

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Concepción Valdés Castro

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Dra. C. Concepción Valdés Castro



La Habana, 2006

Edición y corrección: Lic. Mayra del Águila Muñiz

Diseño interior: Arsenio Fournier Cuza

Diseño de cubierta:

Diagramación: Yohanka Morejón Rivero

© Concepción Valdés Vastro, 2006

© Sobre la presente edición:
Editorial Félix Varela, 2006

Editorial Félix Varela

ISBN 959-07-0250-3

Editorial Félix Varela
San Miguel No. 1111,
e/ Mazón y Basarrate,
Vedado, Ciudad de La Habana.

ÍNDICE

Prólogo / VII

PARTE I. ANÁLISIS DIFERENCIAL / 1

Introducción / 1

Capítulo I. El Espacio \mathbf{R}^n / 7

Introducción / 7

I.1. Distancias y normas en \mathbf{R}^n / 8

Ejercicios propuestos / 16

I.2. Sucesiones en \mathbf{R}^n / 18

Ejercicios propuestos / 28

I.3. Bolas, abiertos y cerrados en \mathbf{R}^n / 29

Ejercicios propuestos / 41

Ejercicios complementarios / 43

Capítulo II. Límite y continuidad de funciones de varias variables / 45

Introducción / 45

II.1. Funciones de varias variables / 50

Ejercicios propuestos / 50

II.2. Límite de funciones de varias variables / 51

Ejercicios propuestos / 65

II.3. Continuidad de funciones de varias variables / 67

Ejercicios propuestos / 75

II.4. Acotación de una función continua / 77

Ejercicios propuestos / 87

II.5. Continuidad uniforme de una función / 89

Ejercicios propuestos / 98

II.6. Continuidad y conexión / 100

Ejercicios propuestos / 107

Ejercicios complementarios / 107

Capítulo III. Diferenciación de funciones de varias variables / 113

Introducción / 113

III.1. Presentación geométrica del diferencial / 115

III.2. Funciones diferenciables / 118

Ejercicios propuestos / 135

III.3.	Operaciones con funciones diferenciables / 137
	Ejercicios propuestos / 149
III.4.	Algunas cuestiones geométricas / 152
	Ejercicios propuestos / 164
III.5.	Derivadas parciales de orden superior. Fórmula de Taylor / 165
	Ejercicios propuestos / 179
III.6.	Búsqueda de extremos de funciones de varias variables / 180
	Ejercicios propuestos / 200
	Ejercicios complementarios / 201

Capítulo IV. Funciones implícitas / 206

Introducción / 206

IV.1.	Funciones implícitas determinadas por una sola ecuación / 208
	Ejercicios propuestos / 220
IV.2.	Funciones implícitas determinadas por un sistema de ecuaciones / 222
	Ejercicios propuestos / 241
IV.3.	Aplicaciones del teorema de la función implícita / 242
	Ejercicios propuestos / 261
	Ejercicios complementarios / 264

Apéndice. Algunas aplicaciones del cálculo diferencial al estudio de las curvas / 268

Introducción / 268

1. Derivación de una función vectorial / 270
3. Longitud de un arco de curva / 276
4. Curvatura de una curva / 282
5. Plano osculador y torsión de una curva / 287
6. Fórmula de Serret-Frenet / 293

Ejercicios propuestos / 296

PARTE II. FUNCIONES IMPLÍCITAS / 301

Introducción / 301

Capítulo V. Concepto integral múltiple / 303

Introducción / 303

V.1	Integral de una función acotada en un rectángulo / 310
	Ejercicios propuestos / 322
V.2.	Relación entre integrabilidad y continuidad / 323
	Ejercicios propuestos / 333
V.3.	Integral sobre un conjunto acotado / 335
	Ejercicios propuestos / 348
	Ejercicios complementarios / 351

Capítulo VI. Concepto integral múltiple / 353

Introducción / 353
VI.1. Reducción a integrales iteradas / 355
Ejercicios propuestos / 375
VI.2. Cambio de variables en las integrales múltiples / 377
Transformación lineal / 379
Coordenadas Polares / 380
Coordenadas cilíndricas / 381
Coordenadas esféricas / 382
Ejercicios propuestos / 393
VI.3. Aplicaciones físicas de las integrales múltiples / 396
Masa de una lámina / 396
Momentos y centro de masa de una lámina / 397
Fuerza de atracción que ejerce un cuerpo sobre una masa puntual / 398
Ejercicios propuestos / 399
VI.4. Integrales múltiples impropias / 400
Ejercicios propuestos / 411
Ejercicios complementarios / 413

Capítulo VII. Integración sobre curvas y superficies / 416

Introducción / 416
VII.1. Definición de integral curvilínea / 418
Ejercicios propuestos / 425
VII.2. Indiferencia de la trayectoria y Teorema de Green / 427
Ejercicios propuestos / 448
VII.3. Superficies / 450
Ejercicios propuestos / 459
VII.4. Integral de superficie de una función vectorial / 461
Ejercicios propuestos / 467
VII.5. Relaciones integrales fundamentales en los campos escalares y vectoriales / 468
Ejercicios propuestos / 485
Ejercicios complementarios / 488

Notas Biográficas / 491

PRÓLOGO

“[...] la actitud de aquellos que consideran al análisis aislado, como una ciencia lógicamente abstracta, introvertida, es no solo sumamente inadecuado para los principiantes, sino que pone en peligro el futuro de la materia; dedicarse al análisis matemático y al mismo tiempo dar la espalda a sus aplicaciones y a la intuición es condenarlo a una atrofia sin esperanzas”

RICHARD COURANT¹

Las primeras nociones relacionadas con lo que actualmente estudiamos dentro del análisis de funciones de varias variables ya se encuentran en los trabajos originarios del Análisis Matemático. A fines del siglo XVII, Leibniz, Newton y sus seguidores resolvían con gran éxito problemas geométricos y mecánicos ayudados por algoritmos de diferenciación e integración. Pero, en esa época, aún no se había enunciado el concepto función y ellos aplicaban estos algoritmos a fórmulas que relacionaban dos o tres magnitudes variables. En pleno siglo XVIII, Euler da una definición de función como expresión analítica y coloca al estudio de las funciones como el objetivo fundamental del Análisis.

A fines del siglo XVIII y principios del XIX se inició una reestructuración de los fundamentos del análisis; los matemáticos se preocuparon insistente y persistentemente en asentar sobre bases sólidas el cálculo con funciones de una variable. En cambio, las manipulaciones que era necesario efectuar con las funciones que dependían de dos o más variables siguieron realizándose en la forma tradicional. No será hasta la segunda mitad del siglo XIX, vinculado principalmente al desarrollo de una mayor preocupación por el rigor lógico en los programas y clases de matemáticas en las universidades alemanas y sobre todo, bajo la influencia del maestro Weierstrass, que comience el cuestionamiento de muchas de las afirmaciones hasta ese momento admitidas sin vacilación. Los esfuerzos dirigidos a conseguir una fundamentación del análisis en \mathbf{R}^n , acorde con los cánones del rigor

¹ *Differential and Integral Calculus* (1934), Blackie & Son Limited, London.

de la época, evidenció la necesidad de un estudio más profundo de la estructura topológica de este espacio. Por otra parte, y no menos importante, en la época en que esta reestructuración tiene lugar, ya las aplicaciones del análisis solicitaban el desarrollo de los métodos analíticos para la manipulación de funciones definidas en espacios más generales. Por esta razón, vemos que a principios del siglo xx, en forma casi simultánea, se introduce el rigor en la diferenciación e integración de funciones de varias variables y se desarrolla el análisis en espacios con más de tres dimensiones.

Desde una perspectiva pedagógica, a este largo proceso de conformación del análisis de funciones de varias variables, esquematizado en los dos párrafos anteriores, es necesario asociar las naturales modificaciones didácticas surgidas durante más de 200 años de enseñanza de esta disciplina matemática. Una consecuencia de estas transformaciones es que, al estudiante actual, con bastante frecuencia se le trasmite el Análisis en una forma coherente, rigurosa y formal. No obstante, esta transmisión generalmente resulta fría y esquemática, desligada de los problemas que le dieron origen, sin una discusión reveladora de la dinámica de contradicciones que motivaron y estimularon a los científicos de cada época. Es decir, se difunde la impresión de que las definiciones y los teoremas con sus demostraciones surgieron “por arte de magia”, como consecuencia de la “creación pura” de los genios cuyos nombres asociamos a los teoremas. Además, estos resultados, expuestos esquemáticamente como sistemas lógicos formales, son concebidos como “verdades eternas” lo que inhibe cualquier discusión o investigación ulterior.

Es conocido que suele ser más fácil percibir los defectos que encontrar el remedio adecuado. Por ello, no tengo la pretensión de estar ofreciendo un texto ideal, que resuelva todas las contradicciones y dificultades que los profesores y alumnos puedan encontrarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis de funciones de varias variables, pero tampoco creo que este libro sea “un texto más” de esta materia, su modo de presentación difiere del usual. Señalemos al lector algunas características que consideramos distintivas.

Aunque este libro se escribe tomando como base las clases que, durante muchos años he impartido en la carrera de matemática en la Universidad de La Habana, se han tenido en cuenta también las exigencias de los programas de las carreras de Física y Computación. Por esta razón, no contiene simplemente el material de un curso, abarca temáticas que no siempre será necesario, ni conveniente, exponer completamente en las clases. Está concebido además como una ayuda para el profesor en la preparación de **su curso**, para facilitar y **personalizar el estudio independiente** del alumno. Por esta ra-

zón, los contenidos que pueden ser omitidos, sin que esto afecte la comprensión del texto fundamental, se señalan con una línea vertical en el margen izquierdo. Ellos pudieran necesitarse solo para la comprensión de otras partes con igual señalamiento. De esta manera se pretende viabilizar el uso del libro en cursos de análisis matemático con diferentes grados de profundidad y rigor en el estudio de las temáticas.

Hemos dividido el contenido en dos partes, el análisis diferencial y el análisis integral y cada parte en capítulos. Cada parte y cada capítulo comienzan con una introducción. El objetivo fundamental de las introducciones es motivar al lector para la profundización en los aspectos que allí se tratan. El lenguaje de estas introducciones pretende ser informal y sencillo, de manera que pueda ser bien comprendido por el principiante, aunque es posible que no siempre hayamos logrado nuestro objetivo. Estas introducciones están redactadas para que el estudiante pueda leerlas sin tener aún los conocimientos del capítulo correspondiente, pero sin dudas, una mejor comprensión se puede lograr regresando a ellas, después de haber asimilado los conocimientos correspondientes.

En el estilo fundamental de la exposición se ha tratado, en la medida de lo posible, que los nuevos conceptos y teoremas aparezcan de forma natural, tomando como punto de partida la intuición geométrica, motivado por sus aplicaciones más inmediatas o por las necesidades internas del desarrollo de la matemática. Para ello se han incluido ejemplos especialmente concebidos, gráficas ilustrativas y comentarios históricos sobre el surgimiento y evolución de los conceptos y resultados fundamentales. Frecuentemente, el lector encontrará que la deducción de las proposiciones precede a su enunciado formal, en ocasiones esta deducción previa es heurística. Con tal estrategia hemos pretendido contribuir a que el principiante pueda hacerse una idea de la forma de trabajo en la disciplina, de cómo “surgen” los resultados, de por qué “aparecen” las nuevas definiciones.

La exposición de la materia se realiza con el nivel de formalización y rigor aceptado actualmente para la matemática clásica. Excepción de esto lo constituyen el Apéndice de la primera parte y el Capítulo VII, donde, para no aumentar considerablemente el volumen del texto y su complejidad, nos hemos visto forzados a ser menos rigurosos y demostrar algunos teoremas solo bajo restricciones adicionales. Por otra parte, en la medida de lo posible, se incluyen métodos que sin pertenecer al análisis clásico, favorecen la comprensión cabal de un asunto según los cánones actuales de rigor matemático. Esto se hace donde se considera útil, pero siempre de forma completamente opcional sin introducir

complicaciones adicionales. De esta manera, aún en los cursos de objetivos más modestos, aquellos alumnos más aventajados pueden acceder a una información y formación más completa y profunda. A esta formación también contribuyen significativamente una buena parte de los ejercicios complementarios.

En aras de facilitar al lector el incremento de su cultura matemática y una visión más humanista de la ciencia hemos añadido al final del libro notas biográficas de los principales protagonistas en el desarrollo del análisis matemático de funciones de varias variables.

En una obra de este tipo, resultado de la experiencia acumulada durante muchos años de interacción con libros de textos, profesores y estudiantes, es sumamente difícil mencionar a todos aquellos que de una manera u otra han podido contribuir al producto final. Por ello me limitaré a señalar las influencias que considero más significativas.

En diferentes épocas de la enseñanza del análisis matemático de funciones de varias variables, hemos usado como textos básicos o complementarios los libros:

APOSTOL, T.: *Análisis matemático*, segunda edición, Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

FERNÁNDEZ MUÑIZ, J.L.: *Análisis matemático* (T. III y IV), Ed. Pueblo y Educación, C. de La Habana, 1984.

FIKHTENGOLTZ, G.M.: *The Fundamentals of Mathematical Analysis* (T. I y II), Ed. Pergamon Press, Londres, 1965.

KUDRIATSEV, L.D.: *Análisis matemático* (T. I y II), Ed. Mir, Moscú, 1983.

Una presentación que combina armoniosamente el desarrollo histórico y el rigor actual del análisis matemático puede encontrarse en:

HAIRER, E. and G. WANNER: *Analysis by its History*, Ed. Springer, New York-Berlín, 1991.

Para los lectores interesados en profundizar en los aspectos históricos recomendamos:

RIBNIKOV, K.: *Historia de las matemáticas*, Ed. Mir, Moscú, 1987.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y C. VALDÉS CASTRO: *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo*, Ed. Nivola, Madrid, 2004.

Para aquellos que deseen profundizar más en los aspectos formales y rigurosos del análisis de funciones de varias variables les sugerimos:

Krantz, S.G. and H.R. Parks: *The Implicit Functions Theorem. History, Theory and Applications*, Ed. Birkhäuser, Boston, 2002.

Spivak, M.: *Cálculo en variedades*, Ed. Reverté, 1979.

Zorich, V.A.: *Mathematical Analysis* (T. I y II), Ed. Springer, Berlín, New York, 2004.

Un recurso que hemos utilizado frecuentemente para obtener información histórica de primera mano lo constituyen las diferentes bases de datos bibliográficas existentes en Internet. En ellas es posible encontrar, con acceso libre y a texto completo, numerosos libros y artículos clásicos:

<http://gallica.bnf.fr>

<http://www.numdam.org>

<http://historical.library.cornell.edu/math/index.html>

<http://www.hti.umich.edu>

Indudablemente la concepción de un profesor acerca de la forma de presentación de un tema evoluciona en el trabajo que realiza cotidianamente durante años. Además de la literatura docente o científica disponible ejerce una influencia decisiva en esta transformación los intercambios de opiniones y discusiones de trabajo con los colegas. Mi más sincero agradecimiento a aquellos compañeros del departamento de Teoría de Funciones con los que he mantenido provechosas conversaciones de trabajo, algunas de las cuales han servido de estímulo a la escritura de este texto. Particularmente quisiera expresar mi gratitud a la Profesora Valentina Badía Albanés por su lectura atenta del manuscrito que ha permitido corregir muchos de los gazapos que contenía. También considero una influencia significativa, al menos en mi experiencia personal, la interacción alumno-profesor: las preguntas realizadas dentro y fuera del salón de clases, las dudas sobre lo explicado, los errores cometidos, los comentarios realizados. Mi gratitud a todos aquellos alumnos que, durante muchos cursos académicos, me hicieron posible advertir los puntos débiles y fuertes de determinada forma de presentación de un tema. Deseo hacer patente mi satisfacción y agradecimiento por el clima de armonía y comprensión que predominó durante el proceso de edición de esta obra, especialmente la paciencia y sagacidad mostrada por su redactora Lic. Mayra del Águila.

Indudablemente la concepción de un profesor acerca de la forma de presentación de un tema evoluciona en el trabajo que realiza cotidianamente durante años. Además de la literatura docente o científica disponible ejerce una influencia decisiva en esta transformación los intercambios de opiniones y discusiones de trabajo con los colegas. Mi más sincero agradecimiento a aquellos compañeros del departamento de Teoría de Funciones con los que he mantenido provechosas conversaciones de trabajo, algunas de las cuales han servido de estímulo a la escritura de este texto. También considero una influencia significativa, al menos en mi experiencia personal, la interacción alumno-profesor: las preguntas realizadas dentro y fuera del salón de clases, las dudas sobre lo explicado, los errores cometidos, los comentarios realizados. Mi gratitud a todos aquellos alumnos que, durante muchos cursos académicos, me hicieron posible advertir los puntos débiles y fuertes de determinada forma de presentación de un tema.

Un reconocimiento muy especial merece la ayuda oportuna y competente brindada por el Profesor Carlos Sánchez Fernández, quien revisó detenidamente todo el manuscrito, realizando numerosas y calificadas observaciones y con quien tuve la oportunidad de intercambiar opiniones, casi cotidianamente, sobre el contenido expuesto. Muy en especial, esta influencia se deja sentir en lo referente a las incursiones realizadas en el devenir histórico de la matemática, solo con sus consejos y sugerencias estas se hicieron apropiadas y efectivas.

Finalmente, quisiera agradecer anticipadamente cualquier señalamiento crítico o sugerencia que se nos haga llegar para el perfeccionamiento de esta obra.

Concepción Valdés Castro
concha@matcom.uh.cu

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
Enero, 2006

PARTE I

ANÁLISIS DIFERENCIAL

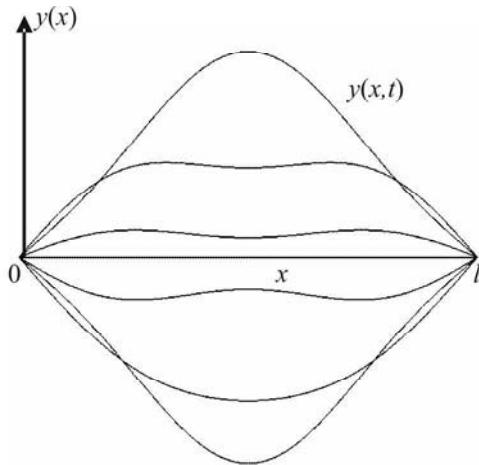
INTRODUCCIÓN

Los orígenes del cálculo diferencial de funciones de varias variables es preciso buscarlo en un momento histórico anterior al establecimiento del concepto función. En los siglos xvii y comienzos del xviii aún no se poseía una noción clara de lo que era una función, se trabajaba con relaciones entre las diferentes magnitudes variables. Estas variables se ligaban mediante ecuaciones y todas ellas poseían el mismo rango, por ejemplo para dar una parábola se escribía $y - x^2 = 0$, donde no se establecía distinción alguna entre la variable x y la variable y . Para la resolución de los problemas, se transformaba esta ecuación utilizando los “diferenciales” y con ellos se operaba.

El primer tipo de problema que requirió una distinción entre las diferentes variables involucradas en una ecuación fue el estudio de las familias de curvas. La representación de una familia de parábolas $y - ax^2 = 0$ obliga a la introducción de una variable adicional α , la cual posee una connotación diferente: un cambio en su valor significa el tránsito de una curva a otra. Uno de los problemas más populares era la búsqueda de una curva que fuera ortogonal a todos los miembros de una cierta familia de curvas dadas.

Será en la obra de Leonard Euler, alrededor de 1730, cuando aparece de forma nítida un concepto de función de dos variables, incluso utiliza la notación $y = P(x, \alpha)$ para representar una familia de curvas en lugar de la forma implícita utilizada anteriormente, $F(x, y, \alpha) = 0$. Pero un desarrollo acelerado del cálculo de funciones de varias variables va a tener lugar en la segunda mitad del siglo xviii relacionado con la consideración de problemas de la mecánica. Uno de los problemas más influyentes fue sin duda el estudio de las vibraciones de las cuerdas en los instrumentos musicales:

“Si fijamos en dos puntos del eje X los extremos de una cuerda tensa y a continuación la desplazamos de su posición de equilibrio, ella comenzará a vibrar. La altura de los puntos de la cuerda variará en el tiempo y dependerá de qué punto estemos considerando. Así la altura y de los puntos de la cuerda será una función $y(x, t)$ de la posición x y del tiempo t .”



En el gráfico se ha situado la cuerda en el eje de abscisas y se consideran en el eje de ordenadas los valores de la altura de la cuerda. Las diferentes curvas muestran posiciones de la cuerda para diferentes instantes de tiempo t .

El desarrollo posterior del aparato matemático de la mecánica, no solo en lo que respecta a la dinámica newtoniana, sino sobre todo a la consideración mechanicista de los diferentes procesos físicos (térmicos, ópticos, magnéticos, eléctricos, moleculares, etc.) y la profundización en el estudio de los problemas geométricos más sofisticados, derivados del establecimiento de la enseñanza politécnica superior durante todo el siglo XIX, exigieron cada vez más la diferenciación e integración de funciones con tres o más variables. De esta manera se hizo indispensable el estudio de funciones con cualquier número de variables, esto es, las definidas en subconjuntos del espacio \mathbf{R}^n . Como consecuencia surgió la necesidad de investigar la estructura y propiedades de los conjuntos de puntos en estos espacios, los cuales ya no poseían la clara visualización geométrica del plano o el espacio tridimensional.

Un estudio sistemático de los conjuntos de infinitos puntos fue iniciado por George Cantor en la década del 70 del siglo XIX y adquirió un desarrollo impetuoso durante el resto de ese siglo y los comienzos del siglo XX. Lo importante para el desarrollo del análisis en conjuntos arbitrarios de puntos es establecer un criterio de cuáles puntos estarán “cercanos”, de modo que permita definir el concepto límite. Primero se estudiaron los conjuntos sobre la recta, utilizando la noción de distancia entre dos puntos como el valor absoluto de la diferencia entre ellos. Más tarde se generalizó a los puntos del plano (o del espacio), considerando la distancia euclídea (definida en Geometría Analítica). La exten-

sión de esta idea al caso de espacios con más dimensiones resultó un paso completamente natural. Ya a fines del siglo XIX, Camille Jordan, profesor de la Escuela Politécnica de París, en su Curso de Análisis, introdujo otras formas de medir la distancia entre los puntos del plano y el espacio, diferentes a la tradicional distancia euclíadiana.

La forma actual del estudio de los conjuntos de puntos, desde un punto de vista más abstracto, adquirió su forma definitiva cuando los problemas de la Física llevaron a la necesidad de estudiar “los funcionales”, es decir, las funciones definidas sobre un conjunto cuyos elementos eran curvas o funciones. Entre los problemas que desempeñaron un papel fundamental en esta transformación del análisis están los llamados “problemas variacionales”. La esencia de este tipo de problema es la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales, generalmente dados por medio de una integral. Comentemos brevemente uno de estos problemas que cuenta con una historia que se remonta al siglo XVII:

Supongamos que se quiere encontrar la curva a lo largo de la cual una masa puntual, sometida solamente a la acción de la fuerza gravitatoria, se mueve desde un punto A hasta otro punto B , no situados en una misma vertical, en el menor tiempo posible.

Consideremos A situado en el origen de coordenadas y supongamos que el punto B tiene coordenadas (a, b) . Mediante sencillos razonamientos físicos se encuentra que, si el punto se mueve según la curva $y = f(x)$ entonces el tiempo transcurrido se expresa por:

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)}} dx, \text{ donde } g \text{ es la constante gravitatoria.}$$

De este modo la solución del problema planteado puede reducirse a encontrar una función f tal que $f(0) = 0$, $f(a) = b$ y haga mínimo el valor de la integral anterior. En otras palabras, se quiere encontrar una función f que minimice la función T , la cual a cada f hace corresponder un número real dado por el valor de la integral.

Surgió así la generalización de dos cuestiones fundamentales estudiadas para las funciones reales de una variable real:

- ¿Bajo qué condiciones una función abstracta tendrá máximos y mínimos?
- ¿Cómo elaborar un algoritmo adecuado para la búsqueda de los máximos y mínimos?

En el caso conocido de funciones de una variable real, una respuesta a la primera interrogante la proporciona el **Teorema de Weierstrass** sobre la existencia de extremos y para la segunda fue elaborado un algoritmo basado en el concepto **derivada** de una función.

La búsqueda de una generalización adecuada del Teorema de Weierstrass para las funciones abstractas contribuyó de forma decisiva a la aparición de definiciones apropiadas de distancia, módulo, límite y demás nociones relacionadas con ellos. Por otra parte, la obtención de un método para la investigación de los valores extremos promovió el desarrollo de un punto de vista abstracto para la noción de diferencial. En el estudio de las funciones de una variable, tanto esta noción, como el concepto de continuidad, esencial en el Teorema de Weierstrass, dependían básicamente de la idea de **Límite**. Por otra parte, en cualquiera de las formas utilizadas para definir límite aparecía la noción de **distancia** entre números reales. Si queremos generalizar las herramientas desarrolladas para las funciones de una variable, debemos primeramente extender la idea de distancia al espacio \mathbf{R}^n o, como se suele decir, estudiarlo como **espacio métrico**.

En el desarrollo de esta Parte I, nos apoyaremos en todo lo que la matemática ha ganado en su búsqueda generalizadora. Para atemperar el alto grado de abstracción a lo que ello conllevó, desarrollaremos fundamentalmente los conceptos para funciones que relacionan elementos de los conjuntos de puntos más cercanos a nosotros, los subconjuntos de \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, y solo posteriormente los extenderemos para algunos casos más generales.

CAPÍTULO I

EL ESPACIO \mathbf{R}^n

INTRODUCCIÓN

Del curso de Geometría Analítica se conoce la noción de distancia entre dos puntos del plano \mathbf{R}^2 o el espacio \mathbf{R}^3 . Por ejemplo, en el caso del plano, dados dos puntos $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$, se define distancia entre x y y como:

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

La distancia posee las propiedades básicas siguientes:

Para cualesquiera puntos $x, y, z \in \mathbf{R}^2$ se cumple:

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Con esta noción de distancia los puntos “próximos” a un punto a dado, esto es, los que distan de a en menos que cierta cantidad r , están siempre ubicados dentro de un círculo con centro en a y radio r . Sin embargo, en su trabajo con las funciones de dos o tres variables, los matemáticos advirtieron que no siempre era conveniente la consideración de “vecindades” circulares y encontraron alternativas. Por ejemplo, si se mide la “distancia” mediante alguna de las expresiones:

$$d'(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \text{ o}$$

$$d''(x, y) = \max \{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\},$$

los puntos cuya distancia de a es menor que r forman cuadrados con centro en a . En la Fig.1 aparece en línea continua el cuadrado correspondiente a d' y en línea discontinua el correspondiente a d'' . Notemos que, análogamente a d , estas “distancias” están expresadas mediante operaciones realizadas con las componentes del vector diferencia $y - x$.

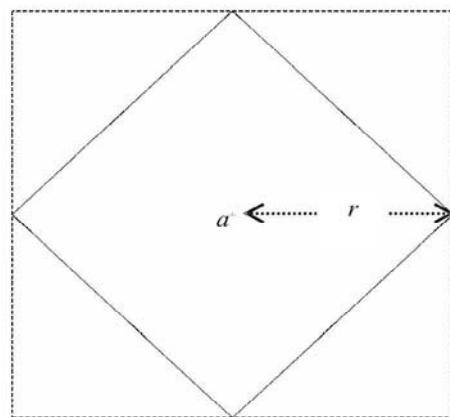


FIGURA 1.

Dando libertad a nuestra imaginación, podríamos definir “distancias” de numerosas formas diferentes. Entonces surge la pregunta ¿cuáles definiciones serán adecuadas para nuestros objetivos? ¿qué requisitos básicos deben satisfacer estas “distancias”?

En el Capítulo I definiremos las nociones de distancia y “longitud” de un vector en \mathbf{R}^n . Además, estudiaremos las propiedades y conceptos básicos con ellas relacionados y que serán indispensables para el estudio de las funciones entre espacios \mathbf{R}^n .

I.1. DISTANCIAS Y NORMAS EN \mathbf{R}^n

Supondremos conocido, del curso de Álgebra Lineal, al conjunto \mathbf{R}^n como espacio vectorial con las operaciones:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

donde: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$

Definición 1. Llamaremos **distancia** en \mathbf{R}^n a una aplicación d tal que a cada par de elementos $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ hace corresponder un número real positivo o nulo $d(x, y)$, tal que para todo $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ se satisfacen las propiedades siguientes:

D1) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

D2) $d(x, y) = d(y, x)$

D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

El espacio \mathbf{R}^n con una distancia asociada se dice que es un **espacio métrico**.

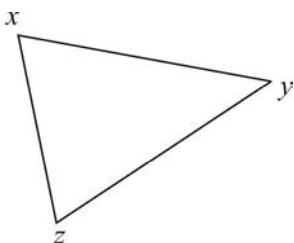


FIGURA 2.

Observaciones: 1) Las tres propiedades anteriores corresponden a las propiedades a), b) y c) señaladas para la distancia euclíadiana en \mathbf{R}^n .

2) La propiedad D3) para la distancia euclíadiana en el plano o el espacio, está relacionada con la conocida propiedad de la geometría euclíadiana: *en todo triángulo, la longitud de un lado es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados* (Fig.2). Por esta razón se le conoce como **desigualdad triangular**.

Ejemplo 1. Verifiquemos que la expresión $d'(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$, mencionada en la introducción, constituye una distancia en \mathbf{R}^n . Evidentemente $d'(x, y) \geq 0$ y será cero solo cuando cada sumando lo sea, esto es cuando $x = y$, así queda comprobado D1). La propiedad D2) es inmediata. Probemos D3):

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |z_1 - x_1| + |z_2 - x_2| = |(z_1 - y_1) + (y_1 - x_1)| + |(z_2 - y_2) + (y_2 - x_2)| \leq \\ &\leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Observemos que las distancias entre puntos de la recta y la distancia euclíadiana en el plano o el espacio están relacionadas con la noción de longitud de un segmento o de un vector. También en \mathbf{R}^n una forma muy útil de obtener ejemplos de distancias es definiendo previamente lo que entenderemos por **norma** de un vector.

Definición 2. Llamaremos norma de un vector $x \in \mathbf{R}^n$ a una aplicación $\|\cdot\|: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tal que para todo $x, y \in \mathbf{R}^n$ y $\lambda \in \mathbf{R}$ satisface

N1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**desigualdad triangular**) (ver Fig.2).

El espacio \mathbf{R}^n con una norma asociada se dice que es un **espacio normado**.

Supongamos definida una norma $\|\cdot\|$ en \mathbf{R}^n y comprobemos que la expresión:

$$d(x, y) = \|y - x\|. \quad (1)$$

siempre define una distancia.

◆ En efecto, la propiedad N1) indica que $d(x, y)$ es positiva o nula y esto último ocurre si y solo si el vector diferencia $y - x$ es cero, es decir, $y = x$. Esto prueba D1).

La propiedad N2) nos permite justificar D2):

$$d(x, y) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\| = d(y, x).$$

Finalmente, de la propiedad N3) obtenemos D3):

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(y, x) + d(y, z). \blacksquare$$

De este modo demostramos que:

Toda norma en \mathbf{R}^n tiene asociada una distancia en este espacio mediante la relación (1).

Ejemplo 2. Para $x \in \mathbf{R}^n$ las expresiones:

$$\text{a) } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{b) } \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, \quad \text{c) } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

constituyen normas. Para $n = 2$ y 3 , la primera expresión, coincide con la longitud de un vector estudiada en la Geometría Analítica.

- ◆ La verificación de las propiedades N1) y N2) para $\|\cdot\|_2$ es inmediata y las dejamos al lector.

Para demostrar N3) en a) debemos comprobar que:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

o de forma equivalente:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (2)$$

Esta última desigualdad puede ser demostrada por un método elemental, pero ingenioso. Consideremos el trinomio de segundo grado en la variable λ :

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 \geq 0$$

Como, cualquiera sea el valor de λ , este trinomio no cambia de signo, la ecuación de segundo grado asociada no puede tener raíces reales diferentes y entonces su discriminante debe ser negativo o cero, lo cual es equivalente a la desigualdad (2).

La comprobación de las tres propiedades de una norma para b) y c) es muy sencilla y se deja de ejercicio (ejercicio 1).

La distancia asociada a $\|\cdot\|_2$ en \mathbf{R}^n , es precisamente la denominada distancia euclíadiana y que denotaremos por:

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pero también tendremos en \mathbf{R}^n las distancias asociadas a las normas $\|x\|_\infty$ y $\|x\|_1$ (cuando $n = 2$, estas distancias coinciden con d'' y d' respectivamente):

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| \quad \text{y} \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

En forma más general puede definirse, para todo $p \in \mathbf{R}$, $p \geq 1$ la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y la distancia:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{ejercicio complementario 3}).$$

Observemos que cuando $n = 1$ todas las definiciones anteriores de norma coinciden con el módulo de un número real. En el tratamiento de \mathbf{R} como espacio normado, siempre supondremos la norma de un elemento como su valor absoluto.

Los conceptos de distancia y norma pueden introducirse para una clase de conjuntos más generales que \mathbf{R}^n .

Definición 3. Dado un conjunto arbitrario X , llamaremos **distancia o métrica** en X a una aplicación $d : X \times X \rightarrow \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ que satisface las propiedades D1), D2), D3). Al par (X, d) lo denominaremos **espacio métrico**.

Los ejemplos más sencillos de espacios métricos nos lo brinda \mathbf{R}^n con las diferentes distancias que hemos considerado antes. El ejemplo siguiente muestra la posibilidad de definir una distancia en un conjunto cualquiera.

Ejemplo 3. Sea X un conjunto arbitrario y definamos

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}, \quad x, y \in X$$

Se verifica fácilmente que d satisface las propiedades D1), D2), D3), por lo tanto es una distancia en X . Esta distancia se conoce como la **distancia o**

métrica discreta y al espacio métrico generado por ella en el conjunto X se le denomina *espacio métrico discreto*.

Observemos que en el ejemplo 2, utilizamos la noción de norma en \mathbf{R}^n para definir distancias en dicho conjunto. Este procedimiento también puede generalizarse, cuando el conjunto en el que se trabaja es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos.

Definición 4. Sea E un espacio vectorial real (o complejo). Llamaremos **norma** en E a una aplicación $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbf{R}$ que cumple las propiedades N1), N2)¹ y N3). Diremos que el par $(E, \|\cdot\|)$ constituye un **espacio normado**.

Se puede ver fácilmente que en todo espacio normado es posible definir una distancia a través de la relación $d(x, y) = \|x - y\|$. Luego se tiene que:

Todo espacio normado es también un espacio métrico.

Sin embargo, existen ejemplos de espacios métricos, cuya distancia no puede ser obtenida a partir de una norma a través de la relación (1).

Ejemplo 4. Consideremos el espacio métrico (\mathbf{R}, d) , donde d es la distancia discreta. El conjunto de los números reales es un espacio vectorial, luego podríamos pensar en obtener la distancia discreta d a través de una norma. Supongamos que esto fuera posible, entonces debe existir una norma en \mathbf{R} tal que $d(x, y) = \|x - y\|$. Pero, en virtud de N2, se tendría:

$$1 = d(2, 4) = \|4 - 2\| = 2\|2 - 1\| = 2d(1, 2) = 2,$$

lo cual es un absurdo.

Dado un espacio métrico (E, d) , donde el conjunto E posee estructura de espacio vectorial real o complejo, puede demostrarse (ejercicio complementario 8a) que en E existe una norma $\|\cdot\|$ la cual verifica con d la relación (1) si y solo si para todo $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$, d satisface:

- Invarianza por homotecia: $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y),$

¹ En el caso de un espacio vectorial complejo la propiedad N2) debe ser válida para λ complejo.

- Invarianza por traslación: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.

Observación. La notación en forma de par, introducida para un espacio métrico o normado, es motivada porque un mismo conjunto puede dar lugar a diferentes espacios normados o métricos, en dependencia de la norma o distancia que se introduzca en él. No obstante, **cuando no de lugar a confusiones**, nos referiremos al “espacio normado E ” o al “espacio métrico X ”.

Definición 5. a) Sea el conjunto (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces es claro que (A, d) también constituye un espacio métrico, al cual llamaremos **subespacio métrico** de (X, d) .

b) Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y S es un subespacio vectorial de E , entonces $(S, \|\cdot\|)$ es también un espacio normado que denominaremos **subespacio normado** de $(E, \|\cdot\|)$.

Ejemplos.

5. El conjunto $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ y el conjunto de los números racionales \mathbf{Q} son subespacios métricos de \mathbf{R} (con la distancia usual). ¿Podremos considerarlos también como subespacios normados?

6. El conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$ con la norma euclídea es un subespacio normado de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Es interesante notar que el devenir histórico de la matemática es mucho más rico y tortuoso que la forma simplificada en la cual se presentan usualmente las teorías en los libros de texto. Concretemos esta idea en el ejemplo de la conformación de la noción de distancia. La esencia de la desigualdad triangular está relacionada con el siguiente tipo de razonamiento: *Si dos puntos A y B están próximos a un tercer punto C, entonces ellos están próximos entre sí*. Precisamente esto motivó a que Maurice Fréchet, en su tesis de 1906, no definiera la relación de “proximidad” entre los puntos del conjunto considerado mediante la distancia en el sentido que la hemos considerado antes. Fréchet introdujo las *clases V*, donde a dos elementos A y B hace corresponder un número real no negativo (A, B) , que denomina *écart* de A y B y el cual debe satisfacer:

- i) $(A, B) = 0$ si y solo si, $A = B$.

ii) Existe una función positiva $f(\varepsilon)$, que tiende a 0 junto con ε y para la cual

$$\text{si } (A,B) \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad (B,C) \leq \varepsilon, \text{ entonces } (A,C) \leq f(\varepsilon),$$

donde A, B, C son elementos de la *clase V*.

Para casi todas las proposiciones que demuestra Fréchet en su tesis es suficiente contar con la propiedad ii). Solo para algunas propiedades muy concretas necesita la desigualdad triangular, es decir, la propiedad D3). A los espacios que poseen esta última propiedad, esto es, a los actuales espacios métricos, los denomina de *clase E* y observó que todo espacio de clase E es de clase V. Es extraño que Fréchet no diera ningún ejemplo de espacio de clase V que no fuera de clase E (ver ejercicio 12).

La idea de estudiar espacios abstractos utilizando de forma conjunta la estructura algebraica de espacio vectorial y el concepto de norma, fue desarrollada de forma casi simultánea por varios matemáticos entre los años 1920 y 1922, podemos decir que la necesidad de su introducción “estaba en el aire matemático que se respiraba en esa época”. Pero sin dudas la obra más influyente fue la tesis de doctorado del matemático polaco Stefan Banach. Banach se propuso como objetivo “demostrar algunos teoremas válidos para diferentes conjuntos de funciones, [...]. Para no estar obligados a demostrarlos aisladamente en cada campo particular, lo que sería bastante penoso, considero los conjuntos de elementos para los que postulo ciertas propiedades, deduzco los teoremas y enseguida demuestro que para cada campo funcional particular los postulados adoptados son verdaderos”.

Entre los ejemplos considerados por Banach está el espacio $\mathbf{C}[a,b]$ de las funciones reales definidas y continuas en el intervalo $[a,b]$, con la norma dada por la expresión:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

◆ Veamos que efectivamente esta definición constituye una norma. Las propiedades N1) y N2) son inmediatas de la definición de $\|f\|_{\infty}$. Comprobemos la propiedad N3):

Sean $f, g \in \mathbf{C}[a,b]$, entonces la función suma $f + g$ es continua y, por el Teorema de Weierstrass, existe un punto $c \in [a,b]$ tal que:

$$\|f + g\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) + g(x)| = |f(c) + g(c)|.$$

Pero:

$$|f(c) + g(c)| \leq |f(c)| + |g(c)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |g(x)|,$$

lo que demuestra que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Las expresiones mostradas en los ejercicios 10 y 11 son adaptaciones de las propuestas por Banach en su tesis.

Ejercicios propuestos

1. Prueba que:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

son normas en \mathbf{R}^n .

2. Para una norma $\|\cdot\|$ en \mathbf{R}^n , se cumple:

$$\|x_1 + \cdots + x_m\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_m\|, \quad x_i \in \mathbf{R}^n \quad (i = 1, \dots, m).$$

3. Sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en \mathbf{R}^n , prueba que se cumple:

$$\|x - y\| \geq \|\|x\| - \|y\|\|, \quad \text{para } x, y \in \mathbf{R}^n$$

4. Demuestra que:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad \text{para } p \geq 1 \quad \text{y } x \in \mathbf{R}^n$$

5. Sean $\|\cdot\|^1, \|\cdot\|^2$ dos normas cualesquiera en \mathbf{R}^n (un espacio normado E) y a, b dos constantes reales positivas. Determina cuál de las siguientes definiciones constituyen normas en \mathbf{R}^n (en E):

a) $\|x\| = a\|x\|^1 + b\|x\|^2 \quad$ b) $\|x\| = \max(\|x\|^1, \|x\|^2) \quad$ c) $\|x\| = \min(\|x\|^1, \|x\|^2)$

6. (**Métrica de correos**). Consideremos que la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos A y B del plano se mide como la suma de las distancias de estos puntos al origen de coordenadas. Esta forma de medición puede interpretarse como el recorrido total realizado por una carta que sale de A , pasa por la oficina de correos y llega a B donde se encuentra el destinatario. Se supone que una persona no se escribe a sí misma ni a los que conviven con ella. Prueba que $d(A, B)$ satisface los axiomas D1, D2, D3.
7. (**Métrica del ascensor**). Pensemos en el plano como la unión de sus rectas verticales e interpretaremos a estas rectas como si fueran edificios. La distancia entre dos puntos que están en la misma recta vertical será solo el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas. Esto puede interpretarse como el recorrido de un ascensor que va de una planta a otra en un mismo edificio. Si los puntos, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , están en rectas verticales diferentes, entonces la distancia será la suma $|y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|$, lo que puede interpretarse como el recorrido que consiste en bajar en el ascensor hasta la planta baja (eje OX), ir por la calle hasta el segundo edificio y subir en el ascensor del segundo edificio hasta la planta que indica la ordenada del segundo punto. Demuestra que esta definición satisface las tres propiedades básicas de la distancia.
8. Sea $\|x\|_{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{1/2} \right)^2$, $x \in \mathbf{R}^n$. Demuestra que $\|\cdot\|_{1/2}$ no constituye una norma en \mathbf{R}^n .
9. Prueba que:

a) Si $p < q$, entonces $\|x\|_p > \|x\|_q$.

b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

10. Consideremos el espacio $\mathbf{A}[a,b]$ de las funciones reales acotadas sobre el intervalo $[a,b]$ y definamos:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Demuestra que $\|f\|_\infty$ constituye una norma en este espacio.

11. Sea el espacio $\mathbf{R}[a,b]$ de las funciones integrables según Riemann en el intervalo $[a,b]$ y definamos:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

¿Serán normas en el espacio $\mathbf{R}[a,b]$? ¿Y en el espacio $\mathbf{C}[a,b]$ de las funciones continuas?

12. Demuestra que todo espacio métrico es una *clase V*, en el sentido definido por Fréchet. Encuentra un ejemplo de un *écart* que no constituya una distancia.

I.2. SUCESIONES EN \mathbf{R}^n

Para el estudio del límite y la continuidad de las funciones de una variable real, nos basamos en gran medida en la idea, más simple, de límite de una sucesión. De forma análoga podemos proceder en el caso del espacio \mathbf{R}^n .

Definición 1. Una **sucesión** $\{x^m\}$ en el espacio \mathbf{R}^n no es más que una forma de hacer corresponder a cada número natural m un vector $x^m \in \mathbf{R}^n$.

Es claro que una sucesión $\{x^m\}$ en \mathbf{R}^n vendrá dada por n sucesiones de números reales, las **sucesiones componentes**.

Ejemplo 1. La sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{1}{m}, (-1)^m, \frac{\sin m}{m} \right) \right\}$$

en \mathbf{R}^3 , tiene por sucesiones componentes a $\left\{ \frac{1}{m} \right\}$, $\left\{ (-1)^m \right\}$, $\left\{ \frac{\sin m}{m} \right\}$.

A continuación consideraremos dada una norma $\|\cdot\|$ en el espacio \mathbf{R}^n e introduciremos el concepto de convergencia de una sucesión de elementos de este espacio (según la norma $\|\cdot\|$).

Definición 2. Diremos que $l \in \mathbf{R}^n$ es **límite** de una sucesión $\{x^m\}$ de elementos de \mathbf{R}^n cuando la sucesión de números reales $\{\|x^m - l\|\}$ tiende a cero.

Al igual que en el caso de sucesiones reales, utilizaremos las notaciones $\lim_m x^m = l$ o más simplemente $x^m \rightarrow l$. Llamaremos **convergente** a una sucesión cuando ella tiene límite.

Hemos expresado la definición de límite de sucesiones en \mathbf{R}^n a través del límite de sucesiones de números reales: *la distancia entre los términos de la sucesión y el límite tiende a cero*. Esta definición puede ser escrita en forma más desarrollada:

$x^m \rightarrow l \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe algún número natural N tal que:

$$\|x^m - l\| < \varepsilon, \quad \text{para } m \geq N$$

Se puede probar de forma muy sencilla las propiedades siguientes:

- a) El límite de una sucesión convergente es único.
- b) Si $x^m \rightarrow l$ y $y^m \rightarrow s$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, entonces $\alpha \cdot x^m + \beta \cdot y^m \rightarrow \alpha \cdot l + \beta \cdot s$.

Ejemplo 2. Consideraremos en \mathbf{R}^3 la norma euclíadiana y demostremos que la

sucesión $x^m = \left(\frac{1}{m}, \frac{2m}{m+2}, \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right)$ tiene por límite $(0, 2, e)$ (Fig.3).

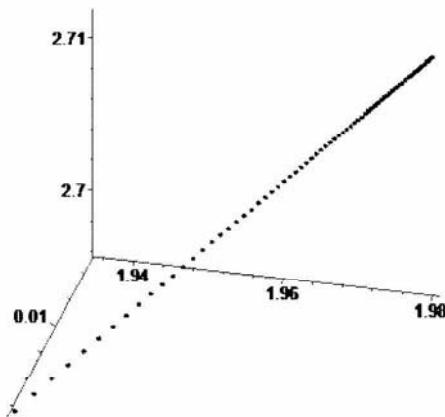


FIGURA 3.

En efecto,

$$\begin{aligned}\|x^m - l\|_2 &= \left\| \left(\frac{1}{m}, \frac{2m}{m+2}, \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right) - (0, 2, e) \right\|_2 = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{m} - 0\right)^2 + \left(\frac{2m}{m+2} - 2\right)^2 + \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - e\right)^2}\end{aligned}$$

la cual, evidentemente, tiende a cero. Así que:

$$\lim_m x^m = (0, 2, e).$$

Puede comprobarse fácilmente que, para cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$, con $1 \leq p \leq \infty$ esta sucesión converge al mismo límite. Entonces podemos preguntarnos ¿será la convergencia de sucesiones y sus límites independiente de la norma considerada? Para las normas $\|\cdot\|_p$, con $1 \leq p \leq \infty$ introducidas en \mathbf{R}^n , la respuesta afirmativa la podemos obtener utilizando la siguiente doble desigualdad, cuya demostración está propuesta como ejercicio (4, I.1):

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty \quad \text{para } p \geq 1 \quad \text{y} \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

◆Efectivamente, supongamos que l es el límite de la sucesión $\{x^m\}$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces por definición $\|x^m - l\|_\infty \rightarrow 0$ y, utilizando la segunda desigualdad en (1), vemos que también $\|x^m - l\|_p \rightarrow 0$, para todo valor de p . De forma similar, la primera desigualdad en (1) nos permite comprobar que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_p$, para cualquier $p \geq 1$, implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$. De modo que, cuando consideramos \mathbf{R}^n en cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, las sucesiones convergentes son las mismas y además, las que convergen lo hacen al mismo límite independientemente del valor de p .◆

El razonamiento realizado anteriormente con las desigualdades en (1) nos sugiere que, cuando se cumple una desigualdad del tipo:

$$a\|x\|' \leq \|x\|^n \leq b\|x\|', \quad (2)$$

para todo $x \in \mathbf{R}^n$ y a, b números reales positivos, entonces las sucesiones convergentes en las normas $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|^n$ son las mismas. La importancia de este hecho motiva la definición siguiente:

Definición 3. La norma $\|\cdot\|'$ es **equivalente** a la norma $\|\cdot\|^n$ si existen constantes a y b positivas tales que se cumple (2).

Observación. Pueden probarse sin dificultad (ver ejercicio 1) las dos propiedades siguientes:

- 1) Si $\|\cdot\|'$ es equivalente a $\|\cdot\|^n$, entonces también $\|\cdot\|^n$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|'$.
- 2) Si $\|\cdot\|'$ es equivalente a $\|\cdot\|^n$ y $\|\cdot\|^n$ es equivalente a $\|\cdot\|'''$, entonces $\|\cdot\|'$ es equivalente a $\|\cdot\|'''$.

Esto motiva que, cuando se cumple (2), diremos simplemente que las normas $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|^n$ son equivalentes.

Un razonamiento semejante al realizado anteriormente, para el caso particular de las normas $\|\cdot\|_p$, permite demostrar la afirmación siguiente:

Si las normas $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|^n$ son equivalentes, entonces:

$$\{x^m\} \text{ converge a } l \text{ en la norma } \|\cdot\|' \Leftrightarrow \{x^m\} \text{ converge a } l \text{ en la norma } \|\cdot\|^n.$$

La desigualdad (1) significa la equivalencia en \mathbf{R}^n de cualesquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ (basta tomar $a = 1$ y $b = n^{1/p}$). Haciendo uso de las propiedades indicadas antes, podemos concluir que en \mathbf{R}^n todas las normas de la forma $\|\cdot\|_p$ son equivalentes. Más adelante (II.4) demostraremos el resultado fundamental siguiente:

Todas las normas en \mathbf{R}^n son equivalentes.

Esto significa, por una parte, que podremos referirnos a la convergencia de sucesiones en \mathbf{R}^n sin necesidad de especificar a cuál norma nos referimos. Además, para calcular límite de sucesiones en \mathbf{R}^n , podremos utilizar en cada problema aquella norma cuya forma de definición sea la más adecuada.

Cuando se quiere aplicar la definición de límite (como en el ejemplo 1) es necesario conocer previamente el supuesto límite de la sucesión, por tanto, esta definición no proporciona un método de cálculo. Podríamos preguntarnos ¿cómo proceder para calcular límites de sucesiones en \mathbf{R}^n ?

Un análisis más detallado del ejemplo 1 nos permite observar, que el supuesto límite se ha formado a partir de los límites de las sucesiones componentes. En general, sea una sucesión $\{x^m\}$, con $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in \mathbf{R}^n$, es decir, sus sucesiones componentes son $\{x_i^m\}_{i=1,\dots,n}$. Demostremos que tiene lugar la afirmación siguiente:

$$x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \rightarrow l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{R}^n \text{ si y solo si } \lim_m x_i^m = l_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

◆ Supongamos que la sucesión $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$ converge al vector $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{R}^n$.

Haciendo uso de la norma $\|\cdot\|_\infty$, esta suposición significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que:

$$\|x^m - l\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{para } m \geq N,$$

pero:

$$\|x^m - l\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i^m - l_i| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_i^m - l_i| < \varepsilon, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Luego, para toda i

$$x_i^m \rightarrow l_i.$$

Recíprocamente, supongamos que $x_i^m \rightarrow l_i$. Entonces, dado un ε positivo arbitrario, para cada i , podemos encontrar un N_i tal que, cuando $m \geq N_i$ se cumple $|x_i^m - l_i| < \varepsilon$. Entonces, basta elegir $N = \max_{i=1,\dots,n} N_i$ para que se satisfaga:

$$\|x^m - l\|_{\infty} < \varepsilon, \text{ para } m \geq N.$$

Esto concluye la prueba del teorema.♦

Observación. El resultado anterior nos indica que el análisis de la convergencia de sucesiones en \mathbf{R}^n se reduce simplemente a la determinación de la convergencia de n sucesiones de números reales. Así por ejemplo, es evidente que la sucesión del ejemplo 1 no puede ser convergente, pues la sucesión correspondiente a las segundas componentes no es una sucesión de números reales convergente. La caracterización dada en (3), también permite calcular inmediatamente el límite de la sucesión del ejemplo 2.

La relación (4), sugiere que la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ es adecuada cuando se quieren relacionar propiedades de las sucesiones en \mathbf{R}^n con las respectivas propiedades en \mathbf{R} . En lo que sigue, haremos uso frecuente de esta norma.

Cuando queremos determinar la convergencia de una sucesión, pero no tenemos un elemento de \mathbf{R}^n candidato a ser el límite, no es factible usar la definición. En el caso de las sucesiones de números reales, una herramienta que se mostraba muy útil en este tipo de situación es la llamada **condición de Bolzano-Cauchy**, la cual generalizaremos para sucesiones en \mathbf{R}^n .

Definición 4. Una sucesión $\{x^m\}$ se dice que es **fundamental** (o de **Bolzano-Cauchy**) si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N , tal que cuando $m > N$ se cumple:

$$\|x^m - x^{m+k}\| < \varepsilon, \text{ para todo } k \geq 1.$$

La definición de normas equivalentes permite demostrar fácilmente el resultado siguiente:

Si las normas $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|''$ son equivalentes, entonces:

$\{x^m\}$ es fundamental para $\|\cdot\|' \Leftrightarrow \{x^m\}$ es fundamental para $\|\cdot\|''$.

Razonando de forma totalmente semejante a como lo hicimos para probar (3) se obtiene:

Sea una sucesión $\{x^m\}$ de \mathbf{R}^n , $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$. Entonces:

$\{x^m\}$ es fundamental $\Leftrightarrow \{x_i^m\}$ es fundamental para todo $i = 1, \dots, n$.

De los resultados anteriores y haciendo uso del **Teorema de Bolzano-Cauchy** para sucesiones en \mathbf{R} , puede demostrarse el siguiente

Teorema 1. (Bolzano-Cauchy en \mathbf{R}^n). Una sucesión en \mathbf{R}^n es convergente si y sólo si es una sucesión fundamental.

Las definiciones de sucesión convergente y de sucesión de Cauchy, dadas para \mathbf{R}^n , se extienden sin ninguna dificultad a un espacio normado arbitrario. Para darles un sentido dentro de un espacio métrico general basta, en la definición de límite, sustituir la relación $\|x^m - l\| \rightarrow 0$ por $d(x^m, l) \rightarrow 0$ y, en la de sucesión de Cauchy, la desigualdad $\|x^m - x^{m+k}\| < \varepsilon$ por $d(x^m, x^{m+k}) < \varepsilon$. Es importante destacar que el límite l debe ser siempre un elemento del espacio considerado.

Ahora podemos cuestionarnos si las afirmaciones demostradas para el espacio normado (y por tanto métrico) \mathbf{R}^n se mantendrán válidas en general. Los ejemplos siguientes nos indican que debemos ser cautelosos ante las generalizaciones.

Ejemplo 3. Consideremos la sucesión $\{1/n\}$, que en la métrica usual en \mathbf{R} converge a cero. Analicemos su comportamiento cuando modificamos el espacio métrico al cual pertenece.

a) Consideremos en \mathbf{R} la distancia discreta d . Es claro que para todo $\varepsilon > 0$ y n natural se tiene que:

$$1 = d(1/n, 0).$$

Esta igualdad significa que, en este espacio métrico, la sucesión $\{1/n\}$ no puede tener límite cero. Análogamente se comprueba que ningún otro número real puede servirle de límite, por tanto, ella es divergente en el espacio métrico discreto.

b) Sea ahora el conjunto $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, considerado como subespacio métrico de \mathbf{R} , con la métrica usual. Evidentemente los elementos de la sucesión $\{1/n\}$ pertenecen a X , sin embargo, ella no converge en X , ya que el único posible límite no pertenece a este subespacio.

Ejemplo 4. Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{C}[a,b]$ con las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ definidas en los ejercicios 10 y 11 del epígrafe anterior y la sucesión $\{f_n\}$ de elementos de ese espacio definida por (Fig.4):

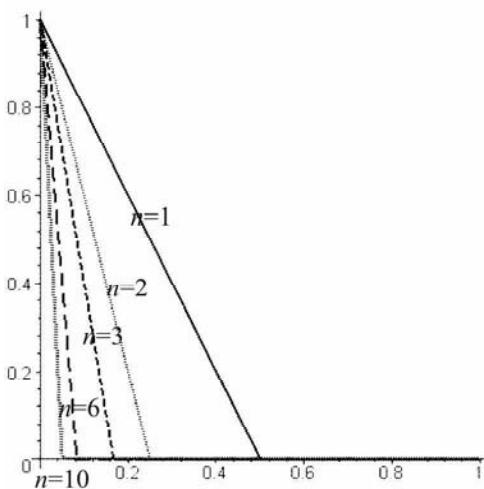


FIGURA 4.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - 2nx, & \text{si } 0 \leq x < 1/2n \\ 0, & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se verifica directamente que:

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{4n} \rightarrow 0$$

luego esta sucesión es convergente a la función constante cero en la norma $\|\cdot\|_1$.

Por otra parte, es evidentemente $\|f_n - 0\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 1$ luego no puede converger a cero en la norma $\|\cdot\|_\infty$.

De modo que en el espacio $\mathbf{C}[a,b]$ las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes.

Como una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular puede demostrarse que en cualquier espacio métrico:

Toda sucesión convergente es siempre de Bolzano-Cauchy.

Cabe entonces preguntarnos: En un espacio métrico arbitrario, ¿toda sucesión de Bolzano-Cauchy será convergente?

En el ejemplo 3 vimos que la sucesión $\{1/n\}$ en el espacio métrico $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ no es convergente. Sin embargo, es evidente que ella es una sucesión fundamental. De modo que la respuesta a la pregunta anterior es negativa. Esta observación motiva la definición siguiente:

Definición 5. Diremos que un espacio métrico X es **completo** si toda sucesión fundamental en X es convergente.

Ejemplos:

5. El Teorema 1 puede reformularse como:

El espacio \mathbf{R}^n es completo.

6. El ejemplo 3 indica que el espacio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ no es completo.

7. En el conjunto \mathbf{Q} de los números racionales consideremos la distancia usual del módulo de la diferencia entre dos números racionales. Este espacio métrico no es completo. En efecto, conocemos sucesiones de números racionales

tales como $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ que, evidentemente, son fundamentales y no convergen a ningún número racional.

Fue Fréchet quien, al introducir las ideas métricas en un conjunto abstracto, puso en evidencia que para un espacio métrico no necesariamente se cumple el Teorema de Bolzano-Cauchy. Esta era una cuestión a la que había que prestar especial atención, pues en la demostración de casi todos los teoremas importantes del análisis clásico está presente esta propiedad.

Por esa razón, cuando Banach introduce la noción de espacio vectorial con una norma, incluye tres grupos de axiomas: En el grupo I, considera los correspondientes a la estructura algebraica de espacio vectorial, en el II, especifica las propiedades de la norma y en el III coloca un solo axioma: la verificación de la propiedad de Bolzano-Cauchy. Con estos axiomas, Banach consiguió demostrar muchas de las propiedades que se verificaban en el análisis clásico. A los espacios vectoriales normados que son completos se les conoce actualmente como **espacios de Banach**.

Al igual que en el caso de las sucesiones de números reales, podemos definir sucesión acotada en \mathbf{R}^n .

Definición 6. Una sucesión $\{x^m\}$, en $x^m \in \mathbf{R}^n$ se dice **acotada** (para la norma $\|\cdot\|$) si existe un número $K > 0$ tal que $\|x^m\| \leq K$ para todo $m \geq 1$.

Como consecuencia inmediata de la definición de normas equivalentes, se tiene que la propiedad de acotación de sucesiones también es independiente de la selección de la norma en \mathbf{R}^n . Además podemos demostrar fácilmente la afirmación siguiente:

Toda sucesión convergente es acotada.

Sabemos que el recíproco de esta afirmación no es cierto. No obstante, para sucesiones de números reales, se cumple la propiedad de Bolzano-Weierstrass: *De toda sucesión acotada puede extraerse una subsucesión convergente*. Naturalmente, podemos preguntarnos ¿será esta propiedad cierta para sucesiones en \mathbf{R}^n ?

Recordemos que $\{x^{k_m}\}$ es una **subsucesión** de una sucesión $\{x^m\}$, si $\{k_m\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Analicemos la forma en que podríamos extender la propiedad de Bolzano-Weierstrass a una sucesión en \mathbf{R}^n . Consideremos el caso particular de una sucesión acotada $\{x^m\}$ en \mathbf{R}^2 , $x^m = (x_1^m, x_2^m)$. Entonces las sucesiones componentes (de números reales) $\{x_i^m\}$ $i = 1, 2$ serán acotadas y, a cada una de ellas, podemos aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass en \mathbf{R} . Lo aplicamos primero a la sucesión $\{x_1^m\}$ y obtenemos una subsucesión $\{x_1^{k_m}\}$ convergente de $\{x_1^m\}$. Consideremos, entonces para la segunda componente solo los índices k_m , es decir, la sucesión $\{x_2^{k_m}\}$, que es una subsucesión de $\{x_2^m\}$ y, por tanto, será acotada. Aplicando el Teorema de Bolzano-Weierstrass nuevamente, ahora a la sucesión de números reales $\{x_2^{k_m}\}$, obtenemos una subsucesión $\{x_2^{p_m}\}$ convergente (aquí $\{p_m\}$ es una subsucesión creciente de $\{k_m\}$). Finalmente, la sucesión de \mathbf{R}^2 $\{x^{p_m}\} = \{(x_1^{p_m}, x_2^{p_m})\}$ será una subsucesión convergente de $\{x^m\}$. De forma semejante, podemos proceder con una sucesión acotada en \mathbf{R}^2 con n arbitrario.

La demostración detallada del teorema siguiente la dejamos como ejercicio instructivo al lector.

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada en \mathbf{R}^n contiene alguna subsucesión convergente.

El método de demostración de este teorema depende esencialmente de que el espacio \mathbf{R}^n es de dimensión finita, podemos entonces preguntarnos, en un espacio más general, por ejemplo un espacio normado de dimensión infinita, ¿será también cierta la propiedad de Bolzano-Weierstrass? En el ejemplo siguiente introducimos una de las extensiones más inmediatas del espacio \mathbf{R}^n .

Ejemplo 8. Sea E el conjunto de las sucesiones de números reales:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

con solo una cantidad finita, pero arbitraria, de términos no nulos. Las propiedades elementales de las sucesiones numéricas nos permiten verificar que E es un espacio vectorial. Definamos:

$$\|x\| = \sum |x_k|,$$

donde la suma anterior es finita y se realiza para todos los elementos no nulos de x . Se comprueba fácilmente que $\|x\|$ constituye una norma en este espacio.

Sean los elementos de E definidos por $e^m = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ donde el 1 aparece en el lugar $m^{\text{ésimo}}$. Es claro que $\|e^m\| = 1$, esto es, la sucesión $\{e^m\}$ es acotada.

Por otra parte $\|e^m - e^k\| = 2$, para cualesquiera sean los valores de m y k . Esto significa que ninguna subsucesión de la sucesión $\{e^m\}$ puede satisfacer la condición de Bolzano-Cauchy y por tanto tampoco puede ser convergente.

Así que en el espacio normado E no se verifica la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Ejercicios propuestos

1. Sean $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|''$ dos normas equivalentes en \mathbf{R}^n (un espacio vectorial E). Demuestra que:
 - a) $x^m \rightarrow l$ en la norma $\|\cdot\|'$ si y solo si $x^m \rightarrow l$ en la norma $\|\cdot\|''$.
 - b) $\{x^m\}$ es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|'$ si y solo si $\{x^m\}$ es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|''$.
 - c) \mathbf{R}^n es un espacio métrico completo.

- d) Una sucesión es acotada en la norma $\|\cdot\|'$ si y solo si es acotada en la norma $\|\cdot\|''$.
2. a) Prueba que el límite de una sucesión de \mathbf{R}^n (un espacio métrico) convergente es único.
- b) Si $\{x^m\}$ y $\{y^m\}$ son sucesiones de \mathbf{R}^n (un espacio normado) y $x^m \rightarrow l$, $y^m \rightarrow s$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, demuestra que se cumple $\alpha \cdot x^m + \beta \cdot y^m \rightarrow \alpha \cdot l + \beta \cdot s$.
3. Demuestra que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge al número complejo $l \neq 0$ si y solo si $|z_n| \rightarrow |l|$ y $\arg(z_n) \rightarrow \arg(l)$.
4. Demuestra que existe una sucesión de números naturales $\{k_n\}$ tal que la sucesión $\{(\sin k_n, \cos k_n)\}$ es convergente.
5. Sea $\{x^m\}$ una sucesión de \mathbf{R}^3 tal que $\|x^{m+1} - x^m\| \leq \frac{1}{m^2 + m}$, para todo $m \geq 1$. Demuestra que $\{x^m\}$ es convergente. ¿Puedes generalizar este resultado?
6. Sea $\{x^m\}$ una sucesión en \mathbf{R}^n (un espacio normado) que satisface la condición de Cauchy y definamos $\delta_n = \sup_{m \geq n} \|x^m - x^n\|$. Prueba que $\lim \delta_n = 0$. ¿Será cierto el recíproco?
7. Sea el espacio métrico (E, d) y dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de este espacio tales que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$. Prueba que $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.
8. Consideremos a \mathbf{R}^2 con la métrica del ascensor (ejercicio 7 de I.1). Encuentra dos sucesiones $\{x^m\}$, $\{y^m\}$ de este espacio métrico que sean convergentes, pero tales que:

$$\lim \left(x^m + y^m \right) \neq \lim x^m + \lim y^m.$$

I.3. BOLAS, ABIERTOS Y CERRADOS EN \mathbf{R}^n

En la década del 70 del siglo XIX, en un trabajo titulado *Teoremas generales sobre los espacios*, Richard Dedekind (1831-1916) se propuso construir una teoría de los espacios \mathbf{R}^n “sin apelar a la intuición geométrica”. Para ello introduce el

concepto que actualmente se conoce como “conjunto abierto”, aunque él no le dio ese nombre:

Un conjunto A es abierto si y solo si para todo $a \in A$, se tiene una magnitud r tal que todos los puntos cuya distancia al punto a es menor que r , pertenecen al conjunto A .

Los conjuntos abiertos desempeñan un papel esencial en el estudio de las funciones definidas sobre subconjuntos de espacios más generales, en particular en \mathbf{R}^n . Ellos nos permitirán extender la noción de “vecindad” para estos espacios más generales.

La definición dada por Dedekind es completamente moderna, sin embargo, es conveniente introducir el lenguaje actual y precisar algunos detalles formales.

Para todo lo que sigue supondremos fija una norma $\|\cdot\|$ en \mathbf{R}^n .

Definición 1. a) Dados un punto $a \in \mathbf{R}^n$ y un número real $r > 0$, denominaremos **bola de centro a y radio r** al conjunto de todos los puntos que distan del punto a en menos de r , esto es:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

b) Un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ se dice **abierto** si para todo $a \in A$ puede encontrarse una bola de centro a y radio $r > 0$ tal que:

$$B(a, r) \subset A.$$

Ejemplo 1. a) En el caso $n = 1$, una bola con centro en a y radio r es un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$.

b) Todo intervalo abierto (a, b) en \mathbf{R} es un conjunto abierto. En efecto, si $c \in (a, b)$, podemos tomar como radio r cualquier número que sea a la vez menor que $b - c$ y que $c - a$. Entonces $(c - r, c + r) \subset (a, b)$.

Ejemplo 2. Comprobemos que cualquier bola en \mathbf{R}^n es un conjunto abierto.

Sea la bola $B(a, b)$ y un punto b cualquiera de ella, entonces $\|b - a\| < r$. Tomemos $0 < r_1 < r - \|b - a\|$ (Fig.5) y demostremos que la bola $B(b, r_1)$ está contenida en $B(a, r)$. Para ello debemos comprobar que:

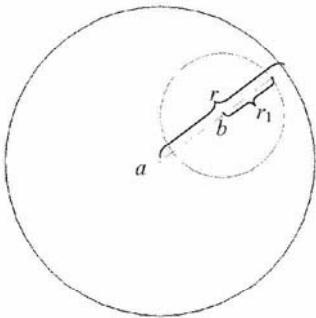


FIGURA 5.

$$x \in B(b, r_1) \Rightarrow x \in B(a, r).$$

Sea x tal que $\|x - b\| < r_1$, entonces, por la desigualdad triangular:

$$\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < r_1 + \|b - a\| < r.$$

Es interesante visualizar la forma geométrica de las bolas para algunas normas particulares en \mathbb{R}^n , con $n = 1, 2, 3$:

Ejemplos

- 3) En el espacio \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^3) con la norma euclíadiana la bola con centro a y radio r es la parte interior a una circunferencia (o esfera) con ese centro y radio.
- 4) Consideremos en \mathbb{R}^2 la norma $\|\cdot\|_\infty$. Entonces la bola $B((0,0); 1)$, con centro en $(0,0)$ y radio 1 estará dada por los puntos que satisfacen la desigualdad:

$$\max \{|x_1|, |x_2|\} < 1,$$

o de forma equivalente, el par de desigualdades:

$$|x_1| < 1, \quad |x_2| < 1.$$

Es decir, $B((0,0), 1)$ es el cuadrado con centro en el origen y lados de longitud 2, paralelos a los ejes coordenados (Fig.6).

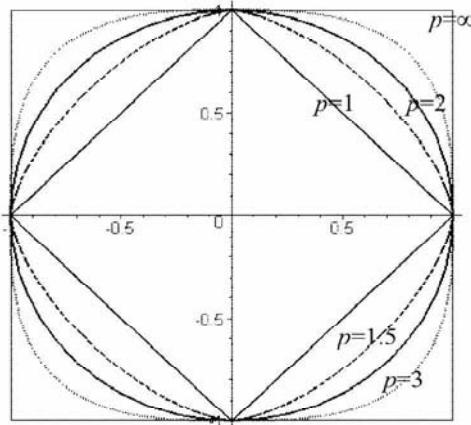


FIGURA 6.

5) En la Fig.6 mostramos las bolas con centro en el origen y radio 1 en la norma $\|\cdot\|_p$ de \mathbf{R}^2 para algunos de los valores de p .

Cuando un conjunto no es abierto, en ocasiones es útil distinguir aquellos puntos para los cuales sí se puede encontrar una bola con centro en dicho punto y contenida en el conjunto. Más precisamente,

Definición 2. Diremos que a es un **punto interior** del conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, si existe una bola $B(a,r) \subset A$.

Al conjunto de los puntos interiores de un conjunto A se le denomina **interior de A** y se denota por A° .

Observaciones. 1) La definición de conjunto abierto puede rescribirse en las formas:

A es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores

A es abierto si y solo si $A = A^\circ$.

2) Puede probarse que el conjunto A° es el mayor conjunto abierto contenido en A (ejercicio 5a).

Ejemplos

6. Todos los puntos del intervalo $(a, \infty) \subset \mathbf{R}$ son puntos interiores, por tanto es un conjunto abierto.

7. Si observamos detenidamente los razonamientos realizados en el ejemplo 2, notamos que, en esencia, hemos demostrado que todos los puntos de la bola:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

son interiores.

Este mismo razonamiento nos indica que todos los puntos que satisfacen $\|x - a\| \leq r$ son interiores del conjunto:

$$E = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| \leq r\},$$

es decir $B(a,r) \subset E^\circ$. En realidad, se tiene que $B(a,r) = E^\circ$.

Aunque la igualdad anterior es válida para todo bola de \mathbf{R}^n , probémosla para el caso particular de la norma euclidiana, $n = 2$, $a = (0,0)$.

Sea x tal que:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r, \text{ (Fig.7)}$$

con $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y el número $\delta > 0$ arbitrario. Seleccionemos un punto y de la forma $y = (x_1, x_2 + \delta/2)$. Evidentemente,

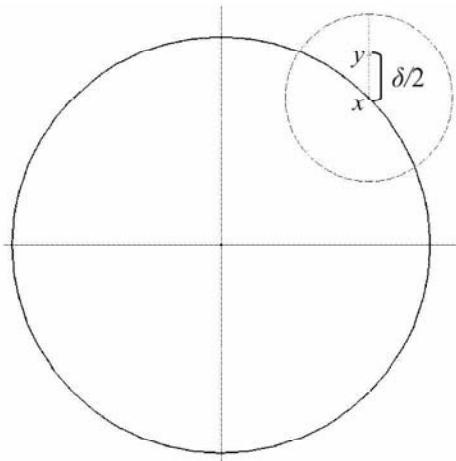


FIGURA 7.

$$\|x - y\|_2 = \delta/2 < \delta, \quad \|y\|_2 = \sqrt{x_1^2 + (x_2 + \delta/2)^2} > r.$$

Así que y está en la bola de centro en x y radio δ , pero no pertenece a E . Por tanto, no existe ninguna bola centrada en x y contenida en E . Esto demuestra que x no es punto interior de E . De forma análoga puede procederse para cualquier combinación de los signos de las componentes de x .

Observación: Hemos visto que la forma de las bolas depende de la norma considerada. Sin embargo, se tiene que:

Los conjuntos abiertos en \mathbf{R}^n son los mismos para todas las normas equivalentes.

◆ En efecto, sean $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|''$ dos normas cualesquiera en \mathbf{R}^n . Como ellas son equivalentes, existirán constantes positivas a y b tales que $a\|x\|' \leq \|x\|'' \leq b\|x\|'$, para todo x de \mathbf{R}^n . Esta doble desigualdad significa que para $r > 0$ y cada punto x_0 de \mathbf{R}^n se cumple:

$$B'(x_0, r/b) \subset B''(x_0, r) \text{ y } B''(x_0, ar) \subset B'(x_0, r).$$

Es decir, toda bola con centro en x_0 en la norma $\|\cdot\|''$ contiene una bola con el mismo centro en la norma $\|\cdot\|'$ y recíprocamente. De modo que un punto que sea interior a un conjunto en una norma también lo será en cualquier otra norma equivalente a la primera. Esto muestra que los conjuntos abiertos son los mismos para normas equivalentes.◆

Definición 3. Llamaremos **vecindad** de un punto x a cualquier conjunto abierto que contenga a x . Una vecindad de x la denotaremos por $V(x)$.

Observaciones: 1) Todo conjunto abierto es vecindad de cada uno de sus puntos.
 2) Las vecindades de un punto son las mismas para todas las normas en \mathbf{R}^n .
 3) De forma semejante al caso de las sucesiones de números reales, la definición de límite de una sucesión en \mathbf{R}^n puede reformularse utilizando el lenguaje de las bolas, o las vecindades. Proponemos al lector que demuestre la equivalencia de las afirmaciones siguientes (ejercicio 9):

- i) La sucesión $\{x^m\}$ converge a l .
- ii) Para toda bola $B(l)$, existe un número natural N tal que, si $m \geq N$, entonces $x^m \in B(l)$.
- iii) Para toda vecindad $V(l)$, existe un número natural N tal que, si $m \geq N$, entonces $x^m \in B(l)$.

Uno de las primeras nociones surgidas en el estudio de los conjuntos de puntos fue la de **punto de acumulación de un conjunto** (también se denominaba **punto límite**). Sus orígenes, al parecer están en las famosas lecciones que Karl Weierstrass impartía en la Universidad de Berlín en la segunda mitad del siglo XIX, pero aparece publicado por primera vez en un trabajo de George Cantor (1872).

Definición 4. Un punto x se dice **punto de acumulación** de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si existe una sucesión, $\{x^m\}$, $x^m \in A$ que satisface $x^m \neq x$ y $x^m \rightarrow x$, para todo m .

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A lo denotaremos por A' .

De forma análoga al caso de sucesiones y puntos de acumulación de conjuntos de números reales, pueden demostrarse las siguientes formulaciones equivalentes del concepto punto de acumulación:

Un punto $x \in A'$ si y solo si

- En toda vecindad de x hay al menos un punto del conjunto A diferente de x .
- Cualquiera vecindad de x contiene infinitos elementos de A .

En lo que sigue serán de vital importancia aquellos subconjuntos de \mathbf{R}^n cuyos puntos de acumulación permanecen dentro del conjunto.

Definición 5. Un conjunto A se dice **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación. En otras palabras, A es cerrado cuando se cumple $A' \subset A$.

Podemos dar una definición equivalente, muy útil, de conjunto cerrado utilizando solamente el concepto de límite de una sucesión.

Definición 5'. Un conjunto A es cerrado si y solo si el límite de toda sucesión de puntos de A , que sea convergente, es también un punto de A .

Probemos la equivalencia de estas dos formas de definir conjunto cerrado:

◆ Primeramente supongamos que A contiene a todos sus puntos de acumulación y sea $x^m \in A$ una sucesión tal que $\lim_m x^m = a$. Hay dos posibilidades: 1) Para todo m , $x^m \neq a$, entonces a es punto de acumulación de A y se cumplirá que $a \in A$. 2) Para algún m , $x^m = a$ y entonces es obvio que $a \in A$.

Recíprocamente, sea a un punto de acumulación de A y supongamos que toda sucesión convergente de elementos de A tiene su límite en A . Como existe una sucesión $x^m \in A$ convergente al punto a , se debe cumplir obligatoriamente que $a \in A$. Hemos demostrado que el conjunto A contiene sus puntos de acumulación.◆

Ejemplos.

8. Un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbf{R}$ es un conjunto cerrado. En efecto, una sucesión $\{x^m\}$ de elementos de este intervalo satisface $a \leq x^m \leq b$. Por las propiedades de las sucesiones de números reales, si esta sucesión tiene límite x , éste debe satisfacer las mismas desigualdades, luego debe pertenecer a $[a,b]$. Esto indica que $[a,b]$ es un conjunto cerrado.

9. Un intervalo de la forma $[a,b) \subset \mathbf{R}$ no es un conjunto cerrado, pues b es un punto de acumulación de $[a,b)$ y no pertenece al conjunto. Observemos que este conjunto tampoco es abierto.

10. Análogamente se comprueba que un intervalo de la forma $[a,\infty)$ es un conjunto cerrado.

11. Cualquier conjunto finito, por ejemplo $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset \mathbf{R}^n$, es un conjunto cerrado. Evidentemente un conjunto finito no puede tener puntos de acumulación, por tanto no puede existir un punto de acumulación de A que no le pertenezca. Luego A es cerrado.

12. El conjunto $A = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es cerrado. Para demostrarlo utilicemos la definición 5'.

◆ Sea $x^m \in A$ y $x^m \rightarrow a$ y demostremos que obligatoriamente $a \in A$. Es decir, de las relaciones $x^m \rightarrow a$, $\|x^m\| \leq 1$ debemos obtener $\|a\| \leq 1$.

Como una simple consecuencia de la desigualdad triangular, se tiene que:

$$\|x^m - a\| \leq \|x^m - a\|, \text{ para todo } m \text{ (ejercicio 3 de I.1).}$$

De donde:

$$x^m \rightarrow a \Rightarrow \|x^m\| \rightarrow \|a\|.$$

Ahora, pasando al límite en la desigualdad $\|x^m\| \leq 1$, obtenemos $\|a\| \leq 1$. Esto concluye la prueba de que A es cerrado.◆

Cuando un conjunto no es cerrado, puede ser ventajoso considerar el menor conjunto cerrado que lo contiene.

Definición 6. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, llamaremos **clausura** de A y la denotamos por \bar{A} a la unión del conjunto A con todos sus puntos de acumulación. Esto es:

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Observaciones: 1) De las definiciones 5 y 6 se infiere que:

$$A \text{ es cerrado si y solo si } A = \bar{A}.$$

2) Una consecuencia de la definición 5' es que \bar{A} es el conjunto constituido por los límites de todas las sucesiones formadas con elementos del conjunto A .

Ejemplos

13) La clausura de cualquier intervalo finito de la recta es el intervalo cerrado correspondiente: $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{[a,b]} = \overline{[a,b]} = [a,b]$.

14) De forma semejante a como se trabajó en el ejemplo 12 puede probarse que la clausura de la bola $B(a,r) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| \leq r\}$ es la **bola cerrada**

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| \leq r\}.$$

El ejemplo 9 muestra que pueden haber conjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados, esto indica que, en su significado matemático, estos conceptos no son uno exactamente el opuesto del otro. No obstante existe una relación muy útil entre ellos:

Un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ es cerrado si y solo si su complemento A^c es abierto.

◆ Supongamos que A es cerrado. Si A^c no fuera abierto, entonces existiría un $a \in A^c$ que no es punto interior de este conjunto. Esto significa que toda bola $B(a)$ con centro en a no puede estar incluida en A^c . Por tanto, hay algún elemento de A que pertenece a $B(a)$, luego a debe ser punto de acumulación de A . Como supusimos que A es cerrado a debería ser elemento de A y esto es una contradicción.

Recíprocamente, asumamos ahora que A^c es abierto y probemos que A tiene que ser cerrado. Dado un $a \in A^c$ existirá una bola $B(a) \subset A^c$, luego esta bola no puede contener puntos de A , es decir, a no puede ser punto de acumulación de A . Hemos demostrado que los puntos que no pertenecen a A no pueden ser sus puntos de acumulación y por tanto A es cerrado.◆

Otras propiedades muy importantes de los conjuntos abiertos y cerrados son las siguientes:

a) Sean A_1, A_2, \dots, A_p , conjuntos abiertos de \mathbf{R}^n , entonces el conjunto $\bigcap_{i=1}^p A_i$ es abierto.

b) Sean A_1, A_2, \dots, A_p , conjuntos cerrados de \mathbf{R}^n , entonces el conjunto $\bigcup_{i=1}^p A_i$ es cerrado.

c) Sea $\{A_k\}_{k \in K}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de \mathbf{R}^n , entonces el conjunto $\bigcup_{k \in K} A_k$ es abierto.

d) Sea $\{A_k\}_{k \in K}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados de \mathbf{R}^n , entonces el conjunto $\bigcap_{k \in K} A_k$ es cerrado.

◆ a) Sea $x \in \bigcap_{i=1}^p A_i$, entonces $x \in A_i$, para todo $i = 1, \dots, p$. Cada conjunto es abierto, luego, para cada i , existe una bola $B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$. Escojamos $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$, entonces para todo $i = 1, \dots, p$ se cumple:

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset A_i,$$

por tanto $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^p A_i$ y esto demuestra que el conjunto intersección es abierto.

c) Si $x \in \bigcup_{k \in K} A_k$, existirá algún $k_0 \in K$ tal que $x \in A_{k_0}$. Como este último conjunto es abierto, se encuentra una bola $B(x) \subset A_{k_0}$ y, por tanto, $B(x) \subset \bigcup_{k \in K} A_k$. Esto demuestra que la unión es abierta.

Las afirmaciones b) y d) son consecuencias inmediatas de a) y c) y de las conocidas relaciones entre la unión e intersección de conjuntos:

$$\left(\bigcup A_k\right)^c = \left(\bigcap A_k^c\right)$$

$$\left(\bigcap A_k\right)^c = \left(\bigcup A_k^c\right). \blacklozenge$$

Puede mostrarse con ejemplos sencillos que las propiedades a) y b) no son válidas para familias infinitas de conjuntos:

Ejemplos

15. La familia de conjuntos abiertos en \mathbf{R} $A_i = \left(0, 1 + \frac{1}{i}\right)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, tiene por intersección al conjunto $(0, 1]$ que no es abierto (Fig. 8a).

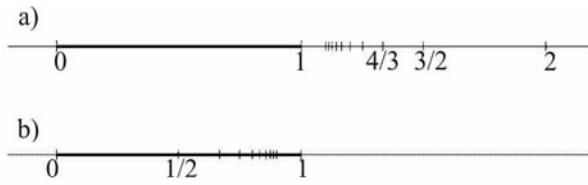


FIGURA 8.

16. La familia de conjuntos cerrados en \mathbf{R} :

$$A_i = \left[0, 1 - \frac{1}{i} \right], \quad i = 2, 3, \dots$$

tiene por unión al conjunto $[0,1)$ que no es cerrado (Fig.8b).

Las denominaciones que introduciremos a continuación, serán de utilidad en numerosas ocasiones.

Cuando un punto es interior al conjunto A^c se dice que es **exterior** al conjunto A . Es claro que habrá puntos del espacio que no son ni interiores ni exteriores a un conjunto A , estos puntos se denominan **puntos fronteras** del conjunto A . Un punto x es frontera de A si y solo si toda vecindad de x contiene tanto puntos de A como puntos de A^c . Al conjunto de todos los puntos fronteras de un conjunto A lo llamaremos **frontera** de A y lo denotaremos $\text{Fr } A$.

Ejemplo 17. El conjunto frontera del intervalo (a,b) (o también de $[a,b]$) es el conjunto $\{a,b\}$, formado solo por los puntos a y b .

Ejemplo 18. Puede probarse fácilmente que cualquier punto que satisfaga:

$$0 < x^2 + y^2 < 1$$

es interior al conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Por tanto:

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

Como:

$$A^c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0,0)\},$$

entonces es claro que los puntos exteriores de A son los del conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

Luego la frontera de A será:

$$\text{Fr } A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Ejemplo 19. Consideremos el conjunto :

$$A = \{(x, y) \in Q^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

en el espacio \mathbf{R}^2 y hallemos A' , \bar{A} , A° , $\text{Fr}(A)$.

Teniendo en cuenta la propiedad de densidad de Q en \mathbf{R} , en toda vecindad de cualquier punto del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$, habrán tantos puntos con coordenadas racionales, esto es, de A , como puntos con coordenadas irracionales, es decir que no pertenecen a A . Entonces podemos ver que:

$$A' = \bar{A} = \text{Fr}(A) = [-1, 1] \times [-1, 1] \quad y \quad A^\circ = \emptyset.$$

Por tanto, A no es cerrado ni tampoco abierto.

Todos los conceptos y propiedades introducidos anteriormente son válidos no solamente en el espacio \mathbf{R}^n , sino en cualquier espacio métrico. Comentemos brevemente algunas de estas extensiones.

Una bola con centro en a y radio r en un espacio métrico arbitrario (X, d) se define como:

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Las definiciones de conjunto abierto y cerrado, de vecindad, punto de acumulación, etcétera, dadas anteriormente se apoyan exclusivamente en el concepto de bola, todas ellas pueden ser extendidas a un espacio métrico arbitrario. Por otra parte, las demostraciones de las propiedades de los conjuntos abiertos y la relación entre punto de acumulación y sucesiones son válidas, sin cambiar palabra, para el caso general de un espacio métrico. No obstante, en un espacio métrico general, debemos ser muy cuidadosos cuando apelamos a la intuición.

A modo de advertencia, analicemos algunos de los conceptos estudiados cuando consideramos un subespacio métrico E de un espacio X con una métrica d .

Una bola de centro en $a \in E$ y de radio r será el conjunto:

$$B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) < r\},$$

es decir, la intersección de la bola en el espacio total X con el conjunto E .

De forma análoga puede verse que los abiertos y cerrados en el subespacio métrico E son las intersecciones de los abiertos y cerrados de X y el conjunto E .

El comentario anterior nos permite dar ejemplos donde las bolas en un espacio métrico pueden tener aspectos sumamente “extraños”.

Ejemplos

20) Consideremos al conjunto \mathbb{Q} de los números racionales como subespacio métrico de \mathbf{R} . Entonces la bola de centro en 0 y radio 1 será el conjunto de los racionales del intervalo $(-1, 1)$.

21) Sea el conjunto:

$$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) : (x - 3)^2 + y^2 \leq 1\},$$

considerado como subespacio métrico de \mathbf{R}^n con la distancia euclíadiana. La bola con centro en el origen y radio 2 en este espacio métrico coincidirá con el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. La bola de centro en el origen y radio 3 contendrá los puntos tales que $x^2 + y^2 \leq 1$ y aquellos puntos del círculo $(x - 3)^2 + y^2 \leq 1$ que distan en menos que 3 del origen. Sugerimos al lector que haga un dibujo, para que perciba mejor la forma inusual de esta bola. En particular esto significa que el conjunto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es abierto. ¡Pero este conjunto es también cerrado!

Ejercicios propuestos

1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0, 0 < x < 1\}$. ¿Es A un conjunto abierto en \mathbf{R}^2 ? ¿Es cerrado? Halla \bar{A} y A° .
2. Sean $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy < 1\}$. Demuestra que A es cerrado y B es abierto. Halla \bar{A} , A° , \bar{B} y B° .
3. Sea $A \subset \mathbf{R}$ abierto (resp. cerrado) y B definido por:

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in A\}.$$

Prueba que B es un abierto (resp. cerrado) de \mathbf{R}^2 .

4. Si $A \subset B$ ¿serán $\overline{A} \subset \overline{B}$, $A^\circ \subset B^\circ$ y $\text{Fr}(A) \subset \text{Fr}(B)$?
5. Prueba que:
 - a) Si B es un conjunto abierto contenido en A , entonces $B \subset A^\circ$.
 - b) Si B es un conjunto cerrado que contiene a A , entonces $B \supseteq \overline{A}$.
6. Construye un subconjunto de \mathbf{R} con exactamente tres puntos de acumulación y otro con un conjunto numerable de puntos de acumulación.
7. Halla los puntos de acumulación y la clausura de los conjuntos \mathbf{R}^2 en siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \left\{ (m,n) : m, n \in \mathbb{Q} \right\} & \text{b)} \quad \left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Q}, n \neq 0 \right\} \\ \text{c)} \quad \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Q}, n \neq 0, m \neq 0 \right\} & \text{d)} \quad \left\{ (x, y) : x, y \in \mathbf{R}, x > y^2 \right\} \\ \text{e)} \quad \left\{ (x, y) : x, y \in \mathbf{R}, (x^2 + 2y^2)(2x^2 + y^2 - 1) \geq 0 \right\} \end{array}$$

8. Analiza si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad (A \cup B)' = A' \cup B' & \text{b)} \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B} & \text{c)} \quad (A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \\ \text{d)} \quad (A \cap B)' = A' \cap B' & \text{e)} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B} & \text{f)} \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \\ \text{g)} \quad \overline{A} \setminus A = \text{Fr } A & \text{h)} \quad \text{Fr } A = \text{Fr } A^\circ & \text{i)} \quad \text{Fr } A = \text{Fr } \overline{A} \end{array}$$

En los casos donde sean falsas, determina si alguna de las inclusiones son correctas.

9. Prueba que son equivalentes las afirmaciones siguientes:
 - a) La sucesión $\{x^m\}$ converge a l .
 - b) Para toda bola $B(l)$, existe un número natural N tal que, si $m \geq N$, entonces $x^m \in B(l)$.
 - c) Para toda vecindad $V(l)$, existe un número natural N tal que, si $m \geq N$, entonces $x^m \in V(l)$.

10. Analiza la forma que tienen las bolas en los espacios métricos determinados en \mathbf{R}^2 por las métricas de correos y del ascensor (ejercicios 6 y 7 de I.1).

Ejercicios complementarios

1. Demuestra la siguiente versión del Teorema de Bolzano-Weierstrass: Todo subconjunto de \mathbf{R}^n , infinito y acotado, tiene al menos un punto de acumulación.

2. En el conjunto $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ definamos:

$d(x, y)$ longitud del menor arco de circunferencia que une a los puntos x e y .

Prueba que d es una distancia en C .

3. Demuestra que para todo $p \geq 1$ la expresión:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

determina una norma en \mathbf{R}^n .

4. Demuestra que la aplicación $N : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$N(x, y) = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

es una norma en \mathbf{R}^2 si y solo si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.

5. Para un espacio métrico discreto (X, d) analiza:

a) ¿Cómo son las bolas?

b) ¿Cuáles son los conjuntos abiertos y cerrados?

c) ¿Cuáles sucesiones son convergentes y cuáles son fundamentales? ¿Es el espacio completo?

6. Prueba que el espacio $\mathbf{C}[a, b]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio métrico completo pero con $\|\cdot\|_1$ no lo es (ver ejemplo 4).

7. Sea una métrica d en el conjunto X . Demuestra que:

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

también es una métrica en X .

- 8 a) Sea d una distancia en un espacio vectorial E . Prueba que en E existe una norma tal que se verifica $d(x, y) = \|y - x\|$ si y solo si d satisface:

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \text{y} \quad d(x+z, y+z) = d(x, y),$$

para todo $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

- b) Analiza si las métricas de correos y del ascensor (ejercicios 6 y 7 de I.1) pueden ser obtenidas a partir de una norma en \mathbf{R}^2 .

9. Consideremos:

$$E = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ converge} \right\} \quad \text{y} \quad \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|. .$$

Demuestra que:

- a) E es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en E .
- b) La sucesión $\{e^m\}_{n=1}^{\infty}$, donde $e^m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (el 1 aparece solo en el $m^{\text{ésimo}}$ lugar), es acotada, pero no tiene ninguna subsucesión convergente.
- c) ¿Es E un espacio métrico completo con la distancia inducida por dicha norma?

10.(Fréchet) Sea E^ω el conjunto de las sucesiones de números reales, es decir,

$$E^\omega = \left\{ A : A = (a_1, \dots, a_k, \dots), a_k \in \mathbf{R} \right\}$$

y definamos:

$$d(A, B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Prueba que d es una distancia en E^ω y que una sucesión $\{A^m\}$, donde $A^m = (a_1^m, \dots, a_k^m, \dots)$ es convergente a $A = (a_1, \dots, a_k, \dots)$, si y solo si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_k^m = a_k, \quad \text{para todo } k.$$

CAPÍTULO II

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

INTRODUCCIÓN

Las ideas intuitivas relacionadas con la noción de límite pueden encontrarse en la matemática desde épocas bastante remotas. No obstante, la necesidad de dar una definición matemática precisa va a surgir solo a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, cuando se hacen sentir las reiteradas críticas a los fundamentos del cálculo, por parte tanto de los filósofos como de los mismos matemáticos. La respuesta de los matemáticos siguió dos direcciones principales: aquellos que intentaron dar una definición de límite y los que pretendieron edificar el cálculo diferencial e integral evadiendo totalmente esta definición.

Entre los primeros podemos mencionar a Jean Le Rond D'Alembert quien expone sus ideas en el artículo sobre **límite** de la famosa *Encyclopédie francesa*: *Una magnitud se dice que es límite de otra, cuando la segunda puede aproximarse a la primera en una cantidad dada, no importa cuán pequeña sea, si bien la primera magnitud no puede exceder a la magnitud que ella aproxima.*

El exponente más representativo de la segunda dirección es Joseph Louis Lagrange, quien utiliza los desarrollos en series de potencias de las funciones para introducir la noción de derivada. El texto de Lagrange (1736-1813) lleva un subtítulo que manifiesta claramente el objetivo de su autor: *Teoría de las funciones analíticas, conteniendo los principios del cálculo diferencial y librada de toda consideración de infinitamente pequeños, o evanescentes, de límites o fluxiones, y reducida al análisis algebraico de las cantidades finitas* (1797).

Una definición más precisa de qué significa **límite** de una variable y la noción de continuidad de una función aparece alrededor de la década del 20 del siglo XIX y sus máximos exponentes son Bernard Bolzano y Augustin Louis Cauchy. Ambos darán definiciones muy parecidas para la continuidad de funciones de una variable. Bolzano publica la suya en un trabajo con un título sumamente explicativo: *Una demostración puramente analítica del teorema que entre cualesquiera dos valores los cuales dan resultados de signo opuesto, hay al menos una raíz real de la ecuación* (1817). Para Bolzano una función $f(x)$ es continua si *la diferencia $f(x + \omega) - f(x)$ puede ser hecha menor que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeño como se deseé*. La definición de continuidad de Cauchy aparecerá en su famoso *Curso de análisis* (1821), escrito sobre la base de las lecciones que brindaba en la Escuela Politécnica de París.

La definición de límite de una variable podemos encontrarla enunciada claramente en el texto de Cauchy, *Resumen de las lecciones de Cálculo Diferencial e Integral* (1823), también escrito para servir de texto en la Escuela Politécnica. Fundamentalmente Cauchy usa esta definición para precisar con toda claridad las nociones de derivada e integral de funciones de una variable real.

Para una función f de varias variables Cauchy “demuestra” que si ella es continua en cada una de las variables, entonces el incremento de la función $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ puede hacerse menor que cualquier cantidad prefijada, con tal que lo sean los incrementos Δx y Δy . Cauchy escribe:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

y a continuación simplemente comenta que cada una de las cantidades entre corchetes será pequeña cuando los sean los incrementos Δx y Δy .

Indudablemente este “error” de Cauchy tiene su origen en la ausencia de una concepción clara de qué significan expresiones como “los puntos $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y (x, y) están próximos”. Una aclaración completa de las nociones de límite y continuidad para funciones de varias variables, necesitó de cierto grado de maduración de las ideas métricas en los espacios \mathbf{R}^n . Puede incluso notarse que en los textos de Análisis matemático va a aparecer el estudio sistemático del límite y la continuidad de funciones de varias variables solo en la última década del siglo XIX.

En este capítulo estudiaremos el límite y la continuidad de las funciones cuyos dominios y conjuntos de llegadas son subconjuntos de \mathbf{R}^n (con dimensiones posiblemente diferentes). Y, al igual que en el capítulo anterior, incursionaremos brevemente en la generalización de estas nociones para funciones definidas sobre espacios métricos generales. Dedicaremos especial esfuerzo a la extensión de las propiedades básicas estudiadas para las funciones continuas en intervalos cerrados de la recta real. Para ello nos veremos en la necesidad de introducir dos conceptos clave en el estudio de los conjuntos de puntos en cualquier espacio métrico: la noción de compacidad y la de conexidad por arcos.

II.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Nuestro objeto de estudio serán las funciones f definidas en algún subconjunto del espacio \mathbf{R}^n y que toma valores en el espacio \mathbf{R}^m , donde m y n (≥ 1) pueden ser iguales o no.

Para el estudio del caso particular $m = n = 1$ resultó de gran ayuda la representación geométrica de estas funciones mediante curvas en el plano. Las funciones de varias variables completamente generales carecen de una representación semejante, no obstante, en algunos casos concretos y, especialmente, para las funciones reales de dos variables, podremos acudir a la visualización geométrica.

Cuando $n = 2$ y $m = 1$, como es usual en la Geometría analítica, podemos representar en el espacio \mathbf{R}^3 la función mediante un gráfico, es decir, el conjunto de los puntos de la forma:

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\},$$

donde D es el dominio de f .

Ejemplos

1. La función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ puede ser representada como el paraboloide $z = x^2 + y^2$, reservando el eje Z para los valores de la función (Fig.1a).

2. La función $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ está definida en el plano, excepto el origen y su gráfico, se muestra en Fig.1b).

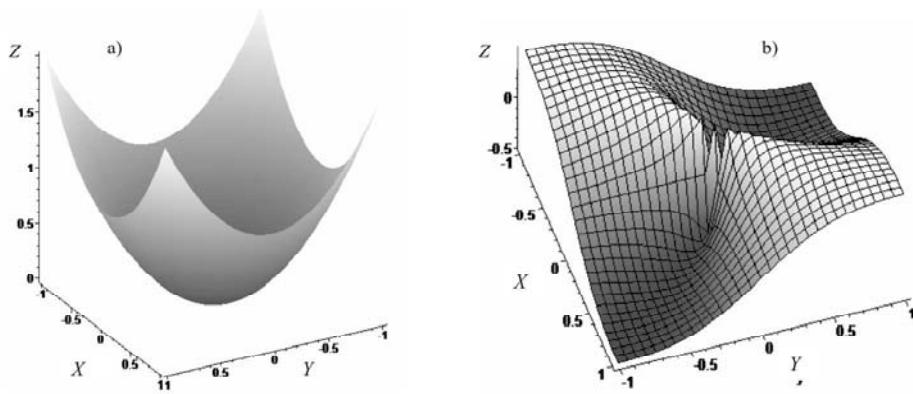


FIGURA 1.

Otra manera de visualizar el comportamiento de las funciones reales de dos variables es la representación de lo que se denominan *curvas de nivel*. Para una función $z = f(x,y)$ podemos crear un “mapa topográfico”, es decir, trazar las líneas que corresponden a aquellos puntos (x,y) para los cuales $f(x,y)$ toma el mismo valor. Más precisamente, se trata de considerar los conjuntos de puntos de la forma $\{(x,y): f(x,y) = c\}$, donde c es cierta constante. A este tipo de conjuntos los llamaremos **curvas de nivel** de la función f .

Ejemplo 3. Evidentemente, las curvas de nivel de la función del ejemplo 1 están representadas por las circunferencias:

$$x^2 + y^2 = c.$$

Ejemplo 4. Encontremos las curvas de nivel de la función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Debemos hallar el conjunto de los puntos que satisface la ecuación:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = c$$

para un valor de c fijo. La igualdad anterior conduce a la ecuación:

$$cy^2 - xy + cx^2 = 0.$$

Resolviéndola como una ecuación de segundo grado en y , podemos escribir:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}}{2c} x, \quad (c \neq 0)$$

Para $c = 0$, se obtienen los ejes coordenados.

Así que, en este caso, las curvas de nivel son una familia de rectas que “pasan por el origen” ((0,0) no pertenece al dominio de la función). En la Fig. 2a) se muestran estas curvas de nivel en el plano, mientras que en la Fig. 2b) aparecen las curvas de nivel situadas sobre la superficie, esto es, en el plano $z = c$ correspondiente a cada una. Cuando $|c| > 1/2$ el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ es vacío.

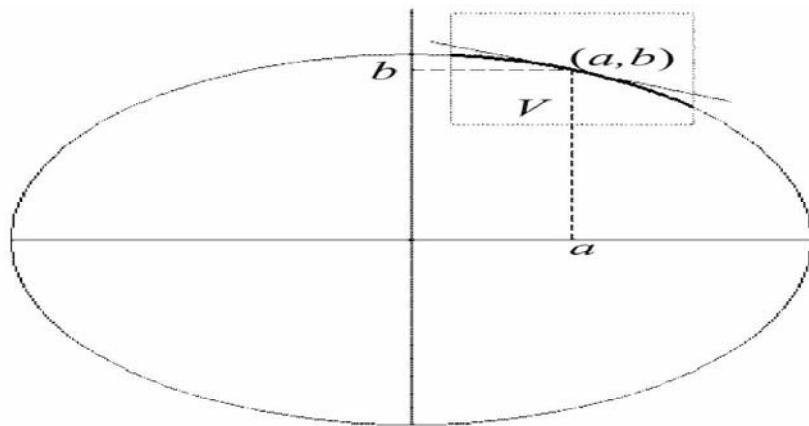


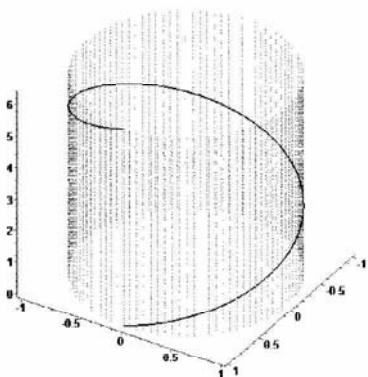
FIGURA 2.

También es posible dar interpretaciones geométricas para las funciones definidas en subconjuntos de \mathbf{R} con valores en \mathbf{R}^m cuando $m = 2$ o 3 . En estos casos, lo que representamos es solamente el conjunto imagen y, para los casos más sencillos, obtendremos respectivamente una curva en \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 . Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5. La función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $f(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$, puede ser representada por todos aquellos puntos del plano que son imágenes por f de puntos del intervalo $[0, 2\pi]$. En este caso dicho conjunto imagen coincide con los puntos de la circunferencia de radio r y centro en el punto (a, b) .

Ejemplo 6. Consideremos la función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Ahora el conjunto $f([0, 2\pi])$ es una curva en \mathbf{R}^3 , denominada **hélice circular**.

Observemos que las coordenadas x e y siempre estarán situadas sobre la circunferencia de radio uno y centro en el origen, sin embargo el valor de la coordenada z se incrementará continuamente con la variación de t . Esto significa que la curva se “enrolla” en un cilindro recto con base en la circunferencia antes mencionada (Fig.3).



Hay otros valores particulares de m y n que también pueden ser interpretados geométricamente, aunque no de una forma tan sencilla como las anteriores y las consideraremos más adelante.

FIGURA 3.

Ejercicios propuestos

1. Para las expresiones siguientes:

$$\text{i) } f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}, \quad \text{ii) } f(x, y) = \arcsen \sqrt{\frac{x}{y}},$$

$$\text{iii) } f(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 4)}.$$

- a) Halla el máximo dominio D donde definen una función real.
 - b) Determina los puntos interiores y de acumulación de D . Indica si D es cerrado o abierto.
2. Halla las curvas de nivel para las funciones dadas en i) y ii) del ejercicio anterior.
3. Representa geométricamente la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$\text{a) } f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{b) } f(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{c) } f(x, y) = e^x.$$

4. Representa geométricamente la función $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ (o \mathbf{R}^3) dada por:
- $f(t) = (a \cosh t, b \operatorname{senh} t)$, $(a, b > 0)$, donde $I = [0, \infty)$,
 - $f(t) = (t^2, t^3)$, $I = [0, 1]$,
 - $f(t) = (t^2 \cos t, t^2 \operatorname{sen} t, t^2)$, $I = [0, 2\pi]$.

II.2. LÍMITE DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En el epígrafe anterior definimos el límite de sucesiones de elementos de \mathbf{R}^n y consideramos los conceptos de bola y vecindad de un punto, esto nos permite introducir el concepto de límite de una función entre subconjuntos de \mathbf{R}^n de forma semejante a como fue estudiado para funciones de una variable.

Definición 1. Sea una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ y un punto a de acumulación de D . Diremos que $l \in \mathbf{R}^p$ es **límite de f en el punto a** si se verifica que:

Para toda sucesión $\{x^m\}$, $x^m \in D$, $x^m \rightarrow a$, $x^m \neq a$, se cumple $f(x^m) \rightarrow l$.

Utilizaremos para el límite la misma notación que en el caso de funciones de una variable:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l .$$

Observaciones

- 1) Es necesario exigir que a sea punto de acumulación de D para dar sentido a la definición anterior. En caso contrario no habría ninguna sucesión $\{x^m\}$ que satisficiera simultáneamente las condiciones $x^m \in D$, $x^m \rightarrow a$ y $x^m \neq a$.

En lo que sigue convendremos que, siempre que nos refiramos al límite de una función en un punto, sobreentenderemos que ese punto es de acumulación del dominio de la función.

- 2) La definición de límite de una función depende exclusivamente del límite de sucesiones en los espacios de partida y de llegada. Como el límite de sucesiones es independiente de la norma escogida en los espacios \mathbf{R}^n y \mathbf{R}^p , podemos concluir que:

El límite de funciones no depende de las normas escogidas, tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

La definición de límite para funciones de varias variables es totalmente análoga al caso de funciones de una variable real y es claro que, la existencia del mismo dependerá estrechamente del dominio de la función. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

1. Sea $f(x, y) = xy^3 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 5x - 1$ definida en \mathbf{R}^2 y analicemos su límite en un punto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Para aplicar la definición, tomemos una sucesión arbitraria $(x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$, $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$, $(x_n, y_n) \neq (a, b)$ y calculemos:

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \left[x_n y_n^3 - 3\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - 5x_n + 1 \right] = ab^3 - 3\sqrt{a^2 + b^2} + 5a - 1.$$

La última igualdad es una consecuencia de las propiedades conocidas para las sucesiones reales.

2. Consideremos la función $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ (ver Fig. 1b) tal que:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

y analicemos su límite en el punto $(0,0)$.

Sea (x_m, y_m) tal que $(x_m, y_m) \neq (0,0)$ y $(x_m, y_m) \rightarrow (0,0)$, la sucesión de las imágenes será:

$$f(x_m, y_m) = \frac{x_m y_m}{x_m^2 + y_m^2}.$$

Solo sabemos que $x_m \rightarrow 0$ y $y_m \rightarrow 0$ por lo que, al tratar de calcular el límite de la sucesión de números reales $\left\{ \frac{x_m y_m}{x_m^2 + y_m^2} \right\}$, obtenemos una indeterminación

del tipo $\frac{0}{0}$. Veamos qué ocurre en algunos casos particulares:

Para $(x_m, y_m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right)$, se tiene $f(x_m, y_m) = \frac{1}{2}$ que tiene límite $1/2$. Por tanto, si la función tiene límite en $(0,0)$, éste obligatoriamente deberá valer $1/2$.

Sea ahora la sucesión $(x_m, y_m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right)$. En este caso $f(x_m, y_m) = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5}$.

De modo que podemos concluir que el límite de la función en el punto $(0,0)$ no existe.

3. Consideremos la función f_1 dada por la fórmula (1), pero restringida su definición al conjunto $D_1 = \{(x, y) : y = x \neq 0\}$. En este caso $f_1(x, y) = \frac{1}{2}$ en todo su dominio y se obtiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = \frac{1}{2}.$$

Análogamente podemos considerar la función f_2 dada por la expresión (1), con dominio de definición el conjunto $D_2 = \{(x, y) : y = 2x \neq 0\}$. Para ella podemos afirmar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = \frac{2}{5}.$$

Observaciones

1) Los ejemplos anteriores ponen en evidencia que la existencia del límite de una función en un punto depende no solo de la forma de la correspondencia que ella define, sino también del dominio donde se considere definida. Sin embargo, para el resto de este libro es cómodo establecer el convenio siguiente: siempre que no se diga lo contrario, *el dominio de una función dada por una fórmula será el subconjunto máximo posible de \mathbf{R}^n donde esta fórmula produce valores reales*.

2) El razonamiento anterior nos permite, en general, justificar la afirmación siguiente:

Si los límites, en un punto dado, de las restricciones de una función sobre dos subconjuntos del dominio son distintos, entonces el límite de la función en ese punto no existe.

Esta afirmación es útil en la práctica y para facilitar su uso, en ocasiones, resulta cómoda la notación:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in G}} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ G}} f(x) = l$$

para indicar que l es el límite de la función f , restringiendo su dominio a valores que pertenecen al conjunto G . Más precisamente, la igualdad anterior expresa que las sucesiones $\{x^m\}$ consideradas en la definición 1 deben tomarse pertenecientes al conjunto intersección de G con el dominio D de f .

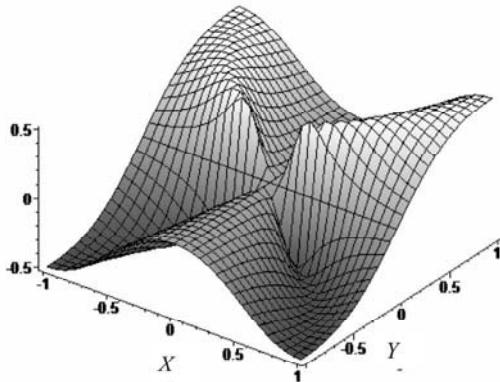


FIGURA 4.

4. Sea la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ (Fig. 4)}$$

definida en el plano excepto el origen. Analicemos la existencia de su límite en $(0,0)$.

Evidentemente, para todo m real:

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \rightarrow 0$$

Así que el límite, cuando la función se restringe a una recta por el origen es cero. Es decir:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in G}} f(x, y) = 0,$$

donde $G = \{(x, y) : y = mx \neq 0\}$.

Por otra parte, si consideramos la función restringida al conjunto $G' = \{(x, y) : y = x^2\}$ se tiene:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in G'}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2}.$$

Luego el límite en el punto $(0,0)$ no existe.

5. Calculemos, si existe, el límite siguiente: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

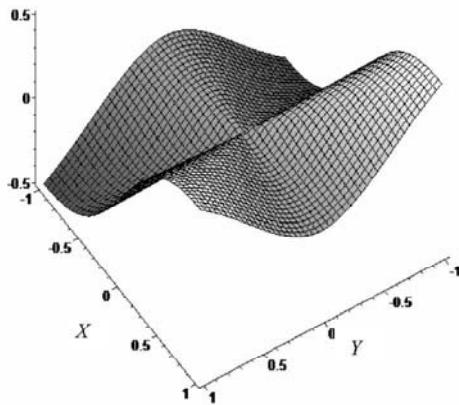


FIGURA 5.

El dominio máximo de la función (Fig.5) es $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Sea $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ y $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$, entonces

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} y_n.$$

Evidentemente:

$$0 \leq \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1,$$

luego la sucesión $\{f(x_n, y_n)\}$ es el producto de una sucesión acotada por una infinitesimal, por tanto tiene por límite cero.

