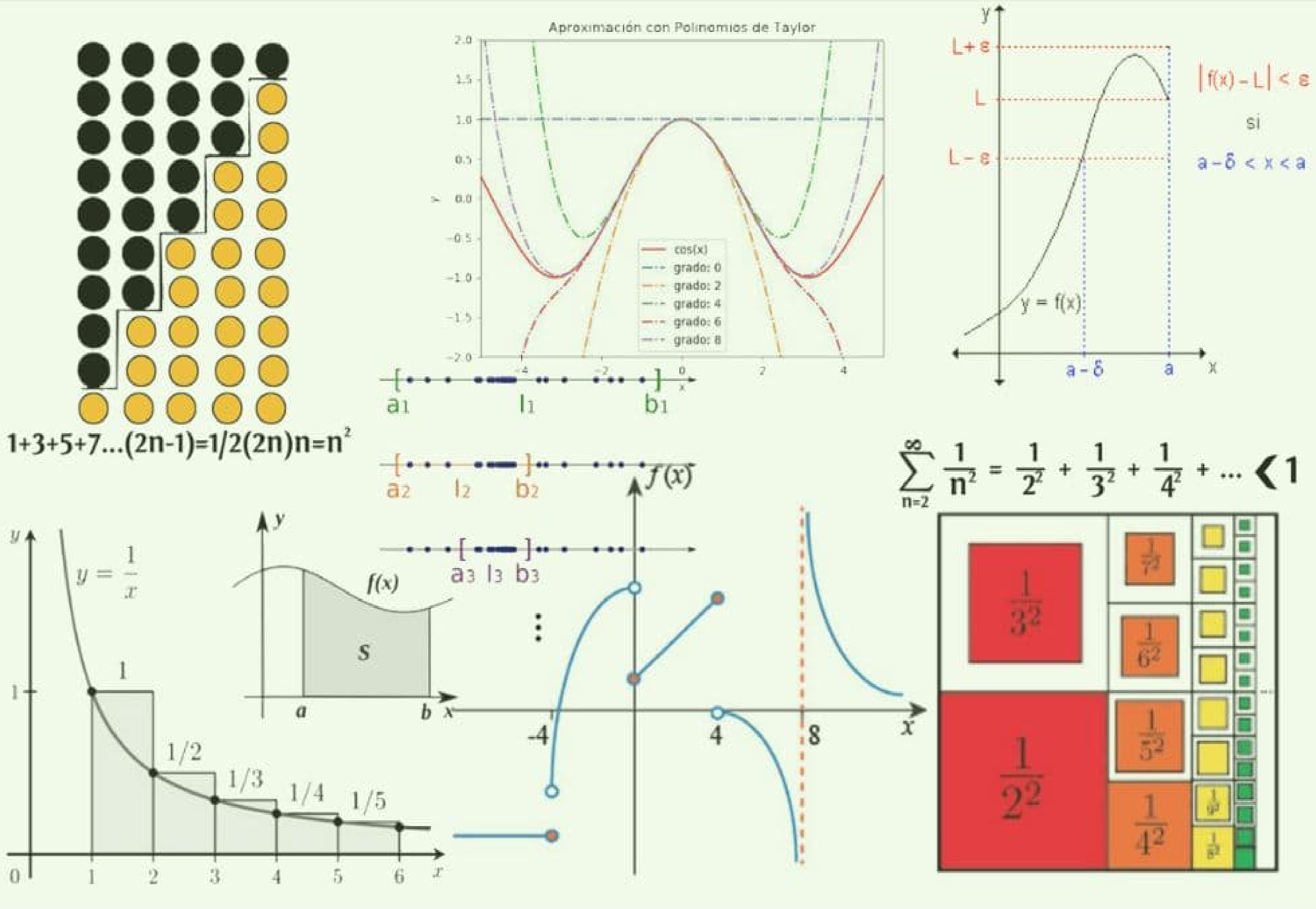
Análisis Matemático Real
Ejercicios y Problemas

Sofía Behar Jequín
Rita Roldán Inguanzo
Armando Arredondo Soto



EDUNIV
Editorial Universitaria

ANÁLISIS MATEMÁTICO REAL

EDUNIV
Editorial Universitaria

ANÁLISIS MATEMÁTICO REAL

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sofía Behar Jequín, Rita Roldán Inguanzo,
Armando Arredondo Soto

510-B419 2021
Behar Jequín, Sofía

Análisis matemático real: ejercicios y problemas / Sofía Behar Jequín, Rita Roldán Inguanzo, Armando Arredondo Soto, Universidad de La Habana. – La Habana : Editorial Universitaria, 2021. – ISBN: 978-959-16-4705-4 (PDF interactivo). – (x, 266 páginas): figuras. – 7,87 por 10,63 pulgadas.

1. Matemáticas; 2. Roldán Inguanzo, Rita, 3. Arredondo Soto, Armando; 4. Universidad de La Habana
I. Título.

Diseño de la cubierta: AMTM, 2021.
Edición, corrección, diseño interior y emplane digital: Ing. Pilar Sa Leal.
Realización: Richard Medina Rodríguez.

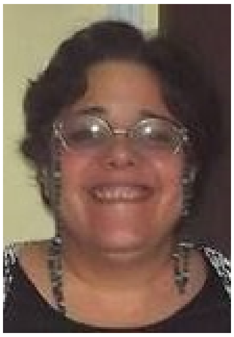
Editorial Universitaria. Calle 23 esquina a F. núm. 565. El Vedado, La Habana, portal web: http://www.eduniv.cu

Sección de Editores de la SOCICT Cuba 460, e/ Teniente Rey y Amargura, La Habana Vieja, portal web http://socict.org.cu

Disponible en el Portal EDUNIV-SOCICT

www.eduniv.cu

SOFÍA BEHAR JEQUÍN (La Habana, 1967). Graduada de Licenciatura en Matemática en la Universidad de La Habana (UH). Más de treinta años como profesora de Análisis Matemático y Álgebra en la Facultad de Matemática y Computación (MATCOM) de la UH. Los resultados de su trabajo de investigación se han recogido en diferentes artículos publicados en revistas nacionales e internacionales. Obtuvo en el curso 2009-2010 el Premio de la Comisión de Grados Científicos de la UH otorgado a la Tesis de Doctorado más destacada en el área de las Matemáticas y el Premio Anual de la Comisión Nacional de Grados Científicos otorgado a la Tesis de Doctorado más destacada en el área de las ciencias naturales. Recibió además el premio que otorga la Fundación Sofia Kovaliévskaia por los logros científicos en el área de las ciencias exactas.



RITA ALEJANDRA ROLDÁN INGUANZO (La Habana, 1962). Graduada de Licenciatura en Matemática en la Universidad Friedrich Schiller de Jena en Alemania. Con más de 30 años como profesora de MATCOM, UH; preside actualmente la Comisión Nacional de la carrera de Matemática y coordina la mención de Análisis Matemático y Álgebra de la Maestría en Ciencias Matemáticas de su facultad. Es profesora titular de MATCOM y metodóloga de la Dirección de Formación de Pregrado de la UH. Ha publicado varios libros y numerosos artículos científicos en Cuba y en el extranjero. Impartió junto a otro profesor el curso televisivo *Números y Figuras en la Historia* en Universidad para todos. Es la representante de Cuba en la Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria y coordina la Olimpiada Nacional Universitaria de Matemática. Es poseedora del Premio de tercera categoría de la Universidad Friedrich Schiller de Jena, de la Distinción por la Educación Cubana y obtuvo el premio Raimundo Reguera que otorga la Sociedad Cubana de Matemática y Computación.

ARMANDO ARREDONDO SOTO (Ciego de Ávila, 1989). Obtuvo su título de Licenciatura en Matemática en la UH en 2014. Ha impartido cursos de Variable Compleja, Series y Ecuaciones Diferenciales y Matemática Numérica en la CUJAE y cursos de Análisis Matemático e Introducción a la Matemática en MATCOM, UH. En 2017 defendió una maestría en la mención de Matemática Numérica. Actualmente se encuentra realizando estudios de doctorado en el Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas (INSA) de Toulouse.

Índice general

A la memoria de Roberto Núñez Malherbe,
Maestro extraordinario y entrañable amigo.

AGRADECIMIENTOS

- A *Pilar Sa* por su increíble capacidad de trabajo, sus atinadas sugerencias y su amable ayuda en la edición de esta obra.
- A los profesores *Concepción Valdés Castro y Carlos Sánchez Fernández,* por los más de 40 años dedicados a generaciones de matemáticos y por haber escrito los textos *Introducción al Análisis Matemático* y *Análisis de Funciones de una variable*, los cuales contienen todos los elementos teóricos necesarios para dar solución a los ejercicios que este libro presenta.
- A *Richard Medina Rodríguez,* muy especialmente, por el extraordinario esfuerzo y el tiempo dedicado a trabajar con los autores para garantizar la presentación y edición de este material (incluida la de su versión digital) y la calidad de las figuras generadas computacionalmente que en él se presentan así como por proponer parte de los ejercicios y las soluciones que aquí se muestran.
- A los profesores *Jorge Estrada Hernández, Josué Manuel Corujo Rodríguez, Isaías Germade y Ana Isis Toledo,* por la cuidadosa revisión del documento.
- A *Loidel Barrera Rodríguez y Annel Sánchez Cobas,* quienes sugirieron algunos de los ejercicios que aquí se incluyen y aportaron soluciones a los mismos.
- A *nuestros maestros*, que nos permitieron descubrir el fascinante mundo de las Matemáticas y nos transmitieron, con infinito amor, su pasión por la enseñanza.
- A *nuestros estudiantes* por ser fuente de inspiración, porque compartir el aula con ellos es un placer y porque cada una de sus reflexiones e incertidumbres nos llevan siempre a meditar sobre qué se debe enseñar, cuál es el momento preciso y el modo más apropiado de hacerlo.

INTRODUCCIÓN

En este libro se propone una colección de ejercicios, elegidos entre los muchos que se presentan para lograr el correcto aprendizaje de los contenidos impartidos en los cursos de Análisis Matemático de una variable real, en el primer año de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana.

En general, tales ejercicios se seleccionaron de publicaciones ampliamente conocidas por ser indispensables para la enseñanza de estas asignaturas y una parte de ellos, se elaboró a partir de la experiencia acumulada, a lo largo de muchos años, por el profesorado de esta disciplina en nuestra Facultad.

Esta recopilación tiene además el propósito de mostrar en detalle los métodos de trabajo fundamentales en el estudio de las sucesiones, series numéricas y funciones reales de variable real, así como la manera en que se integran muchos de los resultados estudiados, tanto teóricos como prácticos, en su solución. De ese modo, los ejercicios propuestos no solo coadyuvan a la adquisición de algoritmos y procedimientos, sino que también favorecen la mejor comprensión de los conceptos y resultados teóricos de esas asignaturas.

Al figurar una amplia relación de problemas resueltos y propuestos con las características anteriores, se espera que este libro resulte un material de ayuda, tanto para la carrera de Matemática, como para cualquier otra de la enseñanza superior donde se imparta este tipo de cursos. La mayor parte de estos problemas se presentan elaborados de modo que puedan ser comprendidos por estudiantes noveles, a los cuales sirva de motivación para su posterior entrenamiento en la solución de ejercicios de manera independiente y les permita descubrir el amplio campo en el que el Análisis Matemático resulta de gran utilidad.

Este material está dividido en cinco capítulos: Preliminares, Sucesiones y Series Numéricas, Límite y Continuidad, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral; atendiendo a los distintos temas que se estudian en el Análisis Matemático de Variable Real. Se añaden además las soluciones en detalle de una buena parte de los ejercicios propuestos, algunas incluso con el análisis de diferentes vías, resultado de muchas horas de esfuerzo y perseverancia de estudiantes y profesores que han formado parte de estos cursos.

Resulta importante aclarar además que el orden de los capítulos no implica necesariamente que en la resolución de los ejercicios se utilicen solo conceptos o resultados tratados en los precedentes. Al tratarse en general de ejercicios integradores, es muy común que, desde los primeros temas, aparezcan problemas que se apoyen, para su resolución, en resultados propios de temas posteriores.

Por otro lado, en esta obra no se han incluido los elementos teóricos necesarios para dar solución a los ejercicios que se presentan porque pueden ser encontrados, en particular, en los libros *Introducción al Análisis Matemático* y *Análisis de Funciones de una variable*, escritos por los Doctores Concepción Valdés Castro y Carlos Sánchez Fernández. Estos textos se emplean en las carreras de Matemática en todo el país y de Física y Computación en la Universidad de La Habana, para el aprendizaje de las asignaturas Análisis Matemático I y II. En cada uno de ellos, resultado de la considerable experiencia alcanzada por sus autores en más de cuatro décadas de enseñanza ininterrumpida, logran mostrar toda la parte básica del edificio analítico, de la forma más precisa, atractiva y, a la vez, accesible.

En resumen, este texto pretende contribuir a la mejor formación de los estudiantes y a facilitar la labor del docente, proporcionando la posibilidad de emplearlo como un libro complementario, tanto en las clases como en la mejor orientación del estudio individual. Asimismo apoyará la preparación de los alumnos ayudantes y de quienes impartirán la asignatura en sus primeros años de graduados, haciendo más sencillo, en lo posible, el difícil, pero no por eso menos hermoso arte de aprender y de enseñar a aprender. Se agradece cualquier comentario o señalamiento que contribuya a mejorar esta obra.

Sofía Behar Jequín
Rita Roldán Inguanzo
Armando Arredondo Soto

CARTA AL ESTUDIANTE

A ti, que has elegido estudiar Matemática:

Este libro ha sido elaborado con el deseo de que haga más ameno e interesante tu camino al encuentro de una asignatura que, aunque presenta un alto nivel de dificultad para quien inicia su vida en la enseñanza universitaria, está llena de magia y de resultados tan fascinantes como asombrosos. Tales resultados constituyen un arsenal muy útil para resolver un sinfín de problemas que aparecen, en la práctica, en muy disímiles ramas de la vida cotidiana.

Sin lugar a dudas, solucionar problemas es un buen modo de aprender bien el Análisis. No obstante, **no existe práctica eficiente si no se conoce bien la teoría que la sustenta**. Te recomendamos entonces que:

- **Estudies a profundidad los libros que sirven tradicionalmente como texto básico a los cursos en los que se imparte esta asignatura** antes de intentar entender o resolver cualquier ejercicio de los que aquí te mostramos.

- **Consultes otros libros relacionados con esta materia**. Siempre es conveniente. Hay muchos y muy buenos. Las distintas formas de explicar los mismos resultados por diferentes autores, puede hacer que entiendas mejor cuanto aquí proponemos para ti. De hecho, un buena parte de las soluciones que hemos puesto a tu disposición en este texto pueden estar influenciadas por la lectura y el empleo sistemático de todos esos libros.

- **Proporciones el tiempo necesario al aprendizaje de cada concepto o resultado para lograr entenderlos y dominarlos adecuadamente**. Dejar que se afiancen las ideas es importante. Entiende que no estudias para aprobar, sino para aprender con calidad. No son condiciones equivalentes.

- **Aprecies cada ejercicio como portador de información y de ideas que te lleven a desarrollar nuevos o diferentes métodos de trabajo.** Escucha tu intuición; deduce, a partir de los elementos de los que dispones, todo cuanto sea admisible. Intenta usar varias vías siempre que sea posible; generaliza hasta donde sea cierto un resultado; asocia estrategias concretas a determinadas situaciones; pregúntate cómo variaría lo que se afirma si se cambian o suavizan las hipótesis; pon en duda cuanto sea necesario. Establece relaciones o emplea diferentes enfoques que te permitan responder tus cuestionamientos. Pero no lo dudes, siempre habrá nuevas interrogantes, lo que varía es su calidad. De cualquier modo, la vida sería muy aburrida si, desde el inicio, ya supiésemos todo. La incertidumbre tiene algo positivo: ha hecho, al menos a lo largo de la historia, que la humanidad se supere.

- Pensar rápido es algo muy provechoso pero saber pensar es aún mejor. **Escribe tus ideas con el rigor y la precisión pertinentes**, ello te ayuda a captar la esencia de lo que se considera y a observar minuciosamente los detalles, que es nuestra próxima recomendación.

- **Cuida los detalles**. Como en la vida, son los pequeños detalles los que hacen la diferencia y es por eso que también, sobre todo en la matemática, hay que observarlos meticulosamente. Piensa que el más mínimo cambio u omisión, puede llevarnos a afirmar proposiciones que no son ciertas, con lo que se malogran muchas buenas ideas o demostraciones. Es el caso, por citar unos pocos ejemplos, de cambiar sin percatarnos, un signo o un término cuadrático por uno lineal (o viceversa); de poner un paréntesis en lugar de un corchete en los extremos de un intervalo; de omitir una palabra importante; o de hacer el desarrollo en serie de una función alrededor de un punto que no sea el adecuado (o no hecho de modo conveniente). Asimismo, usar un resultado muy bueno en la práctica cuando alguna de las hipótesis que establece para su uso falla, puede resultar verdaderamente fatal.

- Ten en cuenta asimismo que la Matemática no es solo una asignatura. **Estudia un problema desde sus distintas aristas: la geométrica, la algebraica, la analítica;** ello es muy útil y, de hecho, muy necesario. Establecer analogías con lo que se conoce bien, intentar acercar un problema que aparentemente no tiene nada que ver con otro y descubrir que se puede dar solución al primero a partir de lo que se sabe o se hizo en el segundo, es muy bueno. Explorar diferentes objetos, intentando encontrar similitudes entre ellos o en el modo que se comportan, permite obtener resultados maravillosos. Como dijo Henri Poincaré, mientras que la poesía es el arte de llamar a lo mismo de muchas maneras; la matemática es el arte de llamar del mismo modo a muchas cosas diferentes.

- **Grafica cuanto puedas**. Si bien los gráficos pueden no constituir demostraciones, una buena imagen logra más que mil palabras y hace que lo aprendido permanezca mejor en nuestras mentes. Aprehender es mucho más que aprender y no porque la primera palabra tiene dos letras más, no. Esas dos letras hacen una diferencia notable. Las herramientas y elementos propios del Análisis tendrás que emplearlos en muchas otras asignaturas de la carrera y en la vida cotidiana, por tanto, conviene aprenderlos muy bien.

- **¡No te desanimes!** Por difícil que parezca el contenido de la asignatura, recuerda que nada realmente importante en la vida resulta fácil y, si lo piensas detenidamente, aquello que más valoramos es, precisamente, lo que muchas veces nos costó un buen esfuerzo.

- **Establece metas intermedias que te permitan ir midiendo cómo vas evolucionando hasta llegar al final deseado.** Eso sí, no te detengas, estudia con ahínco, intercambia ideas. Permítete equivocarte. Como en la vida, somos resultado de nuestros aciertos y desaciertos. Cada fracaso nos enseña algo que precisábamos asimilar. Por eso debes entender bien dónde y por qué erraste. Recuerda que aquellos que hoy te enseñan o que han escrito los libros que te permiten aprender, estuvieron en algún momento en ese lugar que ahora estás y sintieron exactamente la incertidumbre que sientes acerca de si se te ocurrirá la solución adecuada en el momento preciso. Pero es en esas circunstancias donde debes tener muy claro qué quieres obtener, a dónde quieres llegar, cuán importante es tu sueño para así activar todos los mecanismos que permitan lograr que lo que deseas se haga realidad. Recuerda que la preocupación por sí misma no conduce a nada. Ella solo es útil si la empleamos como el resorte necesario para echar a andar nuestras fuerzas en función de lograr lo que tanto anhelamos. Estudia a conciencia, no un enorme número de horas, sino el número necesario y de modo eficiente. Confía en tu consciente y en tu subconsciente; ellos trabajan, si los estimulas, más de lo que crees. Haz, cada día, cuanto te es posible hacer y deja que el tiempo se ocupe del resto. ¡Te sorprenderás!

- **No aprendas los resultados y sus demostraciones de memoria**. Logra entender qué significan, cómo y bajo qué condiciones se aplican, dónde fallan, cómo se relacionan con otros aspectos tanto en la teoría como en la práctica. Esto es realmente importante y todo ello, te insistimos, será consecuencia de lo que hagas a diario. No olvides que los resultados a los que hoy te enfrentas llevó siglos poder obtenerlos y luego hubo que pulirlos aún más para poder escribirlos de modo que fuesen más asequibles al entendimiento. Son el fruto de muchas y muchas mentes prodigiosas. No pretendas entonces minimizar el esfuerzo para entenderlos y lograr dominarlos. La práctica constante es el criterio de la verdad.

Esperamos que este libro sea un buen amigo en tu camino al descubrimiento y dominio del Análisis Real. Quisiéramos invitarte además a que te unas en próximas ediciones. Como ves, otros antes que tú, lo hicieron. Cualquier vía que encuentres para la solución de determinado ejercicio, cualquier duda o sugerencia que nos ayude a mejorarlo para quienes estudiarán en años posteriores al tuyo, será bienvenida y con gusto la recibiremos.

Te dejamos para el final unas palabras de ánimo de una de nuestras mejores poetisas, la gran Dulce María Loynaz quien bellamente escribió en un fragmento de su poema Meta:

Yo seré como el río,
que se despeña y choca,
que salta y se retuerce,
pero que llega al mar.

Sigue el sabio consejo del prolífico escritor Swami Sivananda **Pon tu corazón, tu mente, tu intelecto y tu alma, aun en tus acciones más pequeñas. Este es el secreto de tu éxito.**

Sofía Behar Jequín
Rita Roldán Inguanzo

Parte I.

Ejercicios

I.1. Preliminares

Los descubrimientos matemáticos, pequeños o grandes, nunca nacen por generación espontánea. Siempre presuponen una sólida semilla de conocimientos preliminares y buena preparación desde el trabajo, tanto consciente como inconsciente.
POINCARÉ

Lo que tenemos que aprender lo aprendemos haciéndolo.
ARISTÓTELES

Nada se hará en ti sin ti.
SÉNECA

Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.
ALBERT EINSTEIN

El sabio cuida principalmente de la raíz.
CONFUCIO

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1.

a) Encuentra una expresión para calcular

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n,$$

siendo $r \in \mathbb{R},\ r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestra que, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1.$$

c) Demuestra que si $x \in \mathbb{R}, x \geq -1,$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple la desigualdad de Bernoulli:

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

d) Prueba que cualquier cantidad de dinero mayor o igual que 8 puede pagarse usando solamente monedas de 3 y 5 pesos.

e) Demuestra que la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados es

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ejercicio 1.2.

