Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Ejercicios Resueltos 5

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

(Kepler) Encontrar el cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

Respuesta

Debido a que el cilindro está inscrito en la esfera se tiene la siguiente relación entre su radio y altura (r, h) y el radio R de la esfera

$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2$$

de donde se tiene que $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

Se conoce que el volumen del cilindro viene dado por $V(r, h) = \pi r^2 h$ pero por la relación vista antes se llega a que

$$V(h) = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{h^3}{4})$$

por lo que $V'(h) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^3$

De aquí se obtiene que $h_M = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ es la altura máxima. Por tanto el radio es $r_M = \frac{\sqrt{6}}{3}R$. Por tanto, el cilindro es aquel que está caracterizado por h_M y r_M.

Ejercicio 2

Hallar el punto de la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ que está más cerca de $(3; 0)$.

Respuesta

Los puntos de la hipérbola dada tienen la forma $(x, \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} - 1})$. La distancia desde el punto $(3, 0)$ hasta el punto (x, y) de la hipérbola viene dada por la función

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{\frac{x^2}{2} - 1})^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{2} - 6x + 8}$$

Sea $d_1(x) = d(x)^2 = \frac{3x^2}{2} - 6x + 8$. Ambas funciones alcanzan sus extremos en los mismos puntos[1], por lo que estudiaremos los extremos de $d_1(x)$.

$d_1'(x) = 3x - 6,\ d_1''(x) = 3 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo local, pero como d_1 es convexa hacia abajo, entonces este es global. Debido a la simetría de la hipérbola con respecto al eje OX se tiene que los puntos buscados son $(2, \pm 1)$, que se encuentran a una distancia de $\sqrt{2}u$ del punto $(3, 0)$.

Ejercicio 3

Halla la ecuación de la recta que pasa por $Q(3; 5)$ y corta un área mínima en el primer cuadrante.

Respuesta

La familia de rectas que pasan por el punto $Q(3, 5)$ es $y = m(x-3)+5$. Los interceptos de dichas curvas con los ejes coordenados son $x_0 = \frac{-5}{m} + 3$ y $y_0 = -3m + 5$.

El área del triángulo que tiene vértices $(0, 0), (x_0, 0), (0, y_0)$ es la que se quiere minimizar. Dicha área viene dada por $A(m) = 15 - \frac{25}{2m} - \frac{9m}{2}$

$A'(m) = \frac{25}{2m^2} - \frac{9}{2}$ De donde se tiene que el extremo buscado es $x_{ext} = -\frac{5}{3}$. Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{5}{3}(x - 3) + 5$.

Ejercicio 4

Halle el polinomio de menor grado que tiene máximo local igual a 6 en $x = 1$ y mínimo local igual a 2 en $x = 3$.

Respuesta

Debido a que el polinomio tiene dos extremos se deduce que no es de grado dos. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que cumple con las hipótesis brindadas; se tiene
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, la cual es cero en los puntos dados por ser f un polinomio. De las hipótesis se obtiene el sistemas de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{aligned} a + b + c + d &= 6 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 2 \\ 3a + 2b + c &= 0 \\ 27a + 6b + c &= 0 \end{aligned} \right.$$

[1] Demostración sencilla, basada en el cambio de signo de ambas derivadas alrededor del punto en cuestión.

Cuyas soluciones son $a = 1, b = -6, c = 9, d = 2$, quedando el polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Ejercicio 5

A las 9:00am un barco B se encontraba a 65 millas marítimas (mm) al este de otro barco A. El barco B viaja hacia el oeste a una velocidad de 10mm/h y A viajaba hacia el sur a una velocidad de 15mm/h. ¿Cuándo se encontrarán a una distancia mínima y cuál es esa distancia?

Respuesta

Modelemos el problema de forma paramétrica, donde el parámetro es t (el tiempo). Podemos entender las trayectorias de los barcos como rectas paramétricas en $\mathbb{R}^2$ con vectores directores dados por la velocidad de marcha y la dirección, situando al barco A sobre el punto $(0, 0)$ y al B sobre $(65, 0)$ se obtienen ambas rectas

$T_1(t) = (0, -15t),\ T_2(t) = (65 - 10t, 0)$

Sea $d(t) = \sqrt{(65 - 10t)^2 + (-15t)^2} = \sqrt{65^2 - 1300t + 325t^2}$

Tomando $d_1(t) = d(t)^2$, la cual alcanza los extremos donde mismo $d(t)$ se tiene que

$d_1'(t) = -1300 + 650t = 0 \Longrightarrow t_m = \frac{1300}{650} = 2h$

$d(t_m) \approx 33{,}54mm$

R/ Tras 2 horas aproximadamente se encontraron a 33.54mm y fue cuando más cerca estuvieron.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.