6. Analicemos la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \cdot (\text{Fig.6a})$$

Puede comprobarse fácilmente que el límite por cualquier recta que pasa por el origen (excepto la $y = -x$ donde la función no está definida) es cero. También es cero el límite por cualquier curva de la forma $y = x^p$, $p > 0$.

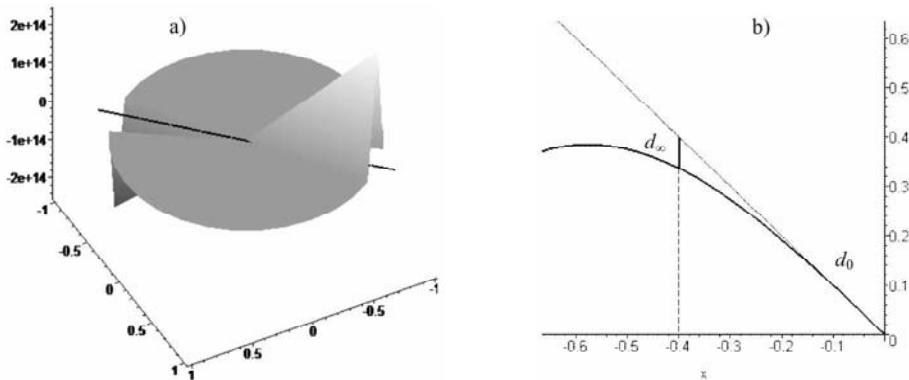


FIGURA 6.

Sin embargo, el hecho de que en los puntos cercanos a la recta $y = -x$ el denominador de la función sea muy pequeño nos induce a analizar el comportamiento de la función cuando el punto (x,y) se acerca al origen por una curva que “se aproxime a la recta $y = -x$ más rápidamente que al punto $(0,0)$ ”. Por ejemplo, podemos considerar la curva $y = -x + x^3$ (Fig.6b), cuya distancia d_∞ , en la norma $\|\cdot\|_\infty$, de un punto de esta curva a la recta $y = -x$ es del orden de x^3 , mientras la distancia d_0 , de este mismo punto al origen, es del orden de x cuando $x \rightarrow 0$. Moviéndonos por puntos de esta curva se tiene que:

$$f(x, -x + x^3) = \frac{x^2 + (x^3 - x)^2}{x^3} = \frac{1 + (x^2 - 1)^2}{x} \rightarrow \infty.$$

Por tanto, el límite de la función en el punto no existe. Más aún, en cualquier vecindad del origen la función toma valores tan grandes como se quiera, es decir no es acotada.

En muchos casos podemos visualizar el comportamiento límite de una función de dos variables mediante la observación de sus curvas de nivel. En la Fig. 2a) podemos observar que las curvas de nivel de la función del ejemplo 2 parecen intersecarse en el origen de coordenadas. Esto significa que en toda vecindad de $(0,0)$ y para todo valor de c (admisible para la función) siempre encontraremos una porción de la curva de nivel de la función correspondiente a c . Por consiguiente, en cualquier vecindad del origen hay puntos donde la función toma todos sus valores posibles y por tanto, no puede acercarse a ningún número determinado.

De forma análoga, para la función del ejemplo 4),

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

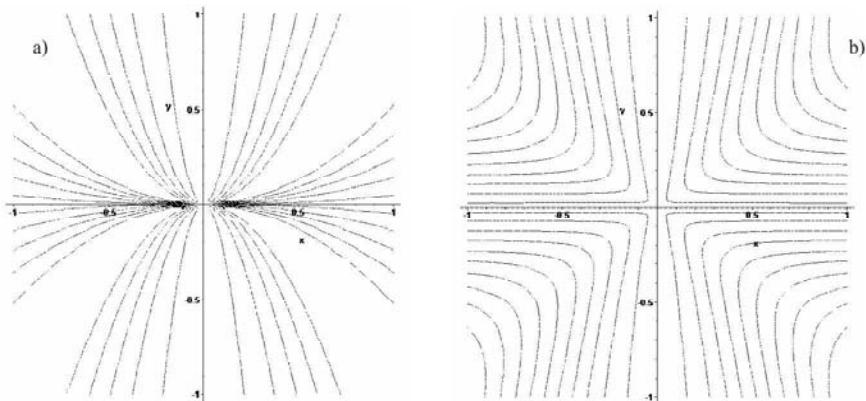


FIGURA 7.

que no tiene límite en $(0,0)$, el lector puede comprobar que las parábolas de la forma $y = kx^2$ son curvas de nivel que “pasan por el origen” (Fig. 7a).

Por el contrario, las curvas de nivel de la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

tienen un comportamiento muy diferente (Fig. 7b): Seleccionada una vecindad de $(0,0)$, en ella se encuentran porciones de las curvas de nivel de f correspondiente solamente a valores de c que sean muy pequeños. Esto concuerda

plenamente con el resultado demostrado de que el límite de esta función en el origen es cero.

Al igual que en el caso de funciones de una variable, para funciones $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, el límite puede ser expresado en el lenguaje $\varepsilon-\delta$ o de las vecindades, lo que se enuncia en el teorema a continuación.

Teorema 1. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - a\| < \delta$ y $x \in D$, entonces $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ (definición $\varepsilon-\delta$).

iii) Para toda vecindad de l , $V(l)$, existe una vecindad de a , $W(a)$, tal que $f(W^*(a) \cap D) \subset V(l)$, donde $W^*(a) = W(a) \setminus \{a\}$ (definición por vecindades).

Observación: Como la definición de límite de una función es independiente de la norma que se utilice en los espacios \mathbf{R}^n y \mathbf{R}^p , en ii) hemos utilizado la misma notación para la norma en el espacio de partida y de llegada de la función. Esto no significa que ambas normas deban coincidir.

◆ Demostremos que i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i).

Para demostrar i) \Rightarrow ii) utilicemos el contrarrecíproco. Supongamos que ii) no se cumple, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay al menos un $x_\delta \in D$ que satisface:

$$0 < \|x_\delta - a\| < \delta \text{ y } \|f(x_\delta) - l\| \geq \varepsilon .$$

Como δ es cualquiera, asignémosle valores $1, 1/2, \dots, 1/m, \dots$. De esta forma se construye una sucesión $\{x^m\}$ que satisface:

$$x^m \in D, \quad x^m \neq a, \quad x^m \rightarrow a \quad \text{y} \quad \|f(x^m) - l\| \geq \varepsilon .$$

Esto significa que la sucesión $\{f(x^m)\}$ no puede tener límite l , lo que contradice i).

La demostración de que ii) \Rightarrow iii) es muy sencilla y se deja de ejercicio al lector.

Finalmente supongamos que se cumple iii) y probemos que tiene lugar i). Sea un $\varepsilon > 0$ cualquiera y seleccionemos una vecindad $W(a)$ que satisfaga iii). Dada

una sucesión cualquiera $\{x^m\}$ tal que $x^m \in D$, $x^m \neq a$, $x^m \rightarrow a$, siempre encontraremos un número natural N para el cual $x^m \in W(a)$, si $m > N$. Esto significa que $x^m \in W^*(a) \cap D$, luego por iii), para esos mismos valores de m , debe cumplirse que $f(x^m) \in V(l)$. Esto prueba que la sucesión $\{f(x^m)\}$ es convergente a l . Así que se cumple i). ♦

Observaciones: 1) La forma ii) de la definición de límite permite probar fácilmente una propiedad (ejercicio 2) muy útil en el estudio de algunas funciones dadas por varias expresiones analíticas.

Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ y supongamos que $D = \bigcup_{i=1}^k D_i$. Si para todo $i = 1, \dots, k$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D_i}} f(x) = l,$$

entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

2) Aclaremos que no debe confundirse el cálculo del límite de una función en un punto con el cálculo reiterado de los límites según cada una de las variables. Por ejemplo, para funciones de dos variables, las expresiones:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right), \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right)$$

representan conceptos diferentes y, en general, no tienen por qué coincidir. Los dos últimos se conocen como **límites iterados** de f en el punto (a,b) . En el ejercicio 5 proponemos la demostración de un resultado que relaciona estos conceptos.

Ejemplos

7. La función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no tiene límite en $(0,0)$. Sin embargo,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0.$$

8. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{xy}, & \text{si } xy > 0 \\ y, & \text{si } xy \leq 0 \end{cases}$ (Fig.8)

y analicemos el límite y los límites iterados en el punto $(0,0)$.

En primer lugar,

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{xy} \right| \leq |x|,$$

lo que nos indica que $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \{xy > 0\}}} f(x,y) = 0$.

Además, es evidente que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \{xy \leq 0\}}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0,$$

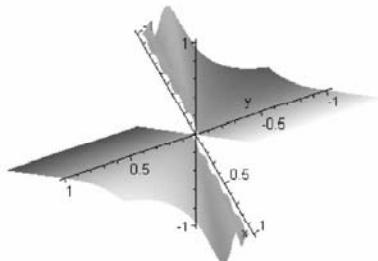


FIGURA 8.

de donde, haciendo uso de la observación 1) anterior, podemos concluir que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Por otra parte, resulta claro que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0,$$

pero $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ no existe y, por tanto, tampoco puede existir el límite iterado,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right).$$

Para funciones $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ puede dársele un significado a la frase: **la función f es infinitamente grande en a** , por ejemplo, podemos definir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \text{Para todo } K > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que,}$$

$$\text{si } 0 < \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in D, \text{ entonces } |f(x)| > K.$$

Si el conjunto $D \subset \mathbf{R}^n$ es no acotado, también podemos dar una definición de **límite en el infinito** para una función f :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } K > 0 \text{ tal que,}$$

$$\text{si } \|x\| > K \text{ y } x \in D, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ejemplos

9. Calculemos $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{x^2 + y^2}$. Si consideramos la norma euclíadiana en el dominio de la función, entonces $(x,y) \rightarrow \infty$ significa que $\|x\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ se hace tan grande como uno quiera. En estos casos puede ser conveniente utilizar las coordenadas polares. Si escribimos $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ obtenemos:

$$\left| \frac{y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{1}{\rho} |\sin \theta| \leq \frac{1}{\rho}.$$

Es evidente que la expresión anterior puede hacerse menor que cualquier ε prefijado, con tal que $\rho > K = 1/\varepsilon$. Por tanto hemos demostrado que el límite pedido es cero.

Veamos algunos ejemplos más de cálculo de límites:

Ejemplo 10. Calculemos, si existe,

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |x|^{yz}.$$

Como $|x|^{yz} = e^{yz \ln|x|}$, la búsqueda del límite se reduce al análisis del límite de la función $f(x, y, z) = yz \ln|x|$. Consideraremos la sucesión $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ con $x_n = y_n = z_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, entonces:

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{n^2} \ln \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} \ln n \rightarrow 0.$$

Así que, de existir el límite, su valor sería 1.

Sea ahora la sucesión con $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \right) \rightarrow (0, 0, 0)$, tenemos que:

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{1}{\ln n} \ln \frac{1}{n} = -1.$$

Por tanto, el límite de f en $(0,0,0)$ no existe.

Ejemplo 11. Analicemos $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$.

Evidentemente $f(x,0) = 0$ y $f(x,x) = x/2$. Así que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \infty \\ \{y=0\}}} f(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \infty \\ \{y=x\}}} f(x,y) = \infty,$$

luego el límite propuesto no existe.

Ejemplo 12. Calculemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{(xy - 2x + y - 2)^2}{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(xy - 2x + y - 2)^2}{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} &= \frac{[(x+1)(y-2)]^2}{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \\ &= \frac{(y-2)^2}{(x+1)^2 + (y-2)^2} (x+1)^2 \leq (x+1)^2. \end{aligned}$$

De esta desigualdad resulta evidente que el límite propuesto es cero.

Hasta el momento, todos los ejemplos que hemos visto han sido funciones con conjunto de llegada \mathbf{R} . ¿Cómo podemos proceder para analizar el límite de una función con conjunto de llegada de dimensión mayor que uno? Por ejemplo, el límite de la función $f(x,y) = (xy, x^2 - y^2)$ en el punto $(0,0)$. En el capítulo anterior vimos que el análisis de la convergencia y el cálculo del límite de una sucesión en \mathbf{R}^n se reducía al estudio de las n sucesiones componentes. Veremos que también para las funciones con conjunto de llegada de dimensión mayor que 1, el cálculo de límites se puede realizar a través de las *funciones coordenadas*.

Si $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, entonces, para cada $x \in D$, $f(x) \in \mathbf{R}^p$. Así que a f podemos asociar p funciones reales f_i , haciendo corresponder a cada $x \in D$ la coordenada i del vector $f(x)$. Estas son las denominadas **funciones coordenadas** de f . La siguiente afirmación es una consecuencia inmediata del resultado análogo para el límite de sucesiones:

La función f tiene límite $l = (l_1, \dots, l_p)$ en el punto a si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Ejemplo 13

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy, x^2 - y^2) = (0,0),$$

ya que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0$.

Las propiedades de las operaciones aritméticas con límites también son una consecuencia de las respectivas propiedades con sucesiones. El teorema siguiente las resume

Teorema 2. Sean $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, tales que existen los límites de f y g en el punto a , entonces:

a) Existen los límites de las funciones $f + g$ y λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) en dicho punto, además:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

b) Cuando $p = 1$, existen los límites de $f \cdot g$ y f/g (si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) y

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Finalmente, veamos, la condición de Bolzano-Cauchy en su versión para el límite de funciones:¹

Definición 2. Una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ se dice que satisface la **condición de Bolzano-Cauchy** en el punto a (de acumulación de D) si dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una vecindad de a , $V(a)$, tal que:

$$x, x' \in V^*(a) \cap D \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon. \quad (2)$$

También para las funciones definidas entre subconjuntos de \mathbf{R}^n el cumplimiento de la condición de Bolzano-Cauchy es necesaria y suficiente para la existencia del límite en un punto.

Teorema 3. Una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ tiene límite en el punto a si y solo si cumple la condición de Bolzano-Cauchy en el punto a .

¹ Ni Bolzano ni Cauchy enunciaron la condición para el caso de límite de funciones, pero, por extensión utilizaremos la misma denominación.

◆ Para demostrar la *necesidad*, supongamos que f tiene límite en el punto a . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ se encuentra alguna $V(a)$ tal que:

$$x \in V^*(a) \cap D \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon/2.$$

Luego para $x, x' \in V^*(a) \cap D$, se tendrá:

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \|f(x') - l\| < \varepsilon/2.$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos:

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|f(x) - l\| + \|f(x') - l\| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que se verifica la condición (2) en el punto a .

Demostremos la *suficiencia*. Supongamos que f satisface la condición de Bolzano-Cauchy. Consideremos una sucesión arbitraria $\{x^m\}$ tal que $x^m \in D$, $x^m \neq a$, $x^m \rightarrow a$, y demostremos que la sucesión $\{f(x^m)\}$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y escogamos una vecindad $V(a)$ que satisfaga la condición (2). Como $x^m \rightarrow a$ podemos garantizar la existencia de un N tal que cuando $m > N$, se cumpla $x^m \in V(a)$. Además $x^m \in D$, $x^m \neq a$, luego $x^m \in V^*(a) \cap D$. Entonces para $k, m > N$ de (2) se tendrá:

$$\|f(x^m) - f(x^k)\| < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que la sucesión $\{f(x^m)\}$ es fundamental y por tanto convergente.

Pero, para que la función f tenga un límite en a , se necesita probar que el límite de la sucesión $\{f(x^m)\}$ es independiente de la sucesión $\{x^m\}$ escogida. Para comprobarlo, supongamos lo contrario, esto es, que existen dos sucesiones $\{x^m\}$ y $\{y^m\}$, que satisfacen las restricciones establecidas en la definición de límite, y tales que $\{f(x^m)\}$ converge a l_1 y $\{f(y^m)\}$ converge a l_2 . Formemos una nueva sucesión $\{z^m\}$:

$$z^m = \begin{cases} x^k, & \text{si } m = 2k \\ y^k, & \text{si } m = 2k - 1 \end{cases}$$

Evidentemente $z^m \in D$, $z^m \neq a$, $z^m \rightarrow a$ y, por lo demostrado antes, la sucesión de las imágenes $\{f(z^m)\}$ deberá converger, luego $l_1 = l_2$. Esto completa la demostración de la suficiencia y del teorema. ◆

Las definiciones dadas para el límite de funciones entre subconjuntos de espacios \mathbf{R}^n , pueden ser generalizadas sin ninguna dificultad a funciones entre espacios métricos.

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos arbitrarios, a un punto de acumulación del conjunto $D \subset X$ y $f: D \rightarrow Y$. Decimos que $l \in Y$ es límite de f en el punto a cuando:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < d_X(x, a) < \delta$ y $x \in D$, entonces $d_Y(f(x), l) < \varepsilon$.

Las formulaciones utilizando sucesiones o vecindades en el caso general son idénticas a las enunciadas para funciones entre espacios \mathbf{R}^n . No obstante, es importante recalcar que en el caso general, la existencia de límite de una función depende de las métricas que se adoptan en los espacios de partida y de llegada de la función. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 14. Sea la función $f: (\mathbf{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$, dada por $f(x) = x$. Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Ahora supongamos $f: (\mathbf{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbf{R}, d)$, donde d es la distancia discreta. En este caso el límite de f cuando $x \rightarrow 0$ no existe. Por ejemplo, tomando $x_m = 1/m$, se tiene que $f(x_m) = 1/m$ no es convergente en el espacio métrico discreto. ¿Cuáles serán las únicas funciones $f: (\mathbf{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbf{R}, d)$ que tienen límite? ¿y si $f: (\mathbf{R}, d) \rightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$?

Las propiedades relativas al límite de la suma de funciones y del producto por un escalar, permanecen válidas para el caso de funciones con conjuntos de llegada en un espacio normado. La definición 2 de la condición de Bolzano-Cauchy en un punto se generaliza sin dificultad para espacios métricos, con las modificaciones obvias. Sin embargo, puede garantizarse la suficiencia de esta condición para la existencia de límite en un punto (teorema 3) solo cuando el espacio métrico donde la función toma valores es un espacio métrico completo (ejercicio 6).

Ejercicios propuestos

1. Sean $f: A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $a \in A'$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Demuestra que $l \in \overline{f(A)}$.
2. Sea $f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ y supongamos que $D = \bigcup_{i=1}^k D_i$. Demuestra que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ si y solo si para todo } i = 1, \dots, k, \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D_i}} f(x) = l .$$

3. Calcula, en caso que existan, los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x - 2y^2 + 5}{2x^2 + y^2 - 1}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x - 2y^2}{2x + y^2}$

d) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{4x + 6y - 2z}{2x + 3y + z}$ e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^5}$ g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x + y^6}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1/2)} \frac{\operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - y + 5/4}}$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ k) $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

l) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z(e^{xy^2} - 1)}{xy \ln(1 - 2zy)}$ m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^{\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ o) $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^x$

4. En las funciones siguientes, analiza si existe el límite en los puntos que se indican:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(0,1)$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} (1,x), & 0 < y < x^2 \\ (x,x^2), & y \leq 0 \text{ o } y \geq x^2 \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$.

5. a) Sea $f : V^*(a) \times V^*(b) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que existe el límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

y, para todo $y \in V^*(b)$, existe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = g(y).$$

Demuestra que existe $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$.

b) Analiza la existencia del límite y de los límites iterados de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - x - y}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 0 & , x + y = 0 \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

6. Sean X un espacio métrico cualquiera, Y un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow Y$. Demuestra que f tiene límite en a si y solo si se cumple la condición de Bolzano-Cauchy en a .

II.3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este epígrafe estudiaremos el concepto continuidad de una función de varias variables, analizaremos las diferentes formas de esta definición y veremos las propiedades más sencillas de las funciones continuas.

Definición 1. Una función $f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ se dice **continua en un punto** $a \in D$ si:

Para toda sucesión $\{x^m\}$, $x^m \in D$, $x^m \rightarrow a$ se cumple $f(x^m) \rightarrow f(a)$.

Una función se dice **continua en un conjunto** A si ella es continua en todos los puntos de A . Cuando una función f sea continua en todos los puntos de su dominio de definición, diremos simplemente que f es continua.

Observaciones: 1) Recalquemos que, en la continuidad de una función f en un punto a , influye su comportamiento en a , pero también en los puntos del dominio de f cercanos a a .

2) Si a no fuera punto de acumulación del dominio de la función, entonces no habría puntos cercanos: las únicas sucesiones que satisfarían simultáneamente $x^m \in D$, $x^m \rightarrow a$ serían las “casi” constantes, esto es, $x^m = a$ para todo m , salvo

a lo sumo para un número finito. Evidentemente también la sucesión imagen será, en ese caso, casi constante: $f(x^m) = f(a)$, para casi todo m . Luego, de manera trivial, se tiene:

Toda función es continua en los puntos de su dominio que no son de acumulación.

Cuando a es un punto de acumulación del dominio, la definición 1 indica que podemos expresar la continuidad a través del límite:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Esta última formulación permite hacer uso de los conocimientos y habilidades que ya poseemos sobre límite para estudiar la continuidad de funciones. En particular, también la continuidad de una función en un punto, puede reformularse en el lenguaje ε - δ y en el de las vecindades.

Teorema 4. Resultan equivalentes las afirmaciones siguientes:

- a) f es continua en a
- b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- c) Para todo $V(f(a))$, existe $W(a)$ tal que $f(W(a) \cap D) \subset V(f(a))$.

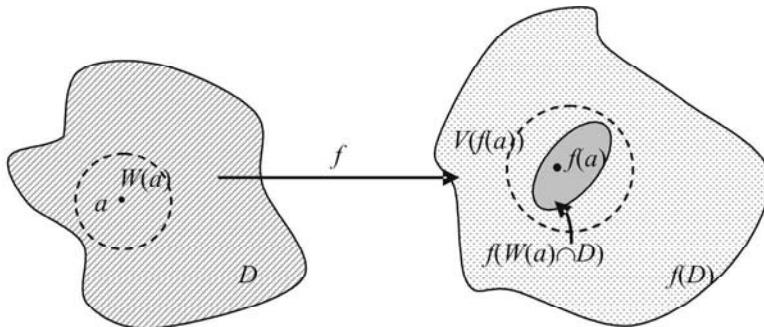


FIGURA 9.

En la Fig.9 mostramos la interpretación geométrica de la definición de continuidad en un punto. Para ello utilizamos la formulación en el lenguaje de las vecindades, (c) del teorema anterior.

Resumimos a continuación las propiedades de las funciones continuas, las cuales pueden probarse haciendo uso de las respectivas propiedades para el límite.

Teorema 5. a) Una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ es continua en el punto a si y solo todas las funciones componentes f_i , $i = 1, \dots, p$ son continuas en a .

b) Si las funciones f y g son continuas en el punto a , entonces las funciones $f + g$ y λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) son continuas en a . Cuando $p = 1$, son continuas en a las funciones $g \cdot f$ y f/g ($g(a) \neq 0$).

El teorema siguiente afirma la continuidad de la composición de funciones continuas y, aunque es muy sencillo, tiene gran importancia práctica en la justificación de la continuidad de funciones.

Teorema 6. Sean $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow G \subset \mathbf{R}^p$ y $g : G \rightarrow \mathbf{R}^k$ tales que f es continua en $a \in D$ y g es continua en $f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a .

◆ Utilicemos la definición 1 de continuidad por sucesiones. Sea una sucesión arbitraria $\{x'''\}$ de D tal que $x''' \rightarrow a$. Como f es continua en a , se cumple que $f(x''') \rightarrow f(a)$. Pero la función g es continua en $f(a)$, luego $g(f(x''')) \rightarrow g(f(a))$. Esto concluye la demostración de la continuidad de $g \circ f$ en a .◆

Veamos algunos ejemplos de análisis de la continuidad de una función en un punto.

Ejemplos

1. La función $\pi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tal que, a cada vector de \mathbf{R}^n hace corresponder su coordenada $i^{\text{ésima}}$, esto es, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ es continua, pues:

$$\lim_{x \rightarrow a} \pi_i(x) = a_i = \pi_i(a).$$

2. Toda función definida en \mathbf{R} puede ser considerada como función de cualquier número de variables. Así por ejemplo, la función definida por $x \mapsto \operatorname{sen} x$ da lugar a una función f definida en \mathbf{R}^2 mediante la correspondencia $(x_1, x_2) \mapsto \operatorname{sen} x_1$ (o en \mathbf{R}^n , a través de $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \operatorname{sen} x_1$). Si la función original es continua en \mathbf{R} , entonces f es continua en \mathbf{R}^2 . Esto puede comprobarse directamente de la definición, o expresando f como composición de funciones continuas:

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{sen}(\pi_1(x_1, x_2)).$$

Los comentarios anteriores, junto a los resultados del Teorema 2 nos permiten afirmar que la función:

$$f(x, y) = e^{3xy} + 2 \operatorname{sen}|x|,$$

es continua en \mathbf{R}^2 y las funciones:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \arctan \left(\ln \left(\sqrt{x^2 + y^4} \right) \right),$$

son continuas en el interior de la esfera unidad y en $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ respectivamente.

3. La función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

no tiene límite en $(0,0)$ (ver ejemplo 4 de II.2), por tanto no es continua en ese punto.

4. La función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$ ya que: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$ (ver ejemplo 5 de II.2).

$$5. \text{ La función } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, pues no existe el límite en ese punto. Sin embargo, las funciones parciales $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, son ambas continuas respectivamente en $x = 0$ e $y = 0$.

Observación. Este ejemplo tiene particular importancia desde el punto de vista histórico. El mismo fue utilizado por Herman Schwarz en 1872 para rebatir la afirmación de Cauchy, que comentamos en la introducción al capítulo: *una función continua en cada variable por separado es continua como función de dos variables*. Como un ejercicio muy instructivo proponemos al lector el análisis de cuál es el fallo en el razonamiento de Cauchy que describimos en la introducción (ejercicio 8b).

Por otra parte, puede comprobarse fácilmente (ejercicio 8a) que se tiene un resultado en el sentido recíproco:

Si una función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en el punto $a = (a_1, \dots, a_n)$, entonces las funciones parciales $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ son continuas en $x = a_i$ $i = 1, \dots, n$.

Veamos ahora un caso particular importante:

Una función lineal $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ es continua en todo su dominio.

Recordemos que una función $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ se dice lineal si satisface:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbf{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Además, a cada función lineal corresponde una matriz que la representa y puede escribirse:

$$L(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

De esta representación resulta claro que una función lineal con conjunto de llegada \mathbf{R}^m puede expresarse en la forma $L = (L_1, \dots, L_m)$, donde las funciones componentes L_i son todas lineales. Mas precisamente,

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, m.$$

En virtud del teorema 1, bastaría demostrar que las funciones lineales con conjunto de llegada en \mathbf{R} son continuas. Pero las funciones L_i son combinaciones lineales de las funciones proyección, cuya continuidad comentamos en el ejemplo 1. Con esto se concluye la continuidad de la función L en todo su dominio.

Veamos ahora un ejemplo del análisis detallado de la continuidad de una función en todo su dominio.

Ejemplo 6. Determinemos el dominio de continuidad de la función $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{xy}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ y } xy \neq 0 \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ y } xy = 0 \\ \ln(x^2 + y^2 - 3), & \text{si } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

La Fig.10 permite apreciar las diferentes partes en que podemos dividir el dominio de la función teniendo en cuenta su definición. Hemos denotado:

$$I = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ y } xy \neq 0\}, \quad II = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ y } xy = 0\},$$

$$III = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}.$$

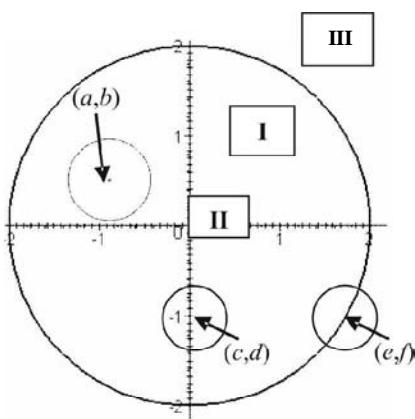


FIGURA 10.

En I, II y III, F coincide respectivamente con las funciones:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} \sin \frac{1}{xy}, \quad 0 \text{ y}$$

$$\ln(x^2 + y^2 - 3).$$

En los puntos (a,b) , interiores a I, hay toda una vecindad de (a,b) donde F coincide con la expresión, luego, en esos puntos, F es continua. Un razonamiento análogo puede hacerse con todos los puntos del conjunto III (abierto).

Los puntos que pueden presentar problemas son los puntos de la frontera de I, esto es del conjunto II y la circunferencia. Sea $(c,d) \in II, c,d \neq \pm 2$ entonces cualquier vecindad de este punto contendrá puntos que pertenecen al conjunto I y al conjunto II. De modo que tenemos:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,d) \\ (x,y) \in I}} F(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (c,d)} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \sin \frac{1}{xy}.$$

Como $cd = 0$, el límite anterior no existirá y la función no puede ser continua en estos puntos.

Sea ahora (e,f) un punto sobre la circunferencia. En este caso en toda vecindad de (e,f) hay puntos del conjunto I y III (cuando $ef = 0$, habrá también puntos de II). Entonces:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (e,f) \\ (x,y) \in I}} F(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (e,f)} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \sin \frac{1}{xy} = 0 \quad y$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (e,f) \\ (x,y) \in \text{III}}} F(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (e,f)} \ln(x^2 + y^2 - 3) = 0$$

(Si $ef = 0$, evidentemente $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (e,f) \\ (x,y) \in \text{II}}} F(x,y) = 0$).

Como $F(e,f) = 0$, de lo anterior se obtiene que F es continua en todos los puntos de la circunferencia.

Por lo tanto el dominio de continuidad de F es el conjunto:

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4 \text{ y } xy = 0\}.$$

Finalmente, veamos las propiedades denominadas locales, ya que caracterizan el comportamiento de la función en una vecindad de un punto específico.

Definición 2. a) Un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ se dice **acotado** si existe un $M > 0$ tal que:

$$\|x\| \leq M, \text{ para todo } x \in E.$$

b) Una función f se dice **acotada sobre el conjunto A** si el conjunto imagen $f(A)$ es acotado. Esto significa que puede encontrarse un $M > 0$ para el cual se cumple

$$\|f(x)\| \leq M, \text{ para todo } x \in A.$$

Cuando una función f está acotada sobre todo su dominio, diremos simplemente que f es **acotada**.

Observaciones. 1) La definición de conjunto acotado puede reformularse: Un conjunto E es acotado si está contenido en alguna bola con centro en el origen. En realidad puede verse que basta que E esté contenido en una bola cualquiera.

2) Es fácil comprobar que la acotación de un subconjunto de \mathbf{R}^n no depende de la norma escogida. Por tanto, también la acotación de funciones entre subconjuntos de estos espacios es independiente de cuáles normas se consideren en los conjuntos de partida y de llegada.

De forma completamente análoga a como se realiza para funciones de una variable, pueden demostrarse las propiedades siguientes:

Teorema 7. Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ continua en $a \in D$, entonces tienen lugar:

a) **Propiedad de acotación local**

Existe $V(a)$ tal que el conjunto $f(V(a) \cap D)$ es acotado.

b) Propiedad de permanencia del signo

Cuando $p = 1$ y $f(a) \neq 0$, existe $V(a)$ tal que $f(a) \cdot f(x) > 0$, para todo $x \in V(a) \cap D$.

Observación. Una función puede ser acotada en una vecindad de un punto, pero no ser continua en dicho punto. Así sucede con la función del ejemplo 5:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

discontinua en $(0,0)$ y no obstante $|f(x, y)| \leq 1/2$.

También el concepto de función continua en un punto puede ser extendido a funciones definidas entre espacios métricos generales (y por tanto a cualquier espacio normado). En la definición ε - δ sólo es necesario sustituir la norma de la diferencia por la distancia entre los elementos correspondientes. Las otras formas de definición se mantienen sin necesidad de realizar ningún cambio.

Por supuesto, al igual que la existencia del límite, la continuidad de una función entre espacios métricos, depende de la métrica que se establezca en los conjuntos de partida y de llegada de la función (ver ejercicios 10, 11, 12).

La primera afirmación en la parte b) del teorema 2 es válida para funciones definidas en un espacio métrico y con valores en cualquier espacio normado. La segunda afirmación se generaliza para funciones reales definidas en un espacio métrico cualquiera. La demostración del teorema sobre la continuidad de la función compuesta es completamente general y, por tanto, esta propiedad permanece para funciones entre espacios métricos arbitrarios.

La propiedad de acotación local para funciones continuas en un punto se mantiene en el caso de funciones entre subconjuntos de espacios métricos (diremos que un *subconjunto de un espacio métrico es acotado* si está contenido en alguna bola). Para funciones definidas en un subconjunto de un espacio métrico y con valores reales se verifica la propiedad de permanencia del signo.

La cantidad de resultados que pueden ser generalizados, sin ninguna dificultad, a espacios normados o métricos más generales, podría darnos la falsa impresión de que, en lo que respecta a la continuidad, no hay diferencias entre las funciones de varias variables y las funciones entre espacios normados. Sin embargo, la *continuidad de cualquier función lineal*, demostrada para el caso de los espacios \mathbf{R}^n , pierde su validez cuando se trata de funciones lineales entre espacios normados arbitrarios (ejercicio complementario 21).

Ejercicios propuestos

1. Halla el dominio de continuidad de las siguientes funciones definidas en \mathbf{R}^2 :

a) $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & \text{si } y^2 < x^2 \\ y^2, & \text{si } y^2 \geq x^2 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y(y - x^2)}, & \text{si } y \neq 0, y \neq x^2 \\ 0, & \text{si } y = 0, y = x^2 \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x}{y + x^4}, & \text{si } y > x^2 \\ 0, & \text{si } -x^2 \leq y \leq x^2 \\ y(x-1), & \text{si } y < -x^2 \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sqrt{2-|x|-|y|}}}, & \text{si } |x| + |y| < 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4}, & \text{si } x^2 + y^2 \geq 4 \\ \frac{(y^2 - 4)^2 x^2}{(y^2 - 4)^2 + x^2}, & \text{si } |x| + |y| > 2 \text{ y } x^2 + y^2 < 4 \\ 0, & \text{si } |x| + |y| = 2. \end{cases}$

2. ¿Cómo debe definirse en los puntos de la recta $x = y$ la función

$$f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \text{ de modo que sea continua en } \mathbf{R}^2?$$

3. Sean $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} es el conjunto de los números complejos) continuas

en $a \in D$. Prueba que las funciones $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$, ($g(a) \neq 0$) son continuas en a .

4. Dada una función f definida, continua sobre el cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$ y que toma valores reales. Demuestra que la función $g(x) = \max_{0 \leq y \leq 1} f(x, y)$ es continua.

5. Sean f_1, \dots, f_k funciones reales definidas en $D \subset \mathbf{R}^n$ continuas en $a \in D$. Analiza la continuidad en a de la función $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$.
6. Para $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Demuestra que las siguientes proposiciones son equivalentes:
- f es continua en \mathbf{R}^n .
 - Para todo abierto $A \subset \mathbf{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto en \mathbf{R}^n .
 - Para todo cerrado $F \subset \mathbf{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en \mathbf{R}^n .
 - Da ejemplos que muestren que las equivalencias anteriores son falsas cuando se sustituye f^{-1} por f .
7. Se dice que $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ satisface una **condición de Lipschitz de orden α** en D si existe una constante L tal que se cumple:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|^\alpha, \text{ para todo } x_1, x_2 \in D.$$

Demuestra que si f satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en D , entonces es continua en D . Muestra con un ejemplo que hay funciones que son continuas en un cierto conjunto, pero que no satisfacen una condición de Lipschitz de orden α , para todo $\alpha > 0$.

8. Supongamos que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en el punto $a = (a_1, a_2)$.
- Demuestra que las funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} definidas por $f_1(x) = f(x, a_2)$ y $f_2(y) = f(a_1, y)$ son continuas en a_1 y a_2 respectivamente. Esta propiedad suele expresarse diciendo que una función de dos variables continua es **separadamente continua en cada variable**.
 - Dada la representación:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

¿Por qué no puede concluirse que ambas cantidades entre corchetes son menores que un ε dado, cuando $(\Delta x, \Delta y)$ se toma en una vecindad de suficientemente pequeña de $(0,0)$?

- Demuestra que si f es separadamente continua en un punto y monótona respecto a una de las variables en la vecindad correspondiente, entonces f es continua en el punto.

- d) Demuestra que si f es continua en $D \subset \mathbf{R}^2$ respecto a la variable x y satisface una **condición de Lipschitz** respecto a y , es decir, existe una constante L tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \text{ donde } (x, y_1), (x, y_2) \in D,$$

entonces f es continua en D .

9. Prueba que una función continua $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, tal que transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos es monótona.
10. a) Demuestra que en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la función definida por $f(x) = \|x\|$ es continua en cualquier punto del espacio.
- b) Muestra que si $\|\cdot\|^1$ y $\|\cdot\|^2$ son dos normas sobre el espacio vectorial E , puede ocurrir que la función $f(x) = \|x\|^1$ no sea continua en el espacio $(E, \|\cdot\|^2)$.
- c) ¿Qué puedes decir en b) si $E = \mathbf{R}^n$?
11. Sea un espacio métrico (E, d_E) cualquiera y (F, δ) un espacio con la distancia discreta. Analiza cuáles funciones $f : F \rightarrow E$ o $g : E \rightarrow F$ son continuas.
12. Consideremos los espacios métricos $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y (\mathbf{R}^2, d) , donde d es la métrica del ascensor (I.1 ejercicio 7). Analiza si la función $f : (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbf{R}^2, d)$ dada por $f(x) = x$ es continua. ¿Será continua f cuando se considera en el dominio la métrica del ascensor y en el conjunto de llegada la métrica euclídea?

II.4. ACOTACIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Ya señalamos antes que los problemas de búsqueda de valores óptimos han sido una de las motivaciones principales para el desarrollo del análisis matemático. En una primera etapa, se resolvían problemas relativamente sencillos y por tanto, susceptibles de interpretación geométrica o física. Por ello, en general, no había lugar a dudas sobre la existencia del valor extremo que se buscaba. Pero, cuando los matemáticos comenzaron a pensar en la elaboración de una metodología general, a tratar los problemas en una forma matemática “más pura”, se iniciaron los cuestionamientos acerca de la existencia de tales valores óptimos. Alrededor de 1860, Karl Weierstrass, el “gran legislador” de la matemática, será el que demuestre de forma totalmente rigurosa la existencia de extremos de una función continua en un intervalo cerrado: el conocido **teorema de Weierstrass** para asegurar la acotación de funciones de una variable real.

En realidad este teorema consta de dos partes, en la primera, se demuestra la acotación de la función y en la segunda, se garantiza la existencia de puntos donde la función alcanza sus **valores máximos y mínimos**. En el epígrafe anterior generalizamos, para funciones entre espacios \mathbf{R}^n , la noción de función acotada, por tanto es natural pensar en una generalización de la primera parte del Teorema de Weierstrass. Es decir, trataremos de responder a la pregunta ¿cuáles serán los subconjuntos de \mathbf{R}^n sobre los cuales podemos garantizar la acotación de una función continua? En cambio, dar un sentido a la noción de máximo o de mínimo para un conjunto es posible cuando este conjunto posee un cierto ordenamiento, propiedad que es habitual para el espacio \mathbf{R}^n solo en el caso $n = 1$. Esto último significa que nos referiremos a valores extremos de una función únicamente cuando ella tome valores reales. Por tanto, será para estas funciones que intentaremos una generalización de la segunda parte del Teorema de Weierstrass.

Un análisis de la demostración realizada para la acotación de una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, muestra que la esencia del razonamiento estriba en la propiedad siguiente:

Toda sucesión de elementos pertenecientes a un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ posee una subsucesión convergente a un punto de dicho intervalo.

Pero, ¿qué subconjuntos K de \mathbf{R}^n satisfarán que toda sucesión formada con sus elementos deba tener una subsucesión convergente a un elemento de K ?

El Teorema de Bolzano-Weierstrass, demostrado para cualquier sucesión de elementos de \mathbf{R}^n , permite, de una sucesión acotada cualquiera, extraer una subsucesión convergente. Luego bastará imponer condiciones que garanticen: 1) que las sucesiones de elementos del conjunto sean acotadas y 2) que los límites de sucesiones de elementos del conjunto permanezcan dentro del mismo.

Para asegurar el cumplimiento de 1), basta exigir que el conjunto sea acotado y para 2) que sea cerrado.

Los razonamientos anteriores pueden ser resumidos en el lema siguiente:

Lema. Si el conjunto $K \subset \mathbf{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces:

Para toda $\{x^m\}$, $x^m \in K$ existe una subsucesión $\{x^{k_m}\}$, tal que $x^{k_m} \rightarrow x \in K$ (1)

Utilizando como herramienta fundamental el lema anterior podemos extender la demostración del Teorema de Weierstrass, realizada para funciones de una variable, y probar el teorema siguiente:

Teorema 8. (Weierstrass) Sea $f : K \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ continua y K un conjunto cerrado y acotado. Entonces f es acotada. Además, para el caso que $p = 1$, existen puntos $c, d \in K$ tales que:

$$f(c) = \sup \{ f(x) : x \in K \} \quad y \quad f(d) = \inf \{ f(x) : x \in K \}.$$

◆ Supongamos que f no es acotada. Entonces, para todo $M > 0$, encontramos un elemento $x \in K$ tal que $\|f(x)\| \geq M$. Si damos sucesivamente a M los valores $1, 2, \dots$ construimos una sucesión $\{x^m\}$, de elementos de K que cumple:

$$\|f(x^m)\| \geq m, \quad (m=1,2,3,\dots). \quad (2)$$

Como K satisface las condiciones del lema, existirá una subsucesión $\{x^{k_m}\}$ de $\{x^m\}$ convergente a un $x \in K$.

Pero la función f es continua en todo punto de K , así que $f(x^{k_m}) \rightarrow f(x)$, por lo que la sucesión $\{f(x^{k_m})\}$ es convergente. Evidentemente, esto contradice (2) y así queda probada la primera parte del teorema.

Si $p = 1$, el conjunto acotado $f(K) \subset \mathbf{R}$ tendrá un supremo M y un ínfimo m . La prueba de que M es un máximo, es decir, que existe $c \in K$: $f(c) = \sup \{ f(x) : x \in K \}$, es semejante a la usual para funciones de una variable. Suponemos que $M \notin f(K)$, entonces la función auxiliar:

$$0 < \varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

es continua sobre K y le podemos aplicar la primera parte del teorema. Luego φ es una función acotada sobre K , en particular, existirá un $L > 0$ tal que:

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} < L.$$

De donde se obtiene:

$$f(x) < M - \frac{1}{L}.$$

Esta desigualdad contradice la suposición de que M es el supremo del conjunto $f(K)$, por tanto M necesariamente pertenece a $f(K)$. La demostración de que $m \in f(K)$ se realiza de la misma forma. ◆

Observaciones: 1) Obviamente, las condiciones impuestas al conjunto K no son necesarias para la acotación de una función continua sobre este conjunto (basta considerar, por ejemplo, la función constante sobre cualquier conjunto). Sin embargo, ellas no pueden ser eliminadas como hipótesis del teorema, como lo muestran los ejemplos siguientes:

a) La función $f(x,y) = x + y$ es continua en todo \mathbf{R}^2 (cerrado, pero no acotado), pero no es acotada.

b) $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ es continua en la bola B de centro en $(0,0)$ y radio 1 (conjunto acotado, pero no cerrado) y evidentemente se hace infinitamente grande cuando nos acercamos a cualquier punto de la circunferencia unidad, por tanto no es acotada en B .

2) En la demostración del teorema 8, las exigencias sobre K de ser cerrado y acotado no se utilizan de forma directa, sino a través de una consecuencia de ello, la condición (1). Entonces es natural preguntarse: ¿Serán los conjuntos cerrados y acotados los únicos que satisfacen (1)? Veamos qué ocurre cuando un conjunto no cumple alguna de estas condiciones.

◆ *Si E no fuera acotado:* Con un razonamiento análogo al de la demostración del teorema 8, podemos construir una sucesión $\{x^m\}$, de elementos de K que satisfaga $\|x^m\| \geq m$. Evidentemente esta sucesión no podría tener ninguna subsucesión convergente, lo cual contradice la compacidad de K .

Supongamos ahora que K no sea cerrado: En este caso encontramos una sucesión $\{x^m\}$, de elementos de K , convergente a un $x \notin K$. Pero toda subsucesión de $\{x^m\}$ tiene que converger al mismo límite x , por lo que no podría existir subsucesión alguna que sea convergente a un elemento de K . Esto entra en contradicción con la compacidad de K .

En el estudio de las propiedades de las funciones continuas para espacios más generales, desempeñan un papel decisivo los conjuntos que satisfacen la propiedad (1), por ello han recibido una denominación especial: **conjuntos compactos**.

Haciendo uso del lema previo al teorema 8 y el razonamiento anterior, obtenemos:

$$K \text{ es compacto de } \mathbf{R}^n \Leftrightarrow K \text{ es cerrado y acotado.}$$

Este resultado indica que, en \mathbf{R}^n , la compacidad de un conjunto K puede definirse por cualquiera de las dos condiciones:

- K satisface (1).
- K es cerrado y acotado.

Por otra parte, el teorema 8 puede ser enunciado:

Teorema 8'. Toda función $f : K \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ continua sobre un compacto K es acotada. Cuando $p = 1$, f alcanza sus valores máximos y mínimos en K .

Ejemplos

1. El intervalo $[a,b]$ es un compacto en \mathbf{R} . También el conjunto $[0,1] \cup [2,3]$ es compacto en \mathbf{R} , por ser acotado y cerrado. En general, la unión de un número finito de intervalos cerrados será un conjunto compacto.
2. El conjunto $(0,1]$ no es compacto en \mathbf{R} por no ser cerrado.
3. \mathbf{R}^n no es compacto por no ser acotado.
4. $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset \mathbf{R}^n$ es un compacto, puesto que evidentemente es cerrado y acotado.
5. Antes vimos que el conjunto $E = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ es cerrado, como es evidente que es acotado, será compacto.

Observación: Notemos que el resultado que nos proporciona el teorema 8', en el caso particular cuando $n = p = 1$, resulta más general que el teorema de Weierstrass demostrado para funciones de una variable, puesto que el dominio no tiene ahora que ser necesariamente un intervalo cerrado, sino cualquier conjunto compacto de la recta. El ejemplo siguiente pone en evidencia que los conjuntos compactos de \mathbf{R} pueden tener una estructura bastante complicada.

6. Conjunto de Cantor

El siguiente ejemplo fue construido por Cantor en 1883 cuando estudiaba los conjuntos de infinitos puntos en la recta real. Cantor se interesaba por dos cuestiones. La primera era ¿cómo son los conjuntos que no solo contienen todos sus puntos de acumulación sino que, además, cada uno de sus elementos es punto de acumulación?, tales conjuntos se denominan **conjuntos perfectos**. La otra preocupación de Cantor era la enumeración de los conjuntos de puntos de la recta real, es decir: ¿cuáles conjuntos se pueden poner en corres-

pondencia biyectiva con los números naturales y cuáles con todo un intervalo de la recta real?

Ya Cantor había demostrado un resultado que ligaba estas dos ideas: *un conjunto perfecto no puede ser numerable*. Entonces ideó el ejemplo, que exponemos a continuación, para mostrar que, a pesar de tener tantos puntos como un intervalo, los conjuntos perfectos podían estar muy “dispersos” en ese intervalo. En nuestro lenguaje actual esto lo podemos expresar diciendo que *la clausura del conjunto no tiene puntos interiores*.

Construyamos el conjunto C mediante el proceso iterativo siguiente:

Sea $C_0 = [0,1]$. Para obtener C_1 , eliminemos a C_0 el tercio central (Fig.11):

$$C_1 = [0,1] \setminus (1/3, 2/3) = [0,1/3] \cup [2/3,1].$$

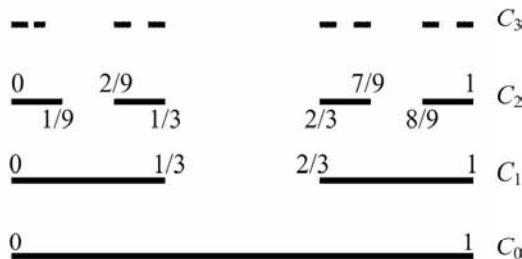


FIGURA 11.

C_2 se obtiene de C_1 eliminando el tercio central de cada uno de los intervalos que lo componen, es decir,

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1].$$

El proceso se continúa de forma iterativa: Una vez construido C_n , que constará de la unión de 2^n intervalos cerrados, se construye C_{n+1} , eliminando el tercio central de cada uno de los intervalos de C_n . El conjunto C de Cantor es la intersección de todos los conjuntos C_n , es decir,

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Todos los conjuntos C_n son cerrados y acotados. Así que C será también acotado y cerrado, luego es compacto.

Evidentemente el conjunto C contiene a los puntos de la forma:

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots,$$

que representan los extremos de los intervalos abiertos omitidos. Sin embargo el conjunto C no se compone solo de esos puntos.

No es difícil comprobar que a C pertenecen aquellos puntos del intervalo $[0,1]$ que pueden escribirse en la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

donde a_n puede tomar solo uno de los valores 0 o 2. Haciendo uso de este hecho, se puede establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto C y el conjunto de los números reales del intervalo $[0,1]$. En otras palabras, el conjunto de Cantor, en cuanto a la cantidad de sus elementos, puede ser equiparado al conjunto \mathbf{R} . Por otra parte, es intuitivamente claro y se puede probar sin grandes dificultades, que C no contiene puntos interiores (ver ejercicio complementario 11).

Como comentamos en la introducción de esta primera parte, uno de los problemas que motivó el estudio más profundo del comportamiento de las funciones continuas sobre espacios más generales (espacios métricos o normados) fue la necesidad de generalizar el Teorema de Weierstrass. Pero, si se quiere generalizar también la demostración realizada, se necesita la propiedad de Bolzano-Weierstrass y aquí surge una dificultad importante: esta propiedad, en general, no es válida para los conjuntos **acotados**. En I.2 (ejemplo 8) vimos *una sucesión acotada de un espacio normado que no tiene ninguna subsucesión convergente*.

Por esta razón, Maurice Fréchet, desde sus primeros trabajos, se dio a la tarea de extender la noción de acotación de un conjunto. Fréchet enuncia la noción de **acotación generalizada** para un subconjunto E de un espacio métrico, de varias formas equivalentes, una de ellas es:

“Todo conjunto formado por una infinidad de elementos distintos de E tiene al menos un punto de acumulación” (AG).

De modo que los conjuntos cerrados que poseen la propiedad anterior satisfacen (1) (y recíprocamente). Entonces el teorema de Weierstrass para los espacios métricos se enuncia:

Si f es continua sobre un conjunto E que tiene la propiedad (AG) y es cerrado, entonces f es acotada sobre E .

Por ese motivo, a los conjuntos que son a la vez cerrados y satisfacen la propiedad (AG) Fréchet los llamó **extremales**. Actualmente se utiliza la noción de conjunto compacto² para sintetizar las dos propiedades.

Definición 1. Un subconjunto K de un espacio métrico se dice **compacto** si satisface la propiedad (1).

La demostración que realizamos de que los conjuntos compactos son obligatoriamente cerrados y acotados es válida palabra por palabra para los espacios métricos generales. Pero el ejemplo 8 de I.2 nos muestra que *un conjunto cerrado y acotado de un espacio métrico no siempre es compacto*. Así que para espacios métricos generales se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} K \text{ es compacto} &\Rightarrow K \text{ es cerrado y acotado} \\ \Leftrightarrow &(\text{ejemplo I.2.8}) \end{aligned}}$$

El teorema 8' puede ser obtenido como corolario del siguiente teorema más general:

Teorema 9. Sean X y Y dos espacios métricos y E un compacto de X . Si $f : X \rightarrow Y$ es continua en E , entonces $f(E)$ es compacto.

◆ Supongamos que E es compacto y f continua. Debemos demostrar que $f(E)$ es compacto. Consideremos una sucesión arbitraria $\{y^m\}$, $y^m \in f(E)$. La definición de imagen de una función nos indica la existencia, para cada m , de algún $x^m \in E$ tal que $f(x^m) = y^m$. Como E es compacto, la sucesión $\{x^m\}$ tendrá alguna subsucesión $\{x^{m_k}\}$ convergente a un $x \in E$. Por otra parte, f es continua en x , luego $y^{m_k} = f(x^{m_k}) \rightarrow f(x)$ y la subsucesión $\{y^{m_k}\}$ de $\{y^m\}$ será convergente a $f(x) \in f(E)$. Esto demuestra la compacidad de $f(E)$ y con ello el teorema.◆

¹ Fréchet utiliza la denominación de compacto para los conjuntos que solo cumplen la propiedad AG (no necesariamente cerrados). El uso contemporáneo de esta noción es el que hemos adoptado.

Corolario. Si $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en el subconjunto compacto E de un espacio métrico X , entonces f alcanza sobre E sus valores máximo y mínimo. Mas precisamente, existen puntos $c, d \in E$ tales que:

$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in E\} \quad \text{y} \quad f(d) = \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

◆ En efecto, por el teorema 9, el conjunto $\{f(x) : x \in E\} \subset \mathbf{R}$ es compacto, luego es acotado y cerrado. Como es acotado, existirán su supremo M e ínfimo m . Pero el supremo e ínfimo de un conjunto, si no pertenecen al conjunto, son obligatoriamente puntos de acumulación de dicho conjunto. Como el conjunto $\{f(x) : x \in E\}$ es cerrado, entonces:

$$M, m \in \{f(x) : x \in E\},$$

lo que demuestra el corolario. ◆

Ya habíamos comentado (pero no demostrado) que todas las normas en \mathbf{R}^n son equivalentes. Realicemos la demostración, como una aplicación del Teorema de Weierstrass. Es evidente, que basta demostrar que cualquier norma es equivalente a una norma fija, por ejemplo, $\|\cdot\|_\infty$. Más precisamente, demostremos el teorema siguiente

Teorema 10. Si N es una norma, es decir, satisface las propiedades N1, N2, N3, entonces N es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

◆ Consideremos una norma cualquiera, es decir, una aplicación $N : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ que satisface las propiedades N1), N2) y N3) de la definición de norma y probemos que N es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

Debemos demostrar que existen constantes a y b positivas tales que para todo x de \mathbf{R}^n se tiene:

$$a\|x\|_\infty \leq N(x) \leq b\|x\|_\infty. \quad (3)$$

Consideremos la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^n$, en \mathbf{R}^n , es decir:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Entonces cualquier $x \in \mathbf{R}^n$ se representa en la forma $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y, haciendo uso de las propiedades N2) y N3), se obtiene:

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i).$$

Como $|x_i| \leq \|x\|_\infty$, para $i = 1, \dots, n$ y $N(e_i) \geq 0$, llegamos a la desigualdad:

$$N(x) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i) = b \|x\|_\infty, \quad (4)$$

donde hemos denotado $b = \sum_{i=1}^n N(e_i)$. Esto prueba la segunda parte de la desigualdad (3).

Utilicemos (4) para demostrar que N es una función continua en la norma $\|\cdot\|_\infty$:

La desigualdad triangular nos proporciona:

$$N(x) = N(x - x_0 + x_0) \leq N(x - x_0) + N(x_0),$$

haciendo uso de (4) obtenemos:

$$N(x) - N(x_0) \leq N(x - x_0) \leq b \|x - x_0\|_\infty.$$

Intercambiando los papeles de x y x_0 , llegamos a:

$$N(x_0) - N(x) \leq b \|x - x_0\|_\infty,$$

finalmente,

$$|N(x) - N(x_0)| \leq b \|x - x_0\|_\infty.$$

de esta desigualdad se obtiene inmediatamente la continuidad de N en el punto x_0 , respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Para probar la otra parte de la desigualdad, consideremos el conjunto U de los vectores unitarios en la norma $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbf{R}^n , es decir:

$$U = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_\infty = 1 \right\}.$$

El conjunto U es compacto, luego, por el Teorema de Weierstrass, la función real y continua N alcanza su valor mínimo en U , esto es, existe un $u_0 \in U$ tal que:

$$N(u_0) \leq N(u), \text{ para todo } u \in U.$$

Para cada elemento $x \in \mathbf{R}^n$ ($x \neq 0$) consideremos el elemento:

$$u = \frac{x}{\|x\|_\infty} \in U.$$

Por la propiedad N2) tenemos que:

$$N(u_0) \leq N(u) = N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x).$$

Esta desigualdad demuestra la primera parte de (3), tomando $a = N(u_0)$. Con lo cual completamos la demostración del teorema. ♦

Como dos normas que sean equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí, del teorema anterior podemos concluir:

Cualesquiera dos normas en \mathbf{R}^n son equivalentes.

Observación: En la demostración anterior nos hemos apoyado de forma esencial en que \mathbf{R}^n es un *espacio de dimensión finita*, por ejemplo, cuando utilizamos la representación de un elemento cualquiera en la base canónica y también cuando afirmamos la compactidad del conjunto de los vectores unitarios U .

Un ejemplo de un espacio normado donde existen normas que no son equivalentes lo constituye el espacio $\mathbf{C}[0,1]$ con las normas $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ y $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ (I.2 ejemplo 4).

Ejercicios propuestos

1. Di cuáles de los siguientes conjuntos son compactos en \mathbf{R}^2 :

- a) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1\}$
- b) $\{(x, y) : 0 \leq xy \leq 1\}$
- c) $\{(x, y) : 2x^2 + y^4 \leq 1\}$
- d) La frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$
- e) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$
- f) La frontera del conjunto $\{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 4\}$.

2. a) Prueba que si $A \subset \mathbf{R}^2$ es un conjunto acotado, entonces \bar{A} y $\text{Fr } A$ son conjuntos compactos.

b) ¿Será válido este resultado para un espacio normado arbitrario?

3. a) Sea $\{x^m\}$ una sucesión en \mathbf{R}^n convergente a un punto $x \in \mathbf{R}^n$. Demuestra que el conjunto $A = \{x^m : m = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$ es compacto.

b) Generaliza este resultado a un espacio métrico arbitrario.

4. Demuestra que existe un punto P del hiperboloide $z = xy - 1$ tal que su distancia al origen es la menor posible.
5. Sean K_i $i = 1, 2, \dots$ subconjuntos compactos de \mathbf{R}^n (un espacio normado E). Demuestra que los conjuntos $\bigcup_{i=1}^p K_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ son compactos. ¿Será necesariamente $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ un conjunto compacto?
6. Sean K un subconjunto de \mathbf{R}^n cerrado y no vacío y $a \in \mathbf{R}^n \setminus K$. Prueba que existe $x \in K$ tal que $\|x - a\| = \min_{y \in K} \|a - y\|$. ¿Puede eliminarse la hipótesis de que sea el conjunto cerrado?
7. Se denomina distancia entre dos subconjuntos A y B de \mathbf{R}^n (de un espacio métrico (E, d)) al número:

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

- a) Demuestra que si A es cerrado, B compacto y $A \cap B = \emptyset$, entonces existen $a \in A$, $b \in B$ tales que $d(A, B) = d(a, b) > 0$.
- b) ¿Será cierta la propiedad anterior para dos cerrados disjuntos cualesquiera?
8. Sea A un subconjunto de \mathbf{R}^n . Demuestra que la función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| \text{ es continua.}$$

9. Sea K un compacto de \mathbf{R}^n y $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Dado un $\varepsilon > 0$, prueba que existe una constante M tal que para todo $x, y \in K$ se cumple:

$$|f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\| + \varepsilon.$$

10. Fréchet prueba que en todo espacio métrico la propiedad (AG) para un conjunto F , es equivalente a la propiedad siguiente:

Toda colección $\{F_i\}$ de subconjuntos cerrados, no vacíos de F tales que, $F_{i+1} \subset F_i$ (para todo i) satisface $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. ¡Demuéstralos!

II.5. CONTINUIDAD UNIFORME DE UNA FUNCIÓN

Sin dudas, Bolzano y Cauchy dieron un paso decisivo en la conformación del estilo moderno del estudio de las funciones: aclararon el significado de la continuidad de una función en un intervalo de la recta real. A pesar de ello, su formulación no tenía el grado de precisión que se necesitaba en algunas de sus aplicaciones. Esto provocó que la demostración que realizó Cauchy (1823) del resultado “toda función continua en un intervalo tiene una integral” no pueda ser considerada como totalmente correcta desde un punto de vista contemporáneo.

Para rectificar este “error” fue necesaria una mayor precisión en la noción de continuidad. Eduard Heine, en una memoria dedicada a exponer la teoría weierstrassiana de funciones (1872), clasificó las funciones continuas en un conjunto S : las que son **uniformemente continuas** en S y las que no lo son. Esta distinción le permitió realizar una demostración completamente rigurosa de la integrabilidad de una función continua en un intervalo cerrado. Heine desarrolló sus ideas para funciones reales de una variable real, sin embargo, la generalización de muchas de estas ideas a funciones de varias variables no ofrece ninguna dificultad. Veremos a continuación la noción de continuidad uniforme y algunos resultados relacionados con ella.

Una función $f : S \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ es continua en el conjunto S si ella es continua en cada punto de S . Esto puede reformularse diciendo que:

Para cada $x' \in S$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } x \in S \text{ y } \|x - x'\| < \delta, \text{ entonces } \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon \quad (1)$$

Nótese que *el valor de δ , en general, depende tanto del punto x' como del ε escogido*. El ejemplo siguiente muestra que, en ocasiones, esta dependencia es ineludible.

Ejemplo 1. La función:

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

es continua en todos los puntos del intervalo $(0, 1)$.

La Fig.12 muestra como, para un mismo valor de ε , cuando el punto x' se acerca al cero, los valores de δ que satisfacen (1) son cada vez más pequeños (δ_2 es mucho menor que δ_1). Geométricamente es evidente que no podremos encontrar un único $\delta > 0$ que satisfaga (1) para todo punto x' del intervalo $(0, 1)$.

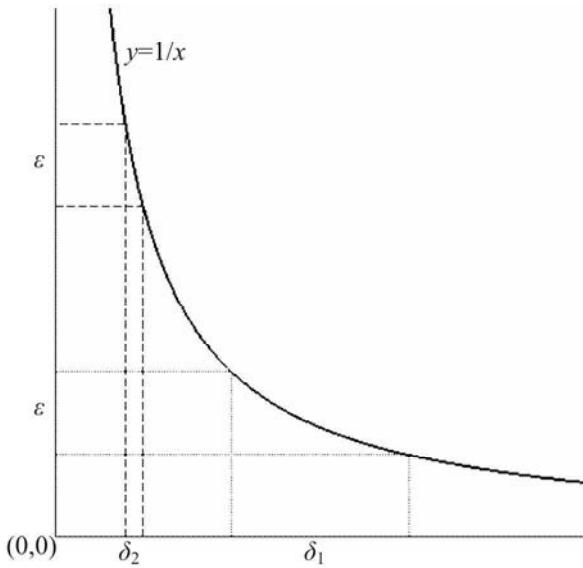


FIGURA 12.

Consideremos la misma función pero restringida al intervalo $(1/2, 1)$, ahora el mismo gráfico nos sugiere que un valor de δ que satisface (1) para el punto $1/2$ también lo satisfará para cualquier otro punto del intervalo considerado.

La esencia de la definición de continuidad uniforme radica precisamente en exigir que, para cada valor de ε , pueda ser encontrado un δ tal que, se satisface (1) con independencia de qué punto x' del conjunto considerado se trate.

Definición 1. Una función $f : S \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ se dice **uniformemente continua** en S si

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } x, x' \in S \text{ y } \|x - x'\| < \delta, \text{ entonces } \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Es evidente de la definición anterior que:

f es continua uniformemente en $E \Rightarrow f$ es continua en E .

La discusión gráfica preliminar sugiere que el recíproco de la afirmación anterior es falso.

Ejemplo 1. (continuación) a) Probemos que la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es continua uniformemente en el intervalo $(a, 1)$, para cualquier $a > 0$.

En efecto, sean $x, x' \in (a, 1)$, entonces $x, x' > a$ y

$$|f(x) - f(x')| = \left| \frac{x-x'}{xx'} \right| \leq \frac{|x-x'|}{a^2}.$$

Así que es suficiente tomar $\delta = \varepsilon \cdot a^2$ para concluir que se cumple (2) y por tanto la continuidad es uniforme.

b) Demostremos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en el intervalo $(0, 1)$. Elijamos dos sucesiones de puntos de forma que estén próximas entre sí, pero que además estén próximas a cero. Por ejemplo, sean:

$$x_n = \frac{1}{2n} \quad \text{y} \quad x'_n = \frac{1}{4n},$$

entonces:

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{4n} \quad \text{y} \quad \frac{|x_n - x'_n|}{x_n x'_n} = 2n \geq 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Así que para $\varepsilon = 2$ y todo $\delta > 0$ se encuentran puntos del intervalo $(0, 1)$ que distan entre sí en menos que δ (basta tomar x_n y x'_n con $n > 1/4\delta$) y la distancia entre sus correspondientes imágenes resulta $> \varepsilon$. Esto demuestra que (2) no tiene lugar y la función no puede ser uniformemente continua.

Ejemplo 2. Consideremos la función:

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{1}{1-x^2-y^2}.$$

Ella es continua en el conjunto:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sin embargo su comportamiento gráfico en las proximidades de la circunferencia unidad (Fig.13) nos sugiere que esta función no es uniformemente continua en D .

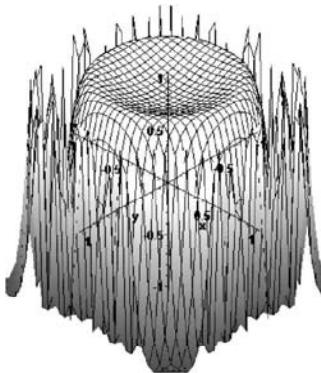


FIGURA 13.

Análogamente al ejemplo anterior, podemos encontrar dos sucesiones (x_n, y_n) y (x'_n, y'_n) de puntos de D que estén próximos entre sí y tales que los correspondientes valores de la función permanezcan distantes.

Cálculos elementales muestran que los puntos:

$$(x_n, y_n) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n\pi}}, 0 \right); \quad (x'_n, y'_n) = \left(\sqrt{1 - \frac{2}{(4n+1)\pi}}, 0 \right),$$

satisfacen:

$$f(x_n, y_n) = 0; \quad f(x'_n, y'_n) = 1 \quad \text{y} \quad \| (x_n, y_n) - (x'_n, y'_n) \| \rightarrow 0.$$

Esto significa que (2) no puede cumplirse para $\varepsilon = 1$.

Veamos que sobre los subconjuntos compactos de \mathbf{R}^n las nociones de continuidad y continuidad uniforme de una función coinciden

Teorema 11. (Heine-Cantor) Si K es un compacto de \mathbf{R}^n y $f : K \rightarrow \mathbf{R}^p$ es continua en K , entonces f es uniformemente continua en K .

◆ Supongamos que f es continua en K pero que su continuidad no es uniforme, es decir, no se cumple (2). Esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $x_\delta, x'_\delta \in K$ que satisfacen:

$$\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta \quad \text{y} \quad \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon.$$

Si asignamos a δ sucesivamente valores que recorran una sucesión infinitesimal, por ejemplo $1/m$, construiremos dos sucesiones $\{x_m\}$ y $\{x'_m\}$ de elementos de K tales que:

$$\|x_m - x'_m\| < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad \|f(x_m) - f(x'_m)\| \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Como K es compacto, existirá una subsucesión $\{x_{k_m}\}$ de $\{x_m\}$ convergente a un elemento x de K . La primera desigualdad en (3) nos indica que la sucesión $\{x'_{k_m}\}$ (subsucesión de $\{x'_m\}$) también será convergente al mismo valor x . Entonces, de la continuidad de la función f en x , se infiere que:

$$f(x_{k_m}) \rightarrow f(x) \quad \text{y} \quad f(x'_{k_m}) \rightarrow f(x),$$

lo que evidentemente es una contradicción con la segunda desigualdad de (3).♦

La demostración que Heine realizó para el teorema anterior (en el caso particular de intervalos cerrados y acotados) difiere esencialmente de la forma en que la hemos expuesto. Heine, de forma implícita utiliza la propiedad siguiente:

Para cualquier familia numerable de intervalos abiertos, tal que todo punto del intervalo $[a,b]$ pertenezca a algún intervalo de la familia, puede encontrarse una subfamilia finita que posea la misma propiedad.

Esta peculiaridad de los intervalos cerrados y acotados fue enunciada explícitamente por Emile Borel en su tesis de doctorado, en 1894. Más tarde, en 1904, Henri Lebesgue observó que la propiedad se mantiene para recubrimientos arbitrarios por intervalos abiertos de un intervalo cerrado y acotado. Es interesante que, tanto Borel como Lebesgue, fueron motivados por las necesidades de resolver problemas relacionados con la “medición” de conjuntos. Sin embargo, las ramas del análisis matemático en que ambos trabajaban eran completamente diferentes: Borel estudiaba los problemas de representación de funciones y Lebesgue se ocupaba en desarrollar la teoría de integración que lleva su nombre. Más tarde, será Borel quien generalizará el resultado a los conjuntos acotados y cerrados de \mathbf{R}^n . Por ello este resultado se conoce como propiedad de Heine-Borel-Lebesgue.

Precisemos algunas definiciones que nos permitirán enunciar en forma más general esta propiedad.

Definición 2. Sea E un subconjunto de un espacio métrico X . Diremos que una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \subset X$ (I es un conjunto de índices arbitrario) es un **cubrimiento por abiertos** del conjunto E si todos los conjuntos A_i son

abiertos y $\bigcup_{i \in I} A_i \supset E$. Llamaremos **subcubrimiento finito** de $\{A_i\}_{i \in I}$ a una subfamilia finita de $\{A_i\}_{i \in I}$ que continúe siendo un cubrimiento de E .

Ejemplos

3. La familia de intervalos abiertos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i = \left(\frac{1}{i}, 1\right)$, es un cubrimiento del intervalo $(0,1)$. También es un cubrimiento de cualquier intervalo cerrado $[a,b] \subset (0,1)$. Nótese que para cubrir al intervalo $[a,b]$ es suficiente considerar

un solo elemento de la familia, basta considerar A_i con $i \geq \frac{1}{a}$. Sin embargo el intervalo $(0,1)$ precisa para cubrirse de todos los miembros de la familia. Esto último indica que el intervalo $(0,1)$ no satisface la propiedad enunciada por Heine.

4. La familia de bolas de centro en cero y radio m , $\{B(0,m)\}_{m=1}^{\infty}$, es un cubrimiento por abiertos del espacio \mathbf{R}^n . Si solo consideramos una cantidad finita de bolas, es claro que no podremos cubrir a todo \mathbf{R}^n . Esto evidencia que para este cubrimiento del conjunto \mathbf{R}^n no se puede encontrar un subcubrimiento finito.

Los ejemplos anteriores muestran que, para los conjuntos que no son cerrados (ejemplo 3) o los que no son acotados (ejemplo 4), los cubrimientos por abiertos, en general, no poseen un subcubrimiento finito. Por tanto, es natural tratar de asociar el cumplimiento de esta propiedad a la compacidad de un conjunto. El teorema siguiente prueba que precisamente la propiedad de extracción de un subcubrimiento finito caracteriza a los conjuntos compactos en \mathbf{R}^n .

Teorema 12. (Heine-Borel-Lebesgue). Un conjunto E es compacto en \mathbf{R}^n si y solo si todo cubrimiento por abiertos de E contiene un subcubrimiento finito.

◆ Realizaremos la demostración para el caso $n = 2$, pero las modificaciones para un n arbitrario son obvias.

Demostremos primeramente la *necesidad* de la condición del teorema. Supongamos que E es compacto, es decir cerrado y acotado, y que exista un cubrimiento por abiertos $\{A_i\}_{i \in I}$ de E tal que ninguna subfamilia finita cubra a E .

Como E es acotado, podemos encerrarlo en un cuadrado Q (ver Fig.14). Dividamos Q en cuatro cuadrados iguales: Q_i , $i = 1, \dots, 4$. La suposición hecha, garantiza que alguno de los conjuntos:

$$Q_i \cap E, i = 1, \dots, 4$$

necesitará para cubrirse de un número infinito de los conjuntos de la familia . Denotemos por E_1 a una de estas intersecciones.

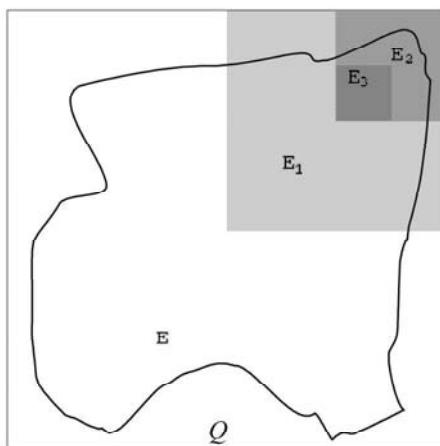


FIGURA 14.

Repitamos el proceso: dividiendo el cuadrado que contiene a E_1 en cuatro cuadrados iguales, encontramos un conjunto $E_2 \subset E_1$ el cual necesitará para cubrirse de infinitos de los elementos del cubrimiento. Continuando sucesivamente este razonamiento obtenemos una sucesión de conjuntos:

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_j \supset E_{j+1} \supset \dots, \quad (4)$$

que satisfacen:

- cada uno de los conjuntos E_j requiere infinitos miembros de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ para ser cubiertos;
- los diámetros de los E_j tienden a cero, cuando $j \rightarrow \infty$:

$$\text{diam}(E_j) \leq \sqrt{2} \frac{\text{lado}(Q)}{2^n}.^3$$

³Llamaremos diámetro de un subconjunto acotado A de un espacio métrico al número $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Para cada j escojamos un $x^j \in E_j$ y verifiquemos que la sucesión $\{x^j\}$ es de Cauchy. Por la propiedad (4), para todo $p > 0$ $x^j, x^{j+p} \in E_j$ y, por tanto:

$$\|x^{j+p} - x^j\| < \text{diá}(E_j) < \varepsilon \quad \text{para } j \text{ suficientemente grande.}$$

Como \mathbf{R}^n es completo, la sucesión $\{x^j\}$ convergerá a cierto límite c . Pero E es cerrado, entonces $c \in E$.

Sea A_{i_0} un abierto del cubrimiento tal que $c \in A_{i_0}$. Por la definición de conjunto abierto, existe una bola con centro en c tal que $B(c, \varepsilon) \subset A_{i_0}$. Como $\text{diam}(E_j) \rightarrow 0$ y $x^j \rightarrow c$ puede encontrarse un k suficientemente grande tal que:

$$\|x^k - c\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \text{diá}(E_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces el conjunto E_k satisface $E_k \subset B(c, \varepsilon) \subset A_{i_0}$. En efecto, para $y \in E_k$ se tiene:

$$\|y - c\| \leq \|y - x^k\| + \|x^k - c\| < \varepsilon,$$

así que $y \in B(c, \varepsilon)$.

Esto significa que E_k está cubierto por A_{i_0} y contradice la suposición de que ningún E_j puede ser cubierto por un número finito de miembros de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$.

Para demostrar la *suficiencia*, supongamos que de todo cubrimiento de E por abiertos se puede extraer un subcubrimiento finito y probemos que E es cerrado y acotado.

Si colocamos en cada punto de E una bola de radio 1, obtendremos el cubrimiento $\{B(x, 1)\}_{x \in E}$ de E . La suposición hecha nos permite extraer un subcubrimiento finito $\{B(x_i, 1)\}_{i=1}^m$, es decir, $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, 1) \supset E$. De donde sigue inmediatamente la acotación de E .

Demostremos que E es cerrado. Para ello consideremos un punto $a \notin E$ y demostremos que a no puede ser punto de acumulación de E . En efecto, para cada $x \in E$ denotemos $r_x = \|x - a\| > 0$. Evidentemente $\{B(x, r_x/2)\}_{x \in E}$ es un cubrimiento por abiertos de E y podemos extraer un subcubrimiento finito

$\{B(x_i, r_i/2)\}_{i=1}^m$. Sea $r = \min_{i=1,\dots,m} r_i/2$ y tomemos la bola $B(a,r)$ con centro en a y radio r . Si $x \in B(a,r)$, entonces, para todo $i = 1,\dots,m$,

$$r_i = \|a - x_i\| \leq \|a - x\| + \|x - x_i\| < \frac{r_i}{2} + \|x - x_i\|,$$

luego $\|x - x_i\| > \frac{r_i}{2}$. Esto significa que para todo $i = 1,\dots,m$,

$$B(a,r) \cap B\left(x_i, \frac{r_i}{2}\right) = \emptyset.$$

Así que $B(a,r) \cap E = \emptyset$, lo que prueba que a no puede ser punto de acumulación de E .♦

El ejemplo siguiente muestra la necesidad, para la validez del teorema, de la exigencia de que sean abiertos los conjuntos del cubrimiento:

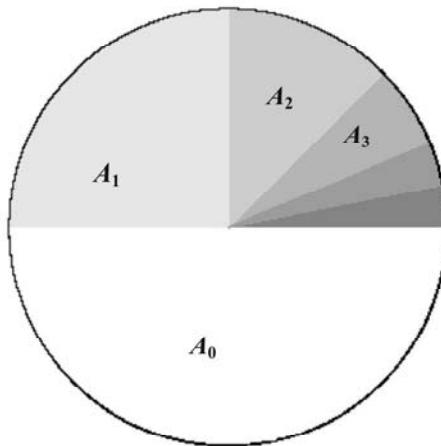


FIGURA 15.

Ejemplo 5. La familia $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ donde A_i son los puntos $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ del plano que satisfacen:

$$0 \leq r \leq 1, \quad \frac{\pi}{2^i} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2^{i-1}}$$

es un cubrimiento (por conjuntos que no son abiertos) del conjunto compacto $E = \{x : \|x\| \leq 1\}$.

Evidentemente si se omite cualquier conjunto de la familia esta deja de ser un cubrimiento de E (ver Fig.15).

Observación: La demostración que hicimos del teorema 12 es específica para el espacio \mathbf{R}^n . En ella hicimos uso de la equivalencia entre la compactidad de un conjunto y el hecho de ser cerrado y acotado. Por otra parte, realizamos una construcción mediante la división de un cuadrado (o su equivalente geométrico en espacios de dimensión mayor) en partes. Sin embargo, el resultado en sí mismo es completamente válido en un espacio métrico arbitrario. Enunciemos, sin demostración, el teorema general:

Teorema 12'. Un subconjunto E de un espacio métrico X es compacto si y solo si de todo cubrimiento de E por abiertos puede extraerse un subcubrimiento finito.

Observaciones: 1) El teorema 12' significa que la propiedad de los cubrimientos también puede ser tomada como definición de compactidad en un espacio métrico y, en particular, en \mathbf{R}^n .

2) La definición dada de continuidad uniforme para una función definida entre subconjuntos de \mathbf{R}^n es fácilmente generalizable a funciones entre espacios normados o métricos generales, con las sencillas adaptaciones comentadas en otras ocasiones. El Teorema 11 de Heine-Cantor, así como su demostración es completamente válida para espacios métricos generales.

2) El Teorema II.3.8' (de Weierstrass) tiene una demostración sencilla y elegante utilizando la caracterización de los compactos dada por el teorema 12'. También el teorema 11 puede demostrarse, de manera natural, usando esta propiedad.

Ejercicios propuestos

1. Analiza si son uniformemente continuas las funciones siguientes en los conjuntos que se indican:

a) $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ en \mathbf{R}^n .

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $A = \{(x, y) : 3x^2 + 2y^2 < 1\}$ y $B = \{(x, y) : y \leq x\}$.

c) $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{2-x^2-y^2}$ en $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

2. Demuestra que $f(x,y) = \arcsen \frac{x}{y}$ es continua en su dominio, pero no es uniformemente continua en él.
3. Sean $f, g : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ uniformemente continuas en A .
- Demuestra que para cualesquiera constantes α y β la función $\alpha f + \beta g$ es uniformemente continua en A .
 - Demuestra que el producto $f \cdot g$ no tiene necesariamente que ser una función uniformemente continua. **Sugerencia:** Considera la función $f(x) = x \sen x$ en \mathbf{R} .
 - ¿Qué condiciones adicionales podríamos exigir a f y g para que el producto sea $f \cdot g$ una función uniformemente continua?
4. Sea $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.
- Prueba que f es uniformemente continua en A si y solo si para todo par de sucesiones $\{x^k\}, \{y^k\}$ de elementos de A tales que $x^k - y^k \rightarrow 0$ se cumple que $f(x^k) - f(y^k) \rightarrow 0$.
 - Si f es uniformemente continua, entonces la imagen de cualquier sucesión de Cauchy de elementos de A es también una sucesión de Cauchy.
 - Da un ejemplo de una función continua en un conjunto A y una sucesión $\{x^k\}$ de elementos de A que satisface la condición de Cauchy, pero tales que la sucesión $\{f(x^k)\}$ no es de Cauchy.
 - Si f es uniformemente continua en A , entonces existe una única función continua $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que coincide con f en los elementos del conjunto A .
5. a) Demuestra que si f satisface una condición de Lipschitz en A (II.3 ejercicio 7), entonces es uniformemente continua en A .
- b) Demuestra que el recíproco de a) no es cierto. **Sugerencia:** $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0,1]$.
- c) Demuestra que si $f : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$ ((a,b) es un intervalo finito o infinito) es derivable y existe una constante M tal que $|f'(x)| \leq M$, entonces f es uniformemente continua en (a,b) .
6. Sean $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow B \subset \mathbf{R}^n$ y $g : B \rightarrow \mathbf{R}^p$ uniformemente continuas en A y B respectivamente. Prueba que $g \circ f$ es uniformemente continua en A .

7. Señala si las funciones siguientes son uniformemente continuas en los conjuntos que se indican:

a) $f(x) = \cos^2 x$ en \mathbf{R}

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en \mathbf{R}

c) $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ en \mathbf{R}

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en \mathbf{R}^2

e) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2xy + 1}$ en \mathbf{R}^2

f) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f(0, 0) = 0$ en \mathbf{R}^2

Sugerencia: Pueden resultar útiles algunos de los resultados de los ejercicios 3, 4, 5 y 6.

8. Prueba que toda función definida y continua sobre un espacio métrico discreto es uniformemente continua.

II.6. CONTINUIDAD Y CONEXIÓN

El título del trabajo de Bolzano donde aparece su definición de función continua: *Una demostración puramente analítica del teorema que entre cualesquier dos valores los cuales dan resultados de signo opuesto, hay al menos una raíz real de la ecuación*, indica claramente lo que motiva esta definición. Bolzano comenta que la clase más común de prueba depende de la *geometría*, más exactamente del hecho de que *cada curva continua de simple curvatura (curva plana) para la cual la ordenada es primero positiva y después negativa debe necesariamente intersecar al eje X en algún punto que está entre estas ordenadas*.

Esto es, Bolzano se proponía dar una justificación analítica al hecho geométrico intuitivo, y universalmente aceptado hasta ese momento, de que una curva continua no puede pasar de un valor a otro sin tomar los valores intermedios.

En este epígrafe generalizaremos este resultado de Bolzano para el caso de funciones de varias variables. Consideraremos previamente el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1. La función $f : [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1] \\ -1 & , x \in [2, 3] \end{cases}$$

es continua en todo los puntos de su dominio, el conjunto $D = [0,1] \cup [2,3]$. Por otra parte, es claro que esta función no toma ningún valor comprendido entre -1 y 1 . ¿Cuál es el motivo de que esta función no cumpla la propiedad del Teorema de Bolzano? Observemos que, aunque f es continua, su dominio D “no es continuo”.

El ejemplo anterior nos sugiere que para una extensión de la propiedad de alcanzar los valores intermedios no solo es necesaria la continuidad de la función si no que, además, se necesita que el dominio posea cierta propiedad de “continuidad”.

Comencemos preguntándonos ¿Cuál es la propiedad característica de los intervalos en \mathbf{R} ? Podemos fácilmente comprobar que:

Un conjunto I en \mathbf{R} es un intervalo (abierto, cerrado, finito, infinito, ...) si y solo si cualesquiera sean $x, y \in I$ el intervalo $[x,y] \subset I$.

Es decir, **se pueden unir por un segmento de recta contenido en I** . Siguiendo esta idea podríamos considerar en \mathbf{R}^2 los conjuntos tales que dos puntos cualesquiera se puedan unir por un “arco de curva” totalmente contenida en el conjunto. Pero ¿qué es un arco de curva que une dos puntos en \mathbf{R}^2 ? ¿y en \mathbf{R}^n ? La definición siguiente introduce el concepto arco que une dos puntos en \mathbf{R}^n .

Definición 1. Diremos que C es una **curva** o un **arco que une a los puntos x y z** si existe una función continua $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, tal que:

$$\varphi(0) = x, \quad \varphi(1) = z \quad y \quad C = \varphi([0,1]).$$

Observación: En la definición anterior podemos tomar un intervalo cerrado cualquiera $[a,b]$ en lugar del intervalo $[0,1]$. En efecto, sea $\psi : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que satisface:

$$\psi(a) = x, \quad \psi(b) = z, \quad C = \psi([a,b]).$$

La función $g : [0,1] \rightarrow [a,b]$ dada por $g(t) = bt + a(1-t)$ es continua, biyectiva y cumple $g(0) = a$ y $g(1) = b$. De modo que la función compuesta $\varphi = \psi \circ g$ es continua y verifica las condiciones de la definición 1.

Ejemplos

2. Si a y b son dos puntos cualesquiera de \mathbf{R}^n , la función $\varphi(t) = bt + a(1-t)$, $t \in [0, 1]$, es continua y $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, así que determina un arco que une los puntos a y b . Cuando $n = 2$ o 3 φ describe las ecuaciones paramétricas del segmento de recta que une a los puntos a y b . Por analogía, también en \mathbf{R}^n este arco será denominado el **segmento de recta que une a y b** .

3. La función:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad \text{con } t \in [0, \alpha]$$

es continua y, por tanto, representa un arco que une los puntos $(1,0)$ y $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Todos los puntos del arco están sobre la circunferencia unidad con centro en el origen. (Fig. 16).

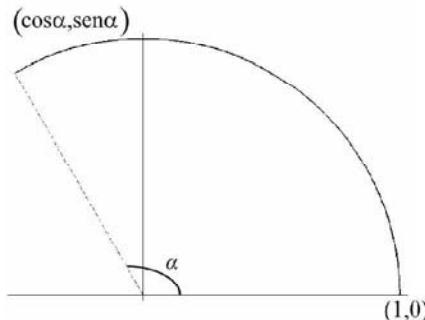


FIGURA 16.

Definición 2. Un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ se dice **conexo** (o más precisamente, **conexo por arcos**) si para cualesquiera sean $x, y \in A$ existe un arco que los une y está totalmente contenido en E , es decir:

Para todo $x, y \in A$ existe una función continua $\varphi: [0,1] \rightarrow A$ tal que $\varphi(0) = x$; $\varphi(1) = y$.

Ejemplos

4. Un intervalo I en \mathbf{R} es un conjunto conexo. En efecto, dados dos puntos $a, b \in I$ (podemos suponer $a < b$) la función:

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(t) = bt + a(1-t)$$

es continua y satisface $g(0) = a$, $g(1) = b$, $a \leq g(t) \leq b$ para todo $t \in [0,1]$. Utilizando la propiedad característica de los intervalos, esto significa que $g(t) \in I$ lo que concluye la prueba de la conexidad de I .

Lo más interesante de este ejemplo es su recíproco:

Los únicos subconjuntos conexos de \mathbf{R} son los intervalos.

◆ Probemos esta última afirmación. Sea $I \subset \mathbf{R}$ un conjunto conexo, entonces, para todo $a,b \in I$ ($a < b$) existe una función continua $\varphi : [0,1] \rightarrow I$ tal que $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Por el Teorema de Bolzano para funciones reales de variable real, φ alcanza todos los valores entre a y b , luego estos valores están obligatoriamente en I , es decir, $[a,b] \subset I$. Con ello verificamos que I es un intervalo.♦

5. La bola:

$$B = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1 \right\}$$

es un conjunto conexo.

En efecto, si $a,b \in B$ entonces $\|a\| < 1$ y $\|b\| < 1$, por tanto:

$$\|bt + a(1-t)\| \leq t\|b\| + (1-t)\|a\| < 1.$$

Esto significa que el segmento de recta que une a a y b está contenido en B , lo que demuestra que es conexo. Observemos que también \bar{B} es conexo.

Observaciones: 1. Con un razonamiento análogo puede probarse que cualquier bola en \mathbf{R}^n es un conjunto conexo.

2. En realidad hemos demostrado una propiedad más fuerte que la conexidad para las bolas en \mathbf{R}^n . Hemos probado que *dados dos puntos cualesquiera de la bola el segmento de recta que los une está totalmente contenido en la bola*. A los conjuntos que poseen esta propiedad se les llama **convexos**. Así que:

Toda bola en \mathbf{R}^n es un conjunto convexo.

La caracterización obtenida en el ejemplo 4 para los intervalos de \mathbf{R} , nos permite reformular el teorema de Bolzano para funciones reales de variable real en una forma más general:

La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Veamos una generalización natural de este teorema para subconjuntos de \mathbf{R}^n .

Teorema 13. Sea $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ una función continua y A un conjunto conexo. Entonces $f(A)$ es también conexo.

◆ Sean dos puntos cualesquiera $y_1, y_2 \in f(A)$, y probemos que hay un arco de curva que los une y está contenido en $f(A)$. Por definición de conjunto imagen, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como A es conexo encontramos una función continua $\varphi : [0,1] \rightarrow A$ que satisface $\varphi(0) = x_1$ y $\varphi(1) = x_2$.

La función compuesta $f \circ \varphi : [0,1] \rightarrow f(A)$ también será continua y cumple:

$$(f \circ \varphi)(0) = f(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad (f \circ \varphi)(1) = f(x_2) = y_2 .$$

Así que define un arco que une los puntos y_1 y y_2 . Con esto se demuestra la conexidad de $f(A)$.◆

En el caso particular de funciones que toman valores reales podemos enunciar:

Corolario. Si una función $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ es continua sobre un conjunto conexo A , entonces toma todos los valores intermedios entre dos valores cualesquiera.

Observación. En el capítulo siguiente, cuando estudiemos la diferenciación de funciones, nos interesarán especialmente los conjuntos de \mathbf{R}^n que sean simultáneamente abiertos y conexos. Tales conjuntos los denominaremos **dominios** o **regiones** y ellos poseen una propiedad interesante: dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos mediante una línea poligonal. Precisemos lo anterior:

Llamaremos **poligonal que une a dos puntos** $a, b \in \mathbf{R}^n$ a un arco que une estos dos puntos y está compuesto por la unión de un número finito de segmentos de rectas. Probemos la propiedad siguiente:

Cualesquiera dos puntos de un dominio D pueden unirse por una poligonal contenida en D .

◆ El conjunto D es conexo, luego dados $x, y \in D$, existe una curva $\Gamma \subset D$ determinada por una función continua $\varphi : [0,1] \rightarrow D$, tal que $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$ (Fig.17).

Cada partición del intervalo $[0,1]$ determinará una poligonal inscrita en la curva Γ . Construyamos una poligonal inscrita en Γ y que esté totalmente contenida en D .

El conjunto D es abierto, por tanto, su complementario D^c es un conjunto cerrado y como Γ es un conjunto compacto, entonces (II.4 ejercicio 7) la distancia:

$$r = d(\Gamma, D^c) = \inf \left\{ d(x, y) : x \in \Gamma, y \in D^c \right\},$$

es un número positivo.

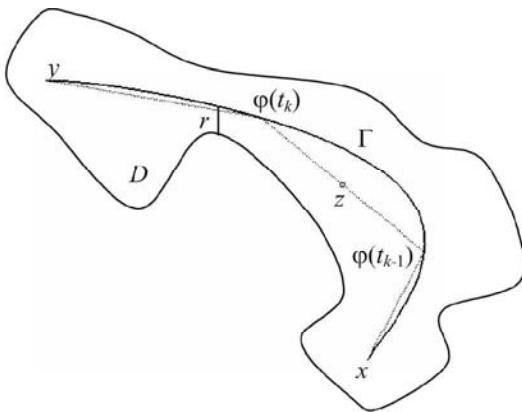


FIGURA 17.

En virtud de la continuidad uniforme de φ en $[0,1]$ podemos escoger una partición $\{t_i\}_{i=0}^p$ de $[0,1]$ tal que:

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < r, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p.$$

Verifiquemos que la poligonal que une los puntos $\{\varphi(t_i)\}_{i=0}^p$ está contenida en D . En efecto, sea z un punto de Γ , entonces existirá un $k \in \{1, \dots, p\}$ tal que z está sobre el segmento que une a los puntos $\varphi(t_{k-1})$ y $\varphi(t_k)$. Luego:

$$\|z - \varphi(t_k)\| \leq \|\varphi(t_{k-1}) - \varphi(t_k)\| < r,$$

lo que significa que la distancia de z a Γ es menor que r , por tanto $z \in D$. ◆

Las definiciones 1 y 2 de arco y de conjunto conexo por arcos pueden ser extendidas sin ninguna dificultad a los espacios métricos generales. Esta noción de conexidad por arcos es una de las diferentes maneras en que puede concebirse un conjunto conexo y es suficiente para los objetivos propuestos en este texto. Aquí no haremos uso de otra concepción de conexidad, por tanto, excepto en este comentario, hemos suspendido el calificativo “por arcos”. No obstante, mencionemos brevemente una forma más general de definir la idea de que un conjunto “está compuesto de una sola pieza”.

Se dice que un subconjunto E de un espacio métrico X es **conexo** si E no puede ser descompuesto como la unión de dos conjuntos abiertos A y B , no vacíos y tales que $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$. Puede demostrarse que:

Todo conjunto de un espacio métrico conexo por arcos es siempre conexo.

Sin embargo, existen conjuntos conexos tales que sus puntos no pueden ser unidos mediante arcos, como lo evidencia geométricamente el conjunto:

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 : y \in [-1, 1]\} \quad (\text{Fig. 18})$$

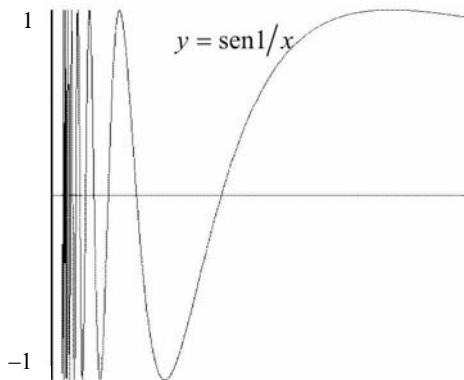


FIGURA 18.

La demostración formal de que el conjunto anterior es conexo, pero no conexo por arcos la dejamos como un reto al lector.

Para los conjuntos de números reales, ambas nociones de conexidad coinciden y los únicos conjuntos que la poseen son los intervalos.

En el caso particular del espacio \mathbf{R}^n , se tiene un resultado que explica el porqué en un futuro no necesitaremos realizar la distinción entre las nociones de conexidad y conexidad por arcos: *Todo conjunto abierto y conexo de \mathbf{R}^n es conexo por arcos.*

El teorema 13 es válido en un espacio métrico general, tanto para la conexidad por arcos, como para la forma que hemos descrito en este comentario.

La noción de segmento de recta puede ser generalizada a un espacio normado arbitrario y por tanto a estos espacios se generaliza el concepto de convexidad de un conjunto. La demostración realizada de la convexidad de las bolas en \mathbf{R}^n es válida palabra por palabra para un espacio normado cualquiera.

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son conexos?

- a) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1\}$,
- b) $\{(x, y) : 0 \leq xy \leq 1\}$,
- c) $\{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 1\}$,
- d) $\{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 4\}$,
- e) La frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
- f) La frontera de un conjunto compacto.
- g) La frontera de un conjunto conexo.
- h) Un subconjunto finito de \mathbf{R}^n .

2. Indica si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

- a) A y B conexos $\Rightarrow A \cup B$ conexo
 - b) A y B conexos, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B$ conexo
 - c) A conexo $\Rightarrow A^c$ conexo
3. Sea $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua tal que para todo $x \in A$, $f(x)$ es un entero. Prueba que f es constante. ¿Qué ocurre si $f(x)$ es racional?
4. Sean $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua y A un conjunto compacto y conexo. Demuestra que existen a y b tales que $f(A) = [a, b]$.
5. ¿Será una bola en un espacio métrico cualquiera un conjunto conexo?
6. Si f es una función definida entre dos espacios normados. ¿Se cumplirá que la imagen por una función continua de un conjunto convexo es también un conjunto convexo?
7. Demuestra que, en un conjunto abierto y conexo de \mathbf{R}^n , dos puntos cualesquiera pueden unirse por una poligonal que tenga todos sus lados paralelos a alguno de los ejes coordenados.

Ejercicios complementarios

1. Analiza la acotación y la continuidad uniforme de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \quad \text{en el conjunto } A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$2. \text{ Sea } f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2x}{y+x^4}, & y > x^2 \\ 0, & -x^2 \leq y \leq x^2 \\ y(x-1), & y < -x^2 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en su dominio.

b) ¿Es f uniformemente continua en $B = \{(x,y) : x=0, 0 \leq y \leq 1\}$?

c) Sea $A = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. ¿Es f acotada en A ?

$$3. \text{ Sea } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^2}{x^6}, & y^2 < x^4 \\ 0, & y^2 \geq x^4 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en \mathbf{R}^2 .

b) Sea $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. ¿Es $f(B)$ un conjunto compacto?

$$4. \text{ Sea } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y+x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & xy > 0 \\ 0, & xy \leq 0 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en su dominio.

b) ¿Es f uniformemente continua en $A = \{(x,y) : y = |x| < \pi\}$?

c) Sea $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, demuestra que $f(B)$ es un intervalo.

d) ¿Es f acotada en el conjunto B ?

5. Sea la función:

$$(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y}, & y > -x^2 \\ x^2 y^2, & y \leq -x^2 \end{cases}$$

a) Halla el dominio de continuidad de f .

b) ¿Es f acotada en el conjunto $A = \{(x,y) : |x| < 1, y > 0\}$?

- c) Sea $B = \{(x, y) : |x| < 1, 0 < y < 2\}$. Prueba que $f(\bar{B})$ es un intervalo cerrado.
- d) Analiza la continuidad uniforme de f en A y B .
6. En cada uno de los casos siguientes, da un ejemplo de una función continua f tal que $f(S) = T$ o indica por qué una tal función no puede existir.
- a) $S = (0, 1)$, $T = (0, 1]$
 - b) $S = [0, 1)$, $T = (0, 1) \cup (1, 2)$
 - c) $S = \mathbf{R}$, $T = \square$
 - d) $S = [-1, 1] \cup [2, \infty)$, $T = \{-1, 1\}$
 - e) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $T = \mathbf{R}^2$
 - f) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
 - g) $S = (0, 1) \times (0, 1)$, $T = \mathbf{R}^2$
7. Sea el espacio métrico dado por el conjunto $S = [0, 1] \cup (2, 3)$ con la distancia usual en \mathbf{R} .
- a) Determina, en dependencia del radio, la forma de las bolas con centro en el punto 0.
 - b) Analiza si, en el espacio S , son abiertos, cerrados o ambas cosas los conjuntos siguientes:
 $[0, 1], (2, 3), (1/2, 1] \cup (2, 5/2), (0, 1/2] \cup (2, 5/2)$.
 - c) ¿Será el conjunto $(2, 3)$ un compacto de S ?
 - d) ¿Es S un espacio métrico completo?
8. Consideremos un espacio métrico discreto (E, d) .
- a) Determina cuáles son los conjuntos abiertos, cerrados, compactos y conexos.
 - b) ¿Será un espacio completo?
 - c) Determina cuáles funciones $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \rightarrow E$ son continuas.

9. Definamos la distancia de un punto p a un subconjunto S de un espacio métrico E como

$$d(p, S) = \inf_{x \in S} d(p, x)$$

- a) Prueba que p es punto de acumulación de S si y solo si $d(p, S) = 0$.
 - b) Demuestra que la función $f(p) = d(p, S)$ es uniformemente continua sobre E .
10. Sea $f : D \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $E \subset D$. Se llama **oscilación de f en el conjunto E** al número

$$w(f; E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Denominaremos *oscilación de f en el punto $a \in D$* al valor:

$$w(f, a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} w(f, B(a, r) \cap D).$$

Demuestra que:

- a) El límite que define $w(f, a)$ existe.
 - b) Existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ hay una vecindad de a , $V(a)$, tal que $w(f, V^*(a)) < \varepsilon$.
 - c) f es continua en $a \in D$ si y solo si $w(f, a) = 0$.
 - d) Supongamos que $D = \mathbf{R}^m$, entonces $\{x : w(f, x) \geq \varepsilon\}$ es un subconjunto cerrado de \mathbf{R}^m .
11. Consideremos en \mathbf{R}^n un conjunto E abierto y convexo tal que $0 \in E$ y E es simétrico respecto al origen. Demuestra que puede definirse una norma $\|\cdot\|$ en \mathbf{R}^n tal que $E = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}$.
12. Sea f uniformemente continua en el conjunto acotado $S \subset \mathbf{R}^n$. Prueba que f es acotada en S .
13. Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto conexo que contiene más de un punto. Demuestra que cada punto de A es de acumulación.

14. Sea $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que satisface las dos condiciones siguientes:

- $f(K)$ es compacto cuando K es un compacto de \mathbf{R}^n .
- Si $\{K_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de \mathbf{R}^n , entonces:

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n).$$

Demuestra que f es continua.

15. Sea $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua. Prueba que el conjunto $G = \{(x, y) : y = f(x)\}$ es un conjunto cerrado. ¿Será cierto el recíproco?

16. Sea $f : B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 < 1\} \rightarrow B$ continua tal que para todo $x \neq 0$ se cumple $\|f(x)\| < \|x\|$. Consideremos un elemento x_0 de B no nulo y definamos recursivamente la sucesión $\{x_k\}$ mediante $x_k = f(x_{k-1})$. Demuestra que $\lim x_k = 0$.

17. Supongamos que $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es continua y satisface:

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \lambda \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ y algún } \lambda > 0.$$

Prueba que F es biyectiva y tiene una inversa continua.

18. Demuestra que:

- Si cada función continua $f : E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es acotada en E , entonces E es compacto.
- Si para cada función continua $f : E \rightarrow \mathbf{R}$, la imagen $f(E)$ es un compacto, entonces E es compacto.

19. Se dice que una aplicación lineal L entre dos espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ es *acotada* si existe una constante M tal que

$$\|L(x)\|_F \leq M \|x\|_F.$$

- Demuestra que una aplicación lineal entre espacios normados es continua si y solo si está acotada.

- b) Consideremos el espacio $E = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)\}$ de las sucesiones con un número finito de elementos no nulos con la norma $\|x\| = \sum |x_i|$. Demuestra que la función $L: E \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$L(x) = \sum i x_i .$$

es lineal, pero no es continua.

- c) Prueba que el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ de las aplicaciones lineales acotadas es un espacio normado si para $L \in \mathcal{L}(E, F)$ se considera:

$$\|L\| = \inf \left\{ M : \|L(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \text{ para todo } x \in E \right\}$$

CAPÍTULO III

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES

DE VARIAS VARIABLES

INTRODUCCIÓN

Cuando deseábamos investigar la variación de una función de una variable real en una vecindad suficientemente pequeña de un punto, el concepto básico con el que trabajábamos era el de derivada en ese punto. Sin embargo, esta noción no está presente en la obra de los pioneros del **cálculo diferencial**. Como lo indica su nombre, en esta rama de la matemática, se resolvían problemas calculando con los **diferenciales** de las variables involucradas. Solo un siglo después del surgimiento del cálculo es que aparecerá la noción de derivada de una función y se irá convirtiendo poco a poco en un concepto matemático básico. De esta forma el concepto diferencial, desde un punto de vista teórico, pasó a un “segundo” plano: a él se acudía fundamentalmente cuando se querían resolver problemas de carácter geométrico o físico.

En su texto sobre *Cálculo diferencial* (1755), Leonard Euler enuncia claramente la regla para calcular el diferencial de una función V de dos variables:

“Primero consideraremos como variable solo a la magnitud x , la otra magnitud y la consideraremos constante y hallamos el diferencial de la magnitud V , el cual podemos suponer que es pdx . A continuación consideraremos como variable solo a la magnitud y , la otra magnitud x es constante y buscaremos el diferencial de la magnitud V , el cual podemos suponer igual a qdy . Entonces, considerando ambas cantidades x e y como variables, tendremos $dV = pdx + qdy$.

Las p y q halladas según la regla de Euler son lo que hoy denominamos **derivadas parciales** respecto a x e y de la función V . Por ejemplo, si $V = xy$ y derivamos respecto a x , considerando y como constante, obtenemos y . Análogamente, si se deriva respecto a y , considerando x como constante, se obtiene x . Entonces $dV(x,y) = xdy + ydx$. Nótese que, en la metodología euleriana, el cálculo de las derivadas parciales no es más que un paso intermedio hacia el objetivo principal: **el cálculo del diferencial**.

La forma de trabajar con los diferenciales de funciones de varias variables evolucionó en la obra de los matemáticos, en el siglo XVIII y buena parte del XIX. Paulatinamente se fueron introduciendo nuevas notaciones, una terminología adecuada y algoritmos eficientes para el cálculo. No obstante, la esencia del tratamiento euleriano no varió demasiado. Por ejemplo, recordemos el razonamiento ingenuo de Cauchy cuando, el análisis del incremento de una función de dos variables lo reduce al mero estudio por separado de los incrementos parciales respecto a cada variable.

Solo a fines del siglo XIX, cuando aparecen ejemplos de funciones diferentes de las obtenidas por simples combinaciones de las funciones elementales, se produce un cuestionamiento inevitable a este tratamiento “por separado” de cada una de las variables.

La función dada como contraejemplo por Hermann Schwarz (II.3, ejemplo 5):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es discontinua en $(0,0)$, no obstante si hacemos y constante igual a cero se obtiene la función idénticamente nula. Esto significa que la derivada parcial respecto a x en $(0,0)$ existe y es cero. El mismo razonamiento muestra que la derivada parcial respecto a y en $(0,0)$ también existe y es cero. Si hacemos uso de la regla enunciada por Euler entonces $df = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0$. El comportamiento de esta función contrastaba fuertemente con las propiedades conocidas para las funciones de una variable.

Con solo exigir la existencia de la derivada en un punto de una función de una variable, se asegura su “buen comportamiento” en dicho punto: la función será continua y su gráfico tendrá recta tangente en el punto correspondiente. Sin embargo, *una función de varias variables podía tener derivadas parciales en un punto y no ser continua en él*, es decir, la existencia de las derivadas parciales no garantiza el “buen comportamiento” de una función de varias variables.

La situación descrita anteriormente provocó el surgimiento de diferentes tentativas, más o menos exitosas, para dar una definición de diferencial de una función que no tuviera estos inconvenientes. Sin embargo, la que ejerció una influencia mayor en el futuro desarrollo del análisis matemático fue la de Maurice Fréchet.

En una nota de solo tres páginas publicadas en 1911, Fréchet comenta que “la definición generalmente adoptada para el diferencial de una función de varias variables presenta, desde los puntos de vista lógico y pedagógico, serios inconvenientes que pueden ser evitados si se modifica esta definición”. Entonces expone las diferencias que existen con lo establecido para las funciones de una variable y enuncia detalladamente su definición para el caso de funciones de cuatro variables. Es interesante señalar que, a pesar de la brevedad de la nota, Fréchet se preocupó por la argumentación geométrica de la nueva definición propuesta “para que no le reprochen que sea artificial y arbitrariamente seleccionada”. Sin embargo, la ventaja mayor que le encuentra es la posibilidad de generalización para funciones definidas en espacios abstractos de infinitas dimensiones.

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos y herramientas básicas de la diferenciación de funciones entre los espacios \mathbf{R}^n y algunas de sus aplicaciones más inmediatas. En la introducción de la noción de función diferenciable y diferencial, seguiremos el punto de vista expuesto por Fréchet, lo cual nos permitirá comentar brevemente la forma en que estas nociones pueden ser extendidas a los espacios normados.

III.1. PRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL DIFERENCIAL

Una función de una variable $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que tiene derivada en un punto $x_0 \in (a, b)$ cuando existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Esta expresión puede ser rescrita en la forma:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h = df(x_0)(h) + \varepsilon(h)h,$$

donde $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$ y $df(x_0)(h)$ denota el diferencial de f en el punto x_0 correspondiente al incremento h de la variable independiente. En otras palabras, el diferencial en un punto no es más que la “parte principal” (y lineal respecto a h) del incremento de la función en dicho punto. Por esta

razón, en muchas aplicaciones, el diferencial resulta un aproximante sencillo y excelente de este incremento:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h).$$

La aproximación anterior, desde un punto de vista geométrico, equivale a la sustitución de una “pequeña” porción de la curva $y = f(x)$, entorno al punto x_0 , por una porción de su recta tangente en dicho punto (Fig. 1):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

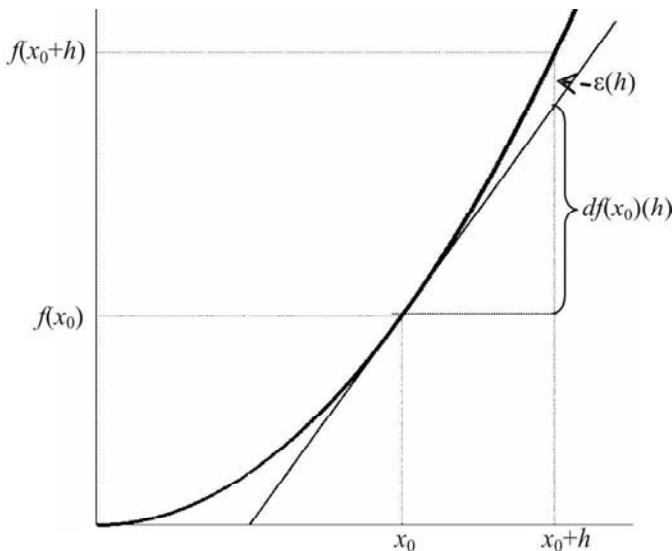


FIGURA 1.

Así que, para las funciones de una variable, son totalmente equivalentes las nociones de función con diferencial y función con derivada. Sin embargo, ya comentamos en la introducción que la extensión natural de la noción de derivabilidad para las funciones de dos o más variables, las derivadas parciales, presentan fallas importantes. Sería completamente absurdo proponer una “aproximación” como:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \approx 0$$

por pequeños que sean x e y o tratar de aproximar el gráfico de la función anterior (II.1, Fig.1) por una porción del plano XY.

Entonces resulta natural adoptar el punto de vista de Fréchet: “retomar la antigua definición, hoy generalmente abandonada, de que el diferencial es la parte principal del incremento de la función cuando el incremento de la variable es considerado como infinitamente pequeño”. Desde una perspectiva geométrica, esto significa que la superficie dada por $z = f(x, y)$ tiene en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un “plano tangente” único.

Sea una función continua de dos variables, $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, y (x_0, y_0) un punto interior de D . Queremos encontrar un plano que pase por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y “aproxime” a la superficie $z = f(x, y)$ (Fig. 2). La ecuación de un plano que pasa por el punto indicado debe ser de la forma:

$$z = f(x_0, y_0) + A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0)$$

donde A_1, A_2 son constantes.

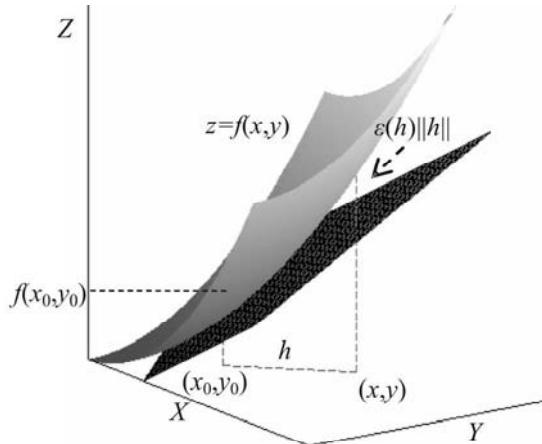


FIGURA 2.

Luego necesitamos valores de A_1 y A_2 tales que se cumpla:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + \varepsilon(h)\|h\|,$$

donde $h = (h_1, h_2) = (x - x_0, y - y_0)$ y $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$.