Halla la solución de la inecuación $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} > 32n$ para n natural y $n \geq 3$.

Ejercicio 1.3.

Demuestra que, para toda n y para toda k naturales con $k \leq n$, el número $\binom{n}{k}$ es un natural.

Ejercicio 1.4.

Calcula

$$\sum_{i=0}^{8} \binom{9}{i}\binom{12}{8-i}$$

comparando los coeficientes de x^n en la igualdad $(1+x)^9(1+x)^{12} = (1+x)^{21}$ y generaliza el resultado.

Ejercicio 1.5.

Demuestra que

a) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

c) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$.

d) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 1.6.

Halla el coeficiente de x en la expansión binomial de $(2x^2 + x - 3)^8$.

Ejercicio 1.7.

Halla el término de valor máximo en el desarrollo de $(1 + \sqrt{2})^{30}$.

Ejercicio 1.8.

Calcula:

a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$.

b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}$.

c) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{k}$, $k = n$ si n impar ($k = n - 1$ si n par).

d) $2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$.

e) $\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

f) $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

g) $\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}$.

Ejercicio 1.9.

Demuestra que

a) $\arctan \dfrac{u+v}{1-uv} = \arctan u + \arctan v$.

b) $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$.

Ejercicio 1.10.

Calcula la suma de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{3}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n!}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

Ejercicio 1.11.

Halla el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\theta, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta.$$

Ejercicio 1.12.

El sabio alemán Johann Heinrich Lambert (1728–1777) introdujo las llamadas funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Verifica las identidades siguientes:

I) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$,

II) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$,

III) $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$.

b) Encuentra fórmulas para $\operatorname{senh} 2x$, $\cosh 2x$, $\operatorname{senh} \frac{x}{2}$, $\cosh \frac{x}{2}$.

c) Muestra que $\operatorname{senh} ix = i \operatorname{sen} x$, $\cosh ix = \cos x$.

d) Encuentra las representaciones en serie para las funciones seno y coseno hiperbólico.

e) Las inversas de las funciones hiperbólicas $\operatorname{arcsenh} x$, $\operatorname{arccosh} x$ y $\operatorname{arctanh}\ x$ pueden definirse de modo semejante al caso de las funciones trigonométricas. Prueba que

   I) $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

   II) $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$,

   III) $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$.

Ejercicio 1.13.

Halla una expresión del polinomio de grado mínimo que interpola los puntos de la forma

$$(n, 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1))$$

a) para n impar;

b) para n par.

c) ¿Existirá un polinomio que interpole los puntos de la forma anterior, cuando n es un número natural cualquiera? En caso afirmativo, hállalo; de lo contrario, justifica la razón de su no existencia.

Ejercicio 1.14.

Halla el polinomio $y = f(x)$, tal que $f(0) = 3$ y sus diferencias en enteros satisfacen la relación

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = 9n^2 - 3n - 2.$$

Ejercicio 1.15.

Halla el valor de la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Ejercicio 1.16.

Halla el error cometido en la siguiente demostración:

Todos los caballos son del mismo color.

Inicio de inducción

Para $n = 1$ resulta evidente que en cualquier conjunto formado por un caballo, todos los caballos son de igual color.

Hipótesis de inducción

Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$ se tiene que todos conjuntos formados por n caballos contienen caballos del mismo color.

Tesis de inducción

Sea A un conjunto cualquiera formado por $n+1$ caballos:

$$A = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}.$$

Al extraer un caballo cualquiera del conjunto A (por ejemplo, el c_{n+1}), resulta un conjunto A_1 con n caballos, los cuales todos son del mismo color por hipótesis:

$$A_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}, \text{ todos del mismo color.}$$

Solo resta comprobar que el caballo c_{n+1} es del mismo color que los del conjunto A_1. Extraigamos pues un caballo diferente de A (por ejemplo, c_1), para obtener así otro conjunto A_2 de n caballos en el cual todos son del mismo color nuevamente por hipótesis:

$$A_2 = \{c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}, \text{ todos del mismo color.}$$

Con esto se concluye que el caballo c_{n+1} tiene el mismo color que el resto con lo que se completa la demostración del teorema.

Ejercicio 1.17.

Sabiendo que los números de Fermat son de la forma $2^{2^n} + 1$, prueba que:

a) Un número de Fermat de orden n es igual al producto de todos los anteriores, desde 0 hasta $n-1$, más 2.

b) Ningún número de Fermat mayor que 5 puede ser la suma de dos números primos.

c) Dos números de Fermat diferentes siempre son primos entre sí (es decir, el único divisor común positivo es el número 1).

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.18.

Prueba que, para todo número natural n, se cumple que

$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{(2^{n-1})}.$$

Ejercicio 1.19.

En la expansión de $(x+2)^n$, el coeficiente correspondiente al término en x^3 es dos veces el coeficiente correspondiente al término en x^4. Halla n.

Ejercicio 1.20.

A comienzos del 2010 la población de un determinado país era de $3,4$ millones de personas.

a) Si la población crece a una razón de $1,6\,\%$ anual, estima la población que tendrá el país a principios de 2040.

b) Si la población continúa creciendo a esta misma razón ¿en qué año el país excederá los 7 000 000 de habitantes?

Ejercicio 1.21.

Halla el término general a_n y la suma de la serie cuyas sumas parciales son

$$S_n = \frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.22.

Encuentra una expresión en función de n para las sumas

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k}$.

Ejercicio 1.23.

Calcula

a) el coeficiente de x^{13} en el desarrollo de $\left(x^3 + \dfrac{3}{x^2}\right)^6$.

b) el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{23}$.

c) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$.

d) el coeficiente del término que no contiene x en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$.

e) el coeficiente del término que contiene x^2y^4 en el desarrollo de $(2x+3y)^7$.

Ejercicio 1.24.

Dado un conjunto de puntos del plano $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, se llama ***diferencia de orden 1*** a $\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i$ y ***diferencia de orden n*** a $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1}y_{i+1} - \Delta^{n-1}y_i$.

a) Prueba que las diferencias de orden n correspondientes a puntos (con abscisas equidistantes) situados sobre el gráfico de un polinomio de grado n son siempre constantes.

b) Explica por qué son constantes, para cualquier valor de k, las diferencias de orden $k+1$ correspondientes a los puntos $(n, 1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k),\ n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.25.

Halla el polinomio de interpolación de grado mínimo que pasa por los puntos

a) $(n, 3+7+11+\cdots+(4n-1))$.

b) $(n, 1+4+7+\cdots+(3n-2))$.

Ejercicio 1.26.

a) Prueba que un número que puede ser expresado en notación decimal con una cantidad finita de cifras o con infinitas cifras periódicas es racional (es decir, es cociente de dos enteros).

b) Comprueba que $0{,}99999\ldots = 1$.

I.2. Sucesiones y series numéricas

Se aprende a conciencia lo que se hace y repite hasta penetrar en la subconciencia, se asimila y se aprende menos bien lo que se ve a otro hacer muchas veces; y no se aprende ni bien ni mal lo que se oye decir cómo se haría; porque aun suponiendo imaginación bastante sensible para captar de oídas el supuesto método, la fugaz impresión se volatiliza pronto y, al proponerse por sí mismo la realización, el fracaso es inevitable. Se explica así el escaso fruto de nuestras enseñanzas, tanto menor cuanto mayor sea la cantidad de ciencia exhibida ante los pasivos oyentes.

Julio Rey Pastor

Lo que oyes lo olvidas, lo que ves lo recuerdas, lo que haces lo aprendes.

Proverbio chino

Podemos sorprendernos de ver invocar la sensibilidad con motivo de demostraciones matemáticas que aparentemente no podrían interesar más que a la inteligencia. Esto sería olvidar el sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números y de las formas, de la elegancia geométrica. Es un auténtico sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen. He aquí una verdadera sensibilidad.

Poincaré

Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1.

Analiza la convergencia de la sucesión de término general

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Sugerencia: Considera el uso del logaritmo y sus propiedades.

Ejercicio 2.2.

Demuestra las siguientes proposiciones:

a) Si dos subsucesiones de una misma sucesión $\{x_n\}$ son convergentes a un mismo límite l y todo término de la sucesión pertenece a una de las dos subsucesiones, entonces $\{x_n\}$ es convergente a l.

b) Si $\{x_{2n}\}$, $\{x_{3n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ son subsucesiones convergentes de $\{x_n\}$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

Ejercicio 2.3.

Calcula

$$\lim_n \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right).$$

Ejercicio 2.4.

Analiza el carácter de las sucesiones de término general:

a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

b) $y_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

c) $w_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

d) $z_n = \ln(\ln n) - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}, \quad n \geq 2.$

Ejercicio 2.5.

Dados m números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, demuestra que si $A = \max_{1\leq k\leq m} a_k$, se cumple que

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = A.$$

Ejercicio 2.6.

Prueba que el recíproco de cualquier número natural es la suma de una serie geométrica que empieza con el recíproco del número siguiente.

Ejercicio 2.7.

a) Calcula la suma de:

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{1+n^4(n+1)^4}, \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}.$$

b) Analiza el carácter de las series

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{7}{4}} \left(\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n-1} - 2\sqrt[4]{n}\right), \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}x^n}.$$

Ejercicio 2.8.

Prueba que $2 < e < 3$.

Ejercicio 2.9.

a) Prueba que si en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n > 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

b) Analiza si el recíproco es cierto.

Ejercicio 2.10.

Calcula $\lim_n \sqrt[n]{n!}$.

Ejercicio 2.11.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión que satisface $|x_{n+1}-x_n| < \alpha|x_n-x_{n-1}|$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde α es un número fijo tal que $0 < \alpha < 1$. Demuestra que $\{x_n\}$ converge.

Ejercicio 2.12.

Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes, justificando en cada caso tu respuesta:

a) La sucesión de término general $x_n = \dfrac{(-1)^n + \frac{7}{n+1}}{(-1)^n + \frac{1}{n^3}}$ es divergente.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{7}$.

c) La sucesión de término general $x_n = \dfrac{\cos 1!}{2} + \dfrac{\cos 2!}{6} + \dfrac{\cos 3!}{12} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ no cumple el criterio de Bolzano-Cauchy.

d) El conjunto A de los valores de la sucesión

$$x_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\cos n}{n^2}\right)^{n^2} & \text{para } n \text{ par;} \\ n(2^{1/n^2} - 1) & \text{para } n \text{ impar;} \end{cases}$$

posee exactamente dos puntos de acumulación.

e) La sucesión de términos

$$x_n = \begin{cases} n(ln(1+n/2) - ln(n/2)) & \text{para } n \text{ par;} \\ \dfrac{\sqrt{\cos 1/n} - \sqrt[3]{\cos 1/n}}{sen^2(1/n)} & \text{para } n \text{ impar;} \end{cases}$$

es convergente.

Ejercicio 2.13.

Demuestra que si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge condicionalmente, siendo $a_n \geq 0$ para toda n natural, entonces, si existe el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, se cumple que $\displaystyle\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Ejercicio 2.14.

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$:

a) Demuestra que la serie converge si existen $\alpha > 0$ y $n_0 \geq 1$, tales que

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha, \quad \forall n \geq n_0.$$

b) Prueba que la serie diverge si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

c) Halla los valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$ diverge.

Ejercicio 2.15.

Para $\varepsilon_n \geq 0$, se define a_n del modo siguiente:

$$2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n}, \qquad a_1 > 0.$$

Demuestra que:

a) La sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

b) $2(a_{n+1} - a_n) \leq \sqrt{\varepsilon_n}$.

c) $\varepsilon_n = 4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$.

d) $\{a_n\}$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge.

Ejercicio 2.16.

a) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge, demuestra que:

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{a_1},$$

donde $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de sumas parciales asociada a $\{a_n\}$.

b) Analiza la veracidad de la afirmación anterior en el caso en que la serie sea de términos de signo arbitrario.

Ejercicio 2.17.

Si $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x y $\alpha \notin \mathbb{Z}$, analiza el carácter de las series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \alpha - \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right\rfloor$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.18.

Expresa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn}$ como un número racional.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.19.

Analiza la monotonía de la sucesión de término general $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.20.

Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes. Justifica en cada caso tu respuesta.

a) La sucesión de término general $x_n = \dfrac{\operatorname{sen} 1}{3^1 + 1} + \dfrac{\operatorname{sen} 2}{3^2 + 1} + \dfrac{\operatorname{sen} 3}{3^3 + 1} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen} n}{3^n + 1}$ es convergente.

b) La sucesión de término general $y_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-5)^{n+1}}$ no cumple la condición de Bolzano-Cauchy.

c) La sucesión de término general $z_n = \dfrac{1}{n^n + 1} + \dfrac{1}{n^n + 2} + \dfrac{1}{n^n + 3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n + n}$ es infinitesimal.

d) La sucesión de término general $a_n = \left(\dfrac{n^3 + n^2 + 1}{n^3 + n^2}\right)^{\frac{4n^2(n+1)}{\sqrt{5}}}$ está acotada superiormente por e^2.

e) La sucesión de término general $x_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}$ es convergente y monótona creciente.

Ejercicio 2.21.

Prueba la convergencia de la sucesión de término general $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n}$.

Ejercicio 2.22.

Demuestra que 2 es el supremo de la sucesión $\{a_n\}$, cuyo término general satisface la relación $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$, con $1 < a_1 < 2$.

Ejercicio 2.23.

Sea $a_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ para toda n natural.

a) Analiza la monotonía de $\{a_n\}$.

b) Demuestra que para toda n natural se cumple $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) Analiza la acotación de $\{a_n\}$.

d) Demuestra que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Ejercicio 2.24.

Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes, justificando en cada caso tu respuesta:

a) El producto de dos sucesiones divergentes es siempre una sucesión divergente.

b) La sucesión de término general $c_n = \dfrac{5^n(n+1)}{n!}$ es monótona decreciente a partir de cierto n.

c) La sucesión de término general $d_n = \left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$ está acotada.

d) El ínfimo de $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ es 3.

e) Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitesimal, entonces $\inf\{\alpha_n\} \leq 0$.

f) Un punto $x \in \mathbb{R}$ es de acumulación de un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ si y solo si existe una sucesión de términos en S que converge a x.

g) La sucesión de término general $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$ es monótona creciente.

h) La sucesión de término general $b_n = \dfrac{6^{n+1}+5^{n+1}}{6^n+5^n}$ es infinitamente grande.

i) Si x es punto de acumulación de $A \cap B$, entonces también lo es de A.

j) Si $\{S_n\}$ es la sucesión de término general $S_n = \sqrt{6+S_{n-1}}$ para $n \geq 2$, con $S_1 = \sqrt{3}$, entonces el supremo de $\{S_n\}$ es 3.

Ejercicio 2.25.

Analiza la convergencia de la sucesión cuyo término general es

$$x_n = \frac{(\cos n\pi)n^3 - (-1)^n(n^3+n^2)}{\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt{n}}.$$

Ejercicio 2.26.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < x_1 < 1$ y $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$ para toda n natural.

a) Analiza la monotonía de $\{x_n\}$.

b) Demuestra que $\{x_n\}$ está acotada.

c) Analiza si existe el límite de $\{x_n\}$ y, en caso afirmativo, calcula su valor.

Ejercicio 2.27.

Dada la sucesión $\{x_n\}$ cuyo término general viene dado por

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}, \quad a > 1, \quad x_0 > 0,$$

prueba que es convergente y determina el valor de su límite.

Ejercicio 2.28.

Analiza la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ cuyos términos generales vienen dados por:

$$x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1};$$

$$y_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \qquad |a_k| < M,\ k = 0,1,\ldots,n \quad |q| < 1;$$

$$z_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 2.29.

La media de los primeros diez términos de una sucesión aritmética es 6 y, la de los primeros veinte, es 16. Halla el valor del elemento que ocupa la posición número dieciocho en la sucesión.

Ejercicio 2.30.

La suma S_n de los primeros n términos de una sucesión geométrica u_n, cuyo primer elemento es $a > 0$, está dada por

$$S_n = \frac{7^n - a_n}{7^n}.$$

a) Halla una expresión para u_n.

b) Halla el primer término y la razón de la sucesión.

c) Considera la suma de los infinitos términos de dicha sucesión geométrica:

  i) Determina los valores de a tales que tal suma exista.

  ii) Halla la suma de los infinitos términos de dicha sucesión cuando esta suma existe.

Ejercicio 2.31.

Con la notación $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, prueba que

a) $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots < e < \cdots < b_n < \cdots < b_3 < b_2 < b_1$.

b) $b_n - a_n \leq \dfrac{4}{n}$.

Ejercicio 2.32.

Demuestra que, para toda n natural,

a) $\dfrac{n}{q^n} \to 0 \ q > 1$.

b) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

c) $\sqrt[n]{a} \to 1, \ a > 0$.

d) $\dfrac{n^k}{q^n} \to 1, \ q > 1, \, k \in \mathbb{N}$.

e) $nq^n \to 0, \ |q| < 1$.

Ejercicio 2.33.

Calcula:

a) $\lim_n \dfrac{\log_a n}{n}$.

b) $\lim_n \dfrac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n},\ |a|<1,\ |b|<1.$

Ejercicio 2.34.

Una sucesión $\{x_n\}$ es de variación acotada si existe un número real c tal que

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c, \quad n\in\mathbb{N}.$$

a) Demuestra que toda sucesión de variación acotada converge.

b) Construye un ejemplo de sucesión convergente que no sea de variación acotada.

Ejercicio 2.35.

Analiza la existencia de supremo e ínfimo de la sucesión de término general

$$a_n=\frac{n-12}{2n^2-n+7},\ n\in\mathbb{N}$$

y di si son máximo y mínimo.

Ejercicio 2.36.

Sea $\{x_n\}$ definida por

$$x_n=1-\frac{2}{2+x_{n-1}}, \quad n\in\mathbb{N},\ n>1$$

con $x_1=1$.

a) Demuestra que $\{x_n\}$ es monótona decreciente.

b) Demuestra que $0<x_n<1$ para toda $n>1$.

c) Justifica la convergencia de $\{x_n\}$ y calcula su límite.

d) Halla ínfimo y supremo de la sucesión, justifica si son o no mínimo y máximo.

Ejercicio 2.37.

Sea la sucesión $\{u_n\}$ definida por

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}(a^3 - u_n^3)$$

con $0 < a < 1$, $n \geq 0$ y $u_0 = 1$.

a) Demuestra que $u_1 < u_2 < a$.

b) Demuestra que, para toda n natural, $u_n < u_{n+1} < a$.

c) Justifica la convergencia de $\{u_n\}$ y calcula su límite.

d) Halla el supremo de la sucesión, justifica si es o no su máximo.

Ejercicio 2.38.

Sea $a_n \geq 0$ y $\{a_n\}$ decreciente. Prueba que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\{na_n\}$ es infinitesimal.

Ejercicio 2.39.

Halla la suma de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

b) $\displaystyle\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$.

Ejercicio 2.40.

Prueba que

a) Si $\{a_n\}$ es tal que $a_n \to 0$ y $\{a_n\}$ monótona decreciente, entonces la subsucesión de sumas parciales $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$ es convergente.

b) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Si para $a_n \neq \pm 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 - a_n^2}$ converge, entonces también lo hace la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Ejercicio 2.41.

Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso tu respuesta:

a) Una sucesión que no posea subsucesiones convergentes puede estar acotada.

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 1.$

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\{b_n\}$ es una subsucesión cualquiera de $\{a_n\}$ diferente de la propia sucesión, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente.

d) Si $x_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \dfrac{1}{3^3+1} + \cdots + \dfrac{1}{3^n+1}$, la sucesión $\{x_n\}$ es divergente.

e) Toda sucesión acotada posee dos subsucesiones que convergen a diferentes límites.

f) Siendo $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ tienen el mismo carácter.

Ejercicio 2.42.

Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso tu respuesta:

a) Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$ es convergente.

Ejercicio 2.43.

De los dos desarrollos siguientes:

(i) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{7}\right) + \cdots = 1,$

(ii) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \dfrac{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}{2} + \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{2} + \dfrac{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}{2} + \cdots = \dfrac{1}{2}.$

elige cuál de sus resultados consideras correcto y explica la razón.

Ejercicio 2.44.

Sea $a_n = \frac{1*4*7*...*(3n-2)}{2*5*8*...*(3n-1)}$ donde n es natural. Si se sabe que para todo n,

$$a_n < \frac{2n}{4n^2 - 1},$$

a) Determina la monotonía de a_n.

b) Prueba que $a_n > \frac{1}{3n}$ para todo n natural.

c) Analiza la convergencia de a_n, de $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Ejercicio 2.45.

Analiza la convergencia de

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen} n}{n-\operatorname{sen} n}$.

I.3. Límite y continuidad

Los que poseen el espíritu de discernimiento saben cuánta diferencia puede mediar entre dos palabras parecidas, según los lugares y las circunstancias que las acompañen.
Blaise Pascal

Atreveos: el progreso solamente se logra así.
Víctor Hugo

El hombre es mortal por sus temores e inmortal por sus deseos.
Pitágoras

La experiencia del mundo no consiste en el número de cosas que se han visto, sino en el número de cosas sobre las que se ha reflexionado con éxito.
Leibniz

La lectura hace al hombre completo, la conversación lo hace ágil, el escribir lo hace preciso.
Bacon

Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1.

Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 - a^3}{x - a - 1}$$

tenga una discontinuidad evitable en el punto

$$x_0 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{\tan(\operatorname{sen}^2 x)}.$$

Ejercicio 3.2.

Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface la condición

$$f(f(x)) = -x,$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces f no puede ser continua.

Ejercicio 3.3.

Si f y g funciones continuas en $[a, b]$ con

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} g(x),$$

prueba que existe $t \in [a, b]$, tal que

$$f^2(t) - 6g(t) = g^2(t) - 6f(t).$$

Ejercicio 3.4.

Analiza el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n^2}.$$

Ejercicio 3.5.

Prueba que existe una vecindad $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tal que para toda $x \in V^*\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se cumple la desigualdad

$$(\operatorname{sen} x)^{\sec^2 x} < \frac{\frac{1}{\sqrt{e}} + 1}{2}.$$

Ejercicio 3.6.

