

-En las proposiciones dadas aparece una constante 0 que denota un número natural determinado.

-La expresión "ser el sucesor de" es una relación entre números naturales que será denotada por el predicado binario *suc(x, y)* y que se leerá "y es el sucesor de x".

-El lector reconocerá en P4 el *principio de inducción matemática* un poderoso axioma que permite demostrar propiedades de los números naturales. Se considerará que la propiedad a la que hace referencia P4 ha sido definida por un predicado unario $\mathbf{A}(x)$.

-La relación de igualdad ocurre en los axiomas y será denotada como es usual por el predicado binario x = y se leerá "x es igual a y", y su negación x ≠ y, se leerá "x es desigual de y". Las propiedades fundamentales de la igualdad ya enunciadas: reflexiva, simétrica y transitiva) serán utilizadas como dadas en la teoría.

-No se hará explícita la referencia al dominio ℕ en la representación de la teoría.

Una posible representación en el lenguaje de la Lógica de Predicado de los axiomas podría ser la siguiente:

P1: $\forall(x)\exists(y)[suc(x, y) \wedge \forall(z)\ [suc(x, z) \Rightarrow y = z]]$

P2: $\neg\exists(x)suc(0, x)$

P3: $\forall(x)\forall(y)\exists(z)\exists(v)[[suc(x, z) \wedge suc(y, v) \wedge x \neq y] \Rightarrow z \neq v]$

P4: $[\mathbf{A}(0) \wedge [\forall(x)\forall(y)[\mathbf{A}(x) \wedge suc(x, y)] \Rightarrow \mathbf{A}(y)]] \Rightarrow \forall(z)\mathbf{A}(z)$

Analice que P1 establece además de existencia, el carácter único del sucesor de un número, lo cual no garantiza el cuantificador existencial por sí solo. De la misma manera P3 establece la desigualdad entre los sucesores de dos números distintos. El axioma P4, que representa el principio de inducción matemática, se denomina en lógica un *axioma esquema* ya que representa infinitos axiomas, uno por cada propiedad definida por el predicado $\mathbf{A}(x)$ que se quiere demostrar en ℕ.

Analizando los axiomas P1 – P3, se observa que P1 al afirmar tanto la existencia como la unicidad del sucesor de un número natural define a *suc* como una función, P3 la define como una función inyectiva y P2 excluye al 0 de su codominio. Esto permite utilizar una notación funcional en sustitución de la notación relacional para dicha relación y hacer referencia univoca al "sucesor de *x*" el cual será denotado por el término *suc(x)*. Nótese a continuación la introducción frecuente del predicado de igualdad al utilizar la notación funcional.

$P1': \forall(x)\exists(y)[y = suc(x) \wedge \forall(z)[z = suc(x) \Rightarrow y = z]]$

$P2': \neg\exists(x)\ 0 = suc(x)$

$P3': \forall(x)\forall(y)\ [suc(x) = suc(y) \Rightarrow x = y\ ]$

$P4': [\mathbf{A}(0) \wedge \forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]] \Rightarrow \forall(x)\mathbf{A}(x)$

Note que a partir del 0 y la función sucesor, cualquier número natural puede ser denotado, por ejemplo, suc(0) denota el 1, suc(suc(0)) denota el 2, etc.

Para desarrollar la aritmética a partir de los axiomas P1-P4 se introducen definiéndolas las operaciones de suma y multiplicación. La única operación disponible en la teoría, la función sucesor, servirá a este fin.

Definición de la suma:

(S1) $x + 0 = x$
(S2) $x + suc(y) = suc(x + y)$

Las ecuaciones (S1)-(S2) constituyen lo que se denomina un *esquema de recursión*: (S1) se denomina el caso base y define el valor de la suma de x + 0, (S2) define el valor de la suma para el resto de los números naturales representados por suc(y) aplicando la función sucesor a un valor previamente hallado de x + y. Luego la definición encierra un procedimiento de cálculo o algoritmo para calcular la suma de dos números.

Ejemplo**:**
Sumando 2 + 3 = 5, en notación de sucesor hay que demostrar que

$$suc(suc(0)) + suc(suc(suc(0))) = suc(suc(suc(suc(suc(0)))))$$

$$\begin{aligned} suc(suc(0)) + suc(suc(suc(0))) &= suc(suc(suc(0)) + suc(suc(0))) && \text{-S2} \\ &= suc(\ suc(suc(suc(0)) + suc(0))) && \text{-S2} \\ &= suc(\ suc(\ suc(suc(suc(0) + 0)))) && \text{-S2} \\ &= suc(\ suc(\ suc(suc(suc(0))))) && \text{-S0} \end{aligned}$$

El siguiente esquema de recursión define el producto en términos de la suma previamente definida y la función sucesor.