La ecuación anterior puede ser rescrita:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \varepsilon(h)\|h\|. \quad (1)$$

Supongamos que la función f cumple (1) y hallemos los valores que deben tomar las constantes A_1 y A_2 . Para ello podemos considerar vectores incrementos h , que simplifiquen (1). Por ejemplo, si tomamos $h = (h_1, 0)$, esta relación se convierte en:

$$f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) = A_1 h_1 + o(|h_1|),$$

de donde sigue inmediatamente que:

$$A_1 = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1}.$$

Observemos que A_1 es el límite de un cociente incremental, respecto a la variable x , en el numerador del cual aparece el incremento de la función f , considerando a la variable y tomando el valor constante y_0 . Es decir A_1 es la **derivada parcial de f respecto a x** en el punto (x_0, y_0) . Análogamente, considerando $h = (0, h_2)$, se encuentra:

$$A_2 = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2}.$$

y A_2 es la **derivada parcial de f respecto a y** en (x_0, y_0) . Luego hemos probado que si f satisface (1), entonces existen las derivadas parciales de f en el punto (x_0, y_0) y el plano tangente tiene por ecuación:

$$z = f(x_0, y_0) + A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0).$$

Estos razonamientos son los que motivan a Fréchet a asumir como condición básica la verificación de la relación (1), y a las funciones que satisfacen esta relación las denomina **funciones diferenciables** en el punto (x_0, y_0) . Además, el **diferencial de f en (x_0, y_0)** será la parte lineal del incremento de la función, es decir, $A_1 h_1 + A_2 h_2$. De este modo, toda función f de dos variables, diferenciable en un punto, tiene derivadas parciales en ese punto y además, la superficie $z = f(x, y)$ posee un plano tangente que la “aproxima” en una vecindad del punto correspondiente.

III.2. FUNCIONES DIFERENCIABLES

Hasta ahora hemos desarrollado los razonamientos para las funciones reales de dos variables, pero el mayor interés de este enfoque radica en que ellos pueden ser extendidos para funciones mucho más generales. Por esta razón daremos

las definiciones formales para el caso de funciones definidas en subconjuntos de \mathbf{R}^n y que toman valores en \mathbf{R}^m , aunque, por supuesto, para las interpretaciones geométricas nos auxiliaremos de **valores particulares** de n y m .

Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ y $x_0 \in D^\circ$, entonces existe una bola con centro x_0 y un cierto radio r contenida en D . Para todo vector incremento $h \in \mathbf{R}^n$, de norma menor que r , tiene sentido calcular el incremento $\Delta f(x_0, h)$ de la función en el punto x_0 :

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Definición 1. Diremos que f es **diferenciable en x_0** si existe una función lineal $L_{x_0} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ para la cual:

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + \varepsilon(h)\|h\|, \quad (1)$$

donde $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ ($\varepsilon(h)$ depende también del punto x_0).

La función lineal L_{x_0} se llama **diferencial de f en x_0** y se denota por $df(x_0)$, es decir, podemos escribir:

$$\Delta f(x_0, h) = df(x_0)(h) + \varepsilon(h)\|h\|.$$

La relación (1) nos indica que, cuando h es suficientemente pequeño, el vector $df(x_0)(h) \in \mathbf{R}^m$ aproxima al incremento $\Delta f(x_0, h)$ con un error que es un infinitesimal de orden superior a $\|h\|$. Cuando esto no se preste a confusión escribiremos $o(h)$ en lugar de $\varepsilon(h)\|h\|$.

Como consecuencia inmediata de esta definición y de la continuidad de una aplicación lineal obtenemos el resultado siguiente:

Si f es diferenciable en el punto x_0 , entonces f es continua en ese punto.

Observaciones. 1) Teniendo en cuenta que en \mathbf{R}^n todas las normas son equivalentes, las definiciones de diferenciabilidad y del diferencial de una función son independientes de la norma que se utilice. Por esta razón no será necesario hacer ninguna aclaración y el lector puede imaginar la norma que más le agrade en cada caso.

2) Puede definirse diferenciabilidad en un punto que no sea interior al dominio de definición de la función. Para ello basta restringir los incrementos h a vectores tales que el vector suma $x_0 + h$ pertenezca al dominio.

3) Una función se dirá **diferenciable en un conjunto D** si lo es en cada punto de dicho conjunto.

Ejemplo 1. Sea la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2^2$. Analicemos la diferenciabilidad en el punto $x_0 = (1, 2)$.

El incremento de la función es:

$$\Delta f(x_0, h) = f(1+h_1, 2+h_2) - f(1, 2) = [3h_1 + 4h_2] + h_2^2,$$

Notemos que $\frac{h_2^2}{\|h\|} = \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} h_2 \rightarrow 0$, ($h = (h_1, h_2)$), luego $h_2^2 = o(h)$, además la cantidad entre corchetes representa los valores de una aplicación lineal. Entonces podemos afirmar que f es diferenciable en el punto $(1, 2)$ y que su diferencial viene dado por la expresión:

$$df(1, 2)(h) = 3h_1 + 4h_2.$$

La relación en (1) es una igualdad entre vectores de \mathbf{R}^m , por tanto puede desarrollarse como igualdad entre las componentes de estos vectores:

$$f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) = L_{x_0}^i(h) + \varepsilon_i(h)\|h\|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

donde:

$$f = (f_1, \dots, f_m), \quad L_{x_0} = (L_{x_0}^1, \dots, L_{x_0}^m), \quad \varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_m(h)).$$

Como las aplicaciones $L_{x_0}^i$ de \mathbf{R}^n en \mathbf{R} son lineales, hemos probado el resultado siguiente:

Una función f es diferenciable en x_0 si y solo si las funciones componentes f_i , para todo $i = 1, \dots, m$, son funciones diferenciables en x_0 y además:

$$df(x_0) = (df_1(x_0), \dots, df_m(x_0)).$$

Este resultado reduce el análisis de la diferenciabilidad y el cálculo del diferencial en un punto al caso particular de funciones con valores reales, esto es a funciones cuyo conjunto de llegada es \mathbf{R} .

La Fig. 3 sugiere una forma de interpretación del diferencial en un punto de una función de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 . La función $(u_1, u_2) = f(x_1, x_2)$ puede verse como una transformación de los puntos del plano $x_1 x_2$ en los puntos del plano $u_1 u_2$. En general, f transforma líneas rectas del plano $x_1 x_2$ en curvas en el plano $u_1 u_2$ (Fig. 3a). Cuando f es diferenciable en un punto x_0 , entonces ella, en una vecindad de ese punto, puede ser aproximada por una aplicación lineal, el diferencial

$df(x_0)$. Pero una aplicación lineal transforma rectas en rectas, así que en una vecindad de $u_0 = f(x_0)$, las curvas imágenes pueden ser aproximadas por los correspondientes segmentos imágenes producidos por el diferencial (Fig. 3b).

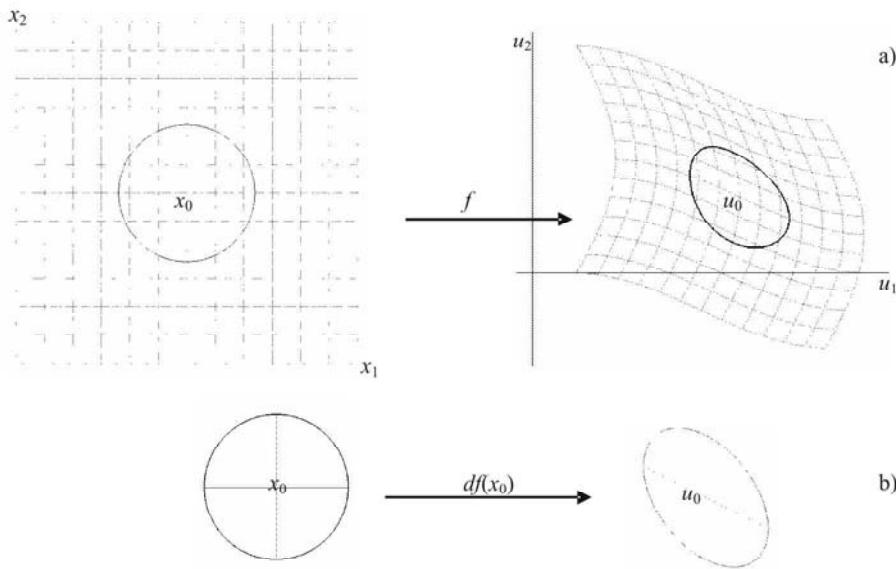


FIGURA 3.

Ejemplo 2. Analicemos la diferenciabilidad en el punto \$(1,2)\$ de la función $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 + x_2^2)$.

Las funciones componentes son:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \quad \text{y} \quad f_2(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2^2$$

La función f_2 fue analizada en el ejemplo 1, por lo que sabemos que es diferenciable. Analicemos la diferenciabilidad de la función f_1 . Evidentemente:

$$\Delta f_1(h) = f_1(1+h_1, 2+h_2) - f_1(1, 2) = 1 + h_1 - 1 = h_1 + 0.$$

Como \$0\$ es un infinitesimal de orden superior a cualquier otro, podemos concluir que f_1 es diferenciable en ese punto y además, su diferencial viene dado por $df_1(1, 2)(h_1, h_2) = h_1$. Entonces la función f es diferenciable en \$(1,2)\$ y tiene por diferencial a la aplicación lineal de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 $df(1, 2)(h) = (h_1, 3h_1 + 4h_2)$.

En lo que sigue supondremos que f es una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable en un punto $x_0 \in D^\circ$ y con diferencial $df(x_0)$. Fijemos en \mathbf{R}^n la base canónica y

denotemos $h = (h_1, \dots, h_n)$, entonces la aplicación lineal $df(x_0)$ estará representada por una matriz fila (a_1, a_2, \dots, a_n) , que depende del punto x_0 , y podemos escribir:

$$df(x_0)(h) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n.$$

De modo que la relación (2) se convierte en:

$$f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(h),$$

donde $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Para determinar las constantes a_i , $i = 1, \dots, n$, utilizaremos la idea desarrollada en III.1 para el cálculo de A_1 y A_2 . Escojamos un incremento h de la forma $h = te_i$ donde $t \in \mathbf{R}$ y e_i es el $i^{\text{ésimo}}$ vector de la base. Se ve claramente que $h \rightarrow 0$ si y solo si $t \rightarrow 0$, por lo tanto, existen los límites:

$$a_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + te_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t}. \quad (3)$$

Definición 2. El límite en (3) se denomina **derivada parcial de f respecto a x_i en el punto x_0** .

Para denotar las derivadas parciales se han contado más de 15 formas diferentes. Actualmente las más usuales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), D_i f(x_0), f'_{x_i}(x_0).$$

La primera de ellas es la más difundida de las tres, se debe a Karl Jacobi quien la introdujo en 1841 y es la que utilizaremos preferentemente. No obstante, las otras dos en ocasiones pueden resultar más cómodas.

El razonamiento realizado antes prueba que:

Si una función f real es diferenciable en x_0 , entonces existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i = 1, \dots, n$ y además:

$$df(x_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n. \quad (4)$$

Observación. Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que, si una función es diferenciable en un punto, entonces su diferencial en ese punto es único.

La derivada parcial no es más que la derivada ordinaria de la función de una variable, resultante de hacer constantes todas las variables excepto aquella respecto a la cual se está realizando la derivación. Por ejemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{d}{dx_1} [f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)](x_1^0).$$

Ejemplo 3. Calculemos las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^3 y^2 + \operatorname{sen} xy$ en el punto $(\pi/2, 1)$.

Hagamos $y = 1$. Entonces $f(x, 1) = x^3 + \operatorname{sen} x$. Así que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 1) = \frac{d}{dx} (x^3 + \operatorname{sen} x) \Big|_{x=\pi/2} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

Análogamente se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 1) = \frac{d}{dy} \left(\frac{\pi^3}{8} y^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} y \right) \Big|_{y=1} = \frac{\pi^3}{4}$.

Si supiéramos que f es diferenciable en el punto $(\pi/2, 1)$ (lo cual será consecuencia inmediata de resultados que veremos más adelante), entonces podríamos escribir su diferencial como:

$$df(x, y)(h) = \frac{3\pi^2}{4} h_1 + \frac{\pi^3}{4} h.$$

Ejemplo 4. La función:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Fig. 4})$$

es continua en el punto $(0, 0)$, pero no es diferenciable, ya que no existen sus derivadas parciales en ese punto. En efecto, $f(x, 0) = |x|$ no es derivable en 0.

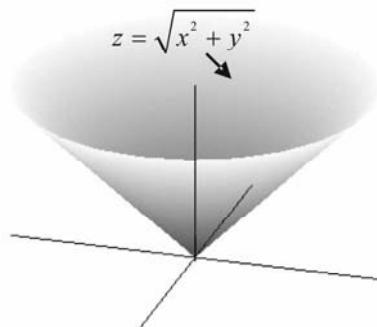


FIGURA 4.

Ejemplo 5. La función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0, 0)$, puesto que no es continua en ese punto. Sin embargo existen sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Esto significa que, en ocasiones es posible escribir la parte derecha de la igualdad en (4) y sin embargo, la igualdad no tener sentido, ya que la función no es diferenciable en el punto.

Ejemplo 6. Analicemos la diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calculemos las derivadas parciales. Como $f(x, 0) = 0$ para todo x , se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Luego, si f fuera diferenciable en $(0, 0)$, su diferencial en dicho punto tendría que ser la aplicación nula. Para que f fuera diferenciable tendría que cumplirse:

$$\Delta f(h) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = o(h),$$

o equivalentemente:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Resulta evidente que la igualdad anterior no se verifica, cuando (h_1, h_2) está sobre la recta $h_1 = h_2$. Por tanto, la función no es diferenciable en el punto $(0,0)$. En el ejemplo 4 de II.3 vimos que esta función en el punto $(0,0)$ es continua, ahora comprobamos que, además, ella tiene **derivadas parciales** en ese punto, sin embargo **no es diferenciable** en él.

Ejemplo 7. Hallemos el diferencial, en un punto arbitrario $x \in \mathbf{R}^n$, de las funciones proyección: $\pi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ $i = 1, \dots, n$:

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Es obvio que $\Delta\pi_i(x, h) \equiv h_i$. Como la aplicación $h \mapsto h_i$ es lineal, la función π_i es diferenciable en cualquier punto y su diferencial es $d\pi_i(x)(h) = h_i$. Así que, en este caso, el diferencial coincide con la propia función, es decir, $d\pi_i(x) = \pi_i$. Este resultado explica el uso de la notación $dx_i(h) = h_i$, con la cual el diferencial adquiere la forma:

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n,$$

o, en notación compacta:

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)dx_i.$$

Esta es una igualdad entre aplicaciones lineales que puede ser enunciada como:

El diferencial de una función cualquiera en un punto es una combinación lineal, con coeficientes dados por las derivadas parciales en dicho punto, de los diferenciales de las aplicaciones proyección.

Por otra parte, la igualdad (4) es una relación entre las imágenes de estas aplicaciones lineales, es decir entre números reales.

Retornemos al caso general de una función con conjunto de llegada \mathbf{R}^m . Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ y $f : E \rightarrow \mathbf{R}^m$, entonces sabemos que:

$$df(x_0)(h) = (df_1(x_0)(h), \dots, df_m(x_0)(h)) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0)h_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)h_i \right),$$

expresión que puede escribirse como un producto de matrices:

$$df(x_0)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

De esta forma hemos obtenido la matriz que representa la aplicación lineal diferencial en término de las derivadas parciales de las funciones componentes.

Definición 3. La matriz:

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

que representa la aplicación lineal $df(x_0) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, se denomina **matriz jacobiana** de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$. Con esta nueva notación el diferencial adquiere la forma:

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \quad (5)$$

Notemos que en el miembro derecho de la igualdad anterior estamos considerando al vector h como vector columna.

Este calificativo de “jacobiana” indica la relación de esta matriz con el matemático Karl Jacobi, quien en la década del 40 del siglo XIX estudió los determinantes de matrices de este tipo (cuando $m = n$), en relación con el análisis de la dependencia entre funciones (ver IV.3b).

Ejemplo 8. La función $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 + x_2^2)$ (ejemplo 2) tiene por matriz jacobiana en el punto $(1, 2)$ a:

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

por lo que su diferencial puede escribirse en la forma:

$$df(1, 2)(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Observaciones. 1) Cuando $m = 1$ la matriz jacobiana se convierte en un vector fila cuyas componentes son las derivadas parciales de la única componente de la función. Si $m = n = 1$ la matriz jacobiana se reduce a un elemento que es precisamente la derivada de la función de una variable que se está considerando.

2) Puede ocurrir que existan todos los elementos de la matriz jacobiana, es decir que existan todas las derivadas parciales de las funciones componentes y, no obstante, la función no sea diferenciable. En este caso carece de sentido escribir la igualdad en (5).

En la introducción comentamos que uno de los méritos fundamentales que Fréchet adjudicaba a su definición de función diferenciable era la posibilidad de generalización a espacios abstractos. Pero ¿cómo deberán ser los espacios abstractos para poder generalizar la relación (1)?

Para poder dar un sentido a (1) cuando se trata de una función $f : E \rightarrow F$ es necesario que:

- 1) E y F tengan definidas las operaciones de suma y producto por un escalar.
- 2) En ambos espacios tiene que tener sentido la noción de límite.

Lo primero puede lograrse exigiendo a E y F que sean espacios vectoriales, para lo segundo deben ser espacios métricos. Pero para poder elaborar una teoría de diferenciación que sea operativa se necesita, además, que las estructuras vectorial y métrica sean compatibles. En particular, esto significa que:

$$x_k \rightarrow x, \quad y_k \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad \alpha x_k + \beta y_k \rightarrow \alpha x + \beta y, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

Esta condición no tiene necesariamente que cumplirse siempre para un conjunto que sea simultáneamente espacio vectorial y métrico. En el ejercicio 8 de I.2 se muestra un ejemplo donde esta compatibilidad no tiene lugar. Sin embargo, sabemos que para los espacios normados todas las exigencias anteriores se verifican y por tanto se le puede dar un sentido a la relación (1).

Definición 1'. Sea una función $f : D \subset E \rightarrow F$, entre dos espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$. Diremos que f es **diferenciable en el punto x** interior de D , si existe una **función lineal continua** (ver en Cap. II ejercicio complementario 21) $L_x : E \rightarrow F$ tal que:

$$f(x + h) - f(x) = L_x(h) + \alpha(x; h),$$

donde $\alpha(x; h) = o(h)$, lo que ahora significa $\|\alpha(x; h)\|_F \|h\|_E^{-1} \rightarrow 0$, cuando $\|h\|_E \rightarrow 0$. La función L_x , lineal respecto a h , se denomina **diferencial (o derivada) de f en el punto x** y se denota por $df(x)$ o $f'(x)$.

Cuando estudiamos la continuidad de funciones definidas entre espacios métricos, pudieron generalizarse una buena parte de los resultados obtenidos para las funciones entre espacios \mathbf{R}^n . Esta extensión, en general, no supuso grandes modificaciones, ni en los conceptos utilizados, ni en la demostración de los resultados. En cambio, la generalización, a funciones entre espacios normados, de la mayoría de los resultados fundamentales que estudiaremos en este capítulo requiere un esfuerzo mucho mayor. Por esta razón, las referencias a las funciones abstractas diferenciables se limitarán a algunas pocas notas.

La unicidad del diferencial, en el caso de las funciones entre espacios \mathbf{R}^n , la obtuvimos indirectamente como una consecuencia de que los elementos de la matriz jacobiana estaban únicamente determinados por las derivadas parciales de las funciones componentes. Comprobemos la **unicidad del diferencial** en el caso general.

◆ Supongamos que f sea diferenciable en $x \in D$ y tenga por diferencial en dicho punto a dos aplicaciones L_x^1 y L_x^2 , entonces:

$$f(x+h) - f(x) = L_x^1(h) + \alpha_1(x; h) = L_x^2(h) + \alpha_2(x; h),$$

donde $\alpha_i(x; h) = o(h)$, cuando $h \rightarrow 0$, $i = 1, 2$.

Luego, tomando $L_x = L_x^1 - L_x^2$, se obtiene:

$$L_x(h) = \alpha_1(x; h) - \alpha_2(x; h) = \alpha(x; h),$$

Aquí la función L_x es lineal y $\alpha(x; h) = o(h)$. Fijemos un valor de $h \neq 0$ e introduzcamos un parámetro real auxiliar λ , entonces:

$$\|L_x(h)\| = \frac{\|L_x(\lambda h)\|}{|\lambda|} = \frac{\alpha(x; \lambda h)}{|\lambda h|} |h| \rightarrow 0, \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0.$$

Hemos demostrado que $L_x(h) = 0$, para todo $h \neq 0$, pero $L_x(0) = 0$, luego L_x es la aplicación nula y $L_x^1 = L_x^2$. ◆

Si f es diferenciable en un conjunto abierto D , entonces, en virtud de la unicidad del diferencial, puede considerarse la función $x \in D \mapsto f'(x) \in \mathbf{L}(E, F)$, donde $\mathbf{L}(E, F)$ denota el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en F . Esta función se denomina **derivada de f en D** .

Observemos que, debido a la exigencia de continuidad impuesta a la aplicación L_x en la definición 1', se mantiene el resultado de que toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto.

Hasta ahora, el análisis de la diferenciabilidad de una función lo hemos realizado de la única forma posible: usando la definición. Obviamente esta vía es demasiado larga y engorrosa para que sea la única alternativa. En lo que sigue nos interesaremos por la búsqueda de una condición suficiente, relativamente simple, para la determinación de la diferenciabilidad de una función.

El análisis de la diferenciabilidad en un punto, de una función con conjunto de llegada \mathbf{R}^m , puede ser realizado a través de la correspondiente investigación de las funciones componentes. Por tanto, basta encontrar una condición suficiente de diferenciabilidad para funciones con valores reales y aplicar esta condición a cada una de las m componentes. Con el propósito de simplificar las notaciones, trabajaremos con funciones de tres variables, pero el lector podrá advertir, sin ninguna dificultad, cuáles son las modificaciones pertinentes para el caso general.

- ◆ Sea una función $f : B(x, r) \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ con derivadas parciales en una bola de centro x y radio r (Fig. 5). Consideremos $h \in \mathbf{R}^3$ un incremento tal que $\|h\| < r$, entonces $x + h \in B(x, r)$, y el incremento Δf de f en x será:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + h) - f(x) = \\ &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) - f(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

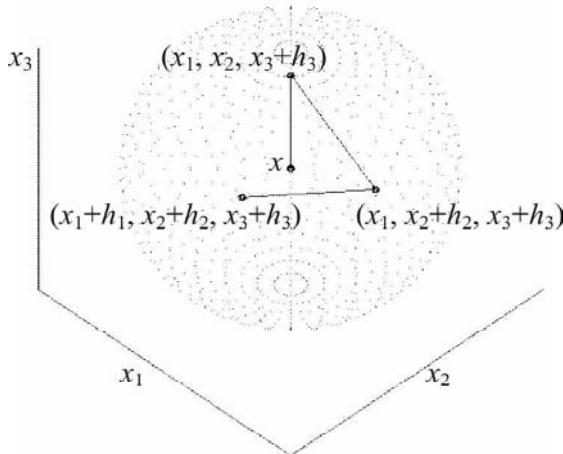


FIGURA 5.

Expresemos este incremento como suma de incrementos parciales de la función f , es decir, de forma que en cada sumando solo aparezca incrementada una de las variables:

$$\Delta f = [f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) - f(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)] + \\ + [f(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3)] + [f(x_1, x_2, x_3 + h_3) - f(x_1, x_2, x_3)].$$

(si $x + h \in B(x, r)$ entonces también $(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3), (x_1, x_2, x_3 + h_3) \in B(x, r)$).

La existencia de derivadas parciales de f en $B(x, r)$ significa que ella es derivable como función, por separado, de cada una de sus variables. Por tanto, a cada uno de los corchetes en la expresión de Δf se le puede aplicar el teorema del valor medio, para funciones de una variable, y así obtenemos:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 h_2, x_3 + h_3)h_2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 + \theta_3 h_3)h_3, \quad (6)$$

donde $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, 3$.

Comparemos la expresión del miembro derecho en (6) con el diferencial de f :

- 1) Ambas expresiones están formadas por la suma de productos de las derivadas parciales de f y las respectivas componentes del vector h .
- 2) En el diferencial, estas derivadas aparecen evaluadas en el punto x , mientras que en (6) están evaluadas en ciertos puntos desconocidos (que dependen de los valores de los θ_i).

Si exigimos la *continuidad de las derivadas parciales de f en el punto x* , se tendrá que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 h_2, x_3 + h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 + \theta_3 h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3).$$

Y, por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_1(h),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 h_2, x_3 + h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_2(h),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 + \theta_3 h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_3(h),$$

donde $\varepsilon_i(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$, ($i = 1, 2, 3$).

Así que, sustituyendo en (6), se obtiene:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)h_3 + [\varepsilon_1(h)h_1 + \varepsilon_2(h)h_2 + \varepsilon_3(h)h_3].$$

Pero

$$\frac{\|\varepsilon_1(h)h_1 + \varepsilon_2(h)h_2 + \varepsilon_3(h)h_3\|}{\|h\|} \leq |\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(h)| + |\varepsilon_3(h)|.$$

Luego la cantidad entre corchetes es un $o(h)$.

De este modo el incremento Δf se ha logrado expresar como la suma de una función lineal del incremento h y una cantidad infinitesimal de orden superior a $\|h\|$. Esto prueba que la función f es diferenciable en x . ♦

Hemos obtenido el teorema siguiente:

Teorema 1. (Condición suficiente de diferenciabilidad). Si la función $f : B(x, r) \rightarrow \mathbf{R}$, $B(x; r) \subset \mathbf{R}^n$, tiene derivadas parciales las cuales son continuas en el punto x , entonces f es diferenciable en x .

Observaciones: 1) La demostración en el caso general, es análoga al razonamiento seguido antes, solo que en lugar de tres sumandos, sería necesario escribir el incremento de la función como suma de n incrementos parciales, uno para cada variable.

2) Se conoce que las funciones elementales básicas (potencia, exponencial, logaritmo, trigonométricas y sus inversas) tienen derivadas continuas en todo su dominio. Entonces el Teorema 1 brinda la posibilidad, mediante una inspección

simple, de determinar dónde es diferenciable una función expresada por medio de funciones elementales básicas, las operaciones aritméticas y la composición.

Ejemplo 9. La función $f(x, y) = x^3 y^2 + \operatorname{sen} xy$ del ejemplo 3 es diferenciable en \mathbf{R}^2 .

Ejemplo 10. La función:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \ln(x^2+y^2)$$

es diferenciable en el conjunto $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

Ejemplo 11. Analicemos la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función (ver Fig. 6):

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

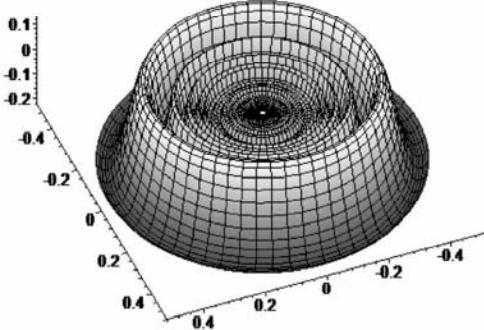


FIGURA 6.

Las derivadas parciales en el origen son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} h_1 \operatorname{sen} \frac{1}{h_1} = 0 \end{aligned}$$

y análogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

De modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Similarmente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

De las expresiones anteriores resulta claro que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas para todo $(x,y) \neq (0,0)$ y el Teorema 1 nos permite concluir la diferenciabilidad de f en estos puntos.

Cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, el límite del primer sumando en estas expresiones existe y es cero. El segundo sumando no tiene límite en el punto $(0,0)$ (por ejemplo, tomando la sucesión $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right)$, por lo que las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no pueden ser continuas en dicho punto. Luego el Teorema 1 no se puede aplicar y debemos analizar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ directamente de la definición.

Si f fuera diferenciable en $(0,0)$, su diferencial tendría que ser la aplicación nula. Por tanto, f será diferenciable en $(0,0)$ si y solo si:

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = (h_1^2 + h_2^2) \operatorname{sen} \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}).$$

Pero la igualdad anterior es equivalente a:

$$\frac{(h_1^2 + h_2^2) \operatorname{sen} \frac{1}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \operatorname{sen} \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0, \text{ cuando } (h_1, h_2) \rightarrow (0,0).$$

Como esta última afirmación obviamente es cierta, concluimos la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Así que f es diferenciable en todo \mathbf{R}^2 .

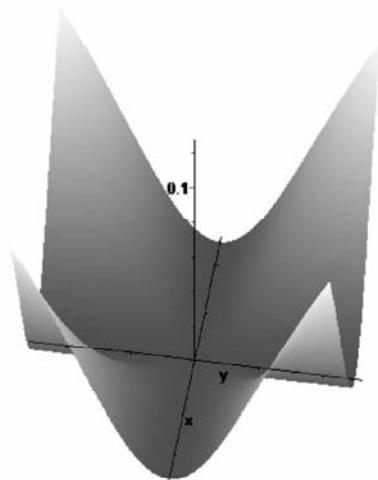


FIGURA 7.

Observación. Este ejemplo muestra que la condición del Teorema 1 no es necesaria, es decir, una función puede ser diferenciable en un punto sin tener derivadas parciales continuas en dicho punto. Nótese que en la función del ejemplo 11 las derivadas parciales ni siquiera son acotadas en cualquier vecindad de $(0,0)$.

Ejemplo 12. Analicemos la diferenciabilidad de la función (Fig. 7) definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Si las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Como $f(0, y) = f(x, 0) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Es evidente la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto diferente del origen.
Analicemos la continuidad en $(0,0)$:

De la desigualdad:

$$\frac{|2xy^4|}{(x^2 + y^2)^2} = \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^2 2|x| \leq 2|x|,$$

se obtiene inmediatamente que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

de donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$. La función es simétrica respecto a sus variables, luego también $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$. Así que, f tiene derivadas parciales continuas y, por tanto, es diferenciable en \mathbf{R}^2 . El diferencial de f es:

$$df(x,y)(h_1, h_2) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} h_1 + \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} h_2, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

$$df(0,0)(h_1, h_2) \equiv 0.$$

La diferenciabilidad en $(0,0)$ también la podíamos haber analizado directamente de la definición. El incremento de la función en el punto $(0,0)$ puede escribirse:

$$\Delta f = f(h_1, h_2) - f(0,0) = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}.$$

Se demuestra fácilmente que $\frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} \rightarrow 0$, cuando $(h_1, h_2) \rightarrow 0$, de donde se infiere la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Observación: En el ejemplo anterior podemos notar que, en ocasiones, resulta más cómodo el uso de la definición de diferenciabilidad en un punto que el análisis de la continuidad de las derivadas parciales en dicho punto.

Ejercicios propuestos

- Demuestra que la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en una vecindad de $(0,0)$ es continua y tiene derivadas parciales acotadas y, sin embargo, no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

2. Dado $a \in \mathbf{R}$ definimos la función:

$$f_a(x,y) = \begin{cases} |xy|^a, & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}.$$

Determina los valores de a para los que:

- a) f_a es continua en \mathbf{R}^2 .
- b) f_a es diferenciable \mathbf{R}^2 .

3. Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{4/3} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

encuentra todos los puntos donde f es diferenciable.

4. Analiza la diferenciabilidad de la función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, y - x^2), & x^2 \leq y \\ \left(x, \frac{y^2 - x^2}{x^2}\right), & 0 < y \leq x^2 \\ -f(-x, -y), & y < 0. \end{cases}$$

5. Sean $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ f diferenciable y g continua en $a \in \mathbf{R}^n$.

- a) Si $f(a) = 0$ prueba que $F(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en a y que:

$$dF(a) = g(a)df(a).$$

- b) Prueba que si $f(a) \neq 0$, entonces es falso el resultado enunciado en a).

6. Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$, prueba que la existencia de $f'(a)$, $a \in \mathbf{R}$, es necesaria y suficiente para que f sea diferenciable en a .

7. Dadas n funciones f_1, f_2, \dots, f_n derivables en el intervalo (a,b) , definamos en $D = \{x \in \mathbf{R}^n : a < x_i < b, i = 1, \dots, n\}$ la función:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n).$$

Demuestra que f es diferenciable en D .

8. a) Sea $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que para todo x se cumple $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$. Prueba que f es diferenciable en $x = 0$ y halla su diferencial en ese punto.
- b) Supongamos que la desigualdad en a) se sustituye por $\|f(x)\| \leq \|x\|^\alpha$. ¿Para qué valores de α esta desigualdad garantiza la diferenciabilidad de f en cero?
9. Sea $f : E \rightarrow F$ una función entre dos espacios normados. Prueba que:
- a) Si f es constante en una vecindad V de x , entonces $f'(x) = 0$.
- b) Si f es lineal y continua, entonces $f'(x) = f$.

III.3. OPERACIONES CON FUNCIONES DIFERENCIABLES

En este epígrafe analizaremos la conservación de la diferenciabilidad mediante las operaciones básicas que se realizan con funciones.

Comencemos con las **operaciones aritméticas**. Sean $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferenciables en $x_0 \in D$ y analicemos la diferenciabilidad en x_0 de la combinación lineal $\alpha f + \beta g$ de estas funciones, donde α, β son números reales.

◆ El incremento de la función $\alpha f + \beta g$ en x_0 puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha f + \beta g)(x_0 + h) - (\alpha f + \beta g)(x_0) = \\ &= \alpha [f(x_0 + h) - f(x_0)] + \beta [g(x_0 + h) - g(x_0)] = \\ &= \alpha [df(x_0)(h) + \varepsilon_1(h)\|h\|] + \beta [dg(x_0)(h) + \varepsilon_2(h)\|h\|]\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Por tanto, hemos escrito el incremento Δ como:

$$\Delta = (\alpha df(x_0) + \beta dg(x_0))(h) + o(h).$$

Puesto que $df(x_0)$ y $dg(x_0)$ son funciones lineales, entonces $\alpha df(x_0) + \beta dg(x_0)$ es también una función lineal, luego hemos demostrado que la función $\alpha f + \beta g$

es diferenciable en el punto x_0 . Además obtuvimos que su diferencial viene dado por:

$$d(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha df(x_0) + \beta dg(x_0). \quad (1)$$

Del álgebra lineal es conocido el resultado:

La matriz que representa la combinación lineal $\alpha L_1 + \beta L_2$ de dos aplicaciones lineales es la correspondiente combinación lineal de las matrices que representan a las aplicaciones L_1 y L_2 .

De modo que la igualdad (1) puede escribirse en términos de las matrices jacobianas como:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \blacklozenge \quad (1')$$

Cuando $m = 1$ también tienen sentido las operaciones de multiplicación y división entre funciones y puede analizarse fácilmente la diferenciabilidad de las funciones producto y cociente. El teorema siguiente resume los resultados acerca de las operaciones aritméticas con funciones diferenciables.

Teorema 2. Si f y g son diferenciables en x_0 , entonces:

i) Toda combinación lineal de estas funciones es diferenciable en x_0 y tienen lugar las relaciones (1) y (1') entre los respectivos diferenciales y matrices jacobianas.

ii) Cuando $m = 1$ también son diferenciables en x_0 las funciones $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$). Además se cumple:

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0),$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot df(x_0) - f(x_0) \cdot dg(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}.$$

En términos de las matrices jacobianas se tienen las relaciones:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0),$$

$$(f/g)'(x_0) = \frac{1}{[g(x_0)]^2} \cdot [g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)].$$

Observación. Los productos que aparecen en los segundos miembros de las cuatro fórmulas anteriores se refieren al producto de un escalar por una aplicación lineal (en las dos primeras) o por la matriz jacobiana (en las dos últimas).

Veamos ahora el resultado relativo a la **diferenciabilidad de la compuesta** de dos funciones. Consideremos las funciones $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow G \subset \mathbf{R}^m$, y $g : G \rightarrow \mathbf{R}^p$, entonces existe la función compuesta que está definida en D y toma valores en \mathbf{R}^p . Tiene lugar el resultado siguiente:

Teorema 3. Si f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en x_0 . Además, el diferencial y matriz jacobiana de la función compuesta pueden obtenerse a través de las expresiones:

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0), \quad (2)$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \quad (2')$$

◆ Sea Δ el incremento de la función $g \circ f$ en x_0 , es decir:

$$\Delta = (g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)).$$

Si el incremento de la función f en el punto x_0 lo denotamos por $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$, entonces podemos escribir Δ en la forma:

$$\Delta = g(y_0 + k) - g(y_0),$$

esto es, Δ es el incremento de la función g en el punto $y_0 = f(x_0)$. Pero g es diferenciable en y_0 , luego:

$$\Delta = dg(y_0)(k) + \varepsilon(k)\|k\| \equiv dg(y_0)[f(x_0 + h) - f(x_0)] + \varepsilon(k)\|k\|,$$

donde $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow 0$.

Como f es diferenciable en x_0 , tenemos que:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \varepsilon_1(h)\|h\|,$$

con $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta la linealidad del diferencial $dg(x_0)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta &= dg(y_0) [df(x_0)(h)] + dg(y_0) [\varepsilon_1(h)\|h\|] + \varepsilon(k)\|k\| = \\ &= [dg(y_0) \circ df(x_0)](h) + \alpha,\end{aligned}$$

donde hemos denotado $\alpha = dg(y_0) [\varepsilon_1(h)\|h\|] + \varepsilon(k)\|k\|$.

Como $dg(y_0) \circ df(x_0)$ es una aplicación lineal (por ser compuesta de aplicaciones lineales), para concluir la diferenciabilidad de la función compuesta en x_0 basta demostrar que $\alpha = o(h)$.

En virtud de la linealidad del diferencial:

$$\frac{dg(y_0) [\varepsilon_1(h)\|h\|]}{\|h\|} = dg(y_0) [\varepsilon_1(h)],$$

pero $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$ y $dg(y_0)$ es una función continua, luego también $dg(y_0) [\varepsilon_1(h)] \rightarrow 0$. Así que el primer sumando en α es un $o(h)$.

Probemos que el segundo sumando $\varepsilon(k)\|k\|$ es también un infinitesimal de orden superior a $\|h\|$. Por la segunda propiedad de la norma y la linealidad del diferencial se tiene que:

$$\frac{\varepsilon(k)\|k\|}{\|h\|} = \varepsilon(k) \frac{\|df(x_0)(h) + \varepsilon_1(h)\|h\|}{\|h\|} = \varepsilon(k) \left\| df(x_0) \left[\frac{h}{\|h\|} \right] + \varepsilon_1(h) \right\|.$$

Como f es diferenciable en x_0 , será continua en ese punto, por tanto, cuando $h \rightarrow 0$, también $k \rightarrow 0$. Luego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(k) = 0.$$

Así que solo nos resta demostrar la acotación de la expresión $\left\| df(x_0) \left[\frac{h}{\|h\|} \right] + \varepsilon_1(h) \right\|$.

El segundo sumando en esta expresión tiene límite cero y es, por tanto, acotado.

Por otra parte, $df(x_0) \left[\frac{h}{\|h\|} \right]$ son valores de la función (lineal) continua $df(x_0)$ en el conjunto compacto:

$$U = \{u \in \mathbf{R}^n : \|u\| = 1\},$$

luego, también es una cantidad acotada. Concluimos así la prueba de que α es un $o(h)$ y con ello la demostración de la diferenciabilidad de $g \circ f$ en x_0 y de la relación (2).

La fórmula (2') para las matrices jacobianas, es una consecuencia inmediata de (2) y del conocido resultado de álgebra lineal:

La matriz que representa la compuesta de dos aplicaciones lineales es el producto de las matrices representantes de las aplicaciones componentes, realizado en el mismo orden.♦

Ejemplo 1. Analicemos la diferenciabilidad de la función compuesta $g \circ f$ en el punto $(0,1)$ y calculemos el diferencial $d(g \circ f)(0,1)(h)$ si:

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad y \quad g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - 2y_2, y_1 + 2y_3)$$

Las componentes de las funciones f y g son funciones polinómicas y por tanto son diferenciables en todo \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 respectivamente. Entonces del Teorema 2 sigue que $g \circ f$ es diferenciable en \mathbf{R}^2 .

Para calcular el diferencial de la compuesta hallemos la matriz jacobiana de f en el punto $(0,1)$ y la de g en el punto correspondiente $f(0,1) = (1,0,1)$:

$$f'(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g'(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego:

$$(g \circ f)'(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$d(g \circ f)(1,0)(h) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Consideremos las funciones $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ y $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dadas por $f(t) = (t,t)$ y:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

La función compuesta:

$$(g \circ f)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } t \neq 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

evidentemente, no es derivable en $t = 0$.

Sin embargo, observamos que el miembro derecho de (2') tiene sentido en nuestro ejemplo. En efecto, g tiene derivadas parciales nulas en $(0,0)$ y las funciones coordenadas de f tienen derivadas iguales a 1 en $t = 0$. Este ejemplo muestra que, *al aplicar la regla, dada por la fórmula (2'), para derivar funciones compuestas, es necesario tener en cuenta la hipótesis de diferenciabilidad de las dos funciones componentes.*

Para escribir en forma de coordenadas la relación (2'), supondremos $f = (f_1, \dots, f_m)$ y $g = (g_1, \dots, g_p)$, entonces:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g'(y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(y_0) \end{pmatrix}.$$

luego:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right)_{i=1, \dots, n, l=1, \dots, p}. \end{aligned}$$

Esta fórmula nos permite calcular las derivadas parciales de cualquiera de las funciones coordenadas de la compuesta de dos funciones diferenciables:

$$\frac{\partial(g_l \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0), \quad i = 1, \dots, n.$$

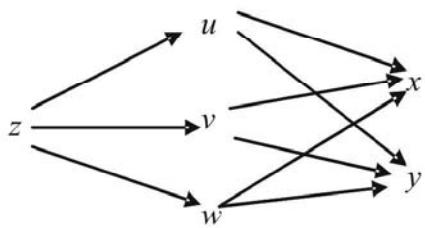
Supongamos que $p = 1$ entonces g tiene una sola componente. Denotemos $z = (g \circ f)(x)$, $y_j = f_j(x)$ y eliminemos, para simplificar la fórmula, la especificación del punto en que deben evaluarse las derivadas, entonces la fórmula anterior se describe:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Ejemplo 3. Consideraremos el caso particular $n = 3$, $m = 2$ y pongamos:

$$z = g(u, v, w), \quad u = f_1(x, y), \\ v = f_2(x, y), \quad w = f_3(x, y).$$

Con cierto “abuso de notación”, de (3) obtenemos:



$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3')$$

Estas fórmulas pueden organizarse mediante el diagrama de la Fig. 8, donde las flechas indican la dependencia entre las variables.

Nótese que, para calcular la derivada parcial de z respecto a x , deben adicionarse tantos sumandos como caminos llevan desde z a x y cada sumando está constituido por dos factores, correspondientes a cada tramo del camino.

Ejemplo 4. Sean $z = g(x, u)$ y $u = f(x, y)$ y queremos expresar $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}$ y $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}$

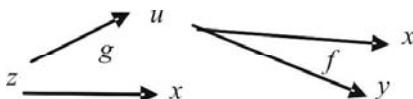


FIGURA 9.

en términos de las derivadas parciales de las funciones f y g . El esquema de ayuda se muestra en la Fig. 9. En este caso, observamos que la variable z

depende de la x de dos maneras: a través solo de la función g y después de realizada la composición, a través de las dos funciones f y g . Esto hace que la notación $\frac{\partial z}{\partial x}$ sea completamente ambigua y no resulta conveniente el uso de la notación de las expresiones de (3'). Podemos escribir:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Una situación donde resulta muy útil el uso del resultado del Teorema 3, es cuando una de las funciones involucradas en la composición es arbitraria o desconocida.

Ejemplo 5. Probemos que, cualquiera sea la función diferenciable $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, la función:

$$u = f(x - y, y - z)$$

satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Introduzcamos la notación:

$$t = x - y, \quad s = y - z.$$

Es claro que t y s son funciones diferenciables de las variables x , y , z . Así podemos aplicar la fórmula (3'):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial s},$$

de donde es inmediato que la suma de las tres derivadas es cero.

Como una aplicación de la diferenciación de la función compuesta, veamos la generalización del teorema del valor medio al caso de funciones reales de varias variables.

Para las funciones de una variable, el teorema del valor medio proporciona una expresión muy útil en la práctica: *estima el incremento de una función f entre dos puntos x e y , a través de la derivada de f evaluada en un punto entre x e y .*

Introduzcamos una notación que nos facilitará el enunciado y demostración de un resultado semejante para funciones de varias variables.

Dados dos puntos $x, y \in \mathbf{R}^n$ denotaremos por $[x,y]$ el segmento que une estos puntos incluidos ambos puntos, y por (x,y) al mismo segmento pero excluyendo los puntos extremos. El teorema siguiente estima el incremento de una función f en el segmento $[x,y]$, haciendo uso de su diferencial.

Teorema 4. (Teorema del valor medio). Sea $D \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y la función $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $[x_0, x_0 + h] \subset D$ y diferenciable en $(x_0, x_0 + h)$, entonces existe un punto $x_0 + \theta h \in (x_0, x_0 + h)$, $(0 < \theta < 1)$ tal que:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h) \cdot h = df(x_0 + \theta h)(h)$$

◆ Cuando consideramos que la variable x está situada en el segmento $[x_0, x_0 + h]$, de hecho, estamos estableciendo una relación entre sus n componentes. Esta relación se expresa mediante la función que representa el segmento de recta:

$$\varphi : [0,1] \rightarrow D, \quad \varphi(t) = x_0 + th$$

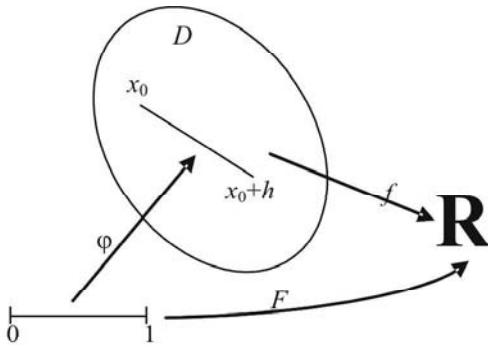


FIGURA 10.

En este teorema nos interesa el comportamiento de la función f restringida a este segmento, es decir, con las n variables ligadas mediante la función φ . Esto último se expresa mediante la composición de funciones (Fig. 10):

$$F = f \circ \varphi : [0,1] \rightarrow \mathbf{R},$$

que es una función real de una variable real continua en el intervalo cerrado $[0,1]$, y diferenciable en el abierto $(0,1)$. A la función F le podemos aplicar el teorema del valor medio, para funciones reales de una variable real, y encontramos un punto $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1 \tag{5}$$

Es claro que:

$$F(1) = f(x_0 + h) \quad \text{y} \quad F(0) = f(x_0).$$

Además, $F'(\theta)$ es la matriz jacobiana (con un solo elemento) de la función compuesta F , luego, la podemos expresar mediante el producto de las matrices Jacobianas de las funciones f y φ :

$$F'(\theta) = f'(x_0 + \theta h) \cdot \varphi'(\theta),$$

donde:

$$f'(x_0 + \theta h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + \theta h), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0 + \theta h) \right) \quad \text{y} \quad \varphi'(\theta) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$F'(\theta) = f'(x_0 + \theta h) \cdot h.$$

Sustituyendo en (5) se tiene:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h) \cdot h,$$

o lo que es lo mismo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0 + \theta h)(h).$$

Como $\theta \in (0,1)$, el punto $x_0 + \theta h \in [x_0, x_0 + h]$. Lo que demuestra el teorema◆

Observación. Si la función f tomara valores en un subconjunto de \mathbf{R}^m , con $m > 1$, entonces podríamos aplicar el teorema del valor medio a las componentes de f . Pero entonces cada componente de la función f satisfaría una relación del tipo (4) con su propio valor de θ . El ejemplo a continuación nos muestra que, en general, no es posible encontrar un único valor de θ de modo que (4) se satisfaga para una función f con conjunto de llegada \mathbf{R}^m .

Ejemplo 6. Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Supongamos que f cumpliera el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces debería existir un punto $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$f(2\pi) - f(0) = f'(2\pi\theta) \cdot 2\pi,$$

pero $f(0) = f(2\pi)$, y por tanto tendría que ser $f'(2\pi\theta) = (-\sin 2\pi\theta, \cos 2\pi\theta) = (0, 0)$ lo cual es imposible.

Este ejemplo nos permite afirmar que el teorema del valor medio, en la forma enunciada, **no es válido** para funciones con conjunto de llegada de dimensión mayor que uno. No obstante, es posible modificar la expresión (4) para obtener una generalización del teorema del valor medio para este tipo de funciones (ejercicio complementario 11).

En el caso de funciones de una variable, una de las consecuencias más importantes del teorema del valor medio es: *si una función tiene derivada nula en todos los puntos de un intervalo abierto resulta ser una constante.* De modo que se tiene la equivalencia:

$$f = \text{const. en } (a, b) \Leftrightarrow f'(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Veamos la forma de generalizar este resultado a las funciones de varias variables:

◆ Como consecuencia inmediata de la definición de diferenciabilidad se tiene:

Si una función es constante en un abierto D , su diferencial $df(x) = 0$, para todo $x \in D$.

Recíprocamente, supongamos que f es diferenciable en D y $df(x) = 0$, para todo $x \in D$ e intentemos utilizar el teorema del valor medio para probar que f es constante en D .

Para dos puntos $x, x + h$ de D tales que $[x, x + h] \subset D$, podemos aplicar el teorema y obtener:

$$f(x + h) - f(x) = df(x + \theta h)(h) = 0,$$

por tanto:

$$f(x + h) = f(x). \quad (6)$$

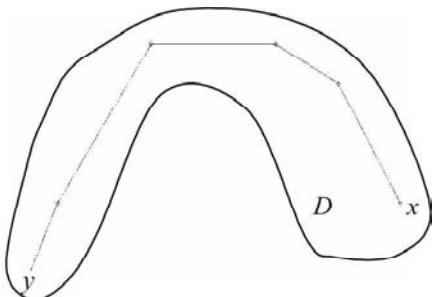


FIGURA 11.

Si el conjunto D poseyera la propiedad de que, dados dos puntos cualesquiera $x, y \in D$, el segmento de recta $[x, y] \subset D$, entonces de (6) podríamos concluir que f es constante en D . Pero no todos los conjuntos del plano tienen esta propiedad, ni siquiera la poseen todos los conjuntos conexos (Fig. 11). No obstante, en II.6 vimos que, para aquellos conjuntos que sean simultáneamente abiertos y

conexos, es decir, los dominios, dos puntos cualesquiera $x, y \in D$, se pueden unir por una curva poligonal (constituida por la unión de un número finito de segmentos de recta).

Consideremos un dominio D , fijemos un $x \in D$ y sea y un punto arbitrario de D , entonces, aplicando sucesivamente (6) a los segmentos de la poligonal, podemos concluir que:

$$f(x) = f(y) .$$

Como y es arbitrario eso nos muestra que f es constante en D .

De esta forma hemos demostrado que: *una función real diferenciable, cuyo diferencial es cero en los puntos de un dominio es siempre constante.*

Este resultado puede extenderse fácilmente para las funciones con conjunto de llegada de dimensión mayor que uno. En efecto, sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, diferenciable en un dominio D y tal que $df(x) = 0$ en todo punto de D . Entonces a cada una de sus componentes f_i le podemos aplicar el resultado anterior, luego f es constante en D .♦

Así que hemos demostrado el siguiente corolario del Teorema 4:

Corolario. Sea una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferenciable en un conjunto D abierto y conexo, entonces se cumple que $df(x) = 0$ en todo punto $x \in D$ si y solo si f es constante en D .

Observación. Tanto la diferenciabilidad en un punto de la función combinación lineal de dos funciones diferenciables en ese punto, como el resultado acerca de la diferenciabilidad de la función compuesta de funciones diferenciables se extiende, sin modificación esencial en las demostraciones, a funciones entre espacios normados que sean diferenciables.

La demostración realizada antes para el teorema del valor medio consistió esencialmente en la reducción, mediante composición, al caso de funciones reales de variable real. Es evidente que esta idea no puede ser aprovechada para obtener un teorema similar para funciones entre espacios normados. No obstante, es posible probar un “teorema del valor medio” para funciones abstractas que enunciaremos sin demostración:

Sean E y F dos espacios normados, $f : D \subset E \rightarrow F$ continua en el abierto D . Si el conjunto $[x, x+h] = \{\xi \in E : \xi = x + th, 0 \leq t \leq 1\}$ está totalmente contenido en D y f es diferenciable en $(x, x+h) = \{\xi \in E : \xi = x + th, 0 < t < 1\}$, entonces:

$$\|f(x+h) - f(x)\|_F \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|f'(\xi)\| \|h\|_E,$$

donde $\|f'(\xi)\|$ denota la norma en el espacio de las aplicaciones lineales de E en F .

Ejercicios propuestos

1. Sean $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^{22}$, $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{22}$ definidas por:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(xy + z), (1+x^2)^{yz} \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = (u + e^v, v + e^u).$$

- a) Demuestra que f es diferenciable en $(1, -1, 1)$ y halla $df(1, -1, 1)$.
 - b) Demuestra que g es diferenciable en $(0, 1/2)$ y halla $dg(0, 1/2)$.
 - c) Halla $d(g \circ f)(1, -1, 1)$.
2. Demuestra que, si $u = F(x^2 + y^2 + z^2)$, donde F es una función derivable en \mathbf{R} y

$$x = R \cos \theta \cos \varphi, \quad y = R \cos \theta \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta,$$

entonces $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$.

3. Demuestra que la función $w = f(u, v)$, donde f es una función diferenciable en \mathbf{R}^2 y

$$u = x + at, \quad v = y + bt$$

satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

4. Sea f una función derivable en \mathbf{R} . Demuestra que la función $z = yf(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

5. Sean $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{22}$, $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{22}$ dadas por:

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad g(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x} \right).$$

Halla $(f \circ g)'$ e interpreta el resultado encontrado.

6. Sea $U : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable y definamos la función V por:

$$V(r, \theta) = U(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Prueba que se cumple la relación:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2.$$

7. Una función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ se llama **homogénea de grado p** si se cumple:

$$f(ax) = a^p f(x), \quad \text{para } a > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

a) ¿Son las funciones

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_1}{x_2} \quad g(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad h(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2}$$

homogéneas? ¿De qué grado?

- b) Prueba que una función diferenciable y homogénea de grado p satisface la identidad de Euler.

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = p f(x).$$

Sugerencia: Diferencia la ecuación $f(ax) = a^p f(x)$ respecto a a .

8. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} + x + 1 & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- a) Analiza la continuidad y diferenciabilidad de f en \mathbf{R}^2 .

- b) Sea $F(x, y) = \left(f(x, y), \frac{1}{1+xy} \right)$. ¿Es F uniformemente continua en el conjunto $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}$?
- c) Analiza la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de $G = F \circ F + 3F$ y halla, si existe, $dG(0, 0)$.
9. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{x^3 + y}, & y > 0 \\ 2x^2 + y^2 - xy + x, & y \leq 0 \end{cases}$.
- a) Halla el dominio D_c de continuidad de f .
- b) Analiza la diferenciabilidad de f en \mathbf{R}^2 .
- c) Demuestra que si $E = \{(x, y) \in D_c : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces $f(E)$ es un intervalo.
10. Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferenciable en el conjunto D abierto y convexo. Demuestra que si todos los elementos de la matriz jacobiana f' son acotados en D , entonces f es uniformemente continua en D .
11. Sea $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función real definida en un conjunto abierto y conexo D .
- a) Supongamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in D.$$

¿Será f independiente de la variable x ? Indica para qué conjuntos D esta propiedad se cumple.

- b) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in D$. ¿Será f constante en D ?
12. Sea $f : E \rightarrow F$ una función entre dos espacios normados. Prueba que si $A : F \rightarrow G$ es una aplicación lineal continua del espacio normado F en el espacio normado G , entonces $(A \circ f)'(x) = A \circ f'(x)$.

III.4. ALGUNAS CUESTIONES GEOMÉTRICAS

En este epígrafe veremos las interpretaciones geométricas de los conceptos derivada parcial y diferencial para algunos valores particulares de n y m , así como algunas otras cuestiones de carácter geométrico relacionadas con ellos.

a) Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Una función $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ continua en D la hemos interpretado geométricamente, mediante el conjunto de puntos de \mathbf{R}^3 (Fig. 12).

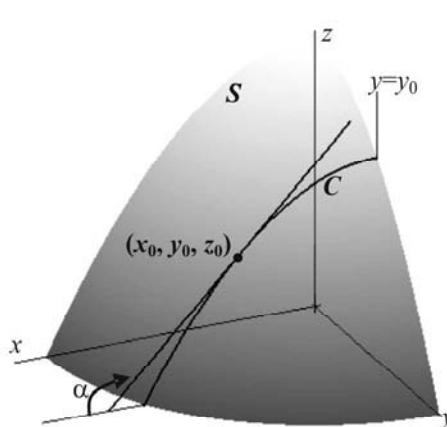


FIGURA 12.

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

Cuando la función f es sencilla, S coincide con lo que en geometría analítica se denominaban superficies. Por esta razón, en lo que sigue nos referiremos a ella como la **superficie que representa a la función f** , o como el **gráfico de la función f** .

Supongamos que existan las derivadas parciales de f en $(x_0, y_0) \in D^\circ$ y veamos cómo pueden ser interpretadas geométricamente. El cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ lo realizamos en dos etapas:

- 1) Hacemos $y = y_0$, lo que puede representarse geométricamente por la intersección de la superficie S con el plano de ecuación $y = y_0$. Como resultado de esta intersección aparece una curva C , situada sobre S y sobre el plano $y = y_0$.
- 2) Derivamos la función de una variable $f(x, y_0)$, en el punto x_0 . Por tanto, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ puede interpretarse como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la curva C en el punto (x_0, y_0, z_0) con la recta $y = y_0$, (en el plano XY), es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \tan \alpha .$$

Análogamente puede procederse con la derivada parcial respecto a la variable y . Así que las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0) pueden servirnos para analizar la *variación de la función en las direcciones paralelas a los ejes coordenados que pasan a través de (x_0, y_0)* . Es natural preguntarnos ¿Cómo podríamos realizar un análisis semejante, pero en cualquier otra dirección a través de ese mismo punto?

b) Derivada según una dirección

Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una función definida en un abierto D . La derivada parcial de f respecto a x_i en un punto $x_0 \in D$ está dada por el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t},$$

donde $t \in \mathbf{R}$ y e_i es el $i^{\text{ésimo}}$ vector de la base canónica. Es decir, el incremento de la función se toma precisamente en la dirección del vector e_i . Para caracterizar la variación de f en una dirección determinada por cierto vector, podemos tomar solo incrementos según la dirección de dicho vector.

En geometría analítica, la forma de determinar una dirección en el espacio \mathbf{R}^2 (o \mathbf{R}^3) es a través de un vector unitario. Análogamente podemos proceder en \mathbf{R}^n , identificando las direcciones en este espacio mediante los “vectores con norma igual a la unidad”. Sin embargo, esta noción dependerá estrechamente de la norma escogida en el espacio \mathbf{R}^n . Es conveniente, por razones que explicaremos más adelante, utilizar la norma euclíadiana. De modo que para nosotros un vector $u \in \mathbf{R}^n$ será unitario cuando $\|u\|_2 = 1$, pero, siempre que no se preste a confusión omitiremos el subíndice.

Definición 1. Sea f una función definida en un abierto $D \subset \mathbf{R}^n$, x_0 un punto de D y u un vector unitario de \mathbf{R}^n . Escojamos $t \in \mathbf{R}$ tal que $x_0 + tu \in D$. Si existe el límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}, \quad (1)$$

lo llamaremos **derivada de f en el punto x_0 en la dirección u** y lo denotaremos por cualesquiera de los símbolos:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0), \quad D_u f(x_0).$$

Observación. Cuando se toman como vectores u a los vectores e_i de la base canónica se obtienen las derivadas parciales de la función. Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0).$$

Ejemplo 1. Hallemos la derivada, según la dirección de un vector unitario arbitrario $u = (u_1, u_2)$, en el punto $(0,0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{Fig.13}).$$

En este caso el cociente incremental en (1) se convierte en:

$$\frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \begin{cases} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4}, & \text{si } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{si } u_1 = 0 \end{cases}$$

que para todo valor de u_1 y u_2 tiene límite cuando $t \rightarrow 0$.

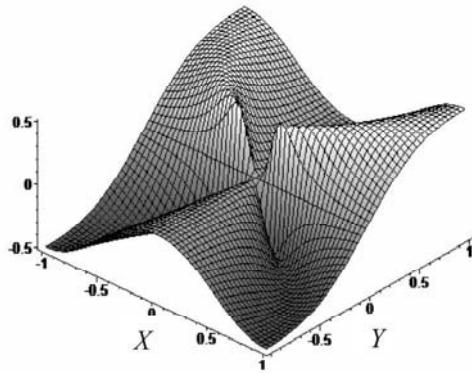


Figura 13.

Hemos probado la existencia de la derivada según cualquier dirección u en el punto $(0,0)$, y que ella es igual a:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial u} = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & \text{si } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{si } u_1 = 0 \end{cases}.$$

Observemos que la función **f no es continua** en $(0,0)$ (II.3 ejemplo 3).

Este ejemplo muestra que:

Una función puede tener en un punto, derivadas según todas las direcciones y, sin embargo, no ser continua en ese punto (y, por tanto, tampoco diferenciable).

Evidentemente, una función puede ser continua en un punto y no tener en él derivadas en ninguna dirección. ¿Podrías dar un ejemplo?. Demostremos que, si una función $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable en un punto x_0 , tiene en ese punto derivada según una dirección cualquiera.

◆ En efecto, el cociente incremental en (1) se escribe:

$$\frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = \frac{df(x_0)(tu) + \varepsilon(tu)\|tu\|}{t} = df(x_0)(u) + \frac{\varepsilon(tu)|t|}{t},$$

ya que el diferencial es una función lineal.

El primer sumando del miembro derecho de esta igualdad no depende de t , el segundo obviamente tiende a cero con t , entonces podemos afirmar que el límite del cociente incremental existe y es igual a $df(x_0)(u)$. Así que la derivada de f en el punto x_0 según la dirección de un vector u arbitrario existe.♦

Hemos probado el resultado siguiente, que resulta muy útil en la práctica:

Una función diferenciable en un punto x_0 tiene en ese punto derivada según cualquier dirección u y además se cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = df(x_0)(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)u_i. \quad (2)$$

Observación. La fórmula (2) facilita, **para el caso de funciones diferenciables**, el cálculo de la derivada de una función, según una dirección cualquiera, conocidas sus derivadas parciales y el vector unitario en la dirección requerida. Sin embargo, esta última expresión puede conducir a resultados erróneos cuando no se tiene en cuenta la hipótesis de diferenciabilidad bajo la cual fue deducida. La función del ejemplo 2 tiene derivadas parciales nulas en el punto $(0,0)$, luego la suma en (2) valdría siempre cero para todo vector u . ¡Pero hemos visto que la derivada, según cualquier dirección diferente a la de los ejes coordenados, es no nula!

Cuando trabajamos con funciones de dos o tres variables, la sumatoria en (2) puede interpretarse como el producto escalar del vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \right)$ o $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0) \right)$ y el vector unitario u . Extendamos esta interpretación a un espacio \mathbf{R}^n general:

Definición 2. Llamaremos **producto escalar de dos vectores** $x, y \in \mathbf{R}^n$ y lo denotaremos por $x \cdot y$ al número real:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Es claro que la norma euclíadiana de un elemento de \mathbf{R}^n puede escribirse como: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. Con esta notación la desigualdad (2) de I.1 se escribe:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| .$$

Esta desigualdad permite definir el **ángulo entre dos vectores** x e y de \mathbf{R}^n , como aquel ángulo φ entre 0 y π cuyo coseno se expresa por:

$$\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} .$$

De modo que se conserva la conocida relación:

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \varphi .$$

La terminología y notación recién introducida nos permite, para una función diferenciable, dar una interpretación geométrica, muy útil en la práctica, a la derivada según una dirección. Si la función f es diferenciable en un punto x_0 , interior a su dominio de definición, entonces la expresión (2) se escribe como:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \cdot u . \quad (3)$$

La importancia del vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$, motivó que se le asignara una denominación específica: **vector gradiente de f en el punto x_0** . Este vector se denota por $\text{grad } f(x_0)$ o $\nabla f(x_0)$.

Entonces, para funciones f diferenciables en un punto x_0 , la derivada en x_0 según una dirección u , se expresa como el producto escalar del vector gradiente por el vector unitario en la dirección u , es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot u . \quad (3')$$

El símbolo ∇ fue introducido por William Rowen Hamilton en la segunda mitad del siglo XIX como parte del nuevo lenguaje y notación que estaba elaborando. El propósito de Hamilton era brindar a las ciencias físicas, que en ese momento experimentaban un desarrollo vertiginoso, una herramienta de trabajo apropiada. La evolución de estas ideas desembocó en lo que hoy se conoce como *Análisis vectorial*, una parte del cual desarrollaremos en el Capítulo VII. Hamilton llamó al símbolo ∇ “nabla”, por parecerse a un antiguo instrumento musical hebreo que lleva ese nombre.

La ventaja de este símbolo es que facilita el uso formal de las operaciones vectoriales para la representación de los conceptos básicos del análisis vectorial. Ejemplifiquemos esto con el gradiente:

Escribamos el “vector”

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

entonces el gradiente toma la forma:

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x_0) .$$

La última expresión puede interpretarse como si se realizara el “producto” del “vector” ∇ por el “escalar $f(x_0)$ ”; el “producto” del símbolo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por $f(x_0)$ se debe concebir como la derivación parcial de la función f respecto a la variable x_i en el punto x_0 .

Observaciones. 1) La derivada según una dirección la hemos definido para funciones f reales, esto es, con conjunto de llegada \mathbf{R} . En este caso, la matriz jacobiana de f en x_0 , $f'(x_0)$, tiene una sola fila. El gradiente de f en x_0 es un vector de \mathbf{R}^n cuyas componentes coinciden con los elementos de esa matriz fila. Sin embargo, es usual utilizar la notación y denominación de gradiente, cuando se hace referencia a esa matriz fila como vector.

2) La relación $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, entre la norma euclíadiana y el producto escalar de dos vectores de \mathbf{R}^n , es lo que nos ha permitido encontrar la elegante, sencilla y útil fórmula (3'). Puede demostrarse, aunque sale de los objetivos de este texto, que entre las normas usuales en \mathbf{R}^n , $\|x\|_p$, una relación de esta naturaleza solo es posible cuando $p = 2$. Esta es la razón por la cual hemos considerado, en la definición de derivada, según una dirección, los vectores unitarios en la norma euclíadiana.

3) La nueva terminología y notación introducida, nos permite escribir el diferencial en un punto, para una función real, mediante la expresión:

$$df(x_0)(h) = \nabla f(x_0) \cdot h .$$

Por su parte, la derivada según una dirección toma la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \|\nabla f(x_0)\| \|u\| \cos \varphi = \|\nabla f(x_0)\| \cos \varphi, \quad (4)$$

donde φ es el ángulo formado por los vectores $\nabla f(x_0)$ y u .

Ahora podemos dar al vector gradiente de una función f en un punto x_0 una interpretación geométrica. La derivada según una dirección u de una función f en el punto x_0 caracteriza la variación de f en dicho punto en la dirección señalada por el vector u . Luego, la dirección de mayor variación de f en x_0 ocurrirá para aquel vector u donde $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$ sea máxima. Entonces, de la relación (4) se infiere que esa dirección de máxima variación ocurre cuando $\cos \varphi = 1$, es decir, cuando u se toma en la dirección del vector $\nabla f(x_0)$. Por tanto, podemos afirmar que:

La variación de f en el punto x_0 será máxima en la dirección y sentido del vector gradiente $\nabla f(x_0)$.

c) Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie.

Veamos como, algunas de las herramientas introducidas, se pueden aplicar a la determinación de las ecuaciones de la recta tangente a una curva en un punto y la ecuación del plano tangente a una superficie, obtenida como representación geométrica de una función de dos variables.

En II.6 definimos arco de curva Γ en \mathbf{R}^n como aquel dado mediante una función continua $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\Gamma = r([a, b])$. Ahora nos proponemos, haciendo

uso de las herramientas diferenciales, la determinación de la recta tangente a una curva en un punto. Esta noción reviste un carácter eminentemente local, por tanto nos interesaría el comportamiento de la función r en una vecindad de cierto punto $t_0 \in (a,b)$ (en caso que t_0 fuera uno de los extremos se trataría de semirecta tangente), donde exigiremos a la función r que sea diferenciable.

Veamos primeramente el caso $n = 2$. Sea una curva plana Γ representada por la función $r : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$ diferenciable en $t_0 \in I$. Esto significa que las funciones de una variable $x(t)$, $y(t)$ son derivables en t_0 . En este caso, la matriz jacobiana de r , $r'(t)$, es un vector columna. Resulta más cómodo tratarlo en la forma de **vector derivada de r** :

$$\begin{aligned} r'(t_0) &= (x'(t_0), y'(t_0)) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (r(t_0 + h) - r(t_0)) \end{aligned}$$

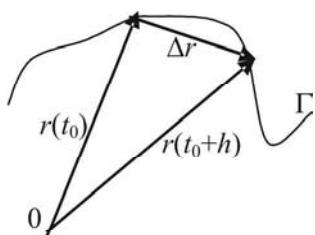


FIGURA 14.

El vector $\frac{1}{h} (r(t_0 + h) - r(t_0)) = \frac{\Delta r}{h}$ (siempre que sea no nulo) tiene la dirección de la recta, secante a la curva Γ , que une los puntos $r(t_0 + h)$ y $r(t_0)$ (Fig. 14). Es intuitivamente claro que, si $r'(t_0) \neq 0$, el vector $r'(t_0)$ tendrá la dirección de la recta tangente a Γ en el punto $r(t_0)$. Estas consideraciones geométricas motivan la definición general siguiente:

Definición 3. Se denomina **recta tangente a una curva** Γ representada por la función $r : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, (I intervalo abierto) diferenciable en $t_0 \in I$ y tal que $r'(t_0) \neq 0$, a la recta que pasa por el punto $r(t_0)$ y tiene la dirección del vector $r'(t_0)$.

Luego la ecuación de la recta tangente en el punto $r(t_0)$ de la curva Γ es:

$$\rho(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0).$$

Ejemplos

2. Sea una curva plana dada por $y = f(x)$ donde f es una función derivable en un intervalo abierto I . Podemos considerar esta curva dada por la representación

paramétrica $r(t) = (r, f(t))$, $t \in I$. Por tanto, $r'(t_0) = (1, f'(t_0)) \neq 0$, $(t_0 = x_0 \in I)$ luego esta es una curva suave cuya tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ tendrá la dirección del vector $r'(t_0)$. Así que la ecuación paramétrica de la recta tangente que pasa por este punto será:

$$\rho(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0) = (t, f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)),$$

o en forma equivalente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta última expresión es la forma estudiada para la ecuación de la recta tangente a una curva obtenida como el gráfico de una función real de una variable real.

3. Sea la curva en el espacio \mathbf{R}^3 dada por $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$ (ver Fig. 15) y hallemos la ecuación de su recta tangente en el punto $P = \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{2}}{2}, b \frac{\pi}{4}\right)$ correspondiente al valor $t = \frac{\pi}{4}$.

El vector director es $r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{2}}{2}, b\right)$

y por tanto, la recta tangente viene dada por:

$$x = a \frac{\sqrt{2}}{2} - a \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad y = a \frac{\sqrt{2}}{2} + a \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad z = b \frac{\pi}{4} + b \left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Al comienzo de este capítulo vimos como la idea intuitiva de “plano tangente en un punto de una superficie” sirvió de inspiración a Fréchet para su definición abstracta de diferencial de una función en un punto. Pero, antes de esto, el problema de la definición, existencia y determinación del plano tangente en un punto de una superficie había recorrido un largo camino. En un inicio, los matemáticos solo se preocuparon por la búsqueda de la ecuación de un plano que satisficiera la idea intuitiva de tangencia en un punto de una superficie concreta y relativamente sencilla. Más tarde, se realizaron esfuerzos por caracterizar este plano mediante propiedades tales como su distancia a la superficie o su relación con las curvas, situadas sobre la superficie, que pasaban por el punto de tangencia.

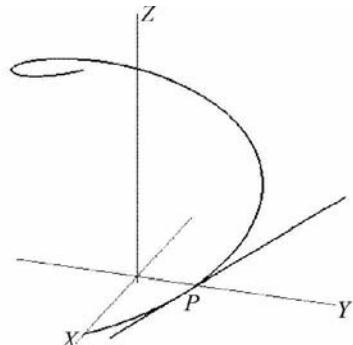


FIGURA 15.

En relación con la primera de estas caracterizaciones, ya vimos que si la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , entonces:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|h\|), \quad (5)$$

donde $\|h\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Por tanto, el plano Π dado por la ecuación:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (6)$$

pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, y la diferencia entre el valor de su coordenada z , en un punto (x, y) , y la correspondiente coordenada z de la superficie S dada por $z = f(x, y)$ tiende a cero más rápido que la distancia h entre (x, y) y (x_0, y_0) (Fig. 2). Como consecuencia de la unicidad del diferencial, Π resulta ser el **único plano** que tiene este orden de aproximación a la superficie S en una vecindad del punto P y es, por tanto, el plano que mejor aproxima a S en una vecindad del punto P . Esta propiedad sugiere para el plano Π la denominación de **plano tangente** a la superficie S en el punto P .

A continuación probaremos otra propiedad característica del plano tangente que reafirma la idea de “tangencia a la superficie”:

Si Γ es una curva, situada sobre la superficie S , que pasa por el punto P y tiene recta tangente en este punto, entonces esa recta tangente está situada sobre el plano Π .

◆ En efecto, sea una curva Γ situada sobre S y que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$. Consideremos una parametrización $r : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ y un punto t_0 interior a I tales que $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y $r'(t_0) \neq 0$. La curva está situada sobre S , luego sus coordenadas $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, deben satisfacer la ecuación de la superficie. Por tanto, se cumple $z(t) = f(x(t), y(t))$.

Por definición, el vector $r'(t_0)$ determina la dirección de la tangente a Γ en el punto P . Haciendo uso de la fórmula para la derivación de la función compuesta, obtenemos:

$$r'(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) \right).$$

Por otra parte, el vector $N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ es perpendicular al plano Π . Evidentemente el producto escalar $N \cdot r'(t_0)$ es cero, luego el vector $r'(t_0)$ es perpendicular a N . Esto significa que $r'(t_0)$ está situado en el plano Π y por tanto, lo mismo ocurre con la recta tangente a Γ en P . Con esto se concluye la prueba de la afirmación realizada. ♦

Ejemplo 4. Hallemos el plano tangente a la superficie dada por la función $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ en el punto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Nótese que, en este caso, la superficie S es el hemisferio superior de una esfera con centro en el origen y radio 1 (Fig. 16).

Las derivadas parciales de la función son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Así que $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y sustituyendo en (6) obtenemos la ecuación del plano tangente:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right), \text{ o } z = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y).$$

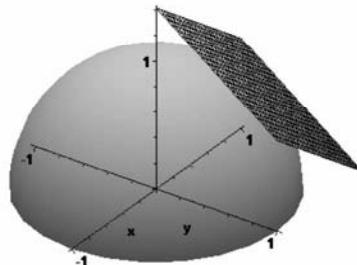


FIGURA 16.

Por último, veamos una relación muy interesante y útil en la práctica, entre las curvas de nivel de una función diferenciable $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ y el gradiente de f . Recordemos que se denominaba curvas de nivel de f al lugar geométrico de los puntos de D en los cuales esta función permanece constante. Supongamos que una curva Γ , dada por la representación paramétrica $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, constituye una *curva de nivel de la función f y tiene tangente en todos sus puntos*.

Por ser Γ una curva de nivel, se satisfará idénticamente la igualdad:

$$f(r(t)) = f(x(t), y(t)) = c,$$

donde c es la constante correspondiente a Γ . En otras palabras, la función compuesta es constante en el intervalo I y por tanto:

$$(f \circ r)'(t) = 0, \quad t \in I.$$

Diferenciando la igualdad anterior en un punto cualquiera de I (las funciones componentes f y r son diferenciables), tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y'(t) = 0.$$

Esta igualdad nos indica que, si $\nabla f(x, y) \neq 0$, entonces el vector gradiente, y el vector $r'(t)$, tangente a Γ , son perpendiculares. Así hemos probado que:

El vector gradiente de una función diferenciable en cualquier punto o es nulo o es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

Observaciones. 1) En los razonamientos anteriores hemos tenido que imponer la condición de que la curva de nivel tenga tangente en todos sus puntos. En IV.1 veremos que, cuando f tiene derivadas parciales continuas en la vecindad de un punto (x, y) y $\nabla f(x, y) \neq 0$, entonces la curva de nivel que pasa por (x, y) tiene tangente en ese punto.

2) Antes habíamos demostrado que una función diferenciable, varía más rápido en la dirección que indica el vector gradiente $\nabla f(x, y)$. Ahora sabemos que esa dirección es precisamente la ortogonal a las curvas de nivel.

Ejemplo 5. En la Fig. 17 hemos realizado el gráfico de varias curvas de nivel de la función:

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2.$$

También aparecen los vectores gradientes en puntos correspondientes a una de esas curvas de nivel. Nótese la perpendicularidad del gradiente y la curva de nivel. También es interesante observar que en aquellos puntos donde el gradiente es mayor, la función crece más rápidamente. Esto último se refleja en el comportamiento siguiente: cuanto mayor sea la longitud del vector gradiente y, por tanto, de la derivada direccional, más

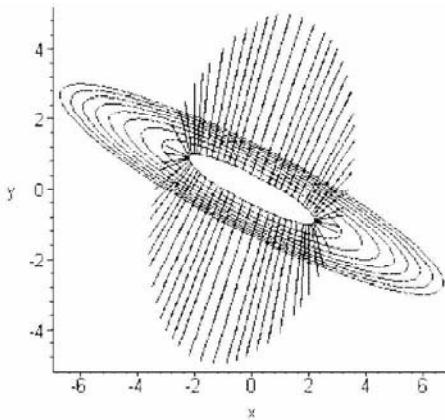


FIGURA 17.

rápidamente se pasa de una curva de nivel a otra, esto es, el valor de $f(x,y)$ crece con mayor velocidad.

Ejercicios propuestos

1. Determina el ángulo entre los gradientes de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en los puntos $A = (a,0,0)$ y $B = (0,a,0)$.
2. Halla la derivada de $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ en el punto $(1,0)$ en la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 120° .
3. Halla la derivada de la función $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ en el punto $(2,1,3)$ en la dirección que va desde este punto al punto $(5,5,15)$.
4. Determina a,b,c tales que la derivada en la dirección paralela al eje z de:

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3,$$

tenga en $(1,2,-1)$ un valor máximo de 64.

5. Demuestra que la derivada de la función $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ tomada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = c^2$ ($x \neq 0$), en la dirección de la normal a esta curva, es cero.
6. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \arctan \frac{y}{x}$ en el punto $(1,1,\pi/4)$.
7. Prueba que si las funciones $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tienen vectores gradientes en un punto $x \in \mathbf{R}^n$, entonces las funciones suma y producto definidas por $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ también tienen vectores gradientes y se cumple:

$$\nabla(f(x) + g(x)) = \nabla f(x) + \nabla g(x)$$

$$\nabla(f(x)g(x)) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x).$$

8. La función diferenciable $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ se transforma mediante el cambio de variables dado por $\varphi(u,v) = (u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta)$, (θ constante) y se obtiene la función $g = f \circ \varphi$. Demuestra que en todo punto $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ se cumple que $|\nabla f| = |\nabla g|$. ¿Puedes dar una interpretación geométrica a este resultado?

9. Sea S una superficie de revolución dada por la ecuación $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, donde f está definida y tiene derivada no nula en \mathbf{R} . Prueba que las normales a S (cuando existen) intersecan al eje de revolución. Además, si S es una superficie cónica, es decir, si f es de la forma $f(t) = at$, entonces el punto de intersección es el mismo.
10. Sea $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ cuya matriz jacobiana $T'(x_0, y_0)$ es no singular. Prueba que:
- Si la función $r(t) = (x(t), y(t))$ representa una curva con recta tangente en el punto $r(t_0) = (x_0, y_0)$, entonces $\rho(t) = (T \circ r)(t)$ representa una curva con tangente en el punto $\rho(t_0)$.
 - Si las curvas C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0) y sus tangentes en dicho punto forman un ángulo $\alpha \neq 0$, entonces las curvas $T(C_1)$ y $T(C_2)$ forman en $T(x_0, y_0)$ un ángulo $\beta \neq 0$. ¿Puedes dar una condición sobre T para que $\alpha = \beta$?
11. Sean $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable en x_0 , u y v vectores unitarios mutuamente perpendiculares. Demuestra que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right)^2 = |\nabla f(x_0)|^2.$$

III.5. DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. FÓRMULA DE TAYLOR

Desde finales del siglo XVII se utilizaba comúnmente la representación de una función mediante una serie en potencias de la variable y se conocía la relación existente entre los coeficientes de este desarrollo y lo que hoy denominamos derivadas de la función, es decir la serie de Taylor. Sin embargo, será Lagrange quien, a fines del siglo XVIII, sitúe esta metodología en primera línea. Lagrange la concibió no solo como un instrumento, sino incluso como fundamento del cálculo diferencial.

El método de Lagrange consistía en lo siguiente: dada una función cualquiera de la variable x , en lugar de x colocaba $x + i$, donde i es una cantidad indeterminada cualquiera. Entonces mediante “las reglas del álgebra” desarrolla $f(x + i)$ en potencias de i y obtiene una expresión de la forma $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$, donde los p, q, r, \dots , serán nuevas funciones de x , independientes de la cantidad i y **derivadas de la función primitiva** fx . Así apareció en el cálculo la terminología, tan familiar hoy en día, de derivada y primitiva de una función.

Con el objetivo de dar un método general de estimación del error cometido cuando se toma solo un número finito de términos en este desarrollo, Lagrange encuentra la forma del resto que hoy lleva su nombre.

Lagrange extiende la fórmula de Taylor para el caso de funciones de varias variables. Aquí su método consiste en efectuar sucesivamente el desarrollo respecto a cada variable, suponiendo las restantes como constantes. Por esta vía es que introduce las **derivadas parciales de orden superior** y obtiene sus propiedades fundamentales.

Lagrange había postulado que toda función se podía desarrollar en series de potencias, por ello, cae en un círculo vicioso, cuando pretende “demostrar” la fórmula de Taylor. Por tanto, esta metodología no es adecuada como fundamento del cálculo. No obstante, la mayoría de los resultados obtenidos por Lagrange pueden ser demostrados rigurosamente utilizando el enfoque actual.

En este epígrafe, introduciremos primeramente la noción de derivada parcial de orden superior y sus propiedades básicas y seguidamente generalizaremos la fórmula de Taylor para el caso de funciones de varias variables.

Definición 1. Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ donde D es un conjunto abierto y supongamos que, para todo $x \in D$, existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es una función definida en D . Cuando $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tiene derivada parcial respecto a x_j en un punto $x_0 \in D$, esta derivada se denomina **derivada parcial segunda o derivada parcial de segundo orden** de f respecto a las variables x_i y x_j . Esta derivada se denota por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0) = D_{j,i}f(x_0)$$

La derivada de orden n de una función puede definirse en forma inductiva: Si para todo $x \in D$ existe la derivada parcial de orden $n - 1$ de f

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2}, \dots, \partial x_{i_n}}(x)$$

y esta función derivada es derivable respecto a la variable x_{i_1} en el punto x_0 , entonces se define la derivada parcial de orden n de f respecto a las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_n} en el punto x_0 como:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}, \dots, \partial x_{i_n}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2}, \dots, \partial x_{i_n}} \right)(x_0) = D_{i_1, \dots, i_n} f(x_0)$$

Ejemplo 1. Calculemos las derivadas parciales de segundo orden de la función:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + 2e^{xy},$$

en un punto arbitrario (x, y) de \mathbf{R}^2 .

Las derivadas de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 2ye^{xy}, \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2xe^{xy}.$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + 2y^2e^{xy}, \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y + 2x^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + 2e^{xy} + 2yx e^{xy}, \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + 2e^{xy} + 2yx e^{xy}.$$

Nótese que resultaron iguales las derivadas mixtas (esto es, donde aparecen las dos derivaciones respecto a variables diferentes). Podemos entonces preguntarnos: ¿influirá, en general, el orden en que se realiza la derivación en el resultado de esta operación?

Tal y como ocurrió en el ejemplo anterior (y hubiera ocurrido con cualquiera otra función expresada algebraicamente mediante funciones elementales), los matemáticos, obtenían siempre el mismo resultado independientemente del orden en que realizaban las derivadas. En un principio se admitía este resultado como evidente, más tarde se dieron algunas “demostraciones”. Veamos como ejemplo, la esencia del razonamiento de Euler: calcula el incremento de una función $f(x, y)$ en un punto (x, y) respecto a x y después respecto a y :

$$\Delta_x f = f(x + h_1, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y (\Delta_x f) = [f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)] - [f(x + h_1, y) - f(x, y)],$$

seguidamente realizó el mismo cálculo en orden inverso y obtuvo el mismo resultado. De aquí concluyó que esta misma propiedad debía cumplirse para las

derivadas. Posteriormente, verificó la validez de estos resultados con varios ejemplos.

Se dieron otras “pruebas”, pero todas, en esencia, tenían un defecto común: *consideraban que los límites iterados de una función cualquiera de dos variables debían coincidir*. No es entonces de extrañar que sea precisamente en el famoso curso de Weierstrass, que ya hemos comentado, donde se enuncie y demuestre rigurosamente este resultado.

En 1873 Hermann Schwarz, alumno de Weierstrass, dio un ejemplo en el cual no tenía lugar la igualdad de las derivadas parciales (ejercicio 4). Expondremos un ejemplo algo más sencillo dado por Giuseppe Peano 10 años más tarde.

Ejemplo 2. Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Sus derivadas parciales de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, x) = x.$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Cuando se hallan las derivadas segundas mixtas, para una función con cualquier número de variables, la derivación se realiza solo respecto a dos de las variables

y se asume que todas las demás variables toman valores constantes. En otras palabras, se considera la función como si tuviera solamente dos variables. Podemos, entonces, sin pérdida de generalidad, trabajar con una función de dos variables, las cuales denotaremos x e y . Se han dado distintas condiciones suficientes para que las derivadas mixtas sean iguales. En el teorema siguiente se da la que tiene demostración más sencilla y es suficiente para nuestras necesidades.

Teorema 5. Si la función $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tiene en el conjunto abierto D segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

entonces ellas coinciden en aquellos puntos donde ambas son continuas.

◆ Sea $(x_0, y_0) \in D$ un punto donde estas derivadas son continuas y demostremos que en (x_0, y_0) las derivadas mixtas son iguales. Consideremos una bola $B((x_0, y_0), r) \subset D$ y trabajaremos solo con puntos de esta bola.

Introduzcamos la función auxiliar siguiente:

$$g(h_1, h_2) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) + f(x_0, y_0),$$

donde el incremento $h = (h_1, h_2)$ es tal que $\|h\| < r$.

La función $g(h_1, h_2)$ que no es más que el incremento sucesivo de la función $\Delta_y(\Delta_x f)$ y puede escribirse como:

$$\begin{aligned} g(h_1, h_2) &= [f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0)] - [f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)] = \\ &= \varphi(x_0 + h_1) - \varphi(x_0), \end{aligned}$$

donde $\varphi(x) = f(x, y_0 + h_2) - f(x, y_0)$. La función φ es una función de la variable x , derivable en un intervalo que contiene a x_0 y $x_0 + h_1$, luego, le podemos aplicar el teorema del valor medio. De este modo se encuentra un $\theta_1 \in (0, 1)$ tal que:

$$g(h_1, h_2) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h_1) h_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) \right] h_1.$$

La expresión entre corchetes representa también un incremento, esta vez, de la función derivada parcial respecto a x y el incremento se realiza respecto a la

variable y . Como existe la segunda derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ en $B((x_0, y_0), r)$ entonces, aplicando nuevamente el teorema del valor medio, encontramos un $\theta_2 \in (0,1)$ tal que:

$$g(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + \theta_2 h_2) h_1 h_2. \quad (1)$$

Rescribamos $g(h_1, h_2)$ en la forma:

$$\begin{aligned} g(h_1, h_2) &= [f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2)] - [f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &= \psi(y_0 + h_2) - \psi(y_0) \end{aligned}$$

donde $\psi(y) = f(x_0 + h_1, y) - f(x_0, y)$.

De forma análoga, obtenemos

$$g(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h_1, y_0 + \theta_4 h_2) h_1 h_2, \quad \theta_3, \theta_4 \in (0,1). \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h_1, y_0 + \theta_4 h_2).$$

Hagamos $h = (h_1, h_2) \rightarrow 0$, entonces, en virtud de la continuidad de las derivadas parciales segundas en el punto (x_0, y_0) , podemos concluir que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0). \quad \blacklozenge$$

Observaciones: 1) Es posible enunciar otras condiciones suficientes para la igualdad de las derivadas mixtas, algunas con hipótesis más débiles que las exigidas en el Teorema 5 (ver por ejemplo el ejercicio complementario 16).

2) Para aquellas funciones definidas solamente por las operaciones aritméticas y la composición de funciones elementales básicas, es conocida la continuidad de sus derivadas parciales en todo su dominio. Entonces, para ellas es siempre aplicable el teorema anterior.

Ejemplo 3. Las funciones:

$$f(x, y, z) = xy^3z^2 - 3\log\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad g(x, y) = e^{xy} \arctan \frac{y}{x}$$

poseen derivadas parciales de cualquier orden continuas en \mathbf{R}^3 y en el conjunto $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\}$ respectivamente. Así que, el Teorema 5 nos permite afirmar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \text{ para todo } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \quad \text{para todo } (x, y) \in D.$$

Veamos cómo este resultado puede ser generalizado a derivadas mixtas de orden superior al segundo:

Sea $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ con todas sus derivadas hasta el orden tres continuas, entonces es evidente que la aplicación reiterada del Teorema 5 permite escribir, por ejemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

por tanto, resultan iguales las derivadas tercera:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

El principio de inducción completa permite dar una demostración formal del resultado general siguiente:

Si una función de n variables tiene todas sus derivadas hasta el orden k inclusive continuas en un cierto punto x , entonces el valor de la derivada $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x)$ no varía ante cualquier permutación que se realice con los índices i_1, \dots, i_k (que toman valores arbitrarios entre 1 y n).

De lo anterior es evidente que, para el trabajo con derivadas de orden superior, resulta cómoda la terminología siguiente:

Una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definida en un abierto D diremos que es de **clase C^k en D** (k entero ≥ 1) y lo denotaremos $f \in C^k(D)$, cuando existen y son continuas en D todas las derivadas parciales de f hasta el orden k inclusive. Evidentemente, si $f \in C^k(D)$, entonces $f \in C^p(D)$, para $p < k$. Una función se denomina de **clase C^∞ en D** ($f \in C^\infty(D)$) si es de clase C^k para todo $k = 1, 2, \dots$.

Obtenemos entonces la siguiente consecuencia del teorema 5:

Corolario. Si $f \in C^k(D)$, $k \geq 2$, el resultado de la derivación parcial hasta el orden k inclusive no depende del orden en que se toman las variables.

Observación. La condición suficiente de diferenciabilidad puede ahora ser reformulada como:

Si $f \in C^1(D)$, entonces f es diferenciable en D .

El ejemplo siguiente tiene el objetivo de facilitar la deducción de la fórmula de Taylor para funciones de varias variables.

Ejemplo 4. Sea una función $f \in C^k(D)$, D abierto de \mathbf{R}^2 ($k \geq 1$) y el vector $h = (h_1, h_2)$, fijo y tal que el segmento $[x_0, x_0 + h]$ está contenido en D . Compongamos a f con la función lineal $g : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(t) = x_0 + th$ que determina dicho segmento de recta. De esta forma obtenemos la función de una variable $\varphi(t) = f(g(t)) = f(x_0 + th)$, definida en $[0,1]$, que no es más que la restricción de f sobre el segmento $[x_0, x_0 + h]$. Demostremos que φ es de clase C^k en $[0,1]$ y calculemos esta derivada.

La primera derivada de φ ya la calculamos en la demostración del teorema del valor medio. Ella es:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)h_2. \quad (3)$$

Para facilitar el trabajo, introduzcamos una notación en el espíritu de los convenios establecidos antes para el símbolo $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$:

$$(\nabla \cdot h) = \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2.$$

Observemos que es como si realizáramos el producto escalar del “vector” $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ y el vector $h = (h_1, h_2)$.

De esta manera podemos escribir (3) en la forma:

$$\varphi'(t) = (\nabla \cdot h) f(x_0 + th),$$

donde la expresión $(\nabla \cdot h) f(x_0 + th)$ se interpreta como la realización de las operaciones indicadas en $(\nabla \cdot h)$ a la función f en el punto $x_0 + th$.

Supongamos $k \geq 2$ y analicemos la segunda derivada de la función φ . La función depende de t como compuesta de la función diferenciable $(\nabla \cdot h) f = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2$ y la función lineal g . Luego es una función diferenciable y su derivada se calcula de forma análoga a la de φ :

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [(\nabla \cdot h) f(x_0 + th)] h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} [(\nabla \cdot h) f(x_0 + th)] h_2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} f(x_0 + th) (h_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_0 + th) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} f(x_0 + th) (h_2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Lo anterior demuestra que φ'' es continua y, por consiguiente, φ es de clase C^2 .

A los convenios ya establecidos para operar con el símbolo ∇ , añadamos el siguiente:

$$(\nabla \cdot h)^{(2)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 \right)^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} h_2^2,$$

entonces (4) puede rescribirse como:

$$\varphi''(t) = (\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0 + th).$$

Similarmente, puede establecerse, haciendo uso del principio de inducción completa, que φ es de clase C^k y además:

$$\varphi^{(k)}(t) = (\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + th) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (x_0 + th) h_{i_1} \dots h_{i_k},$$

donde cada índice i_1, \dots, i_k toma valores 1 o 2 y se suma para todas las colecciones posibles de k índices con estos valores.

Las notaciones introducidas y el resultado obtenido en este ejemplo pueden ser generalizados de manera natural a las funciones reales de cualquier número de variables:

Sea $f \in C^k(D)$, $D \subset \mathbf{R}^n$ y $[x_0, x_0 + h] \subset D$ para $\varphi(t) = f(x_0 + th)$, $t \in [0, 1]$ se tiene que φ es de clase C^k y se cumple:

$$\varphi^{(k)}(t) = (\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + th) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^{(k)} f(x_0 + th).$$

Podemos ahora pasar al objetivo principal de este epígrafe, la deducción de la fórmula de Taylor para las funciones de varias variables. En el estudio de las funciones de una variable, hemos visto que el teorema del valor medio es un caso particular de la fórmula de Taylor con resto en la forma de Lagrange. Luego, en la deducción de esta fórmula para funciones de varias variables, es natural seguir un procedimiento similar al utilizado en III.3 para la demostración del teorema del valor medio. Precisamente, el ejemplo anterior nos facilita la expresión de la derivada de orden k de la función auxiliar φ que allí utilizamos.

◆ Supongamos que $f \in C^k(D)$, D abierto de \mathbf{R}^n ($k \geq 1$) y el vector $h = (h_1, \dots, h_n)$ tal que $[x_0, x_0 + h]$ está contenido en D . Como la función $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ tiene derivadas continuas hasta el orden k inclusive, podemos aplicarle la fórmula de Taylor en el punto $t = 0$ y obtenemos:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + \frac{\varphi^{(k)}(\theta t)}{k!}t^k, \quad (5)$$

donde $0 < \theta < 1$, $t \in [0, 1]$. Pero:

$$\varphi^{(i)}(0) = (\nabla \cdot h)^{(i)} f(x_0), (i = 1, \dots, k-1)$$

$$\varphi^{(k)}(\theta) = (\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + \theta h).$$

Si en (5) tomamos $t = 1$ y sustituimos las expresiones anteriores obtenemos:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (\nabla \cdot h)f(x_0) + \frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{2!} + \dots \quad (6)$$

$$\dots + \frac{(\nabla \cdot h)^{(k-1)} f(x_0)}{(k-1)!} + \frac{(\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + \theta h)}{k!}$$

donde:

$$P_{k-1}(x_0, h) = f(x_0) + (\nabla \cdot h) f(x_0) + \frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{(\nabla \cdot h)^{(k-1)} f(x_0)}{(k-1)!}$$

se denomina el **polinomio de Taylor** de grado $k-1$ (en las variables h_1, \dots, h_n) y

$$r_k(x_0, h) = \frac{(\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + \theta h)}{k!},$$

resto en la forma de Lagrange. La fórmula (6) se denomina **fórmula de Taylor de orden $k-1$** de f en el punto x_0 .

De forma análoga, si aplicamos a la función φ la fórmula de Taylor con el resto escrito en la forma integral, se puede obtener esta forma del resto para las funciones de varias variables.

Hemos supuesto que todas las derivadas parciales de f del orden k son continuas en $x_0 \in D$, luego, para toda colección de índices (i_1, \dots, i_k) , $(i_j \in \{1, \dots, n\})$, tienen lugar las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0 + \theta h) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0) + \varepsilon_{i_1, \dots, i_k}(h),$$

donde $\varepsilon_{i_1, \dots, i_k}(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$. Entonces, se comprueba fácilmente que el resto en la forma de Lagrange se convierte en:

$$r_k(x_0, h) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^{(k)} f(x_0) + o(\|h\|^k),$$

así hemos obtenido la **fórmula de Taylor con el resto en la forma de Peano**. Observemos que en este caso el polinomio de Taylor tiene un término más, por lo que es de grado k .♦

Resumamos los resultados obtenidos en el teorema siguiente:

Teorema 6. Sea $f \in C^k(D)$, D abierto de \mathbf{R}^n ($k \geq 1$) y $[x_0, x_0 + h] \subset D$, entonces tienen lugar las relaciones:

$$f(x_0 + h) = P_{k-1}(x_0, h) + \frac{(\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + \theta h)}{k!},$$

$$f(x_0 + h) = P_{k-1}(x_0, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (\nabla \cdot h)^{(k)} f(x_0 + th) dt,$$

$$f(x_0 + h) = P_k(x_0, h) + o(\|h\|^k), \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

donde el polinomio de Taylor de grado $k - 1$ se expresa por:

$$P_{k-1}(x_0, h) = f(x_0) + (\nabla \cdot h) f(x_0) + \frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{(\nabla \cdot h)^{(k-1)} f(x_0)}{(k-1)!}.$$

Observación. Similarmente al caso de funciones de una variable, puede demostrarse la unicidad del polinomio de Taylor, con grado dado, de una función en un punto. Esta observación es muy útil en la práctica, pues permite afirmar que:

Si para una función de clase C^k ($k \geq 1$) en una vecindad del punto x_0 se tiene una expresión de la forma:

$$f(x_0 + h) = Q_k(h) + o(\|h\|^k),$$

donde $Q_k(h)$ es un polinomio en potencias de las componentes del vector h , de grado a lo sumo k , entonces $Q_k(h)$ es el polinomio de Taylor de grado k de la función f en x_0 .

Ejemplo 5. Desarrollemos hasta el orden tres la función:

$$f(x, y) = e^x \sin y,$$

en el punto $(0,0)$, utilizando el resto en la forma de Peano.

Evidentemente f es de clase C^∞ en todo el plano, luego podemos desarrollar esta función hasta un orden cualquiera. Denotemos $h_1 = x$, $h_2 = y$ entonces, usando los desarrollos conocidos para las funciones exponencial y seno, obtenemos:

$$e^x \sin y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \cdot \left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^4) \right).$$

Al efectuar el producto anterior, aparecerán sumandos cuyo grado es mayor que tres. Notemos que todos estos sumandos son infinitesimales de orden superior a $\|h\|^3 = (\sqrt{x^2 + y^2})^3$. Por ejemplo:

$$\left| \frac{x^3 y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} \right| \leq |y| \rightarrow 0, \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

Luego:

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3\right).$$

En la Fig. 18 puede observarse el gráfico de la superficie que representa a la función $f(x,y) = e^x \sin y$ y el correspondiente a los polinomios de Taylor de grados 1,2 y 3:

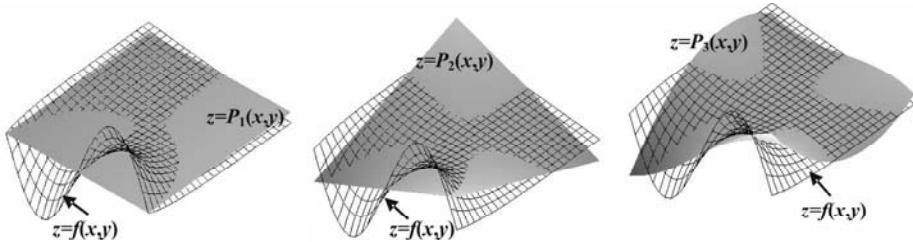


FIGURA 18.

Definimos recursivamente las derivadas parciales de orden superior mediante la derivación de las funciones derivadas. Es posible concebir un proceso semejante para la diferenciación, por ejemplo, pensar en un “segundo diferencial”, como “el diferencial del diferencial”. En realidad, esta idea fue desarrollada por los fundadores del cálculo y utilizado con éxito, no solo por ellos, sino también por sus seguidores, durante los siglos XVIII y XIX. Sin embargo, desde un punto de vista contemporáneo, este procedimiento no tenía una fundamentación matemática adecuada.

Pensemos cómo responder a la interrogante ¿qué significado pudiera dársele a la frase “el diferencial del diferencial” de una función de la variable x ?

Supongamos que se tiene una función f diferenciable en un abierto D de \mathbf{R}^n y que toma valores en \mathbf{R}^m , entonces su diferencial en $x \in D$, es una aplicación lineal $df(x)$ de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^m , que depende del punto x . De este modo, $df(x)$ tiene la particularidad de ser, a la vez, una aplicación lineal $df(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ y una función de x $df : D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, donde $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ denota el espacio de las aplicaciones lineales de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^m . En este carácter de función de x es que

nos interesa realizar la segunda diferenciación. Pero esto significa que la función que debemos diferenciar toma valores en un espacio normado distinto de los espacios \mathbf{R}^n y, por ello, para su conceptuación es necesario recurrir a la definición de diferencial de funciones definidas en espacios más generales. Veamos una idea de cómo puede ser definido el diferencial de segundo orden para funciones entre espacios normados.

Sea una función diferenciable $f : D \subset E \rightarrow F$, E y F son espacios normados y D es un conjunto abierto de E . Entonces el diferencial en x de f es un elemento del espacio normado (Cap. II, ejercicio complementario 21) $\mathbf{L}(E, F)$ de las aplicaciones lineales continuas de E en F , luego puede considerarse la función, $df : D \rightarrow \mathbf{L}(E, F)$. Supongamos que esta función df sea nuevamente diferenciable en los puntos de D . Se denomina **segundo diferencial de f en x** y se denota por $d^2f(x)$ al diferencial en x de la función df . Por tanto, para cada x de D , $d^2f(x)$ es una aplicación lineal continua de E en el espacio $\mathbf{L}(E, F)$, es decir, $d^2f(x) \in \mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$.

Los elementos del espacio $\mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$ pueden ser interpretados en la forma de las llamadas **aplicaciones bilineales**.

Una aplicación $B : E \times E \rightarrow F$ la denominaremos **bilineal** si se cumple:

- 1) $B(x_1, x_2)$ es lineal en x_1 , para cada x_2 fijo y es lineal en x_2 , para cada x_1 fijo.
- 2) Existe una constante M tal que $\|B(x_1, x_2)\|_F \leq M \|x_1\|_E \|x_2\|_E$, para todo $x_1, x_2 \in E$.

El conjunto $\mathbf{B}(E, F)$ de las aplicaciones bilineales de E en F resulta un espacio normado, cuando se define como $\|B\|$ a la menor de las constantes M que satisfacen 2).

Consideremos una aplicación lineal $L \in \mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$, para $x_1 \in E$ se tiene $L(x_1) \in \mathbf{L}(E, F)$, luego $(L(x_1))(x_2) \in F$. Puede verificarse fácilmente que la aplicación definida por:

$$B(x_1, x_2) = (L(x_1))(x_2),$$

es bilineal y además $\|B\| = \|L\|$. Por tanto la correspondencia $L \mapsto B$ establece un isomorfismo entre los espacios $\mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$ y $\mathbf{B}(E, F)$ que conserva la norma.

Lo anterior significa que podemos considerar a los elementos del espacio $\mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$ como si fueran elementos de $\mathbf{B}(E, F)$, es decir, aplicaciones bilineales. Luego $d^2f(x)$ es una aplicación bilineal.

Si el segundo diferencial de f existe en todo punto de D , entonces, podemos considerar la función $d^2f : D \rightarrow \mathbf{B}(E, F)$ y cuestionarnos su diferenciabilidad en un punto $x \in D$. Aparecerá así el diferencial de orden tres, que será una aplicación lineal de E en el espacio $\mathbf{B}(E, F)$ y que podrá ser interpretada en forma de **aplicación trilineal**... De esta forma pueden introducirse los diferenciales de cualquier orden para las funciones definidas entre espacios normados.

Haciendo uso de los diferenciales de orden superior de una función puede darse una generalización de la fórmula de Taylor para funciones f entre espacios normados. Enunciemos sin demostración el resultado correspondiente a la forma infinitesimal del resto.

Teorema 6'. Sea $f : B(x) \subset E \rightarrow F$ que admite diferencial hasta el orden k en la bola $B(x)$ con centro en x . Entonces, para $x + h \in B(x)$, se tiene:

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{d^2f(x)(h)}{2!} + \dots + \frac{d^k f(x)(h)}{k!} + o(\|h\|^k).$$

Ejercicios propuestos

1. Sea $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Demuestra que si $r \neq 0$, la función $u = \frac{1}{r}$ satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. ¿Satisfará también esta ecuación la función $u = \ln r$?
2. Demuestra que las funciones:

$$u = f(x-at) + g(x+at), \quad a \text{ const.}, \quad f \text{ y } g \text{ de clase } C^2(\mathbf{R}),$$

$$u(x,t) = A \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen}(\lambda x), \quad A, a, \lambda, \varphi \text{ constantes}$$

satisfacen la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. Determina si existe la derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ para la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

4. Mediante la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases},$$

Schwarz probó que podía ocurrir $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ¡Demuéstralos!

5. a) Sea f diferenciable en \mathbf{R}^n tal que $f(tx) = t f(x)$ para todo número real t y todo $x \in \mathbf{R}^n$. Prueba que $f(x) = (\nabla \cdot x) f(0)$.
- b) Sea f de clase C^2 en \mathbf{R}^n tal que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo número real t y todo $x \in \mathbf{R}^n$. Prueba que $f(x) = \frac{(\nabla \cdot x)^{(2)} f(0)}{2}$.
6. Halla el desarrollo de Taylor en el punto $(0,0)$ de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ hasta el orden tres.
7. Desarrolla por la fórmula de Taylor hasta el orden tres, las funciones

a) $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$, en el punto $(0,0)$.

b) $f(x, y) = \frac{1}{1-xy+x^2}$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

III.6. BÚSQUEDA DE EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

La necesidad de analizar los valores máximos y mínimos de una función es, sin dudas, una de las motivaciones principales que guiaron el surgimiento y desarrollo de las nociones relacionadas con la diferenciación de funciones. En la prehistoria del cálculo diferencial, Pierre Fermat (1601-1665), cuando se ocupaba de problemas de extremos, estuvo muy cerca del concepto derivada; Leibniz (1646-1716) titula a su trabajo fundacional del cálculo: *Un nuevo método para hallar máximos y mínimos ...*; las ideas del rigor weierstrassiano es imposible desligarlas de la demostración de la existencia de extremos para una función continua; el

surgimiento de la noción de espacio abstracto y la introducción de la diferenciación en ellos se deben en gran medida al estudio de los extremos de funciones definidas en estos espacios.

Hasta aquí hemos desarrollado una parte importante de las herramientas necesarias para hallar los valores extremos de una función de varias variables. Nos ocuparemos ahora de presentar los algoritmos básicos para llevar a cabo esta búsqueda.

Primeramente estudiaremos los *extremos relativos o locales* de funciones de varias variables. Consideraremos una función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ y un punto $a \in D^\circ$.

Definición 1. Se dice que f tiene en a un **máximo** (resp. **mínimo**) **relativo** o **local** si existe una bola $B(a)$ de centro en a tal que:

$$f(x) \leq (\text{resp. } \geq) f(a), \quad \text{para todo } x \in B(a).$$

Si en la definición anterior se cumple la desigualdad estricta en todo $x \neq a$, entonces decimos que el **máximo** (resp. **mínimo**) es **estricto**. Los máximos y mínimos relativos de una función se denominan **extremos relativos** de esa función. Al punto a se le denomina **punto de extremo** (máximo o mínimo) relativo de f .

En la Fig.19 se muestran gráficamente ejemplos de puntos P de máximo (b) y de mínimo (a) y (c) relativos de una función de dos variables.

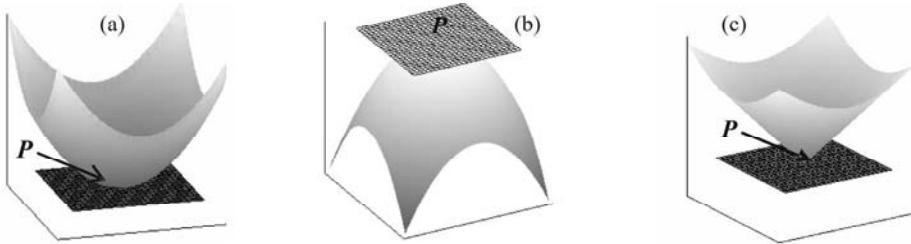


FIGURA 19.

- ◆ Sea una función f definida en un abierto $D \subset \mathbf{R}^2$. Supongamos que f tiene en $a = (a_1, a_2)$ un mínimo relativo, entonces tendrá lugar la desigualdad:

$$f(x_1, x_2) \geq f(a_1, a_2) \tag{1}$$

para todo $x = (x_1, x_2)$ de una bola $B(a)$. Consideremos la norma $\|\cdot\|_\infty$ y supongamos que la bola tenga radio r , entonces (1) tendrá lugar para todos los puntos (x_1, x_2) tales que $|x_1 - a_1| < r$, $|x_2 - a_2| < r$. En particular, se cumplirán las desigualdades:

$$g_1(x_1) = f(x_1, a_2) \geq f(a_1, a_2) = g_1(a_1),$$

$$g_2(x_2) = f(a_1, x_2) \geq f(a_1, a_2) = g_2(a_2),$$

lo que expresa que las funciones de una variable g_1 y g_2 tienen un mínimo en el punto a_1 y a_2 (Fig. 20).

Análogamente, para funciones de n variables se tiene que si $a = (a_1, \dots, a_n)$ es un punto de extremo relativo de f , entonces las funciones de una variable:

$$g_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (2)$$

tienen un extremo relativo en el punto a_i .

Ahora supongamos que existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en un punto a de extremo relativo de f . Como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i),$$

y g_i tiene en a_i un extremo relativo, por la condición necesaria de extremo, para funciones de una variable, podemos afirmar que $g_i'(a_i) = 0$, esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

De modo que, en un punto de extremo relativo, las derivadas parciales de las funciones de varias variables o son nulas o no existen.♦

Hemos demostrado la *condición necesaria* de extremo relativo:

Teorema 7. Si la función $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ posee en el punto $a \in D^\circ$ derivada parcial respecto a la variable x_i y tiene en ese punto un extremo relativo, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

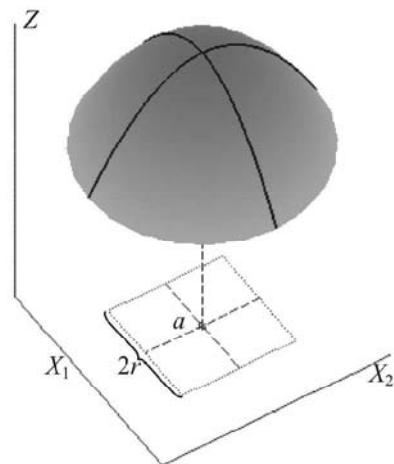


FIGURA 20.

Una consecuencia inmediata, pero muy útil, de este teorema, es el corolario siguiente

Corolario. Si en un punto a de extremo relativo, una función es diferenciable, entonces $df(a) = 0$ o lo que es lo mismo, $\nabla f(a) = 0$.

Lo anterior muestra que, de forma similar al caso de funciones de una variable, los puntos de extremo relativo de una función diferenciable de varias variables deben buscarse en aquellos puntos donde todas las derivadas parciales sean cero.