Demuestra que si $f(x)$ es una función continua y estrictamente monótona en el intervalo (a, b) y $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son n puntos cualesquiera de este intervalo, entonces existe $\xi \in [x_1, x_n]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

Ejercicio 3.7.

Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

y existen a y b reales tales que $f(a)f(b) < 0$, demuestra que f alcanza sus extremos.

a) ¿Podría garantizarse la existencia de ambos extremos si no existieran los puntos a y b reales tales que $f(a)f(b) < 0$?

Ejercicio 3.8.

Dados los números reales $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ y $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, demuestra que la ecuación

$$\frac{a_1}{x - \sigma_1} + \frac{a_2}{x - \sigma_2} + \frac{a_3}{x - \sigma_3} = 0$$

posee dos raíces reales comprendidas en los intervalos (σ_1, σ_2), (σ_2, σ_3).

Ejercicio 3.9.

Demuestra que la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ está definida y es acotada en todo $\mathbb{R}$, pero no es uniformemente continua en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Ejercicio 3.10.

Analiza si las siguientes funciones son o no uniformemente continuas en el dominio indicado:

a) $f(x) = \dfrac{x}{8 - x^3}$ en $[-2, 1]$.

b) $f(x) = \ln x$ en $(0, 1)$.

c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $(0, \pi)$.

d) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ en $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en $[0, +\infty)$.

f) $f(x) = \arctan x$ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.11.

Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, la ecuación $f(x) - x^3 = 0$ tiene al menos una raíz real.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.12.

Sea $f(x) = x(\ln(x+2) - \ln x)$ y $g(x) = \dfrac{x^2 + \operatorname{sen} x}{2x^2 + x}$, ¿será $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to \infty$?

Ejercicio 3.13.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Prueba que si la ecuación $f(x) = 0$ posee un número finito de raíces x_i, $i = 1, \ldots, n$, que satisfacen la condición

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b,$$

entonces $f(x)$ mantiene su signo constante en cada intervalo (a, x_1) , (x_1, x_2),. . . ,(x_{n-1}, x_n), (x_n, b).

Ejercicio 3.14.

Demuestra que no existe una función continua e inyectiva en $\mathbb{R}$ que cumpla simultáneamente las condiciones $f(-2) = -1$, $f(7) = \dfrac{1}{2}$ y $f(5) = \dfrac{3}{4}$.

Ejercicio 3.15.

Prueba que existe una vecindad $V(1)$ tal que para toda x de $V(1)$ se cumple la desigualdad
$$\frac{(x-1)^2x^2+1}{x^2+1}\cos(\pi x) > -1.$$

Ejercicio 3.16.

Sean n un número natural par y
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$
donde $a_i \in \mathbb{R}$ para toda $i = 0, \ldots, n$ y $a_n < 0$. Demuestra que la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos dos raíces reales.

Ejercicio 3.17.

Demuestra que si f es una función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todas las x, y reales y además es continua en $x = 0$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.18.

Sea φ una función continua y tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x^n} = 0$.

a) Demuestra que para n impar existe un número x tal que $\varphi(x) + x^n = 0$.

b) Demuestra que si n es par, existe un número c tal que para toda x se cumple $c^n + \varphi(c) \leq x^n + \varphi(x)$.

Ejercicio 3.19.

Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{1-\cos 2\pi x}}{x} & x < 0 \\[2ex] (1+\operatorname{sen} x)^{\ln x \cot x} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{x^3+x^2+5x}{x^2+3} & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso tu respuesta:

a) El Teorema de Bolzano permite asegurar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $(-1, 1)$.

b) Aplicando el Teorema de Weierstrass se puede afirmar la existencia de un elemento s en $[0, 2\pi]$, tal que $f(s) = \max_{x\in[0,2\pi]} f(x)$.

c) Si $x_n = f(n)$ para $n \geq 2$, es posible extraer de $\{x_n\}$ una subsucesión acotada.

I.4. Cálculo diferencial

La educación debería consistir en ayudar a cada uno a descubrir su singularidad personal, a desarrollar esa cualidad y mostrarle cómo compartirla.
LEO BUSCAGLIA

Las matemáticas tienen su progresión geométrica, que acelera las cantidades y las sube a maravillosa altura: la naturaleza humana tiene la educación.
JOSÉ MARTÍ

La diferencia entre la palabra casi correcta y la correcta es como la diferencia entre la luciérnaga y el relámpago.
MARK TWAIN

La sabiduría suprema es tener sueños bastante grandes como para no perderlos de vista mientras se persiguen.
WILLIAM FAULKNER

Un matemático que no es también algo de poeta, nunca será un matemático completo.
KARL WEIERSTRASS

Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1.

Dada una función f diferenciable que no se anula sobre todo $[a,b]$, demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}.$$

Ejercicio 4.2.

Demuestra que si la función f es diferenciable sobre el segmento $[a,b]$ con $ab > 0$, entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que se cumple

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Ejercicio 4.3.

Prueba que:

a) Si $f \in D[0,+\infty)$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

b) Si $f \in D[0,+\infty)$, existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Ejercicio 4.4.

Demuestra que si f y g son dos funciones diferenciables en el conjunto de los números reales que satisfacen $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, entonces entre dos raíces de $f(x) = 0$ hay una raíz de $g(x) = 0$.

Ejercicio 4.5.

Resuelve los siguientes problemas de extremos:

a) Halla una ecuación de la recta que pasa por el punto $Q(3,5)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

b) Un hombre se encuentra sobre un bote de remos en un punto P, situado a una distancia de 5 km de un punto A de la costa (rectilínea) y desea llegar a otro punto B de la costa, a 6 km de A, en el menor tiempo posible. Determina el camino que debe seguir, sabiendo que puede remar a una velocidad de 2 km/h y andar a una velocidad de 4 km/h.

c) A las 9 de la mañana un barco B se encontraba a 65 m.m (millas marítimas) al este de otro barco A. El barco B viajaba hacia el oeste a una velocidad de 10 m.m/h y A viajaba hacia el sur a una velocidad de 15 m.m/h, ¿cuándo se encontrarán a una distancia mínima y cuál es esa distancia?

d) Un terreno rectangular de 216 m^2 de área se desea encerrar con una cerca dividiéndolo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo exterior que requieren la menor cantidad total de cerca? ¿Cuántos metros de cerca serán necesarios para encerrar y dividir el terreno?

Ejercicio 4.6.

a) Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > f(x)$ para todo valor real de x y que satisface $f(x_0) = 0$, se cumple que $f(x) > 0$ para toda $x > x_0$.

b) Demuestra que si para toda x real se cumple $f'(x) > g'(x)$ y $f(a) = g(a)$, entonces $f(x) > g(x)$ para toda $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para toda $x < a$.

c) ¿Son válidas las conclusiones del inciso anterior sin la hipótesis $f(a) = g(a)$? Argumenta tu respuesta.

d) Demuestra que si $f(a) = g(a)$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para toda $k = 1, \ldots, n-1$ y para toda $x > a$ se cumple que $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$, entonces $f(x) > g(x)$ para toda $x > a$.

e) Demuestra que para toda $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ se cumple que

$$x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Ejercicio 4.7.

Demuestra las desigualdades siguientes:

a) $e^x \geq 1 + x$,

b) $e^x \geq ex$,

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) < 1$ para toda $x \in (0,1]$,

d) Cualesquiera sean x_1, x_2 reales tales que $0 < x_1 \leq x_2$, se cumple que

$$5\ln\left(\frac{3x_1+2x_2}{5}\right) - 3\ln(x_1) \geq 2\ln(x_2),$$

e) $c^\alpha + d^\beta \leq \alpha c + \beta d + 1$, donde α, β, c, d son reales tales que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $c > 0$, $d > 0$, $c \neq 1$, $d \neq 1$.

Ejercicio 4.8.

Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$,

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$, si $f''(a)$ existe.

Ejercicio 4.9.

Analiza el comportamiento y traza los gráficos de las funciones siguientes:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$,

b) $y = (x-1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

Ejercicio 4.10.

Sea $u(x)$, $x \in [0,1]$, una función con valores en $\mathbb{R}$, dos veces diferenciable, que satisface la ecuación $u''(x) = e^x u(x)$ para toda $x \in [0,1]$.

a) Prueba que si $0 < x_0 < 1$, $u(x)$ no puede tener un máximo local positivo ni un mínimo local negativo en x_0.

b) Prueba que si $u(0) = u(1) = 0$, entonces $u(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$.

Ejercicio 4.11.

Indica para qué valores de a son crecientes las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^3 - ax$.

b) $f(x) = ax - \operatorname{sen} x$.

c) $f(x) = ax + 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.

Ejercicio 4.12.

Halla todas las soluciones reales de la ecuación $5^x + 2^x = 4^x + 3^x$.

Ejercicio 4.13.

Sin calcular, responde ¿cuál número es mayor, π^3 o 3^π?

Ejercicio 4.14.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ para toda x en $(0,1)$. Prueba que existe un número c en $(0,1)$ tal que

$$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Ejercicio 4.15.

¿Cuántos ceros sobre la recta real puede tener a lo sumo la función definida por $f(x) = 2^x - 1 - x^2$?

Ejercicio 4.16.

Si f es una función continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y satisface la condición

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2,$$

prueba que la ecuación $f'(x)f(x) = x$ tiene al menos una raíz en (a,b).

Ejercicio 4.17.

Siendo k una constante real y $y(t)$ una función positiva diferenciable que cumple

$$y'(t) \leq ky(t)$$

para toda $t \geq 0$, demuestra que

$$y(t) \leq e^{kt}y(0)$$

para toda $t \geq 0$.

Ejercicio 4.18.

Prueba que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $[0,1]$ que satisface las condiciones $f(0) = 0$ y $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ para toda x en $[0,1]$, f es idénticamente nula en $[0,1]$.

Ejercicio 4.19.

Prueba que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ están situados sobre la curva cuya ecuación es $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

Ejercicio 4.20.

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua con $f(0) = f(1) = 0$, dos veces derivable para x en $(0,1)$ y tal que $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$, demuestra que $f(x) \leq 0$ para toda x en $[0,1]$.

Ejercicio 4.21.

Prueba que

a) $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ es válida para toda x real.

b) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{2x} > 1$ para toda $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio 4.22.

a) Halla todos los pares de enteros a y b que satisfacen $0 < a < b$ y $a^b = b^a$.

b) Si $x \in \mathbb{R}_+$, ¿para qué valores de a se cumple que

$$x^a \leq a^x?$$

c) Demuestra que, para toda $x \in (0, e)$, se tiene que

$$(e + x)^{(e-x)} > (e - x)^{(e+x)}.$$

Ejercicio 4.23.

Demuestra que, para toda $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se cumple la desigualdad de Huygens:

$$2 \operatorname{sen} x + \tan x \geq 3x.$$

Ejercicio 4.24.

Demuestra que si $f'(x)$ toma dos valores cualesquiera, toma todos los valores intermedios.

Ejercicio 4.25.

Calcula

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+\arctan x^4)}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\tan^4 x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - (\operatorname{sen} x)^x}{\tan^3 x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}}{x^3 \ln x}$.

Ejercicio 4.26.

Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso tu respuesta:

a) Si f es una función derivable en $x = a$, también es continua en $x = a$.

b) Si f es una función continua en $x = a$, posee, al menos, derivadas laterales en $x = a$.

c) Si f es una función derivable en $x = a$, f' es continua en $x = a$.

d) Si f es una función dos veces derivable en $x = a$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Ejercicio 4.27.

Sean p una función continua en $[a, b]$ y $\lambda > 0$ fija. Demuestra, para $x \in (a, b)$, que la función nula es la única función f que satisface las condiciones

$$f''(x) + p(x)f'(x) - \lambda f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(a) = f(b).$$

Ejercicio 4.28.

Sean f y g funciones diferenciables y no constantes en $\mathbb{R}$, tales que para todas las $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

y

$$f'(0) = 0.$$

Prueba que, para toda $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$.

Ejercicio 4.29.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que no existe x para el que se cumpla que $f(x) = f'(x)$, prueba que el conjunto $\{x : f(x) = 0\}$ es finito.

Ejercicio 4.30.

Sea f una función diferenciable, tal que

$$f(x) + f'(x) \leq 1 \quad \text{y} \quad f(0) = 0.$$

¿Cuál es el valor máximo que puede tener $f(1)$? ¿Existirá alguna función para la cual este valor se alcanza?

Ejercicio 4.31.

Sea f una función sobre $[a,b]$ diferenciable en $c \in [a,b]$. Sea $L(x)$ la recta tangente a f en c. Prueba que $L(x)$ es la única función lineal con la propiedad

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - L(x)}{x - c} = 0.$$

Ejercicio 4.32.

a) Demuestra que si la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es tres veces derivable en el intervalo $[-1,1]$ y cumple que $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = 0$, existen $\alpha \in (-1,0)$ y $\beta \in (0,1)$ tales que $f'''(\alpha) + f'''(\beta) = 6$.

b) Analiza la veracidad de la afirmación anterior si la función es tres veces derivable en el intervalo $(-1,1)$.

Ejercicio 4.33.

¿Cuál es, en el intervalo $[1,5]$, la recta tangente a la curva

$$y = 2x\ln x + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} - 2x$$

que tiene menor pendiente? ¿Cuál sería la de mayor pendiente?

Ejercicio 4.34.

Sabiendo que x es un punto fijo de f si y solo si $f(x) = x$, demuestra que

a) si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua, existe $c \in [0,1]$ que es punto fijo de f;

b) si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y $f'(x) \neq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$; f tiene, a lo sumo, un punto fijo.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.35.

a) Prueba que para toda $n \geq 2$, natural, se cumple

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n\ln n}.$$

b) ¿Será convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln}?$$

Ejercicio 4.36.

Demuestra que $2\arctan(e^x) = \arctan(\operatorname{senh} x) + \dfrac{\pi}{2}$ para todo valor real de x.

Ejercicio 4.37.

Demuestra que la ecuación $x^2 = x\operatorname{sen} x + \cos x$ posee exactamente dos soluciones reales.

Ejercicio 4.38.

Sea f una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

a) Si $2 \leq f'(x)$ para toda x en $[1,4]$ y $f(1) = 10$ ¿cuán pequeño puede ser el valor de $f(4)$?

b) Si $3 \leq f'(x) \leq 5$ para toda x real, demuestra que

$$18 \leq f(8) - f(2) \leq 30.$$

Ejercicio 4.39.

Prueba que la ecuación $e^x - 1 = ln(1+x)$ no puede poseer tres raíces reales.

Ejercicio 4.40.

a) Si $f(x) = 2\arctan x + \operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{1+x^2}$, prueba que $f(x) = \pi$ para $x \geq 1$ y $f(x) = -\pi$ para $x \leq -1$.

b) ¿Qué puede afirmarse sobre tal función si $-1 < x < 1$?

Ejercicio 4.41.

Si $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ está definida para $0 < x < \infty$, demuestra que f es estrictamente creciente en ese intervalo.

Ejercicio 4.42.

Dada la función $f(x) = \dfrac{a + be^x}{ae^x + b}$, donde $0 < b < a$, analiza la existencia de extremos locales y absolutos de f, así como de puntos de inflexión.

Ejercicio 4.43.

Demuestra que si f es una función derivable en $[a,b]$ tal que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ para toda $x \in [a,b]$, la función $g(x) = x - f(x)$ es inyectiva en $[a,b]$.

Ejercicio 4.44.

Sea f diferenciable en $[1,4]$ tal que $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ y $f(4) = -2$. Prueba que la derivada de f se anula en algún punto del intervalo $[1,4]$.

Ejercicio 4.45.

Prueba que la ecuación $x^2 = 18 \ln x$ posee una única solución en el intervalo $[1, e]$.

Ejercicio 4.46.

Analiza la validez de la afirmación siguiente: "La ecuación $3x - 2 + \cos \dfrac{\pi x}{2} = 0$ posee exactamente dos raíces reales".

Ejercicio 4.47.

Demuestra que

a) $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$, $x \geq 0$.

b) $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $x > -1$.

Ejercicio 4.48.

Demuestra que si f es una función impar y derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces para todo número positivo M, existe un número c en $(-M, M)$ tal que se cumple que $Mf'(c) = f(M)$.

Ejercicio 4.49.

Demuestra que $g'(0) = h'(0)$ si

$$g(t) = f(\operatorname{sen} t) + e^{f(t)+1} \quad \text{y} \quad h(t) = \ln(2 + f(t)) + f(\ln(1+t)),$$

donde $f(t)$ es una función real derivable con $f(0) = -1$ y $f'(0) = 1$.

Ejercicio 4.50.

Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ con $f(1) = 0$, la recta tangente a la curva

$$x^2 - f^2(x) + \operatorname{sen}(xf(x)) - e^{f(x)} = 2$$

en el punto $(1, 0)$, es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x$.

Ejercicio 4.51.

Halla, en el punto $(0,1)$, la ecuación de la recta tangente a la curva

$$e^{xy} + \ln(y^2) + e^y = 1 + e.$$

Ejercicio 4.52.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, dos veces derivable en (a,b) y tal que $f''(0) \neq 0$, demuestra que f posee un extremo local en $x = 0$.

Ejercicio 4.53.

Sea $f \in C[a,b]$ dos veces derivable en (a,b) y tal que el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta la gráfica de $y = f(x)$ en un punto $(c, f(c))$ con $a < c < b$, prueba que existe $d \in (a,b)$ en el cual f'' se anula.

Ejercicio 4.54.

Demuestra que si f es una función derivable en $[a,b]$, que no es constante en tal intervalo y que además satisface la condición $f(a) - f(b) = 0$, pueden encontrarse dos elementos c y d en (a,b), tales que $f'(c)f'(d) < 0$.

Ejercicio 4.55.

Prueba que si una función h es convexa hacia arriba (abajo) en (a,b), entonces satisface la desigualdad de Jensen:

$$h\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{h(a)+h(b)+h(c)}{3}.$$

Aplica el resultado anterior para demostrar que se cumple:

a) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ si α, β, γ son los ángulos interiores de un triángulo.

b) $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \dfrac{3}{2}$ si α, β, γ son los ángulos interiores (todos agudos) de un triángulo.

Ejercicio 4.56.

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable y tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = l$.

a) Demuestra que si $l \in \mathbb{R}$, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

b) Demuestra que el resultado del inciso anterior sigue siendo válido si se cumple $l = \pm\infty$.

Ejercicio 4.57.

Demuestra que $y = x\text{arcsen}x$ posee una única raíz doble en $x = 0$.

Ejercicio 4.58.

Si f es una función derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, calcula la primera y la segunda derivada de g si se tiene que:

a) $g(x) = f(x^2)$.

b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(cos^2 x)$.

c) $g(x) = f(f(x))$.

d) $g(x) = f(x)e^{f(x)}$.

e) $g(x) = \ln(f(x^2 + 1))$.

f) $g(x) = \ln^2 f(x^2 + 1)$.

g) $g(x) = \cos(f(x^2)) + (f(x))^2 + 1$.

Ejercicio 4.59.

La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define la función implícita $y = y(x)$.

a) Suponiendo que existe la derivada y', demuestra, sin resolver la ecuación respecto a y, que y' satisface la ecuación $x^2 + y^2y' = 0$.

b) Suponiendo que existe la derivada segunda, demuestra que, siempre que $y \neq 0$, se verifica que $y'' = -2xy^{-2} - 2x^4y^{-5}$.

Ejercicio 4.60.

La ecuación $x \operatorname{sen}(xy) + 2x^2 = 0$, define la función implícita $y = y(x)$ derivable. Demuestra que y' satisface la ecuación

$$y'x^2 \cos(xy) + xy \cos(xy) + \operatorname{sen}(xy) + 4x = 0.$$

Ejercicio 4.61.

Demuestra que las curvas cuyas ecuaciones son $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$, se cortan en el punto $(1, 1)$ y que, en este punto, sus tangentes son perpendiculares.

Ejercicio 4.62.

Analiza la convexidad de los gráficos de las funciones siguientes:

a) $y = x^a$, $x > 0$.

b) $y = \arctan x$.

c) $y = (1 + x^2)e^x$.

d) $y = x - \operatorname{sen} x$.

e) $y = x^2 \ln x$.

f) $y = e^{\arctan x}$.

g) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Ejercicio 4.63.

Determina si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) Si las funciones $f(x)$, $g(x)$ tienen un máximo en $x = a$, $f(x) + g(x)$ tiene un máximo en $x = a$.

b) Si las funciones $f(x)$, $g(x)$ tienen un máximo en $x = a$, $f(x)g(x)$ tiene un máximo en $x = a$.

c) Si las funciones $f(x)$, $g(x)$ tienen un punto de inflexión en $x = a$, $f(x) + g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

d) Si las funciones $f(x)$, $g(x)$ tienen un punto de inflexión en $x = a$, $f(x)g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Ejercicio 4.64.

Demuestra que la curva $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ posee tres puntos de inflexión situados sobre una misma recta.

Ejercicio 4.65.

Construye el gráfico aproximado de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 2x^2$.

b) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$.

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

d) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Ejercicio 4.66.

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de texto, con márgenes superior e inferior de 1,5 pulgadas y márgenes laterales de 1 pulgada, ¿qué dimensiones de la página requieren la cantidad mínima de papel?

Ejercicio 4.67.

Dos postes verticales PQ y ST se aseguran por medio de un cable PRS extendido desde el extremo superior del primer poste hasta un punto R sobre el piso y a continuación hasta el extremo superior del segundo poste. Demuestra que la longitud más corta de ese cable se alcanza cuando $\angle PRQ = \angle SRT$.

Ejercicio 4.68.

Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical, de modo que su borde inferior queda a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador y el borde superior a una distancia b ¿Cuán lejos de la pared debe situarse el observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, ¿a qué distancia de la pared debe hallarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el mínimo?)

Ejercicio 4.69.

Con 4 pies de alambre se desea construir un círculo y un cuadrado, ¿cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambos encierren el área máxima?

Ejercicio 4.70.

