TIMS: Álgebra

Sesión 2

El plano complejo

Lic. David Balbuena Cruz
Msc. Wilfredo Morales Lezca
Alicia Pérez Figueredo (AAyudt.)
Juliet Bringas Miranda (AAyudt.)
Pedro Alejandro Rodríguez S.P (AAyudt.)

Licenciatura en Matemática

Curso 2020-2021

Introducción

Un número complejo $z = a + bi$ está unívocamente caracterizado por su parte real e imaginaria. Es decir, a $z = a + bi$ lo podríamos identificar por el par ordenado (a, b). Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$; e inversamente, $z = 2 - 3i$ determina el par ordenado $(2, -3)$. Los números 7, i y $-5i$ son equivalentes a $(7, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -5)$ respectivamente. De esta forma podemos asociar un número complejo $z = a + bi$ con un punto (a, b) en un plano coordenado. Ahora veremos todas las consecuencias que tiene esta inocente observación.

En esta sesión usted aprenderá

- La definición de módulo y argumento de un número complejo.
- Cómo se trazan algunas regiones del plano complejo.
- Cómo transformar un número complejo a su forma trigonométrica.

El plano complejo

Debido a la correspondencia entre un número complejo $z = a + bi$ y el punto (a, b) de un plano coordenado, usaremos los términos número complejo y punto como si fueran el mismo. El plano coordenado que se muestra en la Figura 1 se llama **plano complejo**. El eje horizontal *Re* se llama **eje real** ya que corresponde a la parte real de los números complejos. El eje vertical *Im* se llama **eje imaginario** ya que dicho eje representa la parte imaginaria. El plano complejo se divide en cuatro cuadrantes que están delimitados por el eje real e imaginario.

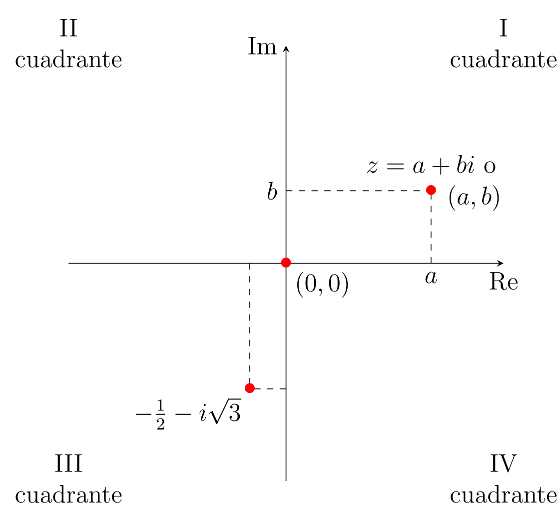


Figura 1: Plano complejo

Módulo

En el plano complejo también existe la noción de distancia. Por ejemplo, podemos decir que existen puntos más cerca del origen $(0, 0)$ que otros. Entonces surge una pregunta interesante: ¿cómo podemos medir la distancia entre un número complejo z y el origen? La respuesta la tiene nuestro amigo Pitágoras.

Sea (a, b) las coordenadas de un número complejo z cualquiera. Si unimos los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, b) en el plano complejo, se obtiene un triángulo rectángulo de base a y altura b (Figura 2). Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $r^2 = a^2 + b^2$, o lo que es lo mismo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

El valor (1) recibe un nombre muy especial.

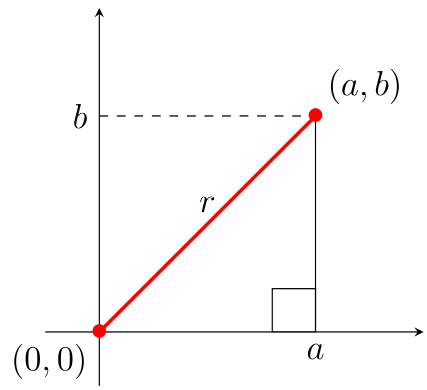


Figura 2: Módulo

DEFINICIÓN 1

El **módulo**, o **valor absoluto**, de un número complejo $z = a + bi$ es el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y representa la distancia entre (a, b) y el origen $(0, 0)$.

EJEMPLO 1. Si $z = 2 - 3i$, entonces $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Si $z = -9i$ entonces $|z| = \sqrt{(-9)^2} = 9$.