Observación. La deducción del Teorema 7 se basa en el resultado: Si una función de varias variables tiene en un punto a un extremo relativo, entonces todas las funciones parciales (2) tienen también, en el punto correspondiente a_i , un extremo relativo. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación es falso. En la Fig. 21 se muestra la función $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ que tiene un extremo (un mínimo) a lo largo de toda recta que pasa por $(0,0)$ y no tiene extremo relativo en $(0,0)$. La demostración de esta afirmación se deja como ejercicio al lector (ejercicio 3).

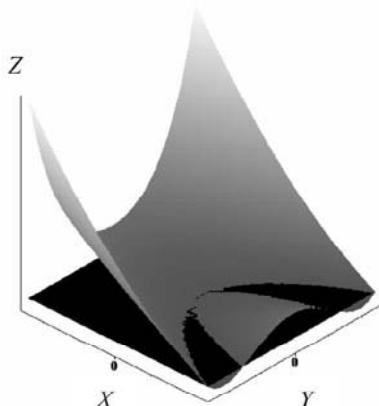


FIGURA 21.

La condición dada por el teorema anterior no es suficiente para que un punto sea de extremo relativo de una función. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1. La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene en $(0,0)$ derivadas parciales nulas. El punto $(0,0)$ es de mínimo relativo (y también absoluto) para f , ya que para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) \geq f(0,0) = 0$.
2. La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no tiene derivadas parciales en el $(0,0)$. Es evidente, que el punto $(0,0)$, es un mínimo relativo (y absoluto) de f .
3. Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Fig. 22), $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ son nulas en el punto $(0,0)$.

No obstante, el punto $(0,0)$ no es de extremo relativo de f . En efecto, $f(0,0) = 0$ y en cualquier vecindad de $(0,0)$ la función f toma tanto valores positivos como negativos.

Observación. La superficie de la Fig. 22 recuerda a una silla de montar. Muchas de las funciones f , con derivadas parciales nulas en un punto que no es de extremo, describen superficies, las cuales en las proximidades de dicho punto se comportan en esta forma de silla. Esto motiva que se denomine a este tipo de punto “punto de ensilladura” o “punto de silla”.

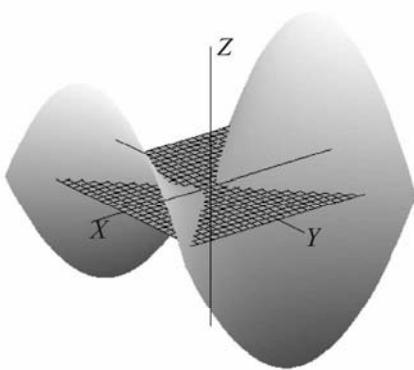


FIGURA 22.

No todas las funciones tienen una expresión tan simple como las de los ejemplos anteriores, donde es posible determinar con el simple uso de la definición si el punto es extremo o no y de qué tipo. Por ello es necesario poseer una condición suficiente que facilite este análisis.

Uno de los métodos más eficaces para investigar el comportamiento de una función en la vecindad de un punto es la fórmula de Taylor. Utilicemos esta fórmula con el propósito de obtener una *condición suficiente* de extremo relativo.

◆ Supongamos que la función f sea de clase C^2 en una bola con centro en el punto x_0 y radio r y, además, en ese punto f cumpla la condición necesaria, es decir:

$$f \in C^2(B(x_0, r)) \quad \text{y} \quad df(x_0)(h) = (\nabla \cdot h)f(x_0) = 0 .$$

El desarrollo por la fórmula de Taylor (de orden 2) de una función f que satisface estas condiciones tiene la forma:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{2!} + \varepsilon(h) \|h\|^2, \quad \|h\| < r,$$

donde $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$.

Por tanto, el incremento de f en el punto x_0 puede escribirse en la forma:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \|h\|^2 \left[\frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{\|h\|^2} + \varepsilon(h) \right]. \quad (3)$$

La función f tendrá un extremo relativo en x_0 si y solo si la cantidad $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mantiene el mismo signo para todo h en una vecindad de 0. Obviamente basta analizar el signo de la expresión entre corchetes en (3). La parte principal de esa expresión es:

$$\frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{\|h\|^2},$$

ya que el segundo sumando es un infinitesimal cuando $h \rightarrow 0$. Así que, en lo fundamental, el problema queda reducido al análisis del signo de:

$$\frac{(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)}{\|h\|^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|}. \quad (4)$$

La expresión en (4) puede concebirse como un polinomio homogéneo de segundo grado (todos los términos tienen grado exactamente dos):

$$P_2(u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) u_i u_j$$

considerado sobre el conjunto $K = \{u \in \mathbf{R}^n : \|u\|=1\}$.

Como $P_2(u)$ es una función continua en todo \mathbf{R}^n y K es un conjunto compacto, el Teorema de Weierstrass nos permite afirmar que existen:

$$m = \min_{u \in K} P_2(u) \quad \text{y} \quad M = \max_{u \in K} P_2(u).$$

Dividamos el análisis en tres casos:

a) Supongamos que el polinomio $P_2(u) > 0$, para todo $u \neq 0$. En este caso $m > 0$ y podemos elegir un $\delta > 0$, lo suficientemente pequeño para que $|\varepsilon(h)| < m/2$, cuando $\|h\| < \delta$.

Luego, para la cantidad entre corchetes en la expresión (3) podemos escribir:

$$\left[P_2\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon(h) \right] \geq m + \varepsilon(h) \geq \frac{m}{2} > 0 \quad \left(\frac{h}{\|h\|} \in K \right).$$

Por tanto, f tendrá en x_0 un **mínimo relativo estricto**.

b) Análogamente, cuando el polinomio $P_2(u) < 0$ para todo $u \neq 0$, se demuestra que f tiene en el punto x_0 un **máximo relativo estricto**.

c) Supongamos ahora que $P_2(u)$ tome tanto valores positivos, como negativos, entonces se cumplirá que $m < 0 < M$. Sean $u_m, u_M \in K$ donde $P_2(u)$ alcanza los valores extremos m y M respectivamente.

Escojamos un incremento en la dirección del vector u_m , esto es, de la forma $h = tu_m$, $|t| < r$, entonces de (3) se tiene:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}t^2 [m + \varepsilon(tu_m)] , \text{ donde } \varepsilon(tu_m) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow 0 .$$

Procediendo igual que en a), podemos escoger t suficientemente pequeño para que la cantidad entre corchetes sea negativa. Así se encuentran valores de h , de norma tan pequeña como se quiera, para los cuales el incremento de la función es menor que cero. Análogamente, si elegimos el incremento h de la forma $h = tu_M$ podemos encontrar valores de t suficientemente pequeños para que el incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ sea positivo.

Por tanto hemos demostrado que, en toda vecindad de x_0 , $f(x_0 + h) - f(x_0)$ es positivo en unas direcciones y negativo en otras. Esto significa que f alcanza valores, tanto mayores como menores que $f(x_0)$ y, por consiguiente, x_0 **no es un extremo relativo** de f .♦

Resumamos la condición suficiente para determinar los extremos relativos de una función:

Teorema 8. Sea $f \in C^2(B(x_0, r))$ tal que $(\nabla \cdot h)f(x_0) = 0$. Entonces:

i) Si $(\nabla \cdot h)^{(2)}f(x_0) > 0$ (resp. < 0), para todo $h \neq 0$, entonces f tiene en x_0 un punto de mínimo (resp. máximo) relativo estricto.

ii) Si $(\nabla \cdot h)^{(2)}f(x_0)$ toma valores tanto positivos como negativos, entonces f no tiene en x_0 extremo relativo.

Observación. El teorema nada afirma en el caso en que $(\nabla \cdot h)^{(2)}f(x_0)$ sea siempre no negativo (o no positivo), pudiendo tomar el valor cero. En estos casos debemos recurrir a la definición para decidir si un punto es o no de extremo relativo y cuál es su naturaleza. Aclaremos mejor esta idea con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Hallemos los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 \text{ (Fig.23).}$$

La condición necesaria nos indica que los posibles extremos debemos buscarlos entre aquellos cuyas coordenadas son solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases},$$

es decir, $(\pm 1, 0); (0, 0)$ son los posibles puntos de extremos relativos de f . Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$$

luego:

$$(\nabla \cdot h)^{(2)} f(\pm 1, 0) = 8(h_1)^2 \geq 0, \quad (\nabla \cdot h)^{(2)} f(0, 0) = -4(h_1)^2 \leq 0.$$

Esto significa que la condición suficiente del Teorema 8 no se aplica a ninguno de los tres puntos y debemos acudir directamente a la definición. Rescribamos la función en la forma:

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^4 - 1.$$

Como $f(\pm 1, 0) = -1$ y $f(x, y) \geq -1$, resulta obvio que en los puntos $(\pm 1, 0)$ f tiene un mínimo (no sólo relativo, sino también absoluto).

Por otra parte, $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) = y^4 > 0$ y $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$, cuando x es suficientemente pequeño. Así que, en cualquier vecindad de $(0, 0)$, f toma valores de ambos signos y, por tanto, $(0, 0)$ no es punto de extremo relativo.

Veamos, en forma general, cómo pueden aplicarse para el caso de *funciones de dos variables* las condiciones suficientes del Teorema 8.

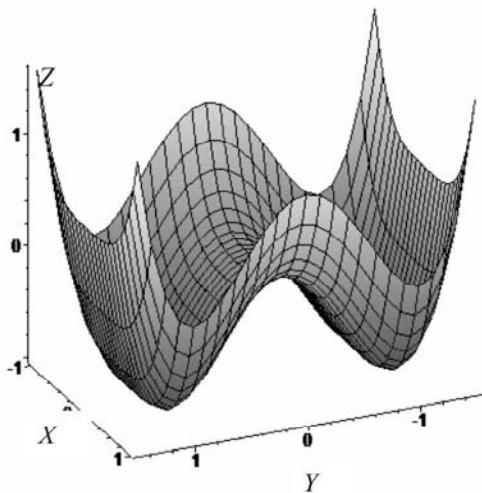


FIGURA 23.

Consideremos una función $f(x,y)$ de clase C^2 en una vecindad de (x_0, y_0) y supongamos que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Denotemos:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

entonces:

$$P(h_1, h_2) = (\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0, y_0) = Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2. \quad (5)$$

Analicemos el signo de este trinomio de segundo grado para $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h_2 \neq 0$, entonces:

$$P(h_1, h_2) = h_2^2 \left(A \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 2B \left(\frac{h_1}{h_2} \right) + C \right).$$

El signo del polinomio P es el mismo que el del trinomio de segundo grado en $\frac{h_1}{h_2}$, cuyo discriminante es $B^2 - AC$. Analicemos los tres casos posibles:

- a) Si $B^2 - AC < 0$, P no se anulará y tendrá siempre el mismo signo, positivo cuando $A > 0$ y negativo cuando $A < 0$ (en este caso A no puede anularse). Luego, el punto (x_0, y_0) es un extremo de f , mínimo en el primer caso y máximo en el segundo.
- b) Si $B^2 - AC > 0$, entonces P toma valores positivos y también negativos, así que (x_0, y_0) no será punto de extremo de la función f .
- c) Si $B^2 - AC = 0$, el trinomio P es siempre ≥ 0 o ≤ 0 y el Teorema 8 no se puede aplicar. En este caso solo cabe recurrir a la definición de extremo.

De este modo, para funciones de dos variables, se tiene la condición suficiente:

Si $f \in C^2(B(x_0, y_0))$, $(\nabla \cdot h)f(x_0, y_0) = 0$, entonces

Cuando $B^2 - AC < 0$, f tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) , que es, un mínimo si $A > 0$ y un máximo si $A < 0$.

Cuando $B^2 - AC > 0$, f no tiene extremo en el punto (x_0, y_0) .

Observaciones: 1) En el ejemplo 4 se tiene $B^2 - AC = 0$ por lo que este discriminante no nos da información suficiente para determinar si el punto es o no de extremo relativo de f .

2) Es interesante comentar que Euler, en su texto *Cálculo diferencial* (1755), discute los extremos de las funciones de dos variables. Encuentra que es necesario que las primeras derivadas parciales sean nulas, sin embargo, falla en su intento de dar una condición suficiente. Estableciendo una analogía con el resultado para funciones de una variable, Euler afirma que si las derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \text{ y } \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

son ambas positivas en el punto, entonces la función V tiene en ese punto un mínimo y si ambas son negativas, tiene un máximo. Proporciona varios ejemplos para ilustrar su método, entre ellos incluye una función donde su criterio produce un resultado incorrecto.

El error de Euler en la condición suficiente de extremo, fue corregido por Lagrange en un trabajo de 1759, donde también explica como proceder para determinar los extremos de las funciones de tres o más variables.

Ejemplo 5. Analicemos los extremos relativos de la función del ejemplo erróneo de Euler:

$$V(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy + (3/2)x .$$

Para buscar los puntos posibles de extremo debemos resolver el sistema:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 3y + 3/2 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2y - 3x = 0 .$$

Luego los posibles puntos de extremo son $(1, 3/2)$ y $(1/2, 3/4)$. Las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2 .$$

Para el punto $(1, 3/2)$, el discriminante es $B^2 - AC = -3 < 0$, por tanto el punto es un mínimo relativo de la función ($A > 0$).

Para el punto $(1/2, 3/4)$, el discriminante es $B^2 - AC = 3 > 0$ y el punto no es de extremo relativo de la función.

Observemos que en el segundo punto, de acuerdo a la condición enunciada por Euler, se obtendría que el punto es también un mínimo.

La Fig. 24 muestra el comportamiento de la superficie que representa esta función en una vecindad del punto $(1/2, 3/4)$. Puede notarse como el plano tangente en este punto atraviesa a la superficie y el punto resulta de ensilladura.

Ejemplo 6. Analicemos los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{Fig. 25}).$$

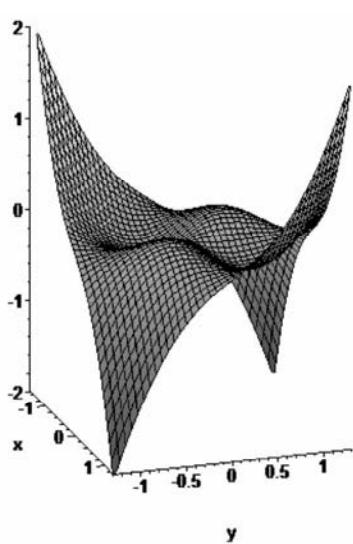


FIGURA 25.

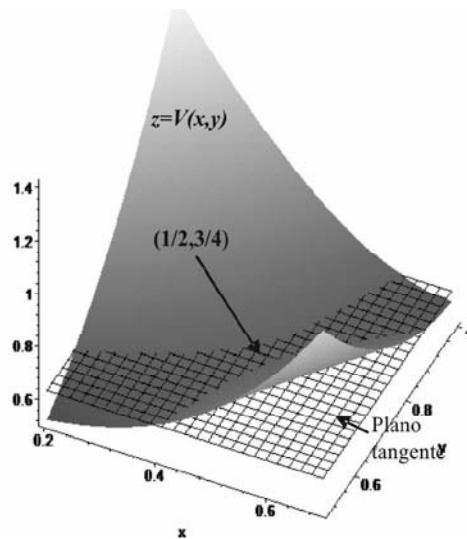


FIGURA 24.

La aplicación de la condición necesaria conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución los puntos:

$$(0, \pm 1), (\pm 1, 0),$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \right), \quad \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2e}} \right).$$

Investiguemos la naturaleza de estos puntos. Las derivadas parciales segundas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En los puntos $(0, \pm 1)$ el discriminante es $B^2 - AC = 4 > 0$, luego los puntos $(0, \pm 1)$ no son extremos relativos de la función. Nótese que la función es simétrica respecto a sus variables, luego los puntos $(\pm 1, 0)$ tampoco son de extremo relativo.

Por otra parte, los dos puntos $(\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e})$ tienen la misma naturaleza, pues un cambio simultáneo en el signo de las variables no produce alteración en el valor de la función. Sin embargo, un cambio de signo en solo una de las variables cambia el signo de la función pero no altera su valor absoluto, así que los puntos $(\pm 1/\sqrt{2e}, \mp 1/\sqrt{2e})$ serán de extremo si y solo si lo son $(\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e})$ pero de naturaleza contraria. Este razonamiento nos permite reducir el análisis a un solo punto, por ejemplo $(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$. Para este punto $B^2 - AC = -4 < 0$ lo que indica que los puntos $(\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e})$ son de mínimo relativo y los puntos $(\pm 1/\sqrt{2e}, \mp 1/\sqrt{2e})$ de máximo relativo.

Ejemplo 7. Hallemos los extremos relativos de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

La condición necesaria proporciona el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

de donde determinamos el único punto estacionario $(-1, -2, 3)$. Las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

luego $(\nabla \cdot h)^{(2)} f(-1, -2, 3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$. Este trinomio es estrictamente positivo para todo valor de $h \neq 0$. Aplicando el Teorema 8 vemos que el punto $(-1, -2, 3)$ es de mínimo.

En el análisis de los puntos de extremo relativo de una función de varias variables puede ser de gran ayuda el uso de la teoría algebraica de las formas cuadráticas, asociadas a una matriz simétrica. Una función $\Lambda : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, donde:

$$\Lambda(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

se denomina **forma cuadrática** asociada a la matriz simétrica $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Los números a_{ij} se denominan **coeficientes de la forma cuadrática**.

Una forma cuadrática Λ se dice **definida positiva** (resp. **definida negativa**) si $\Lambda(h) > 0$ (resp. $\Lambda(h) < 0$) para todo valor de $h \neq 0$. Una forma cuadrática se dice **positiva** (resp. **negativa**) si $\Lambda(h) \geq 0$ (resp. $\Lambda(h) \leq 0$), para todo $h \in \mathbf{R}^n$.

Dada una función f de clase C^2 en una vecindad del punto x_0 , el polinomio $(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)$ constituye una forma cuadrática asociada a la matriz simétrica:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} .$$

Esta matriz suele denominarse **matriz hessiana** de f , en honor del matemático alemán Ludwig Otto Hesse (1811-1874). Observemos que la matriz hessiana de f es la matriz jacobiana del gradiente de f .

Haciendo uso de esta terminología algebraica, el Teorema 8 puede ser reformulado como:

Teorema 8'. Sea $f \in C^2(B(x_0, r))$ tal que $(\nabla \cdot h)f(x_0) = 0$.

i) Si la forma cuadrática $(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)$ es definida positiva (resp. negativa), entonces f tiene en x_0 un punto de mínimo (resp. máximo) relativo estricto.

ii) Si $(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x_0)$ no es ni positiva ni negativa, entonces f no tiene en x_0 extremo relativo.

Los criterios algebraicos siguientes nos dan condiciones necesarias y suficientes para que una forma cuadrática sea definida positiva o negativa. Ellos resultan un poderoso auxiliar para la aplicación práctica del Teorema 8'.

Criterio de Silvester. a) Para que una forma cuadrática sea definida positiva es necesario y suficiente que todos los menores principales de la matriz asociada $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sean positivos estrictamente, es decir:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

b) Para que una forma cuadrática sea definida negativa es necesario y suficiente que los menores principales alternen el signo y $a_{11} < 0$.

Criterio de los valores propios. Sea una forma cuadrática Λ con matriz asociada $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Entonces:

- a) Λ es definida positiva (negativa) si y solo si todos los valores propios de la matriz asociada son positivos (negativos) estrictamente.
- b) Si la matriz A tiene valores propios positivos y negativos, entonces la forma cuadrática Λ no es ni positiva ni negativa.

Veamos un ejemplo donde se muestra la utilidad de estos criterios algebraicos.

Ejemplo 8. Hallemos los puntos de extremo relativo de la función:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

De la condición necesaria se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Luego los puntos posibles de extremos relativos son $(0, 0, -1)$ y $(24, -144, -1)$.

Calculemos las segundas derivadas de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática $(\nabla \cdot h)^{(2)} f(x, y, z)$ es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto $(0, 0, -1)$ esta matriz se reduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a la cual el Criterio de Sylvester no es aplicable, ya que el menor principal, a_{11} es nulo. Sin embargo, podemos calcular los valores propios de esta matriz que son:

$$\lambda_1 = 2 > 0, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{145} > 0, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{145} < 0 .$$

Luego la forma cuadrática correspondiente a $(0, 0, -1)$ no es ni positiva ni negativa, por lo que este punto no es de extremo relativo.

En el punto $(24, -144, -1)$, la matriz hessiana es:

$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y sus menores principales son:

$$144 > 0, \quad \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0, \quad \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0.$$

Luego, por el criterio de Sylvester, podemos afirmar que la forma cuadrática correspondiente es definida positiva y el punto corresponde a un mínimo relativo de la función.

El lector puede calcular los valores propios y comprobar que todos son positivos.

Observación. 1) La idoneidad de uno u otro criterio algebraico para la determinación del tipo de extremo relativo está en dependencia de la función de que se trate y de los recursos que se empleen. El ejemplo anterior nos muestra que el cálculo de los valores propios puede resultar una vía más segura para obtener una respuesta. Sin embargo, la determinación de los valores propios puede resultar una tarea mucho más difícil de llevar a cabo que el simple cálculo de los determinantes correspondiente a los menores principales. Por supuesto, en ambos métodos puede resultar muy útil el uso de programas de cómputo algebraico.

2) La condición suficiente obtenida en el caso particular de dos variables es una consecuencia inmediata de la aplicación del criterio de los valores propios a la forma cuadrática en (5).

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de la investigación de los extremos relativos de una función, es decir, un estudio local del comportamiento de la función en puntos interiores a su dominio de definición. Pasemos ahora a la determinación de los valores *máximos y mínimos absolutos* de una función f en un conjunto E .

La situación más sencilla es cuando *el conjunto E es compacto y la función f es continua en E* . En este caso podemos proceder de acuerdo al razonamiento siguiente:

El Teorema de Weierstrass asegura la existencia de puntos en E donde f alcanza sus valores máximos y mínimos absolutos. Estos puntos pueden estar en el interior de E , en este caso serán puntos de extremo relativo y, por tanto, en ellos las derivadas parciales de f o no existen o son nulas. Si los puntos estuvieran en la frontera de E , entonces serían también los valores máximos y mínimos de la función restringida a $\text{Fr } E$.

Las consideraciones anteriores nos conducen al siguiente:

Método para la determinación de los extremos absolutos de una función f continua en un compacto E :

- 1) Halla todos los puntos de E° donde las derivadas parciales de f son cero o no existen y encuentra el valor de f en estos puntos.
- 2) Halla los valores máximos y mínimos de f en el conjunto $\text{Fr } E$.

3) Compara los valores encontrados en 1) y 2). El mayor y menor valor encontrado serán respectivamente el máximo y el mínimo de la función en E .

Observación. En la aplicación práctica de este método, la mayor dificultad generalmente está relacionada con el segundo paso: el análisis de la función en los puntos de la frontera del conjunto. Si la forma del conjunto E es sencilla, el análisis puede reducirse a la determinación de los extremos de una función de $n - 1$ variables. En muchos ocasiones, el estudio de f en el conjunto $\text{Fr}E$ se facilitará con el análisis de los **extremos condicionados** que desarrollaremos en IV.3.

Mediante un ejemplo sencillo, aclaremos mejor la aplicación del método descrito antes.

Ejemplo 9. Determinemos los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ del ejemplo 4 en el conjunto $E = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ (Fig. 26).

Como la función es continua y el conjunto E es compacto la existencia de los extremos absolutos está asegurada. Sabemos que los puntos donde se anulan las derivadas parciales son $(\pm 1, 0)$ y $(0, 0)$, pero solo el $(0, 0)$ pertenece al interior de E . Así que el único valor que nos proporciona el paso 1) es $f(0, 0) = 0$.

Por otra parte, la frontera de E está formada por los cuatro segmentos de recta:

$$x = \pm 1, \quad -1 \leq y \leq 1 ; \quad y = \pm 1, \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

Al considerar la función f sobre estos segmentos, resultan las funciones de una variable:

$$f(\pm 1, y) = y^4 - 1, \quad y \in [-1, 1]$$

$$f(x, \pm 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2, \quad x \in [-1, 1].$$

La primera función tiene por **valor máximo 0** que lo alcanza en los puntos $y = \pm 1$ y por **valor mínimo -1**, que lo toma en $y = 0$. La segunda alcanza en $x = 0$ el **valor máximo 1** y en $x = \pm 1$ el **valor mínimo 0**. De este modo

$$\min_E f(x, y) = -1 = f(\pm 1, 0) \quad \text{y} \quad \max_E f(x, y) = 1 = f(0, \pm 1) .$$

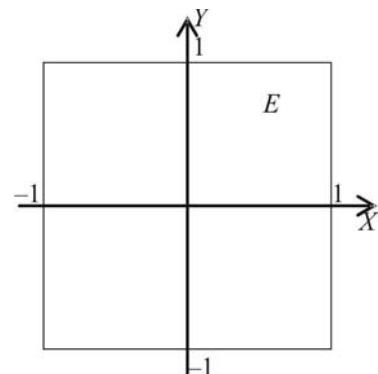


Figura 26.

Ejemplo 10. Hallemos los valores máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

en el conjunto $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

La función f es continua en el conjunto compacto E , luego existen puntos de E donde f alcanza sus valores máximos y mínimos. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 \frac{2x-2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3 \frac{2y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}},$$

para los puntos $(x, y) \neq (1, 0)$ y **en el punto $(1, 0)$ no existen.**

Estas derivadas parciales se anulan en los puntos (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Pero estos puntos no pertenecen al conjunto E . Por tanto, los puntos donde f puede alcanzar sus valores máximos y mínimos en E son: **el punto $(1, 0) \in E^\circ$ y los puntos de la frontera de E .**

Calculemos los valores de f . Evaluando en $(1, 0)$ obtenemos $f(1, 0) = 1$.

La frontera del conjunto E es $\text{Fr } E = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$. Un punto (a, b) sobre esta circunferencia lo podemos escribir en la forma $a = 2 \cos t$, $b = 2 \sin t$, donde t toma cualquier valor entre 0 y 2π . Entonces:

$$f(a, b) = 4 - 3\sqrt{5 - 4 \cos t}.$$

El valor máximo de esta expresión es 1 y su valor mínimo es -5 .

Por tanto obtenemos:

$$\max_E f = 1, \quad \min_E f = -5.$$

Observación. En un problema de búsqueda de extremos, puede ocurrir que la función f presente discontinuidades o que el conjunto considerado no sea compacto. En ese caso, no es posible aplicar el Teorema de Weierstrass y garantizar la existencia de extremos absolutos. Sin embargo, en cada caso particular, podemos sustituir el paso 2) por un análisis del comportamiento de f en la frontera

y en sus puntos de discontinuidad y, de esta manera, determinar la existencia o no de los extremos de f y sus valores. Cuando la investigación de los extremos de una función está motivada por un problema geométrico o físico, la existencia del o de los extremos puede inferirse de la interpretación de la función en el problema.

Ejemplo 11. Supongamos que una esfera de masa M , que se mueve con velocidad V , choca con una esfera de masa m en reposo (ambas esferas son completamente elásticas). Entonces la segunda masa adquiere una velocidad v que puede encontrarse según la fórmula:

$$v = \frac{2M}{m+M}V. \quad (6)$$

Es claro que si $0 \leq m \leq M$, entonces $V \leq v \leq 2V$. ¿Cómo se puede trasmitir la mayor cantidad de la energía cinética de una masa grande a un cuerpo de masa relativamente pequeña? Para ello, por ejemplo, entre las dos esferas pueden colocarse varias esferas intermedias de masas $m < m_1 < m_2 < \dots < m_n < M$, con las cuales la esfera de masa m debe chocar en su recorrido. Calculemos, la forma óptima de elegir las masas intermedias para que, como resultado de la sucesión de choques centrales, el cuerpo de masa m adquiera la mayor velocidad posible.

Haciendo uso de la fórmula (6) encontramos que la velocidad buscada puede escribirse como:

$$v = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \dots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \frac{M}{m_n+M} \cdot 2^{n+1}V.$$

Así que el problema se reduce a buscar el máximo de la función:

$$f(m_1, \dots, m_n) = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \dots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \frac{M}{m_n+M}.$$

La anulación de las primeras derivadas parciales conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mm_1 - m_1^2 = 0 \\ m_1m_2 - m_2^2 = 0 \\ \dots \\ m_{n-1}M - m_n^2 = 0 \end{cases},$$

luego, los números m, m_1, \dots, m_m, M deben constituir una progresión geométrica de razón $q = \sqrt[n+1]{\frac{M}{m}}$. Finalmente, la velocidad máxima será $v_{\max} = \left(\frac{2q}{1+q}\right)^{n+1} V$.

Las consideraciones físicas conducen a que este tiene que ser el valor máximo de la velocidad, pero también puede demostrarse con el siguiente razonamiento.

Si hacemos una cualquiera de las $m_i \rightarrow 0$, fijando las restantes, observamos que la función f tiende a cero. Análogamente, haciendo $m_i \rightarrow \infty$ se obtiene el mismo resultado. Esto significa que podemos encontrar números $0 < k < K$ tales que:

$$(mq, mq^2, \dots, mq^n) \in A = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{R}^n : k < m_i < K\}$$

y $f(m_1, \dots, m_n) < v_{\max}$ en el conjunto A^c (Fig. 27).

Como f es continua en el compacto \bar{A} , entonces alcanzará en él su valor máximo. Por las restricciones impuestas a A , es claro que este valor máximo debe alcanzarlo en el interior del conjunto y por tanto, en el único punto posible hallado. Además, resulta evidente que este es el valor máximo cuando todas las variables m_i son positivas.

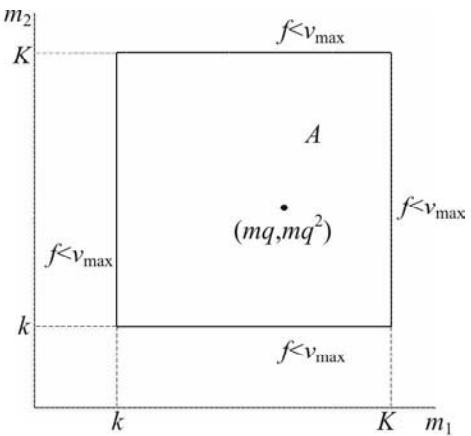


FIGURA 27.

La investigación de los extremos relativos y absolutos de las funciones reales con dominio en subconjuntos de un espacio normado (llamados **funcionales**), no solo es posible, sino sumamente útil. Desde la Introducción a esta primera parte, comentamos el papel que este problema desempeñó en el surgimiento de los espacios abstractos y en la generalización a ellos de las nociones y resultados básicos del análisis matemático clásico. Dada la importancia que este estudio reviste y teniendo en cuenta las especificidades que presenta, se ha constituido en una disciplina matemática independiente, el *Cálculo de variaciones*, una de las ramas del *Análisis* más aplicada en la Física. Aquí podríamos presentar una condición necesaria y una condición suficiente, completamente análogas a las estudiadas para las funciones de variables reales, sin embargo, su aplicación a la resolución de problemas de extremos no es directa ni elemental y sale completamente del objetivo de este texto. Por esta razón, renunciaremos a ello y remitimos al lector interesado a la consulta de algún libro específico sobre esta materia.

Ejercicios propuestos

1. Analiza los extremos relativos de:

- a) $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$, b) $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$,
- c) $z = (\sin x)(\cosh y)$ d) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$,
- e) $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, $0 \leq x, y, z \leq \pi$,
- f) $u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$,
- g) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$

2. Halla, si existen, $\sup f$ e $\inf f$ en los conjuntos que se indican. Especifica si estos valores constituyen máximo o mínimo absoluto en dichos conjuntos:

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, en:

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\} \quad y \quad B = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}.$$

b) $f(x, y) = e^x \sin y$ en la región limitada por las curvas:

$$y = \arcsen x, \quad x = 0, \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad y = -\frac{\pi}{2}.$$

c) $f(x, y, z) = x + y + z$ en $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

d) $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x+2y+3z}$ en $A = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

3. Prueba que la función dada por $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$, restringida a los puntos de cualquier recta de la forma $y = mx$, tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$, pero este punto no es un mínimo relativo para f (Fig. 21).

4. ¿Cómo descomponer un número entero a en cuatro sumandos no negativos de manera que el producto de ellos sea máximo?

5. Encuentra las dimensiones del paralelepípedo de área total S que tiene volumen máximo.

6. Se desea construir un estanque de 16 m^3 de volumen, aprovechando una pared ya existente. El grosor de las paredes y el piso es uniforme. Encuentra las dimensiones que debe tener el estanque para que el gasto de material sea mínimo.
7. Entre todos los triángulos de perímetro p , encontrar aquel que tiene área menor.
8. Prueba que:

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2} \quad \text{para } x \geq 0, y \geq 0.$$

Ejercicios complementarios

1. Las funciones $f, g, h, l, m : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dadas por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$g(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \quad h(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$l(x, y) = \begin{cases} 5x - 2xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$m(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) ¿Serán continuas en su dominio?
- b) ¿Tendrán derivadas según una dirección u en el origen?
- c) ¿Son continuas sus derivadas parciales?
- d) ¿Serán diferenciables?

2. Para la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy, & x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2}, & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}.$$

- a) Encuentra su dominio de continuidad D . ¿Es D conexo?
- b) Analiza la diferenciabilidad de f en \mathbf{R}^2 .
- c) Analiza si el punto $(1,1)$ es de mínimo relativo de f . ¿Es $(0,0)$ un punto de extremo relativo de f ?
- d) Demuestra que $f(D) \subset [-1, \infty)$.

3. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } y < 0 \\ x^2 + y^3 + 2xy, & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$,

- a) Analiza la continuidad y diferenciabilidad de f en \mathbf{R}^2 .
 - b) Halla, si existen, los valores máximos y mínimos de f en el triángulo T determinado por las rectas $y = x$, $x = 1$ y $y = 0$.
 - c) Halla $f(T)$.
4. a) Dada $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua y tal que para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Prueba que f es diferenciable en $x = 0$ si y solo si es lineal.
- b) Prueba que la función $x \mapsto \|x\|$ no es diferenciable en $x = 0$.

5. Sea la función:

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad p \geq 1,$$

Discute según los valores de p :

- a) La continuidad de f_p en $(0,0)$.
- b) La existencia de derivada en $(0,0)$ en una dirección arbitraria u .

- c) La diferenciabilidad de f_p en $(0,0)$.
- d) Sea $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $F(x,y) = (x + \cos y, f_4(x,y))$. Justifica la diferenciabilidad de $G = F \circ F$ en $(0,0)$ y calcula $G'(0,0)$.
6. Sea $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:
- $$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad n=1,2,\dots,$$
- ¿Cómo elegir n para que:
- f sea continua en \mathbf{R}^2 ?
 - f sea diferenciable en \mathbf{R}^2 ?
 - f sea de clase C^1 en \mathbf{R}^2 ?
7. Supongamos que la función $f(x,y)$ de clase C^2 satisface la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ y las condiciones: $f(x,2x) = x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,2x) = x^2$. Demuestra que:
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,2x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,2x) = -\frac{4x}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,2x) = \frac{5x}{3}.$$
8. Encuentra la solución $z = z(x,y)$ de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ que satisface las condiciones: $z(x,0) = x$, $z(0,y) = y^2$.
9. Sea $f(x,y) = e^{ax+y^2} + b \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$, $a, b \in \mathbf{R}$.
- Determina a y b de modo que se cumplan simultáneamente las condiciones siguientes:
 - f tiene en el punto $(0,0)$ un extremo,
 - el polinomio de Taylor de segundo grado de f en $(0,0)$ toma el valor 6 en $(1,2)$.
 - Qué clase de extremo es $(0,0)$?

10. Sea $D \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, $f : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ una función tal que todos los elementos de su matriz jacobiana son acotados en D por una constante M . Demuestra que f tiene una extensión continua única a la clausura del conjunto D .
11. (Generalización del teorema del valor medio) Sea $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferenciable en el conjunto abierto D y $x, y \in D$ tales que el segmento $[x, x+h] \subset D$. Entonces para cada vector $a \in \mathbf{R}^m$ existe un punto $\zeta \in (x, y)$ tal que:
- $$a \cdot \{f(x+h) - f(x)\} = a \cdot (f'(\zeta) \cdot h).$$
12. Prueba que no existe ninguna función f real tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(x) > 0$ para un x fijo de \mathbf{R}^n y todo vector unitario no nulo $u \in \mathbf{R}^n$. Da un ejemplo de función f tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(x) > 0$ para una dirección fija u y todo punto $x \in \mathbf{R}^n$.
13. Sea una función real $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ tal que su laplaciano $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$. Prueba que f no puede tener un máximo relativo.
14. Demuestra que si una función $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en la variable y , para cada valor fijo de la variable x y tiene derivada parcial acotada respecto a la variable x , entonces ella es continua como función de dos variables.
15. Sea $f : V(a,b) \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $V(a,b)$. Si además, esta última es continua en el punto (a,b) , entonces también existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ y se cumple la igualdad $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.
16. Consideremos una función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbf{R}^2$, de clase C^1 con $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Demuestra que existe un número $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\|f(t)\|_2$ es una función creciente de t en el intervalo $(0,\varepsilon)$.
17. Sea $f(x,y)$ una función de clase C^1 en \mathbf{R}^2 tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}$. Supongamos que $f(x,0) > 0$ para todo x . Demuestra que $f(x,t) > 0$ para todo x y t .

18. Sea $f : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ continuamente diferenciable y cuyas derivadas parciales están acotadas $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M$, para todo $x \neq 0$. Demuestra que si $n \geq 2$, entonces f puede ser prolongada a una función continua definida en todo \mathbf{R}^n . Muestra que esto es falso si $n = 1$.

Los ejercicios siguientes han sido pensados para que el lector se auxilie de algún programa computacional:

19. Sean las funciones $f(x, y) = \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y}$, $g(x, y) = \frac{\cos x^2}{\cos y^2}$.
- Halla sus polinomios de Taylor de grado 4 en potencias de x y y .
 - Realiza una comparación gráfica de la función y el polinomio aproximante obtenido.
 - ¿Es el punto $(0,0)$ un punto de extremo relativo?
20. Analiza los puntos de extremo relativo de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Halla las curvas de nivel de esta función y analiza su comportamiento en las proximidades de estos puntos.
21. Sea $f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Halla los puntos de extremo relativo de f y realiza un gráfico de f que permita visualizar su comportamiento en una vecindad de los posibles puntos de extremo.

CAPÍTULO IV

FUNCIONES IMPLÍCITAS

INTRODUCCIÓN

El objetivo central del Análisis matemático es el estudio de las funciones. Hasta ahora nos hemos ocupado de las funciones entre espacios \mathbf{R}^n y hemos constatado que, en general, la investigación de su comportamiento se puede reducir al análisis de las funciones con valores en \mathbf{R} . Los ejemplos de estas últimas con los cuales nos hemos enfrentado han sido, en su mayoría, funciones dadas por una fórmula, que expresan la variable dependiente en términos de la o las variables independientes. Por ejemplo:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad u = x^2 - 2yz\sqrt{y^2 - 5z^3 + 3x}, \quad z = \frac{\ln xy}{\sin x + \cos y}.$$

Este tipo de funciones diremos que están dadas en forma explícita o que son **funciones explícitas**.

Por otra parte, en el curso de Geometría analítica y también cuando consideramos las curvas de nivel, encontramos relaciones entre dos o tres variables, donde ninguna de ellas aparece despejada en función de las restantes. Así en la ecuación que representa una circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

las dos variables x e y desempeñan el mismo papel, sin embargo, no cabe duda de que, *dado un valor a una de las variables, digamos x , no es posible asignar a la variable y valores arbitrarios*.

Análogamente, la ecuación en tres variables:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

que satisfacen los puntos de un hiperboloide de revolución, establece una interdependencia entre x , y , z , pero no se expresa explícitamente ninguna de ellas en términos de las otras dos.

Podemos entonces preguntarnos ¿definirá la primera de las ecuaciones a y como función de x ? ¿permitirá la segunda ecuación definir z en función de x , y ? Cuando a las preguntas anteriores se responde afirmativamente, a la función así definida se le denomina **función implícita** dada por la ecuación correspondiente. Entonces surgen interrogantes tales como ¿será esta función implícita diferenciable? ¿cómo podríamos encontrar sus derivadas, su polinomio de Taylor?

Desde mediados del siglo XVII, René Descartes (1596-1650) usó ecuaciones que relacionan dos variables para representar curvas en el plano y estudiar sus propiedades. Más tarde Leibniz y Newton (1643-1727) también se auxiliaron de las ecuaciones de la forma $F(x,y) = 0$ para el estudio de las curvas planas, el primero, mediante el uso del cálculo diferencial, y el segundo con ayuda de sus fluxiones. Para ellos, no se trataba del estudio de las “funciones” implícitas, pues el concepto mismo de función aún no había sido claramente diferenciado. No obstante, el germen de lo que hoy se conoce como **teorema de la función implícita** se puede encontrar en los trabajos de los pioneros del Cálculo: ellos aplicaron en varios ejemplos métodos próximos a lo que estudiaremos como diferenciación implícita.

Será Euler quien situará el estudio de las funciones como el centro de atención del análisis matemático. En el prefacio de la *Introducción al análisis infinitesimal* Euler escribe: “en el primer libro me he extendido sobre todo en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del Análisis Infinitesimal”. También en esta obra Euler enuncia el concepto función como una expresión analítica y clasifica las funciones según la forma de esta expresión. En particular las subdivide entre explícitas e implícitas:

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea de esta misma cantidad y de números o cantidades constantes” [...] “Frecuentemente las funciones algebraicas no pueden ser representadas explícitamente. Por ejemplo, consideremos la función y de x definida por la ecuación $y^5 = ax^2y^3 - bx^4y^2 + cx^3y - 1$. Incluso si esta ecuación no puede ser resuelta, aún así sigue siendo cierto que y es igual a alguna expresión compuesta de la variable x y constantes, y por esta razón y será una función de x ”.

Observemos que Euler asume, sin más explicación y sin ningún tipo de exigencia adicional, que la ecuación determina a y como función implícita de la variable x . Esta situación será característica del siglo XVIII y la primera mitad

del xix: se aplicará el cálculo diferencial a las funciones dadas en forma implícita, pero sin ningún cuestionamiento acerca de la existencia misma de la función.

Al parecer es en el texto *Análisis infinitesimal* (1877-78) del italiano Ulises Dini (1845-1918) que aparecerá una demostración de la existencia de la función dada en forma implícita. La demostración que expondremos en este texto sigue, a grande rasgos, la idea fundamental de la demostración de Dini.

En la medida que se generalizó el concepto de función, que se profundizó más en su esencia y en el estudio de sus propiedades, la naturaleza del teorema de la función implícita fue mejor comprendida. Entonces surgieron diferentes demostraciones, cada una de las cuales enfatizaba uno u otro aspecto del problema. El desarrollo de las nociones de diferenciación y su extensión a funciones definidas entre espacios más generales, motivó la aparición de una amplia gama de generalizaciones de este teorema. De modo que, actualmente, más que un teorema de la función implícita se tiene un conjunto de resultados que conforman una metodología para enfrentar los problemas del análisis matemático y sus aplicaciones.

IV.1. FUNCIONES IMPLÍCITAS DETERMINADAS POR UNA SOLA ECUACIÓN

Consideremos con más detalle la posibilidad de que la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

“defina” a y como función implícita de x . En este caso tan sencillo podemos optar por despejar la variable y para obtener la fórmula:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

pero sabemos que esta expresión no determina una función. Entonces, es necesario precisar un poco más lo que entenderemos bajo el término “definir una función implícita”. Si lo que se pretende es que haya una única función de la forma $y = f(x)$, cuya gráfica coincide totalmente con la circunferencia, es evidente que la respuesta es negativa. Si nos conformamos con alguna función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación, entonces podremos encontrar ¡infinitas! (¿Por qué?).

Veamos aún otro ejemplo donde la situación es algo más difícil de dilucidar. Consideremos la ecuación:

$$y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0. \quad (2)$$

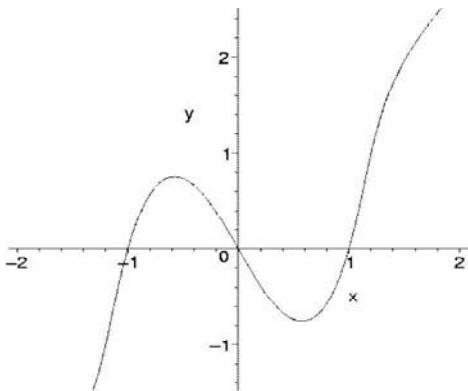


FIGURA 1.

El comportamiento gráfico (ver Fig. 1) nos sugiere que para cada valor de x debe encontrarse un valor de y único. Esto indica que (2) debe definir a y como función de x . Sin embargo, se sabe que no existe una fórmula elemental que permita encontrar tal relación.

Demos el análisis que la ecuación (2) define a y como función de x . Fijemos x y consideremos el miembro izquierdo de (2) como una función solo de y :

$$g(y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x,$$

entonces debemos demostrar que, para cada x , hay un valor único de y tal que $g(y) = 0$.

Como g es continua y $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(y) = \pm\infty$, en virtud del Teorema de Bolzano, existe un valor de y donde la función se anula. Por otra parte, $g'(y) = 5y^4 + 16 > 0$, así que g es estrictamente creciente y dicho valor debe ser único.

En este caso para cada x real hemos demostrado la existencia de un único $y = f(x)$ tal que satisface (2). Sin embargo, para ello fue necesario realizar cierto trabajo adicional, específico para la ecuación concreta. Es claro que esta vía es demasiado particular y, en general, no tiene por qué conducir a una respuesta satisfactoria.

En los dos ejemplos anteriores, hemos dado al problema un enfoque “global”, es decir nos propusimos la búsqueda de funciones solución de la ecuación en cierto conjunto admisible. Pero estos ejemplos sencillos muestran que, en general, la respuesta a este tipo de problema puede ser diversa y, aún en casos muy simples, completamente negativa. Sin embargo, nuestro objetivo fundamental es la utilización de las herramientas diferenciales, las cuales dependen del comportamiento de las funciones en la vecindad de un punto dado. Por esta razón daremos al problema un enfoque “local”, es decir, concentraremos nuestra atención solo en el comportamiento de la ecuación en una vecindad “suficientemente pequeña” de un punto.

Por ejemplo para la ecuación (1), consideremos un punto de la forma (a,b) , con $b \neq 0$. Observemos, en la Fig. 2, que el arco de circunferencia situado dentro de la vecindad V del punto (a,b) , puede ser representado mediante una función $y = f(x)$, definida en una vecindad de a y tomando valores en una vecindad de b . Geométricamente, se aprecia que este razonamiento es factible en cualquier punto tal que $b \neq 0$, siempre que tomemos la vecindad V “suficientemente pequeña” para que no interseque al eje de abscisas. También resulta claro del gráfico que, para los puntos con $b = 0$, no habrá ninguna vecindad con la propiedad requerida. Así que la ecuación (1) define “localmente” a y como función implícita de x en aquellos puntos que no pertenecen al eje X .

Veamos cómo podemos llegar a la misma conclusión, razonando en forma analítica y con ayuda del concepto diferencial. Denotemos:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

entonces para un punto (a,b) cualquiera que satisfaga (1), esto es, tal que $F(a,b) = 0$, puede escribirse la aproximación siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= F(x,y) - F(a,b) \approx dF(a,b)(x-a, y-b) = \\ &= 2a(x-a) + 2b(y-b) = 2ax + 2by - 2, \end{aligned}$$

para (x,y) en una vecindad V de (a,b) .

Esto significa que, **en forma aproximada**, nuestro problema se reduce a resolver la ecuación lineal:

$$2ax + 2by - 2 = 0 \quad \text{o} \quad ax + by - 1 = 0.$$

Notemos que la ecuación anterior representa a la recta tangente a la circunferencia en el punto (a,b) y resulta claro que, en esta ecuación, la variable y puede ser escrita en términos de la x si y solamente si $b \neq 0$.

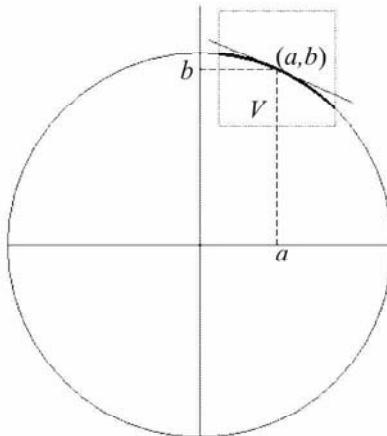


FIGURA 2.

En el caso de una función diferenciable arbitraria F , tal que $F(a,b) = 0$, para los puntos (x,y) situados en una vecindad del punto (a,b) , podemos escribir:

$$F(x,y) = F(x,y) - F(a,b) \approx F'_x(a,b)(x-a) + F'_y(a,b)(y-b),$$

donde F'_x y F'_y representan las derivadas parciales de F respecto a x e y . Así que la ecuación $F(x,y) = 0$, en forma aproximada, se reduce a la ecuación lineal:

$$F'_x(a,b)(x-a) + F'_y(a,b)(y-b) = 0,$$

en la que puede “despejarse” la variable y si $F'_y(a,b) \neq 0$. De lo anterior podemos concluir que es completamente natural imponer la condición $F'_y(a,b) \neq 0$ para la existencia de la función implícita en una vecindad de (a,b) .

Un procedimiento como el anterior, que utiliza la noción de diferencial, nos obliga a considerar funciones “suficientemente buenas”. Exigiremos a las funciones involucradas que sean de clase C^1 , es decir, funciones con derivadas parciales de primer orden continuas.

Comencemos con el caso más sencillo, el de una ecuación dada por una función de dos variables, es decir, de la forma $F(x,y) = 0$.

Teorema 1. (Caso de 2 variables reales). Sea $F : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 en el abierto D . Sea $(a,b) \in D$ tal que $F(a,b) = 0$ y la derivada parcial $F'_y(a,b) \neq 0$. Entonces existen vecindades $V(a)$, $W(b)$ y una función única $g : V(a) \rightarrow W(b)$, de clase C^1 , tal que $b = g(a)$ y $F(x,g(x)) = 0$ para todo $x \in V(a)$. Además, para esos valores de x se cumple:

$$g'(x) = -\frac{F'_x(x, g(x))}{F'_y(x, g(x))}.$$

◆ Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $F'_y(a,b) > 0$ (en caso contrario trabajariamos con la función $-F$). En virtud de la continuidad de la función F'_y , existe una vecindad U del punto (a,b) tal que $\bar{U} \subset D$ y $F'_y(x,y) > 0$ para $(x,y) \in \bar{U}$ (Fig. 3).

Consideremos $U = (a-\delta, a+\delta) \times (b-\delta, b+\delta)$. Como la función de la variable y $F(a,\cdot)$ es creciente en el intervalo $[b-\delta, b+\delta]$ y en b se anula, entonces:

$$F(a, b-\delta) < 0 \quad \text{y} \quad F(a, b+\delta) > 0.$$

La función F es continua, luego, por la propiedad de permanencia del signo, encontramos un $\delta' < \delta$ tal que:

$$F(x, b - \delta) < 0 \text{ y } F(x, b + \delta) > 0, \text{ para todo } x \in (a - \delta', a + \delta')$$

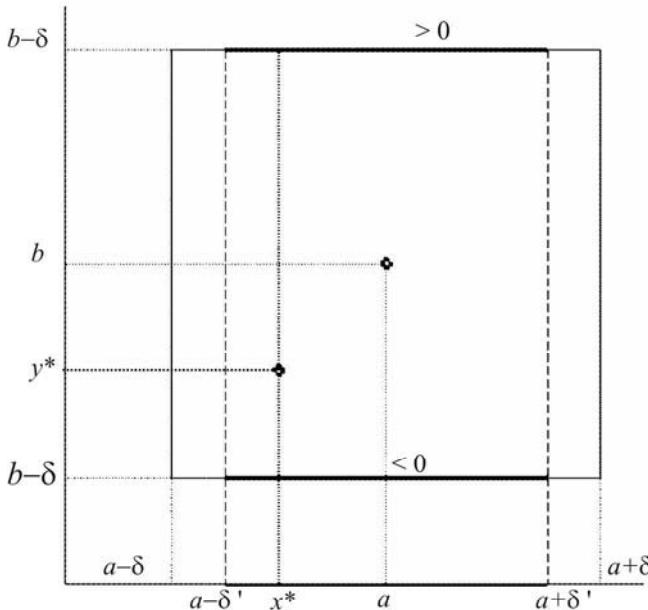


FIGURA 3.

Denotemos $V(a) = (a - \delta', a + \delta')$ y sea $x^* \in V(a)$ fijo, pero arbitrario. Entonces, por el Teorema de Bolzano aplicado a la función creciente $F(x^*, \cdot)$, se encuentra un único $y^* \in (b - \delta, b + \delta)$ tal que $F(x^*, y^*) = 0$. Denotemos y^* por $g(x^*)$. De esta manera queda definida una única función $g : V(a) \rightarrow (b - \delta, b + \delta) = W(b)$ tal que cumple $b = g(a)$, $F(x, g(x)) = 0$, para todo x de su dominio.

Falta demostrar que g tiene derivada continua. Sean $x \in V(a)$ y h tal que $x + h \in V(a)$. Denotemos $k = g(x + h) - g(x)$. Haciendo uso del teorema del valor medio, podemos escribir:

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + h, g(x + h)) - F(x, g(x)) = F(x + h, g(x) + k) - F(x, g(x)) = \\ &= F'_x(x + \theta h, g(x) + \theta k)h + F'_y(x + \theta h, g(x) + \theta k)k, \end{aligned}$$

donde $0 < \theta < 1$. Por tanto, el cociente incremental de g está dado por:

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{F'_x(x + \theta h, g(x) + \theta k)}{F'_y(x + \theta h, g(x) + \theta k)}. \quad (3)$$

Luego, para demostrar que la función g es de clase C^1 , basta probar la existencia del límite, cuando $h \rightarrow 0$, en el miembro derecho de (3) y, además que ese límite es una función continua de x . Pero el miembro derecho de (3) depende también de k , por tanto lo primero que debemos verificar es la igualdad:

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) - g(x)] = 0,$$

es decir, la continuidad de la función g .

La igualdad (3) se puede escribir en la forma:

$$k = -\frac{F'_x(x + \theta h, g(x) + \theta k)}{F'_y(x + \theta h, g(x) + \theta k)} h.$$

Las derivadas parciales F'_x , F'_y son funciones continuas en \overline{U} y, además $F'_y > 0$. Entonces la función $-\frac{F'_x}{F'_y}$ es continua en el compacto \overline{U} y por tanto acotada.

De manera que existe una constante M tal que:

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| \leq M, \text{ para todo } (x, y) \in \overline{U}.$$

Entonces:

$$|k| \leq M|h|,$$

lo que demuestra que, cuando $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$.

Ahora podemos hacer $h \rightarrow 0$ en (3) y, teniendo en cuenta la continuidad de las derivadas parciales de F , el miembro derecho tendrá por límite:

$$-\frac{F'_x(x, g(x))}{F'_y(x, g(x))}.$$

Esto significa que la función g es derivable y además:

$$g'(x) = -\frac{F'_x(x, g(x))}{F'_y(x, g(x))}. \quad (4)$$

Finalmente, F'_x , F'_y y g son funciones continuas en U y $V(a)$ respectivamente, además $F'_y \neq 0$ en U , luego g' es una función continua en $V(a)$. Con esto se completa la demostración del teorema.♦

Observaciones. 1) Si, además de las hipótesis del teorema 1, F fuera de clase C^2 en una vecindad del punto (a,b) , entonces el miembro derecho en (4) sería una función derivable en una vecindad de a por lo que:

$$g''(x) = -\frac{\left[F''_{xx} + F''_{xy} g'(x) \right] F'_y - F'_{x} \left[F''_{xy} + F''_{yy} g'(x) \right]}{\left(F'_y \right)^2},$$

donde las derivadas parciales de F de primero y segundo orden, F'_{x} , F'_{y} , F''_{xx} , F''_{xy} , se calculan en el punto $(x, g(x))$. Esto muestra que g es de clase C^2 en una vecindad de a . Las derivadas de g que aparecen en el miembro derecho de la relación anterior, son de un orden menor que la derivada de g que se desea calcular, entonces, razonando por inducción, se puede obtener:

Si, además de las hipótesis del teorema 1, suponemos que F es de clase C^p , $p \geq 1$, en una vecindad de (a,b) , entonces la función implícita g definida por la ecuación $F(x,y) = 0$ es de clase C^p en una vecindad de a .

2) La condición $F'_{y}(a,b) \neq 0$ del teorema 1 es una condición **solo suficiente** para la existencia de la función implícita. En efecto, la función $F(x,y) = y^3 - x$ verifica que $F'_{y}(0,0) = 0$ y no obstante define implícitamente, en todo \mathbf{R} , a la función $y = \sqrt[3]{x}$.

3) Notemos que la parte de la demostración del teorema 1, correspondiente a la existencia de la función g , no utiliza la continuidad de la derivada F'_{x} , solo requiere la continuidad de F y de la derivada F'_{y} . Obviamente, la continuidad de F'_{x} es necesaria para realizar la demostración de la continuidad y derivabilidad de g . Así que un teorema solamente de existencia de la función implícita puede obtenerse con hipótesis algo más débiles.

Retornemos a las dos ecuaciones particulares analizadas previamente.

Ejemplo 1. Apliquemos el teorema 1 a la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. En este caso

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

es, evidentemente, de clase C^1 . Además:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0 \text{ si y solo si } y \neq 0.$$

En virtud del Teorema 1, para cualquier punto de la circunferencia, diferente de $(1,0)$ y $(-1,0)$, existe una vecindad tal que el arco de circunferencia situado dentro de esta vecindad puede ser representado en la forma $y = g(x)$. En este

caso, un cálculo directo nos permite hallar $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ o $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, en dependencia de que la ordenada del punto sea positiva o negativa.

De la fórmula (4) obtenemos:

$$g'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

lo cual también se puede hallar directamente:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{o} \quad \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Recalquemos que lo más interesante de la relación (4) es que *permite escribir $g'(x)$ aún cuando no se conozca explícitamente la función g* . Precisamente de esta idea se valían los clásicos para aplicar el Cálculo a la resolución de problemas geométricos y físicos. Tenían la convicción de la existencia de la función implícita, no podían encontrar una fórmula para expresarla, pero sabían cómo debían ser sus funciones derivadas y ellas representaban diferentes magnitudes geométricas o físicas.

Una vez comprobada las hipótesis del Teorema 1, pueden encontrarse las derivadas sucesivas de la función implícita sin hacer uso directo de la fórmula (4). En efecto, el teorema asegura la existencia de una función g de clase C^1 la cual satisface idénticamente en $V(a)$:

$$F(x, g(x)) = 0.$$

Derivamos la relación anterior como función compuesta y obtenemos:

$$F'_x + F'_y g'(x) = 0, \tag{5}$$

donde las derivadas parciales de F están evaluadas en el punto $(x, g(x))$, y x es cualquier elemento de $V(a)$. Evidentemente, esta relación es equivalente a (4). Derivando ahora en la relación (5), válida en toda punto de $V(a)$, podemos obtener la segunda derivada de g y así sucesivamente.

En el ejemplo anterior la función implícita g satisfaría:

$$x^2 + g(x)^2 - 1 = 0,$$

luego se obtiene:

$$2x + 2g(x)g'(x) = 0,$$

$$2 + 2g'(x)^2 + 2g(x)g''(x) = 0,$$

y así sucesivamente. Estas expresiones permiten realizar un cálculo mucho más cómodo de las derivadas de orden superior de la función g que la derivación sucesiva del cociente en (4).

El Teorema 1 permite analizar bajo qué condiciones una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$ define implícitamente, en una vecindad de un punto, una curva. Además, permite hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Supongamos que F es de clase C^1 en una vecindad de (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_{,y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad V de x_0 y una función $y = g(x)$ tal que $F(x, g(x)) = 0$, $x \in V$. Es decir, en V , los puntos que satisfacen la ecuación $F(x, y) = 0$, pueden representarse en la forma $y = g(x)$, donde g es una función de clase C^1 . Sabemos que la pendiente de la recta tangente a $y = g(x)$ en (x_0, y_0) viene dada por:

$$g'(x_0) = -\frac{F'_{,x}(x_0, y_0)}{F'_{,y}(x_0, y_0)},$$

por tanto, la ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y - y_0 = -\frac{F'_{,x}(x_0, y_0)}{F'_{,y}(x_0, y_0)}(x - x_0) \quad \text{o}$$

$$F'_{,x}(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_{,y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad (6)$$

Observemos que, con la suposición $F'_{,x}(x_0, y_0) \neq 0$, hubiéramos obtenido una representación de la forma $x = g(y)$, sin embargo la ecuación de la recta tangente tendría la misma expresión. Así que, se tiene el resultado siguiente:

Si $F(x_0, y_0) = 0$ y $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ representa, en una vecindad de (x_0, y_0) , una curva cuya tangente en ese punto está dada por la ecuación (6).

Ejemplo 2. Consideremos nuevamente la ecuación:

$$y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0.$$

En este caso:

$$F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x$$

es de clase C^∞ , además $F'_{,y}(x, y) = 5y^4 + 16 \neq 0$, para todo punto (x, y) . Entonces podemos aplicar el Teorema 1 a cualquier punto (a, b) que satisfaga la

ecuación. Esto significa que existe una función g definida en una vecindad de (a,b) , tal que $y = g(x)$ satisface la ecuación dada. Este resultado, obtenido vía el Teorema 1, solo demuestra la existencia de la función g localmente, es decir, la función g puede ser diferente cuando consideremos puntos distintos. Este resultado es más débil que lo demostrado al comienzo del epígrafe, cuando probamos la existencia de una única función de \mathbf{R} en \mathbf{R} que satisfacía la ecuación.

Por otra parte, el Teorema 1 permite obtener mayor información sobre el comportamiento local de la función implícita g . Consideremos, por ejemplo los puntos $(1,0)$ y $(0,0)$. La función g satisface:

$$g(x)^5 + 16g(x) - 32x^3 + 32x = 0,$$

de donde obtenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} 5g(x)^4 g'(x) + 16g'(x) - 96x^2 + 32 &= 0, \\ 20g(x)^3 (g'(x))^2 + 5g(x)^4 g''(x) + 16g''(x) - 192x &= 0. \end{aligned}$$

En el punto $(1,0)$, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\begin{aligned} 16g'(1) - 64 &= 0, \\ 16g''(1) - 192 &= 0. \end{aligned}$$

Así que $g'(1) = 4$ y $g''(1) = 32$. Esto nos indica que, en ese punto, la tangente tiene una pendiente igual a 4 y la concavidad de la curva está dirigida hacia arriba.

En el punto $(0,0)$, obtenemos:

$$g'(0) = -2 \quad \text{y} \quad g''(0) = 0,$$

lo que nos dice que este es un posible punto de inflexión, con pendiente de la tangente -2 . Dejamos al lector que verifique que efectivamente $(0,0)$ es un punto de inflexión de la curva.

El Teorema 1 puede ser generalizado al caso de ecuaciones que involucren más de dos variables, esto es de la forma $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$, donde hemos denotado por y la variable que nos interesa considerar como función de $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Enunciaremos el teorema en este caso general y el lector puede probarlo sin dificultad, reproduciendo el razonamiento realizado en la demostración del Teorema 1.

Teorema 2. (caso de $m + 1$ variables reales). Sea $F : D \subset \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^p , $p \geq 1$, en el abierto D . Consideremos un punto $(a, b) \in D$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ tal que $F(a, b) = 0$, $F'_{,y}(a, b) \neq 0$. Entonces existen vecindades $V(a) \subset \mathbf{R}^m$, $W(b) \subset \mathbf{R}$ y una única función $g : V(a) \rightarrow W(b)$, de clase C^p que satisface $b = g(a)$ y $F(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in V(a)$. Además:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{,x_i}(x, g(x))}{F'_{,y}(x, g(x))}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Veamos una aplicación de este teorema a la *determinación del plano tangente a una superficie en un punto*.

Consideremos una superficie S dada en la forma $F(x, y, z) = 0$ con F de clase C^1 (por ejemplo, una cuádrica) y un punto $(a, b, c) \in S$. Como $F(a, b, c) = 0$, si suponemos $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$, el Teorema 2 permite afirmar que la porción de S situada en una cierta vecindad del punto (a, b, c) , puede ser representada en la forma $z = g(x, y)$, es decir será el gráfico de una función de dos variables. De esta manera estamos en condiciones de analizar localmente la función g , mediante las herramientas estudiadas en el capítulo III. Por ejemplo, hallemos la ecuación del plano tangente a S en el punto (a, b, c) .

La ecuación del plano tangente en (a, b, c) a la superficie dada por $z = g(x, y)$ es:

$$z - c = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

De la fórmula (7) tenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)},$$

luego:

$$z - c = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(x - a) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(y - b),$$

y finalmente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0. \quad (8)$$

Hemos supuesto que la derivada de F respecto de la variable z es no nula en el punto de nuestro interés. Podemos hacer el mismo razonamiento, suponiendo que son diferentes de cero las derivadas respecto a x o a y . En cualquiera de los tres casos, la porción de S , situada en una vecindad del punto (a,b,c) , puede ser representada como el gráfico de una función de dos variables. Además, la simetría de la ecuación del plano tangente (8), indica que en todos los casos obtendríamos la misma ecuación para el plano tangente. Así que:

Si la superficie S tiene por ecuación $F(x,y,z) = 0$, con F continuamente diferenciable en la vecindad de un punto $(a,b,c) \in S$ y $\nabla F(a,b,c) \neq 0$, entonces en una vecindad de dicho punto:

- a) S se representa como el gráfico de una función de dos variables,
- b) el vector $\nabla F(a,b,c) \neq 0$ es normal a S en (a,b,c) y
- c) la ecuación del plano tangente a S en (a,b,c) viene dada por (8).

Ejemplo 3. Hallemos el plano tangente al elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) (ver Fig. 4).

En este caso $\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$ es nulo solo en el punto $(0,0,0)$, que no pertenece a la superficie. Entonces, el elipsoide en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) posee plano tangente que viene dado por la ecuación:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

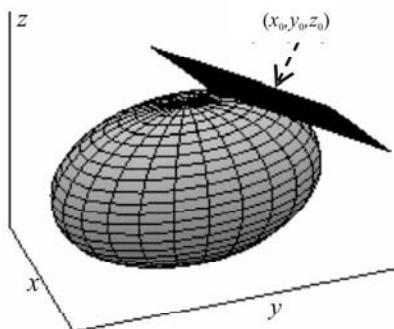


FIGURA 4.

o de forma equivalente:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} - 1 = 0.$$

Ejercicios propuestos

1. Sean la ecuación:

$$x^2 = y^2 \quad (*)$$

y la función:

$$y = f(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

que satisface la ecuación (*).

- ¿Cuántas funciones f satisfacen (*)?
 - ¿Cuántas funciones continuas f satisfacen (*)?
 - ¿Cuántas funciones diferenciables f satisfacen (*)?
 - ¿Cuántas funciones continuas f con $f(1) = 1$ satisfacen (*)? ¿Y si $f(0) = 0$?
 - ¿Cuántas funciones continuas $f : (1/2, 3/2) \rightarrow \mathbf{R}$, tales que $f(1) = 1$ satisfacen (*)?
2. ¿Existe una función $f(x,y)$ diferenciable en $(1,-1)$ que satisface $f(1,-1) = 0$ y

$$x^3 + y^3 + (f(x,y))^3 = 3xy \quad f(x,y) ?$$

3. Dada la ecuación:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = C$$

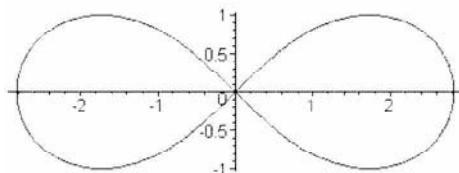


FIGURA 5.

donde C es una constante. Encuentra el lugar geométrico de los puntos donde la condición del teorema de la función implícita no se cumple ($\frac{\partial F}{\partial y} = 0$).

También encuentra el lugar geométrico de los puntos en una vecindad

del cual existe y como función de x y tiene un máximo en dicho punto, esto es, cuando $y'(x)=0$. (Cuando $C=0$ la curva que se obtiene (Fig. 5) es la conocida como lemniscata de Bernoulli).

4. Sea una función $f:D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 tal que $f(a,b)=c$ y $\nabla f(a,b) \neq 0$. Demuestra que por el punto (a,b) pasa una y solo una curva de nivel de f y esta curva tiene tangente en dicho punto. Halla la ecuación de esta recta tangente.
5. Analiza en cuáles puntos se puede aplicar el teorema de la función implícita a $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$ y encuentra las derivadas primeras y segundas de dichas funciones. Realiza un gráfico aproximado de la función.
6. Halla el polinomio de grado 3 en potencias de x de la función $y = y(x)$ definida por la ecuación $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ y la condición $y(0) = 1$. Determina si $x = 0$ es punto de extremo de esta función.
7. Dada la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 3$.
 - a) Demuestra que define una función $y=f(x)$ en una vecindad del punto $(0, \sqrt{3})$.
 - b) Encuentra el polinomio de Taylor de grado tres de f en potencias de x .
8. Sea $z = f(x,y)$ dada implícitamente por la ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$ y tal que $f(1,1) = 1$.
 - a) Halla el plano tangente a la superficie representada por $z = f(x,y)$ en $(1,1,1)$.
 - b) Encuentra el polinomio de Taylor de grado dos en potencias de $x - 1$ y $y - 1$.
9. Indica en cuáles puntos la ecuación $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$, F de clase C^1 en todo el plano, define a $z = z(x,y)$ como función implícita de x , y . Demuestra que esa función implícita debe cumplir:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy .$$
10. Si la función $z = f(x,y)$ está determinada por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(ax + by + cz)$$

donde F es una función de clase C^1 y a, b, c constantes. Demuestra que:

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

En el caso particular $F(t) = t^2$, investiga para qué puntos existe la función f .

11. Analiza en cuáles puntos la ecuación $xe^y - y + 1 = 0$ define a y como función de x . ¿En cuáles definirá a x como función de y ? **Sug:** Realiza un gráfico de la curva dada por dicha ecuación.
12. Halla el plano tangente a las superficies siguientes en el punto indicado:
 - a) $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$, en (x_0, y_0, z_0) ,
 - b) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$, en $(2, 2, 1)$.
13. Encuentra un punto de la superficie dada por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$ donde el plano tangente sea paralelo al plano $x + 4y + 6z = 0$.
14. Halla la derivada de la función $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en un punto arbitrario de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en la dirección normal a la esfera en dicho punto.
15. Para las ecuaciones siguientes, encuentra los puntos donde ellas definen a z como función implícita de x, y y además, son puntos de máximo o mínimo relativo de la función implícita:
 - a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$
 - c) $x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, $a > 0$.

IV.2. FUNCIONES IMPLÍCITAS DETERMINADAS POR UN SISTEMA DE ECUACIONES

Supongamos ahora que nos interesa analizar la dependencia funcional que determina un sistema de ecuaciones, donde aparecen más variables que ecuaciones. Por ejemplo, sea el sistema de dos ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ 2xy - z = 0 \end{cases},$$

y queremos expresar dos de las variables como función de la tercera. A cada una de estas ecuaciones la podemos interpretar geométricamente como una superficie, luego el sistema representa a la curva intersección. Cuando expresamos dos variables en función de la tercera, digamos y, z en función de x , estamos encontrando los cilindros proyectantes de esta curva sobre los planos XY y XZ .

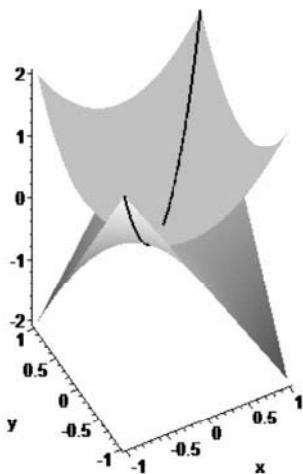


FIGURA 6.

En este ejemplo tan sencillo podemos simplemente despejar una variable en una ecuación y sustituir en la otra. De la segunda ecuación, $z = 2xy$ y, sustituyendo en la primera se tiene que $x^2 + y^2 - 2xy = 0$. Luego obtenemos a y y z como funciones de x .

$$\begin{aligned}y &= x \\z &= 2x^2\end{aligned}\quad (\text{Fig.6}).$$

Precisamente esta idea básica es el hilo conductor que seguiremos para obtener las condiciones de validez y para demostrar posteriormente el teorema general de la función implícita. La diferencia fundamental radicará en que, para nosotros, “despejar” significará aplicar el teorema de la función implícita y, por tanto, tendremos que limitarnos a encontrar “soluciones locales” del sistema de ecuaciones.

Primeramente consideraremos un sistema de dos ecuaciones y tres variables:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las F_i $i = 1, 2$ son de clase C^1 en una vecindad del punto (a, b, c) y $F_i(a, b, c) = 0$, $i = 1, 2$. Queremos encontrar condiciones suficientes para que, el sistema (1) determine, por ejemplo (y, z) como función de x , en una vecindad del punto (a, b, c) .

Supongamos que $\frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$, entonces existirá una función $g : V(a, b) \rightarrow W(c)$, de clase C^1 , tal que se cumple:

$$F_1(x, y, g(x, y)) = 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in V(a, b).$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de (1) obtenemos:

$$G(x, y) = F_2(x, y, g(x, y)) = 0.$$

La función compuesta G es de clase C^1 en $V(a,b)$.

Supongamos ahora que $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \neq 0$, entonces la ecuación $G(x, y) = 0$ define y como función de x en una vecindad de (a, b) . Más precisamente, existe una función $h: U(a) \rightarrow U'(b)$ de clase C^1 tal que se cumple:

$$G(x, h(x)) = F_2(x, h(x), g(x, h(x))) = 0, \quad \text{para todo } x \in U(a)$$

De modo que las funciones, de clase C^1 en $U(a)$,

$$y = h(x), \quad z = g(x, h(x)),$$

“resuelven” el sistema (1).

Transformemos la condición $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \neq 0$ en una condición sobre las funciones F_i dadas. Haciendo uso de la regla para la derivación de funciones compuestas y del Teorema 2, esta condición se convierte en:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}} \neq 0,$$

donde las derivadas de F_1 y F_2 aparecen evaluadas en el punto (a, b, c) y las de G y g en el (a, b) . Esta condición puede expresarse en forma más sugestiva como:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}(a, b, c) \neq 0.$$

Así que, para el razonamiento realizado, hemos impuesto dos condiciones:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} (a,b,c) \neq 0. \quad (2)$$

Sin embargo, notemos que basta con imponer la condición (2). En efecto, si el determinante es diferente de cero y fuera cero la derivada de F_1 respecto a z ,

entonces necesariamente $\frac{\partial F_2}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$, así que el razonamiento anterior podría realizarse intercambiando los papeles de F_1 y F_2 . De esta forma hemos demostrado, para el caso particular del sistema (1), que:

Si F_1 y F_2 son de clase C^1 en una vecindad del punto (a,b,c) y este punto satisface el sistema (1) y la condición (2), entonces, en una vecindad del punto (a,b,c) , las variables y, z pueden expresarse como funciones continuamente diferenciables de la variable x .

Observaciones: 1) El determinante en la condición (2) corresponde a la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

la cual puede interpretarse como la matriz jacobiana de $F = (F_1, F_2)$, si se considera solo como función de las variables y y z , esto es, como el determinante de la “matriz jacobiana parcial” respecto a las variables y, z .

Para este tipo de determinante es frecuente el uso de la denominación **determinante jacobiano** o simplemente **jacobiano** de las funciones F_1 y F_2 respecto de las variables y y z . El jacobiano de F , también puede denotarse por:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Con esta notación, la condición (2) adquiere la forma:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}(a, b, c) \neq 0.$$

Recordemos que las variables y y z son las que se quiere “despejar” en el sistema (1), entonces se pone en evidencia la analogía entre la condición (2) y la exigencia, en el Teorema 2, de no anulación de la derivada parcial respecto a la variable y .

2) En el caso que el sistema (1) fuera lineal:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0 \end{cases},$$

la condición (2) se convierte en:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y se sabe que esta condición es necesaria y suficiente para que en el sistema lineal puedan despejarse las variables y , z como función de la x . En este caso particular, la función solución está definida en todo \mathbf{R} .

La esencia del razonamiento seguido para “resolver” el sistema (1) fue aplicar dos veces el teorema de la función implícita. Primero con el objetivo de reducir el sistema a una sola ecuación y, después, para resolver esta ecuación. No es difícil advertir que este mismo procedimiento de aplicación reiterada del teorema pudiera aplicarse para sistemas de tamaño mayor, pero si la cantidad de ecuaciones es elevada resultaría muy engoroso. Sin embargo, esta aplicación reiterada constituye la esencia de la forma en que demostraremos el teorema general, vía la aplicación del principio de inducción completa.

Para trabajar en el caso general resulta cómodo introducir notaciones de tipo vectorial que simplifiquen la denominación y escritura, tanto del sistema de ecuaciones como de las variables involucradas. Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones:

que queremos “resolver” respecto a las variables y_1, y_2, \dots, y_n , es decir, encontrar un sistema de funciones:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (4)$$

que, al ser sustituido en el sistema (3), lo satisface idénticamente en una vecindad de cierto punto.

Denotemos:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_n), \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

De esta forma F es una función definida en un subconjunto de \mathbf{R}^{m+n} con valores en \mathbf{R}^n y g está definida en un subconjunto de \mathbf{R}^m y toma valores en \mathbf{R}^n . Entonces el sistema de ecuaciones (3) se reduce a la ecuación vectorial $F(x, y) = 0$, el conjunto de funciones en (4) puede escribirse en forma vectorial como $y = g(x)$ y:

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x).$$

Introduzcamos, además, la notación:

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x, y), \quad F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(x, y).$$

Con esta simbología vectorial, el enunciado del teorema de la función implícita en el caso general, tendrá una estructura semejante a la del caso sencillo de dos variables.

Teorema 3. (Caso general). Sea $F : D \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^n$ de clase C^p ($p \geq 1$) en el abierto D . Consideremos $(a,b) \in D$ tal que $F(a,b) = 0$ y el determinante $\det(F'_{\cdot y}(a,b)) \neq 0$. Entonces existen vecindades $V(a) \subset \mathbf{R}^m$ y $W(b) \subset \mathbf{R}^n$ y una única función $g : V(a) \rightarrow W(b)$, de clase C^p tal que $b = g(a)$ y $F(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in V(a)$. Además, la matriz jacobiana de g viene dada por:

$$g'(x) = -\left[F'_{\cdot y}(x, g(x)) \right]^{-1} F'_{\cdot x}(x, g(x)) \quad (5)$$

para todo $x \in V(a)$.

En la demostración de este teorema nos será de mucha utilidad, un resultado que proviene del Álgebra Lineal:

Mediante transformaciones elementales con las filas, una matriz cuadrada puede ser llevada a forma triangular superior. Cada una de estas transformaciones elementales puede ser representada mediante la premultiplicación por una matriz invertible.

Este proceso puede resumirse en el lema siguiente:

Lema. Si A es una matriz cuadrada, entonces existe una matriz invertible real U tal que UA es triangular superior.

La matriz $F'_{\cdot y}(a,b)$ puede ser interpretada como la matriz jacobiana de la función $F(a,\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ en el punto b . El lema anterior aplicado a la matriz $A = F'_{\cdot y}(a,b)$, nos proporciona una transformación lineal (correspondiente a la premultiplicación por una matriz invertible) que puede ser compuesta con esta función $F(a,\cdot)$ y así obtener una nueva función $\hat{F}(y) = (\hat{F}_1(a,y), \hat{F}_2(a,y), \dots, \hat{F}_n(a,y))$, tal que:

$$\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y_j}(a,b) = 0, \text{ cuando } i > j.$$

Puede demostrarse fácilmente que, si U es la matriz invertible que realizó la transformación requerida, la consideración de las funciones \hat{F}_i , significa que el sistema original $F(x,y) = 0$ ha sido sustituido por el sistema equivalente $UF^T = 0$.

Resulta más cómodo no cambiar la notación y simplemente asumir que

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b) = 0, \text{ cuando } i > j. \quad (6)$$

Así que, después de aplicada la transformación lineal, se tiene:

$$F'_y(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(a,b),$$

por lo que, en lo que sigue supondremos que:

$$\det(F'_y(a,b)) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_i}(a,b) \neq 0.$$

♦ Haremos la demostración por inducción en el número n de ecuaciones. Para $n = 1$ el teorema se reduce al Teorema 2. Supongamos $n > 1$ y que el teorema es válido para $n - 1$.

La no anulación de $\det(F'_y(a,b))$, en particular, implica que:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}(a,b) \neq 0.$$

Introduzcamos la notación $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $b^* = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ y apliquemos el Teorema 2 a la ecuación:

$$F_n(x; y^*; y_n) = 0$$

en el punto $(a; b^*; b_n)$. De este modo estamos considerando las variables x_1, x_2, \dots, x_m ; y_1, y_2, \dots, y_{n-1} todas como independientes y como dependiente solamente la variable y_n .

Entonces existen vecindades $U_1(a, b^*) \subset \mathbf{R}^{m+n-1}$, $U_2(b_n) \subset \mathbf{R}$ y una función $\varphi: U_1(a, b^*) \rightarrow U_2(b_n)$ tal que $\varphi(a, b^*) = b_n$ y

$$F_n(x, y^*, \varphi(x, y^*)) = 0, \text{ para todo } (x, y^*) \in U_1(a, b^*).$$

Además sabemos que φ es de clase C^1 y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = -\frac{\frac{\partial F_n}{\partial y_j}}{\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Si evaluamos esta expresión en el punto (a, b^*) y usamos (6) se obtiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a, b^*) = 0, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, n-1$$

Definamos la función H mediante la expresión:

$$H(x, y^*) = F(x, y^*, \varphi(x, y^*)), \quad (x, y^*) \in U_1(a, b^*).$$

De este modo, cada componente H_i de H es de la forma:

$$H_i(x, y^*) = F_i(x, y^*, \varphi(x, y^*)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

por lo que, usando la regla de la derivación de funciones compuestas, se obtiene para $i, j = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(a, b^*) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b^*, b_n) + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}(a, b^*, b_n) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a, b^*) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b).$$

Luego la función H satisface:

$$H(a, b^*) = 0 \text{ y } \det(H'_{y^*}(a, b^*)) = \det(F'_{y^*}(a, b)) \neq 0$$

Así que al sistema de ecuaciones:

$$H(x, y^*) = 0,$$

es de tamaño $n-1$ y cumple las condiciones del teorema. Haciendo uso de la hipótesis de inducción, podemos asegurar que existen vecindades $V(a) \subset \mathbf{R}^m$, $U_3(b^*) \subset \mathbf{R}^{n-1}$ y una función $g^*: V(a) \rightarrow U_3(b^*)$ de clase C^1 tal que:

$$g^*(a) = b^*, \quad H(x, g^*(x)) = 0, \text{ para } x \in V(a)$$

Reduciendo, si fuera necesario, la vecindad $V(a)$ para que $V(a) \times U_3(b^*) \subset U_1(a, b^*)$, podemos definir $g_n(x) = \varphi(x, g^*(x))$.

Entonces la función $g: V(a) \rightarrow W(b) = U_3(b^*) \times U_2(b_n)$, dada por:

$$g(x) = (g^*(x), g_n(x))$$

es de clase C^1 y satisface:

$$0 = H(x, g^*(x)) = F(x, g^*(x), \varphi(x, g^*(x))) = F(x, g(x)), \quad x \in V(a).$$

Probemos ahora la fórmula (5). La función $\Phi(x) = F(x, g(x))$ es diferenciable e idénticamente nula en $V(a)$, por lo tanto también lo será su matriz jacobiana $\Phi'(x)$ en esa vecindad. Si denotamos por Φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ las componentes de Φ , entonces, haciendo uso de la regla de la compuesta, podemos escribir:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Luego:

$$0 = \Phi'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}},$$

donde las derivadas de las F_i están evaluadas en un punto $(x, g(x))$ y las derivadas de las g_i en $x \in V(a)$. La igualdad anterior se puede escribir como:

$$F'_x(x, g(x)) + F'_y(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0, \quad x \in V(a).$$

Como $\det(F'_y(x, y))$ es una función continua que no se anula en el punto (a, b) , entonces es también diferente de cero en una vecindad de ese punto. Podemos suponer que todo el razonamiento anterior se llevó a cabo dentro de esta vecindad de (a, b) , y por consiguiente, la matriz $F'_y(x, g(x))$ es invertible para todo $x \in V(a)$. Entonces, premultiplicando por la matriz inversa de $F'_y(x, g(x))$, se obtiene finalmente la fórmula (5).

Al igual que en el caso de una sola ecuación, la fórmula (5) nos permite concluir que la función implícita g es de clase C^p . Con esto concluye la demostración del teorema.♦

Ejemplo 1. Analicemos el sistema

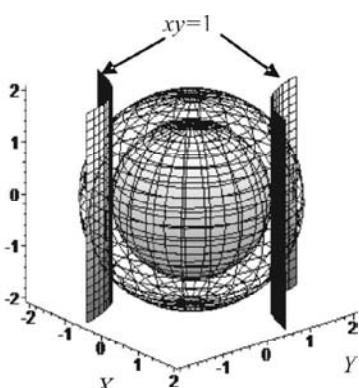


FIGURA 7.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases},$$

en las variables x, y, z y que depende además del parámetro R . Gráficamente (Fig. 7) vemos que estas ecuaciones representan, respectivamente, una esfera de radio R y centro en el origen y una superficie cilíndrica con directriz dada por una hipérbola en el plano XY .

Para valores de R menores que cierta cantidad, estas dos superficies no se

intersecarán, es decir, el sistema no tendrá ninguna solución. Puede verse mediante cálculos algebraicos sencillos que éste es el caso cuando $R < \sqrt{2}$. Si $R = \sqrt{2}$ solo habrá dos puntos comunes, $(1,1,0)$ y $(-1,-1,0)$, por lo que no queda definida ninguna relación funcional de interés. Consideremos el caso $R > \sqrt{2}$. Nótese que la intersección de las dos superficies consta de dos curvas cerradas disjuntas, por lo que intuitivamente se ve que para la porción de curva situada en la vecindad de un punto se podrán expresar dos de las variables en función de la tercera.

Aplicemos el Teorema 3 al sistema anterior. En este caso $n = 2$, $m = 1$:

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \quad \text{y} \quad F_2(x, y, z) = xy - 1.$$

Consideremos el punto $(1,1,\rho)$, $\rho = \sqrt{R^2 - 2}$, que satisface el sistema. La función $F = (F_1, F_2)$ es evidentemente de clase C^1 en todo su dominio. La matriz:

$$F'_{(y,z)}(1,1,\rho) = \begin{pmatrix} 2 & 2\rho \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tiene determinante no nulo si y solo si $\rho \neq 0$. Así que cuando $R > \sqrt{2}$, podemos asegurar que las variables y , z pueden ser expresadas en función de la variable x en una vecindad del punto considerado. ¿Podrán expresarse x y z en función de y ? o ¿ x e y en función de z ?

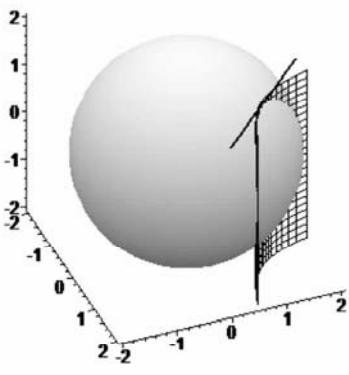
El resultado anterior permite afirmar que, para una vecindad del punto $(1,1,\rho)$, la curva intersección de las dos superficies puede ser representada en forma paramétrica mediante:

$$r(t) = (t, y(t), z(t)), \quad t \in V(1),$$

donde hemos tomado como parámetro la variable x y $y(t)$, $z(t)$, son las funciones implícitas definidas por el sistema.

De este modo podemos, por ejemplo, encontrar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $(1,1,\rho)$. Sabemos que un vector tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 1$ es:

$$r'(1) = (1, y'(1), z'(1)).$$



Para calcular las derivadas $y'(1)$, $z'(1)$, podemos utilizar la fórmula (5). En este caso:

$$F'_x(1,1,\rho) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\left(F'_{(y,z)}(1,1,\rho)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2\rho \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2\rho} & -\frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

FIGURA 8.

Así que:

$$\begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2\rho} & -\frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego un vector en la dirección de la tangente a la curva en el punto $(1,1,\rho)$ es $r'(1) = (1, -1, 0)$.

Por tanto la recta tangente buscada puede expresarse como la intersección de los planos:

$$\begin{aligned} y + x &= 2 \\ z &= \rho \end{aligned} \quad (\text{Fig.8}).$$

Podemos generalizar la idea desarrollada en el ejemplo anterior para una curva dada implícitamente mediante un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

donde F y G son de clase C^1 en una vecindad de un punto (a, b, c) tal que $F(a, b, c) = 0$, $G(a, b, c) = 0$. El Teorema 3 proporciona condiciones suficientes para que (7) represente una curva con tangente en el punto (a, b, c) . Además, es posible hallar la ecuación de dicha tangente.

En efecto, supongamos que la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}_{(a,b,c)} \quad (8)$$

tenga rango 2, es decir, algún menor de orden 2 sea no nulo. En este caso, en una vecindad del punto (a,b,c) , dos de las variables x , y o z pueden ser expresadas como funciones de la tercera. Para fijar ideas consideremos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}_{(a,b,c)} \neq 0,$$

luego las variables x , y pueden expresarse como funciones de la variable z , más precisamente, existen funciones $\varphi, \psi : V(c) \rightarrow \mathbf{R}$, con derivada continua, tales que:

$$a = \varphi(c), \quad b = \psi(c) \quad \text{y} \quad F(\varphi(z), \psi(z), z) = 0, \quad G(\varphi(z), \psi(z), z) = 0, \quad z \in V(c).$$

Tomemos como parámetro a la variable z , entonces la función:

$$r(t) = (\varphi(t), \psi(t), t), \quad t \in V(c),$$

constituye una representación paramétrica de la porción de la curva determinada por el sistema (7), situada en una vecindad del punto (a,b,c) . Como las funciones φ y ψ son de clase C^1 , entonces este teorema nos proporciona también un método para calcular el vector $r'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), 1) \neq 0$, y por tanto, la ecuación de la recta tangente.

Una conclusión análoga puede obtenerse cuando son las variables x , z (o y , z) las que se pueden despejar en función de y (o x). De modo que, en general, podemos afirmar:

Si F y G son funciones de clase C^1 en una vecindad de un punto (a,b,c) que satisface el sistema (7) y el rango de la matriz (8) es dos, entonces (7) representa, en una vecindad del punto (a,b,c) , una curva con tangente.

Ejemplo 3. Demostremos que existen funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definidas en una vecindad del punto $(x_0, y_0) = (0,1)$ tales que satisfacen:

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu - xv = 1 \end{cases}, \quad u(0,1) = 1, v(0,1) = 0.$$

Escribamos el sistema en la forma:

$$F(x, y, u, v) = (F_1(x, y, u, v), F_2(x, y, u, v)) = (xu - yv, yu - xv - 1) = 0.$$

La matriz:

$$F'_{(u,v)}(0,1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible, luego, en una vecindad de $(0,1,1,0)$, existen funciones que expresan a las variables u, v en función de x, y .

Si queremos calcular las derivadas parciales de estas funciones, podemos utilizar la fórmula que da el Teorema 3. Sin embargo, en ocasiones resulta cómodo seguir una vía alternativa para el cálculo.

Supongamos que nos interesa hallar, por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,1).$$

Ya demostramos la existencia de funciones u y v que satisfacen idénticamente, en una vecindad del punto $(0,1)$,

$$\begin{cases} xu(x, y) - yv(x, y) = 0 \\ yu(x, y) - xv(x, y) = 1 \end{cases}.$$

Si derivamos parcialmente respecto a x en ambas ecuaciones, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} u(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \\ y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - v(x, y) - x \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \end{cases},$$

que, evaluando en el punto $(0,1)$, se convierte en:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = 0 \end{cases}.$$

De donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 1.$$

De esta forma hemos reducido el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son las derivadas parciales buscadas. Análogamente puede procederse con las derivadas respecto a y .

En 1903, Edouard Goursat (1858-1936) dio una prueba del Teorema 1, utilizando un método completamente diferente al expuesto antes. Goursat empleó el método denominado de **aproximaciones sucesivas**, el cual, unos años antes, había utilizado Emile Picard, (quien, al parecer, lo había heredado de Joseph Liouville y Cauchy) para la demostración de un teorema de existencia de ecuaciones diferenciales. La aplicación de este método permitió a Goursat imponer condiciones más débiles a la función F : Solo necesitó que F fuera continua y satisficiera cierta condición de Lipschitz respecto a la variable y . Este método tiene la ventaja de que, en esencia, puede ser generalizado a los espacios abstractos.

Cuando, en la década del 20 del siglo pasado, se estudian sistemáticamente las funciones entre espacios normados, también se obtuvo un teorema de la función implícita para espacios normados completos (espacios de Banach), utilizando lo que se conoce como **principio de las aplicaciones contractivas**. El calificativo de contractiva se utiliza para designar aquellas aplicaciones que satisfacen una condición que, en cierta forma, es una generalización de la condición de Lischitz que había necesitado Goursat.

Sea (X,d) un espacio métrico. Una aplicación $F : X \rightarrow X$ se denomina **contractiva** o se dice que es una **contracción** si existe una constante $0 < c < 1$ tal que:

$$d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X. \quad (9)$$

Notemos que al ser la constante $c < 1$, los puntos en el conjunto imagen $F(X)$ están más próximos que los puntos correspondientes en X , es decir, la aplicación F “contrae” las distancias entre los puntos al pasar de X a $F(X)$. Evidentemente, toda contracción es una función continua en X .

El teorema siguiente contiene el resultado clásico más importante de las contracciones.

Teorema 4. (del punto fijo). Sea $F : X \rightarrow X$ una contracción del espacio métrico completo X en sí mismo. Entonces existe un único **punto fijo** para F , esto significa que hay un punto $p \in X$, único, que satisface $F(p) = p$.

◆ Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera y definamos inductivamente una sucesión mediante:

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1), \dots, x_n = F(x_{n-1}), \dots.$$

Demostremos que esta sucesión es fundamental en X : Si $n \geq 1$ y aplicamos sucesivamente la desigualdad (9), obtenemos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &= d(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leq c \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) = \\ &= c \cdot d(F(x_{n-2}), F(x_{n-3})) \leq c^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \\ &\leq \dots \leq c^{n-1} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

De donde resulta que:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq [c^{n+k-1} + c^{n+k-2} + \dots + c^n] \cdot d(x_1, x_0) \leq c^n \frac{1}{1-c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $c < 1$, entonces $c^n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, de donde sigue inmediatamente que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Bolzano-Cauchy.

Por hipótesis, X es completo, por tanto existe un límite p para esta sucesión: $\lim x_n = p$. Entonces, se cumple:

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

Esto demuestra que p es un punto fijo de F . Para probar la unicidad del punto fijo, supongamos que existiera otro punto fijo \tilde{p} , entonces se tendría que:

$$d(p, \tilde{p}) = d(F(p), F(\tilde{p})) \leq c \cdot d(p, \tilde{p}),$$

lo cual es una contradicción ($c < 1$) a menos que $p = \tilde{p}$. ◆

Los lemas que veremos a continuación tienen el propósito de conducirnos a una variante modificada del teorema anterior, del cual seguirá de forma sencilla el teorema general de la función implícita.

Lema 1. Sea $\bar{B} = \bar{B}(a, r)$ una bola cerrada en un espacio métrico completo (X, d) . Supongamos que $H : \bar{B} \rightarrow X$ es una contracción, con constante $0 < c < 1$, y además se cumple:

$$d(H(a), a) \leq (1 - c)r.$$

Entonces H tiene un único punto fijo en \bar{B} .

◆ El conjunto \bar{B} es cerrado, por tanto es completo como subespacio métrico de X . Si demostramos que $H(\bar{B}) \subset \bar{B}$, entonces el lema resulta de la aplicación del Teorema 4 al espacio métrico \bar{B} . Comprobemos la inclusión anterior:

Sea $x \in \bar{B}$ arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned} d(H(x), a) &\leq d(H(x), H(a)) + d(H(a), a) \leq \\ &\leq c \cdot d(x, a) + (1 - c)r \leq r, \end{aligned}$$

luego $H(x) \in \bar{B}$, lo que demuestra el lema.♦

Lema 2. Sea $B = B(a, r)$ una bola abierta en un espacio métrico completo (X, d) . Supongamos que $H : B \rightarrow X$ es una contracción, con constante $0 < c < 1$, y además se cumple:

$$d(H(a), a) < (1 - c)r.$$

Entonces H tiene un único punto fijo en B .

◆ Este lema se prueba simplemente por aplicación del anterior a la restricción de H a una bola cerrada cualquiera de centro en a y radio ligeramente menor que r .♦

Lema 3. Sea H una contracción, con constante c , en el espacio completo (X, d) . Sea $a \in X$ y denotemos $\mu = d(H(a), a)$. Entonces:

$$d(a, p) \leq \frac{\mu}{1 - c},$$

donde p es el punto fijo de H .

◆ Apliquemos el lema 1 a la restricción de H a la bola \bar{B} de centro en a y radio $r = \mu/(1 - c)$, entonces el punto fijo p está en \bar{B} y se prueba el lema.♦

Lema 4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y (S, ρ) un espacio métrico cualquiera. Supongamos $H : S \times X \rightarrow X$ es una contracción en X uniforme en S con constante c , esto es, existe una constante $0 < c < 1$ tal que, para todo $s \in S$, $x, y \in X$,

$$d(H(s, x), H(s, y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Supongamos, además, que H es continua en s para cada $x \in X$. Entonces la función que a $s \in S$ le hace corresponder el único punto fijo p_s de $H(s, \cdot)$ ($H(s, p_s) = p_s$) es una función continua de s .

Observación. Nótese que para cada valor fijo de la primera variable, H es una contracción en la segunda variable, con constante c . El calificativo de **uniforme** indica que la constante c de contracción no depende de la primera variable.

◆ Fijemos un $t \in S$ y demostremos que la función $s \mapsto p_s$ es continua en t , es decir, dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un $\delta > 0$, tal que si $\rho(s, t) < \delta$, entonces $d(p_s, p_t) < \varepsilon$.

Sabemos que H es continua en t , luego hay un $\delta > 0$ para el cual se cumple:

$$d(H(s, p_t), p_t) = d(H(s, p_t), H(t, p_t)) < \varepsilon, \text{ cuando } \rho(s, t) < \delta.$$

Por el lema 2, $d(p_s, p_t) < \varepsilon/(1-c)$. Esto demuestra la continuidad de la función $s \mapsto p_s$ y con ello el lema.♦

Como una consecuencia inmediata de los lemas 2 y 4, obtenemos la variante siguiente del teorema del punto fijo.

Teorema 4'. Sean (X, d) un espacio métrico completo, (S, ρ) un espacio métrico cualquiera y $B = B(a, r)$ una bola abierta en (X, d) . Supongamos $H : S \times B \rightarrow X$ es una contracción en X con constante $0 < c < 1$, uniforme en S que, además, es continua en s para cada $x \in X$. Por último supongamos que se cumple:

$$d(H(s, a), a) < (1 - c)r, \text{ para todo } s \in S.$$

Entonces, para cada $s \in S$, existe un único $p_s \in B$ tal que $H(s, p_s) = p_s$, además la función $s \mapsto p_s$ es continua en S .

Ahora podemos enunciar y demostrar un teorema de la función implícita para funciones entre espacios normados.

Teorema 5. (De la función implícita en espacios normados). Sean X, Y, Z espacios normados completos (espacios de Banach). Supongamos que U y V son abiertos de X y Y respectivamente y $F : U \times V \rightarrow Z$ es una función continua tal que el diferencial parcial $F'_y(x, y)$ existe y es una función continua

para $(x, y) \in U \times V$. Consideremos el punto $(a, b) \in U \times V$ que satisface $F(a, b) = 0$ y $F'_y(a, b)$ es invertible.

Entonces hay bolas abiertas $B_a = B(a, r_a)$ y $B_b = B(b, r_b)$ y una función $g : B_a \rightarrow B_b$ continua que satisface $F(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in B_a$.

(Hemos usado la notación $F'_y(x, y)$, para referirnos al diferencial de F como función solo de y . Cuando aludimos a la continuidad de $F'_y(x, y)$ en $U \times V$, esto significa que es continua la función $F'_y : U \times V \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$).

◆ Como la aplicación lineal $F'_y(a, b)$ es invertible, tiene sentido considerar la función auxiliar $H : U \times V \rightarrow Y$, definida por:

$$H(x, y) = y - (F'_y(a, b))^{-1} [F(x, y)].$$

Es evidente que H es una función continua en $U \times V$ y además cumple:

$$H(a, b) = b - (F'_y(a, b))^{-1} [F(a, b)] = b - (F'_y(a, b))^{-1} [0] = b. \quad (10)$$

Por otra parte, $H(x, \cdot)$ es diferenciable y:

$$H'_y(a, b) = \text{Id}_Y - (F'_y(a, b))^{-1} \circ [F'_y(a, b)] = 0, \quad (11)$$

donde Id_Y es la aplicación lineal identidad en el espacio Y . Como H y H'_y son funciones continuas de x e y , entonces existen bolas $B_a = B(a, r_a)$ y $B_b = B(b, r_b)$ tales que:

$$\|H'_y(x, y)\| \leq \frac{1}{2}, \text{ para } (x, y) \in B_a \times B_b$$

y

$$\|H(x, y) - b\| \leq \frac{r_b}{2}, \text{ para } x \in B_a.$$

Si aplicamos a $H(x, \cdot)$ el teorema del valor medio (ver epígrafe III.3) obtenemos:

$$\|H(x, y_1) - H(x, y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|, \text{ para todo } x \in B_a.$$

Esto demuestra que H es una contracción en y , con constante uniforme $1/2$. De esta manera hemos comprobado el cumplimiento de las hipótesis del teore-

ma 4', luego, para cada $x \in B_a$, existe un único $y \in B_b$ tal que $H(x,y) = y$ y la función $g : B_a \rightarrow B_b$, donde $g(x) = y$ es continua. Evidentemente, la ecuación $H(x,y) = y$ es equivalente a $F(x,y) = 0$, por lo que la función g satisface los requerimientos del teorema y con ello se completa la demostración.♦

En este caso general, también se puede lograr un resultado que garantice para la función implícita g , propiedades tales como la diferenciabilidad o la de poseer diferenciales de orden superior. Para ello es necesario exigir hipótesis adicionales en el Teorema 5. Por ejemplo, si añadimos la hipótesis: existe el diferencial $F'_x(x, y)$ y es una función continua para B_a , entonces la función g será diferenciable en B_a y se cumple

$$g'(x) = -\left(F'_y(x, g(x))\right)^{-1} [F'_x(x, g(x))], \text{ para todo } x \in B_a.$$

La demostración de este resultado lo dejamos como ejercicio al lector.

Ejercicios propuestos.

1. Prueba que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + z^3 = 1 \\ y - 2x + z = 0 \end{cases},$$

en una vecindad del punto $(1,1,1)$, define una curva con recta tangente en ese punto y halla la ecuación de dicha recta.

2. Sea C la circunferencia intersección de la esfera y el plano dados por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Determina para qué puntos de C puede darse la circunferencia en la forma $y = y(x)$, $z = z(x)$. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en dichos puntos.

3. a) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1,1)$ a la curva intersección de las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}.$$

- b) Determina las ecuaciones de los planos tangentes a cada superficie en el mismo punto.
4. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = t + t^{-1} \\ y = t^2 + t^{-2} \\ z = t^3 + t^{-3} \end{cases} .$$

Analiza en cuáles puntos este sistema define a y y z como funciones de x . Para esos puntos calcula $y'(x)$, $z'(x)$, $y''(x)$, $z''(x)$.

5. a) Prueba que el sistema:

$$\begin{cases} xu + yv = 0 \\ uv - xy = 5 \end{cases},$$

define a u y v como funciones de x , y en una vecindad del punto $(x,y,u,v) = (1,-2,2,2)$.

- b) Halla los polinomios de Taylor de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en el punto $(1,-1)$.

6. Sea S el sistema:

$$\begin{cases} x - u - v = 0 \\ y - u^2 - v^2 = 0 \\ z - u^3 - v^3 = 0 \end{cases}.$$

Halla $P(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ tal que se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- a) En una vecindad de P el sistema S define implícitamente a z , u , v como funciones de x , y :

$$z = f_1(x, y), \quad u = f_2(x, y), \quad v = f_3(x, y).$$

- b) La derivada de f_1 en (x_0, y_0) es máxima en la dirección $(1,0)$ y su valor es 3.

IV.3. APLICACIONES DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

El teorema de la función implícita tiene gran cantidad y variedad de aplicaciones dentro y fuera del análisis matemático. En este epígrafe veremos tres de las

aplicaciones más sencillas: el teorema de la función inversa, un criterio de dependencia funcional y un algoritmo para la determinación de los extremos de una función real cuyas variables están ligadas mediante una o varias restricciones.

a) Existencia de la función inversa

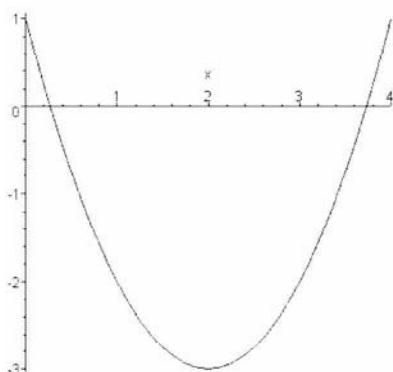


FIGURA 9.

Cuando tenemos una función f dada por medio de una relación como, por ejemplo:

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ (Fig.9)}$$

y queremos encontrar la función inversa, entonces podemos tratar de “despejar” la variable x . En este caso tan sencillo, la fórmula que da la solución a la ecuación de segundo grado, nos permite escribir

$$x = 2 \pm \sqrt{3 + y} .$$

Así que, si consideramos la función f restringida a un intervalo donde ella es inyectiva, por ejemplo, $f : (2, \infty) \rightarrow (-3, \infty)$, entonces existe la función inversa f^{-1} y viene dada por:

$$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{3 + y} .$$

Por supuesto, tratar de encontrar la función inversa despejando la variable x es un método difícilmente aplicable a la mayoría de las funciones, pero resulta muy sugerente. Podemos intentar efectuar la búsqueda enfocándola desde el punto de vista de las funciones implícitas.

Sea una función $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Encontrar la función inversa es equivalente a expresar la variable x en función de la y en la ecuación $y = f(x)$, o equivalentemente en la ecuación:

$$F(x, y) = y - f(x) = 0. \quad (1)$$

Aquí el término “expresar” lo podemos interpretar como “buscar un función solución al sistema de ecuaciones dado por (1)”. Esta manera de proceder es completamente general, pero nos fuerza a considerar solamente la **inversa local**, es decir la inversa de la función restringida a una vecindad de un punto y además, nos obliga a imponer hipótesis sobre la diferenciabilidad de f .

◆ Supongamos que la función f es de clase C^1 en el abierto A y denotemos $y_0 = f(x_0)$, donde $x_0 \in A$. Para determinar la variable x como función de y en una vecindad del punto (x_0, y_0) , queremos aplicar el teorema 3 a la función F definida en (1).

Notemos que la función F es de clase C^1 en el abierto $A \times \mathbf{R}^n$ de \mathbf{R}^{n+n} , el cual contiene al punto (x_0, y_0) . Además, $F(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = 0$ y la matriz jacobiana respecto a x es:

$$F'_x(x_0, y_0) = -f'(x_0).$$

Así que, para poder aplicar el teorema de la función implícita, **supondremos que**

$$\det(f'(x_0)) \neq 0.$$

Entonces existirán vecindades $W(x_0)$, $V(y_0)$ y una única función $g : V(y_0) \rightarrow W(x_0)$ de clase C^1 tal que para cualquier punto $y \in V(y_0)$, $F(g(y), y) = 0$. Luego si $x \in W(x_0)$, $y \in V(y_0)$ tiene lugar:

$$y - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(y). \quad (2)$$

Denotemos $U = g(V(y_0))$, entonces (2) significa que las funciones $f : U \rightarrow V(y_0)$ y $g : V(y_0) \rightarrow U$ son inversas una de la otra. Observemos que, en particular, el razonamiento anterior implica la existencia de una vecindad de y_0 tal que $V(y_0) \subset f(A)$.

Luego hemos demostrado el resultado siguiente:

Si f es de clase C^1 y x_0 un punto interior de su dominio A tal que $\det(f'(x_0)) \neq 0$, entonces el punto imagen $f(x_0)$ es un punto interior del conjunto $f(A)$.

Por otra parte, $F'_y(x_0, y_0) = \text{Id}_n$, donde Id_n es la matriz identidad de tamaño n . Aplicando el Teorema 3, obtenemos:

$$g'(y) = -\left[F'_x(x, y)\right]^{-1} \cdot \left[F'_y(x, y)\right] = (f'(x))^{-1}.$$

De modo que la función g , obtenida por la aplicación del teorema de la función implícita, es de clase C^1 y su matriz jacobiana es $g'(y) = (f'(x))^{-1}$. Esto significa que puede aplicarse el resultado enunciado en el cuadro anterior a la función g , que transformará puntos interiores en puntos interiores. Como el conjunto $V(y_0)$ es un abierto que contiene a y_0 , su imagen U por g será también un abierto, además, evidentemente, $x_0 \in U$, luego este último conjunto es una vecindad de x_0 . ◆

De este modo hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 6. (De la función inversa). Si la función $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 en el abierto A , $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$ y $\det(f'(x_0)) \neq 0$, entonces existen vecindades $U(x_0)$ y $V(y_0)$ de los puntos x_0, y_0 respectivamente tales que $f : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$ tiene una inversa de clase C^1 . Además para $x \in U(x_0)$ y $y = f(x) \in V(y_0)$, se cumple:

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$$

En el transcurso de la demostración también hemos obtenido:

Corolario. Si $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 en el abierto A y $\det(f'(x)) \neq 0$, para todo $x \in A$, entonces $f(A)$ es también abierto. Si A es un dominio (abierto y conexo), entonces también lo es $f(A)$.

Observaciones. 1) Al igual que en el caso de la función implícita, si además de las hipótesis del teorema 6, se exige a la función f que sea de clase $C^p(A)$, $p \geq 1$, entonces se puede garantizar que la inversa local pertenezca a la misma clase.

2) La función $y = f(x) = x^3$ satisface $f'(0) = 0$, sin embargo, existe la función inversa $x = \sqrt[3]{y}$. Este ejemplo muestra que la condición:

$$\det(f'(x_0)) \neq 0$$

no es necesaria para la existencia de la inversa local de la función f .

No obstante, comprobemos que *esta condición sí es necesaria para que la inversa de f sea diferenciable* en el punto $y_0 = f(x_0)$. Supongamos que tanto f como su función inversa f^{-1} , sean diferenciables, la primera en x_0 y la segunda en y_0 . Entonces:

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad y \in V(y_0) \Rightarrow f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0) = \text{Id},$$

de donde:

$$\det(f'(x_0)) \cdot \det((f^{-1})'(y_0)) = 1,$$

por lo que tiene que ser $\det(f'(x_0)) \neq 0$.

3) Es interesante observar que el Teorema 6 solo permite asegurar la existencia de una inversa de la función **localmente**, esto es, de la función restringida a una cierta vecindad del punto donde son válidas las hipótesis. Cuando **se cumplen las hipótesis del teorema en todos los puntos de A** , entonces, para cada

punto $x \in A$, existe $V(x)$ tal que la función $f : V(x) \rightarrow f(V(x))$ tiene inversa. Podría pensarse que, en este caso, también **f tendría que tener una inversa globalmente**, esto es, como función de A en $f(A)$.

En primer lugar, probemos que la afirmación anterior es válida cuando $n = 1$. En efecto, sea una función $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ con derivada continua y tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Entonces f' no puede cambiar de signo en (a, b) , luego f es estrictamente monótona en (a, b) y por lo tanto inyectiva. De este modo existe la función f^{-1} definida en el conjunto $f((a, b))$ la cual, por el teorema 6, también es de clase C^1 .