Demuestra que

a) $2\text{arcsen} x = \arccos(1 - 2x^2)$ para toda $x \geq 0$.

b) $\text{arcsen}\dfrac{x-1}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$ para los valores reales de su dominio natural de definición.

c) $\ln(1+x) \geq \dfrac{x}{x+1}$ para $x > -1$.

d) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

e) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para todas las x, y reales.

f) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

g) $x^\alpha - \alpha x \le 1 - \alpha$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

h) $\cosh x \ge 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) $|\arctan x| \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

j) $|\operatorname{sen} x| \ge \dfrac{2}{\pi} x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

I.5. Cálculo integral

Las Matemáticas tienen no solo verdad, sino belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de una escultura, sublimemente pura y capaz de una perfección severa, como solo el mayor arte puede mostrar.
BERTRAND RUSSELL

Para Tales la cuestión primaria no era qué sabemos, sino cómo lo sabemos.
ARISTÓTELES

Después de la primera mentira, toda verdad se convierte en duda.
MARIO BENEDETTI

La alegría de ver y entender es el más perfecto don de la naturaleza.
ALBERT EINSTEIN

En cada grano de arena hay un derrumbamiento de montaña.
DULCE MARÍA LOYNAZ

Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1.

Sea f definida sobre $[0,1]$ continua, no negativa y tal que

$$f^2(t) \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds$$

para toda $t \in [0,1]$. Prueba que, para todo $t \in [0,1]$,

$$f(t) \leq 1 + t.$$

Ejercicio 5.2.

Halla el conjunto de primitivas de la función

$$y = \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

Ejercicio 5.3.

Calcula:

a) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$.

b) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right)$, $\alpha > -1$.

c) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

d) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

e) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)$.

f) $\displaystyle \lim_n \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+2^2}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)\right)$.

g) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

Ejercicio 5.4.

Calcula $\displaystyle\int_0^2 \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor \, \mathrm{d}x$.

Ejercicio 5.5.

Calcula el valor del área de la figura limitada por la curva $y = \operatorname{sen}^3 3x$, los ejes coordenados y la recta $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ejercicio 5.6.

Calcula el área de la figura limitada por la curva $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, el eje de las abscisas y por dos rectas paralelas al eje de las ordenadas que pasan por los puntos extremos de la función.

Ejercicio 5.7.

Halla un par de valores de a y b para los cuales

a) $\displaystyle\int_0^1 (ax + b)(x^2 + 3x + 2)^{-2} dx = \frac{3}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{bx - \operatorname{sen} x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$.

Ejercicio 5.8.

Prueba que si f es una función real definida en $[a, b]$, tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces se cumple que

$$f(a)(b - a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Ejercicio 5.9.

Demuestra que si $f'(x) = cf(x)$ para todo valor real de x, siendo c constante, entonces existe algún número real k tal que $f(x) = ke^{cx}$.

Ejercicio 5.10.

Halla

a) el área de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = (1 - x^2)^3$.

b) el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

Ejercicio 5.11.

Calcula la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto (a, b), siendo $a > 0$ y tal que la recta tangente a la curva en (a, b) sea paralela a la recta $y = \dfrac{1}{2}x + 5$.

Ejercicio 5.12.

Demuestra que la función que permite medir la longitud de arco de la curva $y = x^2 - \dfrac{\ln x}{8}$, si se considera $P(1, 1)$ como punto inicial, tiene la forma

$$s(x) = x^2 + \frac{\ln x}{8} - 1.$$

Ejercicio 5.13.

Halla:

a) El área de la figura limitada por la curva $y = \ln(1 - x^2)$, el eje de las abscisas y la recta $x = \dfrac{1}{2}$.

b) La longitud de arco de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ siendo $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Ejercicio 5.14.

Halla:

a) Un esbozo del gráfico de la curva $y = xe^{-x}$.

b) El área del trapecio curvilíneo limitado por la curva del inciso anterior, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje de las abscisas.

Ejercicio 5.15.

Calcula:

a) El área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de las abscisas.

b) La longitud de arco de la curva $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3 - 1}dt$ para $1 \leq x \leq 4$.

c) La longitud de arco de la curva $24xy - 48 = x^4$ desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

d) El volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje de las abscisas del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = \text{arcsen} x$ y cuya base es el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 5.16.

Halla el área de la figura limitada por la curva $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta $x = 4$.

Ejercicio 5.17.

Halla una expresión para la función $y = f(x)$ definida y continua para todo número real x y determina el valor de la constante c si se satisface la igualdad

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + c,$$

.

Ejercicio 5.18.

Sea f definida para toda x real en la forma

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2} dt.$$

Halla un polinomio $P(x)$ de segundo grado, tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

Ejercicio 5.19.

Dado que $0 \le a \le 1$, determina, si existen, todas las funciones f derivables y no negativas en $[0, 1]$ que satisfacen las tres condiciones

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \qquad \int_0^1 xf(x)dx = a, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Ejercicio 5.20.

Halla la derivada de:

a) $\displaystyle\int_{1/x}^{1/\sqrt{x}} \cos t^2 \, \mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_x^{2x} \ln^2 t \, \mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle\int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} k}{k}\,\mathrm{d}k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}.$

Ejercicio 5.21.

a) Dado que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ no cambia de signo en $[a,b]$ y g es monótona en $[a,b]$, demuestra que existe $c \in [a,b]$ de modo que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt + g(b)\int_c^b f(t)dt.$$

b) Prueba que la relación anterior se mantiene si, en lugar de las hipótesis del inciso anterior, se asume $g(t)$ es creciente sobre $[a,b]$ y que $f(t)$ es integrable sobre $[a,b]$.

Ejercicio 5.22.

Sea $F(x)$ la primitiva de $f(x) = x^x(\ln x + 1)$ tal que $F(1) = 1$. Calcula

$$\lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5\operatorname{arcsen}(x-1)^2}.$$

Ejercicio 5.23.

Prueba las desigualdades:

a) $\displaystyle 0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{3+x^2}}dx < \frac{1}{8},$ b) $\displaystyle \frac{1}{5\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \leq \ln 3.$

Ejercicio 5.24.

Analiza la existencia de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\sqrt{h}\,dh}{x^3}.$$

Ejercicio 5.25.

Prueba que

a) $\displaystyle x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \frac{x^3}{6}$ para toda x en $[0,1]$.

b) $\dfrac{e}{2} - \dfrac{2}{3} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{x^2} \arctan x dx \leq \dfrac{e}{2} - \dfrac{7}{12}$.

Ejercicio 5.26.

Prueba que para toda x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arccos}\sqrt{\alpha}d\alpha + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 5.27.

Dada la función $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$, estudia la existencia de:

a) Extremos locales y absolutos,

b) Puntos de inflexión.

Ejercicio 5.28.

Dada $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 2]$, derivable en $(0, 2)$, para la que existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para toda x en $(0, 2)$, demuestra que se verifica la desigualdad

$$e^{-2k} \leq \int_0^1 e^{-f(x)}dx \int_1^2 e^{f(x)}dx \leq e^{2k}.$$

Ejercicio 5.29.

Dada la función $f(t)$ derivable en $[0, 1]$, tal que $0 < f'(t) \leq 1$ y $f(0) = 0$, demuestra que para toda $x \in [0, 1]$ se cumple que

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \geq \int_0^x (f(t))^3 dt.$$

Ejercicio 5.30.

Sean a, b reales con $a < b$ y sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que f es creciente y $0 < g(x) < 1$ para toda $x \in [a, b]$. Se definen las funciones $h, k, l : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt, \qquad k(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt, \qquad l(x) = \int_a^{a+h(x)} f(t)dt.$$

a) Demuestra que h es creciente y que $h(x) \leq x - a$ para toda $x \in [a, b]$.

b) Demuestra que $l'(x) \leq k'(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

Ejercicio 5.31.

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable que cumple $f'(t) > 0$ para toda t real y para la cual $f(t) = 0$ si y solo si $t = 0$, estudia la existencia de extremos de la función

$$F(x) = \int_0^{x^2-5x+6} f(t)dt.$$

Ejercicio 5.32.

Sea $f(x)$ una función con $f(1) = 1$ y

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

para toda $x \geq 1$. Demuestra que existe $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 5.33.

Sea la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1} dt$$

para $x \in [0, 1]$.

a) Demuestra que $f \in C^1(0, 1)$ y que existe la inversa f^{-1} continua en $[0, f(1)]$.

b) Demuestra que la ecuación $f(x) + x^2 = 1$ tiene una única raíz en $[0, 1]$.

Ejercicio 5.34.

Sea $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ una función continua. Demuestra que la función $\varphi(x) : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt},$$

es monótona creciente sobre $(0;+\infty)$.

Ejercicio 5.35.

a) Encuentra la curva $y = f(x)$, definida para los valores $x \geq 0$, que une los puntos $A(0,1)$ y $M(x, f(x))$ tales que la longitud del arco $\widehat{AM}$ (para toda M) es dos veces la pendiente de la tangente a la curva en M.

b) Halla una función $y = f(x)$ con $f(x) > 0$, $f(x)$ derivable para todo valor real de x, y tal que para cualquier valor $a > 0$ se cumpla que el volumen del cuerpo obtenido por la rotación de la figura limitada por la curva, el eje de las abscisas, el de las ordenadas y la recta $x = a$ sea igual a $\delta\pi a f^2(a)$.

Ejercicio 5.36.

Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$, dos veces derivable en $x = 0$, y tal que $g(0) = 0$. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x \neq 0; \\ g'(0), & x = 0. \end{cases}$$

a) Analiza la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

b) ¿Es f de clase C^1 en $\mathbb{R}$? ¿Por qué?

Ejercicio 5.37.

Sea f una función dos veces diferenciable, tal que $f''(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$. Halla todos los números reales c en $[a, b]$, tales que el área entre la curva $y = f(x)$, la recta tangente a esta curva en el punto $(c, f(c))$ y las rectas $x = a$, $x = b$ sea mínima.

Ejercicio 5.38.

Halla todas las funciones $f(t)$ que satisfagan

$$f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(t)dt.$$

Ejercicio 5.39.

¿Para qué valor de $a > 1$ es mínima la integral

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x} \ln \frac{x-1}{32}\, \mathrm{d}x?$$

Ejercicio 5.40.

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:

- $f \in \mathbf{C}^1[0,1]$,
- $f(0) = f(1) = 0$,
- f' es decreciente.

Prueba que la longitud de arco de f no excede de 3.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.41.

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$. Demuestra que para toda $\gamma \in (0,1)$ existe $x \in (a,b)$ tal que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \gamma \int_a^b f(t)dt$.

Ejercicio 5.42.

Suponga que f es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Prueba que existe $\varepsilon \in [0,1]$ tal que se cumple que $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3} f(\varepsilon)$.

Ejercicio 5.43.

Demuestra que si $\mu_{[a,b]}$ representa el valor promedio de la función f continua en un intervalo $[a,b]$ y $a < c < b$,

$$\mu_{[a,b]} = \frac{c-a}{b-a}\mu_{[a,c]} + \frac{b-c}{b-a}\mu_{[c,b]}$$

Ejercicio 5.44.

Halla el valor de:

a) La segunda derivada de la función

$$y(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^3}$$

en el punto $x = 1$.

b) La integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x+1} dx$$

en función de a, si

$$a = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx.$$

Ejercicio 5.45.

Determina el área de la figura limitada por las funciones $y = x^2 + 2$ e $y = f(x)$ sabiendo que esta última satisface

$$f(x) = \frac{2x(x^2+2)}{x^2+1}, \qquad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \pi - \frac{4}{3} + \ln 4.$$

Ejercicio 5.46.

Demuestra que si f es una función continua y no negativa en $[a, b]$ y satisface que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, $f \equiv 0$ en $[a, b]$.

Ejercicio 5.47.

a) Demuestra que para toda $x > -1$ se cumple $e^x \geq 1 + \ln(1 + x)$.

b) Construye el gráfico de la función $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1 + \ln(1+t)} dt$$

analizando previamente dominio, continuidad, interceptos con los ejes, monotonía y extremos, existencia de asíntotas, intervalos de convexidad y puntos de inflexión.

c) Analiza el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nF\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ejercicio 5.48.

Construye un esbozo del gráfico de la función $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t)} dt$$

Ejercicio 5.49.

Calcula el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \arctan x$, $y + x^2 = 0$ y la recta $x = 1$.

Ejercicio 5.50.

Trace el esbozo del gráfico de la función que satisfaga las siguientes propiedades:

a) $f'''(x) = \operatorname{sen} x$,

b) El punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es para la curva $y = f(x)$ un punto de inflexión con tangente paralela al eje OX.

Ejercicio 5.51.

Construye el gráfico de la función f que satisfaga $f(x) = \int (x-1)e^{-x} dx$ y $f(1) = \frac{1}{e}$.

Ejercicio 5.52.

Halla el volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje OX de la figura limitada por la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, las rectas $y = x$, $x = 3$ y el eje OX.

Parte II.

Soluciones

II.1. Preliminares

***¿Cómo es que hay personas que no comprenden las matemáticas?
Si las matemáticas no invocan más que las leyes de la lógica aceptadas por todos los espíritus centrados; si su evidencia está fundada sobre los principios comunes a todos los hombres y que ninguno podría negar sin estar loco, ¿cómo existen tantas personas refractarias a ellas?
Que no todo el mundo tenga capacidad de inventiva no tiene nada de particular.
Que no todos puedan retener una demostración que hayan aprendido anteriormente, pase aún, pero que no todos puedan comprender un razonamiento matemático, cuando se expone, he aquí lo que al reflexionar parece sorprendente.
Hay más aún.
¿Cómo es posible el error en matemáticas?
Una inteligencia sana no debe cometer una falta de lógica y, sin embargo, hay espíritus muy finos que no tropezarán en un razonamiento muy corto, tal como los que deben efectuar en los actos comunes de la vida, incapaces de seguir o de repetir sin equivocarse las demostraciones de matemáticas, que si bien son más largas, no son después de todo más que una acumulación de pequeños razonamientos, análogos a los que se hacen con tanta facilidad todos los días.***

Poincaré

Ejercicio 1.1.

a) Vía 1
Se debe calcular S tal que

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n.$$

Multiplicando la expresión anterior por r se obtiene

$$rS = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}.$$

Restando ahora $rS - S$ se llega a

$$rS - S = r^{n+1} - 1,$$

de donde, como $r \neq 1$ se concluye que

$$S = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Vía 2
Probemos ahora este resultado mediante inducción completa.

Inicio de inducción
Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{r^{1+1} - 1}{r - 1} &= \frac{r^2 - 1}{r - 1}, \\ &= 1 + r, \end{aligned}$$

con lo cual se cumple el inicio de inducción.

Hipótesis de inducción
Supón que para un natural k se cumple

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}.$$

Tesis de inducción
Se desea demostrar que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{k+1} = \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}.$$

Demostración
Nota que a partir de la hipótesis de inducción se obtiene

$$1+r+r^2+\cdots+r^k+r^{k+1}=\frac{r^{k+1}-1}{r-1}+r^{k+1}=\frac{r^{k+2}-1}{r-1},$$

que no es más que lo que se quería probar.

Vía 3
Del álgebra elemental ya conoces que

$$r^{n+1}-1=(r-1)(1+r+r^2+\cdots+r^n),$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{r^{n+1}-1}{r-1} &= \frac{(r-1)(1+r+r^2+\cdots+r^n)}{r-1},\\ &= 1+r+r^2+\cdots+r^n.\end{aligned}$$

b) Vía 1
Inicio de inducción
Para $n=1$ se tiene que

$$(1+1)!-1=1.$$

Hipótesis de inducción
Supón que para un entero k se cumple que

$$1(1!)+2(2!)+\cdots+k(k!)=(k+1)!-1.$$

Tesis de inducción
Se desea demostrar que la proposición se cumple para $k+1$; es decir, que

$$1(1!)+2(2!)+\cdots+k(k!)+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1.$$

Demostración
Aplicando la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}1(1!)+\cdots+k(k!)+(k+1)(k+1)! &= (k+1)!-1+(k+1)(k+1)!\\ &= (k+1+1)(k+1)!-1,\\ &= (k+2)!-1,\end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición.

Vía 2
Nota que se trata de calcular la expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!),$$

pero fácilmente se comprueba que

$$k(k!) = (k+1)! - k!,$$

de donde se obtiene que la suma que se desea hallar es resultado también de la suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

c) Vía 1
Inicio de inducción
Para $n = 1$ se cumple que

$$1 + x = 1 + x.$$

Hipótesis de inducción
Supón que para un número natural k se cumple que

$$1 + kx \leq (1+x)^k.$$

Tesis de inducción
Se desea demostrar que

$$1 + (k+1)x \leq (1+x)^{k+1}.$$

Demostración
Empleando la hipótesis de inducción y multiplicando en ambos miembros por $(x+1) \geq 0$ (observa que es válido a partir de la hipótesis $x \geq -1$) se obtiene que

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geq (1+kx)(1+x)\\ &\geq 1 + (k+1)x + kx^2\\ &\geq 1 + (k+1)x\end{aligned}$$

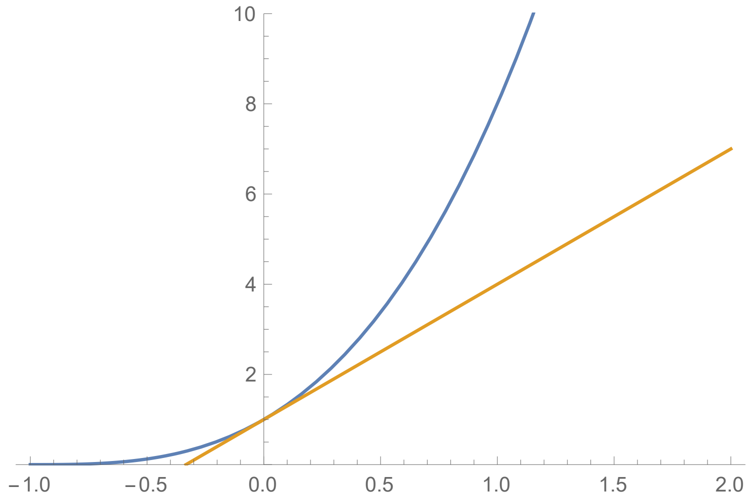


Figura II.1.1.: Representación de las funciones $(1+x)^3$ y $1+3x$

con lo cual queda demostrada la proposición.

Vía 2
Considera la función

$$f(x) = (1+x)^\alpha,\ x \geq -1,\ \alpha \in \mathbb{N}.$$

Derivando dos veces respecto a x se obtiene que

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Nota que, para $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, la desigualdad que se desea probar es evidente, en tanto que $f'' \geq 0$ para $x \geq -1$ y $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$, por lo que f es convexa hacia abajo y se puede afirmar entonces que

$$f(x) \quad \geq \quad f'(0)(x-0) + f(0) = \alpha x + 1,$$

de donde se tiene que para $x \geq -1,\ \alpha \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

d) Se quiere demostrar que dado $n \geq 8$, existen $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, tales que se cumple que $3x_n + 5y_n = n$.

Inicio de inducción
Para $n = 8$ se obtiene $x_8 = 1, y_8 = 1$.

Hipótesis de inducción
Supón que para todo natural $n \geq 8$ existen x_n, y_n, que cumplen que

$$3x_n + 5y_n = n.$$

Tesis de inducción
Se desea demostrar la proposición para $n + 1$.

Demostración
Nota que si $n + 1$ es múltiplo de 3 ó de 5, lo que se desea demostrar ya se cumple. Si no es múltiplo de 3 ni de 5, basta escribir

$$n + 1 = n + 6 - 5 = (3x_n + 5y_n) + 6 - 5 = 3(x_n + 2) + 5(y_n - 1),$$

o

$$n + 1 = n + 10 - 9 = (3x_n + 5y_n) + 10 - 9 = 3(x_n - 3) + 5(y_n + 2),$$

con lo cual

$$x_{n+1} = x_n + 2, y_{n+1} = y_n - 1;$$

(que es el caso en que se sustituye un billete de a cinco por dos de a tres) o

$$x_{n+1} = x_n - 3, y_{n+1} = y_n + 2;$$

(que es el caso en que tres billetes de a tres son sustituidos por dos de a cinco), lo que completa la inducción.

e) *Inicio de inducción*
Para $n = 3$, se conoce que la cantidad de diagonales de un triángulo es 0 y se cumple que

$$D_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0.$$

Hipótesis de inducción
Supón que el número de diagonales de un polígono convexo de k lados es

$$D_k = \frac{k(k-3)}{2}.$$

Tesis de inducción
Se desea demostrar que el número de diagonales de un polígono convexo de $k + 1$ lados es

$$D_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Demostración
Observa que al agregar un nuevo vértice a un polígono convexo de k lados se suman a las D_k diagonales anteriores, las $k-2$ diagonales que resultan de unir el nuevo vértice a los vértices restantes con excepción de los dos con los que se forman los nuevos lados.

Por otra parte, al agregar un nuevo vértice, lo que era un lado en el polígono inicial pasa a ser una nueva diagonal. Resulta entonces, que en total se suman $k-1$ diagonales, como se muestra en la figura II.1.2 para el caso particular $k=4$.

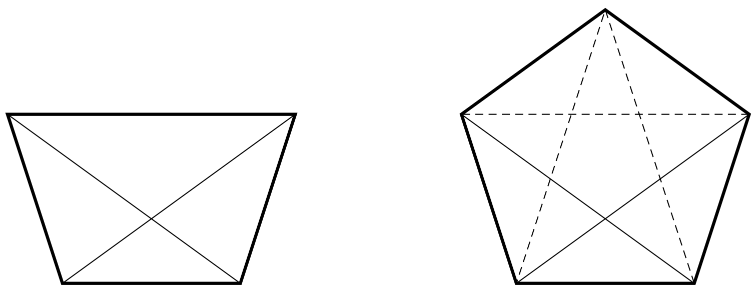


Figura II.1.2.: Variación en el número de diagonales al agregar un nuevo vértice en un cuadrilátero

A partir de lo anterior se tiene entonces que

$$D_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2},$$

con lo cual se demuestra la proposición.

Ejercicio 1.2.

La inecuación $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} > 32n$ se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-3)!3!} - \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{2n(2n-1)}{2} \\ &= \frac{n^3-15n^2+8n}{6} > 32n, \end{aligned}$$

equivalente a

$$(n-23)(n+8) > 0,$$

que se satisface para toda n, tal que $n > 23$ o $n < -8$. Nota que esto último resulta imposible por ser $n \in \mathbb{N}$, de modo que la solución de la inecuación es $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq 24\}$.

Ejercicio 1.3.

Inicio de inducción
Para $n = 1$ y $k \leq 1$ se tiene que

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z}$$

Hipótesis de inducción
Asume que para n natural arbitraria y para k natural con $k \leq n$, el número $\binom{n}{k}$ es natural.