■

Argumento

Retomemos el triángulo rectángulo de la Figura 2, pero esta vez consideremos el ángulo φ que forma un complejo $z = a + bi$ respecto al eje real (Figura 3).
Las razones trigonométricas indican que

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{r} \qquad \cos \varphi = \frac{a}{r}$$

es decir, φ está directamente relacionado con la parte real e imaginaria de z, un detalle que no podemos dejar pasar por alto. Al igual que el módulo, el ángulo φ constituye una pieza clave en la teoría de los números complejos y ahora pasaremos a ver algunas de sus propiedades. Pero primero vamos a definirlo formalmente.

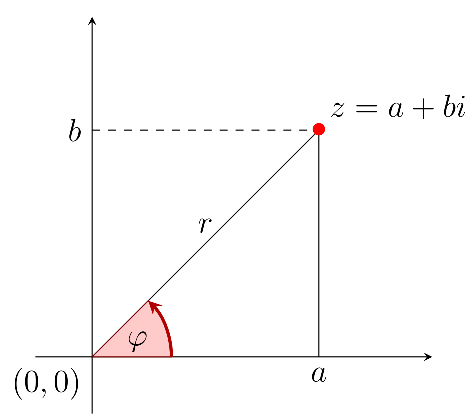


Figura 3: Argumento

DEFINICIÓN 2

Sea un número complejo $z = a + bi$ diferente de 0. El ángulo que traza el segmento $(0,0) - -(a,b)$ respecto al eje real lo llamamos **argumento** de z, y se denota por $\arg(z)$.

Por lo general, el argumento se mide en radianes y comenzando por el primer cuadrante; es positivo cuando se mide en contra del sentido del reloj y negativo cuando se mide a favor. **Un argumento de un número complejo z no es único**, ya que $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$ tienen período 2π; en otras palabras, si φ_0 es un argumento de z, entonces los ángulos $\varphi_0 \pm 2\pi$, $\varphi_0 \pm 4\pi$, ... son también argumentos de z. En la práctica, utilizamos $\tan\varphi = b/a$ para determinar el argumento de $z = a + bi$ (Véase [1]), sin embargo este método tiene dos inconvenientes:

1. Si $a = 0$ la fracción b/a queda indefinida
2. La función $\tan\varphi$ tiene período π, por lo que es necesario prestar atención al cuadrante en el que se localiza el número complejo.

El siguiente ejemplo muestra cómo podemos abordar el problema #2.

EJEMPLO 2. Determine el argumento del número complejo $z = -2 + 2i$ tal que $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Solución: Con $a = -2$ y $b = 2$, tenemos que $\tan\varphi = -2/2 = -1$ donde φ es el argumento que estamos buscando. Sabemos que $\tan\pi/4 = 1$, pero nuestra tangente es negativa y $-2 + 2i$ se encuentra en el segundo cuadrante. Entonces lo que vamos hacer es tomar la solución de $\tan\varphi = -1$ como $\varphi = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$, así aseguramos que el argumento esté ubicado en el cuadrante correcto y el valor de la tangente coincida.

■

Regiones del plano complejo

En esta sección, usaremos las definiciones de módulo y argumento para identificar algunas regiones del plano complejo.

[1] Usamos $\tan\varphi$ ya que compacta las expresiones del sen y el cos del argumento:

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{r} \cdot \frac{r}{a} = \frac{b}{a} \qquad a \neq 0$$

Círculo: Supongamos que $z_0 = a_0 + ib_0$ es un número complejo fijo cualquiera. Ya sabemos que $|z_0|$ representa la distancia entre z_0 y el origen $(0,0)$. Bueno, pues para determinar **la distancia entre z_0 y otro complejo $z = a + bi$** solo es necesario calcular el módulo de $z_0 - z$:

$$|z - z_0| = \sqrt{(a - a_0)^2 - (b - b_0)^2}$$

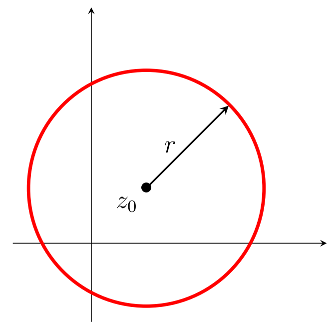


Figura 4: Círculo $|z - z_0| = r$

Entonces, los puntos z que satisfacen la ecuación

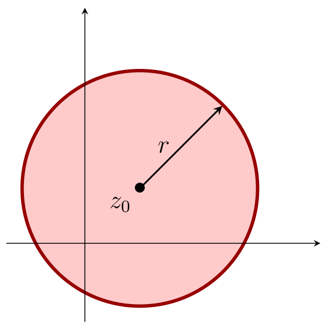
$$|z - z_0| = r, \quad r > 0$$

se encuentran en la circunferencia de un círculo de radio r centrado en el punto (a_0, b_0) (Figura 4).