(P1) $x \times 0 = 0$
(P2) $x \times suc(y) = (x \times y) + x$

Ejercicio: $suc(suc(0)) \times suc(suc(suc(0)))$.

(s1)-(S2) y (P1)-(P2) son ejemplos de definición de *funciones recursivas*, funciones en las cuales el valor de la función para un determinado valor de sus argumentos se define en términos de valores previamente hallados con la misma función, es decir, la función "recurre" o "se llama así misma" para calcular un valor, como demuestran los ejemplos. La recursividad no es una forma solo teórica de definir algoritmos, en la actualidad constituye una de las formas fundamentales de programación de algoritmos, la programación recursiva. Por lo tanto el lector debe prestar especial atención a su comprensión.

El principio de inducción matemática

Considere el axioma

P4: $[\mathbf{A}(0) \wedge \forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]] \Rightarrow \forall(x)\mathbf{A}(x)$

$\mathbf{A}(0)$ se denomina el *paso base* y enuncia que hay que demostrar que la propiedad se cumple para el 0. El paso base es indispensable, ya que representa que la propiedad se cumple para un primer entero (no necesariamente el 0).

$\forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]$ se denomina el *paso de inducción* y enuncia que hay que demostrar que si la propiedad se cumple para un entero x, entonces se cumple para su sucesor, $suc(x)$. En la fórmula A(x) se denomina la *hipótesis de inducción,*

Una demostración que utiliza P4 contiene los siguientes pasos fundamentales:

-demostración del paso base:
$\vdash \mathbf{A}(0)$
-demostración del paso de inducción:
$\vdash \forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]$
- Introducción de la conjunción:
$\vdash \mathbf{A}(0) \wedge \forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]$

–introducción de P4:

$\vdash [\mathbf{A}(0) \wedge \forall(x)[\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(suc(x))]] \Rightarrow \forall(x)\mathbf{A}(x)$

- Aplicación de modus ponens:

$\vdash \forall(x)\mathbf{A}(x)$

Como ya se ha señalado en las demostraciones informales en matemática se dejan implícitos los pasos con justificaciones lógicas, introducción de la conjunción y *modus ponens* en la aplicación de P4.

A continuación se muestran algunos teoremas donde se observa la aplicación de P4.

(S1) determina que el 0 es identidad a la derecha para la suma. El siguiente teorema establece que el 0 lo es también a la izquierda. Se deja al lector la justificación de algunos de los pasos.

Teorema $\forall(x)\ [x = 0 + x]$

Demostración: Aplicando P4, A(x) es $x = 0 + x$.

Demostrando A(0):

(1) $\vdash 0 + 0 = 0$ –

(2) $\vdash 0 = 0 + 0$ –

Demostrando $\forall(x)\ [A(x) \Rightarrow A(suc(x))]$

(3) $\vdash x = 0 + x$ - hipótesis de inducción

(4) $\vdash 0 + suc(x) = suc(0 + x)$ -

(5) $\vdash suc(x) = suc(0 + x)$ -

(6) $\vdash suc(x) = 0 + suc(x)$ -

(7) $\vdash x = 0 + x \Rightarrow suc(x) = 0 + suc(x)$ -

(8) $\vdash \forall(x)[x = 0 + x \Rightarrow suc(x) = 0 + suc(x)]$ - RI12, (7)

(9) $\vdash A(0) \wedge \forall(x)\ )[A(x) \Rightarrow A(suc(x))]$ -RI (2), (8)

(10) $\vdash [A(0) \wedge \forall(x)\ )[A(x) \Rightarrow A(suc(x))]] \Rightarrow \forall(x)\ A(x)$ -P4

(11) $\vdash \forall(x)\ A(x)$ – RI (9), (10)

Teorema: $\forall(x)\ \forall(y)\quad suc(x) + y = suc(x + y)$

Demostración: ejercicio.

Teorema $\forall(x)\ \forall(y)\ x + y = y + x$ (conmutatividad de la suma)

El lector suplirá los pasos finales y las justificaciones.