Tesis de inducción
Se desea probar que lo anterior se cumple para $n+1$.

Demostración
Nota que

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n+1-k-1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

por ser la suma de dos enteros, debido a la hipótesis de inducción.
Advierte finalmente que de la demostración anterior se deduce además que para toda n natural y $k \leq n$, se cumple la relación $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Ejercicio 1.4.

Dado que

$$\begin{aligned}(1+x)^9(1+x)^{12} &= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^k\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^k\\ &= \left(\binom{9}{0}+\cdots+\binom{9}{9}x^9\right)\left(\binom{12}{0}+\cdots+\binom{12}{12}x^{12}\right),\end{aligned}$$

se obtienen las relaciones siguientes

$$\begin{array}{lll}
\text{Coeficiente de } x^0 & \binom{9}{0}\binom{12}{0} & = \sum_{i=0}^{0}\binom{9}{i}\binom{12}{0-i}\\
\text{Coeficiente de } x^1 & \binom{9}{0}\binom{12}{1}+\binom{9}{1}\binom{12}{0} & = \sum_{i=0}^{1}\binom{9}{i}\binom{12}{1-i}\\
\text{Coeficiente de } x^2 & \binom{9}{0}\binom{12}{2}+\binom{9}{1}\binom{12}{1}+\binom{9}{2}\binom{12}{0} & = \sum_{i=0}^{2}\binom{9}{i}\binom{12}{2-i}\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\text{Coeficiente de } x^n & \binom{9}{0}\binom{12}{n}+\cdots+\binom{9}{n}\binom{12}{0} & = \sum_{i=0}^{n}\binom{9}{i}\binom{12}{n-i}
\end{array}$$

Así, en particular, hallar

$$\sum_{i=0}^{8}\binom{9}{i}\binom{12}{8-i}$$

es equivalente a buscar el coeficiente de x^8 en el producto

$$(1+x)^9(1+x)^{12}=(1+x)^{21}=\sum_{i=0}^{21}\binom{21}{i}x^i.$$

Observa que esta suma no es más que el número que resulta de calcular $\binom{21}{8}$, de modo que

$$\sum_{i=0}^{8}\binom{9}{i}\binom{12}{8-i}=\binom{21}{8}.$$

Nota que el análisis anterior puede llevar a un resultado más general que viene dado por la identidad

$$\sum_{i=0}^{s}\binom{m}{i}\binom{n}{s-i}=\binom{m+n}{s}$$

cuya demostración puedes efectuar de manera análoga a la desarrollada en este ejercicio, que se refiere al caso particular $s = 8, m = 9$ y $n = 12$.

Ejercicio 1.5.

Antes de la resolución de los ejercicios se presenta el triángulo de Pascal, en el que se distribuyen gráficamente los coeficientes binomiales. De dicha distribución se infieren las propiedades a demostrar en el ejercicio. Cada número de dicho triángulo se forma sumando los términos adyacentes superiores como se observa en la figura II.1.3.

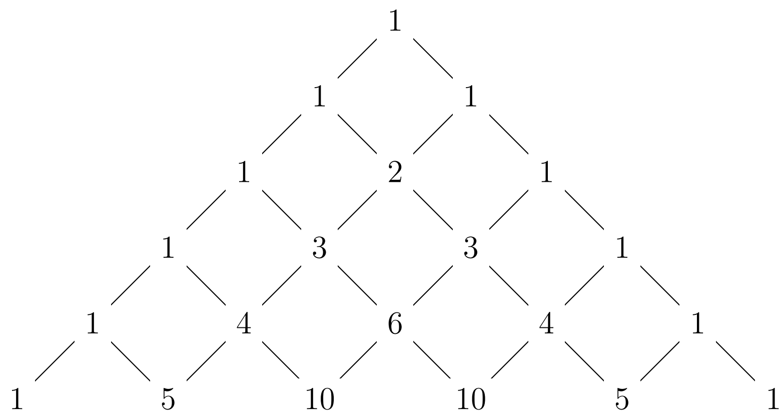


Figura II.1.3.: Representación del triángulo de Pascal hasta la 5^{ta} iteración

a) Basta ver que el miembro izquierdo de esta igualdad es igual a su miembro derecho. En efecto:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!}\\ \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!}\\ &= \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!},\end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad.

b)

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

c) Para probar

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

basta usar inducción completa en k y aplicar finalmente la relación que se demuestra en el ejercicio 1.3 o, como vía alternativa, partir del miembro derecho y aplicar reiteradamente la relación del ejercicio 1.3 hasta llegar al resultado deseado. Esto último significa tener en cuenta que

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k}{k-1}$$

a partir de lo cual, a su vez, se cumple que

$$\begin{aligned}
\binom{n+k}{k-1} &= \binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-1}{k-2},\\
\binom{n+k-1}{k-2} &= \binom{n+k-2}{k-2}+\binom{n+k-2}{k-3},\\
\cdots\quad & \quad\cdots\cdots\\
\binom{n+3}{2} &= \binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{1},\\
\binom{n+2}{1} &= \binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0},
\end{aligned}$$

de lo que resulta, sustituyendo convenientemente, la relación

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}$$

que se desea probar en este inciso.

d) Vía 1
Emplea inducción completa.

Vía 2
Se tiene que

$$1+2+3+\cdots+n=\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1},$$

lo que conduce, aplicando el resultado del inciso anterior, a que

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2} && \text{(II.1.1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\cdot 2!} = \frac{n(n+1)}{2}. && \text{(II.1.2)} \end{aligned}$$

Vía 3
Basta buscar el polinomio que interpola los puntos $(n, 1+2+\cdots+n)$. Dado que las diferencias de orden 1 tienen la forma

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = 1+2+3+\cdots+i-(1+2+3+\cdots+i-1) = i,$$

las diferencias de orden 2 son constantes, de modo que el polinomio que interpola tales puntos es de grado 2.

Basta tomar entonces tres puntos y aplicar el esquema conocido para la búsqueda de tal polinomio. Sean estos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$ con lo cual se tendrá

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0		
1	**1**	
3	2	**1**

A partir del esquema obtenido se tiene que el polinomio buscado es,

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{0} + \mathbf{1}\cdot n + \mathbf{1}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Vía 4
Esta vía fue la utilizada por el genial matemático alemán Karl Friedriech Gauss con solo seis años de edad. La idea es la siguiente:

Sea $S = \sum_{i=1}^{n} i$. Agrupando los sumandos dos a dos se tiene que

$$\begin{array}{llll} 1 & + \; n & = & n+1, \\ 2 & + \; (n-1) & = & n+1, \\ 3 & + \; (n-2) & = & n+1, \\ \cdots & \;\;\; \cdots & & \cdots \\ (n-1) & + \; 2 & = & n+1, \\ n & + \; 1 & = & n+1. \end{array}$$

Sumando en bloque las igualdades anteriores se llega a que

$$S + S = n(n+1),$$

de donde

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vía 5
Advierte que

$$\begin{array}{lllll} n^2 & - & (n-1)^2 & = & 2n-1, \\ (n-1)^2 & - & (n-2)^2 & = & 2(n-1)-1, \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 2^2 & - & 1^1 & = & 2(2)-1, \\ 1^2 & - & 0^2 & = & 2(1)-1. \end{array}$$

Sumando las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} n^2 &= 2\sum_{i=1}^{n} i - n \\ \frac{n^2+n}{2} &= \sum_{i=1}^{n} i, \end{aligned}$$

de donde

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Vía 6:
Como

$$S=\sum_{i=1}^{n} i$$

repara en que $2S$ puede organizarse de manera geométrica, en un arreglo rectangular, como se muestra en el siguiente ejemplo para $n=5$:

$$\begin{array}{ccccc c ccccc}
1 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & & & + & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1
\end{array}$$

De este modo, el área del rectángulo de 5x6 anterior generalizado para n natural, se transforma en un rectángulo de $n(n+1)$, resultando así que

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Es por esta capacidad de ser representados en un arreglo triangular, que a los números asociados a las diferentes iteraciones de S, se les llama **números triangulares**.

e) Aquí se pueden adecuar algunas de las vías empleadas en el inciso anterior. Se adapta, en particular, la segunda pues es la más interesante en aras de mostrar el trabajo con los coeficientes binomiales y sus propiedades. También se ajusta la quinta.

Vía 1
Dado que se desea buscar la expresión polinómica de la suma de los cuadrados de los números naturales, se verá inicialmente cómo representar cada uno de esos cuadrados como una expresión en coeficientes binomiales.

Al calcular los valores de m y n tales que para toda $k \geq 2$ se cumple

$$k^2 = m\binom{k}{2} + n\binom{k}{1} = \frac{mk^2 + (2n-m)k}{2},$$

se obtiene que $m = 2$ y $n = 1$, con lo cual

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= 1 + \sum_{k=2}^{n}\left[2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right] \\
&= 1 + 2\sum_{k=2}^{n}\left[\binom{k}{2}\right] + \sum_{k=2}^{n}\left[\binom{k}{1}\right] \\
&= 1 + 2\sum_{k=2}^{n}\left[\binom{k}{k-2}\right] + \sum_{k=2}^{n}\left[\binom{k}{1}\right].
\end{aligned}$$

En virtud de lo demostrado en el inciso c) de este ejercicio, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= 1 + 2\binom{n+1}{n-2} + \left[\binom{n+1}{n-1} - 1\right] \\
&= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= 2\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{(n+1)n(2n-2+3)}{6} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Vía 2

Usando una vía de solución análoga a la quinta del inciso anterior, se tiene que

$$\begin{array}{lcll}
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3n^2 - 3n + 1, \\
(n-1)^3 & - & (n-2)^3 & = & 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1, \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
1^3 & - & 0^3 & = & 3(1) - 3(1) + 1.
\end{array}$$

Sumando las igualdades anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} n^3 &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + n \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n, \end{aligned}$$

de donde

$$2n^3 = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3n^2 - 3n + 2n,$$

y, por tanto,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Ejercicio 1.6.

Vía 1
Aplicando la descomposición en factores lineales de la expresión cuadrática se tiene

$$\begin{aligned} (2x^2 + x - 3)^8 &= (2x+3)^8 \cdot (x-1)^8 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x)^{8-k} 3^k\right) \left(\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^k x^{8-k}\right). \end{aligned}$$

Nota ahora que el término lineal del desarrollo viene dado por la suma algebraica de los términos lineales que resultan de aplicar la propiedad distributiva a la expresión anterior. De ese modo, el coeficiente de x viene dado por

$$\binom{8}{7}\binom{8}{8} 2 \cdot 3^7 - \binom{8}{8}\binom{8}{7} 3^8 = 8 \cdot 3^7 (2-3) = -8 \cdot 3^7 = -17496.$$

Vía 2
Separando convenientemente los sumandos en la fórmula binomial se tiene

$$(2x^2 + x - 3)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x^2)^{8-k} (x-3)^k.$$

Para obtener el término en x es preciso eliminar primeramente las potencias de x^2, para lo cual se debe tomar $k = 8$, con lo que se obtiene

$$\binom{8}{8}(x-3)^8 = (x-3)^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} x^{8-i} (-3)^i.$$

Basta ahora considerar el término correspondiente al índice $i = 7$ para obtener el coeficiente buscado de x

$$\binom{8}{7}(-3)^7 x = 8(-3)^7 = -17496.$$

Vía 3
Dado que $(2x^2 + x - 3)^8$ es un polinomio, el coeficiente de x viene dado por

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + x - 3)^8\bigg|_{x=0} = \left(8(2x^2 + x - 3)^7(4x + 1)\right)\Big|_{x=0} = 8(-3)^7 = -17496.$$

Ejercicio 1.7.

Debe tenerse en cuenta en este caso que

$$(1 + \sqrt{2})^{30} = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} 1^{30-k}(\sqrt{2})^k = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k}(\sqrt{2})^k.$$

Dado que $\sqrt{2} > 1$, la exponencial $(\sqrt{2})^k$ es estrictamente creciente y alcanza su valor máximo cuando $k = 30$.

Por otro lado, se conoce que $\binom{n}{k}$ toma su valor máximo en $k = \dfrac{n}{2}$ si n es par o en $k = \dfrac{n-1}{2}$ si n impar. En este caso, $\binom{30}{k}$ lo alcanza para $k = 15$.

Como los valores máximos de los factores que conforman los términos no se alcanzan para el mismo valor de k, es preciso hacer un análisis más riguroso para determinar cuál es el término de esta suma que alcanza su mayor valor.

Se debe analizar entonces la monotonía de la sucesión $\{x_k\}$, con $x_k = \binom{30}{k}(\sqrt{2})^k$.
Dado que todos los términos de la sucesión definida son positivos, se analizará el cociente $\frac{x_{k+1}}{x_k}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1}}{x_k} &= \frac{\binom{30}{k+1}\sqrt{2}^{k+1}}{\binom{30}{k}\sqrt{2}^{k}} \\
&= \frac{30!\sqrt{2}^{k+1}}{(30-(k+1))!(k+1)!} \cdot \frac{(30-k)!k!}{30!\sqrt{2}^{k}} \\
&= \frac{\sqrt{2}(30-k)}{(k+1)}
\end{aligned}$$

Puesto que $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1$ si y solo si $k \leq 17{,}13$ (y $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} \leq 1$ si y solo si $k \geq 17{,}13$); la sucesión $\{x_k\}$ crece hasta el término x_{17} y decrece a partir del término x_{18}. Finalmente, como $x_{18} \geq x_{17}$, se concluye que x_{18} es el mayor de todos.

Ejercicio 1.8.

a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} - \binom{n}{0} = (1+1)^n - 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{i-1} \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{i} + \binom{n}{0} \\
&= -(1+(-1))^n + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Nota que al sumar los resultados de los dos incisos anteriores, en el miembro izquierdo se eliminan los coeficientes binomiales de la forma

$\binom{n}{2m}$, con lo cual para $k = n$ si n es impar y $k = n-1$ si n es par, se obtiene

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \cdots + 2\binom{n}{k} = 2^n - 1 + 1 = 2^n,$$

de donde se deduce que

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

d) Se tiene

$$\begin{aligned} 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} &= \sum_{i=1}^{n}(1+i)\binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} + 2^n - 1. \end{aligned}$$

Se debe buscar entonces el valor de $\sum\limits_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$.

Advierte que

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i} &= i\frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{(i-1)!(n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!} = n\binom{n-1}{i-1}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} &= \sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} \\ &= n\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right) \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que

$$\begin{aligned}2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+4\binom{n}{3}+\cdots+(n+1)\binom{n}{n} &= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}+2^n-1\\ &= n2^{n-1}+2^n-1=\left(\frac{n}{2}+1\right)2^n-1.\end{aligned}$$

e) Teniendo en cuenta la propiedad que se obtuvo por generalización en el ejercicio 4,

$$\binom{m}{0}\binom{s}{n}+\binom{m}{1}\binom{s}{n-1}+\binom{m}{2}\binom{s}{n-2}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{s}{0}=\binom{m+s}{n}$$

y tomando $m=s=n$, se obtiene

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n},$$

de modo que

$$\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

$$\begin{aligned}&= \binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\binom{n}{3}\binom{n}{n-3}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}\\ &= \binom{2n}{n}-\binom{n}{0}\binom{n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}-1.\end{aligned}$$

f) Nota que

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}.$$

Aplicando la propiedad

$$\binom{n+1}{i+1}=\frac{n+1}{1+i}\binom{n}{i},$$

se tiene que

$$\frac{1}{1+i}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1},$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i}\binom{n}{i} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1].
\end{aligned}$$

g) Se debe calcular ahora

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}.$$

La integración resulta una herramienta útil en este tipo de ejercicios. Para ello ten en cuenta que

$$\int_0^1 x^{k-1}dx = \frac{1}{k},$$

con lo cual, la suma a calcular se convierte en

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k-1}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}x^{k-1}dx.
\end{aligned}$$

Nota ahora que el integrando de la derecha se parece mucho al desarrollo binomial

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k.$$

Resulta sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}
\frac{1-(1-x)^n}{x} &= \frac{\binom{n}{0} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k}{x} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}dx.
\end{aligned}$$

Para calcular

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}x^{k-1}dx,$$

será preciso hallar el valor de la integral

$$\int\limits_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}.$$

Haciendo el cambio $y=1-x$, esta integral se transforma en

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx &= \int_0^1\frac{1-y^n}{1-y}dy=\int_0^1(1+y+y^2+\cdots+y^{n-1})dy\\ &= y+\frac{y^2}{2}+\cdots+\frac{y^n}{n}\Big|_0^1\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=H_n,\end{aligned}$$

donde H_n representa el n-ésimo número armónico. Así, finalmente se tiene que

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Advierte que esta técnica podría haberse aplicado también a la solución del inciso anterior.

Ejercicio 1.9.

a) Sea

$$x=\arctan u \quad\Rightarrow\quad \tan x=u$$
$$y=\arctan v \quad\Rightarrow\quad \tan y=v.$$

Dado que

$$\frac{u+v}{1-uv}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\tan(x+y),$$

se tiene que

$$x+y=\arctan\frac{u+v}{1-uv},$$

de donde se concluye la identidad

$$\arctan u+\arctan v=\arctan\frac{u+v}{1-uv}.$$

b) A partir de lo demostrado en el inciso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} 2\arctan\frac{1}{5} &= \arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{5} \\ &= \arctan\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \arctan\frac{5}{12}, \end{aligned}$$

y, repitiendo el procedimiento, se llega a que

$$\begin{aligned} 4\arctan\frac{1}{5} &= 2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\frac{5}{12}+\arctan\frac{5}{12} \\ &= \arctan\frac{120}{119}. \end{aligned}$$

Como además $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$, demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239},$$

equivale a probar que

$$\arctan 1 = \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239};$$

es decir, que

$$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{120}{119}.$$

De a) se tiene que

$$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \arctan\frac{120}{119},$$

con lo que queda demostrada la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Esta fórmula surgió de la búsqueda de expresiones con las que se pudiera aproximar el valor de π. La serie asociada a esta expresión converge mucho más rápido que otros métodos de aproximación desarrollados antes.

Ejercicio 1.10.

a) Considera una suma parcial de la serie:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\binom{k}{3}} &= \sum_{k=3}^{n}\frac{3!(k-3)!}{k!} = 6\sum_{k=3}^{n}\frac{(k-3)!}{k(k-1)(k-2)(k-3)!}\\ &= 6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right)\\ &= 3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right)\end{aligned}$$

$$= 3\left(\frac{1}{(2)(1)}-\frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{3}{2}-\frac{3}{n(n-1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

De modo que la suma de la serie es $3/2$.

b) Como en el inciso anterior, considera una suma parcial de la serie:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2}{k!}-\frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1+1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(1)!}-\frac{1}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}+1.$$

Se concluye que la suma de la serie es $\mathrm{e}+1$.

c) Dada la identidad $\arctan\left(\dfrac{u+v}{1-uv}\right) = \arctan u + \arctan v$, demostrada en el ejercicio anterior, se tiene que

$$\arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan \frac{(n+1)+(-n)}{1-(n+1)(-n)} = \arctan(n+1) + \arctan(-n)$$

$$= \arctan(n+1) - \arctan(n).$$

De modo que:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\arctan(k+1) - \arctan(k) \Big) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) \underset{n}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto la serie suma $\pi/2$.

Ejercicio 1.11.

Observa inicialmente que

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\theta$$

Por otro lado, sumando la progresión geométrica,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

Haciendo uso de la fórmula de De Moivre, el segundo miembro de la igualdad se transforma como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{e^{\frac{n+1}{2}\theta i} \left(e^{\frac{n+1}{2}\theta i} - e^{-\frac{n+1}{2}\theta i} \right)}{e^{\frac{\theta}{2} i} \left(e^{\frac{\theta}{2} i} - e^{-\frac{\theta}{2} i} \right)} \\ &= \frac{e^{\frac{n}{2}\theta i} \Big(\operatorname{cis}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) - \operatorname{cis}\left(-\frac{n+1}{2}\theta\right) \Big)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{cis}\left(-\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{n}{2}\theta i\right) \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \cos \frac{n\theta}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right) + i \operatorname{sen} \frac{n\theta}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\theta \\ &= \cos\frac{n\theta}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) + i\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right).\end{aligned}$$

Igualando finalmente las partes reales e imaginarias en los dos miembros de la igualdad se llega a que

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \cos\frac{n\theta}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\theta = \operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right).$$

Ejercicio 1.12.

a) Para estos ejercicios basta usar las definiciones de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$.

b) A partir de las igualdades probadas en los incisos anteriores se tiene que

$$\operatorname{senh} 2x = \operatorname{senh}(x+x) = 2\operatorname{senh} x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + \operatorname{senh}^2 x,$$

y de estas últimas, se llega a que

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \\ \cosh\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}\end{aligned}$$

c) Observa que

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} ix &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(ix) + i\operatorname{sen}(ix) - (\cos(ix) - i\operatorname{sen}(ix))}{2} \\ &= i\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Para demostrar la identidad $\cosh ix = \cos x$ se procede de manera análoga.

d) Del desarrollo en serie

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{2}, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

Análogamente se procede para obtener

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

e) i) De

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

se obtiene la relación $e^y - 2x - e^{-y} = 0$, que, multiplicando ambos miembros por $e^y \neq 0$, conduce a la ecuación

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0,$$

de la que resultan las soluciones

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

De lo anterior se infiere inmediatamente que $e^y = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ es imposible, de donde se tiene que

$$y = \text{arcsenh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

ii) De

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

se obtiene la relación $e^y - 2x + e^{-y} = 0$, equivalente a la ecuación

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0,$$

que tiene las soluciones

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \geq 1.$$

Como $\cosh x$ no es inyectiva, debe restringirse el dominio de definición a un intervalo donde la rama que se considere de la función sí sea inyectiva, para lo cual puede tomarse $(-\infty, 0)$ o $(0; +\infty)$ (que se muestran en el gráfico de $y = \cosh x$ que aparece sobre la recta $y = x$ en la Figura II.1.4).

Elijamos $(0, +\infty)$ para obtener la correspondiente inversa en este nuevo dominio. Tomemos entonces la rama para la cual el argumento del logaritmo sea mayor que 1 que es la correspondiente a

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

representado por la rama azul del gráfico de $\operatorname{arccosh} x$ que se muestra debajo de la recta $y = x$ en la figura II.1.4.

