EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

MATEMÁTICA, CURSO 2012 - 2013

Nombre y apellidos: ____

Grupo: ____

I- Calcule el área de la figura limitada por la curva $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, el eje de las abscisas y por dos rectas paralelas al eje de coordenadas que pasan por los puntos extremos de la función.

II- Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso su respuesta:

a) _____ $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\, senx = 0$ e $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2ln3$.

b) _____ $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots = 1$

c) _____ $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$ es convexa hacia abajo en todo su dominio.

III- Demuestre que para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple $x - \frac{x^3}{6} < senx < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

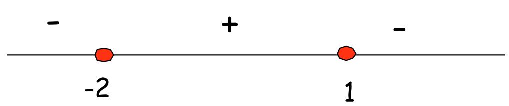
RESPUESTAS:

I- a) Para calcular el área de la figura limitada por la curva $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, por el eje de las abscisas y por dos rectas paralelas al eje de coordenadas que pasan por los puntos extremos de la función, debemos comenzar por determinar cuáles son tales extremos.

Para ello calculemos la derivada de $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2 = \frac{x^2+3x+1}{e^x} + e^2$

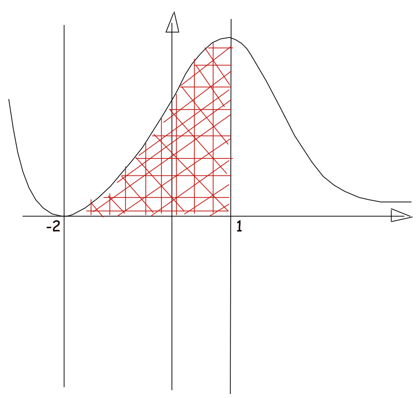
$$y' = \frac{(2x+3)e^x - (x^2 + 3x + 1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2 - x + 2}{e^x} = \frac{(-x+1)(x+2)}{e^x}$$

y aplicamos el criterio de la primera derivada a los posibles extremos para determinar si lo son o no.



Se tiene así que las abscisas de los puntos de extremo son $x = -2$ y $x = 1$.

Una vez halladas las rectas paralelas al eje de las ordenadas que delimitarán la región conjuntamente con el eje de las abscisas y la curva en cuestión, el área a buscar es, gráficamente,



y puede ser determinada por el cálculo de la integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^2+3x+1}{e^x} + e^2\right)dx$ a partir de aplicar dos veces el método de integración por parte tomando en cada caso como función a integrar el polinomio correspondiente y como función a integrar, e^{-x}. El resultado del área a calcular es $3e^2 - \frac{12}{e}$ u^2.

II-

a) V___ $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} senx = 0$ e $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2ln3$.

Que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} senx = 0$ es cierto dado que la función $y = e^{x^2} senx$ es impar (y por tanto simétrica respecto al origen) y está siendo integrada en un intervalo simétrico.

En cuanto a $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2ln3.$, para calcular tal integral el estudiante deberá emplear el método de sustitución. Mediante el cambio de variables $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $dx = 2udu$ se obtiene que:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2u}{1+u}du = 2\int_0^2 \frac{u+1-1}{1+u}du = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du$$
$$= 2(u - ln|1+u|)\Big|_0^2 = 2(2 - ln3).$$

b) F___ $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots = 1$

Se desea calcular el valor numérico de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)*(2k+3)}$ que es convergente por ser una serie telescópica dado que cuando k se hace suficientemente grande, $\frac{1}{2k+1} \to 0$, y se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)*(2k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2k+3-2k-1}{(2k+1)*(2k+3)}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

c) _V_ $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$ es convexa hacia abajo en todo su dominio.

Aquí basta ver que $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ con lo cual $f''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x^2)} > 0$ para todo x real con lo cual es cierto que la función $f(x)$ es convexa hacia abajo en todo su dominio.

III- Demuestre que para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple $x - \frac{x^3}{6} < senx < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Basta aplicar la serie de Taylor con resto en forma integral y tener en cuenta dado que

$$senx = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} sen^{(5)}\, t\, dt = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} cost\, dt$$
$$senx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} sen^{(7)}\, t\, dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} cost\, dt$$

y que $\frac{(x-t)^4}{4!}cost \geq 0$ y $\frac{(x-t)^6}{6!}cost \geq 0$ para $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, usando propiedades de la integral demostradas en conferencia, que

$$r_4 = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} cost\, dt \geq 0 \text{ y}$$

y

$$r_6 = -\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} cost\, dt \leq 0$$

con lo cual, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ya se tiene lo deseado

$$x - \frac{x^3}{6} \leq senx \ = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} cost\, dt$$

$$senx \ = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} cost\, dt \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$