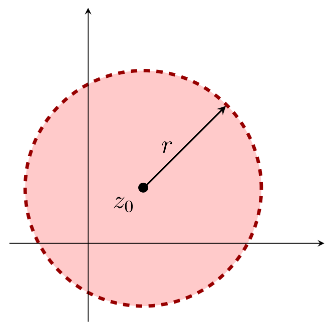
EJEMPLO 3. $|z| = 1$ es la ecuación de una circunferencia de un círculo unitario centrado en el origen. Al escribir $|z - 1 + 3i| = 5$ como $|z - (1 - 3i)| = 5$ vemos que esta ecuación describe la circunferencia de un círculo de radio 5 centrado en el punto $(1, -3)$.

■

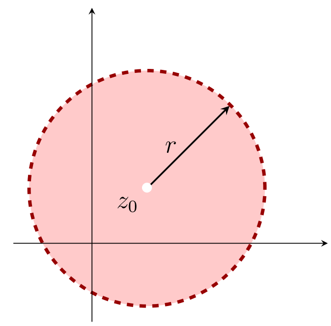
Discos y vecindades: Los puntos z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| \leq r$ pueden estar ya sea sobre la circuferencia del círculo $|z - z_0| = r$ o dentro del círculo (Figura 5a). Decimos que el conjunto de puntos definido por $|z - z_0| < r$ se encuentran dentro, y no sobre, la circunferencia de un círculo de radio r centrado en el punto z_0. Este conjunto se llama vecindad de z_0 (Figura 5b). A veces, necesitaremos usar una vecindad de z_0 que también excluya a z_0. Dicha vecindad está definida por la desigualdad simultánea $0 < |z - z_0| < r$ (Figura 5c). Por ejemplo, $|z| < 1$ es una vecindad del origen $(0,0)$, mientras que $0 < |z| < 1$ define una vecindad de $(0,0)$ que no lo incluye.



(a) Disco $|z - z_0| \leq r$



(b) Vecindad $|z - z_0| < r$



(c) Vecindad excluyente $0 < |z - z_0| < r$

Figura 5: Discos y vecindades

Anillos: El conjunto S_1 de puntos que satisfacen la desigualdad $r_0 < |z - z_0|$ se encuentran en el exterior del círculo de radio r_0 centrado en z_0, mientras que el conjunto S_2 de puntos tales que $|z - z_0| < r_1$ se encuentran en el interior del círculo de radio r_1 y centrado en z_0. Por lo que, si $0 < r_1 < r_2$ entonces el conjunto de puntos z tales que

$$r_1 < |z - z_0| < r_2$$

es la intersección de los conjuntos S_1 y S_2. Esta intersección es visualmente un anillo centrado en z_0 (Figura 6).

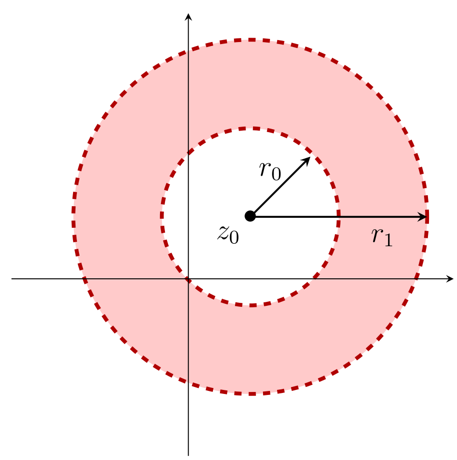
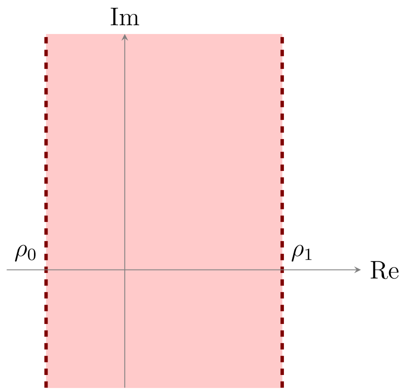