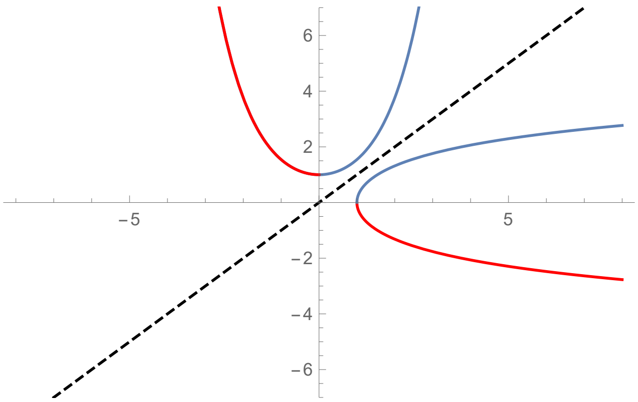


Figura II.1.4.: Ramas inyectivas de *coshx* con las correspondientes ramas de su inversa *arccoshx*

iii) Para obtener

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad -1 < x < 1$$

basta tener en cuenta que si

$$x = \tanh y = \frac{\operatorname{senh} y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{-y}(e^{2y} - 1)}{e^{-y}(e^{2y} + 1)},$$

entonces

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x},$$

de donde se obtiene

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Ejercicio 1.13.

a) Puede observarse desde el inicio que, siendo n un natural arbitrario, los puntos de la forma

$$(n; 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1)),$$

satisfacen que

$n = x_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n) = y_n$	2	-4	8	-12	18	-24	32	-40	50	-60

i) Vía 1
Nota que, para n impar, se tiene en particular que

n	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
$P(n)$	$2 = 2 \cdot 1^2$ $2\left(\frac{1+1}{2}\right)^2$	$8 = 2 \cdot 2^2$ $2\left(\frac{3+1}{2}\right)^2$	$18 = 2 \cdot 3^2$ $2\left(\frac{5+1}{2}\right)^2$	$32 = 2 \cdot 4^2$ $2\left(\frac{7+1}{2}\right)^2$	$50 = 2 \cdot 5^2$ $2\left(\frac{9+1}{2}\right)^2$

de manera que queda claro, con solo una simple inspección de la forma de estos primeros cinco puntos para n impar y del modo en que se comportan sus ordenadas respecto a sus abscisas, que el polinomio que los interpola debe ser

$$P(n) = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

La certeza de que este es, en efecto, el polinomio que interpola todos los puntos de esta forma para n impar, la obtenemos probando que la expresión deducida es válida aplicando el método de inducción completa o la vía que se da a continuación.

Vía 2
Dados los puntos

$$(n; 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1)) \text{ con } n \text{ impar},$$

teniendo en cuenta que dos puntos consecutivos tienen la forma (x_i, y_i), (x_{i+2}, y_{i+2}) (siendo i impar), las diferencias de orden 1 correspondientes a los mismos, vienen dadas por $\Delta y_i = y_{i+2} - y_i$, de modo que

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= 1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+\cdots+(-1)^{i+1}i(i+1)\\ &\quad +(-1)^{i+2}(i+1)(i+2)+(-1)^{i+3}(i+3)(i+2)\\ &\quad -(1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+\cdots+(-1)^{(i+1)}i(i+1));\end{aligned}$$

con lo cual

$$\Delta y_i = (-1)^{i+2}(i+1)(i+2)+(-1)^{i+3}(i+3)(i+2).$$

Al ser i impar, esta expresión se convierte en

$$\Delta y_i = -(i+1)(i+2)+(i+3)(i+2) = (i+2)(i+3-i-1) = 2(i+2),$$

que resulta ser un polinomio de grado 1 en tanto que, como puede verse a continuación, las diferencias de orden 2

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+2} - \Delta y_i = 2(i+4)-2(i+2) = 4$$

son constantes. A partir de lo anterior se concluye que el polinomio de grado mínimo que interpola a tales puntos posee grado 2.

Será preciso, por tal motivo, considerar tres puntos para buscar los coeficientes que permitirán hallar la expresión del polinomio que los interpola. Ya se conoce que tal expresión, dado que las abscisas de dos puntos consecutivos son equidistantes (con diferencia $h=2$), tendrá la forma

$$y = y_0 + \Delta(y_0)\frac{x-1}{h} + \Delta^2(y_0)\frac{(x-1)(x-3)}{2!h^2}.$$

Sean entonces, para n impar, los puntos $(1;2)$, $(3;8)$, $(5;18)$. A partir de sus coordenadas se elabora el esquema

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
2		
8	**6**	
18	10	**4**

que conduce a que el polinomio buscado para n impar viene dado por

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{2} + \mathbf{6}\frac{n-1}{2} + \mathbf{4}\frac{(n-1)(n-3)}{2!(2^2)} = 2+3x-3+\frac{(n-1)(n-3)}{2}\\ &= \frac{-2+6n+n^2-4n+3}{2} = \frac{n^2+2n+1}{2},\end{aligned}$$

de modo que

$$y = P(n) = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

b) Repara en que, en particular para n par, se tiene que

n	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{8}$
$P(n)$	$-4 = -2 \cdot 2$ $-\mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{2}+2}{2}\right)$	$-12 = -4 \cdot 3$ $-\mathbf{4}\left(\frac{\mathbf{4}+2}{2}\right)$	$-24 = -6 \cdot 4$ $-\mathbf{6}\left(\frac{\mathbf{6}+2}{2}\right)$	$-40 = -8 \cdot 5$ $-\mathbf{8}\left(\frac{\mathbf{8}+2}{2}\right)$

A partir de la regularidad que se observa en la forma de las coordenadas de estos puntos y, aplicando inducción completa, se prueba que el polinomio que interpola tales puntos viene dado por

$$P(n) = -\frac{n(n+2)}{2}.$$

Vía 2

Dados los puntos de la forma

$$(n; 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1)) \text{ con } n \text{ par},$$

teniendo en cuenta que dos puntos consecutivos tienen la forma (x_i, y_i), (x_{i+2}, y_{i+2}), las diferencias de orden 1 correspondientes vienen dadas por $\Delta y_i = y_{i+2} - y_i$, de modo que

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{i+1} i(i+1) \\ &\quad + (-1)^{i+2}(i+1)(i+2) + (-1)^{i+3}(i+3)(i+2) \\ &\quad - (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{i+1} i(i+1)); \end{aligned}$$

con lo cual

$$\Delta y_i = (-1)^{i+2}(i+1)(i+2) + (-1)^{i+3}(i+3)(i+2).$$

Al ser i par, esta expresión se convierte en

$$\Delta y_i = (i+1)(i+2) - (i+3)(i+2) = (i+2)(i+1-i-3) = 2(i-2),$$

que resulta ser, como en el caso anterior, un polinomio de grado 1 y las diferencias de orden 2

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+2} - \Delta y_i = 2i - 2(i+2) = -4$$

son constantes, de modo que el polinomio de grado mínimo que interpola tales puntos posee grado 2. Para hallar la expresión del polinomio en cuestión, bastará considerar entonces tres de estos puntos.

Se tiene así que, para n par, el polinomio tendrá la forma

$$y = y_0 + \Delta(y_0)\frac{x-2}{h} + \Delta^2(y_0)\frac{(x-2)(x-2)}{2!h^2}.$$

y los puntos a considerar, en particular, serán $(2; -4)$, $(4; -12)$, $(6; -24)$, con lo cual

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
-4		
-12	**-8**	
-24	-12	**-4**

A partir del esquema obtenido se tiene que, para n par, el polinomio buscado es,

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{-4} + \mathbf{-8}\frac{n-2}{2} + \mathbf{-4}\frac{(n-2)(n-4)}{2!(2^2)} = -4 - 4n + 8 + \frac{(n-2)(n-4)}{2} \\ &= \frac{8 - 8n - n^2 + 6n - 8}{2} = \frac{-n^2 - 2n}{2}, \end{aligned}$$

de modo que

$$y = P(n) = \frac{-n(n+2)}{2}.$$

c)Vía 1
NO existe un polinomio que interpole los puntos de la forma

$$(n; 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1)),$$

siendo n natural.

Como dos puntos consecutivos cualesquiera satisfacen siempre el hecho de que para toda n natural, se cumple $y_n y_{n+1} < 0$; de existir un polinomio que interpole tales puntos, deberá cortar el eje de las abscisas entre x_n y x_{n+1} al menos una vez para pasar de uno a otro. Como ello sucede para cada n natural, tal polinomio poseería infinitos ceros reales, lo que lleva a una contradicción evidente con el hecho de que si es un polinomio de un determinado grado k a lo sumo puede poseer k ceros reales.

Vía 2
Si existiese tal polinomio, su grado sería exactamente el orden k de las primeras diferencias $\Delta^k y_i$ que resultarán constantes respecto a i. Sucede que, dada la forma de los puntos

$$(x_n, y_n) = (n; 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1)),$$

que deben ser interpolados siendo n natural, se tendría que $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ con

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots \\
&\quad + (-1)^{i+1} i(i+1) + (-1)^{i+2}(i+1)(i+2) \\
&\quad - (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{i+1} i(i+1)) \\
&= (-1)^{i+2}(i+1)(i+2),
\end{aligned}$$

con lo cual, al ser ahora i arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\
&= (-1)^{i+3}(i+2)(i+3) - (-1)^{i+2}(i+1)(i+2) \\
&= (-1)^{i+2}(-(i+2)(i+3) - (i+1)(i+2)) \\
&= (-1)^{i+2}(-(i+2)(i+3+i+2)) \\
&= (-1)^{i+3}(-(i+2)(2i+5))
\end{aligned}$$

Análogamente, repitiendo el proceso se tendrá que, cualquiera sea k natural, las diferencias $\Delta^k y_i$ serán siempre de grado 2, con lo cual no puede determinarse el grado k del polinomio que interpole tales puntos, o lo que es lo mismo, no existe tal polinomio.

Ejercicio 1.14.

Vía 1
(Es esta vía probablemente la más natural, pero resulta menos elegante que las que se mostrarán posteriormente).

De $f(0) = 3$ se puede afirmar que el polinomio que se busca pasa por el punto $(0, 3)$. Del hecho de que sus diferencias $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ satisfacen la relación $\Delta f(n) = 9n^2 - 3n - 2$, se tiene que,

$$\Delta f(0) \quad = \quad f(1) - f(0) = f(1) - 3 = 9 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 = -2,$$

de donde resulta que $f(1) - 3 = -2$ y, por tanto, $f(1) = 1$.

Razonando de manera análoga se llega a que

$$\Delta f(1) \quad = \quad f(2) - f(1) = f(2) - 1 = 9 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 4,$$

de donde $f(2) - 1 = 4$ y, por tanto, $f(2) = 5$.

Repitiendo este proceso se calculan $f(3) = 33$, $f(4) = 103$, $f(5) = 233$, con lo que se obtienen los datos necesarios para aplicar el esquema habitual que permite la búsqueda del polinomio de grado mínimo que interpola los puntos $(0, 3)$; $(1, 1)$; $(2, 5)$,$(3, 33)$, $(4, 103)$; $(5, 233)$.

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
3				
1	**-2**			
5	4	**6**		
33	28	24	**18**	
103	70	42	18	0
233	130	60	18	0

Como se puede ver, las diferencias de orden mayor o igual que 4 se anulan y, por tanto, el polinomio buscado es de grado 3 y tiene la forma:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathbf{3} - \mathbf{2}n + \frac{\mathbf{6}n(n-1)}{2} + \frac{\mathbf{18}n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} \\ &= 3n^3 - 6n^2 + n + 3. \end{aligned}$$

Vía 2

Se conoce que $f(n+1) - f(n) = 9n^2 - 3n - 2$ y $f(0) = 3$, se puede entonces buscar $f(n)$ teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= 9(n-1)^2 - 3(n-1) - 2 \\ f(n-1) - f(n-2) &= 9(n-2)^2 - 3(n-2) - 2 \\ \cdots &\cdots \cdots \\ f(3) - f(2) &= 9\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 2 \\ f(2) - f(1) &= 9\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 2 \\ f(1) - f(0) &= 9\cdot 0^2 - 3\cdot 0 - 2, \end{aligned}$$

al sumar todas las filas anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} f(n) - f(0) &= 9\left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right] \\ &\quad -3[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] - 2n \end{aligned}$$

Usando ahora las expresiones conocidas para la suma de los n primeros números naturales y la de sus cuadrados

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n-1) &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}; \end{aligned}$$

se tiene que

$$f(n) - f(0) = 9\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n,$$

de donde, sustituyendo el valor de $f(0)$ y agrupando, se obtiene como en la vía anterior, que

$$f(n) = 3n^3 - 6n^2 + n + 3.$$

Vía 3
A partir del hecho de que las diferencias $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ satisfacen por hipótesis la relación $\Delta f(n) = 9n^2 - 3n - 2$, se puede afirmar que el polinomio buscado tiene grado 3, y a partir de la condición $f(0) = 3$, queda claro que su término independiente es 3.

Sea entonces
$$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + 3,$$
con lo cual se tiene
$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + 3 - an^3 - bn^2 - cn - 3 \\ &= 3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c)\end{aligned}$$

Igualando esta última expresión a la relación que cumplen las diferencias de orden n, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 3a &= 9 \\ 3a + 2b &= -3 \\ a + b + c &= -2, \end{aligned}$$
cuya solución es $a = 3$, $b = -6$ y $c = 1$. El polinomio buscado es entonces
$$f(n) = 3n^3 - 6n^2 + n + 3.$$

Ejercicio 1.15.

Vía 1
Esta vía de solución la obtuvo Leonhard Euler en el siglo XVIII pero, pese a la destreza matemática de la demostración, no cumplió los estándares de rigor de su época. Sin embargo, se presenta en este texto por su belleza y su valor histórico, ya que representa la primera solución dada al famoso problema de Basilea.

Del álgebra elemental se conoce, por las fórmulas de Vieta, que si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces reales del polinomio de grado n
$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$
entonces
$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - r_k),$$

y del desarrollo del producto se deduce que el coeficiente de la primera potencia de x es precisamente la suma de las raíces. Extendiendo esta idea a "polinomios de grado infinito"; es decir, a series de potencias de la variable x, Euler calculó la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (conocida como "el problema de Basilea"). La esencia del método utilizado se basa en seleccionar una función con desarrollo conocido en series de potencias, cuya primera potencia de x es el cuadrado y con un desarrollo en factores de la forma

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

En ese caso la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ corresponde (de acuerdo al análisis anterior), al coeficiente de x^2 en el producto. En particular, con la selección de la función

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Se desea ahora hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, para lo cual, siguiendo la misma idea anterior, conviene considerar una función cuyo desarrollo en factores sea de la forma

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^4}{a^4}\right).$$

Considérense las funciones $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\frac{\operatorname{sen} ix}{ix}$, cuyas raíces son $\pm k\pi$ y $\pm\frac{k\pi}{i}$ respectivamente y con desarrollos de potencias

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \\
\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix} &= \frac{1}{i}\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

A partir de sus raíces, los desarrollos en factores son de la forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix} = \frac{1}{i}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Multiplicando ambas expresiones

$$\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{i}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^4}{n^4\pi^4}\right),$$

de donde se deduce que el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene que coincidir con el resultado de la suma

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{16\pi^4}+\frac{1}{81\pi^4}+\cdots\right)$$

El desarrollo de

$$\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

se puede obtener del producto de sus correspondientes desarrollos y, por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen}(ix)}{ix}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{i}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\cdots\right),$$

de donde se deduce que el coeficiente de x^4 es

$$\frac{1}{i}\left(\frac{2}{120}-\frac{1}{36}\right) = -\frac{1}{90i}.$$

Dado que debe satisfacerse la igualdad

$$\frac{1}{90i} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{16\pi^4}+\frac{1}{81\pi^4}+\cdots\right)$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ejercicio 1.16.

El error cometido en la demostración propuesta aparece ya en el inicio de inducción. La propiedad a demostrar se refiere a conjuntos de caballos con más de un elemento para poder comparar colores, pues al definir el color de un caballo, nada permite asegurar que un segundo caballo tenga el mismo color. El primer conjunto que se puede formar entonces tiene que tener al menos dos caballos. De aquí la importancia de escoger correctamente el inicio de inducción.

Ejercicio 1.17.

a) Se debe demostrar que todo número de Fermat puede escribirse como la multiplicación de todos los anteriores más dos, o sea

$$F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$$

Inicio de inducción

$$\begin{aligned} F_0 &= 3 = 1 + 2 \\ F_1 &= 5 = 3 + 2 \\ F_2 &= 17 = 15 + 2. \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

$$F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2.$$

Tesis de inducción

$$F_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} F_k + 2.$$

Demostración
A la expresión

$$\prod_{k=0}^{n} F_k + 2$$

se le aplica la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} F_k + 2 &= (F_n - 2)F_n + 2 = F_n^2 - 2F_n + 2 \\
&= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\
&= 2^{2\cdot 2^n} + 2\cdot 2^{2^n} + 1 - 2\cdot 2^{2^n} - 2 + 2 \\
&= 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}
\end{aligned}$$

b) Esta propiedad es consecuencia directa del ejercicio anterior ya que si F_n es suma de números primos, como es impar, uno de los sumandos debe ser 2 y, por tanto, como se demostró anteriormente

$$F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k,$$

de donde, excepto para los casos $n = 0,\ n = 1$, este último sumando no será primo.

c) Para demostrar esta propiedad se utiliza la reducción al absurdo: Asume que existen dos números de Fermat F_n, F_m con un divisor común $d \neq 1$. Al ser estos números siempre impares, $d \neq 2$. Sea, sin pérdida de generalidad, $n > m$. Aplicando el resultado del primer inciso de este ejercicio

$$F_n = F_0 \cdot F_1 \cdots F_m \cdots F_{n-1} + 2,$$

luego, si $d|F_n$ y $d|F_m$, entonces $d|2$, con lo cual $d = 2$. ¡Contradicción!

II.2. Sucesiones y series numéricas

Somos lo que hacemos día a día, de modo que la excelencia no es un acto sino un hábito.
ARISTÓTELES

El que tiene imaginación con cuanta facilidad saca de la nada un mundo.
GUSTAVO ADOLFO BÉCQUER

Los libros son las abejas que llevan el polen de una inteligencia a otra.
J.R. LOWELL

Ejercicio 2.1.

Resulta sencillo comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente, dado que, para toda n natural se cumple

$$x_{n+1} = x_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq x_n,$$

entonces para demostrar la convergencia de la sucesión quedaría garantizar su acotación superior. Un primer intento de acotar la sucesión vendría dado por

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \left(1+\frac{1}{2}\right)^n,$$

que no es útil como mayoración al ser dependiente de n. Considera entonces la aplicación del logaritmo

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right),$$

y sea la función $y = \ln(1+t)$ definida en el intervalo $[0, x]$ para $x > 0$, donde es derivable. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \leq \frac{1}{1+0} = 1,$$

luego, para toda $x \geq 0$ se tiene que $\ln(1+x) \leq x$, como puede observarse en la figura II.2.1.

De la desigualdad anterior (que puede ser probada también por otras vías, como se verá adelante) se deduce que

$$\begin{aligned}
\ln x_n &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 1,
\end{aligned}$$

de donde se tiene que $x_n \leq e$ para casi toda n, con lo cual se prueba la acotación superior de la sucesión $\{x_n\}$.

De todo lo anterior se puede concluir que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente.

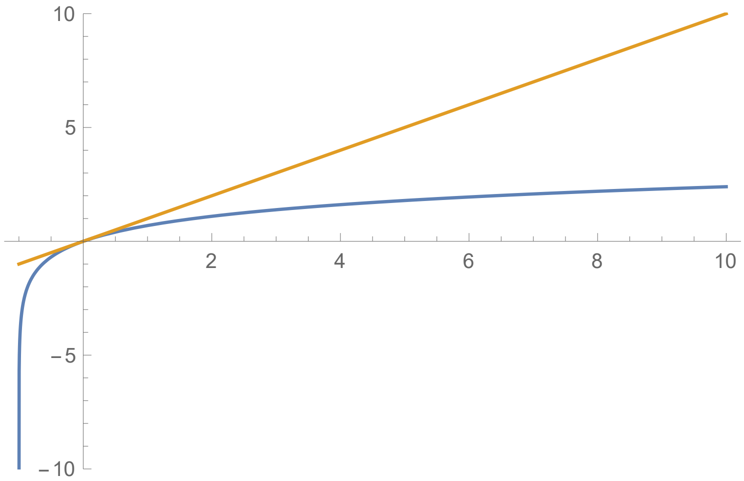


Figura II.2.1.: Comparación del crecimiento de las funciones logarítmica y lineal

A continuación se presentan otras vías que pueden ser empleadas para probar la desigualdad que permite la acotación $\ln(1+x) \leq x$ para toda $x \geq 0$:

Vía 2
Sea $F(x) = \ln(1+x) - x$, definida y derivable para toda $x > -1$. Se tiene entonces que

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0 \quad \text{para todo } x > -1.$$

De aquí que F es monótona decreciente y, por tanto, $F(x) \leq F(0) = 0$ para toda $x \geq 0$, de donde se concluye que $\ln(1+x) \leq x$ para toda $x \geq 0$.

Vía 3
Si se considera la función $G(x) = \ln(1+x)$, se observa que

$$G''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leq 0,$$

por lo que la función $G(x)$ es convexa hacia arriba para toda $x > -1$. El gráfico queda entonces por debajo de sus rectas tangentes en cualquier punto de abscisa $x > -1$; en particular de su recta tangente en $(0,0)$ que no es otra que $y = x$.

Ejercicio 2.2.

a) Sean $\{x_{k_n}\}$ y $\{x_{d_n}\}$ las dos subsucesiones de una misma sucesión $\{x_n\}$ que convergen a un mismo límite l. Por la definición de límite, se tiene que

- cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe N_1 tal que para toda n natural con $n \geq N_1$ se cumple $|x_{k_n} - l| < \varepsilon$,
- cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe N_2 tal que para toda n natural con $n \geq N_2$ se cumple $|x_{d_n} - l| < \varepsilon$.