En cambio, si $n > 1$ el cumplimiento de las hipótesis del teorema en todo punto del dominio **no garantiza** la existencia de inversa global de la función. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Evidentemente f es de clase C^1 en \mathbf{R}^2 . Además,

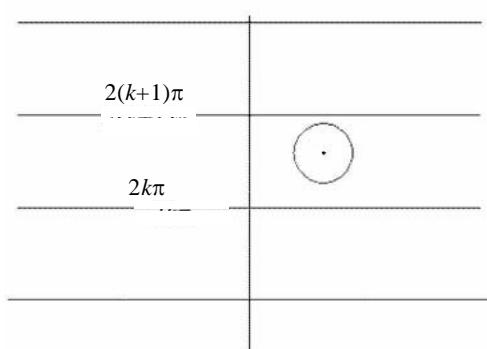


FIGURA 10.

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Así que $\det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$ en todo punto de \mathbf{R}^2 , luego $f'(x, y)$ es una matriz invertible.

Por otra parte:

$$f(x, y + 2k\pi) = f(x, y),$$

luego f no es inyectiva como función definida en \mathbf{R}^2 y por consiguiente no tiene inversa.

El Teorema 6 asegura la existencia de inversa para f cuando se restringe a una vecindad del punto considerado. Para la función del ejemplo resulta evidente que, cualquiera sea el punto basta tomar una vecindad que tenga diámetro menor que 2π (Fig. 10), para garantizar la inyectividad de la función restringida a dicha vecindad.

4) Al igual que en el caso de la función implícita, también es posible dar un teorema general de invertibilidad de funciones definidas entre espacios normados completos de Banach (ejercicio complementario 14).

b) Dependencia de funciones

Definición 1. Se dice que el conjunto de funciones diferenciables $f_i : A \rightarrow \mathbf{R}$, A abierto de \mathbf{R}^m , ($i = 1, \dots, n$), $m \geq n$, es un **sistema funcionalmente independiente** en una vecindad del punto $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in A$ si para toda función real diferenciable $F(y_1, \dots, y_n)$ definida en una vecindad del punto:

$$y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) = (f_1(x^0), \dots, f_n(x^0)) = f(x^0),$$

la relación $F(f_1(x), \dots, f_n(x)) \equiv 0$ tiene lugar en alguna vecindad de x^0 solo cuando la función F es idénticamente nula en una vecindad del punto y^0 . Cuando el conjunto de funciones no es funcionalmente independiente se dice **funcionalmente dependiente**.

La independencia lineal considerada en álgebra no es más que la independencia funcional considerando solamente funciones F lineales: $F(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$.

Ejemplo 2. Las funciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ y_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_3 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4. \end{aligned}$$

son funcionalmente dependientes en \mathbf{R}^4 , pues se tiene la relación:

$$y_1 = y_2^2 - 2y_3.$$

En el caso de un sistema de vectores linealmente dependientes, al menos uno de ellos puede ser escrito como combinación lineal de los restantes. Un resultado similar se tiene en el caso de la dependencia funcional de funciones.

Teorema 7. Sean todas las funciones del sistema $f_i(x_1, \dots, x_m)$, ($i = 1, \dots, n$) de clase C^1 en una vecindad $V(x^0) \subset \mathbf{R}^m$ y además el rango de la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{array} \right) (x) \quad (3)$$

en cualquier punto $x \in V(x^0)$ es el mismo e igual a k , entonces tiene lugar:

- a) Cuando $k = n$ el sistema es funcionalmente independiente en una vecindad de x^0 .
- b) Cuando $k < n$ se encuentra una vecindad de x^0 y k funciones del sistema, digamos $f_1(x), \dots, f_k(x)$ tales que las restantes $n - k$ funciones, en esta vecindad, se expresan en la forma:

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = g_i(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)),$$

donde las funciones $g_i(y_1, \dots, y_k)$ están definidas y son de clase C^1 en una vecindad del punto y^0 , pero depende solamente de k coordenadas del punto.

- ◆ a) Consideremos, sin pérdida de generalidad, que el menor $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ sea

diferente de cero en una vecindad del punto x^0 . Probemos esta parte por reducción al absurdo. Supongamos que las funciones $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ sean dependientes en una vecindad de x^0 . Entonces, existe una función F diferenciable en una vecindad del punto y^0 tal que:

$$F(f_1, \dots, f_n) \equiv 0,$$

en una vecindad de x^0 .

Derivando en la expresión anterior como función compuesta, se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

en la vecindad de x^0 . Pero esto significa que los vectores filas del determinante $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ son linealmente dependientes y, por tanto, este determinante debería ser cero. Esta contradicción prueba a).

- b) Supongamos que el determinante $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$ es diferente de cero en una vecindad de x^0 y demostremos que cualquier función $f_i, i = k + 1, \dots, n$ puede expresarse en la forma $f_i(x_1, \dots, x_m) = g_i(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m))$.

La suposición sobre el determinante significa que el sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - y_1 = 0 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - y_k = 0, \end{cases}$$

puede ser resuelto para las variables x_1, \dots, x_k , esto es, existen k funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, de las variables x_{k+1}, \dots, x_m , y_1, \dots, y_k , diferenciables en una vecindad del punto $(x_{k+1}^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_k^0)$ tales que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \\ &\dots \\ x_k &= \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k). \end{aligned} \tag{4}$$

Recalquemos que estas k funciones cuando se sustituyen en el sistema lo convierten en una identidad, en una vecindad del punto señalado antes. En particular, esto significa, que para todo $l = k + 1, \dots, m$, en esa vecindad tienen lugar las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial f_1}{\partial x_l} &= 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial f_k}{\partial x_l} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Demostremos, por ejemplo, que f_{k+1} se puede escribir como función de las f_1, \dots, f_k . Sustituimos en f_{k+1} las funciones dadas en (4), entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_{k+1}(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k), x_{k+1}, \dots, x_m) = \\ &= \Phi(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Resta probar que la función Φ no depende de las variables x_{k+1}, \dots, x_m . Para ello es suficiente comprobar que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0, \quad l = k + 1, \dots, m.$$

Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas podemos escribir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_l}. \tag{6}$$

Consideremos ahora el siguiente menor de orden $k + 1$ de la matriz (3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k} & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix}(x),$$

que, por hipótesis, es cero en toda una vecindad del punto x^0 . Si desarrollamos según la última columna y tenemos en cuenta las igualdades en (5) y (6), podemos comprobar que tiene lugar la relación:

$$0 = \Delta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}.$$

Pero hemos supuesto que $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} \neq 0$ en una vecindad de x^0 . Esto demuestra que Φ no depende de x_l y con ello se demuestra que f_{k+1} se escribe como función de las f_1, \dots, f_k . Análogamente puede procederse con cualquier f_l , con $l > k$. Con esto se concluye la demostración del teorema.♦

Ejemplo 3. Comprobemos que son independientes en la vecindad de cualquier punto las funciones $y_1 = x_1 - x_2$ y $y_2 = x_1 + x_2$. En efecto, en este caso la matriz de (3) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual evidentemente tiene rango 2.

c) Extremos condicionados

En el capítulo anterior vimos la forma de analizar los extremos relativos y absolutos de una función real de varias variables utilizando las herramientas del cálculo diferencial. En el caso de los extremos absolutos de una función f en un conjunto E , una dificultad importante que se presentaba era el análisis del comportamiento de f en la frontera de E . Sin embargo, si $E \subset \mathbf{R}^2$ (o \mathbf{R}^3) lo más

frecuente, en los problemas de hallazgo de extremos, es que FrE pueda expresarse mediante una o varias curvas (o superficies). En estos casos, la búsqueda de los extremos de f en FrE se puede reducir a la búsqueda de los extremos sobre curvas o superficies. Estas curvas o superficies, en general, pueden ser expresadas mediante una o varias ecuaciones entre las variables. De este modo, se pone de manifiesto el interés que reviste el análisis del problema siguiente:

Encontrar los extremos de una función f sobre un conjunto de puntos definido por una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Por otra parte, en la práctica, se presentan problemas donde lo que se requiere es la determinación de los valores extremos de una función, dadas algunas restricciones respecto al dominio donde toma valores la variable independiente, es decir, se pretende encontrar los extremos de la función condicionados por tales restricciones. Por supuesto, para una misma función, dadas unas restricciones puede existir extremo y dadas otras no, además, los extremos con ciertas condiciones no tienen porqué coincidir con los de otras.

Como ejemplo podemos considerar el siguiente problema de carácter geométrico:

El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a > b > c$) se interseca por el plano $lx + my + nz = 0$

que pasa por su centro. Se quiere encontrar los semiejes de la elipse intersección.

Notemos que el origen de coordenadas es el centro del elipsoide, luego los semiejes de la elipse serán las distancias máximas y mínimas del origen a los puntos de la elipse, esto es, a los puntos que satisfacen simultáneamente la ecuación del elipsoide y la del plano. En lugar de los semiejes, podemos buscar sus cuadrados, por tanto, el problema se reduce a *calcular los valores máximos y mínimos de la función*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

en el conjunto de los puntos que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}.$$

Geométricamente es evidente que el valor de los extremos dependerá de la posición del plano, es decir de los valores de l, m, n .

Enunciamos de forma general el problema de los extremos condicionados:

Supongamos que sobre el conjunto abierto $G \subset \mathbf{R}^m$ están definidas las funciones f, g_1, \dots, g_n ($m > n$) y consideremos el conjunto:

$$E = \{x \in G : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Se trata de encontrar los extremos relativos de la función:

$$y = f|_E(x),$$

esto es, de la función f restringida al conjunto E .

Las ecuaciones $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n$ son las **ecuaciones de condición o restricciones** del problema y f es la **función a optimizar**.

Para buscar la solución a un problema de este tipo, podríamos tratar de “resolver” el sistema de ecuaciones que define al conjunto E , lo cual, en general, puede resultar complicado o simplemente imposible de llevar a cabo. En nuestro ejemplo, despejáramos en el sistema dos de las variables en función de la tercera para después sustituir en f . De esta forma se obtendría una función de una sola variable, a la cual se debe hallar su máximo y su mínimo. Sin embargo, se observa enseguida que cualquier intento en este sentido conduce a cálculos bastante complicados.

Pensemos cómo encontrar una solución por una vía menos directa: Intentemos “despejar” n de las variables en función de las $m-n$ restantes, haciendo uso del teorema de la función implícita y, a continuación, “sustituir” en la función f . De este modo el problema se reduciría a la búsqueda de los extremos de la función compuesta resultante.

Para poder hacer uso del teorema de la función implícita, debemos imponer algunas restricciones a las funciones involucradas. Por este motivo, *en lo que sigue supondremos que las funciones f y $g = (g_1, \dots, g_n)$ son de clase C^1 en el conjunto G* .

Además, en la vecindad de los puntos de E , queremos aplicar el teorema de la función implícita al sistema de ecuaciones $g_i(x_1, \dots, x_m) = 0, i = 1, \dots, n$, para despejar n de las variables en función de las restantes $m-n$. Por tanto debemos garantizar que sea no nulo algún menor de tamaño n de la matriz:

$$g'(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}.$$

Así que, supondremos además que la matriz $g'(x)$ tiene rango máximo en los puntos de E .

Esta forma de trabajo puede dar buenos resultados en su aplicación práctica. Sin embargo, en ocasiones, aún en problemas relativamente simples, conduce a cálculos complicados, como es el caso del problema de los semiejes de la elipse planteado anteriormente. Por ese motivo, Lagrange introdujo un método que simplifica el procedimiento, y se conoce como **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Es interesante destacar que Lagrange se vio urgido a una simplificación del algoritmo de búsqueda de extremos condicionados en relación con la escritura de su obra *Mecánica analítica* (1788). Unos años más tarde, en el texto *Teoría de Funciones analíticas* (1797) expone con detalle su método, precisamente en la segunda parte de esta obra: *Aplicaciones de la Teoría a la Geometría y la Mecánica*.

A continuación expondremos el método de Lagrange en un caso particular: $m = 3$ y $n = 2$. El análisis de las ideas de Lagrange en este caso particular permitirá dar una interpretación geométrica de las mismas.

Sean $f(x,y,z)$ la función que se quiere optimizar y $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$ las restricciones. Denotemos por (a,b,c) un punto del conjunto E , es decir, que satisface $g_1(a,b,c) = 0$, $g_2(a,b,c) = 0$ y supongamos, que la matriz:

$$g'(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix}(a,b,c)$$

tenga rango dos. Esto significa que $\nabla g_1(a,b,c) \neq 0$, $\nabla g_2(a,b,c) \neq 0$ son vectores no colineales.

De acuerdo con lo demostrado en el Epígrafe 1, las ecuaciones $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$, en una vecindad del punto (a,b,c) , determinan superficies S_1 y S_2 que tienen plano tangente en ese punto y la dirección de la normal viene dada por $\nabla g_1(a,b,c)$ y $\nabla g_2(a,b,c)$ respectivamente (Fig. 11).

Por otra parte, en el ejemplo 5 del Epígrafe 2, probamos que, en una vecindad del punto (a,b,c) , las ecuaciones que determinan el conjunto E definen una

curva Γ que pasa por ese punto y que puede representarse por una función vectorial de la forma:

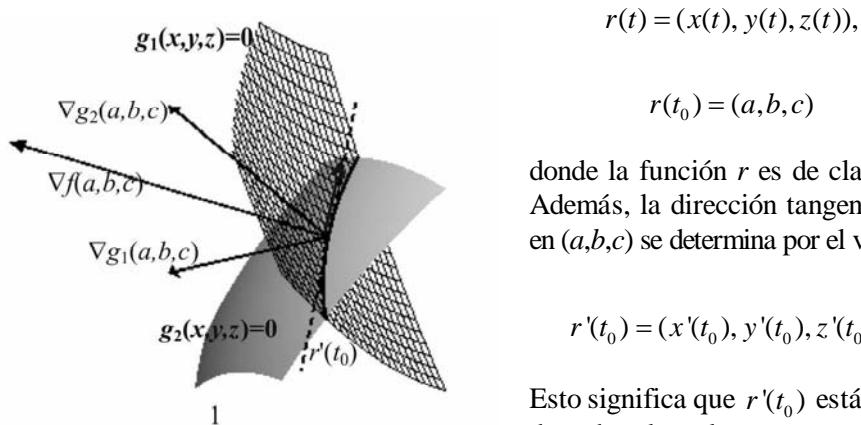


FIGURA 11.

donde la función r es de clase C^1 . Además, la dirección tangente a Γ en (a,b,c) se determina por el vector :

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Esto significa que $r'(t_0)$ está situado sobre los planos tangentes en (a,b,c) a S_1 y S_2 . Por tanto:

$$r'(t_0) \perp \nabla g_1(a,b,c) \quad \text{y} \quad r'(t_0) \perp \nabla g_2(a,b,c). \quad (7)$$

Nuestro objetivo es encontrar los extremos de la función f restringida a los puntos de Γ , luego el punto (a,b,c) es de extremo condicionado de f si y solo si el punto t_0 es de extremo relativo de la función compuesta $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Luego, una condición necesaria para que (a,b,c) sea punto de extremo condicionado de f es que $F'(t_0) = 0$. Pero:

$$F'(t_0) = \nabla f(a,b,c) \cdot r'(t_0).$$

Así que, en un punto (a,b,c) de extremo condicionado debe cumplirse:

$$r'(t_0) \perp \nabla f(a,b,c).$$

Esta condición junto con (7) implica que el vector $\nabla f(a,b,c)$ está situado en el plano determinado por $\nabla g_1(a,b,c)$ y $\nabla g_2(a,b,c)$. De modo que existen constantes λ_1, λ_2 , tales que:

$$\nabla f(a,b,c) = \lambda_1 \nabla g_1(a,b,c) + \lambda_2 \nabla g_2(a,b,c),$$

o de forma equivalente:

$$\nabla(f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2)(a,b,c) = 0.$$

Si denotamos:

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2,$$

entonces hemos probado que *una condición necesaria* para que el punto (a, b, c) sea de extremo condicionado de f , dadas las condiciones $g_1 = g_2 = 0$, es que existan constantes λ_1, λ_2 , tales que $\nabla L(a, b, c) = 0$.

La idea anterior, desarrollada en el caso particular de una función cuyas tres variables están ligadas por dos condiciones, puede ser generalizada para probar el siguiente teorema general (del cual omitimos la demostración).

Teorema 8. Sean $f : G \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ y $g : G \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ ($m > n$), de clase C^1 en el abierto G . Supongamos que en el punto $x_0 \in G$ la matriz $g'(x_0)$ tiene rango n y la función f posee un extremo con las condiciones dadas por $g(x) = 0$ ($x_0 \in G \cap E$). Entonces existen constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que la función $L = f - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ satisface la ecuación:

$$\nabla L(x_0) = 0. \quad (8)$$

La función L se denomina **función de Lagrange** y las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **multiplicadores de Lagrange**.

Como además de (8) el punto x_0 debe satisfacer las ecuaciones de condición:

$$g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

resulta cómodo considerar a L como una función de las variables x_i y también de las constantes desconocidas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Entonces los posibles puntos de extremo condicionado para f deben buscarse entre aquellos que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0 & (j = 1, \dots, m) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = g_i(x) = 0 & (i = 1, \dots, n) \end{cases}. \quad (9)$$

Observaciones: 1) La condición que proporciona el teorema anterior es solo necesaria. Pueden demostrarse condiciones suficientes de extremo condicionado, sin embargo, en la mayoría de los problemas el interés se centra en la

búsqueda de extremos absolutos condicionados. En muchos de estos casos es posible discernir cuáles puntos son extremos y cuál es su naturaleza usando las características concretas de cada problema.

2) La exigencia de que el rango de la matriz jacobiana de g sea máximo es esencial para que tenga lugar (8). Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Queremos encontrar el mínimo de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

con las condiciones dadas por las ecuaciones

$$z = 0, \quad z^2 - (y - 1)^3 = 0.$$

En este caso la función de Lagrange es:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda_1 z - \lambda_2 [z^2 - (y - 1)^3]$$

y el sistema (9) se convierte en:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = -3\lambda_2(y-1)^2 \\ 0 = \lambda_1 + 2z\lambda_2 \\ z = 0 \\ z^2 - (y-1)^3 = 0 \end{cases}.$$

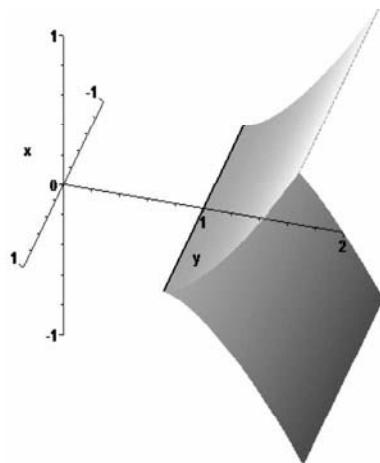


FIGURA 12.

Puede verse fácilmente que este sistema no tiene solución.

Reformulemos este ejemplo en un lenguaje geométrico. La función f es la distancia de un punto del plano XY al origen y los puntos que satisfacen las dos ecuaciones de condición están sobre la recta dada por $z = 0$, $y = 1$. Luego el problema se convierte en: *encontrar la mínima distancia del origen a la recta del plano XY, $y = 1$* . Obviamente esta distancia mínima es igual a 1 y se alcanza en el punto $(0, 1, 0)$ (Fig. 12).

En este ejemplo la matriz jacobiana de g es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3(y-1)^2 & 2z \end{pmatrix},$$

cuyo rango en el punto $(0,1,0)$ es 1.

Veamos en un ejemplo sencillo cómo puede aplicarse el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 5. Hallemos las distancias máximas y mínimas del origen a la superficie dada por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ donde } a > b > c > 0.$$

La distancia del origen a un punto (x,y,z) de la superficie viene expresada por la función:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pero la función $g(t) = t^2$ es creciente, cuando $t \geq 0$, luego las funciones f y f^2 alcanzan sus valores extremos en los mismos puntos y, obviamente, la segunda es más sencilla. De modo que buscaremos los puntos de extremo de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

que están sobre el conjunto E dado por:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad (10)$$

Observemos que el conjunto E es compacto y la función f es continua en todo \mathbf{R}^2 , luego, por el Teorema de Weierstrass, existen los valores máximo y mínimo. Los puntos de E donde se alcanzan los extremos de f serán puntos de extremos condicionado de esta función con respecto a la restricción (10).

Las funciones f y g son continuamente diferenciables y además la matriz:

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

tiene rango 1 en todo punto de la superficie. En este caso la función de Lagrange es:

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

luego el sistema (9) se convierte en:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0 \\ 2y - 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0 \\ 2z - 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema tiene como únicas soluciones los puntos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Así que los valores máximo y mínimo deben alcanzarse en alguno de estos puntos.

Evaluemos la función f :

$$f(\pm a, 0, 0) = a^2, \quad f(0, \pm b, 0) = b^2, \quad f(0, 0, \pm c) = c^2.$$

Teniendo en cuenta la relación dada entre las constantes a , b , c , podemos afirmar que la distancia máxima es a y la mínima es c .

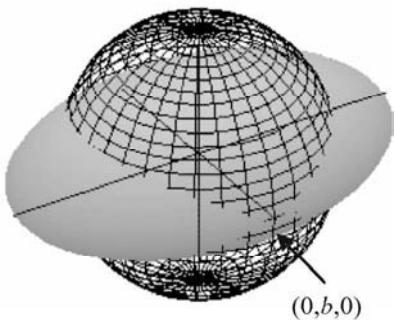


FIGURA 13.

El ejemplo anterior es muy sencillo y el resultado obtenido es natural si tenemos en cuenta su interpretación geométrica: la superficie sobre la que se mueve el punto (x, y, z) es un elipsoide con semiejes a , b , c y centro en el origen y la función objetivo es la distancia del origen a la superficie.

En la Fig.13 hemos representado el elipsoide y la esfera de radio b . Sobre esta esfera están situados todos los puntos que distan del origen en b unidades. Se puede observar que, en cualquier vecindad del punto $(0, b, 0)$ existen puntos del elipsoide con distancia al origen menor que b (interiores a la esfera) y puntos con distancia mayor que b (exteriores a la esfera). Esto muestra que este punto cumple la condición necesaria, sin embargo, no es punto de extremo condicionado. Así queda en

que el sistema (9) tiene como únicas soluciones los puntos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Así que los valores máximo y mínimo deben alcanzarse en alguno de estos puntos.

evidencia que la condición dada en el teorema es solo necesaria, pero no suficiente.

Ejemplo 6. Resolvamos el problema propuesto al inicio de esta sección acerca de la búsqueda de los semiejes de la elipse intersección del elipsoide y el plano que pasa por su centro. Es decir, encontremos los extremos de la función $r = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, en el conjunto que satisface las dos condiciones:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}.$$

(Para simplificar los razonamientos, supongamos que l, m, n no sean nulos).

El conjunto E está constituido por los puntos de una elipse, luego es un conjunto compacto (esto puede demostrarse rigurosamente usando las herramientas desarrolladas en el capítulo II). Como la función f es continua, el Teorema de Weierstrass asegura que existen puntos de E donde f alcanza sus valores máximos y mínimos.

Para que la matriz:

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

sea de rango menor que 2 es necesario que las dos filas de la matriz sean proporcionales. Pero esto significa que la relación $lx + my + nz = 0$, implica que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ lo cual es imposible.}$$

La función de Lagrange es (el factor 2 lo introdujimos para hacer más simple las expresiones de las derivadas):

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - 2\mu(lx + my + nz),$$

y el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \lambda \frac{x}{a^2} - \mu l = 0 \\ y - \lambda \frac{y}{b^2} - \mu m = 0 \\ z - \lambda \frac{z}{c^2} - \mu n = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ lx + my + nz = 0 \end{array} \right. . \quad (11)$$

Multiplicando las tres primeras ecuaciones de (11) respectivamente por x, y, z , sumando y teniendo en cuenta la cuarta y quinta ecuación se obtiene:

$$\lambda = r.$$

Usando la suposición de que l, m, n no son nulos y las tres primeras ecuaciones de (11), podemos comprobar que r no puede ser ni a^2 , ni b^2 , ni c^2 . Luego, de (11) se obtiene:

$$x = \mu \frac{la^2}{a^2 - r}, \quad y = \mu \frac{mb^2}{b^2 - r}, \quad z = \mu \frac{nc^2}{c^2 - r}.$$

Si estas tres igualdades las sumamos, después de multiplicar respectivamente por l, m y n , encontramos la relación:

$$\frac{l^2 a^2}{a^2 - r} + \frac{m^2 b^2}{b^2 - r} + \frac{n^2 c^2}{c^2 - r} = 0.$$

La ecuación anterior se reduce a una ecuación de segundo grado en r cuyas soluciones tienen que ser el máximo y el mínimo buscado.

El ejemplo siguiente muestra cómo podemos auxiliarnos del análisis de los extremos condicionados cuando estamos buscando los extremos absolutos de una función sobre un conjunto.

Ejemplo 7. Sean:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \quad y \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$$

y hallemos $M = \sup_{(x,y) \in A} f(x,y)$ y $m = \inf_{(x,y) \in A} f(x,y)$.

La función f es continua y el conjunto A es compacto, luego la función f alcanza los valores m, M en puntos del conjunto A . Los posibles puntos de extremo que están en el interior de A deben satisfacer el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 12 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 16 = 0 \end{cases}.$$

Pero este sistema tiene como única solución el punto $(6, -8) \notin A$. De modo que los puntos de extremo de f estarán sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. En otras palabras, los puntos buscados serán extremos condicionados de f con la restricción $x^2 + y^2 = 25$.

Consideremos la función de Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

de donde el sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} 2x - 12 - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 16 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Este sistema nos proporciona dos posibles puntos de extremo: $(3, -4)$ y $(-3, 4)$. Calculando los valores de f en estos puntos encontramos que $f(3, -4) = -75$ y $f(-3, 4) = 125$. Así que $M = 125$ y $m = -75$.

Ejercicios propuestos

1. Sea $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por:

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right).$$

¿Tiene F inversa local en $(0,1)$?

2. Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 y^2)$
- Analiza la inyectividad local de f .
 - Analiza la inyectividad de f en los conjuntos $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $[0,1] \times [0,1]$.
 - Calcula $(f^{-1})'(0,1)$.
3. Sean $L, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ L una aplicación lineal inyectiva y g una función de clase C^1 que satisface $\|g(x)\| \leq M \|x\|^\alpha$ ($\alpha > 1$), para todo x . Prueba que la función $f(x) = L(x) + g(x)$ tiene inversa local en una vecindad del punto $x = 0$.
4. Sean el conjunto $U = \{(u, v) : u > v\}$ y la función $T : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por:

$$T(u, v) = (u + v, u^2 + v^2).$$

- Prueba que T es localmente inyectiva.
 - Determina la imagen de T y prueba que T es globalmente inyectiva.
5. Demuestra que son dependientes las funciones $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ y encuentra la función que las liga.
6. Demuestra que las tres funciones:
- $$f_1(x, y, z) = xy + yz + zx$$
- $$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
- $$f_3(x, y, z) = x + y + z$$
- son dependientes en \mathbf{R}^3 y encuentra la función que las relaciona.
7. Dado un punto (a, b, c) ($a, b, c > 0$), encuentra el plano que pasa por este punto y forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

8. Encuentra el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ que tiene mínima la suma de sus trazas sobre los tres ejes coordinados.
9. Halla las distancias máximas y mínimas desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ e interpreta el resultado obtenido.

10. Halla los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ que resulten más próximos al origen.
11. Encuentra las dimensiones del paralelepípedo recto de volumen máximo inscrito en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a, b, c > 0$).
12. Un triángulo es tal que el producto de los senos de sus tres ángulos es máximo. Prueba que el triángulo es equilátero.
13. a) Encuentra una expresión para la distancia de un punto (u, v) del plano a la recta $ax + by + c = 0$.
- b) Halla las distancias máximas y mínimas de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.
14. Halla los extremos de:

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3,$$

dada la condición $x + 2y + 3z = a$, ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$).

15. Halla los semiejes de la elipse intersección del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ y el plano $z = x + y$.
16. Halla los extremos de la función $u = x_1^p + \dots + x_n^p$ ($p > 1$) si $x_1 + \dots + x_n = a$, ($a > 0$) $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.
17. Muestra que si $n \geq 1$ y $x \geq 0$

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^n.$$

18. Halla, si existen, $\inf_{(x, y, z) \in A} f(x, y, z)$ y $\sup_{(x, y, z) \in A} f(x, y, z)$ cuando:
- a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ y $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$.
- b) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

19. El principio de Fermat afirma que *un rayo de luz que parte de un punto A hacia un punto B describe una curva tal que el tiempo de recorrido sea el menor posible*. Supongamos que los puntos A y B están situados en dos medios ópticos separados por un plano R y la velocidad de la luz en ambos medios es constante, igual a v_1 y v_2 respectivamente. Partiendo del principio de Fermat demuestra la ley de la refracción

de la luz: $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$, donde α_1 y α_2

son los ángulos de incidencia y refracción (ver Fig. 14).

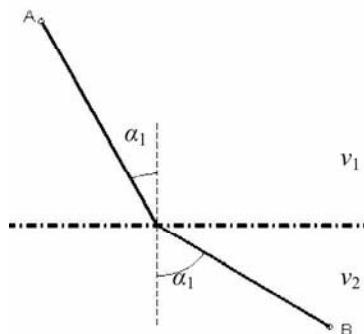


FIGURA 14.

Ejercicios complementarios

- 1 Prueba que el plano tangente a la superficie dada por $xyz=a^3$ forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante.
- 2 Se dice que dos superficies S_1 y S_2 forman un ángulo φ en un punto P , común a ambas, si este es el ángulo que forman los planos tangentes a S_1 y S_2 en P . Demuestra que las esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \quad y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2by, \quad a \neq b,$$

son ortogonales en sus puntos de intersección.

- 3 Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 y supongamos que la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ no pasa por el origen. Prueba que:
 - a) Existe al menos un punto P en la superficie tal que la distancia al origen es mínima.
 - b) La normal a la superficie en P es paralela al vector \vec{OP} .
4. Prueba que el sistema:

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

define a x , y como funciones implícitas de z , u en una vecindad del punto $(x,y,z,u) = (0,1,0,1)$.

- b) Sean $x = h(z,u)$, $y = g(z,u)$ las funciones definidas implícitamente por el sistema anterior. Demuestra que $F(z,u) = (h(z,u),g(z,u))$ admite inversa diferenciable en una vecindad de $(0,1)$.

5. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^4 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}.$$

Prueba que para algún $\varepsilon > 0$ el sistema puede ser resuelto para (x,y,u) como una función de $z \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, con $x(0) = y(0) = u(0) = 0$. ¿Serán estas funciones continuas? ¿Serán diferenciables? ¿Es única?

6. Sean $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funciones de clase C^1 y $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Consideremos la ecuación $f(x) = tg(x)$, $t \in \mathbf{R}$.

- a) Demuestra que para algún intervalo de la forma $|t| < \delta$, existe una única función continua $x = x(t)$ la cual satisface la ecuación y además verifica que $x(0) = 0$.

- b) Encuentra el polinomio de Taylor de primer grado de x en potencias de t .

7. (Desigualdad de Hadamard) Sea el determinante:

$$u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$. Demuestra que $|u| \leq 1$.

8. Sea $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^2 . Un punto $x \in \mathbf{R}^n$ se dice crítico si $df(x) = 0$; un punto crítico se dice no singular si es no singular la matriz hessiana:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Demuestra que si x es un punto crítico no singular de f , entonces hay una vecindad de x donde no existen otros puntos críticos de f .

9. Denotemos por P_2 al conjunto de todos los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Definamos la función $J : P_2 \rightarrow \mathbf{R}$ por:

$$J(p) = \int_0^1 [p(x)]^2 dx.$$

Prueba que J tiene un mínimo sobre el conjunto $Q = \{p \in P_2 : p(1) = 1\}$ y determina en qué punto de Q alcanza ese valor mínimo.

10. Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ de clase C^1 que satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}. \quad (*)$$

a) Prueba que la matriz jacobiana $f'(x)$ tiene inversa si y solo si $df(x) \neq 0$.

b) Demuestra que si $df(x) \neq 0$, entonces en una vecindad del punto x existe la función inversa de f , f^{-1} , la cual también satisface el sistema de ecuaciones (*).

11. Sea f una función continuamente diferenciable de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} . Demuestra que existe una función continua g de $[0,1]$ en \mathbf{R}^2 tal que la función compuesta $f \circ g$ es constante.

12. Sea $f : A \subset X \rightarrow Y$ una función definida en un abierto A de un espacio de Banach X en otro espacio de Banach Y . Si la función f es diferenciable en A , f' es continua en A y $f'(x_0)$ es invertible ($x_0 \in A$), entonces existen vecindades $U(x_0)$ y $V(y_0)$ tales que $f : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$ es biyectiva y la función inversa es diferenciable en $V(y_0)$. Además tiene lugar $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$.

13. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices reales de tamaño 2×2 . Definamos $f : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ mediante $f(X) = X^2$. Prueba que:

- a) f tiene una inversa local en una vecindad del punto $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) f no tiene inversa local en una vecindad del punto $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices reales de tamaño 2×2 . Definamos $f : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ mediante $f(X) = X^2 + X$. Prueba que f tiene una inversa local en el origen.

APÉNDICE

ALGUNAS APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL AL ESTUDIO DE LAS CURVAS

INTRODUCCIÓN

Una de las motivaciones principales para la aparición del cálculo diferencial fue, precisamente, el estudio de las curvas. Muchos de los conceptos del cálculo tienen un basamento geométrico y por tanto su aplicación resulta prácticamente inmediata, por ello las hemos ido considerando cada una en el momento oportuno. Sin embargo, para un estudio más profundo de las curvas, se han desarrollado métodos diferenciales específicos. La trascendencia de estos métodos, tanto para la matemática como para sus aplicaciones, ha sido de tal magnitud que dieron lugar a una nueva rama de esta ciencia: la Geometría Diferencial. En este apéndice introduciremos algunas de las ideas más elementales de esta rama de la matemática.

En un inicio se estudiaron fundamentalmente las curvas planas y las referencias a las curvas en el espacio eran completamente incidentales. Puede considerarse como el iniciador del estudio sistemático de las curvas en el espacio al joven de 16 años Alexis Clairaut, quien, en 1733, publicó una obra dedicada al análisis del comportamiento de estas curvas: *Investigaciones sobre las curvas de doble curvatura*. Las llamó “curvas de doble curvatura” porque, las estudiaba mediante sus proyecciones sobre dos planos perpendiculares. De este modo, las curvas se caracterizaban por las propiedades de sus dos curvas de proyección.

Durante el siglo xviii y la primera mitad del xix se introdujeron nuevas magnitudes y métodos que permitieron una investigación más profunda de las curvas, tanto planas como en el espacio. Este estudio fue ampliado y sistematizado y, a partir de la segunda mitad del siglo xviii, va a hacer su aparición en los cursos de formación de ingenieros. Así cuando, al calor de la Revolución Francesa y con la participación

decisiva del gran geómetra Gaspard Monge (1746-1818), se crea la famosa Escuela Politécnica de París, en todos los programas y libros de textos aparecerá la aplicación de los métodos analíticos al estudio de las curvas y superficies.

Hacia fines del siglo xix, ya se había investigado profundamente el comportamiento de las curvas, sin embargo, aún no existía una preocupación por la aclaración de la noción de curva en sí misma. Esto, en un inicio, no era necesario: Las curvas más simples tenían definiciones geométricas y analíticas claras y seguras, otras se daban como el gráfico de funciones. Sin embargo, con la ampliación del concepto función y el surgimiento de funciones con comportamientos sumamente extraños comenzaron los cuestionamientos acerca de la noción geométrica de curva.

Camille Jordan, profesor de la Escuela Politécnica de París desde 1873, dio la definición analítica de curva que hemos utilizado antes: como un conjunto de puntos representados paramétricamente mediante una función continua de un intervalo en \mathbf{R}^2 (o \mathbf{R}^3). Además precisó la noción de curva sin puntos múltiples y cerrada y estableció el denominado Teorema de Jordan:

Una curva cerrada sin puntos múltiples divide al plano en dos regiones conexas una interior y otra exterior a la curva.

El Teorema resulta evidente para curvas sencillas, como por ejemplo una circunferencia o una elipse. Pero el cambio del siglo xix al xx se caracterizó en la matemática por el surgimiento de las funciones y curvas que fueron calificadas de “monstruos”, esto es, funciones o curvas que tenían un comportamiento completamente absurdo e inesperado. Por ejemplo, una curva-monstruo muy conocida, por la posibilidad de una descripción geométrica relativamente sencilla, es la que introdujo David Hilbert (1862-1943) en 1891. Hilbert describió una curva que satisface la definición de Jordan y pasa por todos los puntos de un cuadrado. En la Fig. 1 se muestran los tres primeros pasos de la construcción realizada por Hilbert.

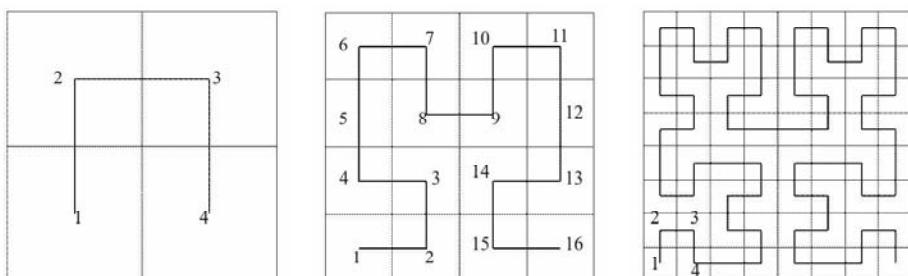


FIGURA 1.

El cuadrado unidad se divide en 4 cuadrados y se unen los centros de ellos siguiendo el orden mostrado. Después el cuadrado es dividido en 16 cuadraditos y se unen sus centros como se muestra. Para el tercer paso la división del cuadrado es en 64 pequeños cuadrados cuyos centros también se unen y así sucesivamente. Hilbert mostró que en el límite se obtiene una curva en el sentido definido por Jordan que, no obstante, pasa por absolutamente todos los puntos del cuadrado inicial.

Así que la definición de curva dada por Jordan no era totalmente satisfactoria y, a comienzos del siglo xx, surgieron definiciones alternativas, enmarcadas en una rama de la matemática que surgía en esa época: la Topología.

No obstante, cuando lo que se pretende es aplicar los métodos diferenciales al estudio de las curvas, las representaciones paramétricas de las mismas tienen que estar dadas por funciones suficientemente “buenas”. En estos casos los monstruos como el de Hilbert no tienen cabida y la definición de Jordan es adecuada. Por esta razón, la definición de curva dada por Jordan será la que adoptaremos en este Apéndice.

1. Derivación de una función vectorial

Aunque la diferenciación de funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R}^n no es más que un caso particular de funciones entre espacios de tipo \mathbf{R}^n , resulta útil introducir alguna terminología y propiedades específicas para este tipo de funciones.

Una función $r : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, I intervalo abierto en \mathbf{R} , $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ se denominará **escalar** si $n=1$ y **vectorial** cuando $n>1$. Puede comprobarse fácilmente que una función vectorial es diferenciable en $t_0 \in I$ si y solo si existe el límite:

$$\begin{aligned} r'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (r(t_0 + h) - r(t_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right) = \\ &= (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)). \end{aligned}$$

A este límite lo denominaremos **vector derivada** de r .

Observaciones: 1) Notemos que las componentes del vector $r'(t_0)$ son los elementos de la matriz jacobiana (matriz columna) de la función r .

2) En los casos $n = 2, 3$ sabemos que el vector $r'(t_0)$ (siempre que sea no nulo) tiene la dirección de la tangente a la curva Γ en $r(t_0)$.

Pueden demostrarse fácilmente las propiedades siguientes de la derivada de un vector:

Propiedades: Sean r_1 y r_2 funciones vectoriales y f una función escalar, todas diferenciables en el punto t_0 . Entonces se cumplen:

$$1) \quad (r_1 + r_2)'(t_0) = r_1'(t_0) + r_2'(t_0).$$

$$2) \quad (f r)'(t_0) = f'(t_0)r(t_0) + f(t_0)r'(t_0).$$

$$3) \quad (r_1 \cdot r_2)'(t_0) = r_1'(t_0) \cdot r_2(t_0) + r_1(t_0) \cdot r_2'(t_0).$$

$$4) \quad (r_1 \times r_2)'(t_0) = r_1'(t_0) \times r_2(t_0) + r_1(t_0) \times r_2'(t_0).$$

Si una función vectorial r tiene derivadas hasta el orden m en una vecindad $V(t_0)$ del punto t_0 , entonces para ella podemos escribir la fórmula de Taylor con resto en la forma de Peano (para probarlo, basta considerar la fórmula para cada una de las componentes de r):

$$r(t_0 + h) = r(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{r^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + o(h^m),$$

donde h es tal que $t_0 + h \in V(t_0)$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^m)}{h^m} = 0$.

2. Curvas en \mathbf{R}^n

Jordan introduce la noción de curva en el plano como la trayectoria de un punto móvil, donde las dos coordenadas dependen de un parámetro t que puede ser considerado como tiempo. Sin embargo, desarrolla sus ideas de forma independiente al significado físico de estas magnitudes y comenta brevemente las adaptaciones obvias que se deben hacer para el caso de las curvas en el espacio. Las definiciones siguientes son en esencia las dadas por Jordan, pero enunciadas de forma general para curvas en \mathbf{R}^n .

Definición 1. Un conjunto $K \subset \mathbf{R}^n$ se denomina una **curva** si existe una función continua $r: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, tal que $r([a, b]) = K$. Esto significa que llamaremos curva a la imagen de un intervalo cerrado por una función continua. A la función r se le denomina **parametrización** o **representación paramétrica** de la curva K .

Si además se cumple que $r(a)=r(b)$, entonces K es una *curva cerrada*.

Cuando la función r es inyectiva en $[a,b]$ la curva se dice *simple*. Una curva cerrada tal que r sea inyectiva en $[a,b]$ se llama curva *cerrada simple*.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 1. Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces el conjunto de puntos del plano que satisfacen la relación $y=f(x)$ constituye una curva simple. En efecto, es evidente que la parametrización $r(t)=(r, f(t))$, $t \in [a,b]$ cumple los requerimientos de la definición anterior.

Observemos que el conjunto de puntos tales que $y=\frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) no constituye una curva en el sentido de la definición 1, ya que no es la imagen de un intervalo cerrado por una función continua. Esta aparente divergencia con la terminología usada, por ejemplo en la geometría analítica, no tiene por qué inquietarnos pues, en este capítulo, investigaremos, fundamentalmente, las propiedades locales de las curvas, esto es, aquellas propiedades que dependen del comportamiento de la curva en una vecindad de cierto punto. Por esta razón, nos interesaremos por representaciones de las curvas válidas en una vecindad de un punto concreto.

Ejemplo 2. Consideremos el conjunto K de puntos del plano que satisfacen la ecuación $F(x,y)=0$. ¿Constituirá una curva en el sentido de la definición 1? Una respuesta general y global no es posible darla, sin embargo, el teorema de la función implícita nos permite dar condiciones suficientes para que esta ecuación defina una curva en la vecindad de un punto (x_0,y_0) tal que $F(x_0,y_0)=0$.

En IV.1 vimos que, cuando la función F es de clase C^1 en una vecindad de (x_0,y_0) y $\nabla F(x_0,y_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad V de (x_0,y_0) tal que el conjunto $V \cap K$ puede representarse explícitamente, bien en la forma $y=f(x)$ o en la forma $x=g(y)$, donde las funciones f o la g son de clase C^1 en una vecindad del punto correspondiente. Así que los puntos de $V \cap K$ constituyen una curva, con representación paramétrica de una de las formas $r(t)=(t, f(t))$ o $r(t)=(g(t), t)$.

Un resultado análogo vimos en el ejemplo 5 de IV.2 para curvas en el espacio. Allí probamos que si F y G son funciones de clase C^1 en una vecindad de un punto (a,b,c) que satisface $F(a,b,c)=0$, $G(a,b,c)=0$, entonces el sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

determina una curva en una vecindad del punto (a,b,c) cuando la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}(a,b,c)$$

tiene rango dos.

Ejemplo 3. Consideremos las funciones siguientes:

$$r_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_1(t) = (\cos t, \sin t),$$

$$r_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_2(t) = (\cos t, \sin t),$$

$$r_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_3(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

$$r_4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_4(t) = (\cos t, -\sin t),$$

$$r_5 : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_5(t) = (\cos t, \sin t).$$

Notemos que todas ellas definen curvas en \mathbf{R}^2 tales que:

$$r_i([a_i, b_i]) = K_i \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\},$$

donde $[a_i, b_i]$ es el intervalo que se considera para cada una de ellas. Todas estas curvas están situadas sobre la circunferencia unidad. Sin embargo, cada parametrización posee características diferentes.

Cuando la variable t toma sucesivamente los valores del intervalo $[0, 2\pi]$, los puntos $r_1(t)$ recorren toda la circunferencia unidad, comenzando por el punto $(1, 0)$, continúan por la semicircunferencia superior, después la inferior y terminan en el punto inicial. De este modo, tenemos que K_1 es una curva cerrada simple.

La curva K_2 coincide con los puntos de la semicircunferencia superior, recorrida en la misma forma que se describió para K_1 , luego es una curva simple, cuyo punto inicial es $(1, 0)$ y el punto final es $(-1, 0)$.

Aunque las funciones r_1 y r_3 son diferentes podemos observar que los puntos de la curvas correspondientes K_1 y K_3 , son los mismos y se generan de la misma forma.

En el caso de K_4 , se obtiene nuevamente la circunferencia unidad, pero esta vez se transita en sentido contrario al de K_1 , es decir, primero la semicircunferencia inferior y después la superior. Esta también es una curva cerrada simple.

Por último, K_5 coincide con los puntos de la circunferencia unidad, pero podemos constatar que con la función r_5 se recorre la semicircunferencia superior dos veces, una cuando el parámetro $t \in [0, \pi]$ y después cuando $t \in [2\pi, 3\pi]$. Como, $r_5(0) \neq r_5(3\pi)$ la curva así constituida no es ni cerrada ni simple.

Este ejemplo nos muestra que la definición dada de curva es algo ambigua y que será necesario realizar algunas precisiones.

Definición 2. Diremos que dos parametrizaciones $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $\rho:[\alpha,\beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ **definen la misma curva** o que constituyen **parametrizaciones equivalentes** de una curva si existe una función φ que transforma el intervalo $[\alpha,\beta]$ en el intervalo $[a,b]$, continua y estrictamente monótona tal que $\rho = r \circ \varphi$.

Observación. Notemos que si las parametrizaciones r_1 y r_2 son equivalentes y r_2 es equivalente a otra parametrización r_3 , entonces también son equivalentes r_1 y r_3 .

Así que en realidad *una curva es la imagen de un intervalo cerrado por una de las parametrizaciones equivalentes y cada una de estas parametrizaciones constituye una representación de esta curva*.

En el ejemplo 1, las parametrizaciones r_1 , r_3 y r_4 resultan equivalentes, pues:

$$r_3 = r_1 \circ \varphi, \text{ donde } \varphi(t) = 2\pi t \quad \text{y} \quad r_4 = r_1 \circ \psi, \text{ donde } \psi(t) = 2\pi - t.$$

Observemos que la función φ es creciente, mientras que ψ es decreciente. Este decrecimiento se refleja en el hecho de que, con la parametrización r_4 , la circunferencia se recorre en sentido contrario al recorrido efectuado con r_1 (y r_3).

En general, cuando la función φ que proporciona el cambio de parametrización es creciente, las dos parametrizaciones equivalentes recorren la curva en el mismo sentido, en tanto que, cuando φ es decreciente, el recorrido de la curva con las dos parametrizaciones es diferente.

Para la aplicación de las herramientas diferenciales a la investigación del comportamiento de una curva, será necesario imponer algunas exigencias adicionales a la parametrización que representa la curva.

Definición 3. Una curva K se llama **suave** si puede encontrarse una parametrización $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ donde la función r tenga derivada continua en $[a,b]$ y tal que $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. En los puntos extremos del intervalo la derivada y su continuidad se entienden como derivada y continuidad laterales. Cuando la curva sea cerrada, exigiremos adicionalmente que $r'_+(a) = r'_-(b)$.

Se denomina **recta tangente** a una curva suave K , representada por la función $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, en un punto $r(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$ a la recta que pasa por el punto $r(t_0)$ y tiene la dirección del vector $r'(t_0)$ (si $t_0 = a, b$ se trata de la semirrecta tangente). Es decir, al conjunto $\{x \in \mathbf{R}^n : x = \eta(t), t \in \mathbf{R}\}$, donde $\eta(t) = r(t_0) + t r'(t_0)$. De modo que:

Una curva suave es aquella que tiene, en todos sus puntos, recta tangente con una dirección bien definida dada por $r'(t)$.

Observación: Cuando nos refiramos a parametrizaciones equivalentes de una curva suave, se tratará siempre de parametrizaciones que satisfagan los requerimientos de la definición 3. Para ello exigiremos, adicionalmente, en la definición de parametrización equivalente, que la función φ tenga derivada continua y no nula en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 4. Sea una curva plana dada por $y = f(x)$ donde f es una función continuamente derivable en un intervalo I . Podemos considerar esta curva dada por la representación paramétrica $r(t) = (t, f(t))$, con $t \in I$. Esta es una curva suave y la tangente en un punto arbitrario $(x_0, f(x_0))$ tendrá la dirección del vector $r'(t_0) = (1, f'(t_0))$, $(t_0 = x_0)$. Así que la ecuación paramétrica de la recta tangente que pasa por este punto será:

$$\eta(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0) = (t, f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)),$$

o en forma equivalente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta última expresión es la forma usual para la ecuación de la recta tangente a una curva obtenida como el gráfico de una función real de una variable real.

Ejemplo 5. Cuando F es de clase C^1 en una vecindad de (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$ y $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, podemos afirmar que la curva definida por la ecuación $F(x, y) = 0$,

en una vecindad del punto (x_0, y_0) es suave. Además su recta tangente en (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Análogamente, cuando F y G son de clase C^1 en una vecindad de un punto

(x_0, y_0, z_0) , $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ y la matriz $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y, z)}(x_0, y_0, z_0)$ tiene rango 2, entonces, la curva determinada por el sistema $F(x, y, z) = 0$; $G(x, y, z) = 0$ en una vecindad de dicho punto es suave. Además podemos hallar la ecuación de la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) haciendo uso del teorema de las funciones implícitas.

Ejemplo 6. La hélice cónica dada por $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, con $t \in [0, 3\pi]$ es una curva suave y simple (Fig. 2). Hallaremos la ecuación de su recta tangente en el punto $(-\pi, 0, \pi)$ correspondiente al valor $t = \pi$.

El vector derivada es $r'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$, luego un vector en la dirección de la tangente buscada es $r'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$ y por tanto, la recta tangente viene dada por

$$x = -\pi - t, \quad y = -\pi t, \quad z = \pi + t.$$

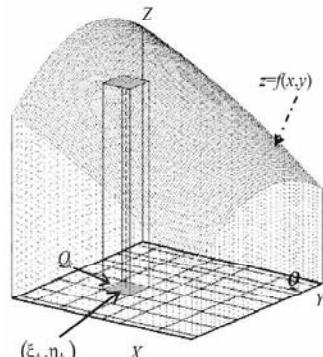


FIGURA 2.

3. Longitud de un arco de curva

Durante el siglo XVII y buena parte del XVIII se concebía las curvas como si fueran líneas poligonales formadas por pequeños segmentos de rectas. Por lo tanto, la longitud de un pequeño arco de curva, es decir, el “diferencial” de arco, se calculaba como si éste fuera un segmento de recta. Por esta razón, al cálculo de la longitud de una curva, se le denomina **rectificación de la curva**. Si se identifica la longitud del arco PQ y la del segmento que une los mismos puntos y

se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQM de la Fig.3 se encuentra la relación

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

donde se ha utilizado la notación habitual de la época:

dx es el incremento de la variable independiente x ,

dy es el incremento correspondiente a la variable y ,

ds es la longitud del arco PQ .

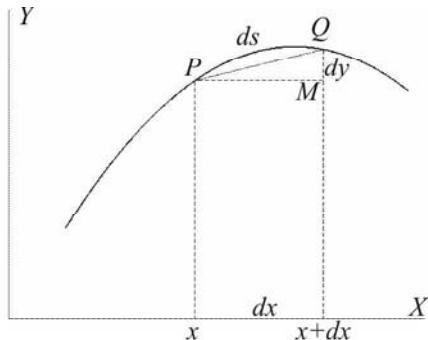


FIGURA 3.

En todos estos razonamientos se supone que dx es muy pequeño y resulta intuitivamente claro que cuanto menor sea, mejor será la aproximación realizada. Para calcular la longitud de un arco de la curva bastaba con integrar la expresión anterior. Así se obtenía la fórmula:

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

donde la integral se calcula entre el menor y el mayor valor que toma la variable independiente x al recorrer el arco dado.

Si la curva está dada por una expresión de la forma $y = f(x)$, donde $x \in [a, b]$, entonces $dy = f'(x)dx$ y la fórmula para el cálculo de la longitud de arco se convierte en

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Los esfuerzos realizados en los últimos años del siglo XVIII y comienzos del XIX para dar una base consistente al cálculo, llevaron a los matemáticos a sustituir este razonamiento ingenuo por argumentaciones bastante más largas y complicadas. Sin embargo, ellas seguían apelando a la intuición geométrica y, como era de esperar, no consiguieron el ansiado “rigor matemático”.

El enfoque actual de esta problemática va a surgir solo a finales del siglo XIX, cuando se dan definiciones adecuadas de curva y de longitud de un arco para curvas tanto en el plano como en el espacio.

Con vistas a simplificar las notaciones, a continuación trabajaremos con curvas planas. La generalización a curvas en el espacio es evidente y la dejamos al lector.

Supongamos que K es una curva dada por la función continua $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Consideremos en el intervalo $[a, b]$ una partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$, esto es, un conjunto de puntos de este intervalo tales que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Entonces la poligonal P_τ que une consecutivamente los puntos $\{r(t_i)\}_{i=0}^k$, tendrá sus vértices situados sobre K , y la denominaremos **poligonal inscrita** en K (Fig. 4).

La longitud de una poligonal P_τ es siempre un número finito y puede calcularse sin ninguna dificultad

$$l(P_\tau) = \sum_{i=1}^k |r(t_i) - r(t_{i-1})|.$$

Observemos que cuando hacemos la partición más fina, es decir, aumentamos el número de puntos de la partición, la longitud de la poligonal inscrita P_τ , aumenta (o permanece igual), de modo que es natural concebir como longitud de la curva K al supremo de las longitudes de todas las poligonales inscritas en K . Esto motiva la definición siguiente.

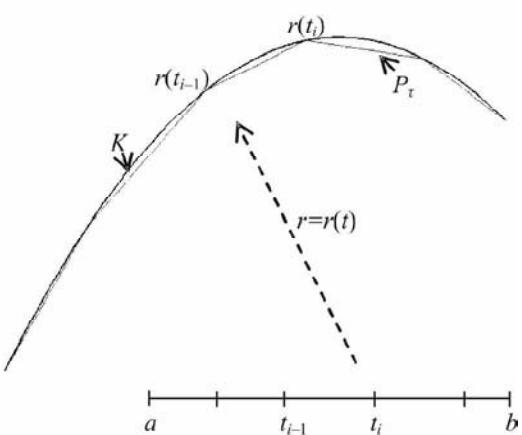


FIGURA 4.

Definición 4. Una curva K se dice **rectificable** si el conjunto $\{P_\tau\}$ de las poligonales inscritas en K es acotado superiormente. Al número:

$$l(K) = \sup_{\tau} l(P_\tau)$$

se le denomina **longitud** de K .

Para una curva K dada por la parametrización $r(t)$, $t \in [a, b]$ pueden demostrarse, sin grandes dificultades, las dos propiedades siguientes (ejercicio 3):

- a) Si K es rectificable y $[c, d] \subset [a, b]$, entonces el arco dado por $r(t)$, $t \in [c, d]$, también es rectificable.

b) Si K es rectificable, $c \in (a, b)$ y los arcos K_a y K_b están dados respectivamente por $r(t)$ $t \in [a, c]$ y $t \in [c, b]$, entonces:

$$l(K) = l(K_a) + l(K_b).$$

En general, es posible encontrar ejemplos (ejercicio 7) de curvas que no son rectificables. Sin embargo, a continuación probaremos que:

Todas las curvas suaves son rectificables.

- ◆ Consideremos una curva K dada por la parametrización $r: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$, donde r tiene derivada continua y sea una partición cualquiera $\{t_i\}_{i=0}^k$ del intervalo $[a, b]$. Entonces se cumple que:

$$l(P_\tau) = \sum_{i=1}^k |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos:

$$l(P_\tau) = \sum_{i=1}^k \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} (t_i - t_{i-1}),$$

donde $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$.

De aquí sigue inmediatamente la desigualdad:

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} (b - a) \leq l(P_\tau) \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} (b - a),$$

donde

$$m_1 = \inf_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad m_2 = \inf_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

$$M_1 = \sup_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |y'(t)|.$$

Pero la doble desigualdad anterior es válida para toda partición P_2 de K . Esto significa que K es rectificable y además se cumple el estimado

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} (b - a) \leq l(K) \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} (b - a) \quad \blacklozenge \quad (1)$$

Supongamos que K es una curva rectificable, dada por la parametrización $r(t)$, $t \in [a,b]$, entonces podemos definir una función que a cada $t \in [a,b]$ pone en correspondencia la longitud $s(t)$ del arco de K correspondiente al intervalo $[a,t]$. La doble desigualdad en (1) nos permite probar que, para una curva suave, la función $s(t)$, $t \in [a,b]$ es derivable y encontrar el valor de su derivada.

◆ En efecto, sean K una curva suave dada por $r(t)$, $t \in [a,b]$ y $t_0 \in [a,b]$ un punto cualquiera. Consideremos un incremento $\Delta t > 0$ (o $\Delta t < 0$) tal que $t_0 + \Delta t \in [a,b]$. Entonces la función s recibe un incremento $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ cuyo valor absoluto $|\Delta s|$ no es más que la longitud del arco de K correspondiente al intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ (o $[t_0 + \Delta t, t_0]$). Aplicando (1) a este arco, obtenemos

$$|\Delta t| \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \leq |\Delta s| \leq |\Delta t| \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \quad (2)$$

donde m_i y M_i $i = 1,2$ son respectivamente el mínimo y el máximo de las funciones continuas $|x'(t)|$, $|y'(t)|$ en el intervalo de longitud Δt .

Estos valores mínimos y máximos son valores de las correspondientes funciones en algún punto de este intervalo. En particular,

$$\begin{aligned} m_1 &= \inf |x'(t)| = |x'(t_0 + \theta \Delta t)|, \quad \theta \in [0,1] \\ M_1 &= \sup |x'(t)| = |x'(t_0 + \theta' \Delta t)|, \quad \theta' \in [0,1]. \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M_1 = |x'(t_0)|.$$

Análogamente se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M_2 = |y'(t_0)|.$$

Si en (2) dividimos por $|\Delta t|$ y pasamos al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2} = |r'(t_0)|.$$

Notemos que los incrementos Δt y Δs tienen siempre el mismo signo, luego $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$, de modo que finalmente obtenemos:

$$s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |r'(t_0)|.$$

Como el punto t_0 es arbitrario, esto demuestra que la función s es continuamente derivable en $[a,b]$. Además su derivada es positiva, por lo que es una función creciente. ◆

Hemos demostrado una *propiedad fundamental* de la función longitud de arco:

Si K es una curva suave dada por $r(t)$, $t \in [a,b]$, la función longitud de arco $s(t)$, $t \in [a,b]$ es creciente y tiene derivada continua dada por la expresión $s'(t) = |r'(t)|$.

Veamos algunas consecuencias importantes de la proposición anterior:

1. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, es evidente que la longitud de una curva suave K parametrizada por $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ puede ser calculada mediante la fórmula

$$l(K) = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

Observación. Puede demostrarse fácilmente que la longitud de una curva suave K es independiente de la parametrización escogida, siempre que éstas sean equivalentes (ejercicio 2).

2. Una curva suave K , siempre puede considerarse parametrizada de forma que el parámetro represente la longitud de arco.

◆ En efecto, como $s = s(t)$ es una función de clase C^1 , creciente estrictamente, su función inversa $t = t(s)$ existe y tiene las mismas propiedades, luego las parametrizaciones $r = r(t)$ y $\rho(s) = (r \circ t)(s)$ son equivalentes.◆

En un estudio más profundo de las curvas, se logra simplificar los razonamientos y muchas de las fórmulas cuando se considera la parametrización respecto a la longitud de arco. Precisamente, la necesidad de una investigación detallada de las trayectorias descritas por un móvil, fue lo que condujo a Euler a introducir esta forma de representación. La razón principal de la conveniencia de utilizar el parámetro longitud de arco está dada por el resultado siguiente.

3. Cuando $\rho = \rho(s)$, $s \in [0, L]$ ($L = l(K)$) denota la parametrización de una curva K respecto a la longitud de arco, entonces para todo s

$$|\rho'(s)| = 1.$$

Lo anterior significa que las componentes del vector $\rho'(s)$ son exactamente los cosenos directores de la tangente a la curva en el punto correspondiente al valor s del parámetro.

4. A la igualdad $|\rho'(s)| = 1$ se le puede dar una interpretación geométrica interesante:

$$|\rho'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \rho|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\rho(s + \Delta s) - \rho(s)|}{|\Delta s|} = 1,$$

es decir, $|\Delta \rho|$ y $|\Delta s|$ son infinitesimales equivalentes. Pero $|\Delta \rho|$ es la longitud de la cuerda que une a los puntos $s + \Delta s$ y s , mientras que $|\Delta s|$ es la longitud del arco de curva que une los mismos puntos. Por tanto, esta igualdad significa que, *cuando el arco es suficientemente pequeño, prácticamente coincide con su cuerda*.

Ejemplo 7. Sea K un arco de la hélice circular dado por

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

y hallemos la longitud de K y su parametrización respecto a la longitud de arco s .

Sea t un valor del parámetro correspondiente a un punto P arbitrario de K , entonces la longitud del arco OP (O es el punto $(a, 0, 0)$) viene dada por

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De modo que K tiene longitud $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$. Además, la parametrización, respecto a la longitud de arco s , es

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ s &\in [0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}]. \end{aligned}$$

4. Curvatura de una curva

Cuando los matemáticos comenzaron a investigar el comportamiento de las curvas planas, casi inmediatamente se interesaron en determinar la magnitud en que una curva se desvía de una línea recta, más exactamente, de su recta tangente. Esto motivó la introducción de nociones tales como centro y radio de curvatura. Por ejemplo, Newton en su obra *Geometría analítica* considera al **centro de curvatura** C , de una curva K en un punto P , como el punto de intersección de la normal en P con otra normal en un punto “adyacente” a Q y, la distancia entre el centro de curvatura y el punto P , es el **radio de curvatura** de la curva en P (Fig.5).

Entonces afirma que el círculo con centro en el centro de curvatura y que tiene como radio el radio de curvatura es el de “mayor contacto con la curva en P ”, esto significa que, no es posible trazar otro círculo que esté situado entre la curva y dicho círculo. A este círculo de mayor contacto en P lo llama **círculo osculador**. La curvatura en P es el recíproco del radio de curvatura.

Veamos cómo la idea anterior puede ser precisada utilizando el concepto límite. Consideremos una curva suave K dada por la parametrización $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^3$

(cuando se trate de una curva en el plano consideramos simplemente la tercera componente de r como idénticamente cero) y sobre ella un punto P , correspondiente al valor t_0 del parámetro. Denotemos por M un punto que varía sobre K , correspondiente al valor del parámetro $t_0 + \Delta t$, s la longitud (variable) del arco PM (Fig. 6) y sea $\varphi = \varphi(\Delta t)$ el ángulo en radianes entre las tangentes a la curva en P y M , $|\varphi| \leq \pi^1$.

Definición 5. En las condiciones anteriores, si existe el límite

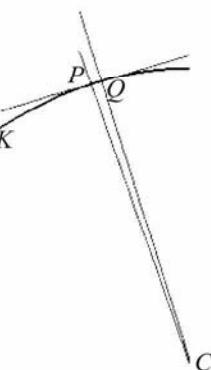


FIGURA 5.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{s} \quad (3)$$

lo llamaremos **curvatura** de la curva K en P . A la curvatura la denotaremos con la letra griega kappa: κ .

Cuando la curva K es una línea recta, entonces su tangente es la misma para todos los puntos, por tanto, el ángulo φ no varía y la curvatura es cero en todos sus puntos. Más adelante veremos que el recíproco también es cierto.

Demostremos que una curva suave K , dada por una parametrización $r = r(t)$ dos veces

¹ Consideraremos $\varphi(\Delta t) \geq 0$ y $s \geq 0$ si $\Delta t \geq 0$ y $\varphi(\Delta t) \leq 0$ y $s < 0$ si $\Delta t < 0$, así que $\frac{\varphi}{s} \geq 0$.

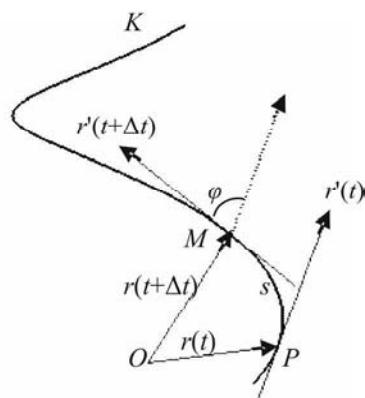


FIGURA 6.

diferenciable en $[a,b]$, tiene una curvatura bien definida en cada uno de sus puntos y, además, encontraremos una fórmula que permite calcular esta magnitud.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación abreviada:

$$r(t_0) = r_0, \quad r'(t_0) = r'_0, \quad r''(t_0) = r''_0, \quad \dots,$$

$$r(t_0 + \Delta t) = r, \quad r'(t_0 + \Delta t) = r', \quad r''(t_0 + \Delta t) = r'', \quad \dots.$$

Con las condiciones impuestas a K es claro que $\Delta t \rightarrow 0$ si y solo si $s \rightarrow 0$ y estas condiciones implican que $\varphi \rightarrow 0$, luego el límite en (3) es equivalente a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{s}. \quad (3')$$

Como K es suave y $r' \neq 0$, podemos escribir:

$$|\sin \varphi| = \frac{|r'_0 \times r'|}{|r'_0| |r'|}.$$

La función r tiene derivada segunda, luego r' es derivable, por tanto:

$$r' = r'(t_0 + \Delta t) = r'_0 + r''_0 \Delta t + \varepsilon(\Delta t) \Delta t,$$

donde $\varepsilon(\Delta t)$ es una magnitud vectorial tal que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Por tanto,

$$|\sin \varphi| = \frac{|r'_0 \times r'_0 + r'_0 \times r''_0 \Delta t + r'_0 \times \varepsilon(\Delta t) \Delta t|}{|r'_0| |r'_0 + r''_0 \Delta t + \varepsilon(\Delta t) \Delta t|} = \frac{|r'_0 \times r''_0| + \varepsilon_1(\Delta t)}{|r'_0|^2 + \varepsilon_2(\Delta t)} |\Delta t|,$$

con $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta t) = 0$ y $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2(\Delta t) = 0$.

Por otra parte, usando el teorema del valor medio:

$$s = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} |r'(u)| du = |r'(u^*)| \Delta t,$$

donde u^* es un punto entre t_0 y $t_0 + \Delta t$. Pero, por la continuidad de la función r'

$$|r'(u^*)| \Delta t = |r'_0| \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t,$$

donde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta(\Delta t) = 0$.

Sustituyendo en (3') las expresiones obtenidas para φ y s , llegamos a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \varphi}{s} \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left| \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0 \right| + \varepsilon_1(\Delta t)}{\left[\left| \mathbf{r}'_0 \right|^2 + \varepsilon_2(\Delta t) \right] \left[\left| \mathbf{r}'_0 \right| + \delta(\Delta t) \right]} = \frac{\left| \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0 \right|}{\left| \mathbf{r}'_0 \right|^3}.$$

De este modo hemos probado que:

La curvatura de una curva con parametrización $r = r(t)$, dos veces diferenciable en un punto $r(t_0)$, existe y puede calcularse mediante la expresión $\kappa(t_0) = \frac{\left| \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0 \right|}{\left| \mathbf{r}'_0 \right|^3}$.

Observaciones. 1) En el caso particular cuando la curva esté parametrizada mediante $\rho = \rho(s)$, donde el parámetro s es la longitud de arco, se tiene:

$$1 = \left| \rho'(s) \right|^2 = \rho'(s) \cdot \rho'(s),$$

de donde:

$$\rho'(s) \cdot \rho''(s) = 0.$$

Esto significa que *los vectores $\rho'(s)$ y $\rho''(s)$ son ortogonales*.

Entonces la fórmula para el cálculo de la curvatura se convierte en una expresión muy sencilla,

$$\kappa(s) = \left| \rho''(s) \right|.$$

2) De la definición dada de curvatura, resulta evidente que esta magnitud es independiente de la parametrización de la curva suave escogida para realizar el cálculo.

3) Sea K una curva tal que para todo $s \in [0, L]$, $\kappa(s) = 0$, entonces $\rho''(s) = 0$ y por lo tanto

$$\rho(s) = as + b,$$

donde a y b son constantes. Esto significa que:

Las rectas son las únicas curvas que tienen curvatura cero en todos sus puntos.

Ejemplo 8. Calculemos la curvatura en un punto cualquiera de la circunferencia de radio R dada por $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

En este caso:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-R \sin t, R \cos t) \\ r''(t) &= (-R \cos t, -R \sin t), \end{aligned}$$

así que $|r'(t)| = R$. Esto significa que los vectores r' y r'' son perpendiculares, luego en cualquier punto de la circunferencia se tiene:

$$\kappa = \frac{|r'(t)||r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{1}{R}.$$

Notemos que cuanto mayor es el radio de una circunferencia menor es su curvatura, idea esta que unida a la observación 3 reafirma la idea intuitiva de que las rectas son circunferencias con radio infinito.

Hemos demostrado que las circunferencias (considerando las rectas como circunferencias de radio infinito) tienen curvatura constante en todos sus puntos. Recíprocamente, puede demostrarse que *toda curva plana de curvatura constante es una circunferencia* (ver ejercicio 13).

Ejemplo 9. En el ejemplo 7 vimos que la parametrización de la hélice circular respecto a la longitud de arco viene dada por

$$\rho(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in [0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}].$$

De donde

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \rho''(s) &= \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Por lo que la curvatura de la hélice es:

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Observemos que también la hélice tiene la misma curvatura en todos sus puntos. Sin embargo, resulta intuitivamente claro que, a diferencia de la circunferencia, ella no tiene todos sus puntos sobre un mismo plano. ¿Cómo podremos caracterizar a las curvas que no están totalmente situadas en un mismo plano?

5. Plano osculador y torsión de una curva

La curvatura de una curva resulta una buena magnitud para caracterizar el comportamiento de las curvas planas, ella mide cuánto se aleja una curva de una recta, su recta tangente. Pero para las curvas en el espacio, “curvas de doble curvatura” como las llamó Clairaut, era necesario medir, además, en cuánto se alejan de ser una curva plana. Primero se introdujo el **plano osculador** que podía pensarse, como el plano sobre el cual estaba situado un “pequeño arco” de esta curva. Después se consideró la **torsión**, una forma de medir cómo la curva se aleja de este plano.

Johann Bernoulli (1667-1748) introdujo el término de plano osculador de una curva y lo imaginaba definido por tres puntos de la curva que fueran “consecutivos”. Euler dedujo la forma de la ecuación del plano osculador considerándolo como determinado por el centro de curvatura y el ángulo formado por dos tangentes “vecinas”.

La magnitud que mide el alejamiento de la curva de su plano osculador y que hoy denominamos torsión la introdujo Michel Ange Lancret, discípulo del gran geómetra Gaspard Monge. Para ello Lancret consideró, tres direcciones fundamentales en un punto de una curva. La primera de ella es la **tangente**. Dos tangentes sucesivas determinan el plano osculador, donde considera la dirección perpendicular a la tangente, esto es, la dirección **normal principal**. Por último, la dirección perpendicular al plano osculador es la **binormal**. Entonces Lancret, para medir la variación de la binormal respecto a la longitud de arco de la curva, introdujo la *flexión de planos osculadores sucesivos o de binormales sucesivas*. Esta flexión es la actual torsión de una curva en un punto.

Seguidamente veremos definiciones actuales de plano osculador y de torsión. Sugerimos al lector que compare estas definiciones con las ideas informales comentadas anteriormente y compruebe que son “traducciones” de las mismas al lenguaje matemático contemporáneo.

Establezcamos el convenio siguiente: dado un plano fijo Π_0 , diremos que **un plano variable Π tiende a Π_0** cuando el ángulo entre sus vectores normales tiene límite cero.

Sea una curva K suave dada por una parametrización $r = r(t)$, $t \in [a, b]$ y fijemos un punto P de K , correspondiente al valor del parámetro t_0 . Denotemos por PQ la tangente a K en el punto P , tomemos un punto M sobre K dado por el valor del parámetro $t_0 + \Delta t$ y consideremos el plano PQM determinado por la recta PQ y el punto M (Fig. 7).

Definición 6. Llamaremos **plano osculador** de K en el punto P al plano Π al cual tiende el plano PQM cuando el punto M tiende a P , es decir, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (hemos supuesto que este límite existe).

Demostremos que una curva suave K , con parametrización $r = r(t)$ dos veces derivable en $[a, b]$, tiene plano osculador en todos los puntos donde su curvatura no sea nula.

◆ En lo que sigue utilizaremos las notaciones introducidas en el estudio de la curvatura.

El plano PQM está determinado por las rectas PQ y PM , luego un vector normal a este plano es $r'_0 \times \Delta r$, donde $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = r - r_0$.

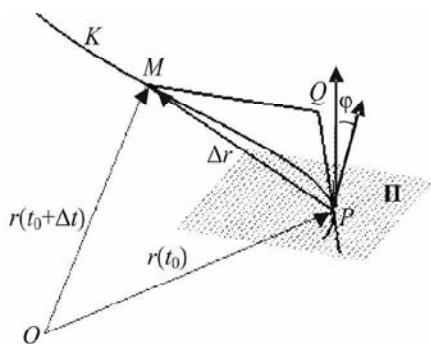


FIGURA 7.

Haciendo uso de la fórmula de Taylor, podemos escribir este vector normal en la forma

$$\begin{aligned} r'_0 \times \Delta r &= r'_0 \times \left[r'_0 \Delta t + \frac{1}{2} r''_0 \Delta t^2 + \varepsilon(\Delta t) \Delta t^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} [r'_0 \times r''_0 + \varepsilon_1(\Delta t)] \Delta t^2, \end{aligned}$$

de modo que el vector $[r'_0 \times r''_0 + \varepsilon_1(\Delta t)]$ es también perpendicular al plano PQM . Este último vector tiende a $r'_0 \times r''_0$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Si la curvatura en P es diferente de cero, entonces el vector $r'_0 \times r''_0 \neq 0$ determinará un único plano que pasa por P y es perpendicular a él. ♦

De este modo hemos demostrado que:

Si una curva suave K tiene parametrización $r = r(t)$ dos veces derivable, entonces, en todo punto P de curvatura no nula, el plano que pasa por P y es ortogonal al vector $r'_0 \times r''_0$ es el plano osculador de K en P .

Escribamos en forma explícita la ecuación del plano osculador a la curva K en el punto correspondiente al valor t_0 del parámetro. Sea el vector de posición de un punto cualquiera del plano osculador, entonces los tres vectores $R - r_0$, r'_0 y r''_0 están en ese plano. Por tanto, la ecuación del plano osculador es:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo 10. Hallemos el plano osculador a la hélice dada por $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, en un punto arbitrario. En este caso:

$$r'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$r''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Así que la ecuación del plano osculador en el punto correspondiente al valor t del parámetro será:

$$\begin{vmatrix} X - a \cos t & Y - a \sin t & Z - bt \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir:

$$b \sin t X - b \cos t Y + aZ - abt = 0.$$

En la Fig. 8 se muestran los planos osculadores a la hélice en varios puntos de la curva y puede observarse su variación a lo largo la misma.

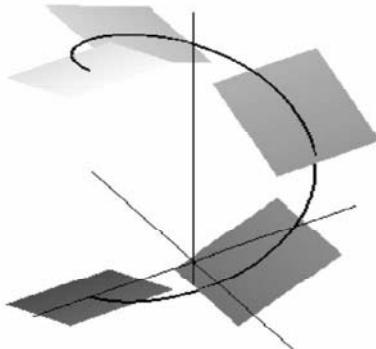


FIGURA 8.

Observación. Si una curva K está totalmente situada en un plano, entonces la recta tangente a K en un punto P y otro punto M cualquiera en la curva estarán situados siempre sobre un mismo plano, el plano de la curva. Por tanto, el plano osculador a K en todos sus puntos es el mismo y coincide con el plano de la curva. Puede demostrarse que el recíproco es cierto, es decir, si una curva tiene un mismo plano osculador P en todos sus puntos, entonces la curva es plana y está situada sobre el plano Π (ejercicio 14).

En el ejemplo 10 vimos que la ecuación del plano osculador de la hélice es diferente para diferentes valores de t y, por tanto, depende del punto que se esté considerando. Luego, teniendo en cuenta la observación anterior, podemos concluir que la hélice no es una curva plana.

Cuando una curva K es plana, además de la dirección tangente en un punto P , dada por el vector T , podemos considerar la **recta normal** a la curva en P , esto es, la recta que pasa por P , está situada sobre el plano de la curva y es perpendicular a la tangente en P . Para una curva K en el espacio, es natural considerar infinitas normales en P , todas ellas situadas en un plano, el **plano normal** a la curva en P . Dentro de estas infinitas direcciones normales dos se destacan por su utilidad:

La normal a la curva situada en el plano osculador que se denomina **normal principal** de K en P y la normal que es perpendicular al plano osculador, llamada **binormal** de K en P (Fig. 9)

Resulta un ejercicio sencillo de geometría analítica la determinación de las ecuaciones del plano normal y las rectas normal principal y binormal a una curva.

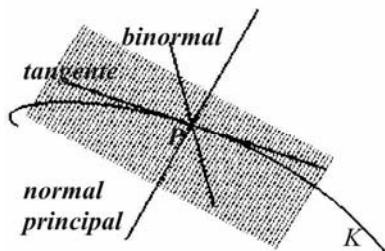


FIGURA 9.

Las tres rectas, tangente, normal principal y binormal determinan tres direcciones mutuamente perpendiculares que, en general, varían a lo largo de la curva. El triedro móvil anterior fue introducido por Gaston Darboux en 1887 y se denomina **triedro natural** de la curva. Más adelante veremos el porqué este triedro desempeña un papel muy importante dentro del estudio diferencial de las curvas.

A continuación caracterizaremos la forma en que la curva “se separa” de su plano osculador en un punto dado.

Consideremos una curva suave K , representada por $r = r(t)$ y P un punto de K correspondiente al valor t_0 del parámetro. Denotemos por M el punto de K correspondiente a $t_0 + \Delta t$, por φ el ángulo formado por las direcciones binormales a K en los puntos P y M y por s la longitud del arco PM .

Definición 7. Si existe el límite:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{s}$$

lo llamaremos **torsión absoluta** de la curva K en el punto P .

Observación. La torsión absoluta en un punto de una curva mide la velocidad con que varía el plano osculador en una vecindad de dicho punto, por tanto, indica cuán rápidamente se aleja esta curva de su plano osculador o cuán “alabeada” ella resulta. Es claro que si la curva es plana, el plano osculador no varía y por tanto, la torsión es cero en todo punto.

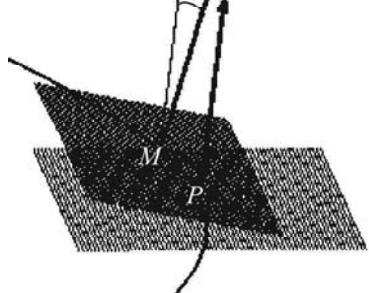
A continuación veremos que:

Una curva suave K , que posea una parametrización tres veces diferenciable, tiene torsión absoluta en todo punto donde la curvatura sea no nula.

- ◆ Al igual que antes, supondremos que a los puntos P y M de la curva le corresponden los valores del parámetro t_0 y $t_0 + \Delta t$, respectivamente y mantendremos los convenios anteriores de notación para r y sus derivadas.

Las normales a los planos osculadores en P y M se determinan por los vectores $r'_0 \times r''_0$ y $r' \times r''$ respectivamente (Fig. 10), luego:

$$|\operatorname{sen} \varphi| = \frac{|(r'_0 \times r''_0) \times (r' \times r'')|}{|r'_0 \times r''_0| |r' \times r''|}. \quad (4)$$



Usando la fórmula de Taylor y teniendo en cuenta que:

$$(r' \times r'')' = r'' \times r'' + r' \times r''' = r' \times r''',$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} r' \times r'' &= (r' \times r'')(t_0 + \Delta t) = \\ &= r'_0 \times r''_0 + (r'_0 \times r''_0) \Delta t + \varepsilon(\Delta t) \Delta t, \end{aligned}$$

FIGURA 10.

donde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Por tanto:

$$|(r'_0 \times r''_0) \times (r' \times r'')| = |(r'_0 \times r''_0) \times (r'_0 \times r'''_0)| \Delta t + \varepsilon_1(\Delta t) \Delta t,$$

con $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta t) = 0$.

Haciendo uso de la conocida identidad vectorial $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$, obtenemos

$$|(r'_0 \times r''_0) \times (r' \times r'')| = |r'_0 (r'_0 \times r''_0 \cdot r'''_0) \Delta t| + \varepsilon_1(\Delta t) \Delta t. \quad (5)$$

Similarmente tenemos que:

$$|r'_0 \times r''_0| |r' \times r''| = |r'_0 \times r''_0|^2 + \varepsilon_2(\Delta t) \Delta t, \quad (6)$$

donde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2(\Delta t) = 0$.

Sustituyendo las expresiones (5) y (6) en (4), se obtiene

$$|\operatorname{sen} \varphi| = \frac{|r'_0 (r'_0 \times r''_0 \cdot r'''_0) \Delta t| + \varepsilon_1(\Delta t) \Delta t}{|r'_0 \times r''_0|^2 + \varepsilon_2(\Delta t) \Delta t}.$$

Procediendo de forma similar a como lo hicimos para la fórmula de la curvatura, llegamos finalmente a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi}{s} \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\operatorname{sen} \varphi}{s} \right| = \frac{|r'_0 \times r''_0 \cdot r'''_0|}{|r'_0 \times r''_0|^2},$$

es decir, la torsión absoluta existe y vale:

$$\frac{|r'_0 \times r''_0 \cdot r'''_0|}{|r'_0 \times r''_0|^2}. \quad \blacklozenge$$

Denominaremos **torsión** de K en P al número:

$$\tau = \frac{r'_0 \times r''_0 \cdot r'''_0}{|r'_0 \times r''_0|^2}. \quad (7)$$

De este modo hemos demostrado el resultado siguiente:

Si K es una curva con parametrización $r = r(t)$, $t \in [a, b]$, tres veces diferenciable, entonces, en todo punto r_0 de curvatura no nula, existe la torsión de K y se calcula por la expresión (7).

Ejemplo 11. Calculemos la torsión en un punto cualquiera de la hélice circular

$$r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Como

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ r''(t) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ r'''(t) &= (a \sin t, -a \cos t, 0), \end{aligned}$$

se tiene que:

$$|r' \times r''|^2 = a^2(a^2 + b^2) \quad \text{y} \quad r' \times r'' \cdot r''' = a^2 b,$$

luego la torsión es la misma en todos los puntos y vale:

$$\tau = \frac{b}{(a^2 + b^2)}.$$

6. Fórmula de Serret-Frenet

En sus *Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría* (1826), para precisar muchos de los conceptos estudiados anteriormente, Cauchy hace uso del lenguaje de las derivadas, en lugar del tradicional de los diferenciales. Realmente el estilo con que trabaja Cauchy es muy próximo a la forma en que lo hemos expuesto, solo que Cauchy no poseía las herramientas vectoriales, lo cual hace las notaciones y algunos cálculos más largos y enrevesados.

Otro aporte importante de Cauchy al estudio diferencial de las curvas es que expresó, en términos de la curvatura y la torsión, la variación que experimentan las direcciones tangente y binormal a lo largo de la curva. De forma independiente de Cauchy, estas relaciones fueron obtenidas también por otros dos matemáticos, Joseph Alfred Serret (1819-1885) y Frédéric-Jean Frénet (1816-1900) (publicado en 1851 y 52 respectivamente). Ellos completan estas expresiones, encontrando también una relación para expresar la variación de la dirección normal principal. Estas fórmulas se conocen actualmente como Fórmulas de Serret-Frénet.

En la época de Cauchy, Serret y Frenet, no se había introducido el lenguaje de los vectores, por lo que en total eran necesaria nueve fórmulas para poder expresar las derivadas de los tres cosenos directores de cada una de las tres direcciones: tangente, normal principal y binormal. Nosotros expresaremos estas variaciones en términos de las derivadas de los vectores unitarios correspondientes a estas direcciones.

Supongamos que está dada una curva suave K mediante la parametrización $r = r(s)$, donde s representa la longitud de arco y r tiene derivada hasta el orden tres.

Entonces, $T = r'(s)$ es el vector unitario tangente a K en el punto P correspondiente al valor s del parámetro. Además, si la curvatura en P es no nula, el vector $r''(s)$ es ortogonal a T .

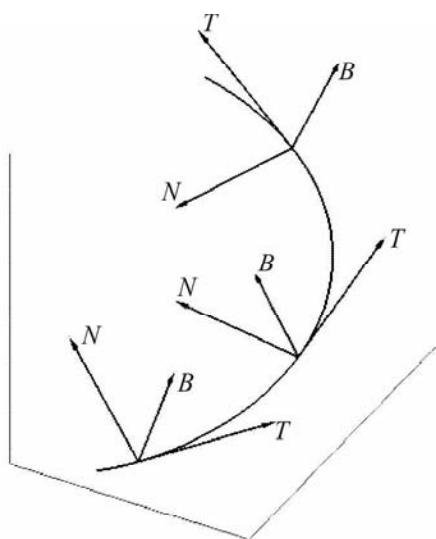


FIGURA 11.

Denotemos por N al vector unitario en la dirección normal principal que posee el mismo sentido del vector $r''(s)$. En la dirección binormal consideremos el vector unitario B dado por

$$B = T \times N \quad (\text{Fig. 11}).$$

Así definidos, el trío de vectores T, N, B constituyen una terna derecha, es decir, satisfacen

$$T \times N \cdot B > 0 .$$

Estos vectores son funciones de la longitud de arco s y, por tanto, varían en cada punto de la curva. La manera más clara de determinar la forma de su variación es mediante las derivadas de estos vectores.

Como $T(s) = r'(s)$, entonces $T'(s) = r''(s)$ es colineal con N . Por otra parte, $|r''(s)| = \kappa(s)$, así que:

$$T' = \kappa N . \quad (8)$$

El vector B es unitario, luego B' es ortogonal a B . Probemos que B' es también ortogonal a T . Si derivamos en la igualdad $B \cdot T = 0$, obtenemos:

$$B' \cdot T + B \cdot T' = 0 .$$

Pero, de (8) se tiene que $B \cdot T' = \kappa B \cdot N = 0$. Por tanto $B' \cdot T = 0$ y queda demostrado que el vector B' es ortogonal a T .

Al ser B' ortogonal a B y a T , entonces es colineal con N , esto es:

$$B' = \pm |B| N .$$

Luego debemos encontrar $|B'|$ y determinar cual de los signos + o - es el adecuado en la expresión anterior. Se puede ver fácilmente que:

$$|B'| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{B(s + \Delta s) - B(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi}{\Delta s} \right| = |\tau|,$$

donde hemos denotado por φ el ángulo formado por los vectores binormales en los puntos correspondiente a los valores del parámetro s y $s + \Delta s$, es decir, es el ángulo entre los planos osculadores en dichos puntos.

Supongamos que tiene lugar el signo +, entonces el vector B' tendrá el mismo sentido que N y puede verse fácilmente que, en este caso los vectores r', r'', r''' forman una terna de sentido opuesto a la terna T, N y B , por lo que $(r' \times r'') \cdot r''' < 0$, esto es, $\tau < 0$. Un razonamiento semejante puede hacerse para el caso en que se tenga el signo negativo. De manera que obtenemos la relación:

$$B' = -\tau N. \quad (9)$$

Para encontrar la expresión para N' , derivemos la igualdad $N = B \times T$ y apliquemos las relaciones (8) y (9):

$$N' = B' \times T + B \times T' = -\tau N \times T + \kappa B \times N = -\kappa T + \tau B.$$

El sistema de ecuaciones formado por (8), (9) y la ecuación anterior:

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ B' = -\tau N \\ N' = -\kappa T + \tau B \end{cases}$$

se conoce como **fórmulas de Serret-Frenet** o **fórmulas fundamentales de la teoría de las curvas**.

De las fórmulas de Serret-Frenet es inmediato que, si son conocidas la curvatura y la torsión de una curva, entonces pueden hallarse las derivadas de las funciones vectoriales T, N y B , es decir, la forma en que varía el triángulo natural. Cabe entonces plantearse la posibilidad de que la curvatura y la torsión de una curva determinen completamente la curva. En realidad tiene lugar el resultado siguiente, que no probaremos, pues requiere de recursos matemáticos que salen de los estudiados en el presente libro:

Si $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ son funciones diferenciables tales que $\kappa(s) > 0$, entonces existe una curva, única excepto por su posición en el espacio, para la que $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son respectivamente sus curvatura y torsión en función de la longitud de arco s .

Ejercicios propuestos

1. Demuestra las propiedades de la derivación de las funciones vectoriales, enunciada en 1.
2. Sean $r = r(t)$, $t \in [a,b]$ y $\rho = \rho(u)$, $u \in [c,d]$ dos parametrizaciones equivalentes de una curva suave K . Prueba que la longitud de K es una magnitud independiente de la parametrización que se escoja para su cálculo.
3. Sea K una curva rectificable dada por la parametrización $r = r(t)$, $t \in [a,b]$. Prueba que:
 - a) Si $[c,d] \subset [a,b]$, entonces el arco dado por $r = r(t)$, $t \in [c,d]$ es rectificable.
 - b) Si $c \in (a,b)$ y los arcos K_a y K_b están dados respectivamente por las parametrizaciones $r(t)$, $t \in [a,c]$ y $t \in [c,b]$, entonces:

$$l(K) = l(K_a) + l(K_b).$$

4. Calcula la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^3 = x^2$ que está dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq 6$.
5. Prueba que el arco de la parábola $y = \frac{x^2}{2p}$, $x \in [0,a]$ tiene la misma longitud que el arco de espiral $\rho = p\theta$, $\rho \in [0,a]$.
6. Demuestra que la longitud del arco de sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, correspondiente al período del seno, es igual a la longitud de la elipse cuyos semiejes son iguales a $\sqrt{2}$ y 1.
7. Demuestra que la curva dada por:

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,1]$$

no es rectificable, mientras que si lo es la dada por:

$$y = x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,1].$$

8. Encuentra las ecuaciones de las rectas normal principal y binormal a una curva K .

9. Halla la curvatura en un punto arbitrario de las curvas dadas por:

a) $y = ax^3$, b) $y = a \cosh \frac{x}{a}$,

c) $\rho = a\varphi$, d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, e) $\rho = e^{a\varphi}$,

f) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

10. Halla la curvatura, la torsión y los vectores T, N, B para la curva dada por:

a) $r(t) = (t, t^2, t^3)$, en el punto $t = 0$,

b) $r(t) = \left(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right)$, en el punto $t = \pi$,

c) $r(t) = (3t \cos t, 3t \sin t, e^t)$, en un punto t arbitrario.

10. Halla el punto de la parábola $y^2 = 2px$ donde el radio de curvatura es mínimo.

11. Halla la curvatura y la torsión en el punto correspondiente a $x = 3a$ para la curva dada por:

$$3ay = x^2, \quad 2xz = a^2.$$

12. Determina la recta tangente, el plano osculador y el plano normal a las curvas dada por:

a) $r(t) = (t, t^2, t^3)$ en el punto $(2, 4, 8)$,

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, en un punto cualquiera,

c) $\begin{cases} 3x^2y + y^2z = -2 \\ 2xz - x^2y = 3 \end{cases}$, en un punto cualquiera.

13. Sea K una curva tal que en todos sus puntos la torsión τ es cero y la curvatura κ es una constante. Prueba que K es una circunferencia de radio $1/\kappa$.

14. Prueba que si una curva tiene en todos sus puntos el mismo plano osculador Π , entonces la curva es plana y está situada sobre el plano Π .

15. Supongamos que la función vectorial $r = r(t)$ es derivable y no nula para $t \in (a,b)$. Prueba que la dirección del vector $r(t)$ es constante si y solo si los vectores $r(t)$ y $r'(t)$ son colineales.
16. Sea $r = r(t)$ derivable en $t_0 \in (a,b)$. ¿Será derivable en t_0 la función dada por $|r| = |r(t)|$? ¿Serán ciertas en dicho punto las igualdades:

$$|r'| = |r|' \text{ y } r \cdot r' = |r||r'|?$$

17. ¿Qué condiciones pueden imponérsele a la matriz $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ para que sea plana la curva dada por la parametrización $r = r(t)$, donde:

$$r(t) = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}?$$

18. La curva llamada **loxodrómica** tiene por ecuación:

$$\varphi = a \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right),$$

donde θ es la latitud y φ es la longitud de un punto sobre la esfera. Demuestra que ella corta a los meridianos de la esfera bajo el ángulo α cuya tangente es igual a a .

19. Sea K una curva representada por $r = r(t)$, $t \in (a,b)$ y con curvatura $\kappa \neq 0$ en un punto P . Se denominan respectivamente **radio** y **centro de curvatura** de K en P al número $R = 1/\kappa$ y al punto C situado sobre la normal principal a una distancia R de P y del lado que indica el vector N . La circunferencia que pasa por P , tiene el centro situado en C y radio R se denomina **circunferencia de curvatura**.
- Halla las coordenadas del centro de curvatura de K .
 - Halla la ecuación de la circunferencia de curvatura de K .
 - Una curva Γ se llama **evoluta** de K si es el lugar geométrico de los centros de curvatura de K . Demuestra que la evoluta de K tiene como representación

$$\rho(t) = r(t) + \frac{1}{\kappa^2} \frac{s' r'' - s'' r'}{(s')^3},$$

donde $s' = |r'|$.

- d) Prueba que para una curva plana dada por $r = r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, las coordenadas del centro de curvatura vienen dadas por:

$$\xi = x - y \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}.$$

20. Halla el radio de curvatura y la evoluta de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0.$$

21. Prueba que la evoluta de una cicloide es también una cicloide que se diferencia de la dada solo por la posición.

PARTE II

CÁLCULO INTEGRAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN

Cuando rastreamos en la historia de la Matemática en busca de las primeras nociones relacionadas con la integración de funciones de más de una variable, nos encontramos que el desarrollo de las técnicas integrales está indisolublemente ligado al de las diferenciales. En el perfeccionamiento de ambos tipos de métodos encontramos a los mismos protagonistas, quienes armonizarán ingeniosamente el uso de las herramientas diferenciales e integrales en la resolución de los problemas más urgentes de la época. Sin embargo, el posterior desarrollo del análisis matemático y sus aplicaciones, provocó una diferenciación entre sus distintas ramas, con la consiguiente aparición de un cuerpo de conceptos y metodologías específicas a cada una. Esta segunda parte del libro la dedicaremos a estudiar las nociones y herramientas fundamentales relacionadas con el cálculo integral de las funciones de varias variables, no obstante, en ella haremos uso de muchas de las definiciones y métodos de trabajo ya estudiados en la primera parte.

Desde fines del siglo XVII ya se habían resuelto algunos problemas que requerían de la integración de expresiones que involucraban dos variables. En términos generales el método que se seguía era la integración sucesiva respecto a cada una de las variables. Será Alexis Clairaut quien exponga sistemáticamente esta técnica en su libro *Investigación sobre las curvas de doble curvatura* (1731) y muestre su utilidad en el cálculo de volúmenes de cuerpos limitados por superficies cilíndricas, así como las áreas de las superficies fronteras.

Para calcular el volumen de la región entre dos superficies cilíndricas representadas por las ecuaciones $y = f(x)$, $z = g(y)$, Clairaut encontró que el elemento de volumen está dado por $dx \int z dy$. Entonces, usó las ecuaciones de la superficie cilíndrica para escribir z y dy en términos de x , de modo que pudiera integrar $z dy$. Con el elemento de volumen dado enteramente en términos de x pudo calcular el volumen deseado.

La primera exposición detallada del concepto de integral doble se debe a Euler quien lo publica en 1769. Comienza con una generalización del concepto

integral como una antiderivada. De modo que $\int Z dx dy$ debía significar una función de dos variables que al diferenciarla dos veces, primero solo con respecto a x y después solo con respecto a y , debía dar como resultado $Z dx dy$. Como un ejemplo sencillo, observa que $\int adx dy = axy + X + Y$ (a constante), donde X es una función solamente de la variable x y Y solo es función de y . Entonces Euler muestra cómo utilizar esta técnica para el cálculo de volúmenes de cuerpos en el espacio y áreas de las superficies que los limitan.

Durante todo el siglo XVIII y buena parte del XIX, motivados fundamentalmente por las necesidades de la física, se desarrollarán técnicas para la integración de funciones no solo de dos sino también de mayor cantidad de variables. Por ejemplo, Lagrange consideró las integrales de funciones de tres variables en relación con el estudio de la atracción de un esferoide. Por esta razón la integración múltiple, más que un concepto en sí, representaba un conjunto de herramientas idóneas para la resolución de gran cantidad de problemas, tanto de la propia matemática como de la física. En estas herramientas se entremezclaban el concepto integral de una función de varias variables con los métodos fundamentales utilizados para calcular estas integrales: **la reducción a integrales simples y la realización de transformaciones de coordenadas**.

Desde la década del 20 del siglo XIX se le había dedicado mucha atención a la noción de integral para funciones de una variable: Cauchy había definido la integral de las funciones continuas como límite de las sumas integrales, Riemann había propuesto una definición para “funciones arbitrarias”, lo que atrajo la atención de muchos matemáticos, quienes se dedicaron a desarrollar la teoría de integración para funciones de una variable. Por otra parte, desde el siglo anterior, la integración múltiple se había mostrado un instrumento muy útil en la resolución de gran cantidad y variedad de problemas. Sin embargo, durante la primera mitad del siglo XIX, los matemáticos continuaron tratando a las integrales múltiples de forma semejante a como lo hacía Euler. No es hasta fines del siglo XIX que aparece una teoría satisfactoria para el tratamiento de la integral múltiple.

Para las funciones de una variable, los conjuntos naturales sobre los cuales se realizaba la integración eran los intervalos, sin embargo, para funciones de dos variables resultaba de interés considerar no solo rectángulos, sino también otros conjuntos con una estructura más complicada y, para estos conjuntos, la formación de las “sumas integrales” presentaba problemas relacionados con la “medición de conjuntos”. La necesidad de medir los conjuntos de puntos y muy especialmente la posibilidad de precisar cuáles conjuntos del espacio tenían, para los fines de la integración, “una cantidad despreciable de puntos” está

relacionada también con otro problema perteneciente a la teoría de la integración, inclusive para funciones de una variable: **la existencia de la integral**.

Con la publicación (1867, *postmorten*) de la memoria de Riemann, donde da una definición de integral aplicable tanto a funciones continuas como a muchas discontinuas, se abrió una nueva problemática: la determinación de cuáles funciones son integrables y cuáles no. El propio Riemann enunció condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integrable en términos de la “pequeñez” del conjunto de los puntos de discontinuidad. Esta idea de Riemann atrajo la atención de la comunidad matemática y, como consecuencia, en la década del años 80, aparecieron una serie de definiciones, cuyo propósito era caracterizar la integrabilidad de una función en términos de lo que hoy llamaríamos “medida”. Destaquemos dos de estas definiciones que por el grado de desarrollo y la coherencia de los resultados obtenidos trascendieron la época en que fueron introducidas.

En 1887 Giuseppe Peano publica el libro *Aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal*, donde expone en forma sistemática sus ideas relacionadas con la definición de longitud, área y volumen de conjuntos en la recta, el plano y el espacio respectivamente. De esta forma Peano, no solo define estas magnitudes geométricas que carecían de una formulación matemática precisa, sino también relaciona el problema de la medición de conjuntos con el cálculo de integrales.

Algo más tarde, Camille Jordan, cuando labora en la segunda edición de su famoso texto para la Escuela Superior Politécnica, *Curso de Análisis* (1893), se interesa por generalizar al caso de funciones de varias variables, las ideas de Rieman sobre la integración de funciones, y por demostrar rigurosamente las propiedades básicas. Con este propósito introduce una forma de medición de conjuntos en \mathbf{R}^n , parecida a la expuesta por Peano, y así define lo que hoy conocemos como **extensión (étendue)** o **contenido de Jordan**. El libro de texto de Jordan será obra obligada de referencia para la generación de matemáticos franceses que van a desarrollar su trabajo a finales del siglo XIX y principios del XX. En particular va a ejercer influencia en los dos matemáticos a quienes debemos la teoría por antonomasia de la medida y la integración, Emile Borel y muy especialmente Henri Lebesgue. Este último, refiriéndose al surgimiento de la teoría de funciones, afirmó que “el nombre de Jordan quedaría eternamente asociado al del genial Riemann”.

Lebesgue dará una noción de medida más general que la de Jordan, lo cual le permitirá caracterizar elegantemente a las funciones integrables según Riemann. Pero Lebesgue va mucho más lejos: da una nueva definición de

integral y demuestra que es más general que la de Riemann. La noción de medida de un conjunto y la integración en el sentido de Lebesgue rebasa los objetivos que nos hemos propuesto en este texto y no los expondremos. Sin embargo, estudiaremos la idea fundamental que sirvió para caracterizar los conjuntos “insignificantes” en la definición de integral. El concepto **conjunto de medida nula**, introducido por Lebesgue, resulta muy útil para expresar una condición necesaria y suficiente de integrabilidad de una función, en el sentido de Riemann.

La posibilidad de integración de una función de varias variables no se limita a lo que hoy denominamos integrales múltiples. También han resultado de mucho interés en las aplicaciones del análisis, especialmente a la física, la integración de funciones definidas sobre curvas o superficies en el espacio euclídeo. Por ello, en el Cáp. VII hemos expuesto algunas de las nociones clásicas de la integración de funciones sobre curvas en \mathbf{R}^n , fundamentalmente para los casos $n = 2,3$, y de la integración sobre superficies en \mathbf{R}^3 .

CAPÍTULO V

CONCEPTO INTEGRAL MÚLTIPLE

INTRODUCCIÓN

El primer ejemplo que dio Euler de aplicación de la integración de una función de dos variables fue al cálculo del volumen de un octante de la esfera de radio a . Veamos cómo razonaba Euler:

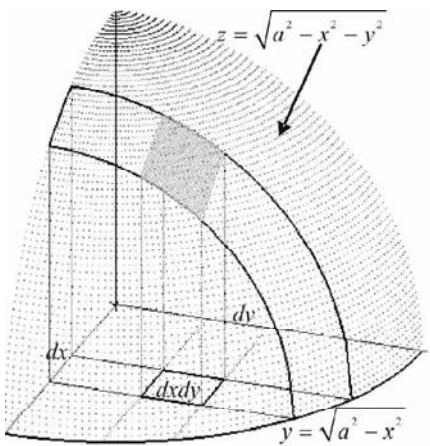


FIGURA 1.

remplaza y por $\sqrt{a^2 - x^2}$ y obtiene para el volumen de la pieza la fórmula

$\frac{\pi}{4}(a^2 - x^2)dx$. La integración de esta expresión respecto a x le da como resultado

$\frac{\pi}{4}(a^2x - x^3/3)$, lo cual representa el volumen de la porción de octante que

$$dx dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (\text{Fig. 1}).$$

Esta es la función que debe ser integrada. Euler mantiene x constante e integra respecto a y , así calcula el volumen de una pieza de la esfera con base en el “rectángulo” de dimensiones dx y y . Seguidamente

va desde el plano YZ hasta el plano paralelo a éste y situado a x unidades del primero. Entonces reemplaza x por a para dar el volumen del octante: $\frac{\pi}{6}a^3$.

El razonamiento anterior es una extensión al cálculo de volúmenes de la forma en que, mediante una sola integración, se operaba en la época para el cálculo del área de un trapecio curvilíneo, esto es, una figura plana, con base en el eje X y limitada superiormente por el gráfico de una función de la forma $y = f(x)$.

Precisamente, introduciremos la noción de integral de una función de dos variables, mediante el problema del cálculo del volumen de un tipo de cuerpo sólido que generaliza al espacio la idea de trapecio curvilíneo.

Sea f una función positiva y continua sobre un cierto conjunto Q de \mathbf{R}^2 , que, para simplificar los razonamientos, supondremos un rectángulo situado sobre el plano XY . Nos interesa calcular el volumen V del sólido cilíndrico con base Q , limitado superiormente por la superficie $z = f(x,y)$, $(x,y) \in Q$ y lateralmente por los cuatro planos levantados perpendicularmente sobre los lados de Q (Fig. 2).¹

Dividamos el rectángulo Q mediante rectas paralelas a los ejes X y Y en subrectángulos Q_1, \dots, Q_m y consideremos las “columnas cilíndricas” con base en

los rectángulos Q_k y limitadas superiormente por la porción correspondiente de superficie. La unión de estas columnas da como resultado el cuerpo al que queremos calcular el volumen. Entonces es claro que, la suma de los volúmenes de estas columnas es igual al volumen V que nos interesa calcular.

Por otra parte, si suponemos que el diámetro de los Q_k es suficientemente pequeño y tomamos puntos $(\xi_k, \eta_k) \in Q_k$, se tiene la aproximación

$$f(x, y) \approx f(\xi_k, \eta_k), \quad (x, y) \in Q_k$$

(hemos supuesto f continua).

¹ En el ejemplo 4 de V.3 se demostrará que, con las condiciones fijadas para f , este volumen queda perfectamente definido.

De modo que podemos aproximar el volumen de la columna con base Q_k por el volumen del ortoedro de base Q_k y altura $f(\xi_k, \eta_k)$, es decir por el número:

$$f(\xi_k, \eta_k) A(Q_k),$$

donde $A(Q_k)$ denota el área del rectángulo Q_k . Por tanto, para el volumen V encontramos la estimación:

$$V \approx \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k) A(Q_k).$$

Es intuitivamente evidente que, cuando la cantidad de rectángulos Q_k aumenta y sus dimensiones se hacen cada vez más pequeñas, la aproximación anterior será cada vez mejor. Por tanto, resulta natural considerar:

$$V = \text{lím} \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k) A(Q_k),$$

donde el significado de este límite lo precisaremos más adelante.

Al límite de una expresión de este tipo lo denominaremos **integral doble** de f en el rectángulo Q y lo denotaremos:

$$V = \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

Cuando el conjunto donde se realiza la integración es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, resulta muy natural la división del rectángulo: simplemente hemos tomado particiones en los respectivos intervalos de los ejes X y Y . Sin embargo, cualquier otra figura que tomáramos por base, por sencilla que fuera, nos enfrentaría al problema de ¿cómo realizar las divisiones? Por ejemplo, si fuera un círculo, es evidente que los rectángulos no son figuras adecuadas para hacer una división “exacta”, pero ¿qué figura tomar? ¿existe alguna figura sencilla que realice esta división “exacta”?

A fines del siglo XIX, para definir la integral doble de una función f sobre un conjunto cualquiera E , era costumbre dividir el plano en rectángulos por medio de rectas paralelas a los ejes de coordenadas. Esta partición del plano induce una partición de E en regiones. Entonces la integral se concebía como el límite de las sumas de Riemann formadas sobre esta partición, cuando el tamaño de estos rectángulos tiende a cero. Aquí surge el problema ¿se consideran o no en

la suma los rectángulos “fronteras”, es decir, aquellos que contienen tanto puntos de E como puntos que no están en E ? En general se suponía explícita o implícitamente que la consideración de esos rectángulos no ejercía influencia alguna en el valor del límite. Pero la aparición, a fines de la década de los 80, de curvas con un comportamiento sumamente extraño (ver V.3 ejemplo 4) hizo desconfiar de esta suposición. Cuando en 1883 Jordan publica la primera edición de su *Curso de Análisis* asume el punto de vista descrito anteriormente. Sin embargo, 10 años más tarde, en la segunda edición de esta obra, introduce la noción de **extensión (étendue)** o **contenido** de un conjunto en \mathbf{R}^n y, apoyado en ella, define la integral de una función sobre un conjunto arbitrario.

En este capítulo introduciremos el concepto integral múltiple y expondremos los fundamentos teóricos básicos de la integración. Aunque nuestra exposición no reproduce exactamente la forma utilizada por Jordan, sí trataremos de reflejar la esencia de sus ideas fundamentales.

V.1. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN ACOTADA EN UN RECTÁNGULO

Comenzaremos con el estudio de la integral de una función sobre los subconjuntos de \mathbf{R}^n que poseen la estructura más parecida a los intervalos de la recta: los **rectángulos**.

Denominaremos **rectángulo** o **intervalo** en \mathbf{R}^n a un conjunto de la forma

$$I = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \right\},$$

donde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son elementos (en general diferentes) de \mathbf{R}^n . Es decir, un rectángulo en \mathbf{R}^n es el producto cartesiano $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ de n intervalos cerrados en \mathbf{R} .

Al producto $v(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ lo llamaremos **volumen** o **medida** del rectángulo I .

Observaciones. 1) Notemos que, cuando $n = 1$, un rectángulo es un intervalo cerrado $[a, b]$ en la recta y su medida $v([a, b]) = b - a$, no es otra cosa que su **longitud**. Si $n = 2$, entonces los rectángulos, tendrán la forma $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, es decir, rectángulos planos **con lados paralelos a los ejes coordinados** y $v(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$, representará el **área** de este rectángulo. En \mathbf{R}^3 ,

un rectángulo significará un paralelepípedo rectangular de la forma $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, esto es, **con caras paralelas a los planos coordenados** y su volumen $v(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$ es el volumen ordinario de esta figura geométrica.

2) Recalquemos que los conjuntos que hemos denominado “rectángulos” son conjuntos cerrados. Los rectángulos sin considerar su frontera los referiremos como “rectángulos abiertos”.

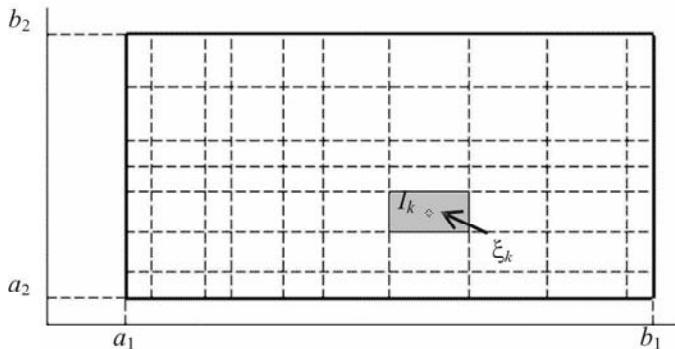


FIGURA 3.

Si está dado un rectángulo $I = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \right\}$ y en cada intervalo componente $[a_i, b_i]$, consideramos una partición P_i , entonces el producto cartesiano:

$$P = P_1 \times \dots \times P_n,$$

determina una **partición** del rectángulo I .

Si P_i divide al intervalo $[a_i, b_i]$ en m_i subintervalos, entonces P producirá en I una división en $m_1 \dots m_n$ subrectángulos (en la Fig. 3 se muestra una partición de un rectángulo en \mathbf{R}^2).

Así que una partición P del intervalo n -dimensional I estará completamente determinada por las particiones realizadas en los intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Al conjunto de todas las particiones del rectángulo I lo denotaremos por $\mathcal{P}(I)$.

Observemos que, si la partición P del rectángulo I es de la forma $P = \{I_k\}_{k=1}^m$, es decir, está formada por m subrectángulos I_k , entonces $I = \bigcup_{k=1}^m I_k$. Además, se comprueba fácilmente que:

$$v(I) = \sum_{k=1}^m v(I_k)$$

Dadas dos particiones P' y P'' del rectángulo I , diremos que **la partición P' es más fina que la partición P''** , si $P' \supset P''$, esto es, cuando todo subrectángulo de P'' también es un subrectángulo de la partición P' .