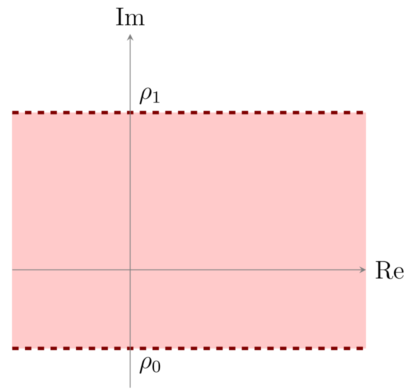
Figura 6: Anillo

Franjas: Los complejos z que cumplen $\rho_0 < Re(z) < \rho_1$ definen en el plano complejo una franja paralela al eje imaginario (Figura 7a); así mismo, la desigualdad $\rho_0 < Im(z) < \rho_1$ denota una franja paralela al eje real (Figura 7b). Por otra parte, las desigualdades $\rho_0 < Re(z)$ y $\rho_0 < Im(z)$ dividen al plano en dos mitades por los puntos $(0, \rho_0)$ y $(\rho_0, 0)$ respectivamente.

Secciones circulares (Conos): Al restringir el módulo podemos trazar discos, circunferencias y anillos. Bueno, si restringimos el argumento lo que obtenemos son secciones circulares. Por ejemplo, la inecuación $\varphi_0 < \arg(z) < \varphi_1$ traza el cono de la Figura 8a sin incluir los bordes; en la figura Figura 8b se muestran dos porciones del plano complejo: el ROJO representa al conjunto $\{z \in \mathbb{C}; \varphi < \arg(z) \leq 2\pi\}$ y la AZUL es el conjunto $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \arg(z) \leq \varphi\}$.

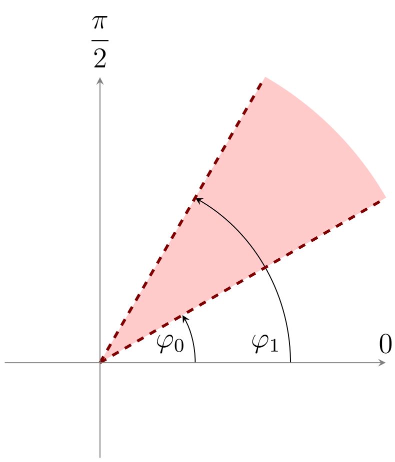


(a) $\rho_0 < Re(z) < \rho_1$

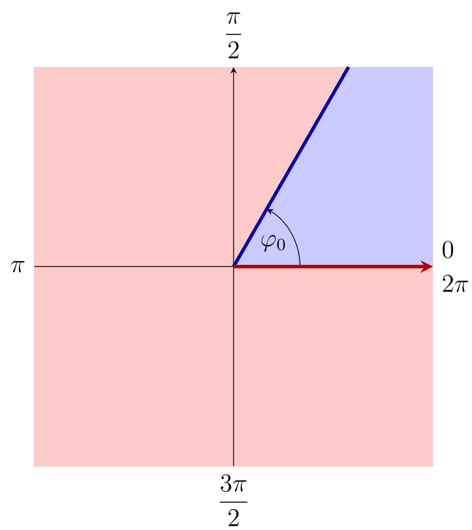


(b) $\rho_0 < Im(z) < \rho_1$

Figura 7: Franjas



(a) $\varphi_0 < \arg(z) < \varphi_1$



(b)

Figura 8: Secciones Circulares

Forma trigonométrica

Calcular $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^6$ significa multiplicar a $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ por sí mismo 6 veces, un proceso que resulta tedioso y poco eficiente (si gusta, puede comprobarlo por su cuenta). Afortunadamente, el plano complejo ofrece otra forma para los números complejos; una forma que facilita mucho las operaciones de multiplicación y división.

Sea un número complejo $z = a + bi$ cualquiera, $r = |z|$ y $\varphi = \arg(z)$. Sabemos que φ cumple las razones trigonométricas:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{r}$$

o lo que es lo mismo

$$r\cos\varphi = a \qquad r\,\mathrm{sen}\,\varphi = b$$

Si sustituimos a y b en z, obtenemos que

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z &= r\cos\varphi + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot i \\ z &= r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \qquad (2) \end{aligned}$$

La expresión (2) es la nueva forma que estábamos buscando.

DEFINICIÓN 3

Dado un número complejo $z = a + bi$, decimos que

$$z = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

es la **forma trigonométrica** de z, donde r es el módulo de z ($r = |z|$) y φ su argumento ($\varphi = \arg(z)$)

Veamos un ejemplo sobre como llevar un número complejo $z = a + bi$ a forma trigonométrica.