Considera $N = \max\{N_1, N_2\}$ y ten en cuenta que, por hipótesis, todo término de la sucesión pertenece a una de las dos subsucesiones, con lo cual para toda n natural con $n \geq N$ se cumple $|x_n - l| < \varepsilon$, lo que garantiza la convergencia al límite l de la sucesión $\{x_n\}$.

b) Sean $\{x_{2n}\}$, $\{x_{3n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ sucesiones tales que $x_{2n+1} \to l_1$, $x_{2n} \to l_2$ y $x_{3n} \to l_3$.

Aplicando el resultado probado en el inciso anterior, dado que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ son tales que todo término de la sucesión pertenece a una de ellas, basta demostrar que convergen a un mismo límite.

Advierte que la sucesión $\{x_{6n}\}$ es subsucesión de $\{x_{2n}\}$ y de $\{x_{3n}\}$, por lo que es convergente a los límites l_2 y l_3. Como el límite de una sucesión convergente es único, se concluye que $l_2 = l_3$.

Razonando de manera análoga, la sucesión $\{x_{6n+3}\}$ es subsucesión de $\{x_{2n+1}\}$ y de $\{x_{3n}\}$, por lo que es convergente a los límites l_1 y l_3 y, por tanto, $l_1 = l_3$. Por transitividad se tiene entonces que $l_1 = l_2 = l_3$ de lo cual se concluye finalmente la convergencia de $\{x_n\}$ al límite l.

Ejercicio 2.3.

Sea

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

Dividiendo por 2 se obtiene

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Restando ambas expresiones y agrupando convenientemente en pares de términos consecutivos se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{2} &= S_n - \frac{S_n}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Al sumar la progresión geométrica en el miembro derecho se obtiene

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

con lo cual

$$\lim_n \frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) - 0 = \frac{3}{2},$$

y, por tanto,

$$\lim_n S_n = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Ejercicio 2.4.

a) Vía 1

La demostración que se muestra a continuación se debe al profesor francés Nicolás Oresme (1323 - 1382), genio intelectual destacado en el siglo XIV por su actividad como matemático, astrónomo, físico, economista, filósofo, psicólogo y musicólogo. Es la primera demostración de la divergencia de la serie armónica y es la que se encuentra más frecuentemente en la mayoría de los textos modernos de Matemática.

Su argumento, notablemente simple e inteligente, se basa en agrupar fracciones consecutivas en la serie armónica en bloques de suma mayor que $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &> \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\\
\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

A partir de lo anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &> 1\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{3}{2}\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8} &> 2\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{5}{2},
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que para toda k natural se cumple

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+1}{2},$$

lo cual se demuestra fácilmente por inducción.

Dada cualquier cantidad finita M existe entonces un número natural k (con $\frac{k+1}{2}>M$), de modo que la k-ésima suma parcial de la serie armónica es mayor que M, lo que garantiza que la serie armónica diverge al infinito.

Vía 2
Esta demostración se debe al matemático Pietro Mengoli (1625-1686), quien la obtuvo en 1647, adelantándose 40 años a la demostración de Johann Bernoulli. Se trataba de una argumentación muy simple, si se establecía primero el resultado preliminar

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a} \quad \text{si } a\geq 2,$$

cuya validez se deduce de

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1} &= \frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2-1}\\ &> \frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2}=\frac{3}{a}.\end{aligned}$$

Para aplicar esta relación a la serie armónica, agrupa convenientemente sus términos en ternas como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\\ &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\\ &> 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Al repetir el procedimiento a la serie del miembro derecho se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &> 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\\ &> 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\,.\end{aligned}$$

Continuando este proceso tantas veces como sea necesario, se prueba que la serie armónica es mayor que cualquier número natural por grande que este sea, por tanto $\{x_n\}$ diverge.

La belleza de la argumentación de Mengoli reside en su naturaleza autorreplicativa. Cada vez que aplicaba su resultado preliminar a la serie armónica, encontraba de nuevo la misma serie pero aumentada en una unidad.

Vía 3
Esta vía fue propuesta por el gran matemático Johann Bernoulli (1667-1748), que además fue un destacado médico y filólogo suizo. Primeramente

demostró que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n^2} &> \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n^2-n \text{ veces}}\\ &> \frac{n^2-n}{n^2}=1-\frac{1}{n},\end{aligned}$$

de modo que, para toda n natural, se cumple

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Esto da la idea de agrupar los sumandos de la serie armónica en bloques de suma mayor que 1, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{25}\right)+\cdots\\ &\quad+\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\cdots>1+1+\cdots+1+1+\cdots,\end{aligned}$$

con lo cual, la serie armónica es divergente y, por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ diverge.

Observa que la idea que subyace en las demostraciones de Mengoli, Oresme y Bernoulli es la misma, solo consideran diferentes modos de asociar en bloques los sumandos de la serie armónica para probar que dicha serie diverge, esto es, sobrepasa cualquier valor, por grande que este sea.

Vía 4

Esta última vía se basa en el teorema de Bolzano Cauchy para sucesiones. Nota que si se toma n natural arbitraria y $m=2n$ se tiene que

$$|x_{2n}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

de donde se concluye la existencia de un valor $\varepsilon=\frac{1}{2}$ tal que para toda N existe $n\geq N, m=2n$ que satisface $|x_{2n}-x_n|>\frac{1}{2}$. A partir de lo anterior se deduce ya la divergencia de la sucesión $\{x_n\}$.

b) Observa que

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}.$$

Considera entonces la función $y=\ln x$ en los intervalos $[n,n+1]$ $(n\in\mathbb{N})$, donde es diferenciable. Por el teorema del valor medio de Lagrange, se puede asegurar en cada uno de esos intervalos $(n, n+1)$ la existencia de un elemento d_n, tal que

$$\frac{1}{d_n} = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} = \ln\frac{n+1}{n}.$$

Pero, $d_n \in (n, n+1)$ implica que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{d_n} < \frac{1}{n} \implies \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$

de modo que

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} \leq 0,$$

con lo cual se concluye que la sucesión $\{y_n\}$ es monótona decreciente. Su convergencia o divergencia dependerá entonces de si está o no acotada inferiormente.

Para hacer el análisis de su acotación ten en cuenta que

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

en particular

$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}.$$

Esta integral representa gráficamente el área bajo la curva entre los puntos k y $k+1$ de la función positiva $\frac{1}{x}$. Esta área puede ser aproximada por exceso en el intervalo $[k, k+1]$ por el rectángulo de alto $f(k)$ y ancho $k+1-k=1$ (ver figura II.2.2 para el caso particular $k=1$), de donde

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < f(k) = \frac{1}{k},$$

luego,

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

con lo cual

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0,$$

lo que permite asegurar la acotación inferior de la sucesión y, por tanto, su convergencia.

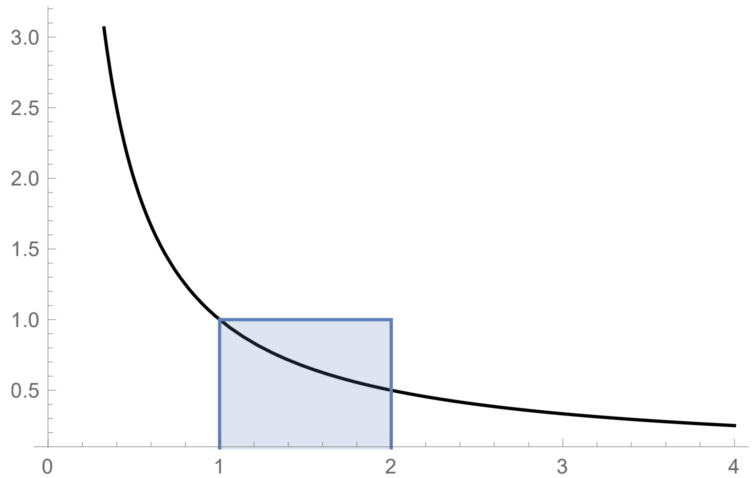


Figura II.2.2.: Mayoración del área buscada mediante rectángulos

El límite de y_n es conocido como la constante de Euler-Mascheroni. Todavía no se ha demostrado si es o no irracional, aunque se sospecha que lo es.

Observa que la acotación también puedes lograrla teniendo en cuenta que, para toda n natural, se satisface la desigualdad

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

a partir de la cual se tiene que

$$\begin{aligned} y_n = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\ln n &> \ln(1+1)+\ln\left(1+\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)-\ln n \\ &= \ln\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right] = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} > 0, \end{aligned}$$

obteniendo así la misma cota del razonamiento anterior.

c) Es obvio que para $n \geq 1$ se cumple

$$w_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n > 0,$$

lo que permite aplicar logaritmos para simplificar la expresión del término general de la sucesión.

Advierte ahora que de la convergencia de la sucesión $\{\ln w_n\}$ se deduciría la de la sucesión $\{w_n\}$ y que además

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$$

es una serie telescópica cuya convergencia o divergencia está intrínsecamente ligada, como se sabe, a la convergencia o divergencia respectivamente de la sucesión $\{\ln w_n\}$.

Se analizará a continuación si dicha serie converge con lo cual ya se tendría la convergencia de $\{\ln w_n\}$ y, por tanto, de la propia sucesión $\{w_n\}$.

Nota entonces que

$$\begin{aligned}
\ln w_{n+1} - \ln w_n &= \ln \frac{w_{n+1}}{w_n} = \ln \left[\left(\frac{(n+1)! e^{n+1}}{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}} \right) \left(\frac{\sqrt{n} n^n}{n! e^n} \right) \right] \\
&= \ln e + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

La expresión anterior sugiere la posibilidad de analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln w_{n+1} - \ln w_n \right),$$

a partir de la comparación con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dado que, cuando n crece tanto como se quiere, se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln w_{n+1} - \ln w_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + ... \right)
\end{aligned}$$

con lo que

$$\ln w_{n+1} - \ln w_n = \left(-\frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3} + ... \right).$$

Debe analizarse entonces la existencia del límite

$$\lim_{n} n^2 (\ln w_{n+1} - \ln w_n),$$

para lo cual se verifica que existe

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right),$$

en cuyo caso, por la definición de límite por sucesiones, su valor coincide con el valor del primero.

Al hacer la sustitución $x = \dfrac{1}{y}$ (nota que $x \to +\infty$ implica $y \to 0^+$) se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(1-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+y)\right).$$

Aplicando los desarrollos de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(1-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+y)\right)\\
= &\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(1-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)\right)\\
= &\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(1-\left(1+\frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{6}+o(y^2)\right)\right)\\
= &\lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{1}{12}-\frac{y}{6}+\varepsilon(y)\right) \qquad \left(\text{donde } \varepsilon(y)=\frac{o(y^2)}{y^2}\to 0 \text{ si } y\to 0\right)\\
= &-\frac{1}{12}\neq 0.
\end{aligned}$$

A partir del resultado obtenido en el límite se concluye, según el criterio de comparación con paso al límite, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln w_{n+1}-\ln w_n)$, poseen el mismo carácter. Se puede entonces asegurar la convergencia de esta última, lo que nos lleva a la convergencia de la sucesión $\{\ln w_n\}$ y, como ya se había explicado antes, a la de la propia sucesión $\{w_n\}$.

d) Ten en cuenta que

$$\begin{aligned}
z_{n+1}-z_n &= \ln(\ln(n+1)) - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\\
&= \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln n - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.
\end{aligned}$$

De aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a la función $y=\ln\ln x$ en los intervalos $[n,n{+}1]$ ($n\in\mathbb{N}$) se obtiene la existencia de $d_n\in(n,n{+}1)$, tal que

$$\frac{\ln\ln(n+1)-\ln\ln(n)}{n+1-n} = \frac{1}{d_n\ln(d_n)}.$$

Por otra parte, para $d_n \in (n, n+1)$ se tiene que

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{d_n \ln d_n} < \frac{1}{n \ln n},$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \ln\ln(n+1) - \ln\ln(n) \leq \frac{1}{n \ln n},$$

con lo que $\{z_n\}$ es creciente dado que, a partir de lo anterior, se tiene que $z_{n+1} - z_n > 0$ para todo $n > 1$.

Como además

$$0 < z_{k+1} - z_k < \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)},$$

sumando estas desigualdades desde $k = 2$ hasta $k = n$, resulta que

$$0 < \sum_{k=2}^{n}(z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_2 < \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{2\ln 2}.$$

La sucesión $\{z_n\}$ está acotada superiormente y, puesto que ya se había probado su monotonía creciente, se puede asegurar su convergencia. Más aún, se puede garantizar que

$$\lim_n z_n \leq \ln(\ln 2).$$

Ejercicio 2.5.

Nota que como $A = \max\limits_{1 \leq k \leq m} a_k$,

$$A^n \leq (a_1)^n + \cdots + (a_m)^n \leq A^n + \cdots + A^n = mA^n,$$

de donde

$$A \leq \sqrt[n]{(a_1)^n + \cdots + (a_m)^n} \leq A\sqrt[n]{m}.$$

Pasando al límite y aplicando el teorema del emparedado se obtiene

$$A \leq \lim_n \left(\sqrt[n]{(a_1)^n + \cdots + (a_m)^n}\right) \leq A \lim_n \sqrt[n]{m} = A,$$

de donde

$$\lim_n \sqrt[n]{(a_1)^n + \cdots + (a_m)^n} = A.$$

Ejercicio 2.6.

Sea n un número natural arbitrario. Se desea demostrar que es posible obtener $\frac{1}{n}$ como suma de una serie geométrica cuyo primer sumando es $\frac{1}{n+1}$. Si r es la razón de la serie geométrica buscada, debe ser

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}r + \frac{1}{n+1}r^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}r^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}r^k = \left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \text{si } |r| < 1\end{aligned}$$

Despejando r en esta igualdad se obtiene

$$r = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Nota que la razón así elegida es, en efecto, menor que 1 y se cumple

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k+1}.$$

Ejercicio 2.7.

a) (i) Para transformar el término general de la serie, observa que el numerador del argumento de la arcotangente "se parece mucho" a $(n+1)^4$, que es, a su vez, factor de uno de los sumandos del denominador. Ello sugiere completar la potencia cuarta en dicho numerador, sumando y restando n^4, de modo que

$$\begin{aligned}a_n &= \arctan\left(\frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{1 + n^4(n+1)^4}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4}{1 + n^4(n+1)^4}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{(n+1)^4 - n^4}{1 + n^4(n+1)^4}\right).\end{aligned}$$

Dividiendo ahora numerador y denominador por $n^4(n+1)^4$ se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \arctan\left(\frac{\dfrac{(n+1)^4}{n^4(n+1)^4}-\dfrac{n^4}{n^4(n+1)^4}}{\dfrac{1}{n^4(n+1)^4}+\dfrac{n^4(n+1)^4}{n^4(n+1)^4}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{1}{(n+1)^4}}{1+\dfrac{1}{n^4}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^4}}\right). \end{aligned}$$

Aplicando la identidad

$$\arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)=\arctan(u)-\arctan(v),$$

se puede expresar

$$a_n=\arctan\left(\frac{\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{1}{(n+1)^4}}{1+\dfrac{1}{n^4}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^4}}\right)=\arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)-\arctan\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right).$$

Esta igualdad permite escribir la serie en forma telescópica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)-\arctan\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right)\right],$$

con lo cual la n-ésima suma parcial es

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\arctan 1-\arctan\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right)\longrightarrow\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

De este modo se ha demostrado la convergencia de la serie a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{1+n^4(n+1)^4}=\frac{\pi}{4}.$$

(ii) Con el objetivo de lograr una expresión más clara para el témino general de la serie, se expresará el numerador a partir de sumandos en los que intervengan factores que luego se podrán simplificar convenientemente con el factorial del denominador.

Sean entonces A, B, C tales que

$$\begin{aligned} n^2+5n+7 &= A(n+2)(n+1)+B(n+2)+C \\ &= An^2+(3A+B)n+(2A+2B+C), \end{aligned}$$

de donde, comparando coeficientes, se obtienen los valores

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = 1.$$

El término general puede ser escrito entonces de la forma

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1)+2(n+2)+1}{(n+2)!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} + \frac{2(n+2)}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Dada la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, se tiene la de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \\ &= \left(e - \frac{1}{0!}\right) + 2\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) \\ &\quad + \left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) \\ &= 4e - \frac{15}{2} = \frac{8e-15}{2} \end{aligned}$$

b) (i) Esta serie es divergente, pues su término general no tiende a cero. Para constatarlo, calcula el límite

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^7}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^8}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}} - 2\right).$$

Haciendo la sustitución $x = \dfrac{1}{y}$, el límite se transforma en

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+y} + \sqrt[4]{1-y} - 2}{y^2} = -\frac{3}{16} \neq 0,$$

lo que puede verificarse sin dificultad aplicando, por ejemplo, los desarrollos de Taylor correspondientes o la regla de L'Hôpital. Usando la definición de límite de funciones según Heine, el valor así obtenido coincide, con el del límite de sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^7}\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n-1}-2\sqrt[4]{n}\right) = -\frac{3}{16} \neq 0.$$

(ii) Como los términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}x^n}$$

poseen signo arbitrario, se analizará inicialmente la serie de los valores absolutos.

Para ello podrían aplicarse los diferentes criterios conocidos para determinar la convergencia o divergencia de una serie. En particular aquí se empleará el criterio del cociente. Nota que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}|x|^{n+1}} \cdot |x|^n \sqrt[n]{n} = \left|\frac{1}{x}\right| \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}.$$

Dado que

$$\sqrt[n]{n} \to 1,$$

y, por tanto,

$$\sqrt[n+1]{n+1} \to 1,$$

entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} \to \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|},$$

De modo que la serie converge absolutamente para $|x| > 1$ y diverge para $|x| < 1$.

Para $|x| = 1$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}x^n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{si } x = 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}(-1)^n} & \text{si } x = -1 \end{cases},$$

que diverge en todo caso, ya que

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \neq 0.$$

Finalmente se ha demostrado que la serie converge absolutamente para $|x| > 1$ y diverge para $|x| \leq 1$.

Ejercicio 2.8.

Vía 1
Para demostrar que $2 < e < 3$ considera el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

de donde, para $x = 1$, se obtiene

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots ,$$

con lo cual se hace evidente que $e > 2$.

Para concluir que $e < 3$, se probará que $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 1$. Basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{3\cdots n} + \cdots\right)$$

y se puede probar por inducción que si $n \geq 2$ (¡demuéstralo!), se cumple que $n! \geq 2^{n-1}$, con lo cual

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{3\cdots n} + \cdots\right)$$

$$< \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}2 = 1,$$

luego, $e < 2 + 1 = 3$, por tanto $2 < e < 3$.

Vía 2
También pueden considerarse para la comparación otras series como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{3\cdots n} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1,
\end{aligned}$$

con lo que se concluye igualmente que

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 3.$$

Ejercicio 2.9.

a) De la existencia del $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que para toda $n \geq N$ se cumple

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual es equivalente a

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para probar la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, nota que este puede ser expresado en la forma

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_N}{a_{N-1}} \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Al aplicar la acotación anterior, teniendo en cuenta que $a_1 \cdots \dfrac{a_{N-1}}{a_{N-2}} > 0$ y que en el producto $\dfrac{a_N}{a_{N-1}} \cdot \dfrac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ hay $n - N$ factores, se obtiene

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots \frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} \cdot (l - \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_1 \cdots \frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} \cdot (l + \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N}{n}}.$$

Observa ahora que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots \frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} \cdot (l - \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N}{n}} = l - \frac{\varepsilon}{2} > l - \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots \frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}} \cdot (l + \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{n-N}{n}} = l + \frac{\varepsilon}{2} < l + \varepsilon;$$

lo que implica, por propiedades de límite, que para casi toda n,

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon;$$

es decir, que para casi toda n,

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon$$

con lo cual se prueba no solo la existencia del límite buscado, sino además que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

b) El recíproco no es válido. Para la sucesión de término general

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{4}{2^{n+1}} = \dfrac{2}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{2}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

se tiene que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{2}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1,$$

de donde, aplicando el criterio de Cauchy, se puede concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

es convergente.

Sin embargo, para tal serie no es posible aplicar el criterio del cociente, pues como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n},$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{2} = 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},$$

de lo cual se concluye, ante la presencia de dos subsucesiones de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ convergentes a límites diferentes, la no existencia del límite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 2.10.

Nota que la convergencia de $\sqrt[n]{n!}$ se puede analizar al aplicar el criterio de la raíz a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Para investigar el carácter de esta serie se aplica el criterio del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1,$$

de modo que se puede asegurar que la serie es convergente. Del ejercicio anterior se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

lo que nos permite concluir que

$$\lim_{n} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Ejercicio 2.11.

Ten en cuenta que para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$|x_{n+1} - x_n| < \alpha |x_n - x_{n-1}|, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

de manera que

$$\begin{array}{rcl} |x_2 - x_1| & < & \alpha|x_1 - x_0| \\ \\ |x_3 - x_2| & < & \alpha|x_2 - x_1| < \alpha^2|x_1 - x_0| \\ \cdots & & \cdots \\ |x_{n+1} - x_n| & < & \alpha|x_n - x_{n-1}| < \cdots < \alpha^n|x_1 - x_0| \end{array}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $n, p \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &< \alpha^{n+p}|x_1 - x_0| + \alpha^{n+p-1}|x_1 - x_0| + \cdots + \alpha^n|x_1 - x_0| \\ &= \left(\alpha^{n+p} + \alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n\right)|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ converge, por ser geométrica con $0 < \alpha < 1$, se deduce del criterio de Bolzano-Cauchy que existe N tal que, para toda $n \geq N$ y para toda $p \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\alpha^{n+p} + \alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n < \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

Finalmente

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|}|x_1 - x_0| = \varepsilon,$$

lo cual indica la convergencia de $\{x_n\}$.

Ejercicio 2.12.

a) **FALSO**.

Vía 1

La sucesión de término general

$$x_n = \frac{(-1)^n + \frac{7}{n+1}}{(-1)^n + \frac{1}{n^3}}$$

es convergente, pues

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{-1 + \frac{7}{n+1}}{-1 + \frac{1}{n^3}} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1 + \frac{7}{n+1}}{1 + \frac{1}{n^3}} & n \text{ par} \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = 1,$$

lo que permite concluir la convergencia a 1 de la sucesión dada a partir de la convergencia, a un mismo límite, de dos subsucesiones que contienen, entre ellas, todos los términos de la sucesión.