Consideremos ahora una función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, definida sobre el rectángulo I de \mathbf{R}^n y una partición P de I en m subintervalos I_1, \dots, I_m .

Definición 1. Llamamos **suma de Riemann** de la función f , correspondiente a la partición P , a una suma de la forma:

$$\sum_{k=1}^m f(\xi_k) v(I_k),$$

donde ξ_k es un punto arbitrario del subrectángulo I_k . Esta suma de Riemann la denotaremos por $\sigma(f, P, \{\xi_k\})$ o más brevemente por $\sigma(f, P)$.

Diremos que f es **integrable (Riemann) en el rectángulo I** si las sumas de Riemann $\sigma(f, P, \{\xi_k\})$ “tienen límite”, cuando hacemos las particiones del rectángulo I cada vez más finas y con independencia de la colección de puntos $\{\xi_k\}$ elegida. Más precisamente, cuando se encuentra un número real J que satisface la propiedad siguiente:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de I tal que cuando P es más fina que P_ε , y cualquiera sea la selección de los puntos $\{\xi_k\}$, tiene lugar:

$$|\sigma(f, P, \{\xi_k\}) - J| < \varepsilon.$$

Al número J se le denomina **integral de f en el rectángulo I** y se denota por:

$$\int_I f \quad \text{o} \quad \int_I f(x) dx \quad \text{o también} \quad \int_I f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Al conjunto de todas las funciones integrables en un rectángulo I lo denotaremos por $\mathbf{R}(I)$.

La integral se denominará **múltiple** cuando $n > 1$. Si $n = 2$ y 3 se suelen llamar **integral doble** e **integral triple** respectivamente. Es usual denotar las integrales dobles y triples en la forma:

$$\iint_I f(x, y) dx dy \quad \text{y} \quad \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Ejemplo 1. Sea la función constante $f(x) = c$, definida en el rectángulo I de \mathbf{R}^n . Entonces, para toda partición P de I y toda elección de los $\{\xi_k\}$ se tendrá $\sigma(f, P, \{\xi_k\}) = cv(I)$. Así que f es integrable y además:

$$\int_I f = cv(I).$$

Ejemplo 2. Consideremos la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Cualquiera que sea la partición del cuadrado unidad que se tome, pueden formarse sumas de Riemann iguales a 0, si se toman todos los puntos ξ_k con abscisa irracional y sumas de Riemann iguales a 1, si los ξ_k se seleccionan todos con abscisa racional. Esto significa que la función f no es integrable.

Observación. En la definición de integral, hemos tenido que explicitar lo que se entiende por “límite” de las sumas de Riemann. La razón de ello es que estas sumas dependen de la partición y de la selección de los puntos $\{\xi_k\}$ que se hayan considerado y, por tanto, no constituyen ni una sucesión ni una función definida sobre un espacio métrico, que es el tipo de estructura más general en la cual tenemos definida la noción de límite. El objetivo de esta nota es dar una breve descripción de una concepción de límite más general y que nos permitirá un enfoque unificado de las diversas nociones que hemos definido con anterioridad.

Definición 2. Una colección \mathbf{B} de subconjuntos B de un conjunto arbitrario X se denomina una **base (de filtro)** en X si se satisfacen las condiciones siguientes:

- B1) Todo conjunto $B \in \mathbf{B}$ es no vacío.
- B2) Si $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, entonces existe un conjunto $B \in \mathbf{B}$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$.

Veamos algunos ejemplos de bases que ya conocemos:

- a) Sea la familia $\mathbf{B} = \{B_n\}$ de los conjuntos B_n de la forma $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$. Puede verificarse fácilmente que \mathbf{B} constituye una base para el conjunto \mathbb{N} de los números naturales.
- b) Fijemos un elemento a de un espacio métrico X , entonces la familia $\mathbf{B} = \{B_r\}$ de las bolas con centro en el punto a y radio r constituye una base en el espacio X .
- c) Sea un rectángulo I y consideremos el conjunto $\Pi = \{p\}$ de todos los pares $p = (P, \xi)$, donde P es una partición de I y $\xi = \{\xi_k\}$ es una colección de puntos pertenecientes a cada subrectángulo de P . A p la llamaremos **partición con puntos asociados**. Sea la colección \mathbf{B} de los conjuntos $B_Q = \{p \in \Pi : P \supset Q\}$, donde Q es una partición de I . Nótese que B_Q es el conjunto de todas las particiones con puntos asociados que son más finas que Q . Comprobemos que \mathbf{B} constituye una base en el conjunto Π . En efecto, es claro que ningún conjunto es vacío, ya que $(Q, \xi) \in B_Q$, para cualquier selección de ξ . Además, cualesquiera que sean $B_{Q'} y B_{Q''}$ se cumple que $B_{Q'} \cap B_{Q''} = B_Q$, donde Q se construye considerando en cada intervalo componente de I la unión de las particiones, correspondientes a ese intervalo, que forman a Q' y Q'' . Con esto completamos la verificación de las propiedades B1) y B2).
- d) En el mismo conjunto Π del ejemplo anterior, consideremos la colección $\mathbf{B}' = \{B_d\}$ donde B_d es el conjunto de todas las particiones de I con puntos asociados y tales que el diámetro de todos los subintervalos de la partición es menor que d . Puede comprobarse fácilmente que \mathbf{B}' es también una base en el conjunto Π .

Definición 3. Sea una función $f : X \rightarrow Y$ definida sobre el conjunto X , con valores en un espacio métrico Y y \mathbf{B} una base en X . El elemento $A \in Y$ se llama **límite de la función f según la base \mathbf{B}** si para toda vecindad $V(A)$ de A existe un conjunto $B \in \mathbf{B}$ tal que $f(B) \subset V(A)$.

Para expresar que A es el límite de la función f según la base \mathbf{B} escribimos

$$\lim_{\mathbf{B}} f(x) = A .$$

El límite de una función $x : \mathbb{N} \rightarrow Y$ del conjunto de los números naturales en el espacio métrico Y , según la base del ejemplo a), no es más que el límite de la sucesión $x(n) = x_n$ en el espacio Y .

Análogamente, cuando X es un espacio métrico con la base del ejemplo b), el límite de una función $f : X \rightarrow Y$ no es otra cosa que el límite de la función f en el punto a de X .

Sea I un rectángulo, $\Pi = \{p\}$ el conjunto de las particiones de I con puntos asociados y consideremos en Π la base del ejemplo c). Las sumas de Riemann, $\sigma(f, P, \{\xi_k\})$ pueden ser consideradas como los valores de la función $\sigma : \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ definida en el conjunto de las particiones con puntos asociados. La definición de integral puede, entonces, reformularse como:

La integral de la función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ es el límite:

$$\lim_{B} \sigma(p) = \int_I f.$$

También puede definirse la integral de una función en un rectángulo utilizando la base B' dada en d). Es evidente que si la función σ tiene un límite J según la base B' , entonces también tiene el mismo límite J según la base B . Sin embargo, no resulta evidente que ambas definiciones sean equivalentes, la demostración de lo cual proponemos como ejercicio al lector (ejercicio 4).

Para la noción de límite según una base pueden demostrarse algunas de las propiedades conocidas para el límite. Por ejemplo, las propiedades siguientes son útiles en algunos de los razonamientos que haremos más adelante. Su demostración la proponemos como ejercicio al lector (ver ejercicio 3).

Supongamos que $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ están definidas sobre el conjunto X en el que está dada una base B y existen los límites $\lim_B f(x)$ y $\lim_B g(x)$, entonces:

i) Existe el límite de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ según la base B y

$$\lim_B (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_B f(x) + \beta \lim_B g(x),$$

ii) Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_B f(x) \leq \lim_B g(x)$.

iii) Si la función $h : X \rightarrow \mathbf{R}$ es tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y $\lim_B f(x) = \lim_B g(x) = l$ entonces también $\lim_B h(x) = l$.

En los ejemplos 1 y 2 hemos demostrado, directamente de la definición, la integrabilidad de una función. Sin embargo, esta vía es solo posible con funciones muy sencillas. Por esta razón, desde la aparición de la noción de función integrable, existió la preocupación por encontrar condiciones necesarias y suficientes que permitieran decidir la integrabilidad de una función.

Riemann enunció (publicado *postmortem* en 1867) dos condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de una función sobre un intervalo de la recta real, pero las justificaciones que proporcionó no fueron completamente satisfactorias. Esto motivó una reelaboración de sus ideas y el surgimiento de un conjunto de propuestas para precisarlas y dar condiciones necesarias y suficientes que fueran satisfactorias. Posiblemente el trabajo que más repercutió en la comunidad matemática fue el del francés Gaston Darboux, quien en su monografía *Memoria sobre la teoría de las funciones discontinuas* (1875), introduce las llamadas **sumas superiores e inferiores** correspondientes a una partición del intervalo y , de esta manera, reformula y demuestra rigurosamente la primera de las condiciones dadas por Riemann. Las ideas de Darboux se generalizan, prácticamente sin modificaciones, para las funciones de varias variables y estas ideas constituyen la esencia de lo que expondremos a continuación.

La definición de sumas superiores e inferiores presupone que la función a la que se le aplica sea acotada. Por tanto probemos primeramente que *la acotación es una condición necesaria para que una función sea integrable*.

◆ Supongamos que f no es acotada en I y sea P una partición cualquiera del rectángulo I . Entonces f no será acotada en alguno de los subrectángulos, digamos I_j , de la partición P . Para todo $k \neq j$ fijemos puntos arbitrarios $\xi_k \in I_k$, posteriormente elegiremos de forma conveniente al punto $\xi_j \in I_j$. Podemos escribir:

$$\sigma(f, P, \{\xi_k\}) = \sum_{k \neq j} f(\xi_k)v(I_k) + f(\xi_j)v(I_j).$$

El valor de la sumatoria en el miembro derecho de esta igualdad es independiente de la selección de ξ_j . Como f no está acotada en I_j , podemos escoger ξ_j de modo tal que la suma de Riemann se haga mayor que cualquier número prefijado. Luego, para toda partición P del rectángulo I , pueden seleccionarse puntos $\{\xi_k\}$ tales que la suma de Riemann correspondiente sea tan grande como se quiera, lo cual contradice la definición de integrabilidad de f en I . ◆

De este modo hemos probado el resultado siguiente:

Si f es integrable en el rectángulo I , entonces f es acotada en I .

Como la acotación es necesaria para la integrabilidad de una función, de ahora en adelante, salvo que se aclare explícitamente lo contrario, **todas las funciones con las que trabajaremos las supondremos acotadas.**

Sean la función $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ acotada y $P = \{I_k\}$ una partición de I . Denotemos:

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x),$$

el ínfimo y supremo de la función f en el subrectángulo I_k .

Definición 4. Los números:

$$s(f, P) = \sum_k m_k v(I_k),$$

$$S(f, P) = \sum_k M_k v(I_k),$$

se denominan respectivamente **suma inferior** y **suma superior** (de Darboux) de la función f correspondientes a la partición P .

Observación. Puede darse una interpretación geométrica de las sumas inferior y superior, en el caso de funciones f continuas y positivas en un rectángulo I de \mathbf{R}^2 . La suma inferior corresponde al volumen del sólido poliédrico formado por la unión de los paralelepípedos rectangulares de base I_k y altura m_k , para todos los rectángulos de la partición P (Fig. 4). Este valor constituye una aproximación por defecto del volumen del cuerpo de base I y limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$. Análogamente puede ser interpretada la suma superior.

De las definiciones anteriores, se verifica fácilmente que para una partición P cualquiera tienen lugar las desigualdades siguientes:

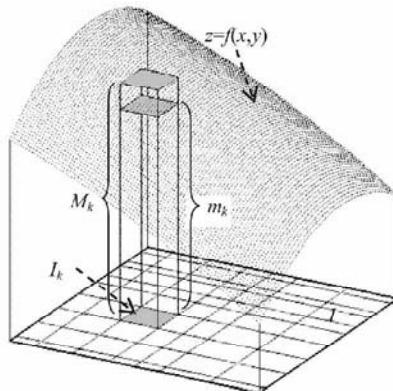


FIGURA 4.

$$s(f, P) = \inf_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \leq \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \leq \sup_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\}) = S(f, P) \quad (1)$$

Consideremos dos particiones P' y P'' tales que P' es más fina que P'' , entonces puede verificarse directamente de la definición 4 que:

$$s(f, P') \geq s(f, P'') \quad \text{y} \quad S(f, P') \leq S(f, P''), \quad (2)$$

es decir, cuando se aumentan los elementos de la partición las sumas inferiores no decrecen y las superiores no crecen.

Sean ahora P' y P'' **particiones completamente arbitrarias del rectángulo I** . Construyamos una partición P , considerando en cada intervalo componente de I la unión de las particiones, correspondientes a ese intervalo, que forman a P' y P'' . Entonces la partición P es más fina que P' y P'' ; aplicando la propiedad anterior, obtenemos

$$s(f, P') \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P''),$$

$$s(f, P') \leq S(f, P''). \quad (3)$$

Luego hemos demostrado que:

Para una función f , toda suma inferior es siempre menor o igual que toda suma superior.

Como consecuencia inmediata de la afirmación anterior se tiene que, el conjunto de todas las sumas inferiores y el de todas las sumas superiores de una función f en un rectángulo I ,

$$\{s(f, P) : P \in \mathbf{P}(I)\} \quad \text{y} \quad \{S(f, P) : P \in \mathbf{P}(I)\}$$

son conjuntos de números reales acotados. El supremo del primer conjunto y el ínfimo del segundo, son sumamente útiles en la investigación de la integrabilidad de una función y en el estudio de las propiedades de la integral.

Definición 5. Dada la función acotada $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, los números:

$$\underline{J} = \sup \{s(f, P) : P \in \mathbf{P}(I)\} \quad \text{y} \quad \bar{J} = \inf \{S(f, P) : P \in \mathbf{P}(I)\}.$$

se denominan respectivamente **integral inferior** e **integral superior** de la función f en el rectángulo I .

Observaciones. 1) Aunque una función acotada no sea integrable en un rectángulo, sus integrales inferior y superior existen siempre. Por ejemplo, conside-

remos la función del ejemplo 2 y una partición P cualquiera del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, entonces:

$$s(f, P) = 0, \quad S(f, P) = 1, \quad \text{luego } \underline{J} = 0 \text{ y } \bar{J} = 1.$$

2) De la definición 5 y de la propiedad (3), sigue inmediatamente que las integrales inferior y superior de una función satisfacen:

$$s(f, P) \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq S(f, P). \quad (4)$$

Un resultado muy útil en el análisis de la integrabilidad de una función es la condición necesaria y suficiente siguiente:

Teorema 1. (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad). Para una función acotada $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ son equivalentes las afirmaciones siguientes:

- a) $f \in \mathcal{R}(I)$.
- b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de I tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
- c) $\underline{J} = \bar{J}$.

◆ Demostremos primeramente que a) \Rightarrow b). Sea f integrable en I y ε un número positivo arbitrario, entonces encontramos una partición P tal que:

$$\left| \sigma(f, P, \{\xi_k\}) - J \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

cualesquiera sean los puntos $\xi_k \in I_k$. Pero esta desigualdad es equivalente a:

$$J - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f, P, \{\xi_k\}) < J + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo uso de (1), tenemos que:

$$s(f, P) = \inf_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \geq J - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sup_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \leq J + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde sigue inmediatamente:

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto significa que se cumple b).

Probemos ahora que $b) \Rightarrow c)$. La relación (4) significa que:

$$0 \leq \bar{J} - \underline{J} \leq S(f, P) - s(f, P).$$

Sea un ε positivo arbitrario, entonces b) nos asegura la existencia de una partición P que cumple:

$$0 \leq \bar{J} - \underline{J} \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

lo cual significa que obligatoriamente $\underline{J} = \bar{J}$ y tiene lugar c).

Finalmente, demostremos que $c) \Rightarrow a)$. Denotemos $J = \bar{J} = \underline{J}$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces, las definiciones de supremo e ínfimo de un conjunto nos permiten afirmar que existen particiones P' y P'' de I tales que:

$$S(f, P') < J + \varepsilon \quad \text{y} \quad s(f, P'') > J - \varepsilon.$$

Luego, en virtud de (1) y (2), para toda partición P más fina que P' y P'' y cualquiera que sea la colección de puntos ξ_k se tiene:

$$J - \varepsilon < s(f, P'') \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \leq S(f, P) \leq S(f, P') < J + \varepsilon,$$

lo que demuestra a).♦

Observación. En un rectángulo I consideremos el conjunto $\Pi = \{P\}$ de todas las particiones P de I y la base \mathbf{B} de los conjuntos $B_Q = \{P \in \Pi : P \supset Q\}$, es decir, los conjuntos de particiones más finas que Q . Entonces, para toda función f definida y acotada en I , se cumple:

$$\underline{J} = \lim_{\mathbf{B}} s(P, f) \quad \text{y} \quad \bar{J} = \lim_{\mathbf{B}} S(P, f).$$

Si f es integrable en I , entonces:

$$\int_I f = \lim_{\mathbf{B}} s(P, f) = \lim_{\mathbf{B}} S(P, f).$$

Un resultado análogo puede obtenerse considerando en \mathbf{P} la base $\mathbf{B}' = \{B_d\}$ de las particiones B_d de I cuyos elementos tienen diámetro menor que d .

Como un ejemplo del uso que puede hacerse de las condiciones del Teorema 1 probemos que:

Si f es continua en un rectángulo I , entonces es f integrable en I .

- ◆ Sea $\varepsilon > 0$ y demostremos que se cumple b) del Teorema 1. La función f es continua en el rectángulo I que es cerrado y acotado luego, f es uniformemente continua en I . Así que existirá $\delta > 0$ tal que:

$$x, y \in I; \|x - y\|_{\infty} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Escojamos una partición $P_{\varepsilon} = \{I_j\}$ del rectángulo I tal que $\text{diam}(I_j) < \delta$. Entonces, para todo j , se cumplirá:

$$x, y \in I_j \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

por tanto $M_j - m_j < \varepsilon$. De donde se obtiene:

$$S(f, P_{\varepsilon}) - s(f, P_{\varepsilon}) = \sum_j (M_j - m_j)v(I_j) < \varepsilon \sum_j v(I_j) \leq \varepsilon v(I).$$

Esto muestra que f verifica b) y por tanto es integrable en I . ◆

Acabamos de probar que toda función continua en un rectángulo es integrable, no obstante, existen funciones discontinuas que son integrables.

Ejemplo 3. Demostremos que $I = [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases},$$

es integrable en I , a pesar de ser discontinua en todos los puntos de la diagonal del cuadrado.

En todo rectángulo contenido en $I = [0,1] \times [0,1]$ hay siempre puntos que no pertenecen a la diagonal, luego cualquier suma inferior es cero. Esto significa que $\underline{I} = 0$ y, por tanto, si f es integrable, su integral tiene que valer cero.

Dividamos $[0,1]$ en n partes iguales, esto nos proporciona particiones P_n del cuadrado I con n^2 rectángulos, cada uno de los cuales tiene área $1/n^2$. De estos rectángulos, solo n de ellos contendrán puntos de la diagonal de I , donde la

función es no nula. Luego, la suma superior correspondiente a la partición P_n será:

$$S(f, P_n) = \sum_i M_i \cdot \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Esto significa que las sumas superiores se pueden hacer tan pequeñas como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande. Por tanto $\bar{J}=0$ y la función es integrable.

Ejercicios propuestos

1. Prueba que para las funciones f y g integrables en el rectángulo I se tiene:

a) La función $\alpha f + \beta g$ es integrable en I y además se cumple:

$$\int_I \alpha f + \beta g = \alpha \int_I f + \beta \int_I g, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$, $x \in I$ entonces $\int_I f \leq \int_I g$.

2. Sea $f : I = [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n} \\ 0, & x = \frac{1}{n} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prueba que $f \in \mathcal{R}(I)$ y calcula $\int_I f$.

3. Supongamos que $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ están definidas sobre el conjunto X en el que está dada una base \mathcal{B} y existen los límites $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ y $\lim_{\mathcal{B}} g(x)$. Prueba que:

i) Existe el límite de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ según la base \mathcal{B} y

$$\lim_{\mathcal{B}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{\mathcal{B}} f(x) + \beta \lim_{\mathcal{B}} g(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

ii) Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{\mathcal{B}} f(x) \leq \lim_{\mathcal{B}} g(x)$.

- iii) Si la función $h:X \rightarrow \mathbf{R}$ es tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y $\lim_{B} f(x) = \lim_{B} g(x) = l$ entonces también $\lim_{B} h(x) = l$.

Observación. Nota que de i) sigue inmediatamente el resultado del ejercicio 1.

- iv) ¿Qué propiedades de la integral pueden deducirse inmediatamente de ii) y iii)?
4. Consideremos el conjunto $\Pi = \{p\}$ de las particiones de I con puntos asociados, la función $\sigma:\Pi \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada p asigna la suma de Riemann correspondiente a esa partición y esa colección de puntos. Sean B' y B las bases de los ejemplos c) y d). Prueba que:

- a) $\lim_{B} \sigma(p) = J$ si y solo si $\lim_{B'} \sigma(p) = J$.
- b) $J = \lim_{B} s(f, P) = \lim_{B'} s(f, P); \quad \bar{J} = \lim_{B} S(f, P) = \lim_{B'} S(f, P).$

V.2. RELACIÓN ENTRE INTEGRABILIDAD Y CONTINUIDAD

Cauchy definió la integral solamente para funciones continuas sobre un intervalo. Después extendió esta noción para las funciones con un número finito de discontinuidades de salto, mediante la suma de las integrales en los intervalos de continuidad. Sin embargo, la definición de Riemann no presuponía ninguna condición sobre la función y además, el mismo Riemann dio un ejemplo de una *función integrable cuyo conjunto de puntos de discontinuidad no solo era infinito, sino que era denso en el intervalo de integración* (ejercicio complementario 9). Por otra parte, ya Dirichlet había propuesto su famosa función discontinua en todos los puntos y era fácil ver que ésta no era integrable de acuerdo a la definición dada por Riemann.

Esta nueva situación abrió la problemática de encontrar la relación entre la integrabilidad de una función y el “tamaño” del conjunto de sus puntos de discontinuidad. Era necesaria una forma de caracterizar la “pequeñez” del conjunto de los puntos de discontinuidad de una función integrable según la definición dada por Riemann.

Precisamente, trataremos de dar respuesta a la interrogante ¿cuán discontinuas pueden ser las funciones integrables en un rectángulo? Comencemos con algunas definiciones necesarias para la mejor formulación de los resultados.

Definición 1. Un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ se dice que tiene **volumen o contenido** (de Jordan) **cero** si para todo $\varepsilon > 0$ existe una **familia finita** de rectángulos de \mathbf{R}^n , Q_1, \dots, Q_m , tales que:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^m v(Q_k) < \varepsilon .$$

Esto significa que:

Un conjunto tiene contenido cero si se puede cubrir por un número finito de rectángulos con volumen total tan pequeño como se quiera.

Cuando $n = 1$ se utiliza la denominación **longitud cero**, en el caso $n = 2$, **área cero** y si $n = 3$, **volumen cero**.

Ejemplo 1. Todo conjunto finito tiene contenido cero.

En efecto, sea $E = \{x_1, \dots, x_p\} \subset \mathbf{R}^n$, con p cualquiera. Dado un número positivo ε podemos tomar p rectángulos Q_1, \dots, Q_p , cada uno con su centro en el punto correspondiente de E y con volumen $< \varepsilon/p$. Entonces, es claro que este cubrimiento de E cumple las condiciones exigidas en la definición.

Ejemplo 2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua, demostremos que el conjunto E de los puntos del gráfico de esta función tiene área cero.

El conjunto E viene dado por (Fig.5)

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

La continuidad de la función f en el intervalo $[a, b]$ garantiza su integrabilidad. Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$

encontramos una partición $P = \{x_i\}_{i=1}^m$ de $[a, b]$ tal que:

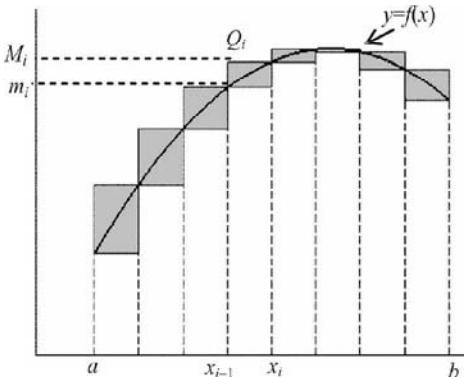


FIGURA 5.

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon .$$

Los productos $(M_i - m_i)\Delta x_i$ pueden pensarse como el área de los rectángulos $Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$, para $i = 1, \dots, m$. Así que la suma anterior representa el área de la figura formada por la unión de todos estos rectángulos (en gris en Fig.5). Evidentemente

$E \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i$, lo que concluye la demostración de que E es de área cero.

Con una argumentación totalmente análoga, se puede extender el resultado de este ejemplo a funciones definidas sobre rectángulos de \mathbf{R}^n , con n arbitrario. Más exactamente, tiene lugar la siguiente afirmación general:

Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en el rectángulo $I \subset \mathbf{R}^{n-1}$, entonces el conjunto de los puntos del gráfico de esta función, $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n : y = f(x), x \in I\}$, es un conjunto en \mathbf{R}^n de contenido cero.

Enunciemos algunas propiedades de los conjuntos de contenido cero cuyas demostraciones son muy sencillas y las proponemos en el ejercicio 1:

- Todo conjunto de contenido cero es acotado.
- La unión finita de conjuntos de contenido cero es también un conjunto de contenido cero.
- Si un conjunto E es de contenido cero, entonces $\text{Fr}(E)$ y \bar{E} tienen contenido cero.

Observación. En la definición de conjunto de contenido cero hemos utilizado rectángulos, esto para nosotros significa producto cartesiano de intervalos cerrados, por tanto son conjuntos cerrados. Es fácil demostrar y lo proponemos en el ejercicio 5, que en esta definición es posible sustituir los rectángulos cerrados por otros tipos de “rectángulos”, por ejemplo “rectángulos abiertos”, es decir, el producto cartesiano de intervalos abiertos. Esta flexibilidad en el tipo de rectángulos a usar en los cubrimientos será muy útil en algunos razonamientos.

El teorema siguiente nos asegura que una función definida y acotada en un rectángulo y cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es de contenido cero es integrable.

Teorema 2. (Condición suficiente de integrabilidad). Sea $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ acotada y denotemos por D al conjunto de sus puntos de discontinuidad. Si el conjunto D tiene contenido cero, entonces $f \in \mathcal{R}(I)$.

◆ Fijemos un $\varepsilon > 0$ y demostremos que se cumple la condición b) del teorema 1. Como D tiene contenido cero, encontramos una colección finita de rectángulos abiertos Q_1, \dots, Q_m que cubren a D (en gris en la Fig.6) y tales que:

$$\sum_{k=1}^m v(Q_k) < \varepsilon.$$

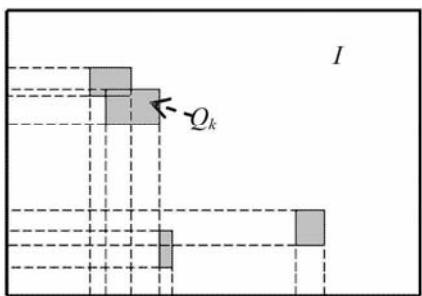


FIGURA 6.

El conjunto $I \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k$ es cerrado y acotado y por tanto compacto de \mathbf{R}^n , además no contiene puntos de discontinuidad de f , luego, por el Teorema de Heine-Cantor, podemos asegurar que f es uniformemente continua en él. Así que existirá un $\delta > 0$ tal que cuando $x, y \in I \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k$ se tiene:

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Escojamos una partición del rectángulo I que satisfaga

- para todo rectángulo I_j $\text{diam}(I_j) < \delta$,
- los vértices de los rectángulos Q_k son vértices de algún rectángulo I_j . (En la Fig.6 se indica, en un caso particular, cuales puntos deben estar obligatoriamente en las particiones de los dos intervalos componentes del rectángulo I).

Para esta partición se cumple:

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) &= \sum_j (M_j - m_j) v(I_j) = \\ &= \sum_j^1 (M_j - m_j) v(I_j) + \sum_j^2 (M_j - m_j) v(I_j), \end{aligned}$$

donde la suma en \sum_j^1 se realiza para aquellos índices j tales que $I_j \subset I \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k$ y \sum_j^2 incluye los restantes índices.

Como los diámetros de los I_j son menores que δ , para los j considerados en \sum_j^1 , se tendrá que:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ para todo } x, y \in I_j.$$

Luego, para estos subrectángulos de la partición se cumple la desigualdad,

$$M_j - m_j < \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$\sum_j^1 (M_j - m_j) v(I_j) < \varepsilon \sum_j v(I_j) \leq \varepsilon v(I).$$

Por otra parte, todos los subrectángulos I_j que se encuentran en \sum_j^2 , están contenidos en $\bigcup_{k=1}^m Q_k$, así que tiene lugar el estimado siguiente:

$$\sum_j^2 (M_j - m_j) v(I_j) < (M - m) \sum_j^2 v(I_j) \leq (M - m) \sum_{k=1}^m v(Q_k) < (M - m) \varepsilon,$$

donde M y m son, respectivamente, el supremo e ínfimo de f en I .

De modo que, para la partición P_ε , hemos obtenido:

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < (M - m + v(I)) \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto demuestra que se verifica b) del Teorema 1.

Del teorema anterior y el ejemplo 1 se infiere el resultado siguiente:

Si f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en I , entonces f es integrable en I .

Ejemplo 3. La función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 5, & \text{si } x \neq y \\ 2x^3 + 5, & \text{si } x = y \end{cases},$$

es continua en el cuadrado $I = [0,1] \times [0,1]$ excepto en su diagonal $x = y$, que es un conjunto de área cero (¿por qué?). Luego por el teorema 2, ella es integrable en dicho cuadrado. Veamos cómo el conocer que la función f es integrable nos permite obtener fácilmente el valor de su integral: Todo subrectángulo de cualquier partición P de I tiene puntos que no pertenecen a la diagonal del cuadrado, luego $s(P, f) = 5$. Esto significa que $\underline{J} = 5$ y, como f es integrable entonces $\int_I f = 5$.

Ejemplo 4. Construyamos una función integrable cuyas discontinuidades no parecen ser demasiado pocas. Sea C el conjunto de Cantor (ejemplo 6, II.4) y definamos la función $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ como cero en los puntos de C y fuera de C lo haremos mediante un proceso iterativo.

El conjunto $[0,1] \setminus C$ está constituido por la unión de los infinitos intervalos abiertos que se extraen sucesivamente al formar el conjunto C :

$$\begin{aligned}[0,1] \setminus C &= (1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup \\ &\cup (1/27, 2/27) \cup (7/27, 8/27) \cup (19/27, 20/27) \cup (25/27, 26/27) \cup \dots\end{aligned}$$

En cada uno de estos intervalos la función f la consideraremos constante y sus valores los definiremos en forma recurrente. Pongamos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(x) = 1/2$ en $(1/3, 2/3)$. En los puntos del intervalo $(1/9, 2/9)$ tomará el valor $1/4$ que es la media entre los valores contiguos ya definidos, 0 y $1/2$. Análogamente en $(7/9, 8/9)$ será igual a $3/4$ que es la media de $1/2$ y 1. De la misma forma se procede con los restantes intervalos (Fig. 7).

La función f es continua en todos los puntos de $[0,1] \setminus C$, luego el conjunto de sus puntos de discontinuidad está contenido en C . Pero el conjunto de Cantor es un conjunto de contenido cero. En efecto,

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

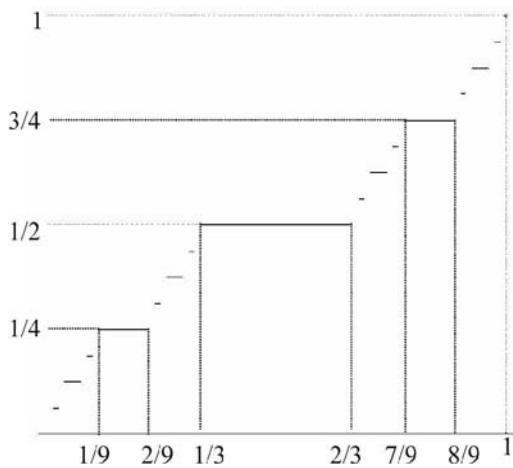


FIGURA 7.

donde C_n está formado por la unión de 2^n intervalos cerrados cada uno con longitud $1/3^n$. Así que, dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger n de modo que $2^n \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, entonces los intervalos que constituyen a $C_n \supset C$ es un cubrimiento finito de C cuya suma de longitudes es menor que ε . ¿Podrías calcular el valor de $\int_0^1 f$?

La noción de conjunto de contenido cero introducida por Jordan permitió dar una condición suficiente de integrabilidad de una función acotada “midiendo” el conjunto de sus puntos de discontinuidad. Sin embargo, la función definida por Riemann, que es integrable, a pesar de presentar una cantidad “no despreciable” de discontinuidades, mostraba que esta condición no era necesaria. Desde 1894, con el fin de caracterizar ciertos conjuntos “despreciables” en un problema no relacionado con la integrabilidad de funciones, Emile Borel había utilizado cubrimientos de los conjuntos por familias numerables. Entonces Henri Lebesgue tomó esta idea y cambió la forma de “medición”, logrando una condición que fuera a la vez necesaria y suficiente.

Veamos la definición de conjunto de medida de Lebesgue cero:

Definición 2. Un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (de Lebesgue) o que es **despreciable en el sentido de la medida de Lebesgue** si para todo $\varepsilon > 0$ existe una **familia numerable** Q_1, \dots, Q_m, \dots de rectángulos en \mathbf{R}^n , tales que:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon \quad .$$

Cuando una propiedad se cumple en todos los puntos de un conjunto E , excepto a lo sumo en un conjunto de medida cero, convendremos en decir que esta propiedad se verifica **casi donde quiera** en E .

Observaciones. 1) La diferencia entre las definiciones de contenido cero y de medida cero radica en que, para la segunda, hemos admitido la posibilidad de *cubrimientos numerables*, mientras que en la primera solo se admitían los cubrimientos por una cantidad *finita* de rectángulos.

2) En la definición de medida cero también hemos utilizado rectángulos cerrados pero, al igual que en el caso del contenido cero, resulta fácil probar que el concepto no se altera cuando se consideran los rectángulos abiertos.

Ejemplo 5. Todo subconjunto numerable A en \mathbf{R}^n es de medida cero. En efecto, sea $A = \{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ y consideremos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Si para cada k tomamos un rectángulo Q_k con centro en a_k y tal que su volumen sea $< \varepsilon/2^k$, entonces estos rectángulos constituirán un cubrimiento de A tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Así hemos probado que A tiene medida cero.

En particular, este ejemplo indica que el conjunto de todos los números racionales tiene medida cero o, dicho de otra forma, *casi todo número real es irracional*.

Enunciemos algunas características de los conjuntos de medida cero que contrastan con las propiedades enunciadas para los conjuntos de contenido cero (ejercicio 6).

- a) Un conjunto de medida cero puede no ser acotado.
- b) Todo conjunto de contenido cero es también de medida cero, pero, en general, el recíproco no es cierto. ¿Para qué tipo de conjuntos es cierto el recíproco?
- c) La unión numerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.

Podemos ahora enunciar una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de una función, en términos del conjunto de sus puntos de discontinuidad.

Teorema 3. (Lebesgue) Sea la función acotada $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ y denotemos por D el conjunto de sus puntos de discontinuidad en I . Entonces f es integrable en I si y solo si el conjunto D tiene medida cero.

En otras palabras, para una función **f acotada** en un rectángulo I , se tiene que

f es integrable en I si y solo si es continua en casi todo punto de I .

Para efectuar la demostración de este teorema necesitamos introducir algunas definiciones y resultados preparatorios:

Definición 3. Sea $f : E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, llamamos **oscilación de f en el conjunto E** al número

$$w(f; E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

y **oscilación de f en un punto x** al límite

$$w(f; x) = \lim_{h \rightarrow 0} w(f; B(x, h) \cap E).$$

Resumamos algunas de las propiedades de estas magnitudes cuya demostración está propuesta en el Cap. II, ejercicio complementario 12, que nos serán necesarias en lo que sigue:

- i) f es continua en x si y solo si $w(f; x) = 0$.
- ii) El conjunto $\{x \in E : w(f; x) \geq \varepsilon\}$ es cerrado en E .

El resultado siguiente es una generalización del teorema de Heine-Cantor (teorema 11 del Cap. II) sobre continuidad uniforme:

Lema. Si el conjunto E es compacto y para cualquier $x \in E$ se cumple $w(f; x) < \varepsilon$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que, para todo conjunto $T \subset E$ con diámetro menor que δ , tiene lugar

$$w(f; T) < \varepsilon.$$

◆ La condición $w(f; x) < \varepsilon$ se rescribe $\lim_{h \rightarrow 0} w(f; B(x, h) \cap E) < \varepsilon$ y, por las propiedades del límite, existe $\delta > 0$ tal que:

$$w(f; B(x, \delta) \cap E) < \varepsilon. \quad (1)$$

De este modo, para cada $x \in E$ se encuentra una bola $B(x, \delta_x)$ que satisface (1). La familia $\{B(x, \delta_x/2)\}_{x \in E}$, constituye un cubrimiento por conjuntos abiertos del compacto E . Por tanto podemos extraer un subcubrimiento finito, digamos, $B(x_1, \delta_1/2), \dots, B(x_m, \delta_m/2)$.

Demostremos que $\delta = \min\{\delta_1/2, \dots, \delta_m/2\}$ satisface:

Si $T \subset E$, tiene diámetro menor que δ , entonces existe un i tal que $T \subset E(x_i, \delta_i)$.

En efecto, sea T de diámetro menor que δ y escojamos un $x \in T$. Entonces existirá un i tal que $x \in B(x_i, \delta_i/2)$, por tanto $\|x - x_i\| < \delta_i/2$. Sea ahora $y \in T$ arbitrario, entonces $\|x - y\| < \delta$ y, por la desigualdad triangular, tenemos que:

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_i\| < \delta + \delta_i/2 \leq \delta_i,$$

así que todo $y \in T$ también satisface $y \in B(x_i, \delta_i)$. De este modo hemos demostrado que $T \subset B(x_i, \delta_i)$.

Finalmente podemos aplicar (1) para obtener $w(f; T) \leq w(f; B(x_i, \delta_i)) < \varepsilon$. ♦

De forma semejante a como procedimos en el Teorema 2, pero haciendo uso de este lema en lugar del teorema de Heine-Cantor, podemos probar la condición suficiente siguiente:

Si f es acotada en I y, para todo entero positivo k , el conjunto

$$D_k = \{x \in I : w(f, x) \geq 1/k\}$$

tiene contenido cero, entonces $f \in \mathcal{R}(I)$.

Comparemos esta condición suficiente con la dada en el Teorema 2: Por una parte, si $x \in D_k$ entonces $w(f, x) > 0$ y por tanto f es discontinua en x , así que para todo k se cumple $D_k \subset D$. Recíprocamente si x es punto de discontinuidad de f , entonces para k suficientemente grande se cumple $w(f, x) \geq 1/k$,

luego $x \in D_k$. Hemos probado que tiene lugar la igualdad $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. De modo que, si D tiene contenido cero, entonces todos los D_k tienen contenido cero, pero pudiera suceder que todos los D_k sean de contenido cero y no lo sea la unión infinita. Esto significa que la condición suficiente anterior es más débil que la exigida en el teorema 2 y es natural preguntarse ¿será necesaria esta condición? El razonamiento siguiente prueba que la respuesta es afirmativa.

♦ Supongamos que para algún k el conjunto D_k no tenga contenido cero. Entonces existirá $\varepsilon > 0$ tal que la suma de los volúmenes de los rectángulos de cualquier cubrimiento finito de D_k es mayor que ε .

Para una partición arbitraria P del rectángulo I escribamos:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_j^1 (M_j - m_j) v(I_j) + \sum_j^2 (M_j - m_j) v(I_j),$$

donde \sum_j^1 se realiza según aquellos índices j tales que el rectángulo I_j contiene algún punto de D_k y \sum_j^2 incluye los restantes índices j .

Los rectángulos considerados en \sum_j^1 cubren a D_k , luego, por la suposición hecha:

$$\sum_j^1 v(I_j) \geq \varepsilon.$$

Pero en esos rectángulos tenemos que $M_j - m_j \geq 1/k$, así que:

$$\sum_j^1 (M_j - m_j) v(I_j) \geq \varepsilon/k.$$

Esto significa que:

$$S(f, P) - s(f, P) \geq \sum_j^1 (M_j - m_j) v(I_j) \geq \varepsilon/k,$$

por tanto f no puede ser integrable en I .♦

Hemos demostrado el resultado siguiente

Teorema 4. (*Condición necesaria y suficiente de integrabilidad*). Sea $f : I \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ acotada, entonces $f \in \mathcal{R}(I)$ si y solo si, para todo entero positivo k , el conjunto $D_k = \{x \in I : w(f, x) \geq 1/k\}$ tiene contenido cero.

El Teorema 3 es ahora una consecuencia inmediata de este resultado.

Demostración del Teorema 3.

♦ *Necesidad.* Si D no tiene medida cero, entonces para algún k el conjunto D_k no tiene medida cero y, por consiguiente, no es de contenido cero. Luego por el teorema 4, f no es integrable.

Suficiencia. Si D tiene medida cero, entonces todos los conjuntos D_k tienen medida cero. Pero, los D_k son compactos, así que son de contenido cero y aplicando el teorema 4, $f \in \mathcal{R}(I)$.♦

Ejercicios propuestos

1. Prueba las propiedades siguientes de los conjuntos de contenido cero:
 - a) Todo conjunto de contenido cero es acotado.
 - b) La unión de un número finito de conjuntos de contenido cero es también un conjunto de contenido cero. ¿será cierto para la unión de una familia numerable?

- c) Si un conjunto E es de contenido cero, entonces $\text{Fr}(E)$ y \bar{E} tienen contenido cero.
2. Si E es un conjunto acotado de \mathbf{R}^n con un número finito de puntos de acumulación entonces E es de contenido cero.
3. Sea el conjunto D de contenido cero en \mathbf{R}^{n-1} y formemos el conjunto $E = D \times [a, b] \subset \mathbf{R}^n$. Demuestra que E tiene contenido cero en \mathbf{R}^n .
4. Prueba que si D es un conjunto acotado de \mathbf{R}^2 , entonces un conjunto de la forma $E = \{(x, y, a) : (x, y) \in D\}$, (a constante) tiene volumen cero en \mathbf{R}^3 . Generaliza este resultado para $D \subset \mathbf{R}^n$.
5. Prueba que en las definiciones de conjunto de contenido cero y de medida cero se pueden sustituir los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos sin que el concepto correspondiente se altere.
6. Prueba las propiedades siguientes de los conjuntos de medida cero:
- Un conjunto de medida cero no tiene por qué ser acotado.
 - Un conjunto de contenido cero es también de medida cero, pero el recíproco no es cierto.
 - La unión numerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.
 - Un conjunto E de medida cero puede ser tal que $\text{Fr}(E)$ y \bar{E} no sean de medida cero.
7. Demuestra que un conjunto de medida cero no puede tener puntos interiores. ¿Será cierto el recíproco?
8. Analiza la integrabilidad en $[0,1] \times [0,1]$ de las funciones siguientes:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } xy \neq 0 \\ 0, & \text{si } xy = 0 \end{cases},$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

9. Dado un triángulo equilátero T_0 construyamos una generalización bidimensional del conjunto de Cantor.

Construcción básica: Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero, este triángulo queda dividido en cuatro triángulos equiláteros congruentes. Eliminemos el triángulo central y retengamos los tres triángulos que tienen un vértice común con el triángulo inicial (Fig. 8).

Sea T_1 el resultado de realizar la construcción básica en T_0 , es decir T_1 es la unión de tres triángulos equiláteros. En cada uno de estos triángulos realicemos la construcción básica y denotemos por T_2 la unión de los 9 triángulos resultantes. Similarmente, T_3 estará formado por la unión de 27 triángulos obtenidos al realizar la construcción básica en cada uno de los 9 triángulos de T_2 . Prosiguiendo esta construcción indefinidamente, obtenemos el conjunto:

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$$

denominado **triángulo de Sierpinski**, en homenaje al matemático polaco que lo introdujo en sus investigaciones topológicas en la teoría de funciones. Prueba que T es un conjunto de área cero.

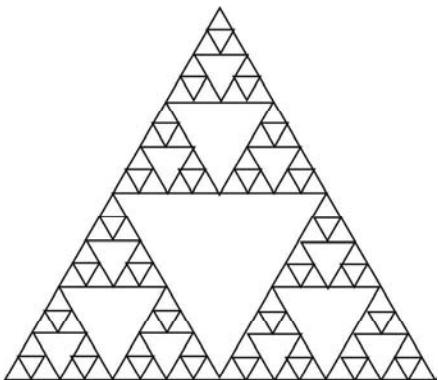


FIGURA 8.

V.3. INTEGRAL SOBRE UN CONJUNTO ACOTADO

El estudio realizado en el epígrafe anterior de la integración de funciones sobre rectángulos nos allana el camino para la definición de integral de una función en un conjunto acotado arbitrario y la investigación de sus propiedades básicas.

Sea E un subconjunto acotado de \mathbf{R}^n y f una función definida y acotada sobre E . Consideremos un rectángulo I que contenga a E (Fig. 9) y extendamos la función f a todo el rectángulo, definiendo la función $f *_{\mathcal{E}} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ como:

$$f *_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \in I \setminus E \end{cases} . \quad (1)$$

Nos auxiliaremos de la función extendida f^*_E , acotada sobre el rectángulo I , para dar la definición de integral de la función f sobre el conjunto E .

Definición 1. Diremos que la función f es **integrable en el conjunto E** cuando la función f^*_E sea integrable en el rectángulo I . En el caso que f sea integrable sobre un conjunto E , llamaremos **integral de f sobre E** al número

$\int_E f^*_E$ que se denotará simplemente:

$$\int_E f \quad \text{o} \quad \int_E f(x)dx .$$

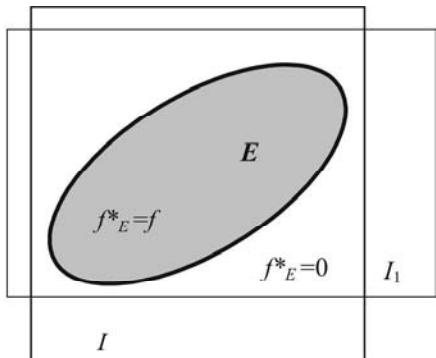


FIGURA 9.

El conjunto de las funciones integrables sobre E será denotado por $\mathbf{R}(E)$. Análogamente pueden definirse las integrales superiores e inferiores sobre E .

Es claro que un mismo conjunto acotado E puede ser encerrado en rectángulos diferentes, por lo tanto es necesario probar que la definición anterior es independiente del rectángulo considerado. Probaremos que:

Si I_1 e I son dos rectángulos que contienen a E , entonces $\int_{I_1} f^*_E = \int_I f^*_E$.

En cada integral se ha supuesto la función f^*_E definida por (1) en el rectángulo correspondiente.

◆ El rectángulo $I_1 \cap I$ está contenido tanto en I_1 como en I , luego es claro que basta hacer la demostración para el rectángulo intersección $I_1 \cap I$ y uno de los otros dos, por ejemplo I .

Cualquiera que sea el rectángulo que se considere, los puntos de discontinuidad de f^*_E son los puntos de discontinuidad de f y, posiblemente, los puntos que están sobre la frontera de E . Esto significa que las funciones f^*_E , consideradas para rectángulos diferentes, tienen los mismos puntos de discontinuidad. En virtud del Teorema de Lebesgue, la integrabilidad de f^*_E no depende del rectángulo considerado.

Si tomamos en I solo aquellas particiones que contienen todos los puntos de las particiones de $I_1 \cap I$, entonces las sumas de Riemann de f^*_E correspondientes a $I_1 \cap I$ e I son iguales. Esto significa que también las respectivas integrales serán iguales y se completa la demostración.◆

Ejemplo 1. Sea un conjunto acotado cualquiera E y consideremos la función $f(x) = c$ ($\neq 0$) para todo $x \in E$. ¿Será f integrable en E ?

Haciendo uso de la definición dada, consideremos un rectángulo I que contenga a E y la función extendida

$$f *_{\bar{E}}(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \in I \setminus E \end{cases}$$

Debemos determinar cuándo esta función es integrable en I . Ella es acotada, luego, por el teorema de Lebesgue, será integrable si y solo si sus puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida cero. Pero $f *_{\bar{E}}$ es discontinua exactamente en los puntos de $\text{Fr}(E)$. Así que f será integrable si y solo si el conjunto $\text{Fr}(E)$ tiene medida cero. Pero $\text{Fr}(E)$ es un conjunto compacto, luego:

Las funciones constantes son integrables sobre E si y solo si $\text{Fr}(E)$ tiene volumen cero.

Este ejemplo explica el porqué en lo que sigue nos limitaremos a considerar aquellos conjuntos E con $\text{Fr}(E)$ de contenido cero, es decir, para los cuales el conjunto de las funciones integrables sobre E , contiene al menos a las funciones constantes.

Consideremos un conjunto E acotado de \mathbf{R}^2 y veamos cómo podemos interpretar geométricamente \underline{J} , \bar{J} y $\int_E 1$. (ver Fig. 10).

Supongamos $E \subset I$ y sea P una partición cualquiera de I . La suma inferior de Darboux de la función:

$$f *_{\bar{E}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in I \setminus E \end{cases}$$

está dada por:

$$s(f *_{\bar{E}}, P) = \sum_j v(I_j),$$

donde la suma se realiza por aquellos j tales que el rectángulo I_j está completamente contenido en E . Así que esta suma representa el área de una

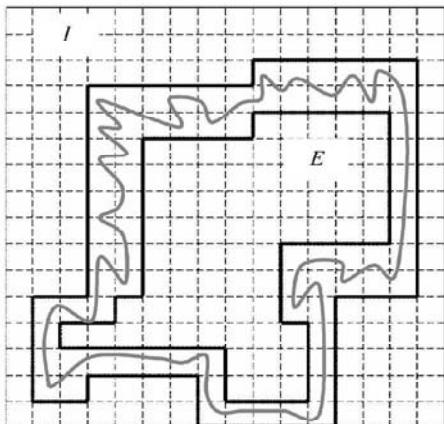


FIGURA 10.

figura poligonal, contenida en E y formada por la unión de un número finito de rectángulos. Luego $s(f^*_E, P)$ constituye una aproximación por defecto del “área” de E que mejora su exactitud en la medida que la partición se hace más fina. A la mejor de estas aproximaciones interiores del conjunto E , esto es al número $\underline{J} = \sup_P s(f^*_E, P)$, Jordan lo denominó **área interior** de E . Análogamente denominó **área exterior** de E a $\bar{J} = \inf_P S(f^*_E, P)$ que representa una aproximación por exceso del “área” de E . De este modo, las áreas interior y exterior de un conjunto acotado siempre existen y coinciden con las integrales inferior y superior de la función que vale 1 en dicho conjunto.

Cuando $\text{Fr}(E)$ tiene área cero, entonces la función f^*_E es integrable, por lo que $\underline{J} = \bar{J} = \int_E 1$. En este caso, diremos que E tiene un **área que es el valor común de sus áreas interior y exterior**.

De forma análoga se pueden definir el **volumen o contenido de Jordan exterior e interior** de un conjunto acotado $E \subset \mathbf{R}^n$, como las integrales superiores e inferiores, respectivamente, de la función constante 1 en E . Cuando estas magnitudes coinciden, es decir, cuando la función constante uno es integrable en E , entonces al conjunto podrá asignársele una medida: el **volumen o contenido según Jordan**. Más precisamente, tenemos la definición siguiente:

Definición 2. Un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ que sea acotado y su frontera tenga contenido cero se denomina **admisible o medible según Jordan** y se llama **volumen o contenido de Jordan** de E a la magnitud

$$v(E) = \int_E 1.$$

Observación. En los casos $n = 1, 2, 3$ el contenido de Jordan de un conjunto E suele denominarse longitud, área y volumen de E , respectivamente.

Ejemplo 2. Se puede ver fácilmente que un rectángulo I en \mathbf{R}^n es un conjunto medible según Jordan, por tanto la definición anterior le asocia un número como su volumen. El ejemplo 1 del epígrafe V.1 nos indica que este número coincide con el volumen definido antes para los rectángulos en \mathbf{R}^n .

Ejemplo 3. El conjunto de los números racionales del intervalo $[0, 1]$ de la recta no es admisible y, por tanto, no se le puede adjudicar una longitud. Más

generalmente, el conjunto de los puntos de coordenadas racionales del rectángulo $[0,1] \times \dots \times [0,1]^n \subset \mathbf{R}^n$ no es medible según Jordan y no posee un contenido definido. Nótese que el contenido interior de estos conjuntos es cero, mientras que su contenido exterior es uno. ¿Tendrá este conjunto medida, según Lebesgue, cero?

Ejemplo 4. En el ejemplo 2 de V.2 vimos que el gráfico de una curva dada en la forma $y = f(x)$, con f continua en un intervalo $[a,b]$, es un conjunto de área cero. Esto nos permite encontrar gran cantidad de conjuntos admisibles. Por ejemplo, los puntos de un círculo, el conjunto limitado por una elipse y , en general, conjuntos cuya frontera pueda ser descompuesta en la unión de un número finito de curvas representables por una ecuación de la forma anterior (Fig. 11).

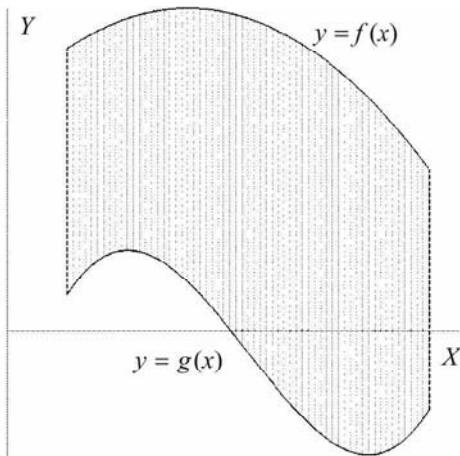


FIGURA 11.

Podría pensarse que los puntos interiores a cualquier curva cerrada continua siempre define un conjunto admisible. Sin embargo, el ejemplo siguiente muestra que ese no es el caso.

Ejemplo 5. Veamos un conjunto *no admisible limitado por una curva continua*. Realizaremos la construcción del conjunto en forma recurrente, mediante la supresión sucesiva de triángulos semiabiertos, esto es, triángulos a los que se le han eliminado dos de sus lados.

Sea el triángulo isósceles con la base en el intervalo $[0,2]$ y altura igual a 1 y que denotaremos por $T = T[0,1]$ (más adelante veremos la razón de esta notación).

Paso 1. Del triángulo T eliminamos el triángulo isósceles semiabierto, con lado desigual en el eje X y vértice opuesto a ese lado en el punto $(1,1)$. Tomamos este triángulo de forma que su área sea $1/4$. Como resultado de esta eliminación se obtiene una figura constituida por dos triángulos cerrados iguales los cuales denotaremos por $T[0,1/2]$ y $T[1/2,1]$ (Fig. 12a)).

Paso 2. De cada uno de los triángulos obtenidos en el paso 1, extraemos un triángulo semiabierto de modo que el área total extraída sea $1/8$ y los cuatro

triángulos obtenidos tras este proceso sean de igual área (Fig. 12b). Denotemos estos triángulos cerrados por: $T[0,1/4]$, $T[1/2,3/4]$ y $T[3/4,1]$.

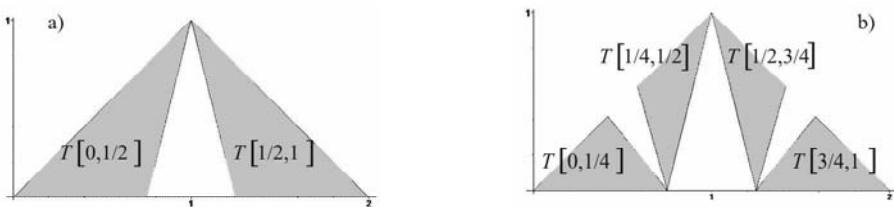


FIGURA 12.

Paso 3. De cada uno de los triángulos obtenidos extraemos un triángulo semiabierto de modo que el área total extraída sea $1/16$ y los ocho triángulos resultantes después de la extracción tengan igual área. Denotaremos estos triángulos por $T[p/2^3, (p+1)/2^3]$, con $p = 1, 2, \dots, 7$ (Fig. 13a).

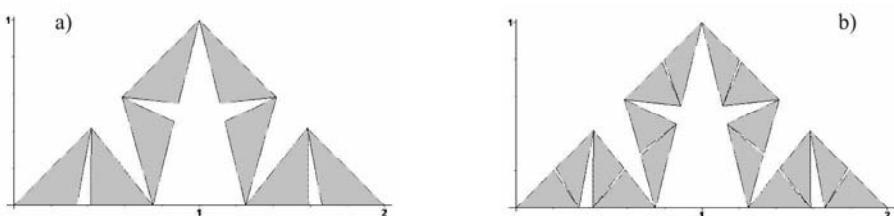


FIGURA 13.

Paso 4. De cada uno de los ocho triángulos se extrae un triángulo semiabierto de modo que el área total sea $1/32$ y los 16 triángulos obtenidos sean iguales. Estos triángulos cerrados serán denotados por $T[p/2^4, (p+1)/2^4]$, con $p = 1, 2, \dots, 15$ (Fig. 13b).

El proceso se continua indefinidamente de forma análoga a los 4 pasos descritos.

Un triángulo cualquiera $T[p/2^n, (p+1)/2^n]$ del paso n está contenido en alguno de los triángulos de cualquier paso de orden $m < n$. Además el diámetro de estos triángulos tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Cada sistema de triángulos cerrados encajados y con longitud infinitesimal $\left\{T \left[p_n / 2^n, (p_n + 1) / 2^n \right] \right\}_{n=1}^{\infty}$, tiene un único punto común a todos ellos. Precisamente la curva L que nos interesa es el conjunto de los puntos que son comunes a todos estos sistemas de triángulos. Demostremos que este conjunto L es la imagen del intervalo $[0,1]$ por una función continua $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}^2$.

A cada intervalo de la forma $\left[p / 2^n, (p+1) / 2^n \right] \subset [0,1]$ ($p < 2^n$) le hacemos corresponder el triángulo $T \left[p / 2^n, (p+1) / 2^n \right]$. Cualquier punto $t \in [0,1]$ pertenece a uno de los intervalos de índice n , $\left[p_{n_k} / 2^n, (p_{n_k} + 1) / 2^n \right]$, para $n = 1, 2, \dots$. Luego t es común a alguno de los sistemas encajados de longitud infinitesimal $\left\{ \left[p_{n_k} / 2^n, (p_{n_k} + 1) / 2^n \right] \right\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos como φ la función que a t hace corresponder el punto de L que es el único común al sistema de triángulos encajados $\left\{ T \left[p_{n_k} / 2^n, (p_{n_k} + 1) / 2^n \right] \right\}_{n=1}^{\infty}$. El lector puede fácilmente comprobar que esta función φ así definida es continua en todos los puntos del intervalo $[0,1]$. Como obviamente $\varphi[0,1] = L$, entonces L es una curva continua.

Consideremos ahora un cuadrado Q de lado 2 y sobre cada uno de sus lados construimos un trángulo isósceles rectángulo T_1, T_2, T_3, T_4 , con lo que se obtiene otro cuadrado Q' de lado $2\sqrt{2}$ (Fig. 14a). En cada uno de estos triángulos realizamos la construcción principal y así obtenemos curvas L_1, L_2, L_3, L_4 , cuya unión proporciona una curva L cerrada que es la frontera de un dominio D (Fig. 14b). Mostremos que D no es medible según Jordan, es decir, no es posible asignársele un área en este sentido.

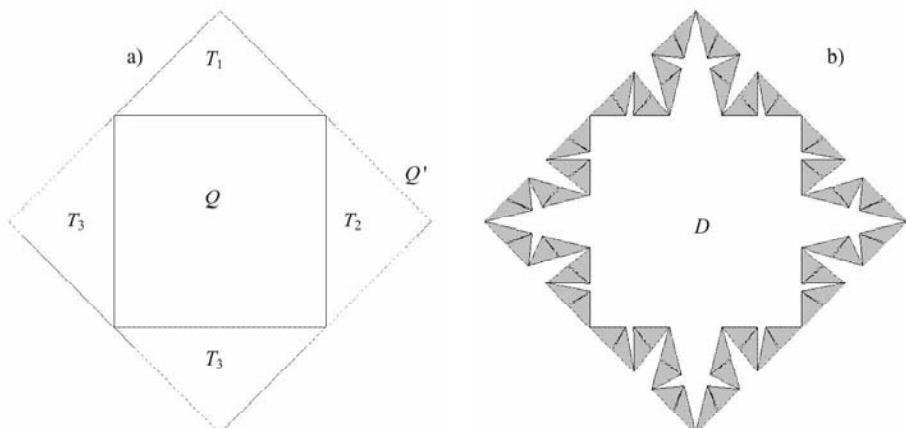


FIGURA 14.

Puede probarse que el área interior de D , es decir, la integral inferior \underline{J} de la función constante 1 sobre D , es igual al límite de las áreas de los polígonos P_n , formados por la unión de Q con todos los triángulos que fueron extraídos en los pasos impares hasta el paso $2n - 1$ inclusive (ejercicio complementario 8). Análogamente, el área exterior de D , \bar{J} , es el límite de las áreas de los polígonos Q_n formados por la eliminación al cuadrado Q' de los triángulos extraídos en los pasos pares hasta el paso $2n$ inclusive.

Por tanto:

$$\underline{J} = \lim A(P_n) = 4 + 4 \lim \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{16}{3},$$

$$\bar{J} = \lim A(Q_n) = 8 - 4 \lim \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 4^{n-1}} \right) = \frac{22}{3}.$$

Como $\underline{J} \neq \bar{J}$, entonces el conjunto D no es medible en el sentido de Jordan.

Este ejemplo es aún más interesante si observamos, además, que el conjunto de los puntos de la *curva L no puede tener contenido cero*. Pero entonces la *curva L no puede ser rectificable* (ejercicio complementario 7).

Una consecuencia inmediata del Teorema 3 (Lebesgue), y la Definición 2 es la siguiente condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de una función en un conjunto admisible.

Teorema 5. (Lebesgue) Sean E **admisible**, $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ **acotada** y D el conjunto de los puntos de discontinuidad de f . Entonces tiene lugar la equivalencia siguiente:

$$f \in \mathbf{R}(E) \Leftrightarrow D \text{ tiene medida cero.}$$

Veamos algunas *propiedades de las funciones integrables* en los conjuntos admisibles.

1) **Linealidad de la integral.** a) El conjunto $\mathbf{R}(E)$ de las funciones integrables sobre un conjunto admisible E es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.

b) La aplicación que a cada $f \in \mathbf{R}(E)$ hace corresponder $\int_E f$ es lineal.

◆ a) Denotemos por D_f el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función f . Sean $f, g \in \mathbf{R}(E)$ y α y β números reales. En virtud de las propiedades de las funciones continuas, los conjuntos de los puntos de discontinuidad de las funciones f, g y $\alpha f + \beta g$ satisfacen la relación:

$$D_{\alpha f + \beta g} \subset D_f \cup D_g.$$

Como la unión de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero, entonces el conjunto $D_{\alpha f + \beta g}$ tiene medida cero. Además, la acotación de f y g implica la de $\alpha f + \beta g$, por tanto la función $\alpha f + \beta g$ es integrable.

Para demostrar b) supongamos primeramente que el conjunto E es un rectángulo. Para las sumas de Riemann de las tres funciones f, g y $\alpha f + \beta g$ se cumple evidentemente la relación siguiente:

$$\sigma(\alpha f + \beta g, P, \{\xi_k\}) = \alpha \sigma(f, P, \{\xi_k\}) + \beta \sigma(g, P, \{\xi_k\}),$$

donde P es una partición arbitraria del rectángulo E y $\{\xi_k\}$ representa una colección cualquiera de puntos pertenecientes a los intervalos de la partición.

Entonces, de la definición de integral en un rectángulo, sigue inmediatamente:

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Si E es un conjunto admisible cualquiera basta aplicar la definición de integral en E y la propiedad, recién demostrada, para el caso de un rectángulo.◆

2) Si $f \in \mathbf{R}(E)$ y $f(x) \geq 0$ para todo x del conjunto admisible E , entonces $\int_E f \geq 0$.

◆ Al igual que la parte b) de la propiedad 1, esta se demuestra de forma inmediata, primero para rectángulos y después para un conjunto admisible cualquiera.◆

Como una consecuencia de las dos propiedades anteriores puede obtenerse fácilmente

3) Si $f, g \in \mathbf{R}(E)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x del conjunto admisible E , entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4) Si una función f está definida y es acotada sobre un conjunto E que tiene contenido cero, entonces f es integrable en E y $\int_E f = 0$.

◆ Sea I un rectángulo que contiene a E , la función f^*_E puede ser discontinua solo en los puntos de \bar{E} , que es de contenido y, por tanto, de medida cero. Así que f es integrable en E .

Demostremos ahora que la integral de f sobre el conjunto E es cero. Como E tiene contenido cero, dado un $\varepsilon > 0$ encontramos rectángulos Q_1, \dots, Q_m tales que:

$$\sum_{k=1}^m v(Q_k) < \varepsilon.$$

Sea I un rectángulo que contiene a E y P_ε una partición de I tal que todos los vértices de los rectángulos Q_i , $i=1, \dots, m$ son vértices de algún subrectángulo de P_ε . Entonces, para toda partición P más fina que P_ε y cualesquiera sean los ξ_k , se tiene:

$$\sigma(f^*_E, P, \{\xi_k\}) = \sum_k f^*_E(\xi_k) v(I_k) = \sum_k {}^*f(\xi_k) v(I_k),$$

donde la suma $\sum_k {}^*$ se realiza sobre aquellos k para los cuales el subrectángulo correspondiente I_k está contenido en alguno de los rectángulos Q_i . Pero f es acotada en E , luego $|f(x)| \leq M$, $x \in E$, por tanto se tiene la acotación:

$$|\sigma(f^*_E, P, \{\xi_k\})| \leq M \sum_{i=1}^m v(Q_i) < \varepsilon M.$$

Esto demuestra que $\int_E f = 0$. ◆

5) **Aditividad.** Sean los conjuntos admisibles E_1 y E_2 y la función $f \in \mathcal{R}(E_i)$, con $i = 1, 2$. Entonces tienen lugar las afirmaciones siguientes:

- a) los conjuntos $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son admisibles,
- b) $f \in \mathcal{R}(E_1 \cup E_2)$ y $f \in \mathcal{R}(E_1 \cap E_2)$,

$$c) \int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f - \int_{E_1 \cap E_2} f. \quad (2)$$

En particular, si $E_1 \cap E_2$ tiene contenido cero, entonces:

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f. \quad (3)$$

- ◆ Las relaciones siguientes, que el lector puede demostrar fácilmente,

$$\text{Fr}(E_1 \cup E_2) \subset \text{Fr}(E_1) \cup \text{Fr}(E_2), \quad \text{Fr}(E_1 \cap E_2) \subset \text{Fr}(E_1) \cup \text{Fr}(E_2),$$

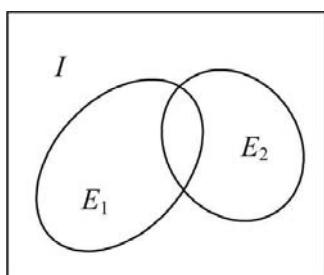


FIGURA 15.

nos aseguran que, los conjuntos $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$ tienen frontera de contenido cero siempre que la tengan los conjuntos E_1 y E_2 . Además, como la unión e intersección de conjuntos acotados es un conjunto acotado, podemos concluir que los conjuntos $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son admisibles. La integrabilidad de f en $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$ es inmediata del teorema 5. Con esto se prueban a) y b).

Para demostrar la relación (2), consideremos un rectángulo I que contenga a $E_1 \cap E_2$ (Fig. 15), entonces I también contendrá a E_1 , E_2 y $E_1 \cap E_2$. Utilizando la notación introducida en la definición de integral sobre un conjunto, podemos escribir:

$$f *_{E_1 \cup E_2} = f *_{E_1} + f *_{E_2} - f *_{E_1 \cap E_2}.$$

Entonces (2) sigue de la propiedad 1). La igualdad (3) es inmediata de la propiedad 4).

6) Sea $f(x) \geq 0$ en un conjunto admisible E y $f \in \mathcal{R}(E)$. Entonces $\int_E f = 0$ implica que $f(x) = 0$, casi dondequiero en E .

- ◆ Demostremos que f no puede ser estrictamente positiva en ninguno punto de continuidad que esté en el interior de E . Supongamos lo contrario, es decir, que existe un punto a , interior a E , donde f es continua y $f(a) > 0$.

Por la definición de continuidad, puede encontrarse una vecindad rectangular $I(a) \subset E$ tal que $f(x) > f(a)/2$, para todo $x \in I(a)$. Haciendo uso de las propiedades 2), 3) y 5) obtenemos:

$$\int_E f = \int_{I(a)} f + \int_{E \setminus I(a)} f \geq \int_{I(a)} f \geq v(I(a)) \frac{f(a)}{2} > 0,$$

lo cual, evidentemente, contradice la hipótesis $\int_E f = 0$.

Por tanto, f puede ser positiva solo en sus puntos de discontinuidad o en los puntos de la frontera de E , pero f es integrable y E es admisible, luego estos puntos constituyen un conjunto de medida cero. Luego, f es cero casi dondequiera.♦

Observación. Esta propiedad junto a la propiedad 4) indica que un conjunto E tiene contenido cero si y solo si $\int_E 1 = 0$, es decir, los conjuntos de contenido cero coinciden con aquellos que tienen volumen cero en el sentido de la definición 2. De este modo no hay ninguna ambigüedad en las expresiones “conjunto de volumen o de contenido cero”.

7) Si f es integrable en un conjunto admisible E , entonces $|f|$ también es integrable en E y además se cumple:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

♦ Si f es integrable en E , entonces el conjunto de sus puntos de discontinuidad es de medida cero. Pero la función $|f|$ es continua en los puntos de continuidad de f , así que también el conjunto de los puntos de discontinuidad de $|f|$ es de medida cero y, por tanto, $|f|$ es integrable en E .

Por otra parte, aplicando la propiedad 3) a la desigualdad $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, se tiene que

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|,$$

con lo que se completa la demostración de la propiedad.♦

8) (**Teorema del valor medio**) Sea f integrable en un conjunto admisible E y tal que satisface la desigualdad:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Entonces existe un número $\mu \in [m, M]$, que se denomina **valor medio de f en E** , tal que:

$$\int_E f = \mu v(E).$$

◆ Si $v(E) = 0$, la propiedad se cumple evidentemente para cualquier valor de μ .

Supongamos que $v(E) \neq 0$ y apliquemos la propiedad 3) a la función f y las funciones constantes iguales a m y M para obtener:

$$m v(E) \leq \int_E f \leq M v(E),$$

de donde:

$$m \leq \frac{1}{v(E)} \int_E f \leq M.$$

Tomando $\mu = \frac{1}{v(E)} \int_E f$ se completa la demostración de la propiedad.◆

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la propiedad anterior y las propiedades de las funciones continuas sobre conjuntos compactos y conexo:

Corolario. Si f es continua en un conjunto E admisible, compacto y conexo, entonces existe un punto $x_0 \in E$ tal que:

$$\int_E f = f(x_0)v(E).$$

Puede probarse una proposición semejante al corolario anterior sin la suposición de que el conjunto E sea compacto, lo cual proponemos como ejercicio al lector (ejercicio 7).

La medición de conjuntos en \mathbf{R}^n , introducida por Jordan, permitió dar respuestas a dos problemas urgentes de fines del siglo xix: 1) la determinación de una condición necesaria y suficiente de integrabilidad en términos de los puntos de discontinuidad de la función y 2) la definición de longitud, área y volumen de una figura en la recta, el plano y el espacio tridimensional respectivamente, así como

generalizar la noción de medición de un conjunto en espacios \mathbf{R}^n . Sin embargo, las respuestas a estos dos problemas (y a otros que aquí no hemos tratado) que proporcionaba el contenido de Jordan, tenía algunos puntos débiles y no satisfizo totalmente a algunos matemáticos. Por ejemplo, la condición necesaria y suficiente de integrabilidad en términos del contenido de Jordan es menos elegante y mucho menos operativa que la que permite formular la noción de medida cero (según Lebesgue). Por otra parte, existen conjuntos relativamente simples a los cuales no puede asignársele un contenido según Jordan. En el ejemplo 3 vimos que este es el caso para el conjunto de los racionales pertenecientes a un intervalo de la recta y con el ejemplo 5, fuimos más lejos aún, construyendo un dominio del plano limitado por una curva cerrada (simple) al cual no puede asignársele un contenido según Jordan.

Desde muy joven el matemático francés Henri Lebesgue se va a motivar por la investigación de los problemas de la integración y por la definición de las magnitudes geométricas de longitud, área y volumen. Inicialmente sus reflexiones geométricas van a estar inspiradas por la lectura del curso de Jordan y por tanto estarán enmarcadas en las definiciones de integral de Riemann y de contenido de Jordan. Sin embargo, progresivamente va a adquirir conciencia de las insuficiencias tanto de esta integral como de la forma de medición de conjuntos mediante el contenido, esto lo llevará al desarrollo de una nueva teoría para la medición de conjuntos y a una definición de integral asociada a ella. Esta es la esencia de su tesis *Integral, longitud, área* (1902) y la base de la teoría que hoy referimos como **medida e integración según Lebesgue**. El desarrollo de las ideas de Lebesgue rebasa los objetivos de este texto y no las expondremos, el lector interesado puede consultar (Apostol, 1979). Con este breve comentario solo hemos pretendido contribuir a que el lector perciba la complejidad y el dinamismo en el desarrollo de dos conceptos esenciales en el análisis matemático: **La integración de funciones y la medición de conjuntos**.

Ejercicios propuestos

1. Indica si son admisibles o no los conjuntos siguientes:

- a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y < x\},$
- b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1, 0 \leq y < x\},$
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$

- d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- e) $\left\{x \in \mathbf{R} : x = \frac{p}{2^q}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad p = 1, 2, \dots, 2^q - 1\right\},$
- f) $\left\{\left(\frac{p}{2^q}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbf{R}^2 : q, n \in \mathbb{N}, \quad p = 1, 2, \dots, 2^q - 1\right\}.$

2. Halla el contenido exterior e interior de los conjuntos siguientes:

- a) $\left\{x \in [0, 1] : x = \frac{2m+1}{2^n}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots\right\},$
- b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\},$
- c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x \neq \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\}.$

3. Analiza la integrabilidad de las funciones siguientes en los conjuntos que se indican:

- a) $f(x, y) = xe^{xy}$ en $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$,
- b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ en $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ y
 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\},$
- c) $f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right), & x \neq \frac{1}{n} \\ 0, & x = \frac{1}{n}, 0 \end{cases}, \quad \text{en } \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$
- d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad \text{en el conjunto } C \text{ de Cantor,}$
- e) $f(x, y) = \frac{y}{x}$ en $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < y < x\}.$

4. Prueba que:
- Si E_1, \dots, E_m son conjuntos admisibles tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$
entonces $v\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \sum_{i=1}^m v(E_i)$.
 - Si $E_1 \subset E_2$ son admisibles, entonces $v(E_1) \leq v(E_2)$ y $v(E_2 \setminus E_1) = v(E_2) - v(E_1)$.
5. Sean f, g integrables en un conjunto E admisible. Prueba que las funciones $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $k(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ son integrables en E .
6. Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes y justifica tus respuestas:
- Existen funciones f integrables sobre un conjunto E acotado cuya frontera no tiene contenido cero.
 - Si $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ es una función constante y E un conjunto acotado con $v(\text{Fr}(E)) \neq 0$, entonces f no es integrable en E .
 - Si $f \in \mathcal{R}(E)$, entonces $f \in \mathcal{R}(A)$ cuando $A \subset E$.
 - Una función f definida y acotada en un conjunto E de contenido cero es integrable en E .
 - Una función f definida y acotada en un conjunto E de medida cero es integrable en E .
 - Sea $E = [0,1] \times [0,1]$ y $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $E \setminus \{(x,y) : x \neq y\}$, entonces f es integrable en E .
 - Si $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es continua y f es integrable sobre el conjunto admisible $E \subset \mathbf{R}^n$, entonces $g \circ f$ es integrable en E .
 - Si E es un conjunto admisible, entonces f es integrable en E si y solo si es integrable en \bar{E} .
7. Sea E un conjunto admisible y conexo (no necesariamente cerrado). Si f es continua y acotada en E , entonces existe un punto $x_0 \in E$ tal que

$$\int_E f = f(x_0)v(E).$$

Ejercicios complementarios

1. Prueba que si E es un conjunto admisible en \mathbf{R}^n , $v(E) > 0$ y f es una función definida e integrable en E , continua en el punto a interior a E , entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{v(B(a, \delta) \cap E)} \int_{B(a, \delta) \cap E} f = f(a).$$

2. Sea la función $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \text{ sin divisores comunes.} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable y que el conjunto de sus puntos de discontinuidad no tiene contenido cero en \mathbf{R} . ¿Cuánto vale $\int_0^1 f$?

3. Sea E un conjunto admisible en \mathbf{R}^n y $f : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ continua e integrable en E .

Demuestra que si $M = \sup_{x \in E} f(x)$, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_E f^k(x) dx \right)^{1/k} = M.$$

4. Sea f definida y acotada en un rectángulo $I = [a,b] \times [c,d]$. Supongamos que para cada y fijo de $[c,d]$, $f(x,y)$ es una función creciente de x y que, para cada x fijo de $[a,b]$, $f(x,y)$ es una función creciente de y . Prueba que $f \in \mathcal{R}(I)$.

5. Sea $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$, con $a + b^2 + c^2 > r^2$. Usando

el teorema del valor medio, demuestra que:

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} f = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r \theta},$$

donde $\theta \in (-1, 1)$.

6. Sea I un rectángulo de \mathbf{R}^n y A un subconjunto de I tal que $\bar{A} = I$. Consideremos las funciones f y g integrables en I y tales que $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in A$. Prueba que $\int_I f \leq \int_I g$.
7. Una curva C de \mathbf{R}^2 se dice rectificable si el conjunto de las longitudes de las poligonales inscritas en C es acotado.
- a) Prueba que si una curva es rectificable, entonces el conjunto de sus puntos tiene área cero.
- b) Muestra que la curva dada por:

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

no es rectificable, pero que su gráfico constituye un conjunto de área cero.

8. Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto acotado y denotemos por P y Q figuras poligonales planas (es decir, conjuntos acotados cuya frontera está constituida por un número finito de segmentos de recta), tales que $P \subset E$ y $Q \supset E$. Prueba que:

$$a_i(E) = \sup \{a(P) : P \subset E\} \quad \text{y} \quad a_e(E) = \inf \{a(Q) : Q \supset E\},$$

donde a_i , a_e denotan respectivamente las áreas interior y exterior de E .

9. Denotemos por (x) la diferencia entre x y el entero más próximo a x y (x) será cero cuando x equidiste de dos enteros. La función dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

fue introducida por Riemann como ejemplo de función integrable cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto denso y a ella nos referimos en el epígrafe V.2. Prueba que f es integrable en cualquier intervalo finito y que tiene como puntos de discontinuidad a los racionales de la forma $x = (2k+1)/2n$ (k y n enteros).

CAPÍTULO VI

CÁLCULO DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE

INTRODUCCIÓN

En su famosa obra en tres tomos, *Cálculo Integral* (1768-70), Euler se limita a la integración de funciones de una variable. Sin embargo, en el trabajo *Sobre integrales dobles* (1768) que presenta a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, expone sus ideas sobre lo que debe entenderse por integral de una función de dos variables. Para Euler la integral de una función de dos variables independientes presentaba dos facetas: la explicaba como un proceso de integración reiterada, es decir, la integración primero en una variable y después en la otra, pero, en las aplicaciones, la concebía como una “suma de objetos elementales” adecuados a cada problema. Esta misma idea estará presente en la obra de sus seguidores quienes, además, la extenderán a la integración de funciones de tres variables. Por supuesto, los conjuntos sobre los que se realizaban tales integraciones eran de estructura muy simple, como rectángulos, regiones circulares o elípticas, etc, no había razón alguna para dudar de la existencia de estas integrales, casi siempre asociadas a una magnitud geométrica o física, y en el propio concepto estaba incluido el método de cálculo: la reducción de una integral múltiple a dos o tres integrales respecto a una sola variable.

Uno de los aportes más significativos de Euler en relación con las integrales dobles es la discusión que realiza de la forma de proceder para el cambio de variables en este tipo de integrales. Esta discusión resulta una excelente pieza demostrativa de la forma de razonamiento matemático del siglo XVIII.

Euler comienza analizando el caso más simple de la integral $\iint dxdy$ para transformaciones de coordenadas sencillas. La interpretación geométrica de estos casos particulares le permite descartar algunas formas de manipulación de los

diferenciales dx y dy que no proporcionan resultados correctos. Finalmente, este procedimiento heurístico le conduce a la fórmula:

$$\iint Z dx dy = \pm \iint Z(VR - ST) dt du,$$

donde $dx = Rdt + Sdu$, $dy = Tdt + Vdu$ y Z es una función de x, y . El signo $+$ o $-$ se toma de modo que $\pm(VR - ST)$ sea siempre positivo. Sugerimos al lector que compare la igualdad anterior con la fórmula para el cambio de variables proporcionada por el Teorema 4.

Estas herramientas desarrolladas por Euler y perfeccionadas por sus continuadores, se convirtieron en un instrumento muy útil y adecuado para las aplicaciones de la integración a la resolución de problemas geométricos y físicos. No obstante, como consecuencia del desarrollo del análisis matemático, se produjeron cambios esenciales que influyeron decisivamente en el surgimiento de una noción abstracta de integral múltiple y la necesidad de justificación de los métodos utilizados para su cálculo. Era un imperativo de la época la formulación de una definición rigurosa de integral múltiple y la obtención, a partir de ella, de las propiedades básicas para la integración de funciones de varias variables. En particular, era necesario dilucidar bajo qué condiciones era correcta *la reducción de las integrales múltiples a integrales iteradas*.

En el capítulo anterior comentamos que la posibilidad de dar una definición rigurosa de integral múltiple como límite de sumas integrales se hizo realidad solo después de la aparición, en los últimos años del siglo XIX, del concepto de conjunto medible según Jordan. Sin embargo, la reducción de una integral múltiple a integraciones simples presentaba otras dificultades. Por ejemplo, el matemático alemán Paul du Bois-Reymond mostró con un ejemplo (1883) que puede existir

$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy$, pero no existir la integral $\int_0^1 f(x, y) dx$ para un conjunto de valores de y con contenido exterior igual a 1 y tampoco existir $\int_0^1 f(x, y) dy$ para un conjunto de valores de x con contenido exterior igual a 1. Por tanto, en este ejemplo carecen de significado las integrales iteradas $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ y $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$. (ver ejemplo 11). Esto motivó a du Bois-Reymond a enunciar y demostrar un teorema acerca de la reducción de una integral múltiple a integrales iteradas en un rectángulo, donde la integral interna es sustituida por la integral superior.

Cuando Jordan introduce el concepto de contenido de un conjunto y lo utiliza para construir una teoría rigurosa para la integración de Riemann múltiple, también generaliza el teorema de du Bois Reymond para integrales sobre conjuntos arbitrarios medibles (es decir, cuando el contenido interior y exterior coinciden).

En este capítulo estudiaremos los dos métodos fundamentales que se utilizan para el cálculo de las integrales múltiples: la reducción a integraciones iteradas sucesivas y la realización de cambios de variables. Culminamos el capítulo con la generalización de la noción de integral a los casos cuando no se impone la condición de acotación, bien sobre la función, bien sobre el conjunto de integración, bien sobre ambos.

VI.1. REDUCCIÓN A INTEGRALES ITERADAS

Desde la segunda mitad del siglo XIX, varios matemáticos formularon y demostraron condiciones para la reducción de una integral múltiple a integrales iteradas. Estos teoremas alcanzaron su mayor generalidad y elegancia cuando hicieron su aparición las nociones de medida e integral formuladas por Lebesgue, quien enunció también un teorema relativo a la reducción a integrales iteradas. Sin embargo, se deberá al italiano Guido Fubini el resultado, en su forma más acabada (1907), para la integral de Lebesgue. Tal vez sea por esta razón, que es común denominar “teorema de Fubini” a cualquier proposición cuyo objetivo sea dar condiciones para reducir una integral múltiple a integrales iteradas, con independencia del grado de generalidad que ésta tenga. También nosotros adoptaremos esta forma de denominación.

Comencemos estudiando el caso más sencillo posible, la integral de una función sobre un rectángulo de \mathbf{R}^2 . En este caso particular es posible realizar un razonamiento heurístico que permite llegar de manera natural a la fórmula deseada.

Sea f una función integrable sobre el rectángulo $I = [a, b] \times [c, d]$ y P una partición de I . Entonces P está dada por el producto cartesiano de una partición $\{x_i\}_{i=1}^m$ del intervalo $[a, b]$ y una

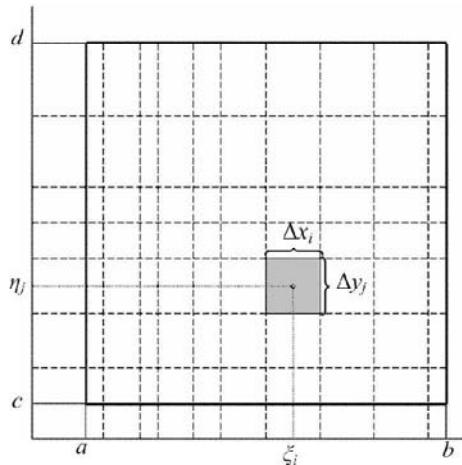


FIGURA 1.

partición $\{y_j\}_{j=1}^p$ del intervalo $[c,d]$ (Fig. 1). Una suma de Riemann para f y la partición P tiene la forma:

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^p f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right),$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

Así que, dado un $\varepsilon > 0$, se encuentra una partición P_ε , tal que, si P es más fina que P_ε , entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^m \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^p f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) - \iint_I f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon$$

La suma entre paréntesis en la expresión anterior puede ser interpretada como una suma de Riemann para la función $y \mapsto f(\xi_i, y)$ en el intervalo $[c,d]$. Supongamos que, para cada $x \in [a,b]$ fijo, la función parcial $y \mapsto f(x, y)$ sea integrable en $[c,d]$, entonces “pasando al límite” en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\left| \sum_{i=1}^m \left(\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x_i - \iint_I f(x, y) dx dy \right| \leq \varepsilon.$$

Nuevamente estamos en presencia de una suma de Riemann, esta vez de la función $x \mapsto \int_a^b f(x, y) dy$ en el intervalo $[a,b]$. Por lo que podemos concluir que esta última función es integrable en $[a,b]$ y además:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_I f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

El lector puede comprobar que este resultado, obtenido en forma heurística, queda completamente justificado como un caso particular del Teorema 3, que veremos más adelante. Resumámoslo en el teorema siguiente.

Teorema 1 (de Fubini para rectángulos planos). Si $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$ y, para cada $x \in [a,b]$, la función $y \mapsto f(x, y)$ es integrable en $[c,d]$, entonces la función $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ es integrable en $[a,b]$ y se cumple la fórmula (1).

Observaciones. 1) Intercambiando los papeles de las variables x e y , obtenemos la igualdad:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_I f(x, y) dxdy$$

donde f es integrable en el rectángulo y la función parcial $x \mapsto f(x, y)$ es integrable en $[a, b]$, para cada $y \in [c, d]$.

2) Cuando f es una función continua en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, también será continua como función de cada variable por separado, así que tienen lugar las igualdades

$$\iint_I f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2)$$

3) Las integrales $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ y $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ se denominan **integrales iteradas**, en contraposición con la integral $\iint_I f(x, y) dxdy$ que hemos denominado **doble**.

Ejemplo 1. Calculemos:

$$J = \iint_I \frac{ydydx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

donde $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

La función $f(x, y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ es continua en I , por lo que puede aplicarse (2), es decir, podemos usar cualquier orden para las integrales iteradas:

$$J = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{ydx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Observemos que la integración primero en y resulta más fácil de realizar, así que utilizaremos la primera de las integrales iteradas de la expresión anterior.

Como:

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+2)^{1/2}},$$

obtenemos:

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+2)^{1/2}} \right) dx = \left[\ln \frac{x + (x^2+1)^{1/2}}{x + (x^2+2)^{1/2}} \right]_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Ejemplo 2. Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n} \right), \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad l, n, k \text{ enteros.}$$

Analicemos la existencia de la integral doble y las integrales iteradas de f en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Fijemos $x \in [0,1]$, como $2l-1 < 2^n$, entonces hay a lo sumo un número finito de valores de y donde f puede tomar el valor 1, es decir, la función $y \mapsto f(x, y)$ es cero excepto posiblemente en un conjunto finito de puntos del intervalo $[0,1]$. Luego:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = 0,$$

y por tanto **existe la integral iterada**:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0.$$

De forma completamente análoga puede verificarse que:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0.$$

Por otra parte, todo rectángulo $I_k \subset [0,1] \times [0,1]$ contiene tanto puntos de la forma $\left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n} \right)$ como puntos que no son de este tipo. Así que, para toda

partición P de $[0,1] \times [0,1]$ se cumplirá que $S(f,P) - s(f,P) = 1$ y la función f **no puede ser integrable en** $[0,1] \times [0,1]$. Este ejemplo nos muestra que:

La existencia de las integrales iteradas (e incluso su igualdad) no significa que la integral doble exista.

Ejemplo 3. Calculemos:

$$J = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy,$$

donde $D = [-1,1] \times [0,2]$.

La función integrando es continua en todo \mathbf{R}^2 , así que podemos escribir:

$$J = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|} dy.$$

Como:

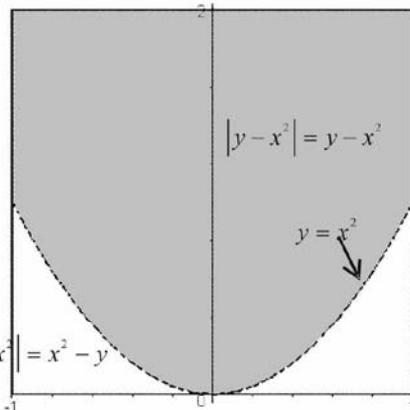


FIGURA 2.

$$|y - x^2| = \begin{cases} y - x^2, & \text{si } y \geq x^2 \\ x^2 - y, & \text{si } y < x^2 \end{cases} \quad (\text{Fig.2}),$$

para cada $x \in [-1,1]$, la integral interior se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|} dy &= \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy = \\ &= \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} (2 - x^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

Luego:

$$J = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} (2 - x^2)^{3/2} \right) dx = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

El Teorema 1 puede aplicarse para obtener fórmulas de cálculo para la integral doble sobre conjuntos diferentes de rectángulos, los cuales posean una estructura relativamente simple.

Sea E un conjunto de la forma

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (\text{Fig.3}), \quad (3)$$

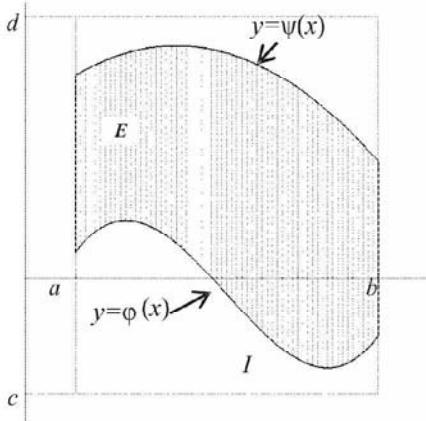


FIGURA 3.

donde φ y ψ son funciones continuas definidas en $[a, b]$ tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$, para todo $x \in [a, b]$. E es un compacto cuya frontera consta de cuatro partes: los gráficos de las curvas $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, y los segmentos de recta que unen los puntos $(a, \varphi(a))$ con $(a, \psi(a))$ y $(b, \varphi(b))$ con $(b, \psi(b))$. Como cada una de estas partes constituyen un conjunto de área cero, entonces E tiene frontera de área cero y, por tanto, es admisible.

Veamos cómo podemos calcular la

integral $\iint_E f(x, y) dxdy$. Supongá-

mos, para simplificar, que la función f es continua en E , así que todas las integrales que aparecerán estarán bien definidas.

Sean el rectángulo $I = [a, b] \times [c, d]$ tal que $E \subset I$ y la función f^*_E coincidente con f en los puntos de E y cero en los restantes puntos de I . Luego, por la definición de integral en un conjunto arbitrario E y el Teorema 1, podemos escribir:

$$\iint_E f(x, y) dxdy = \iint_I f^*_E(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*_E(x, y) dy \right) dx.$$

Fijemos $x \in [a, b]$, entonces la función $y \mapsto f^*_E(x, y)$ es igual a f cuando $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$ y cero en otro caso. Por tanto la integral interna en la expresión anterior es igual a:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Así que tiene lugar la igualdad:

$$\iint_E f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx, \quad (4)$$

que permite el cálculo de la integral doble de una función en un conjunto del tipo señalado.

El razonamiento anterior es completamente válido si, en lugar de la continuidad de f en E , se supone la integrabilidad de f en E y la existencia de la integral interior en la fórmula (4), para todo x de $[a,b]$.

El teorema a continuación resume el resultado obtenido:

Teorema 2. Sea E un conjunto de la forma dada en (3) y una función $f \in \mathbf{R}(E)$

tal que para todo x de $[a,b]$ existe la integral $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Entonces también existe la integral iterada $\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$ y tiene lugar la relación (4).

Es claro que puede obtenerse un resultado análogo para conjuntos de la forma (Fig. 4):

$$\{(x,y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

con φ y ψ continuas en el intervalo $[c,d]$.

Ejemplo 4. Sea f una función continua en el triángulo cerrado D con vértices en los puntos $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$. Escribamos la integral doble

$\iint_D f(x,y)dxdy$ a través de las integrales iteradas.

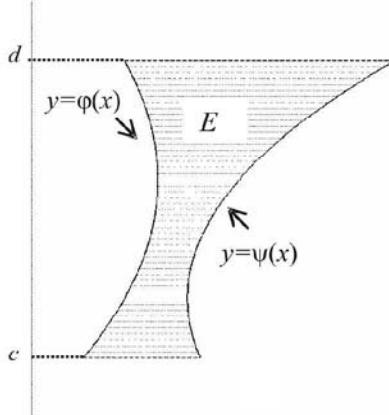


FIGURA 4.

Si la integración se realiza primero en y y después en x , entonces es conveniente descomponer el conjunto D como $D = D_1 \cup D_2$, (Fig. 5) donde:

$$D_1 = \left\{ (x,y) : -2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\} \quad \text{y} \quad D_2 = \left\{ (x,y) : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

son conjuntos del tipo dado por (3). Usando la propiedad aditiva de la integral, podemos escribir:

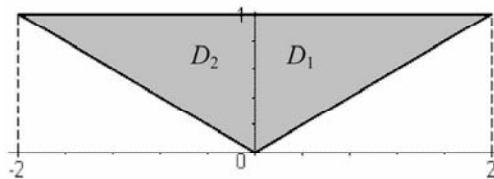


FIGURA 5.

$$\begin{aligned} J &= \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy = \\ &= \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando la integración se hace primero en x y después en y , entonces la integral se escribe simplemente como:

$$J = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx .$$

Ejemplo 5. Calculemos la integral:

$$J = \iint_D x^2 y dxdy ,$$

donde

$$D = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, y > 0\} .$$

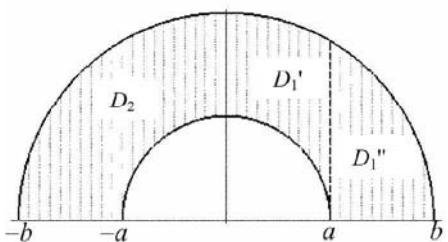


FIGURA 6.

Observemos que, la región D (Fig.6) es simétrica respecto el eje Y , además la función integrando no cambia su valor si sustituimos x por $-x$, luego, si D_1 y D_2 denotan las partes de D correspondientes a los cuadrantes primero y segundo respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} J &= \iint_D x^2 y dxdy = \iint_{D_1} x^2 y dxdy + \iint_{D_2} x^2 y dxdy = \\ &= 2 \iint_{D_1} x^2 y dxdy . \end{aligned}$$

Para calcular esta última integral, debemos dividir la región D_1 en dos partes, por ejemplo, mediante la recta $x = a$. Así que $D_1 = D_1' \cup D_1''$ y se cumple:

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x^2 y dxdy &= \iint_{D_1'} x^2 y dxdy + \iint_{D_1''} x^2 y dxdy = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 y dy + \int_a^b dx \int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 y dy = \\ &= \int_0^a (b^2 - a^2) x^2 dx + \int_a^b (b^2 - x^2) x^2 dx = \frac{2b^5}{15} - \frac{2a^5}{15} + \frac{a^3 b^2}{3} - \frac{b^2 a^3}{3} . \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Calculemos la integral:

$$J = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy ,$$

donde D está dado por (Fig.7):

$$D = \left\{ (x, y) : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 < x \leq 1 \right\}$$

En primer lugar observemos que la función integrando no está definida en el punto $(0,0)$. No obstante, ella es acotada en D , ya que

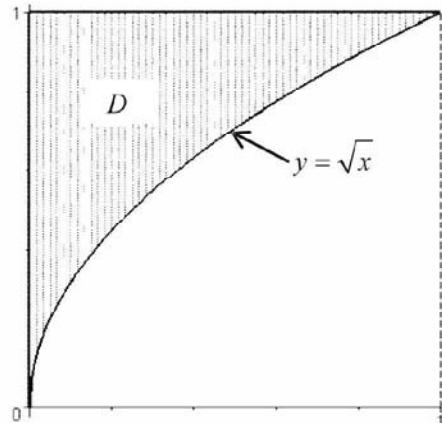


FIGURA 7.

$$0 \leq \frac{x}{y} \leq \sqrt{x} \leq 1 .$$

Como D tiene frontera de área cero y el integrando es una función continua en D , excepto en un punto, entonces será integrable en D y podemos aplicar el Teorema 2, para obtener:

$$J = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy .$$

Pero la integral interior no se expresa en términos de funciones elementales, por lo que calcularla exactamente no podemos.

Sin embargo, el conjunto D también puede ser escrito en la forma:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq 1\},$$

lo que nos permite invertir el orden de integración. Por lo tanto se tiene:

$$J = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int_0^1 (ye^y - y) dy = \frac{1}{2}.$$

Para funciones definidas sobre rectángulos o subconjuntos admisibles de \mathbf{R}^3 se cumplen resultados análogos a los teoremas 1 y 2. Enunciamos estos resultados en los teoremas 1' y 2' respectivamente. El Teorema 1' es un caso particular del Teorema 3, que veremos más adelante, y el Teorema 2' veremos que se obtiene del 1' con el mismo procedimiento con que obtuvimos el Teorema 2 del 1.

Teorema 1' (de Fubini para rectángulos en \mathbf{R}^3). Sean el rectángulo:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

y la función $f \in \mathcal{R}(I)$. Supongamos que, para cada $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ la función $z \mapsto f(x, y, z)$ es integrable en $[a_3, b_3]$, entonces la función

$(x, y) \mapsto \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$ es integrable en $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y se cumple:

$$\iiint_I f(x, y, z) dxdydz = \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

Por supuesto que resultados análogos pueden enunciarse para las integrales iteradas donde la integral interna se realiza respecto a x o a y .

Una aplicación del Teorema 1 a la integral exterior nos conduciría a la igualdad:

$$\iiint_I f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz,$$

siempre que todas las integrales involucradas existan. En particular,

Si f es continua en I , entonces la integral triple podrá ser reducida a tres integraciones simples reiteradas y en cualquier orden.

Ejemplo 7. Sea la función $f(x,y,z) = z \operatorname{sen}(x+y)$ definida en el rectángulo I dado por las desigualdades $0 \leq x \leq \pi$, $|y| \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq 1$ y calculemos la integral de f en I .

La función f es continua en I . Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \iiint_I z \operatorname{sen}(x+y) dx dy dz &= \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 z \operatorname{sen}(x+y) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+y) dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(-\cos(x+y) \Big|_{y=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) dx = \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = 2. \end{aligned}$$

También en \mathbf{R}^3 podemos identificar conjuntos sobre los cuales la integral puede ser calculada mediante integrales iteradas. Por ejemplo, si:

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (\text{Fig.8}), \quad (5)$$

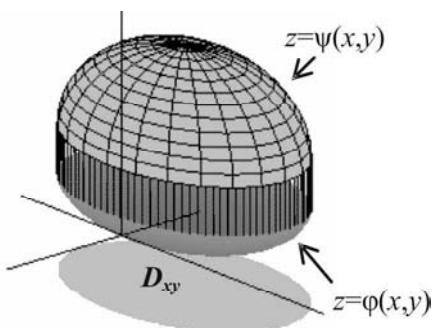


FIGURA 8.

donde φ y ψ son funciones continuas definidas en un conjunto admisible $D_{xy} \subset \mathbf{R}^2$ y tales que $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in D_{xy}$. Puede demostrarse fácilmente que K es un conjunto admisible en \mathbf{R}^3 .

Sea f una función integrable sobre K y veamos cómo podemos calcular la integral:

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz.$$

Consideremos el rectángulo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ tal que $K \subset I$, por tanto $D_{xy} \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y, como es habitual, sea f^*_K la extensión de f al rectángulo I . Entonces, por la definición de integral en un conjunto acotado y el Teorema 1', podemos escribir:

$$\begin{aligned} \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_I f^*_K(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f^*_K(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \end{aligned}$$

ya que:

$$f^*_K(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{si } (x, y) \in D_{xy}, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \\ 0 & \text{en otro punto de } I \end{cases}.$$

Luego:

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (6)$$

Hemos obtenido el teorema siguiente:

Teorema 2'. Sea un conjunto K de la forma dada en (5) y una función $f \in \mathcal{R}(K)$ tal que para cada $(x, y) \subset D_{xy}$ exista la integral:

$$\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Entonces también existe la integral iterada $\iint_{D_{xy}} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$ y se cumple la fórmula (6).

Es claro que se tiene un resultado análogo para conjuntos de cualquiera de las formas:

$$\{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, \varphi(y, z) \leq x \leq \psi(y, z)\},$$

$$\{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, \varphi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z)\},$$

con j y y continuas en los conjuntos D_{yz} o D_{xz} según el caso.

Ejemplo 8. Verifiquemos que el sólido cilíndrico K , considerado en la introducción del capítulo V (Fig. V. 2),

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

donde f es una función continua en Q , es admisible y su volumen viene dado por

$$V = \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

En efecto, la frontera de K está constituida por la porción de la superficie $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in Q$ y las cinco figuras planas que constituyen “las caras” de K . Se demuestra fácilmente (ver ejemplo 2 y ejercicio 4 del epígrafe V.2) que todos estos conjuntos de puntos de \mathbf{R}^3 tienen contenido cero, así que K tiene frontera de volumen cero y por tanto es admisible.

De acuerdo con la definición de volumen, tenemos que:

$$V = \iiint_K 1 \cdot dx dy dz.$$

Aplicando el Teorema 2', esta integral se transforma en:

$$V = \iint_Q dx dy \int_0^{f(x, y)} 1 \cdot dz = \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

Ejemplo 9. Calculemos el volumen del cuerpo K limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ (Fig. 9).

Debemos calcular la integral:

$$v(K) = \iiint_K dx dy dz,$$

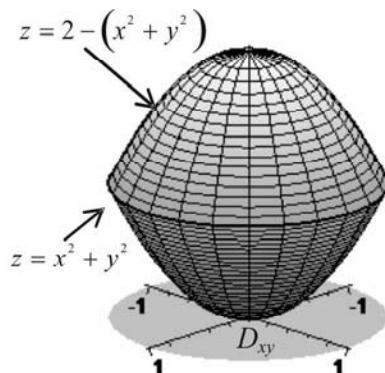


FIGURA 9.

donde K puede escribirse en la forma:

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Entonces

$$v(K) = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)} dz,$$

con:

$$D_{xy} = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Luego:

$$v(K) = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)} dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2 - 2(x^2 + y^2)) dy = \pi.$$

Ejemplo.10. Calculemos:

$$\iiint_K x^2 dxdydz,$$

donde K (Fig.10) está limitado por las superficies

$$\begin{aligned} z &= ay^2, \quad z = by^2, \quad (y > 0, 0 < a < b), \\ z &= cx, \quad (0 < c < d), \quad z = h \quad (h > 0). \end{aligned}$$

El cuerpo K está limitado por las superficies cilíndricas $z = ay^2$, $z = by^2$, $z = h$, así que la proyección de K sobre el plano YZ queda determinada por las directrices de estas superficies. De este modo, resulta más sencillo escribir K en la forma:

$$K = \left\{ (x, y, z) : \frac{z}{d} \leq x \leq \frac{z}{c}, (y, z) \in D \right\},$$

donde:

$$D = \left\{ (y, z) : 0 \leq z \leq h, \sqrt{\frac{z}{b}} \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{a}} \right\} \quad (\text{Fig.11}).$$

Apliquemos primero el Teorema 2' para reducir la integral triple a una doble y una simple y después el 1' para calcular la integral doble obtenida:

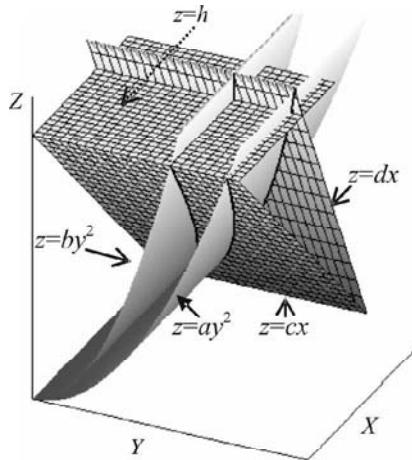


FIGURA 10.

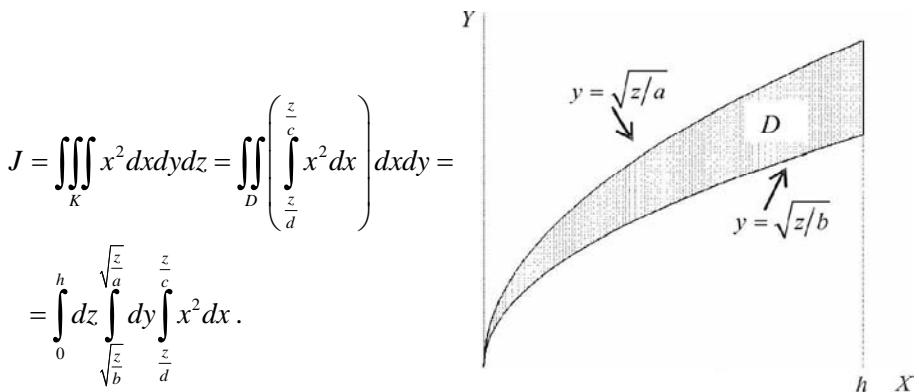


FIGURA 11.

Como:

$$\int_{\frac{z}{d}}^{\frac{z}{c}} x^2 dx = \frac{z^3}{3} [c^{-3} - d^{-3}],$$

entonces:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} \frac{z^3}{3} (c^{-3} - d^{-3}) dy = \frac{1}{3} (c^{-3} - d^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) \int_0^h z^{\frac{7}{2}} dz = \\ &= \frac{2}{27} (c^{-3} - d^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) h^{\frac{9}{2}}. \end{aligned}$$

Pasemos ahora a considerar el enunciado y demostración, en el caso lo más general posible, del teorema de Fubini para la integral de Riemann. Primera-mente hagamos algunas aclaraciones y convenios referentes a la notación que utilizaremos.

Cuando se tiene un rectángulo en un espacio de dimensión mayor que dos, este puede descomponerse de varias formas en productos cartesianos de rectángulos de dimensión menor. Por ejemplo, el rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ en \mathbf{R}^3 puede ser considerado como el producto cartesiano del rectángulo $[a_1, b_1]$ de \mathbf{R} y el rectángulo $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ de \mathbf{R}^2 , pero también como el producto

del rectángulo plano $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y el rectángulo $[a_3, b_3]$ en \mathbf{R} . En lo que sigue consideraremos rectángulos en un espacio \mathbf{R}^{n+m} con $n, m \geq 1$ representados en la forma $A \times B$, donde A es un rectángulo de \mathbf{R}^n y B uno de \mathbf{R}^m . Los puntos de $A \times B$ los denotaremos en la forma (x, y) , donde $x \in A$ y $y \in B$.

Sea f una función definida en el rectángulo $A \times B$ de \mathbf{R}^{n+m} , el símbolo:

$$\int\limits_A dx \int\limits_B f(x, y) dy,$$

se interpretará de la forma siguiente: para un valor fijo $x \in A$ se calcula la integral:

$$F(x) = \int\limits_B f(x, y) dy$$

en el rectángulo B y la función $F(x)$ así obtenida se integra en el rectángulo A .

Si para el valor seleccionado de x , la integral $\int\limits_B f(x, y) dy$ no existe, entonces se considera, para la función $F(x)$, un valor cualquiera comprendido entre las correspondientes integrales inferior y superior. Como consecuencia del teorema que demostraremos a continuación, se tendrá que la integral $\int\limits_B f(x, y) dy$ existe para casi todos los $x \in A$, es decir, para todos con excepción, a lo sumo, de un conjunto de medida cero.

Intercambiando los papeles de los conjuntos A y B y de las variables x e y se puede establecer un convenio semejante para interpretar la integral:

$$\int\limits_B dy \int\limits_A f(x, y) dx .$$

Teorema 3. (de Fubini). Si la función $f : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ es integrable en el rectángulo $A \times B$ de \mathbf{R}^{n+m} , entonces las integrales:

$$\int\limits_A dx \int\limits_B f(x, y) dy \quad \text{y} \quad \int\limits_B dy \int\limits_A f(x, y) dx$$

existen y además se cumple que:

$$\iint\limits_{A \times B} f(x, y) dxdy = \int\limits_A dx \int\limits_B f(x, y) dy = \int\limits_B dy \int\limits_A f(x, y) dx .$$

- ◆ Cualquier partición P del rectángulo $A \times B$ se determina por las correspondientes particiones P_A y P_B de los rectángulos A y B . Además cada subrectángulo de la partición P está dado como el producto cartesiano $A \times B$ de subrectángulos A_i y B_j de P_A y P_B respectivamente. De la definición de volumen de un rectángulo se tiene:

$$v(A_i \times B_j) = v(A_i) \cdot v(B_j).$$

Para las sumas inferiores y superiores $s(f, P)$ y $S(f, P)$ correspondientes a cualquier partición P tiene lugar:

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) v(A_i \times B_j) \leq \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_i \inf_{x \in A_i} \left(\sum_j \inf_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j) \right) v(A_i) \leq \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \sum_i \inf_{x \in A_i} F(x) v(A_i) \leq \sum_i \sup_{x \in A_i} F(x) v(A_i) \leq \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \sum_i \sup_{x \in A_i} \left(\sum_j \sup_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j) \right) v(A_i) \leq \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \sum_{i,j} \sup_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) v(A_i \times B_j) = S(f, P). \end{aligned} \quad (6)$$

Demostremos la desigualdad $\stackrel{(1)}{\leq}$. Evidentemente su primer miembro puede escribirse en la forma:

$$\sum_i v(A_i) \sum_j \inf_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) v(B_j).$$

Por otra parte, para todo $x \in A$, tiene lugar:

$$\inf_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) \leq \inf_{y \in B_j} f(x, y).$$

de donde:

$$\sum_j \inf_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) v(B_j) \leq \sum_j \inf_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j).$$

El miembro izquierdo de esta última desigualdad no depende de x , luego constituye una cota inferior del segundo miembro cuando x varía en el conjunto A_i . Así que

$$\sum_j \inf_{\substack{x \in A_i \\ y \in B_j}} f(x, y) v(B_j) \leq \inf_{x \in A_i} \sum_j \inf_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j),$$

y $\stackrel{(1)}{\leq}$ sigue inmediatamente de esta desigualdad multiplicando en ambos miembros por $v(A_i)$ y sumando en i .