EJEMPLO 4. Exprese $-\sqrt{3} - i$ en forma trigonométrica.

Solución Con $a = -\sqrt{3}$ y $b = -1$ obtenemos $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = 2$. Por otra parte, $\tan\varphi = b/a = 1/\sqrt{3}$ y sabemos que $\tan\pi/6 = 1/\sqrt{3}$. Pero $\pi/6$ está en el primer cuadrante, mientras que $-\sqrt{3} - 1$ está en el tercero. Entonces la solución de $\tan\varphi = 1/\sqrt{3}$ se toma como $\varphi = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$. Se sigue que la forma trigonométrica de $z = -\sqrt{3} - i$ es

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$$

■

Multiplicación y División

En la sección anterior, comentamos que la forma trigonométrica es especialmente conveniente cuando multiplicamos o dividimos números complejos. Sin embargo no llegamos a explicar porqué. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)$$

dos números complejos cualesquiera en su forma trigonométrica. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)] \tag{3}$$

y, para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + i(\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)] \tag{4}$$

Usando las fórmulas de suma para el seno y el coseno[2], (3) y (4) se pueden rescribir como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Estas dos últimas expresiones son espectaculares, pues demuestran que:

PROPOSICIÓN 1

- El módulo del producto (de la división) es igual al producto (la división) de los módulos

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

- El argumento del producto (de la división) es igual a la suma (resta) de los argumentos

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \qquad \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Bien, ahora que sabemos como se comportan el módulo y el argumento de $z_1 z_2$ y z_1/z_2, podemos multiplicar y dividir números complejos de forma más eficiente.

EJEMPLO 5. Determine $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6$

Solución: Por la Proposición 1 tenemos que

$$\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|^6 = 1^6 = 1$$

[2] $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x\cos y \pm \cos x\operatorname{sen} y$

. $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

y

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6 = 6\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 6\cdot\frac{\pi}{6} = \pi$$

Entonces, la forma trigonométrica de $z = (\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^6$ está dada por

$$z = \cos\pi + i\sin\pi$$

que a su vez es igual a $z=-1$. Conclusión:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$\blacksquare$

Ejercicios Propuestos

1. Determine el módulo de los siguientes números complejos:

   a) $(1-i)^2$

   b) $\dfrac{2i}{3-4i}$

   c) $i(2-i)-4(1+\frac{1}{4}i)$

   d) $\dfrac{1-2i}{1+i}+\dfrac{2-i}{1-i}$

2. Describa el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisfaga las siguientes expresiones

   a) $|z-4+3i|=5$

   b) $\text{Re } z=5$

   c) $\text{Im } z=-2$

   d) $|2z-1|=4$

   e) $|z-i|=|z-1|$

   f) $|z-2|=\text{Re } z$

   g) $\text{Im } (\bar{z}+3i)=6$

   h) $\arg z=\pi/4$

   i) $\text{Re } z<-1$

   j) $|\text{Re } z|>2$

   k) $2<\text{Re } (z-1)<4$

   l) $-1\leq \text{Im } z<4$

   m) $|z-i|>1$

   n) $2<|z-i|<3$

   ñ) $2\leq|z-3+4i|\leq 5$

   o) $0\leq \arg z\leq \pi/6$

   p) $-\pi<\arg z<\pi/2$

3. Exprese los siguientes números complejos en forma trigonométrica

a) 2

b) $-3i$

c) $1+i$

d) $-\sqrt{3}+i$

e) $\dfrac{3}{-1+i}$

f) $-2-2\sqrt{3}i$

g) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$

4. Determine los números complejos que resultan de las siguientes operaciones:

   a) $(1+\sqrt{3}i)^9$

   b) $(2-2i)^5$

   c) $\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)^{12}$

   d) $\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^5$

5. Demuestre que la distancia entre dos números complejos z y z_0 está dada por $|z-z_0|$.

6. Sean z y w dos números complejos. Pruebe que

   a) $|\bar{z}|=|z|$

   b) $|zw|=|z||w|$

   c) $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$, con $z\neq 0$

   d) $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\leq|z|$

   e) $\mathrm{Im}\,z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})\leq|z|$

   f) $|z+w|\leq|z|+|w|$

   g) $|z+w|^2+|z-w|^2$

   h) $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$