Demostración: Aplicando P4, A(y) es $\forall(x)\ x + y = y + x$

Demostrando A(0):

(1) $x + 0 = x$ -

(2) $x = 0 + x$ -

(3) $x + 0 = 0 + x$ -

(4) $\forall(x)\ x + 0 = 0 + x$ -

Demostrando $\forall(x)[\mathrm{A}(y) \Rightarrow \mathrm{A}(suc(y))]$

(1) $x + y = y + x$ –

(2) $suc(x + y) = suc(y+x)$ –

(3) $suc(x + y) = x + suc(y)$ –

(4) $suc(y + x) = y + suc(x)$

(5) $x + y = y + x \Rightarrow x + suc(y) = suc(y) + x$

Ejercicios

1. Demuestre formalmente que $x + (y + z) = (x + y) + z$

2. Sea A(n) la propiedad $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$ interpretada en $\mathbb{N}$. Se quiere demostrar que $\forall(n)\mathbf{A}(n)$ es verdadera en $\mathbb{N}$.

   Realice la demostración utilizando P4 . Como es usual en los textos matemáticos $n + 1$ denota $suc(n)$.

3. Escriba en el Lenguaje de Predicados las siguientes expresiones definidas en el dominio de los números naturales. Defina toda relación o función que utilice.

   i. El máximo común divisor de dos números cualesquiera, siendo al menos uno distinto de 0, es el mayor número que los divide a ambos.
   ii. Dos números son primos relativos siempre y cuando su máximo común divisor sea 1.
   iii. Cualquier divisor común de dos números divide al máximo común divisor de estos.
   iv. Los números primos son infinitos.

4. Considere el conjunto S de todas las posibles cadenas que pueden formarse con los caracteres a y b incluyendo la cadena vacía denotada como ε. Sobre S se define la función de concatenación f de S x S en S, que dadas dos cadenas cualesquiera $x, y \in S$ devuelve como resultado la cadena y concatenada inmediatamente detrás de la cadena x. Por ejemplo, si x = "*aab*" y y = "*bab*" entonces $f(x, y)$ = "*aabbab*". Si se sabe que dicha función cumple las siguientes propiedades:

   i. A partir de tres cadenas cualesquiera x, y y z de S se obtiene la misma cadena en los dos casos siguientes:
      a) Concatenar x con el resultado de concatenar y y z en este mismo orden.
      b) Concatenar x y y en este orden y al resultado obtenido concatenarle z
   ii. Dadas dos cadenas cualesquiera x y y de S, la cadena resultante de concatenar x con y es igual a x si y solo si y es la cadena vacía.
   iii. La concatenación de dos cadenas cualesquiera de S es la cadena vacía si y solo si ambas cadenas son vacías.

5. Interprete la siguiente proposición del Lenguaje de la Lógica de Predicados:

$$\neg[\exists\,(x)\mathrm{r}(x,a)] \Rightarrow \forall\,(y)\,[r(f(b), y)]$$

   bajo el dominio D={1,2,3}
   donde a denota el número 1 y b denota el número 2

   r = {< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1,3 >, < 3;,3 >}
   f = {< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 1 >}

6. Demuestre las siguientes proposiciones utilizando solo las leyes 31 y 32 :

   i. $A(t) \Rrightarrow \exists(x)A(x)$
   ii. $\forall(x)[B\Rightarrow A(x)] \Rrightarrow B\Rightarrow A(x)$

Bibliografía selecta

Chang, CH. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academia Press New York, 1973.

Church, A., Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press, Princeton, N. J., Vol. I, 1956.

Curry, H. B., Foundations of Mathematical Logic, Dover Publications, inc., New York. 1977.

Hilbert, D. and Ackermann, W., Principles of Mathematical Logic. Chelsea, New York 1950.

Kleene, S. C., Introduction to Metamathematics. D. Van nostrand Co., New Cork, 1952.

Kreisel, G. y Krivine H., Eléments de logique mathematique. Dunod, Paris,1963.

Mendelson, E. Introduction to mathematical Logic, Fourth Edition, Chapman & Hall

Nicola, J. Introducción a la Lógica Moderna, Tomos I y II, Instituto Cubano del Libro, Habana, 1968.

Quine, W. O., Mathematical Logic, Revised Edition, Harvard University Press,1981.
Rosser, J. B., Logic for Mathematicians. New York, 1953.

Wang, H. A Survey of Mathematical Logic, Science Press-Peking, North-Holland, Amsterdam. 1963.