La suma interior en el primer miembro de la desigualdad $\stackrel{(2)}{\leq}$, es decir,

$$\sum_j \inf_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j),$$

es una suma inferior para la función parcial $y \mapsto f(x, y)$ en el conjunto B , para $x \in A$ fijo y, por tanto, es menor o igual que la integral inferior correspondiente a dicha función. Luego, por el convenio realizado,

$$\sum_j \inf_{y \in B_j} f(x, y) v(B_j) \leq F(x), \text{ para todo } x \in A.$$

Esto justifica $\stackrel{(2)}{\leq}$.

Las pruebas de $\stackrel{(3)}{\leq}$ y $\stackrel{(4)}{\leq}$ son semejantes a las de $\stackrel{(2)}{\leq}$ y $\stackrel{(1)}{\leq}$ respectivamente, solo que utilizando el supremo en lugar del ínfimo.

Como $f \in \mathcal{R}(A \times B)$, entonces el primer y último miembro de la cadena de desigualdades en (6) tienen como límite $\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy$ (según cualquiera de las bases definidas en el conjunto de las particiones Π del rectángulo $A \times B$). De modo que también $\sum_i \sup_{x \in A_i} F(x) v(A_i)$, $\sum_i \inf_{x \in A_i} F(x) v(A_i)$ y, por tanto, cualquier suma de Riemann de la función F se acercarán a ese mismo límite, según la base correspondiente en el rectángulo A (ejercicio V.I, 3). Esto significa que la función $F \in \mathcal{R}(A)$ y además:

$$\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A dx \int_B f(x, y) dy.$$

Hemos probado el teorema para la integral iterada, realizada primero en el rectángulo B y después en el A . Un razonamiento análogo puede hacerse para la integral iterada donde la primera integración se realiza en A y la segunda en B .◆

Veamos algunas consecuencias de este teorema.

Corolario 1. Sea $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ y denotemos por $\bar{J}_B(f)$ e $J_B(f)$ (resp. $\bar{J}_A(f)$ e $J_A(f)$) las integrales superior e inferior de la función $y \mapsto f(x, y)$ en el conjunto B (resp. $x \mapsto f(x, y)$ en el conjunto A). Entonces existen las integrales

$$\int_A \bar{J}_B(f) dx, \quad \int_A J_B(f) dx, \quad \int_B \bar{J}_A(f) dy, \quad \int_B J_A(f) dy$$

y todas son iguales a $\iint_{A \times B} f(x, y) dxdy$.

◆ Este resultado sigue inmediatamente del teorema de Fubini. Simplemente debe considerarse para la función $F(x)$, en cada caso, siempre el valor correspondiente a la integral superior o a la integral inferior.◆

Corolario 2. Si $f \in \mathcal{R}(A \times B)$, entonces la integral $\int_B f(x, y) dy$ existe para todo $x \in A$, excepto a lo sumo en un conjunto de medida cero y la integral $\int_A f(x, y) dx$ existe para todo $y \in B$, excepto a lo sumo para un conjunto de medida cero.

◆ Haciendo uso del corolario anterior, vemos que:

$$\int_A [\bar{J}_B(f) - J_B(f)] dx = 0.$$

Pero la cantidad entre corchetes que está en el integrando es siempre positiva o nula, y por la propiedad 6) de V.2 podemos afirmar que $J_B(f) = \bar{J}_B(f)$, salvo a lo sumo en un conjunto de medida cero. Por tanto existe $\int_B f(x, y) dy$

casi donde quiera en A . Esto demuestra la primera parte del corolario. De forma completamente análoga se demuestra la segunda parte.♦

Corolario 3. Si la función f es integrable en el rectángulo $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ de \mathbf{R}^n entonces

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n,$$

suponiendo que todas las integrales involucradas en el miembro derecho existan.

Ejemplo 11. Consideremos la función $f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^p}, & \text{cuando } (x, y) = \left(\frac{2n+1}{2^p}, \frac{2m+1}{2^q}\right), \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$n, m, p, q = 1, 2, 3, \dots$ y las fracciones se suponen irreducibles.

Esta función es integrable en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ ya que sus puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida cero. Sin embargo, cuando fijamos $x = \frac{2n+1}{2^p}$ la función parcial $y \mapsto f(x, y)$ es discontinua para todo valor

de y por lo que la integral $\int_0^1 f(x, y) dy$ no existe. Para dar un sentido a la

integral iterada en este caso, es preciso, para todos estos valores de x (que forman un conjunto de contenido exterior 1, pero medida cero), hacer uso del convenio establecido con anterioridad al Teorema 3, asignando a la función $F(x)$ un valor comprendido entre la integral inferior y superior de f respecto a y en el intervalo $[0,1]$.

Al igual que en el caso de las integrales dobles y triples, las integrales de funciones f definidas sobre ciertos subconjuntos admisibles E de \mathbf{R}^n pueden expresarse mediante integrales iteradas, aplicando el teorema de Fubini a la extensión f_E^* de la función f a un rectángulo que contenga a E :

Corolario 4. Sea D un conjunto admisible en \mathbf{R}^{n-1} y

$$E = \{(x, y) : x \in D, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

donde φ y ψ son continuas en D . Si $f \in \mathcal{R}(E)$, entonces

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_D dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

En particular, el volumen de E se calcula por la fórmula

$$v(E) = \int_D (\varphi(x) - \psi(x)) dx.$$

Ejercicios propuestos

1. Calcula, si existen, las integrales siguientes:

a) $\iint_D ye^{xy} dx dy$, donde $D = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\iint_D (x+y) dx dy$, donde D es el compacto limitado por $y^2 = 2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

c) $\iint_D (1+x) \operatorname{sen} y dx dy$, donde D es el cuadrilátero con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$.

d) $\iint_D xy^2 dx dy$, donde D es el compacto limitado por $y^2 = 2px$, y $x=p$.

e) $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$, donde $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

f) $\iiint_K dx dy dz$, donde K es el cuerpo limitado por los tres planos coordenados, la superficie $z = x^2 + y^2$, y el plano $x+y=1$.

g) $\iint_D f(x, y) dx dy$, donde $D = [0,1] \times [0,1]$ y f está dada por:

i) $f(x, y) = \begin{cases} 1-x-y, & x+y \leq 1 \\ 0 & , \text{ en los otros puntos de } D \end{cases}$,

$$\text{ii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - y^2}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

2. Sea f una función continua en el conjunto D . Escribe la integral doble

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ a través de las integrales iteradas si:}$$

a) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}.$

b) D es el compacto limitado por la curva $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

3. Sea f una función continua en el conjunto K . Escribe la integral triple

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz \text{ a través de las integrales iteradas si:}$$

a) K es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) K es el cilindro limitado por las superficies $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$, ($R > 0$, $H > 0$).

c) $K = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c \right\}$, ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

4. Intercambia el orden de integración en las siguientes integrales iteradas, suponiendo que la función f es continua:

a) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$

b) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dx dy$

c) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

d) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$

e) $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$

f) $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$

5. Calcula el volumen del conjunto K si:

a) $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$

- b) $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3x + y, 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x > 0, y > 0\}.$
6. Sean las funciones $f_i \in \mathbf{R}([a_i, b_i]), i = 1, \dots, n$. Prueba que la función:

$$F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$$

es integrable en el conjunto $S = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y se cumple:

$$\int_S F(x) dx = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right).$$

7. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 4y^3, & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}.$$

Prueba que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1$, pero $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ no existe.

8. (Principio de Cavalieri) Sean K y L dos subconjuntos de \mathbf{R}^3 admisibles y situados entre los planos $z = a$ y $z = b$. Para $c \in [a, b]$ definamos las secciones planas de K como:

$$K_c = \{(x, y) : (x, y, c) \in K\}.$$

De forma análoga se definen las secciones planas de L . Prueba que si para todo $c \in [a, b]$, K_c y L_c son admisibles y tienen áreas iguales, entonces $v(K) = v(L)$.

VI.2. CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Uno de los teoremas más importantes en la integración múltiple es el que permite la realización de cambios de variables. La fórmula en este teorema es una extensión de la estudiada para el caso de funciones de una variable:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Para la validez de esta igualdad es común exigir como hipótesis que la función φ tenga derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y la función f sea continua en $\varphi([a, b])$.

Consideremos el caso especial cuando la función derivada φ' no se anula en $[a,b]$, esto significa que es siempre positiva o negativa. Por ejemplo, si φ' es positiva, entonces φ es creciente, así que $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ y la igualdad anterior se describe en la forma:

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)dx = \int_{[a,b]} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Análogamente, si φ' es negativa, entonces φ es decreciente y se obtiene:

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)dx = - \int_{[a,b]} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ambas expresiones pueden ser unificadas como:

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)dx = \int_{[a,b]} f[\varphi(t)]|\varphi'(t)|dt \quad (1)$$

Así que, **para funciones de una variable** tenemos el resultado:

Si φ es de clase C^1 en $[a,b]$, $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ y f es continua en $\varphi([a,b])$, entonces tiene lugar (1).

Nos proponemos generalizar a las integrales de funciones de varias variables el teorema del cambio de variables en la forma enunciada anteriormente.

Estudiemos primeramente qué tipos de funciones φ consideraremos adecuadas para realizar los cambios de variables en las integrales múltiples.

Definición 1. Sea U un conjunto abierto. Una función $\varphi: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que satisfaga

- φ es de clase C^1 en U ,
- φ es inyectiva en U ,
- $\det(\varphi'(x)) \neq 0$, para todo $x \in U$,

se denomina **transformación de coordenadas, cambio de variables, o difeomorfismo** en U .

Observación. 1) Notemos que, haciendo uso del teorema de la función inversa, las tres condiciones exigidas a una función φ para que sea una transformación de coordenadas garantizan que φ tiene una inversa diferenciable en el conjunto $\varphi(U)$.

2) Cuando $n = 1$, la condición $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ implica que φ es inyectiva. Así que las funciones φ consideradas en (1) son siempre cambios de variables en el sentido de la definición anterior.

Veamos los casos particulares de transformaciones de coordenadas que son de uso más frecuente.

Transformación lineal

Una aplicación $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ lineal es inyectiva si y solo si el determinante de la matriz asociada es distinto de cero (matriz no singular). En este caso la matriz jacobiana de φ coincide con la matriz que la representa como aplicación lineal (en \mathbf{R}^n consideramos la base canónica). De modo que una aplicación lineal con matriz no singular es una transformación de coordenadas en \mathbf{R}^n , que denominaremos **transformación de coordenadas lineal**.

Para una transformación lineal (cuya matriz asociada sea no singular) la imagen de un conjunto de vectores linealmente independientes es también un conjunto de vectores linealmente independientes, en particular, esto significa que dos líneas rectas que no sean paralelas se transforman en dos líneas rectas no paralelas. Por ejemplo, consideremos $n = 2$ y sea:

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Entonces una recta de la forma $u = k$ se transforma en la recta de ecuaciones paramétricas:

$$x = ak + bv, \quad y = ck + dv,$$

donde el parámetro v toma todos los valores reales (ver Fig.12). Análogamente ocurre con las rectas de la forma $v = k$. Así que todo rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordinados) en el plano UV se transforma en un paralelogramo en el plano XY .

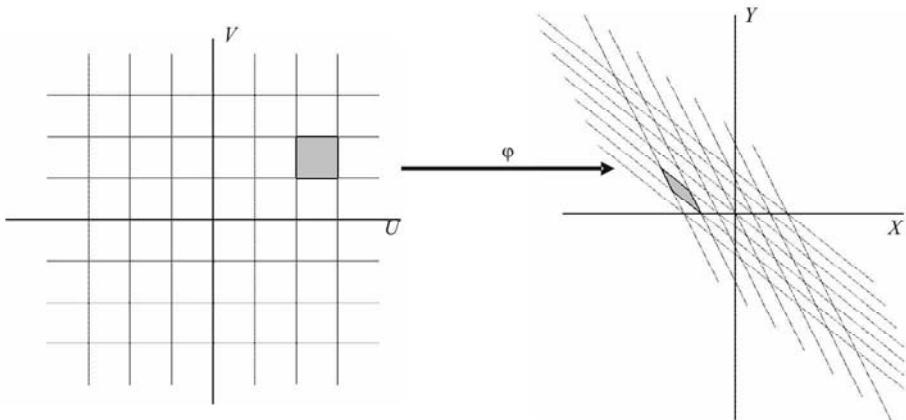


FIGURA 12.

Coordenadas Polares

La función $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, es decir:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

es continuamente diferenciable pero no inyectiva en todo su dominio. Conjuntos abiertos donde φ es inyectiva son, por ejemplo:

$$A_1 = \{(\rho, \theta): \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\} \quad \text{y} \quad A_2 = \{(\rho, \theta): \rho > 0, -\pi < \theta < \pi\}.$$

La matriz jacobiana de esta transformación es:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix},$$

por tanto $\det(\varphi'(\rho, \theta)) = \rho > 0$, en los conjuntos A_1 y A_2 considerados. Así que, en estos conjuntos, φ es una transformación de coordenadas que se denomina **transformación a coordenadas polares**.

La imagen de la recta de ecuación $\rho = c$ del plano (ρ, θ) resulta ser la circunferencia $x^2 + y^2 = c^2$ en el plano XY y la imagen de la recta de ecuación $\theta = \alpha$ es la semirrecta de ecuaciones paramétricas $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$, con $\rho \geq 0$ (Fig. 13). Así que un rectángulo (con lados paralelos a los ejes) en el plano (ρ, θ)

se convierte en un rectángulo curvilíneo limitado, en general, por dos arcos de circunferencia y dos semirrectas que parten del origen.

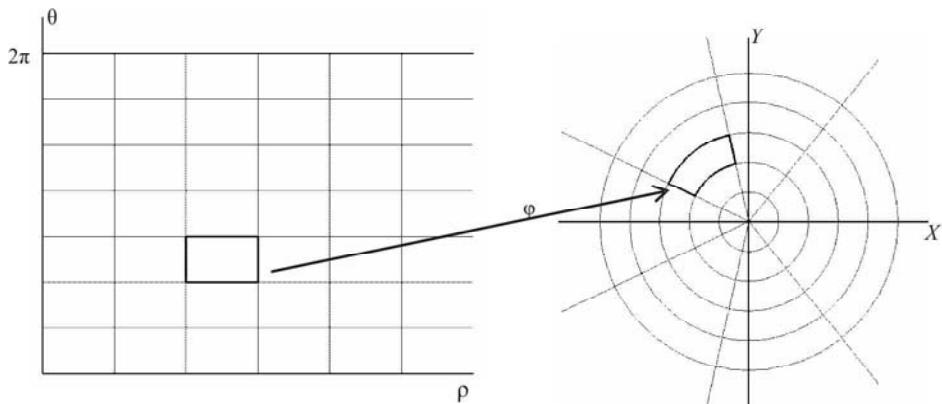


FIGURA 13.

Coordenadas cilíndricas

Puede verificarse que la aplicación que se define por $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z),$$

es decir por las ecuaciones:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

es una transformación de coordenadas, por ejemplo, en el conjunto abierto:

$$A = \{(\rho, \theta, z) : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbf{R}\},$$

cuyo determinante jacobiano es $\det(\varphi'(\rho, \theta, z)) = \rho$. Este cambio de variables se denomina **transformación a coordenadas cilíndricas**.

Puede interpretarse esta transformación como si en el plano XY se consideraran las coordenadas polares y la coordenada Z se dejara invariable.

Para tener una idea más clara de la forma en que actúa este cambio de variables, veamos cómo se transforman los planos $\rho = c$, $\theta = \alpha$ y $z = k$ (Fig. 14):

- $\rho = c$ se transforma en la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = c^2$, $z \in \mathbf{R}$.

- $\theta = \alpha$ se convierte en el semiplano que contiene al eje Z dado por las ecuaciones paramétricas $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$, $z \in \mathbf{R}$, $\rho \geq 0$.
- $z = k$ se transforma en sí mismo.

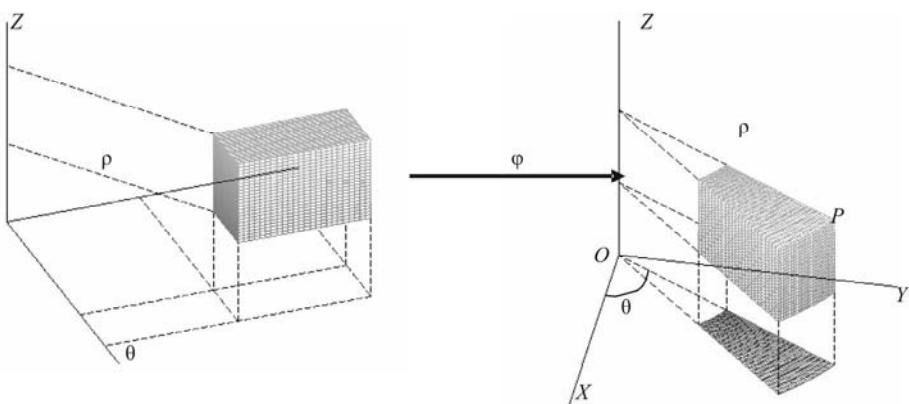


FIGURA 14.

Lo anterior nos indica que los rectángulos (ortoedros con caras paralelas a los planos coordenados) en el espacio de coordenadas (ρ, θ, z) se transforman, mediante el cambio de variables a coordenadas cilíndricas, en figuras limitadas por superficies cilíndricas circulares, planos que contienen al eje Z y planos paralelos al plano XY.

Coordenadas esféricas

Consideremos la aplicación $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por:

$$\varphi(\rho, \theta, \psi) = (\rho \sin \psi \cos \theta, \rho \sin \psi \sin \theta, \rho \cos \psi) \quad (\text{Fig. 15}),$$

es decir:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \psi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \psi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \psi \end{aligned}$$

Observemos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representa la distancia del punto (x, y, z) al origen de coordenadas, ψ puede ser interpretado como el ángulo que forma el

radio vector OP con el eje Z y θ como el ángulo que forma la proyección de OP en el plano XY con el eje X .

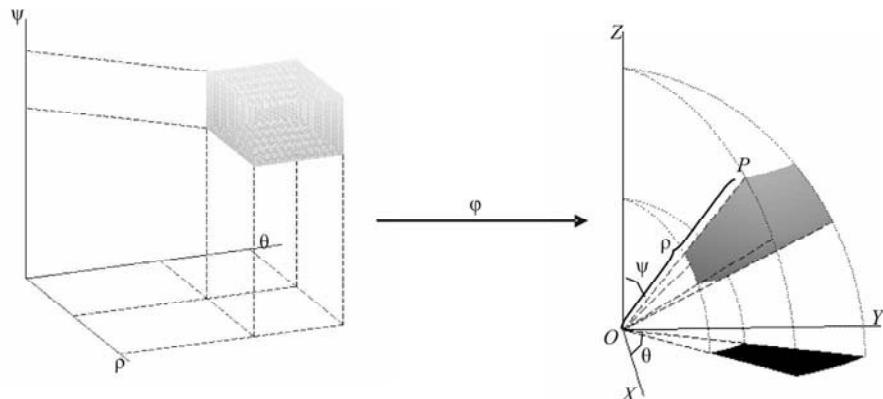


FIGURA 15.

Evidentemente, la función φ es de clase C^1 en \mathbf{R}^3 . Un abierto donde φ es inyectiva es:

$$A = \{(\rho, \theta, \psi) : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \psi < \pi\}.$$

La matriz jacobiana de φ es:

$$\varphi'(\rho, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \sin \psi \cos \theta & -\rho \sin \psi \sin \theta & \rho \cos \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \rho \sin \psi \cos \theta & \rho \cos \psi \sin \theta \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Su determinante, $\det(\varphi'(\rho, \theta, \psi)) = \rho^2 \sin \psi$, es diferente de cero siempre que $\psi \neq n\pi$.

De modo que, φ es una transformación de coordenadas en el abierto A que se denomina **transformación a coordenadas esféricas**.

La transformación a coordenadas esféricas convierte el plano de ecuación $\rho = c$ en la esfera de centro en el origen y radio c , el plano $\theta = \alpha$ en el semiplano que contiene al eje Z y cuya traza sobre el plano XY forma un ángulo α con la parte positiva del eje X , finalmente la ecuación $\psi = \beta$ se convierte en la ecuación $z \tan \beta = \sqrt{x^2 + y^2}$ que representa una superficie cónica circular, cuya generatriz

forma un ángulo β con el eje Z (cuando $\beta = 0, \pi$ esta superficie degenera en el origen de coordenadas y si $\beta = \pi/2$, entonces se convierte en el plano XY).

En este caso la imagen correspondiente a un ortoedro en el espacio de coordenadas (ρ, θ, ψ) será una figura limitada por superficies esféricas con centro en el origen, superficies cónicas con vértice en el origen y planos que contienen al eje Z .

A continuación veremos una *deducción heurística* de la importantísima fórmula que permite realizar **cambios de variables en las integrales múltiples**. Consideremos, para simplificar, que φ es una transformación de coordenadas en un conjunto abierto que contenga a un rectángulo $I \subset \mathbf{R}^2$ y la función f es continua en el conjunto $D = \varphi(I)$.

A cualquier partición P del rectángulo I en subrectángulos I_1, I_2, \dots, I_m corresponde una descomposición del conjunto D en los subconjuntos $\varphi(I_i)$, $i = 1, \dots, m$ (Fig. 16). Si todos estos conjuntos son admisibles y se intersecan dos a dos solo en un conjunto de medida cero, entonces la propiedad aditiva de la integral nos permite escribir:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi(I_i)} f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Los conjuntos $\varphi(I_i)$ son conexos y como f es continua en D , entonces, por el Teorema del valor medio:

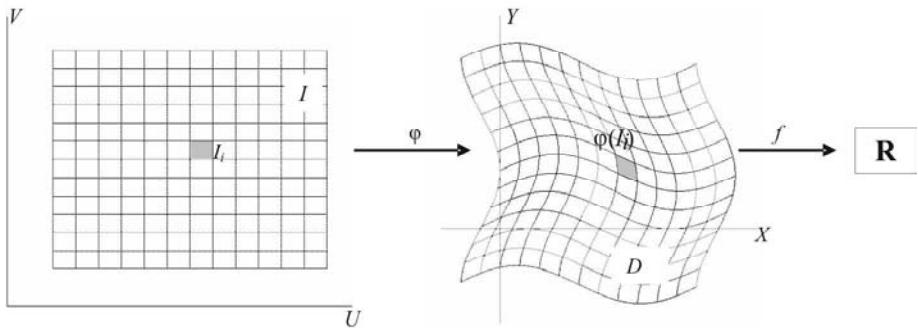


FIGURA 16.

$$\int_{\varphi(I_i)} f(x, y) dx dy = f(\xi_i^1, \xi_i^2) a(\varphi(I_i)),$$

donde $(\xi_i^1, \xi_i^2) \in \varphi(I_i)$ y $a(\varphi(I_i))$ denota el área del conjunto $\varphi(I_i)$.

Como $(\xi_i^1, \xi_i^2) = (\eta_i^1, \eta_i^2)$, para algún punto $(\eta_i^1, \eta_i^2) \in I_i$, la igualdad (2) toma la forma:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2)) a(\varphi(I_i)). \quad (3)$$

Notemos que el miembro derecho de (3) se asemeja a una “suma de Riemann” en el rectángulo I . Para convertir esta suma en una suma de Riemann, solo es necesario encontrar una relación que permita expresar $a(\varphi(I_i))$ en términos $a(I_i)$.

Supongamos primeramente que φ es una transformación de coordenadas lineal, entonces $\varphi(I_i)$ es un paralelogramo. Veamos, primeramente, cómo se relacionan las áreas de un paralelogramo T y de su imagen $\varphi(T)$.

De la geometría analítica se conoce que el área de un paralelogramo T determinado, por dos vectores linealmente independientes (u_1, v_1) y (u_2, v_2) , puede calcularse a través del valor absoluto del determinante de la matriz formada por las componentes de dichos vectores:

$$a(T) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Denotemos por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que representa a la aplicación lineal φ en la base canónica. Entonces el área del paralelogramo imagen de T se calcula mediante:

$$a(\varphi(T)) = \left| \det \begin{pmatrix} au_1 + bv_1 & au_2 + bv_2 \\ cu_1 + dv_1 & cu_2 + dv_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| a(T). \quad (4)$$

Consideremos un rectángulo cualquiera I_i de la partición P y supongamos que sus dimensiones Δs_i , Δt_i sean pequeñas. La aplicación φ es continuamente diferenciable, luego puede ser aproximada localmente por la aplicación lineal diferencial. Así que:

$$\varphi(s, t) \approx \varphi(\eta_i^1, \eta_i^2) + d\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2)(\Delta s_i, \Delta t_i),$$

donde (s, t) es un punto cualquiera de I_i y (η_i^1, η_i^2) es el punto de I_i , considerado en (3).

Por tanto podemos afirmar que, la imagen por φ del rectángulo I_i es aproximadamente la misma que se obtendría al transformarlo por la aplicación:

$$\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2) + d\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2)(\Delta s_i, \Delta t_i).$$

Pero esta aplicación no es más que la aplicación lineal dada por el diferencial de φ (cuya matriz asociada es la matriz jacobiana φ') más una traslación representada por la constante $\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2)$. Como el área de una figura no se afecta por una traslación, entonces, haciendo uso de (4), podemos afirmar que:

$$a(\varphi(I_i)) \approx |\det \varphi'(\eta_i^1, \eta_i^2)| a(I_i).$$

Finalmente, sustituyendo en (3) se obtiene:

$$\int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^m f(\varphi(\eta_i^1, \eta_i^2)) |\det \varphi'(\eta_i^1, \eta_i^2)| a(I_i).$$

La parte derecha de esta relación es una suma de Riemann de la función $f(\varphi(s, t)) |\det \varphi'(s, t)|$ correspondiente a la partición P del rectángulo I . En el límite, cuando la partición se hace cada vez más fina, se obtiene la relación:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_I f(\varphi(s, t)) |\det \varphi'(s, t)| ds dt,$$

que es la fórmula que buscábamos.

El camino seguido puede ser justificado con todo rigor, incluso para el caso general de funciones de n variables. Sin embargo esta vía de demostración resulta sumamente larga, laboriosa y plagada de detalles técnicos que no consideramos necesarios al lector al cual va dirigido este texto. Por esta razón, remitimos a los interesados a (Apostol, 1979) o (Zorich, 2004).

En lo que sigue, resulta cómodo introducir el convenio siguiente:

Diremos que una función f es **diferenciable (o es de clase C^k) en un conjunto E que no es necesariamente abierto**, cuando f está definida y es diferenciable (o es de clase C^k) en algún abierto U tal que $U \supset E$.

Enunciemos el teorema general del cambio de variables para integrales múltiples:

Teorema 4. (*del cambio de variables*) Consideremos un conjunto admisible Δ y una función φ continuamente diferenciable en $\bar{\Delta}$. Si φ es una trans-

formación de coordenadas en el interior de Δ y $f \in \mathcal{R}(\varphi(\Delta))$, entonces $f \circ \varphi |\det \varphi| \in \mathcal{R}(\Delta)$ y además tiene lugar la igualdad:

$$\int_{\varphi(\Delta)} f = \int_{\Delta} (f \circ \varphi) |\det \varphi|. \quad (5)$$

Observación. Cuando $f = 1$ en el conjunto $\varphi(\Delta)$, la igualdad (5) se convierte en:

$$v(\varphi(\Delta)) = \int_{\Delta} |\det \varphi|,$$

que expresa el volumen del conjunto transformado $\varphi(\Delta)$ como una integral sobre el conjunto original. Más aún, si Δ es un conjunto abierto y conexo y aplicamos el teorema del valor medio a esta última igualdad obtenemos:

$$v(\varphi(\Delta)) = |\det \varphi'(c)| v(\Delta),$$

donde c es algún punto de Δ .

La relación encontrada entre los volúmenes de un conjunto y su imagen, permite interpretar a $|\det \varphi'(c)|$ como un “coeficiente de dilatación local” para el volumen de conjuntos.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este teorema.

Ejemplo 1. Calculemos la integral:

$$J = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

Si denotamos por φ la transformación a coordenadas polares, el conjunto admisible:

$$\Delta = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$$

tiene por imagen al conjunto D (Fig.17). En el interior de Δ , φ es inyectiva, el determinante de su matriz jacobiana es no nulo y la función f es continua y por tanto integrable en D .

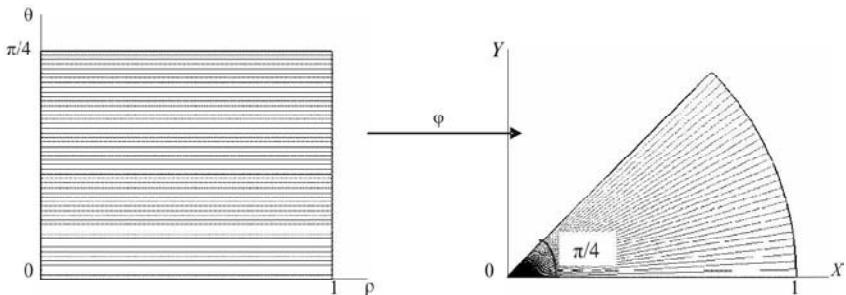


FIGURA 17.

Así que podemos aplicar el Teorema 4 para obtener:

$$J = \iint_{\Delta} \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{12}.$$

Observación. Cuando se trata con los cambios de variables clásicos de las coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, es usual identificar los conjuntos D y Δ . Por ejemplo, el sector circular D del ejemplo anterior diremos que está dado en coordenadas polares por las relaciones $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4$. Cuando se utiliza este convenio, es importante tener cuidado al considerar las dominios de variación de las nuevas coordenadas, prestando atención a que la función de cambio sea siempre inyectiva.

Ejemplo 2. Calculemos el volumen del cuerpo K limitado por el parabolóide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Fig. 18).

Debemos calcular la integral:

$$v(K) = \iiint_K dx dy dz.$$

El cono y el parabolóide dados se intersecan cuando $z = 1$ y $z = 0$, esto es en el origen de coordenadas y según la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, situada en el plano $z = 1$. De modo que K puede escribirse en la forma:

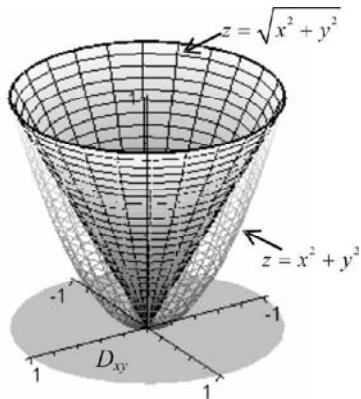


FIGURA 18.

$$K = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Luego, en coordenadas cartesianas, la integral se calcularía como:

$$v(K) = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz,$$

donde:

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \\ &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$v(K) = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \right) dy,$$

que conduce a integrales bastante complicadas para realizar un cálculo directo.

Sin embargo, si utilizamos las coordenadas cilíndricas podemos escribir:

$$K = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho^2 \leq z \leq \rho\},$$

y el volumen se expresa como:

$$v(K) = \iiint_K \rho d\rho d\theta dz = \iint_D d\rho d\theta \int_{\rho^2}^{\rho} \rho dz,$$

donde $D = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Esta integral se calcula muy fácilmente:

$$v(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Notemos que aplicar a una integral triple la transformación a coordenadas cilíndricas es equivalente a expresar esta integral, mediante el teorema de Fubini, en una integral en la variable z seguida de una integral doble en el plano XY a la cual se le aplica la transformación a coordenadas polares.

Ejemplo 3. Calculemos la integral:

$$J = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

donde K es el conjunto limitado por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ y la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ y que contiene al centro de la esfera (Fig. 19).

Las ecuaciones de la esfera y el cono en coordenadas esféricas son $\rho = 2R\cos\psi$ y $\psi = \frac{\pi}{4}$, respectivamente. Esto significa que la imagen del conjunto

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, \psi) : 0 \leq \rho \leq 2R\cos\psi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

por la transformación a coordenadas esféricas es K .

Así que obtenemos:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_{\Delta} \rho^3 \sin\psi d\rho d\theta d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{2R\cos\psi} \rho^3 \sin\psi d\rho = \\ &= 4R^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \cos^4 \psi \sin\psi d\psi = \\ &= 8\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{40} \right) R^4. \end{aligned}$$

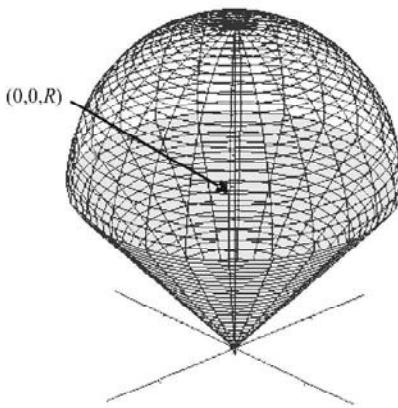


FIGURA 19.

En ocasiones las transformaciones de coordenadas estudiadas antes no resultan adecuadas para el cálculo de una integral, sin embargo pueden ser modificadas de acuerdo a las características de la integral que se trate.

Ejemplo 4. Calculemos el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El volumen pedido viene dado por la integral:

$$V = \iiint_K dx dy dz,$$

$$\text{donde } K = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Para esta integral, el lector puede comprobar que el uso de las coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas conduce siempre a integrales complicadas. Sin embargo, una ligera modificación de la transformación a coordenadas esféricas permite realizar el cálculo en forma muy simple.

Un elipsoide puede concebirse como una esfera a la cual se le han realizado cambios de escalas en cada uno de los ejes, por tanto es natural que la transformación de coordenadas dada por:

$$\varphi(\rho, \theta, \psi) = (a\rho \sin \psi \cos \theta, b\rho \sin \psi \sin \theta, c\rho \cos \psi)$$

resulte idónea en este caso.

Esta función φ es un difeomorfismo en el mismo abierto que consideramos para la transformación a coordenadas esféricas. Puede verse que, en este caso, el determinante de la matriz jacobiana es:

$$\det(\varphi'(\rho, \theta, \psi)) = abc\rho^2 \sin \psi.$$

Por lo tanto:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\psi \int_0^1 abc\rho^2 \sin \psi d\rho = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Ejemplo 5. Calculemos la integral:

$$J = \iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy,$$

donde $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$.

Tanto el cálculo en coordenadas cartesianas, como la transformación a coordenadas polares en esta integral conduciría a integrales complicadas. Utilicemos el cambio de variables

$$x = \rho \cos^4 \theta; \quad y = \rho \sin^4 \theta,$$

es decir, consideremos $\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos^4 \theta, \rho \sin^4 \theta)$.

La función φ es de clase C^1 en todo el plano e inyectiva en el interior del conjunto:

$$\Delta = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Este conjunto es tal que $\varphi(\Delta) = D$ y la función integrando es continua en D . Además, el determinante de la matriz jacobiana es $4\rho \sin^3 \theta \cos^3 \theta > 0$ en el interior de Δ . Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema del cambio de variable y podemos escribir:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Delta} 4\rho^{5/4} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\rho d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta \int_0^1 \rho^{5/4} d\rho = \\ &= \frac{16}{9} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{16}{9} \frac{1}{12} = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Sea el tetraedro n -dimensional

$$E_a^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\},$$

probemos que su volumen viene dado por:

$$v(E_a^n) = \frac{a^n}{n!}.$$

Este resultado es sorprendente desde el punto de vista intuitivo: Si fijamos un valor grande para la arista del tetraedro, por ejemplo, $a = 100$, observamos que, para espacios de dimensiones suficientemente grandes, el volumen de E_a^n es muy pequeño. Señalemos que en tales propiedades asintóticas de los volúmenes de las figuras multidimensionales se basan muchos de los resultados de la física estadística.

Debemos calcular:

$$v(E_a^n) = \int_{E_a^n} dx_1 dx_2, \dots, dx_n.$$

Hagamos el cambio de variables dado por la transformación lineal:

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = (au_1, \dots, au_n).$$

Como $\det(\varphi'(x)) = a^n$, entonces:

$$\int_{E_a^n} dx_1 dx_2, \dots, dx_n = a^n \int_{E_1^n} du_1 du_2, \dots, du_n = a^n I_n,$$

donde I_n denota la integral en el conjunto:

$$E_1^n = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, u_1 + \dots + u_n \leq 1\}.$$

El conjunto E_1^n puede ser rescrito como:

$$E_1^n = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : 0 \leq u_n \leq 1, u_1 \geq 0, \dots, u_{n-1} \geq 0, u_1 + \dots + u_{n-1} \leq 1 - u_n\},$$

esto significa que:

$$E_1^n = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : 0 \leq u_n \leq 1, (u_1, \dots, u_{n-1}) \in E_{1-u_n}^{n-1}\}.$$

Luego, por el teorema de Fubini, se tiene que:

$$I_n = \int_0^1 \left(\int_{E_{1-u_n}^{n-1}} du_1 \dots du_{n-1} \right) du_n = \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} I_{n-1} du_n = \frac{I_{n-1}}{n}.$$

Esta relación recurrente nos indica que $I_n = \frac{I_1}{n!} = \frac{1}{n!}$, ya que evidentemente $I_1 = 1$.

Así que finalmente hemos comprobado que $v(E_a^n) = \frac{a^n}{n!}$.

Ejercicios propuestos

1. Pasa a coordenadas polares las siguientes integrales iteradas, suponiendo que la función f es continua en el dominio de definición:

a) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

b) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$

2. Calcula:

a) $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$

- b) $\iint_D \max\{x, y\} dx dy$, donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- c) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq 1\}$.
- d) $\iiint_V z^2 dx dy dz$, $V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$.
- e) $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde V es la región acotada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$.
- f) $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, donde K está limitado por las superficies $x^2 + y^2 = z^2$ y $z = 1$.
- g) $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, donde K está limitado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = z$.
- h) $\iint_D y x dx dy$, donde D está limitado por $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y = px$, $y = qx$.
- i) $\iiint_K z^2 dx dy dz$, donde $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$
3. Halla el área acotada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.
 4. Halla el área limitada por las curvas $\rho = a(1 + \cos\theta)$ y $\rho = a \cos\theta$, $a > 0$.
 5. Halla el área limitada por la elipse $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.
 6. Utiliza una transformación lineal conveniente para calcular la integral doble

$$\iint_D (x^2 - y^2) \sin^2(x + y) dx dy,$$

donde D es el paralelogramo con vértices en $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$.

7. Halla el volumen limitado por:

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

8. Halla el volumen de la parte interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, comprendido entre el parabolóide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano $z = 0$ ($a > 0$).

9. Halla el volumen limitado por las superficies:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad (z \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0).$$

10. El cuadrado:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a < x < a+h, \quad b < y < b+h\}, \quad (a > 0, b > 0),$$

se transforma mediante $\varphi(x, y) = (y^2 x^{-1}, \sqrt{xy})$ en una cierta región D_1 .

Encuentra la relación del área de D_1 al área de D . ¿Cuál es el límite de esta relación cuando $h \rightarrow 0$?

11. Sea $M \subset \mathbf{R}^3$ limitado por $x = 0, y = 0, z = 0, y = 1, x + z = 1$. Halla el volumen de $g(M)$ si:

$$g(x, y, z) = (e^{2z+2y}, e^{2x-2z}, x - y).$$

12. Calcula:

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz,$$

utilizando coordenadas esféricas.

13. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + 4y^2), & \text{si } 1 < x^2 + 4y^2 \leq 9 \\ 1, & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

a) Justifica la integrabilidad de f en el conjunto $E = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 9\}$.

b) Calcula $\iint_E f(x, y) dx dy$.

VI.3. APLICACIONES FÍSICAS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Mediante las integrales múltiples pueden calcularse diferentes magnitudes físicas, siempre que ellas satisfagan la propiedad de linealidad, por ejemplo, la masa y la carga de un cuerpo, su centro de gravedad, el momento de inercia, etc. La técnica para realizar estas aplicaciones es siempre la misma, se basa en la propiedad aditiva de estas magnitudes y la mostraremos desarrollando algunos casos concretos.

Masa de una lámina

Supongamos que se tiene una lámina plana con la forma de un cierto conjunto G admisible, cuya distribución de masa es variable y está dada por la función $\rho(x,y)$, es decir, consideraremos que sobre el conjunto clausura de G , está definida y es continua la función $\rho(x,y) \geq 0$.

Una propiedad fundamental de la masa es su **aditividad**, esto es, la masa de cierto objeto es la suma de las masas de las partes que lo componen. Si consideramos una partición de G , $\{G_i\}_{i=1}^k$ como por ejemplo en la Fig. 20 , entonces la masa M de G vendrá dada como la suma:

$$M = \sum_{i=1}^k m_i,$$

donde m_i es la masa de G_i .

Si los G_i tienen un diámetro suficientemente pequeño, entonces, se puede suponer que la densidad de masa en cada G_i es constante igual al valor de ρ en uno de sus puntos. Luego se tiene la aproximación:

$$m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) a(G_i),$$

donde $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$ y $a(G_i)$ denota el área de G_i . Por tanto, para la masa de G obtenemos:

$$M \approx \sum_{i=1}^k \rho(\xi_i, \eta_i) a(G_i). \quad (1)$$

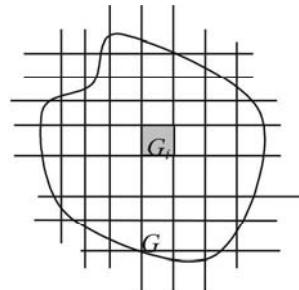


FIGURA 20.

Cuando se hace el diámetro de los G_i tender a cero, la aproximación anterior mejorará en exactitud y entonces resulta completamente natural definir la masa de la lámina G como la integral:

$$M = \iint_G \rho(x, y) dx dy . \quad (2)$$

El lector no debe tener dificultad en justificar rigurosamente que el límite de la suma en (1) es precisamente la integral en (2).

Momentos y centro de masa de una lámina

Dada una masa puntual m situada en el punto de coordenadas (x, y) , se denominan **momentos de m con relación a los ejes X e Y** a los productos my y mx , respectivamente. Veamos como se pueden definir los momentos respecto a los ejes coordinados de la lámina plana G considerada en el ejemplo anterior.

Utilicemos nuevamente la partición $\{G_i\}_{i=1}^k$ del dominio G y supongamos que el tamaño de los G_i sea lo suficientemente pequeño para considerarlos como masas puntuales $m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)a(G_i)$ situadas en el punto (ξ_i, η_i) . Entonces el momento respecto al eje X de m_i será aproximadamente igual a $m_i \eta_i$ y el momento respecto al eje X de G puede estimarse por:

$$\sum_{i=1}^k m_i \eta_i = \sum_{i=1}^k \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) a(G_i),$$

aproximación que mejora cuando el diámetro de la partición tiende a cero. Así que es natural tomar como definición para el momento τ_x de G respecto al eje X la integral:

$$\tau_x = \iint_G y \rho(x, y) dx dy .$$

De forma análoga se define el momento τ_y de G respecto al eje Y como:

$$\tau_y = \iint_G x \rho(x, y) dx dy .$$

Se denomina **centro de masa de G** a cierto punto del plano (x_0, y_0) tal que si en él se concentra toda la masa M de G los momentos de esta masa puntual respecto a los ejes coordenados son iguales a los momentos de G respecto a estos ejes. En otras palabras el punto (x_0, y_0) debe satisfacer:

$$M x_0 = \tau_y \quad \text{y} \quad M y_0 = \tau_x.$$

Haciendo uso de las expresiones obtenidas anteriormente, vemos que las coordenadas del centro de masa de G se calculan mediante las fórmulas:

$$x_0 = \frac{\iint_G x \rho(x, y) dx dy}{\iint_G \rho(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y \rho(x, y) dx dy}{\iint_G \rho(x, y) dx dy}.$$

Observación. De manera totalmente análoga pueden encontrarse expresiones para la masa, los momentos respecto a los planos coordinados y el centro de masa de un cuerpo sólido K que posea una densidad de masa dada por una función continua $\rho(x, y, z)$.

Fuerza de atracción que ejerce un cuerpo sobre una masa puntual

Supongamos que se tiene un cuerpo sólido K , cuya masa está distribuida según la función continua $\rho(x, y, z)$ y un punto A de coordenadas (a, b, c) , situado a una distancia positiva de K . Se quiere encontrar la fuerza de atracción que ejerce K sobre una masa unitaria situada en el punto A .

Supongamos que K es un subconjunto de \mathbf{R}^3 admisible y consideremos una partición $\{K_i\}_{i=1}^p$ de K en subconjuntos admisibles (por ejemplo, podríamos realizarla utilizando planos paralelos a los planos coordinados). De forma semejante a como razonamos en el caso de una lámina plana, si el diámetro de los K_i es suficientemente pequeño, los podemos considerar **aproximadamente** como masas puntuales $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)v(K_i)$ situadas en el punto (ξ_i, η_i, ζ_i) .

De acuerdo a la ley de Newton, la magnitud de la fuerza de atracción F_i que ejerce la masa puntual m_i sobre una masa unitaria situada en A es:

$$\frac{m_i}{r^2},^1$$

¹ Para simplificar las expresiones, se ha supuesto la constante gravitatoria como la unidad.

donde r es la distancia entre A y (ξ_i, η_i, ζ_i) . Además, esta fuerza está dirigida de A hacia el punto (ξ_i, η_i, ζ_i) . Por tanto, sus componentes serán

$$\frac{m_i}{r_i^3}(\xi_i - a), \quad \frac{m_i}{r_i^3}(\eta_i - b), \quad \frac{m_i}{r_i^3}(\zeta_i - c),$$

$$\text{donde } r_i = \sqrt{(\xi_i - a)^2 + (\eta_i - b)^2 + (\zeta_i - c)^2}.$$

Es natural considerar la fuerza de atracción F ejercida por todo el cuerpo K sobre la masa situada en A , como la suma de las fuerzas ejercidas por cada una de sus partes. Además, la aproximación realizada antes es mejor en la medida que los diámetros de los K_i es más pequeño. De manera que, como ya nos es familiar, determinaremos las componentes de la fuerza mediante las expresiones:

$$F^x = \iiint_K (x - a) \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} dx dy dz, \quad F^y = \iiint_K (y - b) \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} dx dy dz,$$

$$F^z = \iiint_K (z - c) \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} dx dy dz, \quad r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Ejercicios propuestos

1. Halla el centro de masa de una lámina homogénea en forma de sector circular de ángulo α y radio r .
2. Halla la masa del sólido limitado por dos esferas concéntricas de radios a y b ($0 < a < b$) si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.
3. Encuentra las coordenadas del centro de masa de un sólido K (subconjunto admisible de \mathbf{R}^3) con densidad de masa dada por una función continua $\rho(x, y, z)$.
4. Halla las coordenadas del centro de masa de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$ si la densidad es proporcional a la distancia del punto al centro.
5. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h . Demuestra que la distancia de su centro de masa a la base es $\frac{h}{4}$.

6. Encuentra la fuerza de atracción que ejerce una esfera homogénea de densidad ρ en un punto situado fuera de ella.
7. a) Se denomina **momento de inercia** I_R de una masa puntual m situada en un punto A respecto a una recta R al producto de m por el cuadrado de la distancia d del punto A a R . Encuentra expresiones integrales que permitan calcular el momento de inercia de una figura plana G (y de un cuerpo K) respecto a una recta R .
- b) Sean una figura plana G y dos rectas paralelas R y R' que distan entre sí h unidades, además la recta R pasa por el centro de masa de G . Prueba que los momentos de inercia I_R e $I_{R'}$ de G respecto a estas rectas satisfacen la relación:

$$I_{R'} = I_R + h^2 m,$$

donde m es la masa de G .

VI.4. INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS

Hasta ahora hemos definido la integral de una **función acotada** en un conjunto admisible, esto es, un conjunto **acotado** y con frontera de contenido cero. Sin embargo, para funciones de una variable tenemos una extensión del concepto integral al caso de intervalos de integración no acotados o cuando la función integrando no es acotada en un intervalo dado. Nuestro propósito en este epígrafe es realizar una extensión de este tipo para el caso de integrales de funciones de varias variables.

Consideremos un subconjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ cualquiera (acotado o no) y una función $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ (no necesariamente acotada) y veamos qué entenderemos por integral impropia de f en el conjunto E .

Definición 1. Sea $\{E_k\}$ una sucesión de subconjuntos admisibles de E tales que:

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \quad (\text{Fig.21}),$$

(la llamaremos **sucesión admisible** para E). Supongamos, además, que la función f es integrable sobre cada uno de los conjuntos E_k . Cuando existe el límite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f \quad (1)$$

y es independiente de la elección de la sucesión $\{E_k\}$, entonces decimos que la **integral impropia** de f sobre E existe o que es **convergente**. Al valor del límite (1) lo denominaremos **integral impropia de f sobre el conjunto E** y lo denotaremos por $\int_E f$.

Si, para alguna sucesión de conjuntos admisibles $\{E_k\}$ este límite no existe o su valor depende de la sucesión $\{E_k\}$ escogida, entonces diremos que la integral $\int_E f$ es **divergente**.

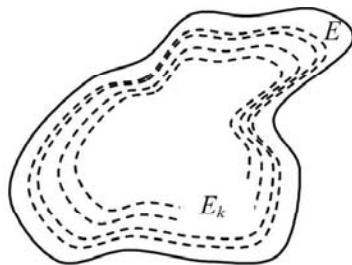


FIGURA 21.

El símbolo que hemos utilizado para la integral impropia es el mismo que usualmente designa la integral propia, por lo que se hace necesario comprobar que *si E es un conjunto admisible y f es integrable en el sentido ordinario, entonces también lo es en el sentido impropio y ambos valores de la integral coinciden*. Más precisamente, probaremos la afirmación siguiente:

Dados un conjunto admisible E y una sucesión $\{E_k\}$ admisible para E , tiene lugar

- a) $\lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) = v(E)$,
- b) $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f = \int_E f$.

◆ a) Como $E_k \subset E_{k+1} \subset E$, entonces para los volúmenes de estos conjuntos se tiene la relación $v(E_k) \leq v(E_{k+1}) \leq v(E)$. Por lo tanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) \leq v(E).$$

Para completar la demostración de la afirmación en a) debemos probar que tiene lugar también la desigualdad $\lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k) \geq v(E)$.

Veamos primeramente que, para un conjunto admisible E cualquiera y un $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos construir un abierto \tilde{E} tal que $\tilde{E} \supset E$ y $v(\tilde{E}) < v(E) + \varepsilon$.

Como la frontera $\text{Fr}(E)$ del conjunto E tiene contenido cero, puede cubrirse por un número finito de rectángulos abiertos cuya suma de volúmenes es menor que ε (Fig. 22). Denotemos por Δ la unión de tales rectángulos abiertos, entonces el conjunto $\tilde{E} = E \cup \Delta$ es un abierto de \mathbf{R}^n que contiene a la clausura \bar{E} de E y que satisface la propiedad requerida.

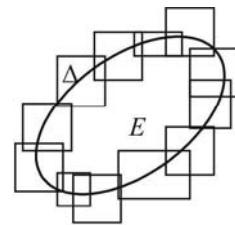


FIGURA 22.

Para cada uno de los conjuntos E_k también podemos realizar la construcción anterior, esta vez con los valores $\varepsilon_k = \varepsilon/2^k$, $k = 1, 2, \dots$. De esta manera, obtenemos una sucesión de conjuntos abiertos $\tilde{E}_k = E_k \cup \Delta_k$ tales que:

$$\tilde{E}_k \supset \bar{E}_k, \quad v(\tilde{E}_k) < v(E_k) + \varepsilon_k \quad \text{y} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E.$$

Los conjuntos $\Delta, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$ constituyen un cubrimiento por abiertos del conjunto compacto \bar{E} , luego podemos obtener un subcubrimiento finito $\Delta, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_m$.

Como tiene lugar la relación $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m$, entonces los conjuntos $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m, E_m$, también cubren a \bar{E} y por tanto se cumple:

$$v(E) \leq v(\bar{E}) \leq v(E_m) + v(\Delta) + v(\Delta_1) + \dots + v(\Delta_m) < v(E_m) + 2\varepsilon.$$

Como el valor de ε es arbitrario, entonces $v(E) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v(E_k)$, lo que completa la prueba de a).

b) La función f es integrable en E , por tanto f es acotada en E , es decir, existe una constante M tal que $|f(x)| \leq M$, $x \in E$. Además, f también es integrable en cualquier subconjunto admisible de E . Haciendo uso de las propiedades de la integral, obtenemos que:

$$\left| \int_E f(x) dx - \int_{E_k} f(x) dx \right| = \left| \int_{E \setminus E_k} f(x) dx \right| \leq M v(E \setminus E_k).$$

Pero, por a), $v(E \setminus E_k) \rightarrow 0$ con lo que se completa la demostración de la afirmación de b). ◆

La aplicación directa de la definición 1 es prácticamente imposible, pues se necesitaría verificar que existe el límite (1) y tiene siempre el mismo valor para cualquier sucesión admisible del conjunto E . El siguiente resultado nos asegura que, en el caso de funciones positivas, basta calcular el límite para una sucesión admisible concreta.

Si $f : E \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, para todo $x \in E$ y para alguna sucesión admisible $\{E_k\}$ de E , con $f \in R(E_k)$ existe el límite (1), entonces la integral impropia de f en el conjunto E converge.

◆ Sea $\{F_j\}$ otra sucesión admisible para el conjunto E , de modo que la función f sea integrable en cada uno de ellos, debemos demostrar que existe $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} f$ y se cumple:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f .$$

La sucesión $\{F_j \cap E_k\}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) es admisible para el conjunto admisible F_j y como la función f es integrable en F_j y $f(x) \geq 0$, entonces se tiene que:

$$\int_{F_j} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_j \cap E_k} f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f = A .$$

Así que la sucesión $\left\{ \int_{F_j} f \right\}$ ($j = 1, 2, \dots$) es acotada. Pero, como f es positiva y

$F_j \subset F_{j+1}$, entonces también es una sucesión monótona creciente y, por tanto, convergente. Luego, existe el límite:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} f = B \leq A .$$

Intercambiando los papeles de las sucesiones $\{F_j\}$ y $\{E_k\}$ se demuestra que $A \leq B$, por lo que concluimos que $A = B$. ◆

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Analicemos la convergencia de la integral:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

La función integrando es positiva y además es continua en todo el plano, luego podemos aplicar el resultado anterior a cualquier sucesión admisible para \mathbb{R}^2 . Tomemos la sucesión de círculos:

$$E_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq k^2\} \quad (\text{Fig. 23}).$$

Usando coordenadas polares, encontramos que:

$$\begin{aligned} \iint_{E_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \pi \left(1 - e^{-k^2}\right) \rightarrow \pi, \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow \infty$.

Así que la integral propuesta converge y su valor es π .

Este ejemplo permite mostrar una consecuencia interesante de la independencia del valor de la integral impropia convergente con relación a la sucesión admisible utilizada.

Consideremos otra sucesión admisible para \mathbb{R}^2 ,

$$F_k = \{(x, y) : |x| \leq k, |y| \leq k\},$$

entonces sabemos que se debe cumplir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{F_k} e^{-|x^2+y^2|} dx dy = \pi .$$

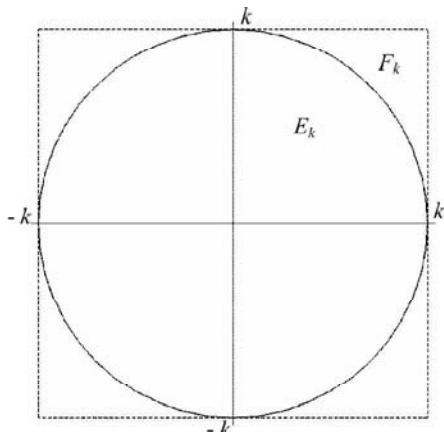


FIGURA 23.

Pero:

$$\iint_{F_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-k}^k e^{-x^2} dx \left(\int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

La función $f(x) = e^{-x^2}$ no tiene primitiva en términos de las funciones elementales, por lo que un cálculo de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ por vía directa no es posible. Sin embargo, ¡hemos encontrado el valor de esta integral impropia con la ayuda de la integración doble!

Ejemplo 2. Analicemos la convergencia de la integral impropia:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

La continuidad de la función integrando en todo el plano nos permite escoger cualquier sucesión admisible para \mathbb{R}^2 , sea $E_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\pi k\}$. Entonces,

$$\iint_{E_k} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2\pi k}} \rho \sin \rho^2 d\rho = \pi(1 - \cos 2k\pi) = 0.$$

Si ahora consideramos la sucesión admisible:

$$F_k = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\},$$

se ve fácilmente que:

$$\iint_{F_k} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi \left(1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \right) = 1.$$

Luego la integral propuesta diverge.

En este ejemplo la función integrando toma valores positivos y negativos. Esto nos indica que para funciones que cambian su signo el análisis de la convergencia de las integrales impropias debe realizarse con mayor cautela que para las funciones positivas. En lo que sigue indicaremos procedimientos que pueden facilitar la determinación de la convergencia de integrales impropias.

Dada una función cualquiera $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ siempre podemos escribirla como la diferencia de dos funciones que solo toman valores positivos. En efecto, consideremos las funciones, definidas en E :

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases},$$

entonces es evidente que f_+ y f_- toman solo valores mayores o iguales que cero y además se tiene la igualdad $f = f_+ - f_-$. A estas funciones las llamaremos, respectivamente, **parte positiva** y **parte negativa** de f .

Puede demostrarse fácilmente (ver ejercicio 1) que si $\int_E f$ y $\int_E g$ son convergentes, entonces también converge $\int_E (\alpha f + \beta g)$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) y además:

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx.$$

Una consecuencia inmediata, pero muy útil, de la propiedad anterior es el siguiente resultado:

Si $\int_E f_+$ y $\int_E f_-$ son convergentes, entonces también será convergente $\int_E f$ y

$$\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_-.$$

Este resultado permite reducir el análisis de la convergencia de integrales de funciones con signo arbitrario a la convergencia de integrales de funciones positivas.

En ocasiones la determinación de la convergencia de una integral múltiple, aplicando directamente la definición, es complicada o simplemente imposible. En estos casos puede ser muy útil el criterio de comparación siguiente:

Criterio de comparación. Sean $f, g : E \rightarrow \mathbf{R}$ funciones que son integrables en los mismos subconjuntos de E . Si se cumple que $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in E$, entonces la convergencia de la integral $\int_E g$ implica la convergencia de las integrales $\int_E f$ y $\int_E |f|$.

◆ Primeramente hagamos la demostración para funciones $f(x) \geq 0$. Sea $\{E_k\}$ una sucesión admisible para E , tal que $f \in \mathcal{R}(E_k)$, $k = 1, 2, \dots$, entonces la sucesión $\left\{ \int_{E_k} f \right\}$ es monótona creciente, por lo que, para probar su convergencia, basta comprobar que ella es acotada. En efecto,

$$0 \leq \int_{E_k} f(x) dx \leq \int_{E_k} g(x) dx,$$

pero, por hipótesis, la sucesión $\left\{ \int_{E_k} g \right\}$ es convergente, luego es acotada. De modo que obtenemos la acotación de la sucesión $\left\{ \int_{E_k} f \right\}$. Esto concluye la demostración para funciones positivas.

Sea ahora f una función con signo arbitrario. Si aplicamos el criterio a la función positiva $|f|$, obtenemos la convergencia de $\int_E |f|$. Por otra parte, las desigualdades evidentes:

$$0 \leq f_+ \leq |f| \quad y \quad 0 \leq f_- \leq |f|,$$

permiten afirmar que también serán convergentes:

$$\int_E f_+ \quad y \quad \int_E f_- .$$

Esto prueba la convergencia de $\int_E f$ y con ello se demuestra completamente la proposición.◆

Ejemplo 3. Analicemos la convergencia de la integral:

$$\iiint_E \frac{\sin(xyz) dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}},$$

donde $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Evidentemente se cumple que:

$$\left| \frac{\sin(xyz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}} \right| \leq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}},$$

luego basta con analizar la convergencia de la integral:

$$\iiint_E \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}}.$$

Para esta última integral, la función integrando es positiva y continua en E , luego podemos elegir cualquier sucesión admisible para el conjunto E . Consideraremos:

$$E_k = \left\{ (x, y, z) : \frac{1}{k^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\},$$

haciendo uso del cambio de variables a coordenadas esféricas, tenemos que:

$$J_k = \iiint_{E_k} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}} = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \rho^{2-2/3} \sin \psi d\psi = 4\pi \int_0^1 \rho^{4/3} d\rho = \frac{12\pi}{7} \left(1 - \frac{1}{k^{7/3}} \right)$$

Por lo tanto la integral propuesta es convergente.

Ejemplo 4. Analicemos la convergencia de la integral:

$$\iint_E \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

donde $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$.

La función integrando no es siempre del mismo signo. Calculemos la integral de sus partes positiva y negativa:

$$\iint_E \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]_+ dx dy = \iint_{E_1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

$$\iint_E \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]_- dx dy = \iint_{E \setminus E_1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

donde $E_1 = \{(x, y) \in E : x \geq y\}$. Los integrandos en las integrales anteriores son funciones continuas, por tanto, podemos escoger una sucesión admisible cualquiera de los conjuntos respectivos.

Para el conjunto E_1 tomemos la sucesión dada por:

$$E_n = \{(x, y) : 1 \leq y \leq x \leq n\}.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_{E_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_1^n \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=1}^x dx = \\ &= \int_1^n \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln n - \arctan n + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Esto significa que la integral de la parte positiva es divergente. Puede comprobarse que también la integral de la parte negativa es divergente. Proponemos al lector que compruebe la divergencia de la integral sobre E , usando la definición.

Es interesante comprobar que en este caso las integrales iteradas:

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{y} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

son ambas convergentes a $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente. Esto en particular significa que, incluso para funciones continuas, en las integrales impropias hay que tener cuidado al intercambiar el orden en las integrales iteradas.

Observación. En el transcurso de la demostración del criterio de comparación probamos que la convergencia de la integral de la función $|f|$ implica la convergencia de la integral de la función f . Este resultado es también válido para la definición clásica de convergencia de las integrales impropias de funciones de una variable. Sin embargo, para la definición 1 de integral impropia tiene lugar también el recíproco, esto es, la convergencia de la integral de la función f significa la convergencia de la integral de la función $|f|$. Esta última afirmación no es correcta para la definición usual de integral impropia convergente en la recta real, donde es posible diferenciar entre convergencia absoluta y condicional de la integral. Con vistas a profundizar en la esencia de esta diferencia veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5. Sea la función $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ definida sobre el conjunto de los números reales positivos por la condición

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{si } n-1 \leq x < n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Puede verse fácilmente que para todo número real $A > 0$, el valor de la integral

$$\int_0^A f(x)dx \text{ esta comprendido entre dos sumas parciales de la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} .$$

Como esta serie converge, entonces resulta claro que también existe el límite

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

es decir, la integral impropia de f es convergente en el sentido dado a este concepto para funciones de una variable.

Por otra parte, es conocido que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ no converge absolutamente, por lo que pueden reordenarse sus términos para obtener una serie, por ejemplo, divergente a $+\infty$. Una suma parcial S_n de la serie reordenada, puede interpretarse como la integral de la función f sobre el conjunto E_n , formado por la unión de los intervalos correspondientes a los sumandos involucrados en S_n . La sucesión de conjuntos $\{E_n\}$ así construidos resulta admisible para el conjunto \mathbf{R}_+ , luego la integral impropia $\int_{\mathbf{R}_+} f(x)dx$ no converge en el sentido de la definición 1.

Notemos que la exigencia, en la definición 1, de que el límite (1) debe ser independiente de la sucesión admisible escogida, es equivalente a la propiedad, para las series, de la independencia de su suma del orden en que se tomen los términos. Esta última propiedad sabemos que es equivalente a la convergencia absoluta.

Por otra parte, en muchas cuestiones prácticas esta exigencia es demasiado restrictiva y es preciso considerar solo sucesiones admisibles de un tipo especial. Supongamos que D es un dominio y la función $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ no es acotada en una vecindad de cierto conjunto. Entonces consideramos el conjunto $D(\varepsilon) \subset D$ obtenido de D por la eliminación de una ε -vecindad del conjunto E . Cuando damos a ε una sucesión de valores que tienden a cero, obtenemos una sucesión admisible $\{D_n\}$ para D . De forma análoga, cuando el conjunto D no es acotado, podemos considerar ε -vecindades de ∞ . Al límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx,$$

cuando existe, lo llamamos el **valor principal de la integral**.

Ejercicios propuestos

1. Sean f, g funciones definidas sobre el conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ e integrables sobre los mismos subconjuntos admisibles de E . Prueba que si son convergentes las integrales impropias de f y g sobre el conjunto E , entonces es conver-

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \text{ y}$$

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx,$$

donde α y β son constantes.

2. Calcula, si existen, las integrales impropias siguientes:

a) $\iint_E \frac{1}{xy} dx dy$, donde $E = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\iint_E \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx dy$, donde $E = [0,1] \times [0,1]$.

c) $\iint_E \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$, donde $E = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}$.

d) $\iint_E \ln(x^2 + y^2) dx dy$, donde $E = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

e) $\iiint_E \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$, donde $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

f) $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$.

3. Analiza la convergencia de las integrales impropias siguientes:

a) $\iint_E \frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$, donde $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $\iiint_E \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dxdydz$, donde

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}, \quad \text{y} \quad |\varphi(x, y, z)| \leq M \quad \text{en el conjunto } E.$$

c) $\iint_E \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}$, $p > 0, q > 0$, donde $E = \{(x, y) : |x| + |y| \geq 1\}$.

4. Sean E_1 y E_2 subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y f una función positiva definida en $E_1 \cup E_2$. Prueba que $\int_{E_1 \cup E_2} f$ es convergente si y solo si lo son simultáneamente las integrales $\int_{E_1} f$ y $\int_{E_2} f$ y, en caso de convergencia, se cumple:

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

Ejercicios complementarios

1. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Prueba que existe $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy$, pero que f no es integrable.

2. Calcula:

a) $\iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $\iint_D \operatorname{sg}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $\operatorname{sg}(a)$ denota el signo de a si $a \neq 0$ e igual a 0 si $a = 0$.

c) $\iint_D [x+y] dx dy$, donde D es el cuadrado $[0,2] \times [0,2]$ y $[a]$ denota la parte entera del número a .

d) $\iint_I e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} dx dy$, donde $I = [0,a] \times [0,b]$, $a, b > 0$.

e) $\iint_D y dx dy$, donde D es la región acotada por el eje x y el arco de cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \operatorname{cost} t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

3. Halla el volumen de los cuerpos limitados por:

a) Los 6 planos dados por las ecuaciones:

$$|a_1x + b_1y + c_1z| = h_1, \quad |a_2x + b_2y + c_2z| = h_2, \quad |a_3x + b_3y + c_3z| = h_3.$$

b) La superficie cilíndrica:

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = R^2$$

y los planos:

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3z = H.$$

Observación: En ambos incisos se supone que el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

4. Sea f continua en un rectángulo $I = [a, b] \times [c, d]$. Para cada punto (x_1, x_2) interior a I definimos la función:

$$F(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \left(\int_c^{x_2} f(x, y) dy \right) dx .$$

Prueba que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

Utiliza este resultado para dar una prueba sencilla de la igualdad de las derivadas cruzadas de una función, cuando estas son funciones continuas.

5. Supongamos que la función f es continua en el rectángulo $I = [a, b] \times [c, d]$ y existe una función F , tal que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y), \text{ para todo } x, y \in I .$$

Demuestra que se cumple la relación:

$$\iint_I f = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) .$$

Este resultado es un análogo a la fórmula fundamental del cálculo obtenida para integrales de funciones definidas en un intervalo de \mathbf{R} . La función F desempeña el papel de una “primitiva” de f .

6. Calcula $F'(t)$ si:

a) $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dx dy$

b) $F(t) = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq t^2}} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, donde f es una función continua en \mathbf{R} .

7. Prueba que se cumple la igualdad:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 y^y dy .$$

8. Si f es una función continua en \mathbf{R} , demuestra que:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_m) dt_m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^m .$$

9. Sea $a > 0$ y consideremos el subconjunto de \mathbf{R}^n dado por:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_1| + \dots + |x_n| \leq a\}.$$

a) Demuestra que $v(S_n(a)) = a^n v(S_n(1))$.

b) Para $n \geq 2$ prueba que:

$$v(S_n(1)) = v(S_{n-1}(1)) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx = \frac{2}{n} v(S_{n-1}(1)) .$$

c) Utilizando a) y b) prueba que:

$$v(S_n(a)) = \frac{2^n a^n}{n!} .$$

10. Para un conjunto admisible A en \mathbf{R}^n y $t \in \mathbf{R}$, definimos el conjunto:

$$tA = \{(tx_1, \dots, tx_n) : (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

muestra que tA es admisible y que $v(tA) = t^n v(A)$.

CAPÍTULO VII

INTEGRACIÓN SOBRE CURVAS Y SUPERFICIES

INTRODUCCIÓN

Desde muy temprano, sobre todo en las aplicaciones físicas del nuevo cálculo infinitesimal, se evidenció, la necesidad de integrar expresiones funcionales definidas sobre una curva o una superficie. Para este tipo de situaciones la noción de integral múltiple, estudiada en el Capítulo V, no resulta significativa, pues los conjuntos considerados son de contenido cero y, por tanto, la integral de cualquier función o no existe o es nula. Así resultó imprescindible la introducción de nociones de integración adaptadas al estudio de determinados fenómenos físicos. De este modo, el surgimiento de las integrales sobre curvas y superficies estuvo estrechamente vinculado a la solución de problemas concretos, primero relacionados con la mecánica de los medios continuos, pero enseguida en el tratamiento de fenómenos electromagnéticos y de otros relacionados con la conducción del calor. El desarrollo de estas concepciones dio lugar a una nueva rama del Análisis Matemático, el *Análisis vectorial* la cual, en lo fundamental, adoptará sus notaciones y terminología de los problemas que le dieron origen.

La primera noticia que tenemos del uso de integrales sobre curvas es en la obra de Alexis Clairaut, *Teoría de la figura de la Tierra* (1743). Clairaut, a partir de la consideración de la Tierra como un fluido en equilibrio que gira en un campo de fuerzas gravitatorias, demuestra que su forma no puede ser otra que la de un elipsoide, con eje de revolución coincidiendo con el eje menor. Para realizar sus cálculos necesita estudiar en cuáles casos una expresión de la forma $Pdx + Qdy + Rdz$, donde P , Q y R son funciones de las variables x , y y z , es el diferencial de alguna función de estas variables. Este problema lo redujo a investigar cuándo el valor de las integrales de expresiones de este tipo no depende de la forma de la curva sobre la que se realiza la integración.

También será un problema de la dinámica de fluidos la motivación de Joseph Louis Lagrange para la introducción de las integrales sobre superficies. Aunque en trabajos previos trata algunos casos particulares relacionados con estas integrales, ellas aparecerán en forma general en la segunda edición (1811) de su libro *Mecánica Analítica*. Dos años más tarde, Gauss usará esta misma noción para el análisis de la atracción gravitacional de un esferoide elíptico. Además Gauss indica, a través de argumentos geométricos, cómo calcular este tipo de integrales para superficies dadas en forma paramétrica y encuentra, en un caso particular, la relación de ellas con las integrales triples.

El estudio de la integración de funciones de variable compleja condujo a Cauchy a la necesidad de introducir, en la década del 20 del siglo XIX, la noción de integral sobre una curva en el plano complejo. Años más tarde, en 1847, definió la integración sobre curvas en un espacio con un número indeterminado de dimensiones. También en este trabajo Cauchy enuncia la fórmula que conocemos con el nombre del matemático inglés George Green, quien la obtuvo y publicó de manera privada en 1828 y por ello no era del conocimiento general de la comunidad científica. Aunque en este trabajo no aparece mención alguna a las funciones de variable compleja, esta fórmula permite deducir de manera sencilla el resultado básico de la teoría de funciones de variable compleja desarrollada por Cauchy.

Las fórmulas encontradas por Gauss y por Green y Cauchy fueron generalizadas y se revelaron sumamente importantes para el estudio de diferentes problemas, especialmente de la física-matemática. Por esta razón, el desarrollo de las ideas básicas del *Análisis vectorial* fue realizado, básicamente, en el marco de las aplicaciones de la matemática. Para una fundamentación acorde a los estándares de rigor predominante en la Matemática a mediados del siglo XIX, era necesario una mayor precisión en las definiciones de curva y superficie y un estudio más profundo y general de estas ideas geométricas. Pero este desarrollo se lograría fuera del Análisis Matemático, vinculado con conceptos del Álgebra Multilineal y la Geometría Diferencial, establecidos en forma suficientemente rigurosa sólo a mediados del siglo XX.

El objetivo de este capítulo es dar a las integrales de funciones definidas sobre curvas y superficies un sentido útil y apropiado para sus aplicaciones fundamentales, así como demostrar (bajo ciertas restricciones simplificadoras) los resultados básicos que convirtieron al análisis vectorial clásico en una potente herramienta de trabajo en la Física. Para la mejor comprensión de este capítulo el lector necesitará de algunas de las cuestiones desarrolladas en los epígrafes 1, 2 y 3 del Apéndice 1, Parte 1.

VII.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL CURVILÍNEA

Comencemos con el análisis de uno de los problemas fundamentales en el surgimiento de la noción de integral curvilínea:

Una fuerza \vec{F} desplaza una masa puntual unitaria desde un punto A hasta otro B a lo largo de una curva $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$. Se quiere encontrar el trabajo T que realiza \vec{F} al mover la partícula desde A hasta B .

Cuando la fuerza \vec{F} es constante y la masa puntual recorre el segmento de recta que une los puntos A y B , entonces el trabajo T realizado por \vec{F} se expresa mediante el producto escalar

$$T = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Para poder utilizar la fórmula anterior, en el caso general de una fuerza variable y una trayectoria curvilínea arbitraria, dividamos la curva Γ mediante ciertos puntos $A = A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m = B$. De este modo, el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} se descompondrá en la suma de los trabajos correspondientes a todos los arcos $A_{i-1}A_i$ $i = 1, \dots, m$. De este modo reducimos el problema al cálculo del trabajo en una porción de la curva, la cual podremos considerar pequeña, siempre que tomemos suficiente cantidad de puntos de división colocados adecuadamente.

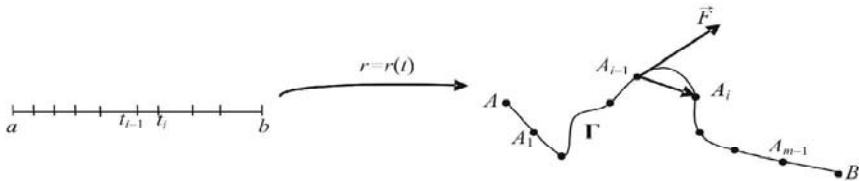


FIGURA 1.

Supondremos, para simplificar, que la curva Γ es suave y sea $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ una parametrización continuamente diferenciable de Γ . Efectuemos la división de la curva mediante particiones $\{t_i\}$, $i = 1, \dots, m$, del intervalo $[a, b]$ (Fig. 1). De este modo, los puntos $A = A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m = B$, donde $A_i = r(t_i)$, $i = 1, \dots, m$ están situados sobre la curva, en el mismo orden que la parametrización r recorre a Γ . Los puntos A_0 y A_m son, respectivamente, los puntos inicial y final de la curva y pueden coincidir o no.

Como hemos supuesto la curva suave, si el arco $A_{i-1}A_i$ es suficientemente pequeño, podemos identificarlo con el segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$. Además, si la fuerza \vec{F} varía de forma continua, podemos considerarla como si fuera constante e igual a su valor en un punto cualquiera de dicho arco, por ejemplo en A_{i-1} . Entonces el trabajo realizado por \vec{F} , al recorrer esta pequeña porción de la curva desde A_{i-1} hasta A_i , será aproximadamente igual al producto escalar $\vec{F}(A_{i-1}) \cdot \overline{A_{i-1}A_i}$. De modo que, el trabajo total T realizado por \vec{F} al desplazar la partícula desde A hasta B puede ser calculado mediante:

$$T \approx \sum_{i=1}^m \vec{F}(A_{i-1}) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^m \vec{F}(A_{i-1}) \cdot (\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})).$$

Por otra parte, para particiones $\{t_i\}$ del intervalo $[a,b]$ tales que la longitud $t_i - t_{i-1}$ de todos los subintervalos es muy pequeña, se tiene la aproximación:

$$\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \approx \vec{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Luego, para el trabajo T obtenemos el estimado:

$$T \approx \sum_{i=1}^m \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \vec{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}). \quad (1)$$

Todas las aproximaciones realizadas mejoran en exactitud en la medida que la longitud de los subintervalos de la partición $\{t_i\}$ se hace más pequeña. Por tanto, resulta completamente natural que el trabajo T se represente por el límite del miembro derecho de (1), cuando $\max_{i=1 \dots m} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$.

Por otra parte, la suma en la expresión (1) puede interpretarse como una suma de Riemann de la función $(\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{r}'$ correspondiente a la partición $\{t_i\}$ del intervalo $[a,b]$. Así que el trabajo T se puede definir por la integral:

$$T = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

(con las condiciones exigidas a la curva Γ y a la función \vec{F} , el integrando resulta una función continua y por tanto integrable).

Los razonamientos desarrollados anteriormente pueden ser realizados para una función vectorial cualquiera, definida sobre los puntos de una curva, por lo que

constituyen una motivación para la introducción del concepto matemático de integral curvilínea.

Definición 1. Sea Γ una curva suave en \mathbf{R}^n representada por la parametrización $r(t)$, $t \in [a,b]$, y una función $F : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$. La **integral curvilínea de F a lo largo de Γ** se define por

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt . \quad (2)$$

En la integral del segundo miembro de (2) se ha considerado el producto escalar usual entre dos elementos de \mathbf{R}^n , $F(r(t))$ y $r'(t)$, además se ha supuesto que la integral existe en el sentido propio o impropio (de Riemann).

Esta definición puede ser extendida para una familia de curvas más amplia que las curvas suaves, la denominadas **curvas suaves a pedazos**. Una curva Γ es suave a pedazos cuando se puede representar en la forma $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$, donde todas las curvas Γ_i son suaves. En este caso definiremos la integral curvilínea por:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} F \cdot dr$$

Observaciones. 1) El trabajo T , realizado por una fuerza \vec{F} al mover una masa unitaria a lo largo de una curva Γ suave a pedazos puede ser definido como la integral curvilínea

$$T = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot dr .$$

2) Para funciones continuas y curvas suaves a pedazos, la integral de Riemann en el miembro derecho de (2) existe y, en este caso, la integral curvilínea siempre está bien definida.

3) Como una curva puede darse mediante parametrizaciones diferentes, entonces, es natural preguntarse ¿dependerá el valor de la integral curvilínea de la parametrización escogida para escribir (2)? Para responder a esta interrogante consideraremos dos parametrizaciones equivalentes de una misma curva suave $\Gamma : r : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $\rho = r \circ \varphi : [\alpha,\beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$, donde $\varphi : [\alpha,\beta] \rightarrow [a,b]$ es

una función estrictamente monótona y de clase C^1 . Aplicando la definición (2) con la parametrización de Γ dada por ρ , obtenemos:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_{\alpha}^{\beta} F(\rho(u)) \cdot \rho'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} F(r(\varphi(u))) \cdot r'(\varphi(u)) \varphi'(u) du .$$

Supongamos primeramente que φ es creciente y hagamos en la última integral el cambio de variables $t = \varphi(u)$. Como $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$, tenemos que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\rho(u)) \cdot \rho'(u) du = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt .$$

Con esto hemos verificado que, cuando φ es creciente las dos parametrizaciones dan lugar al mismo valor de la integral curvilínea. En el caso que φ fuera decreciente se tendría $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, por lo que obtendríamos el mismo valor absoluto, pero el signo contrario, lo cual está en consonancia con la interpretación física de la integral curvilínea.

Cuando el cambio de parámetro se realiza mediante una función decreciente, la curva es recorrida en el sentido contrario. Así que se tiene la relación:

$$\int_{-\Gamma} F \cdot dr = - \int_{\Gamma} F \cdot dr ,$$

donde por $-\Gamma$ hemos denotado la misma curva Γ , pero recorrida en el sentido opuesto.

Observemos que, en los razonamientos anteriores, la existencia de la integral de Riemann correspondiente a una parametrización conlleva a la existencia de la integral correspondiente a la otra parametrización.

Veamos ahora otra forma usual para representar la integral curvilínea. Consideraremos el caso particular $n = 2$ y sean $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, y $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Entonces (2) se convierte en:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt .$$

Esta igualdad motiva la introducción de la notación:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

para representar la integral curvilínea de F según Γ

Análogamente, cuando $n = 3$ podemos escribir:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

donde $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Ejemplo 1. Calculemos la integral curvilínea:

$$I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

donde Γ es la curva cerrada $OBCO$ constituida por los lados del triángulo con vértices en los puntos $O(0,0)$, $B(1,1)$ y $C(2,0)$ y recorrida en ese orden (Fig. 2).

Esta es una curva suave a pedazos, formada por tres segmentos de rectas: OB , BC y CO y recorridos en ese orden. Por definición:

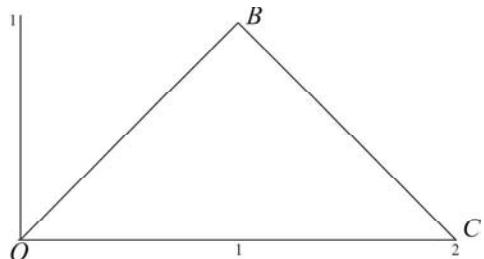


FIGURA 2.

$$I = \int_{OB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy + \\ + \int_{BC} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy + \int_{CO} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy.$$

Consideremos las parametrizaciones siguientes para los segmentos de rectas:

$$OB: r_1(t) = (t, t), \quad t \in [0, 1], \quad BC: r_2(t) = (t, 2-t), \quad t \in [1, 2],$$

$$CO: r_3(t) = (2-t, 0), \quad t \in [0, 2].$$

Entonces:

$$I = \int_0^1 2t^2 dt + \int_1^2 [t^2 + (2-t)^2 - t^2 + (2-t)^2] dt + \int_0^2 (2-t)^2 (-1) dt = -\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 2. Calculemos la integral curvilínea $I = \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$,

donde Γ es la curva dada por $y = x^a$, $a > 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Una parametrización de Γ es: $r(t) = (t, t^a)$, $0 \leq t \leq 1$.

De modo que:

$$I = \int_0^1 (2t^{a+1} + t^2 \cdot at^{a-1}) dt = 1.$$

Es interesante observar en este ejemplo que el valor de la integral no depende de a , mientras que la forma de la curva Γ sí varía con a (ver Fig. 3). Esta situación de invariancia de la integral con relación a la trayectoria es de interés especial y lo trataremos más adelante.

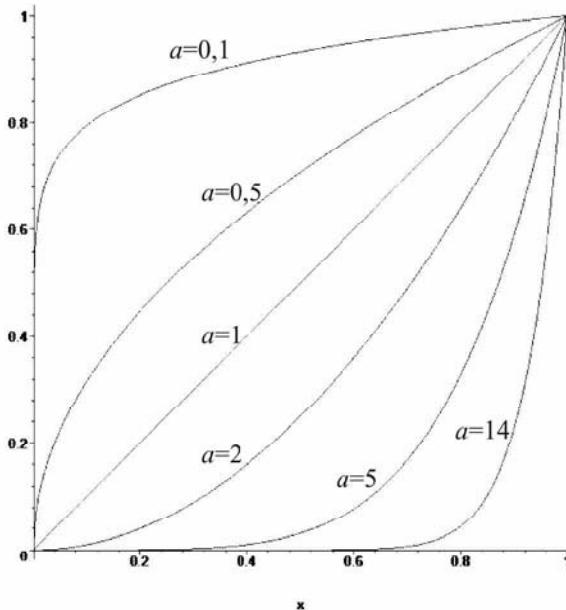


FIGURA 3.

Debido a que la integral curvilínea se define a través de una integral de Riemann, es natural esperar que esta última le trasmita muchas de sus propiedades. Por ejemplo, se demuestra fácilmente (ejercicio 2) que:

$$1) \int_{\Gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot dr = \alpha \int_{\Gamma} F \cdot dr + \beta \int_{\Gamma} G \cdot dr ,$$

$$2) \int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_{\Gamma_1} F \cdot dr + \int_{\Gamma_2} F \cdot dr .$$

(En ambas igualdades hemos supuesto la existencia de dos de las tres integrales y en 2) se ha considerado que Γ está dividida en dos partes Γ_1 y Γ_2 .)

Existen otros problemas físicos de índole totalmente diferente que también conducen a la integración sobre curvas, pero en este caso, las funciones integrandos son escalares, es decir sus valores son números reales. Por ejemplo, el cálculo de la masa de una curva Γ (la cual puede constituir la representación matemática de un objeto físico como, por ejemplo, un alambre delgado), conocida la densidad $f(x,y)$ en cada punto $(x,y) \in \Gamma$ o la determinación del centro de gravedad de Γ . Este tipo de problemas motiva la introducción de la definición matemática siguiente:

Definición 2. Sea Γ una curva suave en \mathbf{R}^n representada por la parametrización $r(t)$, $t \in [a,b]$ y una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$. La **integral curvilínea de f a lo largo de Γ** se define por:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt ,$$

siempre que esta última integral exista como integral de Riemann propia o impropia.

Si Γ es una curva suave a pedazos que se descompone en la forma $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$, donde las curvas Γ_i son suaves, la integral curvilínea se define mediante:

$$\int_{\Gamma} f ds = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} f ds .$$

Observaciones. 1) Cuando consideramos la función igual uno en todo punto de la curva Γ , se obtiene, evidentemente, la longitud de la curva Γ (ver apéndice, epígrafe 3).

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b |r'(t)| dt .$$

2) La masa M de una curva Γ suave a pedazos que posee una densidad puntual dada por la función f viene expresada por:

$$M = \int_{\Gamma} f ds .$$

Análogamente, las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centro de gravedad de una curva $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ pueden ser calculadas mediante las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} xf(x, y) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} yf(x, y) ds .$$

Ejercicios propuestos

1. Calcula las integrales curvilíneas siguientes:

a) $\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$, donde Γ es la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, recorrida desde $(-a, 0)$ hasta $(a, 0)$.

b) $\int_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, cuando Γ es una espira de la hélice circular dada por $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, siendo Γ la parte de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde el origen al punto $(2, 0)$.

d) $\int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, donde la curva Γ es la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el plano $z = c$, (c constante).

e) $\int_{\Gamma} xydx + yzdy + zx dz$, donde Γ es la semicircunferencia determinada por

la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ y el plano $z = x$, con $y \geq 0$, recorrida desde el origen hasta el punto $(R, 0, R)$.

f) $\int_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, siendo Γ la frontera del cuadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

2. Sean las funciones $F, G: \Gamma \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, α y β constantes y Γ una curva suave a pedazos. Demuestra que:

$$a) \int_{\Gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot dr = \alpha \int_{\Gamma} F \cdot dr + \beta \int_{\Gamma} G \cdot dr,$$

$$b) \int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_{\Gamma_1} F \cdot dr + \int_{\Gamma_2} F \cdot dr.$$

(En ambas igualdades hemos supuesto la existencia de dos de las tres integrales y en b) se ha considerado que Γ está dividida en dos partes Γ_1 y Γ_2 .)

3. Sea Γ una curva suave a pedazos en \mathbf{R}^n que tiene longitud L y F una función definida sobre Γ tal que $|F(x)| \leq M$, para todo $x \in \Gamma$. Prueba que:

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot dr \right| \leq ML.$$

4. Halla el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ al mover una partícula a lo largo del segmento que une el punto $(0,0,0)$ con el $(1,2,4)$.
5. Halla el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde el punto $(-1,0)$ hasta el punto $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Qué elipse hace mínimo el trabajo?
6. Halla la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$, suponiendo que la densidad en el punto (x,y,z) es x^2 .

7. Un alambre uniforme tiene la forma del arco de la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = x$ que une a los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,\sqrt{2})$. Halla las coordenadas del centro de gravedad de este alambre.
8. Halla la masa de una curva Γ dada por las ecuaciones $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \sqrt{3}at$, $t \in [0,1]$ y con densidad $z = \sqrt{2y/a}$.

VII.2. INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA Y TEOREMA DE GREEN

En la introducción comentamos que uno de los problemas tratados por Clairaut fue la determinación de cuándo una integral del tipo $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$ no depende de la forma de la curva Γ , sino solo de sus puntos inicial y final. Esta misma clase de problemas reviste especial interés en el estudio de la integración de funciones de variable compleja. Los teoremas siguientes reducen el análisis de la independencia de la trayectoria de la integral curvilínea a la búsqueda de una función “primitiva” de la función vectorial $F = (P, Q)$.

Teorema 1. Sea $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función continua en un dominio U (conjunto abierto y conexo) y supongamos que existe una función $\varphi : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^1 , tal que $F(x) = \nabla \varphi(x)$, para todo $x \in U$. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in U$ y toda curva suave a pedazos $\Gamma \subset U$, que tenga a x e y como puntos inicial y final respectivamente, se cumple:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot dr = \varphi(y) - \varphi(x).$$

Observaciones: 1) Notemos que la expresión anterior resulta una generalización de la fórmula fundamental del cálculo integral: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, demostrada cuando la función f' es continua en el intervalo $[a,b]$.

2) La función φ se denomina **función potencial** de F en el abierto U y se dice que F es una **función gradiente**. Por otra parte, si denotamos por F_i , $i = 1, \dots, n$, las componentes de F , entonces la relación $F(x) = \nabla \varphi(x)$ es equivalente a:

$$d\varphi(x) = F_1(x)dx_1 + \dots + F_n(x)dx_n.$$

Esto motiva otra terminología para indicar la existencia de función potencial para una función F : se dice que la expresión $F_1(x)dx_1 + \dots + F_n(x)dx_n$ constituye un **diferencial exacto**.

◆ Consideremos una curva suave $\Gamma \subset U$, parametrizada por la función continuamente diferenciable $r:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, tal que $r(a) = x$ y $r(b) = y$. Usando la definición de integral curvilínea podemos escribir:

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot dr = \int_a^b \nabla \varphi(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Pero, por la fórmula de derivación de las funciones compuestas, se tiene que:

$$\nabla \varphi(r(t)) \cdot r'(t) = \frac{d[\varphi(r(t))]}{dt},$$

es decir, el integrando es la derivada de una función, continuamente diferenciable, de una variable real. Entonces, utilizando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos:

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot dr = \int_a^b \frac{d[\varphi(r(t))]}{dt} dt = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)) = \varphi(y) - \varphi(x).$$

Esto demuestra el teorema para el caso en que Γ sea una curva suave. Para el caso de una curva suave a pedazos, basta con aplicar la definición de integral curvilínea para este tipo de curvas y el resultado obtenido a cada uno de los pedazos en que se descompone Γ . ◆

Una consecuencia inmediata de este teorema es que, cuando una función continua F es un gradiente, entonces el valor de **la integral**:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr$$

no depende de la curva Γ que se escoja (con tal que sea suave a pedazos y esté contenida en U) y solo depende de los puntos inicial y final x e y . Resulta que el recíproco de esta afirmación es también válido, como establece el teorema siguiente.

Teorema 2. Sea $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función continua en un dominio U y $x, y \in U$ arbitrarios. Supongamos que la **integral curvilínea de F no dependa**

de la trayectoria en U , esto es, para cualesquiera dos curvas Γ_1 y Γ_2 , suaves a pedazos (contenidas en U), cuyos puntos inicial y final son respectivamente x e y se verifica:

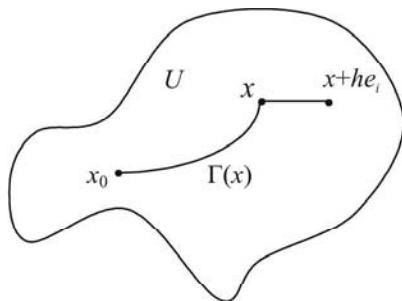
$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dr = \int_{\Gamma_2} F \cdot dr .$$

Entonces F es una función gradiente, es decir, existe una función φ de clase C^1 en U tal que:

$$\nabla \varphi(x) = F(x) , \quad \text{para todo } x \in U .$$

- ◆ Consideremos un punto $x_0 \in U$ fijo y otro punto arbitrario x de U y sea $\Gamma(x)$ una curva suave a pedazos contenida en U que une a x_0 y x (Fig. 4). Definamos una función $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}$, mediante la expresión:

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma(x)} F \cdot dr .$$



La hipótesis sobre la independencia de la trayectoria garantiza que la función φ no dependa de la selección que se haga de la curva $\Gamma(x)$. Queda por demostrar que se cumple $\nabla \varphi(x) = F(x)$, para $x \in U$. Para ello debemos verificar que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde F_i denota la componente $i^{\text{ésima}}$ de F .

Por definición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\Gamma(x+he_i)} F \cdot dr - \int_{\Gamma(x)} F \cdot dr \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+he_i]} F \cdot dr . \end{aligned}$$

donde e_i es el vector de \mathbf{R}^n con todas sus componentes nulas excepto la que ocupa la posición i que vale 1. Hemos considerado la curva $\Gamma(x + he_i)$ como la curva $\Gamma(x)$ completada mediante el segmento $[x, x + he_i]$ que une los puntos x y $x + he_i$ (si h es suficientemente pequeño este segmento está contenido en U).

Para el segmento $[x, x + he_i]$ tomemos la parametrización $r(t) = x + the_i$, $t \in [0, 1]$, entonces $r'(t) = he_i$. Haciendo uso de la definición de integral curvilínea, tenemos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 F_i(x + the_i) dt.$$

El teorema del valor medio, aplicado a la integral anterior, permite encontrar un $\theta \in [0, 1]$ tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F_i(x + \theta he_i).$$

Finalmente, teniendo en cuenta la continuidad de F , obtenemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x). \quad \blacklozenge$$

Observaciones. 1) Es claro que la función potencial φ , construida durante la demostración del teorema, depende del punto x_0 que se seleccione. Para diferentes puntos iniciales, en general, obtendremos funciones potenciales diferentes. Esto significa que la función potencial no es única.

2) De la definición de función potencial es evidente que, si sumamos una constante a una función potencial, obtenemos otra función potencial. Recíprocamente, puede demostrarse que, si φ_1 y φ_2 son funciones potenciales de la misma función vectorial F en un dominio U , entonces φ_1 y φ_2 difieren en una constante (*¿Por qué?*).

3) Supongamos que la integral de F no depende de la trayectoria en U . Entonces, por el Teorema 2, existe función potencial φ . Sea $\Gamma \subset U$ una curva cerrada simple suave a pedazos arbitraria, como una consecuencia del Teorema 1, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \varphi(y) - \varphi(x) = 0,$$

ya que en el caso de una curva cerrada los puntos inicial y final coinciden.

Una curva cerrada simple y a la vez suave a pedazos la denominaremos un **contorno**. Luego, si la integral de F no depende de la trayectoria en U , entonces la integral a lo largo de cualquier contorno contenido en U es cero.

También se cumple el recíproco de la afirmación anterior, si la integral a lo largo de cualquier contorno contenido en U es cero, entonces la integral no depende de la trayectoria en U . En efecto, consideremos Γ_1 y Γ_2 dos curvas suaves a pedazos, contenidas en U y que tienen como punto inicial a x y punto final a y . La curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$ (Fig. 5) es un contorno, por tanto:

$$0 = \int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_{\Gamma_1} F \cdot dr + \int_{-\Gamma_2} F \cdot dr = \int_{\Gamma_1} F \cdot dr - \int_{\Gamma_2} F \cdot dr.$$

Esto demuestra que la integral no depende de la trayectoria en U .

El Teorema 3 resume los resultados de los teoremas 1 y 2 y de la nota anterior.

Teorema 3. Para una función $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua en un dominio U , son equivalentes las afirmaciones siguientes:

- i) La integral curvilinea de F no depende de la trayectoria en U .
- ii) La integral de F a lo largo de cualquier contorno contenido en U es cero.
- iii) F es una función gradiente en U .

Ejemplo 1. Retornemos a la integral del ejemplo 2 del epígrafe anterior:

$$I = \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy.$$

En este caso la función es $F(x,y) = (2xy, x^2)$, ($U = \mathbf{R}^2$) y la sencillez de su expresión, nos permite obtener fácilmente una función potencial:

$$\varphi(x,y) = x^2y.$$

Si escogemos como Γ una curva cualquiera que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, entonces el Teorema 1 nos permite encontrar inmediatamente el valor de la integral:

$$\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = 1$$

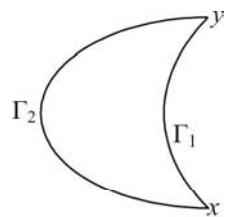


FIGURA 5.

Que contiene como caso particular el resultado obtenido antes.

Una vez en posesión de una función potencial de F en U , podemos calcular directamente el valor de la integral curvilínea de F para una curva $\Gamma \subset U$ que une dos puntos cualesquiera de U . Por tanto, es muy útil saber cuándo existe función potencial y tener un método para hallarla.

◆ Supongamos que φ sea una función potencial de $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, esto significa que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = F_i(x), \text{ para todo } x \in U (i = 1, \dots, n).$$

Si la función F tiene derivadas parciales continuas en U , entonces, derivando la igualdad anterior respecto a la variable x_j , $j \neq i$, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}.$$

Análogamente, intercambiando los papeles de i y j , obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}.$$

Como φ es de clase C^2 sus derivadas segundas mixtas son iguales, luego:

$$\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (1) \blacklozenge$$

De este modo hemos demostrado una **condición necesaria para que una integral curvilínea sea independiente de la trayectoria**:

Si $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 y tiene función potencial (o, equivalentemente, su integral curvilínea no depende de la trayectoria) en U , entonces para todo $x \in U$ tienen lugar las igualdades:

$$\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Ejemplo 2. La función $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ es de clase C^1 en $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y satisface:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

sin embargo:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \neq 0,$$

donde Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En efecto, consideremos la parametrización de Γ dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 \right] dt = 2\pi.$$

Este ejemplo muestra que, en general, la condición (1) es solo necesaria. La suficiencia, como veremos más adelante, depende de las características topológicas del dominio en que se trabaja y de las singularidades de la función. En este caso la singularidad $(0,0)$ “está rodeada por la curva”.

En ocasiones, cuando F tiene una expresión simple y se cumple la condición necesaria, podemos construir una función potencial φ mediante integración y posteriormente verificar que efectivamente esta función satisface la igualdad $\nabla\varphi = F$.

Ejemplo 3. Consideremos:

$$F(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2).$$

Se verifica fácilmente que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xz - 4y; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2xy + 2z; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = x^2.$$

Luego se cumple la condición necesaria. Supongamos que existe una función potencial φ , entonces ella deberá satisfacer:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1,$$

por tanto φ debe ser de la forma:

$$\varphi(x, y, z) = \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) dx + C(y, z) = x^2yz + z^2x - 2y^2x + x + C(y, z).$$

Pero también debe cumplirse:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 z - 4xy + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = x^2 z - 4xy,$$

así que $\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0$ y la función C no depende de la variable y . Finalmente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 y + 2zx + C'(z) = x^2 y + 2zx - 2,$$

por tanto $C'(z) = -2$ y de aquí que, $C(z) = -2z + C$, donde C es una constante.

De esta forma encontramos la familia de funciones:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 yz + z^2 x - 2y^2 x + x - 2z + C,$$

y puede verificarse que ellas satisfacen $\nabla \varphi = F$ en todo punto de \mathbf{R}^3 , por lo que todas ellas constituyen funciones potenciales para F .

Ejemplo 4. Situemos una partícula de masa m en el origen de coordenadas y otra masa M en el punto (x, y, z) . De acuerdo a las leyes de Newton, la fuerza de atracción F de la masa M por m se expresa mediante:

$$\vec{F} = -k \frac{mM}{r^3} \vec{r},$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$ y k es una constante que depende de las unidades de medida.

La fuerza \vec{F} es una función vectorial continuamente diferenciable en $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ cuyas componentes son:

$$\vec{F} = -kmM \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Puede verificarse fácilmente que la función:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{mMk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{mMk}{r},$$

cumple $\nabla\varphi = \vec{F}$, para todo punto $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. \vec{F} se denomina **campo de fuerzas newtoniano** y φ **potencial newtoniano**. Luego hemos demostrado que el campo de fuerzas newtoniano es un campo gradiente y su función potencial es el potencial newtoniano.

El trabajo realizado por el campo newtoniano al mover una partícula de masa M desde el punto (x_1, y_1, z_1) hasta el punto (x_2, y_2, z_2) viene dado por:

$$\varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1) = mMk\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Ejemplo 5. (Principio de conservación de la energía mecánica). Consideremos una función vectorial F continua en un dominio D de \mathbf{R}^3 que representa un campo de fuerzas. Para F supongamos la existencia de función potencial φ en D . El trabajo realizado por la fuerza F al trasladar una partícula de masa m desde el punto x_1 al punto x_2 (ambos en D) viene dado por:

$$T(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} F \cdot dr = \varphi(x_2) - \varphi(x_1). \quad (2)$$

donde Γ es una curva cualquiera contenida en D que une al punto x_1 con el punto x_2 . Sea $r = r(t)$, $t \in [a, b]$ una parametrización de Γ tal que $r(a) = x_1$ y $r(b) = x_2$, entonces:

$$T(x_1, x_2) = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton $F(r(t)) = mr''(t) = mv'(t)$, donde $v(t)$ designa al vector velocidad en el instante t . Así que:

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = F(r(t)) \cdot v(t) = mv'(t) \cdot v(t) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2.$$

Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$T(x_1, x_2) = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\|v(t)\|^2) dt = \frac{m}{2} |v(b)|^2 - \frac{m}{2} |v(a)|^2. \quad (3)$$

La expresión $K(x) = \frac{m}{2} |v(x)|^2$ se denomina **energía cinética** de la partícula en la posición correspondiente al punto x y el valor $-\varphi(x)$ se llama energía potencial de la partícula en x . Entonces de (2) y (3) podemos concluir que:

$$K(x_2) - \varphi(x_2) = K(x_1) - \varphi(x_1),$$

es decir, *la suma de las energías potencial y cinética de una partícula que se mueve en un campo de fuerza gradiente es siempre constante*. Esto es lo que se conoce en física como principio de conservación de la energía mecánica.

Una forma de analizar la suficiencia de la condición (1) es a través de la denominada *Fórmula de Green*, la cual aparece en el importantísimo trabajo de George Green *Un ensayo sobre las aplicaciones del análisis matemático a la teoría de electricidad y el magnetismo* (1828). Este ensayo contiene no solo la fórmula que estudiaremos a continuación sino otras muchas ideas fundamentales que motivaron el desarrollo de la poderosa escuela británica de física-matemática en el siglo XIX. Sin embargo, este folleto se publicó de forma privada y fue prácticamente desconocido hasta casi 20 años más tarde, cuando William Thompson lo descubrió y divulgó. Por esta razón, varios de los resultados de Green fueron obtenidos de forma independiente por otros matemáticos de la época. En particular la fórmula del Teorema 4 también fue obtenida por Cauchy vinculada a su interés por la integración en el campo complejo.

Previo al estudio del teorema de Green, veamos algunas ideas y terminología necesarias para su mejor comprensión.

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$, cerrada y simple es “intuitivamente evidente” que el conjunto $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ está formado por la unión de dos conjuntos abiertos y conexos disjuntos. Esta afirmación resulta completamente clara cuando uno piensa a Γ como un círculo, una elipse o cualquier otra curva cerrada sencilla. Sin embargo, sabemos que la estructura de una curva simple puede ser extraordinariamente complicada y, entonces, la afirmación anterior es menos evidente, aunque es correcta. La demostración de este resultado es difícil y rebasa el objetivo propuesto para este libro. Camille Jordan lo enunció y dio una demostración en el primer tomo de su *Curso de Análisis* (1893). La terminología que utilizaremos se basa en las ideas de Jordan.

Teorema de Jordan. Toda curva plana Γ cerrada simple divide al plano en dos dominios disjuntos, uno acotado por la curva y que denominaremos **interior** de Γ y otro no acotado que llamaremos **exterior** de Γ .

En lo que sigue nos interesarán curvas planas, cerradas simples que sean suaves a pedazos, es decir contornos en el plano.

Un contorno plano Γ puede ser recorrido de dos formas: en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj y que denominaremos **positivo** y en el mismo sentido de giro de las manecillas del reloj el cual será llamado **negativo**. Por ejemplo, en la Fig.6 se muestran la curva frontera de un rectángulo, recorrida en sentido positivo y una elipse, recorrida en sentido negativo. Notemos que cuando un observador camina sobre el contorno Γ recorriéndolo en sentido positivo, el interior D de Γ le queda a su izquierda.

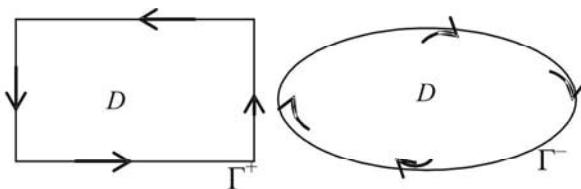


FIGURA 6.

Teorema 4. (Green). Consideremos un dominio D limitado por un contorno Γ . Supongamos que las funciones P y Q son continuas en $D \cup \Gamma$ y de clase C^1 en D . Entonces se cumple la fórmula de Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma^+} (P dx + Q dy), \quad (4)$$

donde Γ^+ , significa que Γ se recorre en sentido positivo.

◆ Veremos la demostración de este teorema solo para un caso particular. Simplifiquemos los razonamientos suponiendo que las funciones P y Q son de clase C^1 en un abierto que contenga a la clausura \bar{D} de D . La fórmula (4) es equivalente a las dos igualdades:

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma^+} P dx, \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma^+} Q dy.$$

Demostremos la primera igualdad para regiones D del tipo representado en la Fig. 7, es decir, en la forma:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad (5)$$

donde las funciones g_1 y g_2 tienen derivada continua en el intervalo $[a, b]$.

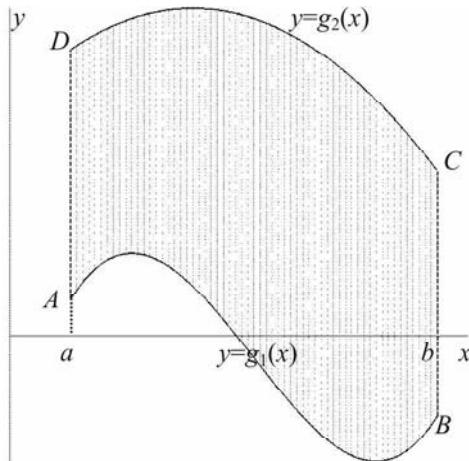


FIGURA 7.

Aplicando el Teorema de Fubini a la integral doble, tenemos:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))] dx. \end{aligned}$$

Como el contorno Γ se recorre en sentido positivo, para la integral curvilínea se tiene:

$$\int_{\Gamma^+} P dx = \int_{arcAB} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{arcCD} P dx + \int_{DA} P dx.$$

El arco $arcAB$ puede ser representado mediante la parametrización $r(t) = (t, g_1(t))$, $t \in [a, b]$. Luego:

$$\int_{arcAB} P dx = \int_a^b P(t, g_1(t)) dt.$$

Análogamente se obtiene:

$$\int_{arcCD} P dx = - \int_a^b P(t, g_2(t)) dt.$$

El segmento de recta \overline{BC} se parametriza mediante $r(t) = (b,t)$, con t tomando valores en cierto intervalo. En este caso, $r'(t) = (0,1)$ y por tanto:

$$\int_{\overline{BC}} P dx = 0.$$

De la misma forma se verifica que la integral sobre el segmento \overline{DA} es cero. De modo que:

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))] dx,$$

lo que demuestra:

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\Gamma} P dx.$$

De forma completamente análoga puede probarse que:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\Gamma} Q dy,$$

cuando el conjunto D es de la forma:

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}, \quad (6)$$

donde h_1 y h_2 son funciones con derivada continua en $[c,d]$.

De este modo hemos demostrado la validez de (4) cuando las funciones P y Q son continuamente diferenciables en un abierto que contiene a la clausura de un dominio D que puede ser descrito en las dos formas (5) y (6) y que denominaremos **dominio elemental** (son ejemplos de dominios elementales una elipse y un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados).

Supongamos ahora que el dominio D se puede descomponer en una unión finita $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ de dominios elementales D_i limitados por contornos Γ_i (Fig. 8). Entonces para cada $i = 1, \dots, m$, podemos escribir:

$$\iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma_i} P dx + Q dy,$$

donde cada contorno Γ_i se recorre en sentido positivo.

Sumando estas igualdades tenemos:

$$\sum_{i=1}^m \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} P dx + Q dy.$$

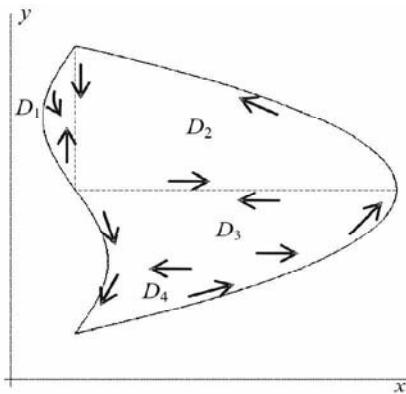


FIGURA 8.

los “cortes” que realizan la división de D . Al recorrer todos los contornos en sentido positivo, cada uno de estos cortes se recorrerán dos veces y en sentidos contrarios. Así que las integrales curvilíneas correspondientes a los dos recorridos de dichos cortes se anulan mutuamente, por tanto, la suma de las integrales curvilíneas del miembro derecho se reduce a la integral según Γ , recorrida en sentido positivo. Esto demuestra el teorema de Green en el caso particular en que **el dominio D pueda ser descompuesto en un número finito de dominios elementales y las funciones P y Q sean de clase C^1 en \bar{D} .** ◆

Generalicemos el Teorema 4 para el caso de dominios limitados por más de un contorno (Fig. 9).

Teorema 5. Consideremos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, $n+1$ contornos en el interior de Γ_0 tales que:

- a) $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$,
- b) $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, están en el interior de Γ_0 ,
- c) Γ_i está en el exterior de Γ_j , si $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

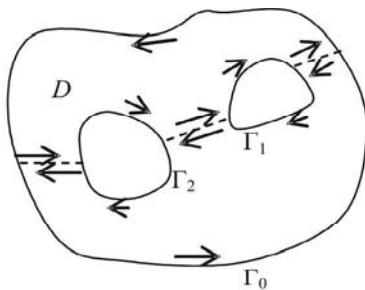


FIGURA 9.

Sea D el dominio limitado exactamente por estos $n + 1$ contornos, es decir la intersección del interior de Γ_0 con el exterior de todos los contornos Γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Si las funciones P y Q son continuas en \bar{D} y de clase C^1 en D , entonces:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_0} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} P dx + Q dy, \quad (7)$$

donde los contornos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, están todos recorridos en sentido positivo.

◆ Tracemos $n + 1$ segmentos de recta o arcos de curva suave que unan consecutivamente los contornos Γ_0 con Γ_1 , a este con Γ_2 , y así sucesivamente Γ_{n-1} , con Γ_n y finalmente a este último con Γ_0 . De este modo, D ha quedado dividido en dos dominios D_1 y D_2 cada uno de los cuales tiene por frontera un contorno. Ahora podemos proceder de forma semejante al caso de los dominios no elementales y aplicar el Teorema 4 a D_1 y D_2 para después sumar. También en este caso los arcos de curva auxiliares aparecerán recorridos dos veces y en sentidos opuestos, por lo que las integrales curvilíneas correspondientes se anularán mutuamente. Además observemos que, al recorrer los contornos fronteras de D_1 y D_2 en sentido positivo, el contorno Γ_0 se recorrerá también positivamente, mientras que los contornos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, aparecerán recorridos en sentido negativo. Esto último es el motivo por el cual aparece el signo negativo en las integrales correspondientes a los mismos en la expresión (7).

Es común denotar el miembro derecho de (7) como una sola integral curvilínea a lo largo de la frontera de D . Para ello establezcamos el convenio siguiente: Para un número finito de contornos que satisfacen los requerimientos exigidos en el enunciado del Teorema 5 escribiremos:

$$\int_{\text{Fr}(D)} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_0} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} P dx + Q dy.$$

De este modo, el recorrido de $\text{Fr}(D)$ se realiza de forma que siempre el dominio D está situado a la izquierda. Este sentido de recorrido de la frontera de un dominio lo consideraremos como positivo.

A continuación estudiaremos algunas aplicaciones del Teorema de Green:

1) Condición suficiente para la existencia de función potencial. Antes demostramos que las igualdades en (1) son necesarias, pero en general no suficientes, para la existencia de función potencial de una función $F : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

de clase C^1 . En el caso $n = 2$, el teorema de Green nos permite demostrar la suficiencia de (1) para ciertos tipos de dominios U .

