Álgebra II Ciencia de la Computación Extraordinario de Agosto Curso 2012 – 2013

Nombre:____ Grupo:_____________

1. Sea $f: MS_2(R) \to C$, tal que:

$$f\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1 \qquad f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = 0 \qquad f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

a) Determine si existe alguna aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores. ¿Es única? Justifique.

b) En caso de no ser única, encuentre, de ser posible, una aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores y tal que $\ker f \oplus L\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = MS_2(R)$.

c) Halle su expresión analítica.

d) Halle $\operatorname{Im} f$.

e) Halle la matriz asociada a *f* en las bases $(a_i) = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$ de $MS_2(R)$ y la base canónica de C.

f) Determine si es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifique.

2. Sea $A \in M_3(R)$, $A = \begin{pmatrix} a & a & b-2\\ a & 1 & b-2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de $a, b \in R$ la matriz *A* representa una forma cuadrática $q: R^3 \to R$? Justifique

b) Para $a = 1 \wedge b = 2$ encuentre una matriz diagonal congruente con *A*, dando además una matriz invertible *P* que haga posible la relación de congruencia.

c) Escriba una forma normal asociada a *q*.

a) Determine si *q* es definida positiva. Justifique.

3. Demuestre o refute en cada uno de los siguientes casos.

a) Sea *T* un endomorfismo de *E*, espacio vectorial real y λ valor propio de *T*, entonces λ^2 es valor propio de $T^2 = T(T(x))$.

b) Toda matriz $A \in MS_2(R)$ es semejante a una matriz diagonal.

c) Sea *E* un espacio vectorial con producto escalar real, entonces $\forall x, y \in E$, $\|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x+y, x-y \rangle = 0$.

d) Sea *G* un grupo abeliano, *H* un subgrupo de *G* entonces, $S(H) = \{x \in G : x^2 \in H\}$ es un subgrupo de *G*.