Escribamos $F = (P, Q)$, entonces las relaciones en (1) se reducen a la única igualdad:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in U.$$

Si el dominio U es tal que **el Teorema de Green es aplicable a cualquier contorno Γ que esté en U** , entonces es evidente que

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0,$$

para todo contorno $\Gamma \subset U$. Por tanto F tiene función potencial en U .

Para que el teorema de Green pueda ser aplicado al contorno Γ debemos garantizar que, no solo el contorno, sino también su interior esté contenido en U . Precisamente esta propiedad es característica de los dominios que llamaremos simplemente conexos.

Definición 1. Un dominio $U \subset \mathbf{R}^2$ es **simplemente conexo** si para cualquier contorno $\Gamma \subset U$, también el interior de Γ está contenido en U .

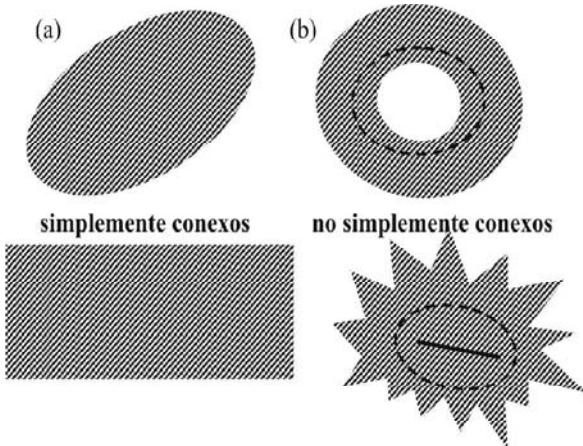


FIGURA 10.

En forma intuitiva podemos pensar los dominios simplemente conexos como aquellos que “no tienen huecos” de ningún tipo ni tamaño. En la Fig. 10 (a) se muestran ejemplos de conjuntos simplemente conexos y los de Fig. 10 (b) son conjuntos que no poseen esta propiedad. Para estos últimos se muestran ejemplos de contornos, situados en el dominio, cuyo interior contiene puntos que no pertenecen al mismo.

2) **Cálculo de áreas planas.** Si D es un dominio al cual podemos aplicar la fórmula (4) o (7), entonces podemos calcular el área de D a través de una integral curvilínea sobre su frontera. Por ejemplo, si consideramos $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, obtenemos:

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_{\text{Fr}(D)} -ydx,$$

donde $A(D)$ denota el área de D y $\text{Fr}(D)$ se recorre en sentido positivo.

Análogamente puede comprobarse:

$$A(D) = \int_{\text{Fr}(D)} xdy = \frac{1}{2} \int_{\text{Fr}(D)} xdy - ydx.$$

Usemos esta última fórmula para calcular el área limitada por la astroide.

Ejemplo 6. La ecuación de la astroide es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{1/3}$ (Fig. 11). Una parametrización de esta curva es:

$$r(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

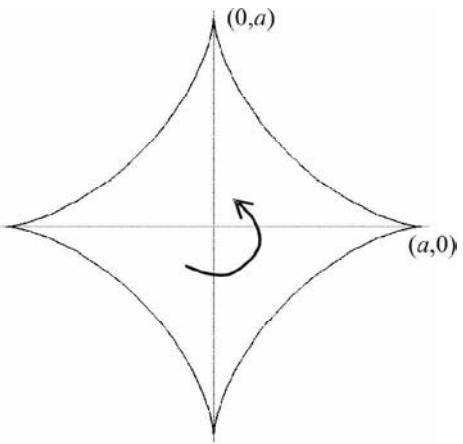


FIGURA 11.

Notemos que la parametrización escogida corresponde al recorrido positivo de la curva.

Entonces podemos escribir:

$$A = \frac{1}{2} \int_K xdy - ydx = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

3) **Cálculo de integrales curvilíneas.** La fórmula de Green puede resultar útil para calcular algunas integrales curvilíneas, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 7. Se quiere calcular la integral:

$$I = \int_{\Gamma} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy,$$

donde Γ es la frontera del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, orientado en sentido positivo.

Las funciones:

$$P(x,y) = 5 - xy - y^2; \quad Q(x,y) = -(2xy - x^2),$$

son continuamente diferenciables en todo el plano, además Γ es una curva suave a pedazos que limita un dominio D elemental. Luego podemos aplicar el Teorema de Green para obtener:

$$I = \iint_D x dxdy = 3 \int_0^1 dy \int_0^1 x dx = \frac{3}{2}.$$

Aunque esta integral curvilinea puede ser calculada sin dificultades usando la definición, resulta evidente que la fórmula de Green nos conduce mucho más rápidamente a la respuesta.

Ejemplo 8. Calculemos la integral curvilinea:

$$\int_{\Gamma} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

donde Γ es la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = ax$ recorrida desde el punto $(a,0)$ hasta el punto $(0,0)$.

En este caso la curva Γ no es cerrada y la fórmula (4) no puede ser aplicada directamente. Sin embargo, podemos añadir a Γ el segmento de recta que une los puntos inicial y final de la trayectoria y así obtener un contorno Γ' (Fig. 12). En el segmento del eje X es evidente que la correspondiente integral es nula, por lo que el valor de la integral propuesta coincide con el de la integral sobre el contorno Γ' , recorrido en sentido positivo. Calculemos esta última integral mediante la fórmula de Green:

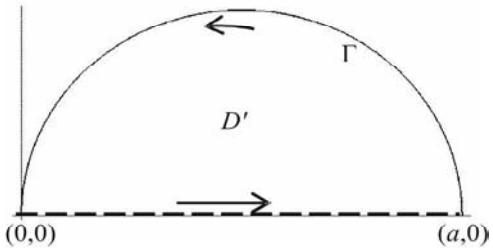


FIGURA 12.

$$\int_{\Gamma'} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy =$$

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y - my) \right) dxdy = m \iint_{D'} dxdy = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

Sugerimos al lector que compruebe la dificultad que implicaría el cálculo de la integral curvilínea propuesta utilizando directamente la definición.

El ejemplo siguiente nos muestra cómo podemos utilizar la fórmula de Green generalizada (7) para simplificar el cálculo de integrales sobre contornos.

Ejemplo 9. Sea la integral curvilínea:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

donde Γ denota un contorno arbitrario que no pasa por el punto $(0,0)$, recorrido en sentido positivo.

Es evidente que, si el punto $(0,0)$ está en el exterior de Γ , entonces la integral vale cero, pues:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Supongamos ahora que $(0,0)$ está en el interior de Γ y llamemos C a una circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio r , lo suficientemente pequeño para que C esté completamente situada en el interior de Γ . Si aplicamos la fórmula (7) al dominio D producido por la intersección del interior de Γ y el exterior de C y cuya frontera está constituida por la unión de estas dos curvas, se obtiene:

$$\int_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} - \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

donde C se recorre en sentido positivo.

Luego:

$$I = \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

4) Interpretación geométrica del jacobiano de una transformación. Consideraremos una función $\varphi: U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de clase C^1 en el dominio U (abierto y conexo), cuya matriz jacobiana $\varphi'(x)$ tiene determinante no nulo en todos los

puntos de U . Esto significa que el conjunto imagen $U^* = \varphi(U)$ es también un dominio (ver IV.3a). Además, $\det(\varphi'(x))$ es una función continua en U , luego mantendrá un signo constante en todo el dominio.

Escribamos la función φ en la forma $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ y supongamos que las derivadas mixtas $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ son continuas y, por tanto, iguales en todo punto de U .

Consideremos un contorno Γ contenido en U , entonces $\Gamma^* = \varphi(\Gamma)$ es también un contorno que está contenido en U^* . Supongamos que el interior D del contorno Γ está contenido en U y que el interior de Γ^* está contenido en U^* y denotemos $D^* = \varphi(D)$.

Sea la parametrización:

$$r(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in [a, b]$$

que recorre en sentido positivo al contorno Γ y consideremos la parametrización $\varphi \circ r$ del contorno Γ^* , o en forma de coordenadas:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b] \quad (8)$$

El área del conjunto D^* se puede expresar mediante la integral curvilínea:

$$A(D^*) = \varepsilon \int_{\Gamma^*} x dy,$$

donde $\varepsilon = +1$ si la orientación de Γ^* es positiva y $\varepsilon = -1$, en caso contrario, es decir $\varepsilon = +1$ si Γ y $\Gamma^* = \varphi(\Gamma)$ tienen la misma orientación.

Usando la definición de integral curvilínea y la parametrización (8) para Γ^* se obtiene:

$$A(D^*) = \varepsilon \int_a^b xy'(t) dt = \varepsilon \int_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right) dt = \varepsilon \int_{\Gamma} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Aplicaremos la fórmula de Green a esta última integral curvilínea ($P = x \frac{\partial y}{\partial u}$ y $Q = x \frac{\partial y}{\partial v}$). Obtenemos:

$$\begin{aligned}
A(D^*) &= \varepsilon \iint_{\Gamma} P du + Q dv = \varepsilon \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv = \\
&= \varepsilon \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv = \varepsilon \iint_D \det(\varphi'(u, v)) dudv.
\end{aligned}$$

Como el área es positiva y el jacobiano no cambia su signo en U , entonces ε no depende del contorno Γ escogido. Así que hemos demostrado:

$$A(D^*) = \iint_D |\det(\varphi'(u, v))| dudv. \quad (9)$$

Además, si $\det(\varphi'(u, v)) > 0$ (resp. $\det(\varphi'(u, v)) < 0$) en U , entonces $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$), es decir si una parametrización $r = r(t)$, $t \in [a, b]$ recorre positivamente la frontera Γ de D entonces la parametrización dada por $\varphi \circ r$ también recorrerá positivamente (resp. negativamente) la frontera de $\varphi(D)$.

De este modo, para el signo del jacobiano de una transformación de coordenadas φ , tenemos la interpretación geométrica siguiente:

Cuando $\det(\varphi'(u, v)) > 0$, los contornos Γ y $\varphi(\Gamma)$ se recorren en el mismo sentido, es decir la transformación φ conserva la orientación y cuando $\det(\varphi'(u, v)) < 0$, Γ y $\varphi(\Gamma)$ se recorren en sentidos contrarios.

Aplicemos el Teorema del valor medio a la integral en (9):

$$A(D^*) = \iint_D |\det(\varphi'(u, v))| dudv = |\det(\varphi'(\bar{u}, \bar{v}))| A(D),$$

donde $(\bar{u}, \bar{v}) \in D$. Denotemos el diámetro de D por $\text{diám}(D)$ y supongamos que $\text{diám}(D) \rightarrow 0$, de forma que el dominio D se reduce al punto $(u_0, v_0) \in D$. Entonces, en virtud de la continuidad de $\det(\varphi')$ en D :

$$\lim_{\text{diám}(D) \rightarrow 0} \frac{A(D^*)}{A(D)} = \lim_{\text{diám}(D) \rightarrow 0} |\det(\varphi'(\bar{u}, \bar{v}))| = |\det(\varphi'(u_0, v_0))|.$$

La relación obtenida sugiere la siguiente interpretación:

El valor absoluto del jacobiano de una transformación de coordenadas en un punto, puede interpretarse como un factor de dilatación local para las áreas.

Ejercicios propuestos

1. Calcula las integrales curvilíneas siguientes:

a) $\int_{\Gamma} \frac{ydx - xdy}{y^2}$, cuando Γ es el arco de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y > 0$ que va desde el punto $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ al punto $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

b) $\int_{\Gamma} yzdx + zx dy + xy dz$, si Γ es una curva cerrada y suave a pedazos arbitraria de \mathbf{R}^3 .

c) $\int_{\Gamma} xdy + ydx$, siendo Γ el arco de la curva $y = e^{\operatorname{sen} \pi x}$ que une los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$.

2. Para las siguientes funciones, determina, si existe, una función potencial. Indica el dominio donde es válido el resultado obtenido.

a) $F(x, y) = (2x + 3y, 3x - 4y)$, b) $F(x, y) = (4x^3 y^3 - 2y^2, 3x^4 y^2 - 2xy)$,

c) $F(x, y, z) = \left(z \left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right), \frac{z}{x^2 y}, \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right)$.

3. Si φ y ψ son funciones potenciales de una función vectorial continua F en un dominio U , demuestra que $\varphi - \psi$ es constante en U .

4. Sea f una función continua en un dominio U y Γ un contorno contenido en U . Prueba que:

$$\int_{\Gamma} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

5. Utilizando el Teorema de Green, halla el área limitada por:

a) El arco de cicloide $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y el eje X .

b) La cardioide $\rho = a(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

6. Calcula la integral:

$$\int_{\Gamma} e^x (1 - \cos y) dx - e^x (y - \sin y) dy,$$

donde Γ es la frontera del conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$, recorrida en sentido positivo.

7. Calcula $\int_{\Gamma} x^3 dy - y^3 dx$, donde Γ es el lazo derecho de la lemniscata $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.
8. Sea Γ el arco de la curva $y = x^2$ que une al punto $(0,0)$ con el punto $(1,1)$. Calcula la integral:

$$\int_{\Gamma} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy.$$

9. Calcula $\int_{\Gamma} (e^x - y^3) dx + (e^y + x^3) dy$, donde Γ es la semicircunferencia superior de $x^2 + y^2 = 2x$ recorrida desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,0)$.

Sugerencia: $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}$.

10. ¿En cuánto se diferencian las integrales:

$$\int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy \quad y \quad \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy ?$$

donde AmB es el segmento de recta que une los puntos $A(1,1)$ y $B(2,6)$ y AnB es el arco de parábola con eje vertical que pasa por A , B y el origen.

11. Sea D un dominio del plano limitado por un número finito de contornos y supongamos que la función f es de clase $C^2(\bar{D})$ y armónica en D , es decir, para todo $(x, y) \in D$ se satisface $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Prueba que:

$$\int_{Fr(D)} \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_{Fr(D)} \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$

12. Calcula $\int_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, donde Γ es

- a) El cuadrado con vértices en los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$.
- b) La circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

Ambas curvas recorridas en sentido positivo.

VII.3. SUPERFICIES

Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar las integrales cuya variable se mueve recorriendo una superficie. Por esta razón previamente debemos precisar qué entenderemos por “superficie” y algunas de las nociones asociadas a este concepto.

En el siglo XVIII las superficies eran consideradas simplemente como fronteras de los sólidos, sin embargo, para utilizar las herramientas del análisis matemático, fue necesario describirlas por medio de funciones. De este modo se introdujeron diferentes formas de representar las superficies más usuales, esferas, conos, cilindros,... Primero fue utilizada la forma explícita o la implícita y más tarde también la forma paramétrica que fue introducida por Euler. Al igual que en las curvas, esta última forma de representación se ha revelado como la más general y será la que utilizaremos preferentemente. Además, para los modestos fines que nos hemos propuesto, nos basta definir superficies que sean “suficientemente buenas” para las aplicaciones físicas y que constituyan la base para cursos más avanzados de cálculo sobre superficies n -dimensionales.

Definición 1. a) Sea un dominio (conjunto abierto y conexo) D del plano, limitado por un contorno Γ y una función $r : \bar{D} \subset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ de clase C^1 en el abierto U (recordemos que esto podía expresarse brevemente diciendo que φ es de clase C^1 en \bar{D}). Llamaremos **superficie** al conjunto imagen $S = r(\bar{D})$ y a la función r la denominaremos **representación** o **parametrización** de S (Fig. 13).

b) Si, además, la función r es inyectiva, entonces la superficie S se dice **simple** y al contorno $r(\Gamma)$, se le denomina **borde de S** .

Observación. La función r está determinada por sus tres funciones coordenadas. Para cada punto $(u, v) \in \bar{D}$ se tiene:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

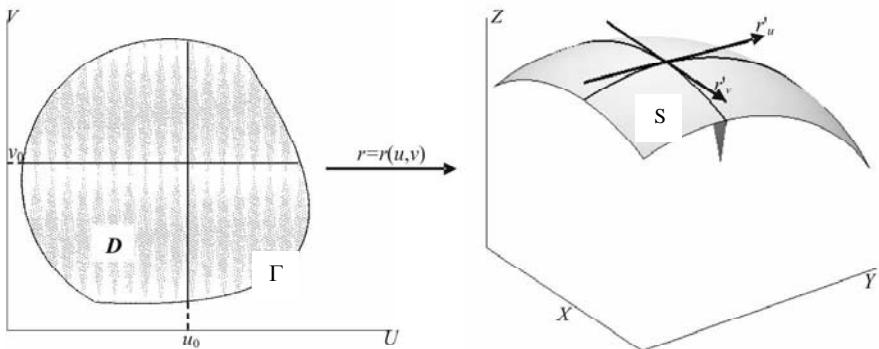


FIGURA 13.

Siempre que esto no se preste a confusión, utilizaremos para las funciones componentes de r la misma letra de la correspondiente coordenada.

Impongamos aún otra restricción a las superficies que estudiaremos. Sean S una superficie dada por la parametrización r , continuamente diferenciable en \bar{D} y un punto $P \in S$ que corresponde al punto $(u_0, v_0) \in \bar{D}$, es decir, $r(u_0, v_0) = P$. La función $v \mapsto r(u_0, v)$ está definida en un cierto intervalo que contiene a v_0 y representa una curva que pasa por P situada sobre la superficie S (Fig. 13). Un vector tangente en P a esta curva es:

$$r'_v(u_0, v_0) = (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0)),$$

donde con el subíndice v indicamos la derivación respecto a esa variable.

De forma análoga, la función $u \mapsto r(u, v_0)$, representa una curva sobre S que pasa por el punto P , con dirección tangente en P dada por el vector:

$$r'_u(u_0, v_0) = (x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0)).$$

Si suponemos que $r'_u(u_0, v_0) \times r'_v(u_0, v_0) \neq 0$, entonces estos vectores no son colineales y existe un único plano determinado por ellos que pasa por el punto P . Puede demostrarse (ejercicio 1) que este plano contiene a todas las rectas tangentes en P a curvas suaves situadas sobre S y que pasan por P . Por ello este plano se denomina **plano tangente** a S en P .

Los puntos P de la superficie donde $r'_u(u_0, v_0) \times r'_v(u_0, v_0) \neq 0$ se denominan puntos **regulares** y en caso contrario son puntos **singulares** de S para la

parametrización $r = r(u, v)$. Diremos que una superficie es **suave** si existe una parametrización que satisface la definición 1a) y además tiene, a lo sumo, un número finito de puntos singulares.

Ejemplo 1. La función $r : \bar{D} = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $r(u, v) = (u, v, 0)$ define una superficie simple. En este caso:

$$r'_u(u, v) = (1, 0, 0) \text{ y } r'_v(u, v) = (0, 1, 0), \text{ para todo } (u, v) \in \bar{D}.$$

Así que $r'_u \times r'_v = (0, 0, 1)$ y todos los puntos de la superficie son regulares. Por tanto es una superficie suave que coincide, geométricamente, con la porción del plano XY perteneciente al círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. En este caso el plano tangente en todos los puntos coincide con el plano XY .

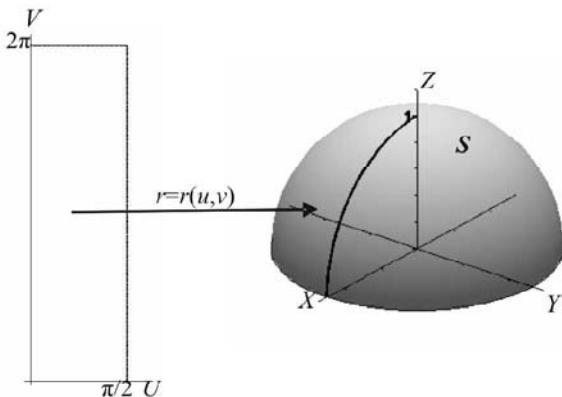


FIGURA 14.

Ejemplo 2. La función:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \\ (u, v) &\in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi], \end{aligned}$$

define una superficie paramétrica S que coincide con el hemisferio superior de la esfera de centro en el origen y radio 1 (Fig. 14). Para esta parametrización obtenemos:

$$\begin{aligned} r'_u(u, v) &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ r'_v(u, v) &= (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

luego:

$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \sin u \, r(u,v).$$

Como $|r(u,v)|=1$, los puntos singulares serán aquellos donde $\sin u = 0$, es decir, cuando $u = 0$. De modo que el punto $(0,0,1)$ es el único punto singular de la superficie correspondiente a esta parametrización. Por tanto, la superficie S es suave.

La función r no es inyectiva, pues todos los puntos de la forma $(0,v)$ tienen por imagen al punto $(0,0,1)$, además, $r(u,0) = r(u,2\pi)$ para todo $u \in [0, \pi/2]$. Luego con esta parametrización no podemos decir que S sea simple.

Ejemplo 3. Una función $z = f(x,y)$ continuamente diferenciable en \bar{D} define una superficie paramétrica suave y simple. En efecto, la parametrización:

$$r(u,v) = (u, v, f(u,v)), \quad (u,v) \in \bar{D},$$

siempre resulta una función inyectiva (aunque no lo sea f) debido a la forma de sus dos primeras componentes. La función r es de clase C^1 en $U \supset \bar{D}$ y además tenemos:

$$r'_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \right); \quad r'_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right),$$

por lo que:

$$r'_u \times r'_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right) \neq 0,$$

para todo $(u,v) \in \bar{D}$. Lo que demuestra que la superficie no tiene puntos singulares.

Es usual que deseemos considerar diferentes parametrizaciones de una misma superficie. Entonces debemos preguntarnos ¿cuáles parametrizaciones consideraremos equivalentes?

Definición 2. Sean D y D' dominios en \mathbf{R}^2 . Un homeomorfismo $\varphi: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ tal que φ y φ^{-1} son continuamente diferenciables en \bar{D} y \bar{D}' respectivamente, lo denominaremos **transformación admisible**.

Diremos que dos **parametrizaciones** $r: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$ y $\rho: \bar{D}' \rightarrow \mathbf{R}^3$ de una superficie suave S son equivalentes si existe una transformación admisible $\varphi: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ tal que $r = \rho \circ \varphi$.

Diremos que una superficie S es **suave** si dentro de todas sus parametrizaciones equivalentes se encuentra al menos una que satisface todos los requerimientos de la definición 1.

El concepto de integral de superficie, que es nuestro objetivo, se define de forma muy cómoda para superficies suaves y simples. Sin embargo, esto limitaría demasiado este concepto, pues, por ejemplo, superficies tan comunes como una esfera o las caras de un paralelepípedo no tienen estas dos características. Por esta razón, es conveniente extender la noción de superficie.

Definición 3. Sean S_1 y S_2 dos superficies suaves y simples dadas, respectivamente, por $r_1 : \overline{D_1} \rightarrow \mathbf{R}^3$ y $r_2 : \overline{D_2} \rightarrow \mathbf{R}^3$, denotemos por γ_1 y γ_2 los contornos $\text{Fr}(D_1)$ y $\text{Fr}(D_2)$ y por $\Gamma_1 = r_1(\gamma_1)$ y $\Gamma_2 = r_2(\gamma_2)$ los bordes de S_1 y S_2 respectivamente. Supongamos que el conjunto $S_1 \cap S_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es no vacío y está formado por un número finito de curvas suaves y simples de \mathbf{R}^3 (Fig. 15). Llamaremos **suma de las superficies** S_1 y S_2 a la unión $S_1 \cup S_2$ y la denominaremos por $S_1 + S_2$.

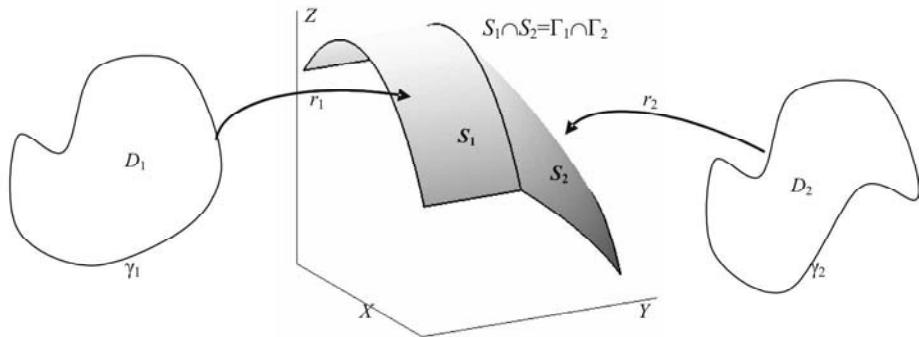


FIGURA 15.

Si el conjunto $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \neq \emptyset$, entonces llamaremos **borde de la superficie suma** $S_1 + S_2$ a la clausura de Γ . Cuando $\Gamma = \emptyset$, diremos que $S_1 + S_2$ es una **superficie cerrada**. De modo que una superficie cerrada es la suma de dos superficies cuyos bordes coinciden completamente y, por tanto, carece de borde.

Si la superficie suma $S_1 + S_2$ no es cerrada, es decir, tiene un borde Γ y otra superficie S_3 tiene las características adecuadas, entonces puede formarse la suma de las superficies $S_1 + S_2$ y S_3 . Si también puede realizarse la suma de las

superficies S_1 y $S_2 + S_3$, entonces se verifica de forma sencilla la asociatividad de la suma de superficies: $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$ que denotaremos simplemente como $S_1 + S_2 + S_3$.

Diremos que una superficie S es **suave a pedazos** si ella puede describirse como la suma de un número finito de superficies suaves y simples.

La superficie cilíndrica S que se muestra en la Fig. 16a) es una superficie suave a pedazos, pues ella puede ser considerada como la suma de las dos superficies suaves y simples S_1 y S_2 . Notemos que $S_1 \cap S_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es el conjunto de puntos que están sobre dos segmentos de recta. Así que podemos formar la suma $S = S_1 + S_2$ y el borde de S está formado por la unión de dos circunferencias.

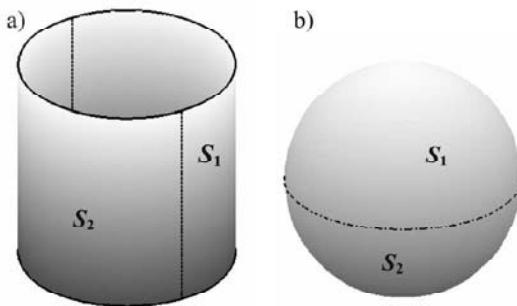


FIGURA 16.

La Fig. 16b) sugiere que una esfera S es una superficie cerrada suave a pedazos, la cual puede descomponerse como la suma de las dos semiesferas S_1 y S_2 .

A continuación analizaremos el problema de dar una definición para el área de una superficie que sea intuitivamente aceptable. Consideremos, para simplificar, una superficie S suave, simple y sin puntos singulares dada por $r: I \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde I es un rectángulo. Dividamos a I , por medio de una partición, en n subrectángulos $\{I_j\}$. Entonces la superficie $S = r(I)$ quedará dividida en las superficies $\{r(I_j)\}$, $j = 1, \dots, n$ y es natural pensar el área de S como la suma de las áreas de sus porciones $r(I_j)$.

Sea I_j uno de los rectángulos de la partición, con lados de longitud Δu_j y Δv_j y denotemos por $P_j(u_j, v_j)$ uno cualquiera de sus vértices. Entonces, al pasar de P_j a cada uno de los vértices contiguos, la función r experimentará incrementos que son aproximadamente iguales a $r'_u(u_j, v_j)\Delta u_j$ y $r'_v(u_j, v_j)\Delta v_j$ (Fig. 17). El área de la superficie imagen $r(I_j)$ puede ser aproximada por el área del paralelogramo, situado en el plano tangente a S en el punto $r(u_j, v_j)$ y determinado por estos vectores. Es decir, el área de $r(I_j)$ es aproximadamente igual a:

$$\left| r'_u(u_j, v_j)\Delta u_j \times r'_v(u_j, v_j)\Delta v_j \right| = \left| r'_u(u_j, v_j) \times r'_v(u_j, v_j) \right| \Delta u_j \Delta v_j.$$

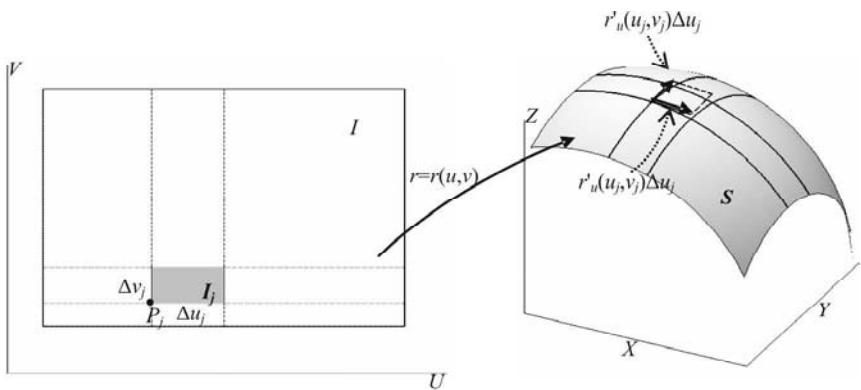


FIGURA 17.

Así que para el área de S tenemos la estimación:

$$a(S) = \sum_{j=1}^n a(r(I_j)) \approx \sum_{j=1}^n |r'_u(u_j, v_j) \times r'_v(u_j, v_j)| \Delta u_j \Delta v_j .$$

Resulta intuitivamente claro que, si hacemos los rectángulos de la partición de dimensiones cada vez más pequeñas, entonces la aproximación anterior se hará cada vez mejor. Así que es natural concebir el área de la superficie S como el “límite”, cuando los diámetros de los rectángulos de la partición tienden a cero, de la suma en el miembro derecho de la expresión anterior.

Este razonamiento heurístico conduce de manera natural a la definición de área de una superficie.

Definición 4. Sea S una superficie suave y simple representada por la parametrización $r : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde la frontera del dominio D es un contorno. Llamaremos **área de la superficie** S al número:

$$a(S) = \iint_D |r'_u \times r'_v| dudv . \quad (1)$$

Si la superficie S es suave a pedazos, $S = S_1 + \dots + S_m$, entonces el área de S estará definida por

$$A(S) = A(S_1) + \dots + A(S_m) .$$

Realizando una ligera modificación al razonamiento que condujo a la fórmula (1) podemos dar solución al problema físico del cálculo de la masa de un objeto

descrito mediante una superficie S y con una distribución superficial de masa dada por una función continua $f : S \rightarrow \mathbf{R}$. La solución de este problema sugiere la definición siguiente:

Definición 5. Consideremos una superficie suave y simple S representada por la parametrización $r : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde $\text{Fr}(D)$ es un contorno y una función $f : S \rightarrow \mathbf{R}$. Llamaremos **integral de la función f sobre la superficie S** al número:

$$\iint_S f \, dS = \iint_D (f \circ r) |r'_u \times r'_v| \, du \, dv,$$

siempre que la integral doble de la derecha exista, como integral propia o impropia.

Si la superficie S es suave a pedazos, $S = S_1 + \dots + S_m$, entonces la integral de superficie de f estará definida por:

$$\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f \, dS,$$

suponiendo que existen todas las integrales dentro de la sumatoria.

Observaciones. 1) El área de una superficie S es precisamente la integral sobre S de la función constante 1:

$$a(S) = \iint_S 1 \, dS.$$

2) La masa M de una placa superficial S con representación paramétrica dada por $r = r(u, v)$, $(u, v) \in D$ se define como la integral de superficie:

$$M = \iint_S f \, dS,$$

donde f representa la densidad superficial de masa.

Análogamente pueden definirse los momentos de una superficie S , respecto a los planos coordenados:

$$M_{xy} = \iint_S zf(x, y, z) \, dS, \quad M_{yz} = \iint_S xf(x, y, z) \, dS, \quad M_{zx} = \iint_S yf(x, y, z) \, dS.$$

3) Haciendo uso del teorema del cambio de variables para integrales dobles, puede demostrarse que la definición de integral sobre una superficie es independiente de la parametrización que se elija, siempre que ellas sean equivalentes.

Ejemplo 4. Calculemos el área de una esfera S de radio 1.

Podemos considerar que la esfera tiene centro en el origen de coordenadas, entonces $S = S_1 + \dots + S_8$, donde cada superficie S_i corresponde a uno de los octantes. La simetría de la esfera nos permite afirmar que estas 8 superficies poseen la misma área. Así que basta calcular el área de una de ellas, por ejemplo S_1 , la correspondiente al primer octante, y que puede representarse por la parametrización:

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad (u, v) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

En el ejemplo 2 vimos que $r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) = \sin u \, r(u, v)$, luego:

$$A(S_1) = \iint_{[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]} |\sin u \, r(u, v)| \, dudv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin u \, dudv = \frac{\pi}{2}.$$

Luego el área de la esfera es igual a 4π .

Ejemplo 5. Hallemos el área de una superficie S dada en forma explícita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$.

Del ejemplo 3 sabemos que:

$$r'_u \times r'_v = (-f'_u, -f'_v, 1),$$

luego:

$$a(S) = \iint_S \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx \, dy.$$

Por ejemplo, el área de la porción del parabolóide $z = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$, viene dada por:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dx \, dy,$$

donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Luego:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{1}{6} \right) \pi.$$

Ejemplo 6. Hallemos la masa del helicoide dado por (Fig. 18)

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

si la distribución de masa corresponde a $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La masa se calcula mediante:

$$M = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS.$$

En este caso:

$$\begin{aligned} r'_u &= (\cos v, \sin v, 0), \\ r'_v &= (-u \sin v, u \cos v, 1) \end{aligned}$$

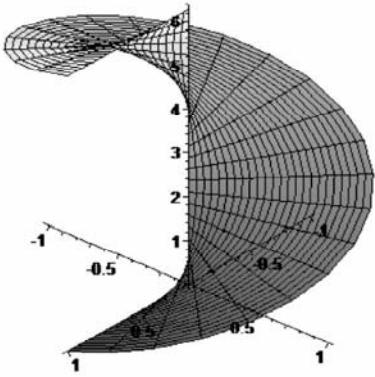
luego:

FIGURA 18.

$$r'_u \times r'_v = (\sin v, \cos v, u),$$

por tanto:

$$M = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} u \sqrt{1+u^2} dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u \sqrt{1+u^2} du = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$



Ejercicios propuestos

- Sean una superficie suave S dada por la parametrización $r: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ y un punto P no singular de S , $P = r(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$. Consideremos una curva suave con representación $\mu(t) = (u(t), v(t))$, situada en D y que pasa por (u_0, v_0) . Prueba que la recta tangente en P a la curva dada por $\rho(t) = r(\mu(t))$ está situada en el plano tangente a la superficie S en P .
- Halla las áreas de las superficies siguientes:
 - La parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = R^2$ ($z \geq 0$) comprendida entre los planos $z = mx$ y $z = nx$ ($m > n > 0$).

- b) La porción de la superficie cónica $x^2 - y^2 = z^2$ situada en el primer octante y limitada por el plano $y + z = a$.
- c) La parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ determinada por la intersección con el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$).
- d) La superficie del toro dado por:

$$r(u, v) = ((a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, b \sin u),$$

donde $0 < b < a$ y $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

3. Sea S un paralelogramo de lados no paralelos a ningún eje coordenado y denotemos por a_1, a_2, a_3 las áreas de las proyecciones de S sobre los planos coordinados. Prueba que el área a de S satisface:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

4. Calcula las integrales de superficie siguientes:

- a) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, donde S es la superficie de ecuación $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, $0 \leq z \leq b$, $a > 0$, $b > 0$.
- b) $\iint_S xy dS$, donde S es la superficie que limita el tetraedro de caras: $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$, $x = y$.
- c) $\iint_S z dS$, donde S es la superficie dada por

$$S = \left\{ (x, y, z) : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

5. Determina la masa de una superficie esférica, si su densidad de masa en cada punto es

- a) la distancia de este punto al diámetro vertical,
 b) el cuadrado de esta distancia.

6. Calcula la masa de la superficie esférica S de radio R tal que en cada punto P de S la densidad es igual a la distancia de P a un punto fijo P_0 de S .
7. Calcula los momentos de una lámina homogénea triangular:

$$S = \{(x, y, z) : x + y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

respecto a los planos coordenados.

8. Calcula las coordenadas del centro de gravedad de la superficie S dada por:

$$S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}.$$

VII.4. INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Durante el siglo XIX, vinculado a problemas de diferentes ramas de la física: hidromecánica, teoría del calor, electromagnetismo, se fue haciendo cada vez más necesaria la integración de funciones de un punto que varía sobre una superficie y cuyos valores son vectores. Enunciemos un problema que refleja la esencia de la cuestión.

Supongamos que se tiene un fluido que se mueve en el espacio con una velocidad V que depende de las coordenadas del punto, pero no del tiempo (régimen estacionario), es decir, $V = V(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Supongamos, además que la densidad del fluido es constante e igual a la unidad. Nos proponemos calcular la cantidad de fluido (flujo) que atraviesa cierta superficie S en la unidad de tiempo.

En el caso más simple, cuando la velocidad V es constante y S un rectángulo, se calcula el flujo Φ que atraviesa S en la unidad de tiempo por el volumen del paralelepípedo (Fig. 19) determinado por el rectángulo S y el vector V . Así que, para este caso particular:

$$\Phi = a(S)V \cdot n,$$

donde $a(S)$ es el área de S y $V \cdot n$ denota el producto escalar de V y la normal unitaria n en la dirección perpendicular al plano del rectángulo S (altura del paralelepípedo).

Consideremos el caso general y realicemos un razonamiento semejante al efectuado para la determinación del área de una superficie, manteniendo las notaciones allí introducidas. Supongamos que S es una superficie suave y simple dada por la parametrización $r : I \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde I es un rectángulo del plano y la velocidad V es una función definida y continua en S . Sea una partición $\{I_j\}$, $j = 1, \dots, n$ de I y $\{r(I_j)\}$ la correspondiente “partición” de S . El flujo que atraviesa S lo podemos calcular como la suma de los flujos a través de cada una de las porciones $r(I_j)$ y la velocidad del fluido en los puntos de $r(I_j)$ puede considerarse como constante e igual a su valor en el punto $r(u_j, v_j)$, donde (u_j, v_j) es un vértice de I_j (Fig. 20). Consideremos los diámetros de los rectángulos I_j suficientemente pequeños para poder “aproximar” la superficie $r(I_j)$ por el paralelogramo, situado en el plano tangente a S en el punto $r(u_j, v_j)$ y determinado por los vectores $r'_u(u_j, v_j) \Delta u_j$ y $r'_v(u_j, v_j) \Delta v_j$. Entonces el flujo total Φ que atraviesa S en la unidad de tiempo puede aproximarse por:

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \sum_{j=1}^n a(r(I_j)) V(r(u_j, v_j)) \cdot n(u_j, v_j) \approx \\ &\approx \sum_{j=1}^n V(r(u_j, v_j)) \cdot n(u_j, v_j) |r'_u(u_j, v_j) \times r'_v(u_j, v_j)| \Delta u_j \Delta v_j,\end{aligned}$$

donde hemos denotado por $n(u_j, v_j)$ la normal unitaria a la superficie en el punto (u_j, v_j) .

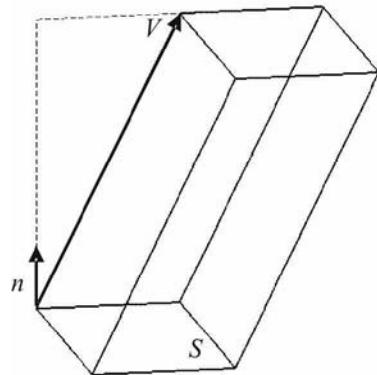


FIGURA 19.

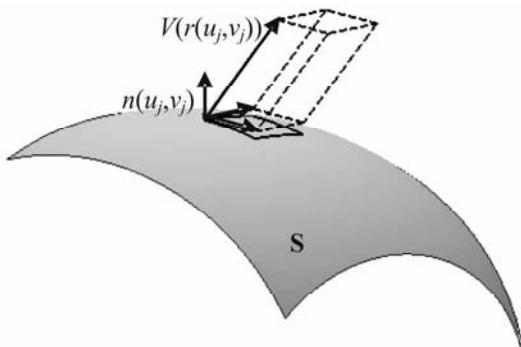


FIGURA 20.

Resulta natural definir el flujo Φ a través de S como:

$$\Phi = \iint_D V(r(u, v)) \cdot n(u, v) |r'_u \times r'_v|(u, v) dudv = \iint_S V \cdot n dS,$$

es decir, mediante una integral de superficie de la función escalar $V \cdot n$. Los razonamientos físicos anteriores nos conducen a la definición formal de integral de superficie de una función vectorial.

Cuando S es una superficie suave y simple dada por una parametrización $r : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$, en cada punto no singular, podemos distinguir dos vectores unitarios normales

$$n(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}(u, v) \quad \text{y}$$

$$n_l(u, v) = -n(u, v).$$

Esto nos conduce a la distinción de dos **caras u orientaciones en la superficie S** : una orientación determinada por la familia de normales $n(u, v)$, y la otra por $n_l(u, v)$ (Fig. 21). Cuando se haya fijado una de las orientaciones diremos que **la superficie S está orientada**.

Observación. Siempre que no se diga lo contrario, asociaremos a una parametrización r la orientación determinada por las normales $n(u, v)$.

Definición 1. Sea S una superficie suave, simple y orientada, determinada por la parametrización, $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. La **integral de superficie** de una función $F : S \rightarrow \mathbf{R}^3$ se define por:

$$\iint_S F \cdot n dS = \iint_D F(r(u, v)) \cdot n(u, v) |(r'_u \times r'_v)(u, v)| dudv,$$

siempre que la integral doble en el miembro derecho de la igualdad anterior exista como integral propia o impropia.

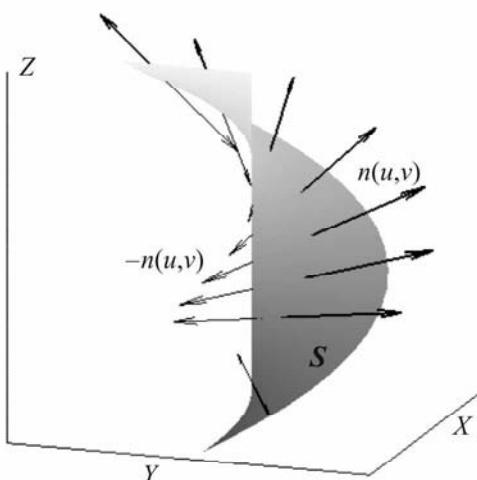


FIGURA 21.

Observaciones. 1) Como la integral de superficie de una función vectorial se define a través de la integral de superficie de una función escalar, resulta claro, que las propiedades de esta última se trasmitan a la primera. En particular, la existencia y el valor de la integral es el mismo cuando se consideran parametrizaciones equivalentes que conservan la orientación.

2) Si S_1 denota la cara de la superficie S determinada por las normales $n_1(u,v)$, entonces:

$$\iint_{S_1} F \cdot n \, dS = - \iint_S F \cdot n \, dS .$$

3) Teniendo en cuenta la expresión para las normales unitarias podemos formular la definición de integral de superficie en la forma:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)(u,v) \, du \, dv .$$

4) La integral de superficie también puede ser expresada en forma escalar, desarrollando las funciones vectoriales F y r mediante sus componentes:

Supongamos que:

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \quad \text{y}$$

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

entonces:

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix},$$

luego:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D \left((P \circ r) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (Q \circ r) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (R \circ r) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \, du \, dv .$$

La fórmula anterior justifica la notación para la integral de superficie siguiente:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D (P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy) .$$

Observemos que el orden en que aparecen los símbolos en los determinantes es importante, por ejemplo:

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.$$

Luego un cambio de orden en cualquiera de ellos puede alterar el valor de la integral.

Ejemplo 1. Calculemos la integral de superficie:

$$\iint_S F \cdot n dS,$$

donde $F(x,y,z) = (0,0,z)$ y S es la mitad superior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Consideremos la parametrización de S dada por:

$$r(u,v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u), \quad (u,v) \in D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

Un cálculo directo nos proporciona:

$$\iint_S F \cdot n dS = abc \iint_D \cos^2 u \operatorname{sen} u du dv = \frac{2\pi abc}{3}.$$

En la definición 1 hemos considerado solo superficies suaves y simples. También extenderemos esta definición de integral a superficies suaves a pedazos. Sin embargo, debemos antes establecer lo que entenderemos por orientación para una superficie suave a pedazos.

Supongamos que S es una superficie suave y simple, determinada por la parametrización, $r = r(u,v)$, $(u,v) \in \bar{D}$ y con la orientación correspondiente a la familia de normales $n(u,v)$. Consideraremos que la frontera de D está dada por la parametrización $\rho : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ que la describe positivamente, entonces el borde de S es una curva cerrada simple Γ que se puede expresar por la parametrización $r \circ \rho$. Diremos que esta parametrización de Γ determina una **orientación del borde compatible con la orientación de la superficie**.

Consideraremos dos superficies S_1 y S_2 suaves, simples y que puedan ser sumadas. Supongamos, además, que podemos determinar en S_1 y S_2 parametrizaciones r_1 y r_2 de modo que las orientaciones compatibles en los bordes Γ_1 y Γ_2 son tales

que las curvas que están en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ se recorren en sentido contrario. Entonces diremos que la superficie $S_1 + S_2$ es **orientable**, en caso contrario será **no orientable**. Cuando hayamos elegido una orientación para una superficie suave a pedazos, diremos que esta superficie está **orientada**.

En la Fig. 22(a) y (b) mostramos, para el cilindro y la esfera, cómo pueden tomarse las orientaciones de las superficies componentes de modo que la superficie suma sea orientable. En (c) se muestra un ejemplo de superficie no orientable: la llamada banda de Möbius, que es la suma de dos superficies suaves y simples S_1 y S_2 pero donde no es posible que la orientación de la parte común a los bordes satisfaga la propiedad requerida para que la superficie suma sea orientable.

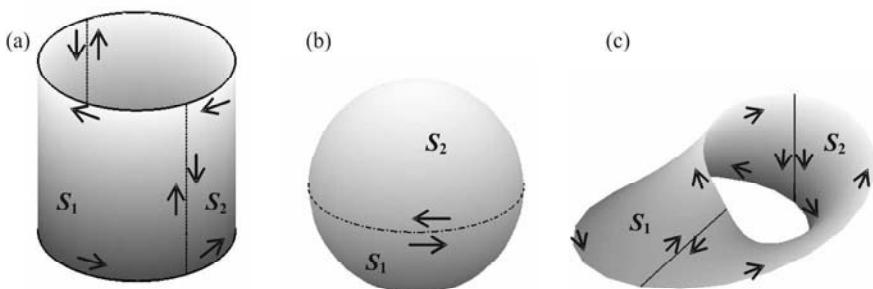


FIGURA 22.

Para superficies suave a pedazos orientadas podemos, de forma natural, definir la integral de superficie.

Definición 2. Si $S = S_1 + \dots + S_m$ es una superficie suave a pedazos orientada y $F : S \rightarrow \mathbf{R}^3$, entonces:

$$\iint_S F \cdot n dS = \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} F \cdot n dS,$$

donde hemos supuesto que todas las integrales en el miembro derecho existen.

Ejemplo 2. Consideremos la integral del ejemplo 1, pero tomando como S a todo el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. La superficie S es suave a pedazos y puede ser descompuesta como la suma $S = S_1 + S_2$, donde S_1 y S_2 son respectivamente el hemisferio superior e inferior del elipsoide. S_1 puede parametrizarse

por $r(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, definida en el conjunto $D_1 = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Para S_2 podemos utilizar la misma expresión de r definida en el conjunto $D_2 = [\pi/2, \pi] \times [0, 2\pi]$. Notemos que el borde de ambas superficies es la elipse dada por la parametrización $\rho(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Cuando la frontera de D_1 y D_2 se recorren en sentido positivo, entonces la elipse se recorrerá en direcciones contrarias.

Luego, la definición anterior nos permite escribir:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n \, dS .$$

Sabemos que $\iint_{S_1} F \cdot n \, dS = \frac{2\pi abc}{3}$ y de forma análoga puede hallarse que $\iint_{S_2} F \cdot n \, dS$ tiene el mismo valor. Luego:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \frac{4\pi abc}{3} .$$

Ejercicios propuestos

1. Calcula las integrales de superficie siguientes:
 - a) $\iint_S yz \, dy \, dz + xz \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$, donde S es la cara exterior del tetraedro limitado por el plano $x + y + z = a$ y los planos coordenados.
 - b) $\iint_S (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$, donde S es la cara exterior de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.
2. Sean S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Calcula el valor de la integral de superficie $\iint_S F \cdot n \, dS$.
3. Un fluido tiene como vector densidad de flujo $F(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$. Calcula la masa de fluido que atraviesa S en la unidad de tiempo, si S es la mitad superior de la esfera unidad con centro en el origen (se considera la cara exterior a la esfera).

VII.5. RELACIONES INTEGRALES FUNDAMENTALES EN LOS CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Ya en las primeras décadas del siglo XIX estaba claro que las diferentes ramas de la física necesitaban de una nueva herramienta operatoria para facilitar la obtención y escritura de la multitud de nuevos resultados que habían surgido. Una de las urgencias era la de poder contar con una representación de los puntos del espacio físico que generalizara el álgebra vectorial de los puntos del plano, considerados como números complejos, la cual acababan de introducir varios matemáticos y muy especialmente el influyente Gauss (1777-1855). Las primeras tentativas para encontrar una respuesta satisfactoria a esta urgencia las realizará William Hamilton, quien después de buscar infructuosamente las reglas operatorias con los tríos de números, introdujo un nuevo tipo de ente matemático “hipercomplejo”, los llamados cuaterniones.

Las ideas de Hamilton fueron perfeccionadas y ampliadas por la potente escuela británica de física-matemática, a través de figuras de la talla de Peter Guthrie Tait (1831-1901) y James Clerk Maxwell (1831-1879). Estos científicos desarrollaron las nociones básicas introducidas por Hamilton y las aplicaron exitosamente en sus investigaciones en la teoría del electromagnetismo. Estos trabajos influyeron decisivamente en la divulgación de las ideas de Hamilton. De este modo, ya en la década del 70 del siglo XIX, se había extendido la nueva notación y terminología que la escuela británica de física-matemática utilizaba para expresar una serie de fenómenos físicos de importancia inmediata. Sin embargo, la forma de presentación de este instrumento de trabajo aún no satisfacía plenamente las exigencias de las aplicaciones.

El establecimiento de la forma moderna del Análisis Vectorial, producto de la evolución de las ideas de Hamilton-Tait-Maxwell, está asociado a los trabajos del físico-matemático norteamericano Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y del británico Oliver Heaviside (1850-1925). A fines del siglo XIX, estos trabajos eran ampliamente conocidos, aunque no siempre aceptados, por la comunidad científica. Gibbs y Heaviside mostraron la ventaja de estudiar las propiedades analíticas de los campos escalares y vectoriales, tan abundantes en las diferentes ramas de la física. Algo indispensable con este nuevo enfoque era la expresión de las relaciones integrales fundamentales haciendo uso de la nueva terminología de los vectores.

Desde el punto de vista matemático, los **campos escalares y vectoriales** no son más que funciones reales o vectoriales respectivamente, definidas en subconjuntos de \mathbf{R}^n . Por ejemplo, si a cualquier punto P del espacio le hacemos corresponder la temperatura $T(P)$ tendremos un campo escalar y si a cada P

asociamos la velocidad del viento $V(P)$, tendremos definido un campo vectorial. Los campos vectoriales y escalares aparecen mutuamente relacionados en diferentes contextos, tanto teóricos como aplicados. Por ejemplo, en el estudio de la diferenciación de funciones vimos que si φ es una función real (campo escalar) definida en cierto conjunto abierto U de \mathbf{R}^n , el gradiente de φ , denotado por $\text{grad}\varphi$ o $\nabla\varphi$ es una función vectorial (campo vectorial) definida por la fórmula:

$$\text{grad}\varphi(x) = \nabla\varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \right),$$

en cada punto $x \in U$ donde las derivadas parciales de φ existan. La notación $\nabla\varphi$ se puede entender como el “producto” del “vector” $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ por el escalar φ , donde el “producto” del operador $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por la función φ se interpreta simplemente como la derivada parcial de φ respecto a la variable x_i .

En las definiciones a continuación consideraremos un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ diferenciable en un abierto $U \subset \mathbf{R}^3$ y un punto $M \in U$.

Definición 1. Se llama **divergencia de F** en M al número

$$\frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M),$$

el cual denotaremos por $\text{div}F(M)$.

Observemos que $\text{div}F$ puede escribirse como el “producto escalar” del “vector” ∇ por el vector F :

$$\text{div}F(M) = (\nabla \cdot F)(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R)(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Definición 2. Al vector con coordenadas:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

todas evaluadas en el punto M , se le denomina **rotacional del campo vectorial F** en M y lo denotaremos por $\text{rot}F(M)$.

También, el rotacional de un campo vectorial puede denotarse simbólicamente haciendo uso del operador ∇ :

$$\operatorname{rot} F(M) = (\nabla \times F)(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}(M),$$

donde, como es habitual, i, j, k denotan los vectores unitarios en la dirección de los ejes de coordenadas.

Ejemplo 1. Consideremos un cuerpo rígido B y fijemos un punto $O \in B$. En cinemática se prueba que la velocidad v en un instante cualquiera en el punto M del cuerpo B está dada por:

$$v = v_O + w \times r,$$

donde v_O es la velocidad del punto O , w es la velocidad angular instantánea en el punto M y r es el radio vector que une al punto O con M .

Situemos el origen de coordenadas en el punto O y supongamos que el punto M tiene coordenadas x, y, z , entonces $r = (x, y, z)$. Si denotamos por v_{O1}, v_{O2}, v_{O3} las componentes de v_O y por w_1, w_2 y w_3 las componentes de w , tenemos que:

$$v = (v_{O1} + w_2 z - w_3 y, v_{O2} + w_3 x - w_1 z, v_{O3} + w_1 y - w_2 x).$$

Un cálculo simple demuestra que $\operatorname{rot} v(M) = 2w$, es decir:

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v(M).$$

Esta igualdad indica que el rotacional de este campo de velocidades v es, excepto una constante, la velocidad angular de rotación. Esta es una de las explicaciones para la denominación de “rotacional”.

Las operaciones de hallar el gradiente de un campo escalar y la divergencia de uno vectorial pueden ser combinadas, calculando la divergencia del gradiente de una función escalar. Si φ es una función real con segundas derivadas parciales en un abierto U , entonces para todo punto de U se tiene la expresión:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

que se conoce como **laplaciano** de φ y se denota por $\nabla^2\varphi$ o también por $\Delta\varphi$, notación que no pertenece a Laplace sino a Hamilton y la escuela británica. Una función φ que satisface la ecuación en derivadas parciales $\Delta\varphi = 0$ se dice **armónica** y la ecuación diferencial anterior se denomina **ecuación de Laplace**. Tanto la ecuación de Laplace como las funciones armónicas pueden ser definidas de forma similar para funciones reales φ definidas en subconjuntos abiertos de \mathbf{R}^n , con n arbitrario y son muy útiles en diversas ramas de la matemática y sus aplicaciones.

En VII.2 estudiamos la fórmula de Green, la cual establece una relación entre la integral curvilínea de un campo vectorial $F = (P, Q)$ sobre una curva Γ con la integral doble de cierta expresión asociada a F tomada sobre el interior de Γ . Esta fórmula puede ser generalizada al caso de campos vectoriales definidos sobre dominios de \mathbf{R}^3 y se conoce como **fórmula de Stokes**.

Al parecer, George Stokes había obtenido esta fórmula en relación con algunos de sus trabajos en mecánica de fluidos. Esto lo motivó a proponerla en un examen de premio realizado en 1854 en la Universidad de Cambridge. No se sabe si algún estudiante fue capaz de probarla, sin embargo, entre los aspirantes se encontraba Maxwell, quien posteriormente se refirió al resultado como “teorema de Stokes”. La primera prueba conocida para este resultado se debe a Hermann Hankel (1839-1873) quien la realiza para el caso de una superficie dada en forma explícita.

Teorema 6. (Stokes). Sea S una superficie paramétrica suave, simple y orientada dada por $r: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde r es de clase C^2 en \bar{D} y D es un dominio limitado por un contorno. Consideremos una función F de clase C^1 en un abierto U que contiene a S , entonces se cumple:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz , \quad (1)$$

o en forma vectorial:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS = \int_{\Gamma} F \cdot dr , \quad (1')$$

donde Γ es el borde de S y se recorre en forma compatible con la orientación de S .

- ◆ Sea $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$ una parametrización del contorno $\text{Fr}(D)$ que lo recorra en sentido positivo y consideremos la parametrización del

borde Γ dada por $\rho = r \circ \alpha$. Entonces la integral curvilínea en (1') puede expresarse como:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_a^b F(\rho(t)) \cdot \rho'(t) dt.$$

Pero:

$$\rho'(t) = (r \circ \alpha)'(t) = r'_u(\alpha(t))u'(t) + r'_v(\alpha(t))v'(t),$$

luego:

$$F(\rho(t)) \cdot \rho'(t) = F(\rho(t)) \cdot r'_u(\alpha(t))u'(t) + F(\rho(t)) \cdot r'_v(\alpha(t))v'(t) = G(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t),$$

donde G es la función dada por:

$$G = (G_1, G_2), \quad G_1 = (F \circ r) \cdot r'_u \quad G_2 = (F \circ r) \cdot r'_v.$$

De modo que:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_a^b G(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{\text{Fr}(D)} G \cdot d\alpha.$$

La función G es continuamente diferenciable en \bar{D} , por tanto, a esta última integral, podemos aplicarle el Teorema de Green y escribirla en la forma:

$$\int_{\text{Fr}(D)} G \cdot d\alpha = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) du dv.$$

Pero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} &= (F \circ r)'_u \cdot r'_v + (F \circ r) \cdot r''_{uv} - (F \circ r)'_v \cdot r'_u - (F \circ r) \cdot r''_{uv} = \\ &= (F \circ r)'_u \cdot r'_v - (F \circ r)'_v \cdot r'_u. \end{aligned}$$

Esta última expresión puede transformarse en:

$$F'_x \cdot (r'_v x'_u - r'_u x'_v) + F'_y \cdot (r'_v y'_u - r'_u y'_v) + F'_z \cdot (r'_v z'_u - r'_u z'_v),$$

así que:

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \partial(y, z) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \partial(z, x) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \partial(x, y).$$

Finalmente, de (2), (3) y esta última igualdad obtenemos:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \iint_D \operatorname{rot} F \cdot (r'_u \times r'_v) dudv = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS,$$

lo que prueba el teorema. ◆

Observaciones. 1) La fórmula de Stokes es una generalización de la de Green. En efecto, para el caso particular cuando las funciones P y Q dependen solamente de las variables x e y , la función R es cero y la superficie S está situada en el plano XY , la fórmula (1) se reduce a la dada por el Teorema de Green.

2) En ocasiones, cuando la curva Γ es cerrada, a la integral $\int_{\Gamma} F \cdot dr$ se le denomina **circulación** de F a lo largo de Γ . Entonces la fórmula (1') puede expresarse diciendo que la circulación de un campo vectorial F a lo largo de una curva Γ es igual al flujo de su rotacional a través de cualquier superficie S que tenga a Γ como borde.

El Teorema 6 puede extenderse a las superficies suaves a pedazos orientadas, veamos la forma de hacerlo. Supongamos que la superficie orientada $S = S_1 + S_2$ esté formada por la suma de dos superficies suaves S_1 y S_2 con bordes Γ_1 y Γ_2 y, para cada una de ellas, se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes. Entonces, para una función F continuamente diferenciable en un abierto que contenga a S :

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS = \iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot n dS + \iint_{S_2} \operatorname{rot} F \cdot n dS.$$

A cada una de las integrales del miembro derecho en la expresión anterior podemos aplicar el Teorema de Stokes, luego:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS = \int_{\Gamma_1} F \cdot dr + \int_{\Gamma_2} F \cdot dr,$$

donde Γ_1 y Γ_2 son los bordes de S_1 y S_2 respectivamente. Como la superficie S está orientada, las partes comunes a los bordes de Γ_1 y Γ_2 se recorrerán en sentidos contrarios y, por tanto, las integrales curvilíneas correspondientes a las mismas se cancelarán mutuamente. Si la superficie S no es cerrada, entonces la expresión anterior puede ser escrita en la forma:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS = \int_{\Gamma} F \cdot dr, \quad (2)$$

donde G denota el borde de S . Si S fuera cerrada, no existe borde y se tiene la igualdad:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = 0.$$

De manera que hemos obtenido el resultado siguiente:

Sea $S = S_1 + \dots + S_m$ una superficie suave a pedazos orientada, de borde Γ , tal que sus superficies componentes satisfacen las hipótesis del Teorema 6. Sea F una función de clase C^1 en un abierto que contenga a S , entonces tiene lugar $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_{\Gamma} F \cdot dr$.

Una de las aplicaciones del Teorema de Stokes es que permite calcular integrales curvilíneas por medio de integrales de superficie.

Ejemplo 2. Calculemos la integral

$$\int_{\Gamma} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde Γ es la elipse intersección de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$, orientada de modo que se recorran sucesivamente los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ (Fig. 23).

Evidentemente la porción del plano $x + y + z = 1$ limitada por la elipse es una superficie S con borde Γ y satisface las hipótesis del Teorema de Stokes.

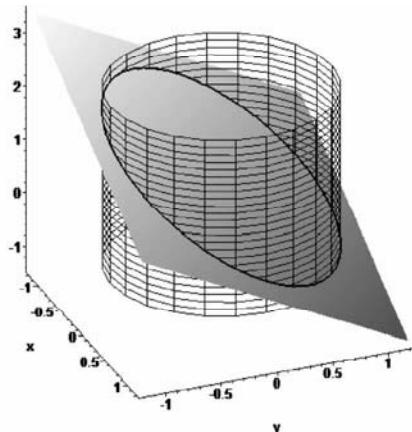


FIGURA 23.

Como $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$, se tiene que $\operatorname{rot} F = (3x^2 + 3y^2, 0, 0)$, luego:

$$I = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iint_S (3x^2 + 3y^2) \, dxdy.$$

Una parametrización de S es $r(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $(u, v) \in D$, con $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Al recorrer la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$ en sentido positivo, se recorrerán sucesivamente los puntos $r(1, 0) = (1, 0, 0)$, $r(0, 1) = (0, 1, 0)$

de modo que esta parametrización de la superficie recorre el borde en la forma pedida. De donde se obtiene fácilmente:

$$I = \iint_D (3u^2 + 3v^2) dudv = \frac{3\pi}{2}.$$

El lector puede comprobar que el cálculo de esta integral curvilínea, a través de su reducción a una integral de Riemann, resulta mucho más largo y tedioso.

Veamos a continuación algunas consecuencias del Teorema de Stokes:

1) Interpretación del rotacional de un campo vectorial. Consideremos un campo vectorial F continuamente diferenciable en un abierto U de \mathbf{R}^3 y $M_0 \in U$. Sean u un vector unitario con origen en el punto M_0 y π el plano ortogonal a u que pasa por M_0 . Denotemos respectivamente por $D(\varepsilon)$ y $C(\varepsilon)$ al círculo y a la circunferencia de centro en M_0 y radio ε situados en el plano π . Entonces, por el teorema de Stokes, se tiene

$$\int_{C(\varepsilon)} F \cdot dr = \iint_{D(\varepsilon)} \operatorname{rot} F \cdot n dS.$$

En este caso, $\operatorname{rot} F \cdot n = \operatorname{rot} F \cdot u$. Por otra parte, el Teorema del valor medio para las integrales dobles permite encontrar un punto $M \in D(\varepsilon)$ tal que:

$$\iint_{D(\varepsilon)} \operatorname{rot} F \cdot u dS = (\operatorname{rot} F \cdot u)(M) a(D(\varepsilon)),$$

donde $a(D(\varepsilon))$ denota el área de $D(\varepsilon)$. Luego:

$$(\operatorname{rot} F \cdot u)(M) = \frac{\int_{C(\varepsilon)} F \cdot dr}{a(D(\varepsilon))}.$$

Como las derivadas parciales de F son continuas, se cumple la relación:

$$(\operatorname{rot} F \cdot u)(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{C(\varepsilon)} F \cdot dr}{a(D(\varepsilon))}. \quad (3)$$

La expresión anterior proporciona otra definición del rotacional de un campo vectorial. En efecto, si consideramos tres vectores u_1, u_2, u_3 (por ejemplo, i, j, k) linealmente independientes, podemos encontrar las componentes del rotacional según estas direcciones y, es conocido, que esto es suficiente para la determinación

del vector $\text{rot}F$. Además, las cantidades en el miembro derecho de (3) son independientes del sistema coordenado, luego podemos concluir que el rotacional de un campo vectorial es independiente del sistema de referencia utilizado (cuando este sistema mantiene la misma orientación).

2) Existencia de función potencial. En VII.2 vimos que si F es una función potencial en un abierto U , esto es, si existe una función escalar φ tal que $\nabla\varphi = F$ en los puntos de U , entonces debe cumplirse:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \text{para todo punto de } U.$$

es decir, $\text{rot} \nabla \varphi = 0$ en U . Por otra parte, haciendo uso del teorema de Green, probamos que **cuando U es un dominio simplemente conexo del plano**, también tiene lugar el recíproco: Si $\text{rot}F = 0$ en todo punto de U , entonces F será una función gradiente en U . Veamos cómo el teorema de Stokes facilita la obtención de un resultado análogo para ciertos dominios de \mathbf{R}^3 .

Consideremos un dominio U de \mathbf{R}^3 que satisface la propiedad:

(I) Para todo contorno $\Gamma \subset U$, existe una superficie $S \subset U$, que cumple las hipótesis del Teorema de Stokes y tiene a Γ como borde.

Sea $F : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial continuamente diferenciable, tal que $\text{rot}F = 0$ en todo punto de U y $\Gamma \subset U$ es un contorno arbitrario, entonces la condición (I) asegura la existencia de una superficie $S \subset U$, con borde Γ , la cual satisface las hipótesis del teorema de Stokes. Luego:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \iint_S \text{rot} F \cdot n \, dS = 0,$$

por tanto, F es un campo gradiente en U .

De esta manera, hemos demostrado el resultado siguiente:

Un campo vectorial F continuamente diferenciable en un dominio U , con la propiedad (I), es un campo gradiente si y solo si $\text{rot}F = 0$, en todo punto de U .

Un ejemplo de dominio que cumple la condición (I) es el conjunto de los puntos comprendidos entre dos esferas disjuntas, situadas una dentro de la otra (Fig. 24a)). Un ejemplo de conjunto que no satisface esta condición es el conjunto de los puntos interiores a un toro, es decir a la superficie generada por una circunferencia que gira en torno a un eje que no la interseca (Fig. 24b)).

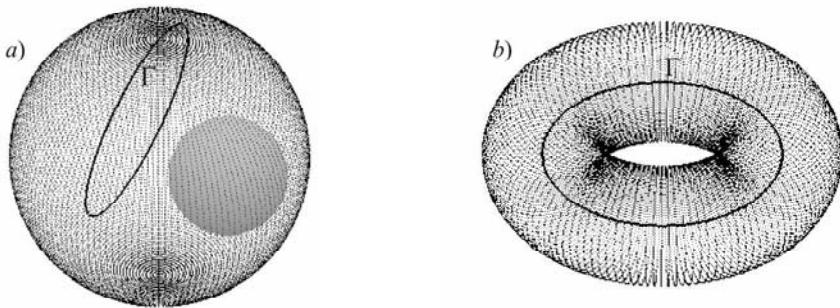


FIGURA 24.

La fórmula de Stokes considerada anteriormente (la de Green es un caso particular) no es la única relación entre los diferentes tipos de integrales. En un trabajo de 1813, donde estudia la atracción de un esferoide, Gauss encontró una fórmula que permitía calcular el volumen de un cuerpo mediante cierta integral considerada sobre la superficie frontera del sólido. Esta fórmula es un caso particular del teorema demostrado en 1826 por el ruso Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que establece una relación entre el flujo de un campo vectorial sobre una superficie cerrada S y la integral triple de la divergencia de ese campo sobre el sólido limitado por S . Más tarde, en 1831, Ostrogradsky generalizó este teorema para espacios de un número de dimensiones cualquiera. El teorema siguiente, que demostraremos solo en casos particulares, especifica condiciones bajo las cuales tiene lugar la *fórmula de Gauss-Ostrogradsky*.

Teorema 7. (Gauss-Ostrogradsky) Supongamos que la frontera de un dominio G está formada por un número finito de superficies orientables suaves a pedazos y la función $F : \bar{G} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $F = (P, Q, R)$, es de clase C^1 en la clausura de G , entonces:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy . \quad (4)$$

o en forma vectorial:

$$\iiint_G \operatorname{div} F dx dy dz = \iint_{\operatorname{Fr}(G)} F \cdot n dS , \quad (4')$$

Aquí la integral sobre $\operatorname{Fr}(G)$ se interpreta como la suma de las integrales en cada una de las superficies que la constituyen. La orientación de las superficies componentes de $\operatorname{Fr}(G)$ será siempre a través de la normal que resulta exterior al dominio G .

- ◆ Supongamos que el dominio $G \subset \mathbf{R}^3$ es de la forma (Fig. 25)

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}, \quad (5)$$

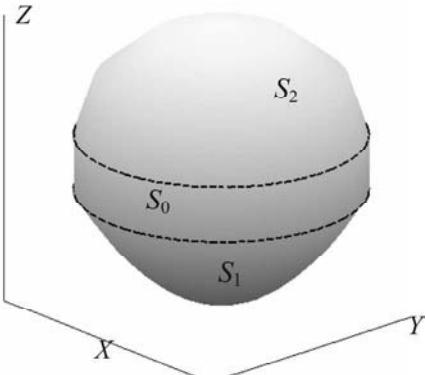


FIGURA 25.

donde D_{xy} es un subconjunto del plano con frontera de área cero y las funciones φ y ψ son de clase C^1 en \bar{D}_{xy} . Entonces $\text{Fr}(G)$ está compuesta de las superficies suaves S_1 y S_2 dadas por $z = \varphi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$ respectivamente y, posiblemente, por una superficie cilíndrica S_0 cuya base es la frontera de \bar{D}_{xy} (S_0 no aparece en el caso que los bordes de S_1 y S_2 coincidan). En las condiciones anteriores la frontera S de G es una superficie suave a pedazos y orientable. Consideraremos la orientación de S dada por la normal exterior respecto a G .

Seguidamente demostraremos que si $F : \bar{G} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ es una función de clase C^1 en la clausura de un dominio G que tiene la forma descrita anteriormente, entonces, tiene lugar la igualdad:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dxdy.$$

Aplicaremos el Teorema de Fubini a la integral triple anterior:

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

Para calcular la integral de superficie, consideraremos las superficies S_1 y S_2 parametrizadas respectivamente por:

$$r(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)), \quad \rho(u, v) = (u, v, \psi(u, v)), \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Como la normal seleccionada debe ser la exterior a G , entonces para la superficie S_2 tomaremos la normal dada por $n = \frac{\rho'_u \times \rho'_v}{|\rho'_u \times \rho'_v|}$, mientras que para la superficie S_1 debemos considerar la normal $-n = -\frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$. Así que:

$$\begin{aligned} \iint_S R dx dy &= \iint_{S_1} R dx dy + \iint_{S_2} R dx dy + \iint_{S_0} R dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} -R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy + \iint_{D_{xy}} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy + \iint_{S_0} R dx dy, \end{aligned}$$

pero la normal a la superficie cilíndrica S_0 siempre es paralela al plano XY , por lo que la integral correspondiente a S_0 es nula. De este modo hemos demostrado que:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy.$$

De forma análoga se demuestran las fórmulas:

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q dz dx, \quad \iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P dy dz,$$

cuando se supone que el dominio G puede representarse respectivamente en las formas:

$$G = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, \varphi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z)\}, \quad (6)$$

y

$$G = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, \varphi(y, z) \leq x \leq \psi(y, z)\}. \quad (7)$$

La suma de estas tres igualdades prueba (4), por lo que hemos demostrado el teorema en el caso particular de un *dominio G que pueda ser representado simultáneamente en las tres formas dadas en (5), (6) y (7)* y que podemos denominar **dominio elemental**.

De la misma forma que hicimos con el Teorema de Green, podemos extender la demostración de la fórmula de Gauss-Ostrogradsky para dominios G que puedan descomponerse en un número finito de dominios elementales $G_i, i = 1, 2, \dots, n$. Dejamos al lector los detalles de esta extensión. ♦

Veamos algunas aplicaciones del Teorema de Gauss-Ostrogradsky:

1) **Cálculo de integrales sobre superficies cerradas.** El ejemplo siguiente nos indica cómo la fórmula (4) puede ser utilizada para calcular integrales sobre superficies cerradas usando las integrales triples.

Ejemplo 3. Consideremos nuevamente (ejemplo 4, epígrafe VII.4) la integral:

$$\iint_S F \cdot n dS,$$

donde $F(x,y,z) = (0,0,z)$ y S es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Resulta claro que en este caso se cumplen las hipótesis del Teorema 7. Como $\operatorname{div} F(x,y,z) = 1$, entonces:

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_G dx dy dz = \frac{4\pi abc}{3},$$

donde hemos denotado por G la región limitada por la superficie del elipsoide. Observemos que el valor encontrado corresponde a la consideración de la cara de la superficie del elipsoide exterior a G .

2) **Cálculo de volúmenes.** La fórmula (4) proporciona una expresión para encontrar volúmenes de cuerpos sólidos mediante la integral calculada sobre su superficie. Por ejemplo, si tomamos:

$$P = \frac{x}{3}, \quad Q = \frac{y}{3}, \quad R = \frac{z}{3},$$

obtenemos:

$$\frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_G dx dy dz = v(G).$$

Escribamos la fórmula anterior en forma vectorial. Para ello, denotemos por $r = (x,y,z)$ el vector de posición de un punto sobre la superficie S y por n el vector unitario en la dirección normal exterior a G , entonces:

$$v(G) = \frac{1}{3} \iint_S r \cdot n dS = \frac{1}{3} \iint_S |r| \cos(r, n) dS,$$

donde $\cos(r,n)$ denota el coseno del ángulo que forman el vector r y el vector normal. Este fue el caso particular de la fórmula (4) obtenido por Gauss.

3) Interpretación geométrica de la divergencia. Sea un campo vectorial $F = F(M)$ continuamente diferenciable en un dominio G del espacio y $M_0 \in G$. Consideremos la bola B de centro en M_0 y radio ε , lo suficientemente pequeño para que $B \subset U$. Entonces:

$$\iiint_B \operatorname{div} F dx dy dz = \iint_S F \cdot n dS,$$

donde S denota la frontera de B , es decir la esfera de centro en M_0 y radio ε . Aplicando el teorema del valor medio a la integral triple de la expresión anterior se tiene que:

$$\iiint_B \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \operatorname{div} F(M) v(B), \quad M \in B.$$

De donde, obtenemos la relación:

$$\operatorname{div} F(M) = \frac{\iint_S F \cdot n dS}{v(B)}.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, llegamos a:

$$\operatorname{div} F(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_S F \cdot n dS}{v(B)}. \quad (8)$$

Observemos que el límite en (8) puede ser tomado como definición de divergencia de un campo vectorial F en un punto. Como las cantidades en la expresión del miembro derecho no dependen del sistema coordenado específico, ella permite afirmar que *la divergencia de un campo vectorial es independiente del sistema coordenado utilizado*.

En la integral de superficie en (8) la normal se considera exterior a B , luego esta integral puede ser interpretada como la cantidad de fluido (en la unidad de tiempo) que surge del interior de B . Así que *el valor de la divergencia de F en un punto M_0 es, aproximadamente, la relación entre la cantidad de fluido que atraviesa una pequeña bola B con centro en M_0 y el volumen de B* .

Esta interpretación explica la denominación que se emplea de **fuente** (resp. **sumidero**) de un campo vectorial F a los puntos M para los cuales $\operatorname{div} F(M) > 0$

(resp. $\operatorname{div} F(M) < 0$). En efecto, podemos considerar que se “crea” (resp. “desaparece”) cierta cantidad de fluido dentro de una bola centrada en M de radio tan pequeño como se quiera.

Los campos vectoriales sin fuentes ni sumideros en un abierto U resultan muy importantes en las aplicaciones y se les da el nombre de **solenoidales**. Esta denominación proviene de la física: Un solenoide es una bobina arrollada de manera que la corriente eléctrica produzca un campo magnético uniforme. En los solenoides ideales infinitos el campo magnético en su interior es un campo solenoidal. Caracterizemos los campos solenoidales.

Supongamos que un campo vectorial F , definido en un abierto U , es tal que la integral de superficie (flujo) a través de toda superficie $S \subset U$, cerrada y suave a pedazos es cero. Entonces, de la relación (4') sigue inmediatamente que $\operatorname{div} F(M) = 0$ para todo $M \in U$, es decir, F es solenoidal. ¿Será cierto el recíproco?, esto es, para un campo solenoidal cualquiera, ¿se cumplirá que el flujo a través de toda superficie cerrada suave a pedazos es cero? En general la respuesta es negativa, sin embargo se responde afirmativamente para campos definidos sobre ciertos dominios de \mathbf{R}^3 .

Consideremos un dominio $G \subset \mathbf{R}^3$ que satisface la propiedad siguiente:

(II) Cualquiera sea el dominio D con frontera constituida por una superficie S , cerrada, suave a pedazos, tal que $S \subset G$, se cumple que $D \subset G$

Si ahora suponemos a F solenoidal, es decir, $\operatorname{div} F(M) = 0$, en todo punto M del dominio G , entonces para toda superficie $S \subset G$, cerrada, suave a pedazos, podemos aplicar la fórmula de Gauss-Ostrogradsky al dominio D encerrado por S y obtenemos

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0 .$$

De este modo demostramos que en los dominios que satisfacen la propiedad (II) tiene lugar el resultado:

Un campo vectorial continuamente diferenciable es solenoidal si y solo si el flujo a través de toda superficie $S \subset G$, cerrada y suave a pedazos, es cero.

Como ejemplo de dominios que satisfacen (II) podemos mencionar al toro y un dominio que no tiene esta propiedad es el conjunto de puntos comprendido entre dos superficies esféricas que no se intersecan (Fig. 24).

Entre las propiedades que relacionan al rotacional y la divergencia de un campo vectorial se tiene que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$, en una abierto U , (para F de clase C^2 en U) (ejercicio 1 f)). Para dominios que cumplen (II), puede demostrarse, pero sale de los objetivos propuestos en este libro, que el recíproco es también cierto. Es decir, tiene lugar el resultado siguiente:

Si el dominio G cumple (II) y $F : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ es un campo solenoidal continuamente diferenciable, entonces F es el rotacional de algún campo vectorial definido en G .

Una simple comparación de fechas nos permite constatar que la aparición de las fórmulas de Green, Stokes y Gauss-Ostrogradsky antecede en casi un siglo al establecimiento de la notación vectorial en la física-matemática. La escritura vectorial de estas fórmulas la encontramos en los trabajos de finales del siglo XIX, principios del siglo XX, como parte del proceso de constitución del Análisis vectorial.

Por otra parte, al llegar al final de este capítulo, el lector posiblemente tenga la impresión, muy acertada, de que en su desarrollo hay cierta reiteración en las ideas, situaciones y métodos utilizados. Resumamos algunas de las razones que motivan esta sensación:

- 1) La fórmula de Green es un caso particular de la de Stokes, pero la demostración que hemos hecho de la segunda se apoya en la primera.
- 2) Si consideramos el borde de una superficie no cerrada como una especie de “frontera”, entonces tanto la fórmula de Stokes como la de Gauss-Ostrogradsky relacionan una integral de un campo vectorial sobre la “frontera” de un cierto objeto geométrico con la integral de cierta expresión asociada tomada sobre todo el objeto.
- 3) Las demostraciones de las fórmulas de Green y de Gauss-Ostrogradsky son completamente análogas, ambas las realizamos utilizando el mismo método y solamente para dominios, en dos o tres dimensiones, pero que satisfacían un mismo tipo de propiedad específica.

Sin embargo, un simple vistazo a estas tres fórmulas, aún escritas en forma vectorial, no es capaz de poner en evidencia que todas ellas son casos particulares de una sola fórmula completamente general. Este proceso generalizador

fue iniciado en 1889 por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) en relación con sus investigaciones en ecuaciones diferenciales.

Para enunciar su fórmula integral general, que denominó fórmula de Stokes, Volterra no utiliza el lenguaje vectorial, sino la terminología siguiente:

Un **hiperespacio r -dimensional en un espacio n -dimensional** ($r < n$) se da paramétricamente por n funciones de r variables:

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_r), \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces, Volterra considera la matriz jacobiana $J = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right)$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$)

y denota por $\Delta_{i_1 \dots i_r}$ el determinante de la submatriz de J , de tamaño r , que consiste de las filas numeradas por i_1, \dots, i_r . Además, denota:

$$\Delta = \left(\sum_{i_1 < \dots < i_r} \Delta_{i_1 \dots i_r}^2 \right)^{1/2},$$

y llama $\Delta du_1 du_2 \dots du_r$ un “elemento del hiperespacio” y a $\alpha_{i_1 \dots i_r} = \frac{\Delta_{i_1 \dots i_r}}{\Delta}$ un “coseno director del hiperespacio” (el cual, por supuesto, depende del punto).

Observemos que, cuando $r = 2$ y $n = 2$, los determinantes $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}$ son precisamente las componentes del vector normal a la superficie y las α_{ij} las correspondientes componentes del vector unitario normal a la superficie. Si $r = 1$ y $n = 2$ o 3 , ¿que interpretación puede darse a las α_{ij} ?

Veamos el teorema general enunciado por Volterra.

“Sean $L_{i_1 \dots i_r}$ funciones de los puntos del hiperespacio S_n con derivadas continuas y tales que una transposición de los índices cambia solo el signo. Sean las formas:

$$M_{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}.$$

Si denotamos por S_r la frontera del hiperespacio S_{r+1} , de $r + 1$ dimensiones, abierto e inmerso en S_n ; por $\alpha_{i_1 \dots i_{r+1}}$, los cosenos directores de S_{r+1} y por $\beta_{i_1 \dots i_r}$ los de S_r . Entonces la extensión del teorema de Stokes consiste en la fórmula siguiente:

$$\int_{S_{r+1}} \sum_i M_{i_1 \dots i_{r+1}} \alpha_{i_1 \dots i_{r+1}} dS_{r+1} = \int_{S_r} \sum_i L_{i_1 \dots i_r} \beta_{i_1 \dots i_r} dS_r.$$

Proponemos al lector que compruebe que esta expresión produce las fórmulas de Stokes, cuando $r = 1$ y $n = 3$, de Gauss-Ostrogradsky, para $r = 2$ y $n = 3$. En el caso $r = n - 1$ se obtiene la generalización realizada por Ostrogradsky.

Aunque Volterra usa este resultado en varios trabajos, en ningún momento da una demostración del mismo, limitándose a comentar que “se obtiene sin dificultad”. Posteriormente, Henri Poincaré (1854-1912) utiliza el mismo teorema, pero con una notación simplificada.

La aclaración del significado de una forma diferencial se debe fundamentalmente al relevante geómetra francés Elie Cartan (1869-1951). En un extenso e importantísimo trabajo de 1899, Cartan definió “expresión diferencial” como una expresión simbólica sujeta a determinadas reglas operatorias. En 1922 extendió su trabajo e introdujo la terminología en uso actualmente de “forma diferencial exterior” y “derivada exterior” y demostró el teorema de Volterra en casos particulares. Sin embargo, el desarrollo de la matemática aún no le permitía realizar una demostración del resultado general, lo que conseguirá exponer en su forma definitiva en una memoria de 1945, ¡después de más de 45 años de búsquedas!

La teoría matemática abstracta necesaria para el enunciado y demostración rigurosa del teorema general de Stokes excede los límites impuestos en este texto. Al lector interesado en profundizar en este tema le sugerimos que consulte (Spivak, 1979).

Ejercicios propuestos

1. Sean F y G dos campos vectoriales tales que existan todas las derivadas parciales de sus componentes en el abierto U (hasta el orden necesario para que tengan sentido las expresiones correspondientes) y φ un campo escalar

con derivadas parciales hasta el orden necesario. Prueba las propiedades siguientes:

a) $\operatorname{div}(\alpha F + \beta G) = \alpha \operatorname{div} F + \beta \operatorname{div} G$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

b) $\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F$

c) $\operatorname{rot}(\alpha F + \beta G) = \alpha \operatorname{rot} F + \beta \operatorname{rot} G$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

d) $\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F$

e) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$

f) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

2. Calcula, utilizando el Teorema de Stokes, las integrales curvilíneas siguientes:

a) $\int_{\Gamma} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, donde Γ es la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x + y + z = 0$.

b) $\int_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, donde Γ es la elipse determinada por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x + z = 1$.

c) $\int_{\Gamma} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, donde Γ está dada por:

$$r(t) = (a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cost}, a(\operatorname{sen} t + \operatorname{cost})) , \quad t \in [0, 2\pi].$$

d) $\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, donde Γ es el contorno del triángulo de vértices $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$.

En todos los casos indica en qué sentido se recorrió la curva Γ .

3. Sean $P(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y, z) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, $R(x, y, z) = z$ y G el interior del toro engendrado por la rotación de la circunferencia $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$,

alrededor del eje Z. Demuestra que $\operatorname{rot}(P, Q, R) = 0$ y sin embargo,

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \neq 0, \text{ si } \Gamma \text{ es la circunferencia dada por } x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

¿Contradice este resultado el Teorema de Stokes?

4. Calcula, utilizando el Teorema de Gauss-Ostrogradsky, las integrales de superficie

a) $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, donde S es la esfera unidad con centro en el origen.

b) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$.

5. Dada $F(x, y, z) = (y, z, xz)$ calcula:

$$\iint_S F \cdot n dS,$$

donde S es la frontera del dominio $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

6. El cuerpo esférico dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ se corta por el plano $z = 3$. La parte menor es un sólido V limitado por una superficie S_0 que consta de dos partes: el casquete esférico S_1 y una porción de plano S_2 . Si $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ es la normal unitaria exterior a V , calcula la integral de superficie:

$$\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + \cos \gamma) dS, \text{ donde}$$

a) S es el casquete esférico S_1 ;

b) S es el círculo S_2 ;

c) S es la frontera S_0 de V .

7. Encuentra un campo vectorial F tal que $\operatorname{div} F(x, y, z) = 2x + y - 1$ y $\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Ejercicios complementarios

1. Consideremos:

$$I_R = \int_{C_R} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

donde C_R es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$. Demuestra que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

2. Sean $f, g : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 en el dominio U y Γ un contorno contenido en U . Prueba que

$$\int_{\Gamma} f \nabla g \cdot dr = - \int_{\Gamma} g \nabla f \cdot dr.$$

3. Consideremos el campo de fuerzas dado por la función $F(x,y) = (cxy, xy^2)$, donde c es una constante. La fuerza F actúa sobre una partícula que se mueve desde el punto $(0,0)$ hasta la recta $x = 1$, a lo largo de una curva de la forma $y = ax^b$ ($a, b > 0$). Encuentra el valor de a tal que el trabajo realizado por F sea independiente de b .

4. Prueba que:

$$\int_{\Gamma} (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy = 0,$$

cuando Γ es un contorno simétrico respecto al origen de coordenadas.

5. Calcula $\int_{\Gamma} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$, donde Γ es una curva cualquiera que no corta al eje Y y une los puntos $(1, \pi)$ y $(2, \pi)$.
6. Halla el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad, cuando un punto material de masa m se mueve de la posición (a, b, c) a la posición (A, B, C) .
7. A partir de la fórmula de Green demuestra que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} [P \cos(x, n) + Q \sin(x, n)] dl,$$

donde Γ es un contorno que limita al dominio D y por n hemos denotado la normal exterior a la curva Γ .

8. Sean $u, v: U \rightarrow \mathbf{R}$, continuamente diferenciables en el abierto U que contiene al círculo unidad $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y tales que $u(x, y) = 1$, $v(x, y) = y$ cuando x e y están sobre la frontera de D . Sean las funciones F y G definidas por:

$$F = (u, v); \quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Encuentra el valor de la integral $\iint_D F \cdot G dx dy$.

9. Sean una superficie S dada por la parametrización $r: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$ y una transformación admisible φ de \bar{D}_1 en \bar{D} . Dada la función $f: S \rightarrow \mathbf{R}$, prueba que la existencia y el valor de la integral de superficie $\iint_S f dS$ es independiente de que se calcule con las parametrizaciones r o $r \circ \varphi$.
10. Sea S una superficie cerrada, suave a pedazos y denotemos por e una dirección constante. Demuestra que:

$$\iint_S \cos(n, e) dS = 0,$$

donde (n, e) denota el ángulo que forma la normal n a la superficie con la dirección e .

11. Prueba que el volumen V de un cono acotado por una superficie S , dada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ y el plano dada por $Ax + By + Cz + D = 0$, se calcula por la fórmula $V = \frac{AH}{3}$, donde A es el área de la base del cono, situada en el plano dado y H es su altura.
12. Supongamos que f y g son dos funciones de clase C^2 en un abierto que contiene al conjunto $V \cup S \subset \mathbf{R}^3$, donde V es un dominio limitado por una superficie S suave a pedazos y cerrada. Denotemos por $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$ la derivada, en la dirección de la normal exterior a V , de la función f (análogamente con la función g). Demuestra las igualdades siguientes:

a) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta f dx dy dz.$

b) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$, cuando f es armónica en V (esto es, cuando $\Delta f = \nabla^2 f = 0$).

c) $\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V f \Delta g \, dx dy dz + \iiint_V \nabla f \cdot \nabla g \, dx dy dz$.

d) $\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (f \Delta g - g \Delta f) \, dx dy dz$.

e) $\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$, si f y g son funciones armónicas en V .

f) $\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V |\nabla f|^2 \, dx dy dz$, cuando f es armónica en V .

g) $\Delta f(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v(B(\varepsilon))} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS$, donde $B(\varepsilon)$ es una bola con centro en

$a \in V$ y radio ε , $S(\varepsilon)$ denota su frontera y $v(B(\varepsilon))$ su volumen.

13. Demuestra que una función u es armónica en un dominio $D \subset \mathbf{R}^3$ si y solo si se satisface:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

14. Demuestra que si una función u es armónica en $\bar{D} \subset \mathbf{R}^3$, limitado por una superficie S , cerrada, suave a pedazos, entonces los valores de u en el interior de D se determinan únicamente por sus valores en la frontera S de D .

15. Encuentra la forma más general de una función de una variable, continuamente derivable y tal que el campo vectorial definido por $f(|r|)r$ sea solenoideal ($r = (x, y, z)$ es el vector de posición). Indica las condiciones que esta función debe satisfacer.

NOTAS BIOGRÁFICAS

BANACH, STEPHAN (1892-1945). Banach nació en Cracovia y estudió de forma autodidacta hasta que Hugo Steinhaus (1887-1972) lo descubrió. En su tesis de doctorado de 1920 introdujo los espacios normados y planteó sus principales propiedades. Desde entonces trabajó en Lvov, donde Steinhaus creó un grupo fuerte de análisis matemático, el cual utilizaba en sus investigaciones las nuevas herramientas de la topología. Desde 1924 fue profesor en la Universidad de Lvov. Investigó en la teoría de funciones y otras ramas de la Matemática y de la Mecánica. Desde que, en 1939, Lvov pasó a Ucrania fue el decano de la facultad de físico-matemática de la Universidad de Lvov y, también, dirigió la filial del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Ucrania. Banach tuvo muchos alumnos prominentes que elevaron la cultura matemática tanto de Polonia como de Ucrania. Junto con Steinhaus en 1928 creó la importante revista *Studia Mathematica* que sirvió de estímulo a las investigaciones sobre las nuevas líneas del análisis. En 1932 se publicó en francés su libro *Teoría de las operaciones lineales* donde se recogen los principales teoremas del análisis funcional.

BOLZANO, BERNARD (1781-1848) estudió filosofía, matemática y teología en la Universidad de Praga. En 1804 recibió su doctorado en filosofía con un tema de matemática, dos días antes había sido recibido como clérigo de la Iglesia Católica. Ese mismo año fue nombrado para la cátedra de filosofía y religión en la Universidad de Praga, cargo del que fue suspendido por sus ideas pacifistas y de justicia social en 1819. También por presión del gobierno austriaco estuvo bajo arresto domiciliario y se le prohibió publicar. Esto provocó que su obra fuera poco conocida. Sus resultados sobre los fundamentos del análisis y la teoría de conjuntos se adelantaron a los obtenidos por Cauchy y Weierstrass pero algunos no fueron conocidos hasta el siglo xx.

BOREL, EMILE (1871-1956) estudió en la Escuela Normal Superior de París donde recibió la influencia de los mejores profesores de la época. Sus intereses fueron muy amplios dedicándose a ramas tan diversas como la teoría de números, la física matemática, la teoría de las probabilidades, la historia, la filosofía y la didáctica de la matemática, además de sus influyentes trabajos en la línea del análisis sobre sumación de series, funciones complejas y teoría de la medida. Su producción científica llegaría a más de 300 títulos. No obstante, tuvo una brillante actividad política. Durante casi 30 años se mantendría como alcalde de su pueblo natal, fue diputado a la Asamblea Nacional, ministro en dos oportunidades y bajo su influencia se crearían los más importantes centros de investigación científica de Francia. Fue Presidente de la Academia de Ciencias de París.

CANTOR, GEORGE (1845-1918) nació en San Petersburgo. Estudió física, filosofía y matemáticas en la Universidad de Berlín, donde fue alumno de Weierstrass y Kronecker, este último fue su guía en la teoría de números, tema de su tesis de doctorado. Desde 1869 trabajó en la universidad de Halle y de 1879 hasta 1913 fue Profesor Titular. En 1884, al parecer por su intenso trabajo en la teoría de conjuntos infinitos y una aguda polémica con su ex-maestro Kronecker, cae en una crisis depresiva que lo aleja de las investigaciones. En 1890 es fundador y primer presidente de la Sociedad Matemática Alemana. Es uno de los promotores del primer Congreso Internacional de Matemáticos que se realiza en Zúrich en 1897. En la última etapa de su vida se refugió en la religión y en la filosofía. Muere en un sanatorio para enfermos mentales de Halle.

CAUCHY, AUGUSTIN-LOUIS (1789-1857) En su educación matemática influyeron Lagrange y Laplace quienes eran amigos de la familia. Fue un alumno destacado de la Escuela Politécnica y de la Escuela de Puentes y Caminos. Durante varios años mientras trabajaba como ingeniero investigaba con perseverancia en temas de matemática. En 1815 fue designado profesor asistente de análisis en la Escuela Politécnica y al año siguiente ganó el Gran Premio de la Academia Francesa por un trabajo sobre ondas. En 1816, tras la restauración de los Borbones, ganó un puesto en la Academia de Ciencias. En 1817 comenzó a trabajar en el prestigioso Collège de France. Cauchy fue un fanático religioso, muy arrogante y esta actitud le causó muchos problemas. En las nuevas condiciones políticas en Francia se exigía hacer un juramento de lealtad, a lo cual Cauchy se negó, por lo que perdió todas sus ocupaciones. En 1831 se exilió voluntariamente y viajó a Turín, más tarde a Praga. Finalmente retornó a París en 1838 y recuperó su puesto en la Academia, no así los de profesor, por estar sujetos al juramento. Estas posiciones las recuperó en 1848. Tiene trabajos en prácticamente todas las ramas de las matemáticas de su época. Se recogen 789 trabajos científicos de su autoría, sus obras completas fueron

publicadas en 27 volúmenes. Después de Euler debe ser el más productivo geómetra de todos los tiempos.

CLAIRAUT, ALEXIS CLAUDE (1713-1765) fue el miembro más destacado de una familia de matemáticos y uno de los matemáticos más precoces de la historia. A la edad de 10 años estudiaba el cálculo y la geometría por los textos de L'Hôpital; a los 13 expuso un artículo sobre geometría en la Academia Francesa de Ciencias, y a los 18 fue elegido miembro de esta institución, mediante una dispensa especial. Ese mismo año publicó un tratado que se hizo muy famoso: *Investigación de las curvas con doble curvatura*. Realizó relevantes trabajos relacionados con problemas geodésicos y astronómicos. Es autor de excelentes libros didácticos sobre geometría elemental y álgebra.

D'ALEMBERT, JEAN LE ROND (1717-1783) geómetra y filósofo francés. Cursó Derecho en el colegio Mazarino. De forma autodidacta estudió las ciencias matemáticas. Se destacó por su trabajo en la Enciclopedia Francesa como uno de sus principales redactores. En 1744 se publicó su *Tratado sobre el equilibrio y el movimiento de los líquidos* que fue una de las primeras obras sobre hidromecánica. Las principales investigaciones matemáticas las realizó en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Se preocupó por fundamentar el cálculo infinitesimal con la idea de límite. También se interesó por el álgebra y la teoría de series infinitas. Fue miembro de las principales academias de ciencias.

DARBOUX, JEAN GASTÓN (1842-1917) estudió en la Escuela Politécnica y después en la Escuela Normal Superior. Su talento matemático se manifestó desde su época de estudiante cuando publicó su primer trabajo sobre superficies ortogonales. Se doctoró en 1866 con la tesis: *Sobre las superficies ortogonales*. Trabajó en la Escuela Normal Superior y en la Sorbonne. Sus contribuciones principales las realizó en geometría diferencial aunque su nombre es bien conocido en análisis en relación con la integral de Riemann. Entre los años 1887 y 1896 escribió la obra *Lecciones sobre la teoría general de las superficies y las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal* en cuatro volúmenes, donde en particular, estudió las configuraciones geométricas generadas por puntos y rectas fijos situados sobre una superficie que rueda. Darboux recibió en vida innumerables honores, fue electo miembro de más de 100 sociedades científicas.

DU BOIS RAYMOND, PAUL DAVID GUSTAV (1831-1889) nació en Berlín. Estudió en las universidades de Königsberg, Zürich y Berlín donde obtuvo su titulación en 1859. Entre 1865 y 1884 fue profesor en diferentes instituciones docentes de Alemania. Sus principales investigaciones fueron en la teoría de ecuaciones diferenciales, las series trigonométricas y la teoría de funciones. Tenía un incisivo estilo crítico que lo conducía a buscar contraejemplos y

precisar los resultados de otros. Aportó mucho a la fundamentación del análisis matemático clásico.

EULER, LEONHARD (1707-1783) nace en Basilea. Su padre era un teólogo calvinista que escuchó las conferencias de Jacob Bernoulli. Estudió matemática elemental con su padre y otros profesores particulares como Johann Bernoulli. Su vida la podemos dividir en cuatro etapas: 1^a. Formación general en Basilea (hasta 1727). 2^a. Experiencia profesional en Rusia (1727-1741) 3^a. Madurez científica en Berlín (1741-1766) y 4^a. Vejez productiva en San Petersburgo (1766-1783). Escribe a los 19 años su primer artículo científico. Es el más productivo de todos los matemáticos. Su *Opera Omnia* tendrá 87 volúmenes con cerca de 900 trabajos, más la correspondencia y manuscritos, escribió un promedio de unas 800 páginas al año. La distribución temática de los trabajos de Matemática Pura de Euler publicados es la siguiente: Análisis 60 %, Geometría 17 %, Teoría de Números 13 %, Álgebra 7 %, Probabilidades 3 %. Fue quien ganó más premios de la Academia de Ciencias de París con 13. Poco después de su llegada a San Petersburgo, con poco más de 60 años, queda completamente ciego, pero en este período produce casi la mitad de toda su monumental obra con la ayuda de sus hijos Johann Albrecht, quien ocupaba la cátedra de Física en la Academia, y Christoph, quien era militar de carrera. También recibió la colaboración de otros miembros de la academia. Paradójicamente una de las obras que culmina estando ciego es su *Dióptrica* en tres tomos. Fue miembro de casi todas las Academias de Ciencia y sociedades científicas de su época.

FRÉCHET, MAURICE RENÉ (1878-1973) terminó la Escuela Normal en París, con una tesis dirigida por Jacques Hadamard (1865-1963) donde introduce el concepto de espacio métrico y formula varias nociones abstractas del análisis general. Fue profesor de mecánica, en la Universidad de Poitiers, entre 1910 y 1919 y de cálculo, en la de Strasbourg, entre 1920 y 1927. En la Universidad de París, entre 1928 y 1948, fue profesor de teoría de probabilidades y de cálculo diferencial e integral. Sus aportes más importantes son la introducción del análisis diferencial en los espacios abstractos y la generalización a ese contexto de conceptos topológicos como la compacidad, la completez y la separabilidad. Realizó importantes contribuciones a la estadística, las probabilidades y el cálculo. Además se interesó por los problemas filosóficos de la Matemática, siendo electo miembro de la Academia Internacional de Filosofía de las Ciencias. En 1955 se recopilaron sus artículos de divulgación científica bajo el título *Las matemáticas y lo concreto*, libro que enseguida se tradujo a varios idiomas, en particular en el 58 apareció en español.

FUBINI, GUIDO (1879-1943) nació en Venecia y estudió en la Universidad de Pisa, donde se doctoró en 1900, con una tesis sobre geometría diferencial. En-

señó en las universidades italianas desde 1901, primero en Sicilia, después en Génova y finalmente, desde 1908 en Turín. Sus intereses matemáticos fueron muy amplios, además de la geometría, se interesó por las ecuaciones diferenciales, las funciones analíticas, el análisis real y complejo, la teoría de grupos y aplicaciones de la matemática a la electricidad y acústica. En 1939, debido a la difícil situación que confrontaba en la Italia fascista y a pesar de sus problemas de salud, decidió aceptar una invitación del Instituto para Estudios Avanzados de Princeton. Murió en esta ciudad 5 años más tarde.

GREEN, GEORGE (1793-1841) estudió de forma autodidacta las matemáticas y después terminó la universidad de Cambridge (1828). Sus principales trabajos son sobre física matemática. Además de la teoría del potencial relacionada con la electricidad y el magnetismo, introdujo unas ecuaciones fundamentales en el estudio de la elasticidad, partiendo de la ley de conservación de la energía. Se considera que fue uno de los primeros en Inglaterra en dar a conocer el Análisis Matemático tal como se desarrollaba en el continente. Fue fundador de la potente escuela británica de Física Matemática.

HAMILTON, WILLIAM ROWAN (1805-1865) nació y estudió en Dublín, donde pronto fue detectado su talento extraordinario. Se dice que a los 13 años dominaba 13 idiomas y a los 16 encontró un error en la *Mecánica celeste* de Laplace. Fue profesor en la Universidad de Dublín desde los 22 años. Sus principales trabajos fueron en óptica, mecánica y cálculo de variaciones, pero también se interesó por el álgebra, la geometría y las ecuaciones diferenciales. Estudió los números complejos desde el punto de vista algebraico, introduciendo la representación en pares ordenados y trató de generalizar sus leyes operatorias a tríadas. Imposibilitado en su proyecto encontró las leyes de los cuaterniones en 1843 y dedicó los últimos 22 años de su vida a promover sus virtudes. Introdujo muchos de los conceptos del cálculo vectorial, como los productos escalar y vectorial, a través de su teoría de cuaterniones. Fue miembro de varias academias de Ciencias.

HEINE, HENRICH EDUARD (1821-1881) estudió en Gotinga y Berlín donde culminó la universidad en 1842. Desde 1844 trabajó en la Universidad de Bonn y desde 1848 en la de Halle donde llegó a ser Rector en los años 1864 y 65. Fue un seguidor de las ideas de Weierstrass. Se interesó por los problemas de la convergencia de series trigonométricas, la teoría del potencial, las funciones especiales y otros temas de la teoría de funciones reales. Escribió en 1872 el primer ensayo sobre los fundamentos del Análisis: *Elementos de teoría de funciones*; aquí aparece la teoría de Cantor sobre los números irracionales y por primera vez se considera la propiedad de los recubrimientos finitos de los intervalos acotados y cerrados como preparación de la noción de compacidad.

JACOBI, CARL GUSTAV JACOB (1804-1851) terminó la Universidad de Berlín en 1825 y desde entonces impartió clases allí hasta que se trasladó a Königsberg como docente universitario. En 1834 creó el seminario de Matemática y Física Teórica en el Departamento de Matemáticas que dirigía en Königsberg. Este seminario se convirtió en prototipo en toda Alemania. En 1839, por agotamiento nervioso, se alejó de la docencia y estuvo en viajes de reposo en distintas ciudades europeas. En 1844 fijó su residencia en Berlín sin obligación de impartir clases. Tenía una cultura matemática muy vasta y publicó trabajos en teoría de números, álgebra, geometría diferencial, teoría de ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, mecánica analítica y mecánica celeste. Su personalidad excepcional exudaba un entusiasmo contagioso tanto para las investigaciones como para la docencia. Se dice que fue considerado demasiado arrogante por sus contemporáneos. Tuvo el respeto de todos, pero pocos lo admiraban. Fue miembro de todas las Academias de Ciencia importantes y ganó muchos premios y condecoraciones.

JORDAN, CAMILLE (1838-1922) entró en 1855 en la Escuela Politécnica de París donde se preparó como ingeniero y aunque ejerció como tal, también le dedicó mucho de su tiempo a las investigaciones matemáticas. Desde 1873 fue examinador en la Escuela Politécnica y comenzó como profesor de análisis en 1876. También fue profesor en el Collège de France. Jordan trabajó en diferentes ramas de la matemática en las cuales realizó contribuciones importantes: grupos finitos, álgebra lineal y multilinear, teoría de números, topología, ecuaciones diferenciales y mecánica. Su obra *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*, que constituye el primer estudio asequible sobre la obra del joven Galois, mereció premio de la Academia de Ciencias y permaneció como guía fundamental en las investigaciones en esta área por más de 100 años. Durante más de 35 años y hasta su muerte fue editor del *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, fundado por Liouville. Fue miembro de la Academia de Ciencias de París desde 1881 y nombrado oficial de la Legión de Honor.

LAGRANGE, JOSEPH LOUIS (1736-1813) nació en Turín de una familia de ascendencia gala. Estudió en la Universidad y desde los 17 años fue profesor en la escuela de artillería de Turín. Federico El Grande le otorgó la plaza de Euler en la Academia de Ciencias de Berlín cuando este regresó a San Petersburgo. A la muerte de Federico, fue invitado por Louis XVI a París donde permaneció de 1787 hasta su muerte. Fue profesor de la Escuela Normal primero y desde 1797 de la Escuela Politécnica. Tenía una amplísima cultura matemática y sus obras tocan temas disímiles de la mecánica, la geometría, la teoría de ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, la teoría de funciones analíticas, el álgebra, la teoría de números, la astronomía y de otros dominios del saber. Junto a sus

alumnos en Turín creó una sociedad científica que pronto se convirtió en una Academia de Ciencias. Fue presidente de la Academia de Ciencias de Berlín de 1766 a 1787. Tuvo un papel importante en el perfeccionamiento de la educación en el período revolucionario, sobre todo en época de Napoleón que lo premió por toda su labor científica en Francia.

LEBESGUE, HENRI (1875-1941) terminó la Escuela Normal Superior de París en 1897. Presentó su tesis de doctorado en la Universidad de Nancy en 1902. Entre 1902-06 trabajó en la Facultad de Ciencias en Rennes. Fue profesor de la Sorbonne desde 1910 y desde 1921 en el prestigioso Collège de France. Por la cantidad e importancia de sus trabajos se considera uno de los fundadores de la teoría de funciones de variable real. Además de escribir más de 50 artículos, publicó dos libros esenciales *Lecciones sobre la integración y la investigación de las funciones primitivas* (1904) y *Lecciones sobre las series trigonométricas* (1906). Realizó también contribuciones importantes en topología, teoría del potencial y análisis de Fourier. Dedicó una serie de trabajos a la historia y la filosofía de la matemática, además de preocuparse por el perfeccionamiento de la educación matemática.

PEANO, GIUSEPPE (1858-1932), matemático italiano, miembro de la Academia de Ciencias de Turín. Terminó la Universidad de Turín en 1880 y desde entonces enseñó en esa universidad. Sus investigaciones principales están relacionadas con los fundamentos del análisis matemático, la lógica matemática y las geometrías no euclidianas. Precisó el concepto de número entero y formuló los axiomas para los números naturales. Dio un ejemplo de curva continua que llena completamente un cuadrado y que se conoce con su nombre. Generalizó a funciones abstractas varios de los conceptos del análisis matemático.

RIEMANN, GEORGE FRIEDRICH BERNHARD (1826-1866) desde temprana edad se aficionó a las matemáticas y leyó las obras de los clásicos. En 1846 entró a la Universidad de Gotinga, donde fue alumno de Gauss. Entre 1847 y 1849 escuchó las conferencias de Dirichlet y Jacobi en Berlín. Regresó a Gotinga donde se interesó por las relaciones de la matemática con el mundo físico. Su tesis doctoral (1851), guiada por Gauss, es un ensayo fundamental sobre la teoría de funciones complejas. En 1854 hizo los ejercicios de Habilitación en la Universidad de Gotinga presentando una brillante tesis sobre representación de funciones por series trigonométricas y una conferencia magistral sobre los fundamentos de la geometría, ambas plenas de ideas renovadoras. Se interesó en disímiles temas de teoría de números, geometría, ecuaciones diferenciales, teoría de funciones, teoría de gases, magnetismo, dinámica de fluidos y acústica. Enfermó de tuberculosis y realizó varios viajes de descanso a Italia, donde hizo amistad con

prestigiosos matemáticos, sobre todo en Pisa. Murió prematuramente dejando una herencia científica de pocas publicaciones, pero repletas de ideas y problemas abiertos, que todavía continúan estimulando a los investigadores.

SCHWARZ, HERMANN AMANDUS (1843-1921) nació en Silesia y estudió en la universidad de Berlín con Weierstrass. Fue profesor en la universidad de Halle, en el politécnico de Zürich, en la universidad de Gotinga y por último en Berlín. Sus principales trabajos fueron en el campo del análisis matemático y sus aplicaciones a la geometría. Desarrolló significativamente la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de las aplicaciones conformes y la teoría de series trigonométricas.

STOKES, GEORGE GABRIEL (1819-1903) estudió en la Universidad de Cambridge, donde se graduó en 1841. Desde 1849 fue profesor de esta misma Universidad. Sus trabajos fundamentales son en óptica, hidrodinámica y física matemática, sin embargo también tiene investigaciones importantes en las matemáticas fundamentales. En esa época, en Cambridge, se desconocía el quehacer matemático en el continente, esto provocó que Stokes obtuviera, independientemente de Navier y Poisson, las ecuaciones del movimiento de un fluido, teniendo en cuenta la fricción interna. En 1851 fue electo a la Royal Society, de la cual fue secretario desde 1854 hasta 1885 en que fue elegido presidente, posición que mantuvo hasta 1890.

WEIERSTRASS, KARL THEODOR WILHELM (1815-1897) comenzó, pero no concluyó estudios de derecho en la Universidad de Bonn. La lectura de los trabajos de Jacobi lo interesó por las funciones elípticas. Estudió con Gudermann de 1839 al 41. Recibió una licencia para ser maestro de secundaria y dedicó 15 años a esta enseñanza, así que pasó los años más fructíferos prácticamente aislado de centros universitarios. No obstante, se sabe que entre 1841 y 1855 desarrolló sus ideas sobre la teoría de funciones y en 1854 publicó su primer artículo importante. En ese mismo año la Universidad de Königsberg le nombró doctor honorífico y obtuvo una beca para organizar sus resultados. En 1856 la Universidad de Berlín lo contrata, pero con una carga excesiva de trabajo, por lo que en breve aparecieron signos de agotamiento nervioso. Será a los 49 años que al fin lo nombren Profesor Titular. Durante más de 30 años, ante un auditorio cada vez mayor y más internacional, dictó sus cursos sobre teoría de funciones. Las notas de sus conferencias son muy importantes, porque Weierstrass siempre sintió pavor por publicar. Se dice que en sus clases construía meticulosa y metódicamente toda una teoría sin citar ningún autor y con una coherencia como si estuviera copiando un texto. Se mantuvo en su puesto de profesor hasta su muerte a los 82 años. Sus investigaciones estuvieron centradas en la teoría de

funciones analíticas, pero incursionó en otros campos como el cálculo de variaciones, la geometría diferencial y el álgebra lineal. Junto con Kummer creó el Seminario de Matemáticas Puras que le dio prestigio a la Universidad de Berlín. Fue miembro de las Academias de Ciencias de Berlín (1856), San Petersburgo (1864) y París (1868).