Vía 2
Para asegurar lo anterior puede usarse que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n} \frac{1+\dfrac{(-1)^n \cdot 7}{n+1}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{(-1)^n \cdot 7}{n+1}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}} = 1.$$

b) **FALSO**.

Vía 1
Una primera vía puede ser probar por inducción la desigualdad $n^{n-1} \geq n!$, con lo cual se tiene que

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}.$$

Usando entonces el criterio del emparedado se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \neq \frac{1}{7}.$$

Vía 2
Basta considerar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ y comprobar que es convergente. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

del criterio del cociente se deduce la convergencia de la serie. Ahora, por la condición necesaria de convergencia para las series, se puede afirmar que su término general tiende a cero, así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \neq \frac{1}{7}.$$

Vía 3
Se comprueba que la sucesión cuyo límite se está analizando es monótona decreciente, dado que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$ para toda n natural y es acotada inferiormente (por ejemplo, por cero), en cuyo caso garantiza que tal sucesión es convergente a su ínfimo.

Para calcular el límite se propone usar la relación de recurrencia como sigue:

$$a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a_n,$$

lo que implica para el límite que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a_n;$$

de donde,

$$l = \frac{1}{e} l \quad \Rightarrow \quad l = 0.$$

De aquí se deduce además que el ínfimo es justamente ese límite, es decir, cero.

Vía 4

Por la relación entre la media aritmética y la media geométrica se cumplen las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{n\cdot 1} & \leq & \dfrac{n+1}{2} \\ \sqrt{(n-1)\cdot 2} & \leq & \dfrac{n+1}{2} \\ \sqrt{(n-2)\cdot 3} & \leq & \dfrac{n+1}{2} \\ \cdots & & \cdots \\ \sqrt{1\cdot n} & \leq & \dfrac{n+1}{2}. \end{array}$$

Como todas esta expresiones son positivas, se pueden multiplicar sin afectar la desigualdad, y se obtiene

$$\sqrt{(n!)^2} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

De aquí que

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n \to 0,$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \neq \frac{1}{7}.$$

c) **FALSO**.

La sucesión de término general

$$x_n = \frac{\cos 1!}{2} + \frac{\cos 2!}{6} + \frac{\cos 3!}{12} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$$

sí cumple el criterio de Bolzano -Cauchy.

Vía 1
Aquí puede observarse que la función $\cos x$ oscila entre -1 y 1, de modo que los términos de la serie a la que nos enfrentamos poseen signo arbitrario. Trabaja entonces con la serie de los módulos. Basta tener en cuenta que

$$\left|\frac{\cos n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

y que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie convergente de modo que, aplicando criterio del cociente, se puede asegurar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n(n+1)}\right|$.

Ahora, de la convergencia absoluta de esta serie, se deduce la de la serie inicial, y por tanto, su sucesión de sumas parciales

$$x_n = \frac{\cos 1!}{2} + \frac{\cos 2!}{6} + \frac{\cos 3!}{12} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$$

también converge, con lo cual cumple la condición de Bolzano-Cauchy.

Vía 2
Dados dos números naturales n y p, se cumple

$$\begin{aligned}
& |x_{n+p} - x_n| = \\
= \quad & \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
\leq \quad & \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
\leq \quad & \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\
\leq \quad & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}.
\end{aligned}$$

Observa que esta última expresión corresponde a la diferencia $|S_{n+p} - S_n|$ de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que cumple el criterio de Bolzano-Cauchy, por lo que para toda $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que para toda n natural que satisface $n \geq N$ y, para toda $p \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$|x_{n+p} - x_n| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

con lo que queda demostrado que la proposición planteada es falsa.

d) **FALSO**.

Se sabe que x es un punto de acumulación de un conjunto A si y solo si existe una sucesión de elementos de A, distintos de x, convergente a x. Dado que A es el conjunto de valores de la sucesión $\{x_n\}$, los puntos de acumulación de A y de $\{x_n\}$ son los mismos.

A continuación se verá que las subsucesiones $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ son infinitesimales. En efecto, si n es par se tiene que:

$$0 \leqslant |x_n| = \left|\frac{1}{4} + \frac{\cos n}{n^2}\right|^{n^2} \leqslant \left(\frac{1}{4} + \frac{|\cos n|}{n^2}\right)^{n^2} \underset{\text{p.c.t. } n}{\leqslant} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^{n^2} = \frac{1}{2^{n^2}} \xrightarrow[n]{} 0,$$

y si n es impar:

$$\lim_n x_n = \lim_n n(2^{1/n^2} - 1) = \lim_{x \to +\infty} x(2^{1/x^2} - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0.$$

Puesto que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ contienen entre sí todos los elementos de la sucesión y convergen ambas a 0, entonces $\{x_n\}$ es también convergente a 0. Como los términos de $\{x_n\}$ son todos diferentes, su único punto de acumulación será justamente el límite de $\{x_n\}$. Se tiene así que el conjunto A tiene a 0 como único punto de acumulación.

e) **FALSO**.

Nota que las expresiones asociadas a los términos de índice par tienen signo contrario a las correspondientes a los de índice impar. A partir de lo anterior, a menos que ambas subsucesiones sean infinitesimales (que no lo son, ¡verifícalo!), los límites (que existen, ¡demuéstralo!) tendrían, por propiedades de límites, signos contrarios. La sucesión tendría dos subsucesiones que no convergen a un mismo límite y, por tanto, la sucesión diverge.

Ejercicio 2.13.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ condicionalmente convergente, siendo $a_n \geq 0$ para toda n.

Considera la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la cual diverge por hipótesis.

Como existe el límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, se tiene que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pues, de lo contrario, la serie de los módulos sería convergente.

Asume que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Existe entonces una N tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para toda $n \geq N$; es decir, $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq N$. De aquí que $\{a_n\}$ es una sucesión monótona creciente y positiva, por lo que no puede ser infinitesimal. Esto contradice el hecho de que, por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

De lo anterior se concluye que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Ejercicio 2.14.

a) Si existe $\alpha > 0$, tal que

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} \geq 1 + \alpha \quad \text{para toda } n \geq n_0,$$

como $\ln n > 0$ para $n > 1$, la desigualdad anterior se puede escribir como

$$\ln\left(\frac{1}{a_n}\right) \geq (1+\alpha)\ln n = \ln n^{1+\alpha},$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha},$$

por ser $y = \ln x$ una función creciente en todo su dominio.

Como, por hipótesis, $a_n > 0$ para toda n natural

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} \geq a_n > 0.$$

Ten en cuenta ahora que $\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ es el término general de una serie convergente (pues $n > 0$) y, aplicando el criterio de comparación, se puede asegurar también la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Si
$$\frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} \leq 1 \quad \text{para toda } n \geq n_0,$$
entonces se cumple que
$$\ln\left(\frac{1}{a_n}\right) \leq \ln n \quad \text{para toda } n \geq n_0,$$
con lo cual
$$0 < \frac{1}{a_n} \leq n.$$
Dado que $a_n > 0$, entonces
$$0 < \frac{1}{n} \leq a_n$$
y como $\frac{1}{n}$ es el término general de una serie divergente, por el criterio de comparación, se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$ para toda $n \geq n_0$.

c) Aplicando ahora el inciso anterior, si se desean hallar los valores de x para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$ diverge, se deben buscar los valores de x para los cuales $\frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} \leq 1$.

Nota que, dada la expresión del término general de la serie, está claro que x debe satisfacer la condición $x > 0$ para que $y = \ln x$ esté definida.

Teniendo en cuenta que
$$\frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{1}{n^{\ln x}}\right)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n^{-\ln x}\right)}{\ln n} = \frac{-\ln x \ln n}{\ln n} = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$$
y que $-\ln x \leq 1$ solo si $x \geq \frac{1}{e}$, se deduce que la serie diverge para $x > \frac{1}{e}$.

Ejercicio 2.15.

a) Observa primeramente que como $a_1 > 0$, se cumple que $a_2 > 0$ y, razonando de manera análoga, se puede probar por inducción que para toda n natural $a_n > 0$. Además, como por hipótesis $\varepsilon_n \geq 0$, se cumple que
$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n}}{2} \geq \frac{a_n + \sqrt{a_n^2}}{2}.$$

lo que conlleva a

$$a_{n+1} \geq \frac{a_n + \sqrt{a_n^2}}{2} = \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

y, por tanto, $\{a_n\}$ es monótona creciente.

b) Hallemos una mayoración para $2(a_{n+1} - a_n)$. Como $2\sqrt{a_n^2 \varepsilon_n} \geq 0$, se cumple que

$$a_n^2 + \varepsilon_n \leq a_n^2 + \varepsilon_n + 2\sqrt{a_n^2 \varepsilon_n},$$

de donde

$$a_n^2 + \varepsilon_n \leq (\sqrt{a_n^2} + \sqrt{\varepsilon_n})^2$$

entonces

$$\sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} \leq \sqrt{a_n^2} + \sqrt{\varepsilon_n} = a_n + \sqrt{\varepsilon_n},$$

luego

$$2(a_{n+1} - a_n) = \sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} - a_n \leq a_n + \sqrt{\varepsilon_n} - a_n = \sqrt{\varepsilon_n}$$

y de este modo, para toda n natural, se cumple

$$0 < 2(a_{n+1} - a_n) \leq \sqrt{\varepsilon_n}.$$

c) Se tiene

$$4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n = (2a_{n+1})^2 - 2a_n(2a_{n+1}).$$

Pero

$$2a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} + a_n,$$

entonces

$$\begin{aligned}
(2a_{n+1})^2 \quad - &\quad 2a_n 2a_{n+1} = \\
= &\quad a_n^2 + a_n^2 + \varepsilon_n + 2a_n\sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} - 2a_n \left(a_n + \sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n}\right) \\
= &\quad 2a_n^2 + \varepsilon_n + 2a_n\sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} - 2a_n^2 - 2a_n\sqrt{a_n^2 + \varepsilon_n} = \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

luego, para toda n natural, queda demostrado que

$$4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = \varepsilon_n.$$

d) (Necesidad):
Sea $l = \lim\limits_n a_n$. Como $\{a_n\}$ es convergente y monótona creciente, entonces está acotada superiormente, con lo cual se puede asegurar que existe $M > 0$ tal que $a_n \leq M$ para toda n natural.

Sea entonces $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ la n-ésima suma parcial de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$. Para probar la convergencia de la serie se debe probar la convergencia de su sucesión de sumas parciales.

Usando el resultado obtenido en el inciso c) y el hecho de que $a_n \leq M$ para toda n natural, se tiene que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} 4a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \leq 4M \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 4M(a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{n+1} - a_m) \\ &= 4M(a_{n+1} - a_1) \longrightarrow 4M(l - a_1), \end{aligned}$$

por tanto, de la convergencia de $\{a_n\}$ se deduce la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$.

(Suficiencia):
Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ convergente, de modo que la sucesión de sus restos parciales de orden n es infinitesimal, esto es,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \to 0,$$

lo que significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que para toda $n \geq N$ se cumple que

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Por otro lado, como $a_n \geq a_N$ para toda $n \geq N$ por ser una sucesión monótona creciente, se tiene que

$$\begin{aligned} 4a_{N+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) &\leq 4a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 4a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) = r_n < \varepsilon, \end{aligned}$$

de modo que, para toda $n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) < \frac{\varepsilon}{4a_{N+1}},$$

por lo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ converge a una suma S.

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

la n-ésima suma parcial de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$. Puesto que la serie converge a S, también lo hace la sucesión de sus sumas parciales, de modo que

$$S_n = a_{n+1} - a_1 \to S,$$

con lo cual

$$a_{n+1} \to S + a_1,$$

de donde se puede concluir que $\{a_n\}$ es convergente.

Ejercicio 2.16.

a) Nota que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{S_k S_{k-1}} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k S_{k-1}} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) \\ &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n}. \end{aligned}$$

Como la serie $\sum a_n$ es divergente con $a_n > 0$, entonces $\{S_n\}$ es infinitamente grande, y se tiene

$$\lim_n \frac{1}{S_n} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $S_1 = a_1$, se deduce que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{S_k S_{k-1}} = \frac{1}{S_1} - \lim_n \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a_1}.$$

b) En el caso en el que la serie sea de términos arbitrarios la afirmación es falsa, como lo muestra el siguiente contraejemplo. Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

con

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ \\ -2, & k \text{ par} \\ \\ 2, & k \text{ impar} \end{cases}.$$

A partir de lo anterior, S_n toma los valores 1 y -1. Ya se vio que las sumas parciales tienen la forma

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{S_k S_{k-1}} = \frac{1}{S_1} - \lim_n \frac{1}{S_n},$$

pero ahora no existe

$$\lim_n \frac{1}{S_n}$$

por lo cual

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{S_k S_{k-1}}$$

también diverge.

Ejercicio 2.17.

a) Para demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right\rfloor$$

es convergente, se aplicará la definición de parte fraccionaria de x, que se denota por $\{x\}$, donde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Nota que si $x \in (0;1)$, $\{x\} = x$.

Observa que el término general de la serie puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right\rfloor &= \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} - \left\{ \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right\} \\ &= \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} - \left\{ \frac{\{n\alpha\}}{n} \right\}, \end{aligned}$$

y que de $0 < \{n\alpha\} < 1$ y $0 < \dfrac{1}{n} < 1$, se deduce que $\dfrac{\{n\alpha\}}{n} \in (0;1)$, por lo que $\left\{\dfrac{\{n\alpha\}}{n}\right\} = \dfrac{\{n\alpha\}}{n}$.

Despejando en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \left\lfloor \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right\rfloor &= \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} - \frac{\{n\alpha\}}{n} = \alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor + \{n\alpha\}}{n} \\ &= \alpha - \frac{n\alpha}{n} = \alpha - \alpha = 0, \end{aligned}$$

de modo que la serie analizada es constante, su término general es 0 para toda α y para toda n natural , por lo que es convergente a cero.

b) Advierte que aquí el término general de la serie puede reducirse a

$$\alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \frac{\{n\alpha\}}{n}$$

donde $\{n\alpha\}$ representa la parte fraccionaria de $n\alpha$.

Nota ahora que, en el caso particular de $\alpha = \dfrac{1}{2}$, se tiene que

$$\frac{\{n\alpha\}}{n} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{1}{2n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

de donde se concluye la divergencia de la serie dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{n\alpha\}}{n} = \sum_{n=1,\, n\, impar}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

Un razonamiento análogo puede aplicarse para todo valor racional de α. Queda solo analizar el carácter de la serie si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que es lo que se hará a continuación.

Dado que todo número real puede ser aproximado por una sucesión de números racionales, sea entonces $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión convergente a α. En virtud de la continuidad de la función parte fraccionaria en los elementos irracionales del dominio, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{n\alpha\}}{n} &= \lim_N \sum_{n=1}^{N}\frac{\{n\lim_k \alpha_k\}}{n}\\ &= \lim_N \lim_k \sum_{n=1}^{N}\frac{\{n\alpha_k\}}{n}\\ &= \lim_k \lim_N \sum_{n=1}^{N}\frac{\{n\alpha_k\}}{n} = \infty\end{aligned}$$

de donde se deduce la divergencia de la serie.

Ejercicio 2.18.

Trabajando formalmente, a partir de asumir la convergencia de la serie, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+n+2)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+n+2)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left[\frac{m+n+2-m}{m(m+n+2)}\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right].\end{aligned}$$

Dado que se cumple

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2} = \frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{m+n+2}$$

y que para $N\to\infty$ se cumple

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) &= 1-\frac{1}{N+1}\to 1\\ \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\to\frac{1}{2}\\ \cdots\quad & \quad\cdots\\ \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{m+n+2}\right) &= \frac{1}{n+2}-\frac{1}{2N+2}\to\frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right]=$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right].
\end{aligned}$$

Al analizar el comportamiento de la sucesión S_n de las sumas parciales asociadas a la serie anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right]\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right)+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k\cdot(k+2)}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+2)}\right)\right]\\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{84}{48}=\frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

A partir de todo lo anterior se concluye finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}=\frac{7}{4}.$$

II.3. Límite y continuidad

Es tan vana la esperanza de que se llegará sin trabajo y sin molestia a la posesión del saber y la experiencia cuya unión produce la sabiduría, como contar con una cosecha donde no se ha sembrado ningún grano.
BENJAMÍN FRANKLIN

Si cierras la puerta a tus errores, dejarás afuera la verdad.
RABINDRANATH TAGORE

Mantén tus ojos en las estrellas y tus pies en la tierra.
THEODORE ROOSEVELT

La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito.
R.W. EMERSON

Ejercicio 3.1.

Observa inicialmente que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3-3ax^2+3a^2x-1-a^3}{x-a-1} = \frac{(x-a)^3-1^3}{x-1-a} \\ &= (x-1-a)\frac{(x-a)^2+(x-a)+1}{x-1-a} = (x-a)^2+(x-a)+1. \end{aligned}$$

de modo que esta función presenta una discontinuidad evitable en el punto $x = a+1$.

Se trata entonces de seleccionar $a+1 = x_0$, donde x_0 es el valor del límite que se resuelve a continuación aplicando infinitésimos equivalentes y determinadas propiedades del logaritmo, pues

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{\tan(\operatorname{sen}^2 x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-7x^2+x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2+x^4}{x^2} = -7, \end{aligned}$$

Se concluye finalmente que para $a=-8$, la función f posee una discontinuidad evitable en $x_0 = -7$.

Ejercicio 3.2.

Lo primero que conviene notar es que f es inyectiva.

En efecto, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, lo que lleva a la igualdad

$$-x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = -x_2,$$

de la cual se concluye que $x_1 = x_2$.

Lo anterior permite concluir que f es inyectiva. Si se asume ahora que f es continua, también es estrictamente monótona. De hecho, $f(f(x))$ es entonces estrictamente creciente con lo que, cualesquiera sean x_1, x_2 reales tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$.

Pero $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$ implica que $-x_1 < -x_2$, que es equivalente a $x_1 > x_2$, en contradicción con lo supuesto. De modo que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface la condición $f(f(x)) = -x$ para x real, entonces f no puede ser continua.

Ejercicio 3.3.

Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Como $f, g \in C[a,b]$, entonces $h \in C[a,b]$ y, por el teorema de Weierstrass, existen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tales que

$$f(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = M = \sup_{x\in[a,b]} g(x) = g(\beta).$$

Si $\alpha = \beta$, basta tomar $t = \alpha = \beta$, con lo cual se tiene que $f(t) = g(t)$ y, consecuentemente,

$$f^2(t) - 6g(t) = g^2(t) - 6f(t).$$

Si $\alpha \neq \beta$ (sin perder generalidad suponemos que $\alpha < \beta$), se tiene que $h \in C[\alpha, \beta]$ y

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) - g(\alpha) = M - g(\alpha) = \sup_{x\in[a,b]} g(x) - g(\alpha) \geq 0, \\ h(\beta) &= f(\beta) - g(\beta) = f(\beta) - M = f(\beta) - \sup_{x\in[a,b]} f(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Aplicando el primer teorema de Bolzano se garantiza la existencia de un $t \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tal que $h(t) = 0$, con lo cual $f(t) = g(t)$ y, por tanto, se tiene lo deseado.

Ejercicio 3.4.

Para analizar el término general de la serie se calcula

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{\pi}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \left(\cos\frac{\pi}{x} - 1\right)\right)^{\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{x} - 1}}\right)^{\left(\cos\frac{\pi}{x} - 1\right)x^2} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x} - 1\right)x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{\left(\frac{\pi}{x}\right)^2}{2!}x^2} = e^{-\dfrac{\pi^2}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el límite por sucesiones se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{\pi}{x}\right)^{x^2} = e^{-\dfrac{\pi^2}{2}} \neq 0.$$

Dado que el término general de la serie no tiende a 0, se puede concluir que la serie es divergente.

Ejercicio 3.5.

Se debe calcular el límite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\sec^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \operatorname{sen} x - 1\right)^{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x - 1}} \right]^{-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + 1}} = e^{-\dfrac{1}{2}}$$

y advierte que

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2} < \frac{e^{-\frac{1}{2}} + 1}{2}.$$

Finalmente, por la propiedad de acotación local, se garantiza la existencia de una vecindad $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, tal que para todo $x \in V^*\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ se cumple

$$(\operatorname{sen} x)^{\sec^2 x} < \frac{\dfrac{1}{\sqrt{e}} + 1}{2}.$$

Ejercicio 3.6.

Al ser f, por hipótesis, una función estrictamente monótona en el intervalo (a, b) se asumirá, sin pérdida de generalidad, que es estrictamente creciente. (Si fuese decreciente el razonamiento es análogo).

Dado que se tienen n puntos cualesquiera ordenados $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ en ese intervalo, entonces

$$\frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n}$$

es un valor intermedio entre $f(x_1)$ y $f(x_n)$, pues

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_1)}{n} + \cdots + \frac{f(x_1)}{n} \\ &\leq \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n} \\ &\leq \frac{f(x_n)}{n} + \frac{f(x_n)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n} = f(x_n). \end{aligned}$$

Por otra parte, del hecho de que $f(x)$ sea una función continua en el intervalo (a, b) y de que $a < x_1 < x_n < b$ sean puntos cualesquiera de este intervalo, se deduce la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_n]$.

A partir de esto, como

$$\frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n}$$

es un valor intermedio entre $f(x_1)$ y $f(x_n)$, se puede aplicar el segundo teorema de Bolzano que garantiza que existe $\xi \in [x_1, x_n]$, tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)),$$

que es justo lo que deseamos probar.

Nota finalmente que la condición de la monotonía de la función no es realmente necesaria, pues si la función no es monótona, igual se tiene que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\} \leq \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_n)}{n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}$$

con lo cual basta la continuidad de la función en el intervalo para poder aplicar el segundo teorema de Bolzano.

Ejercicio 3.7.

a) Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } |x| > \delta \text{ se cumple } |f(x)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon_0 = \min(|f(a)|, |f(b)|)$, de modo que existe δ_0 tal que $|f(x)| \leq \varepsilon_0$ para toda x con $|x| > \delta_0$. Sin perder generalidad, se puede considerar $\delta_0 > \max(|a|, |b|)$, con lo que f queda acotada en $(-\infty, -\delta_0] \cup [\delta_0, +\infty)$ por $|\varepsilon_0|$.

Resta entonces analizar qué ocurre en el intervalo $[-\delta_0; \delta_0]$. Como $f \in C(\mathbb{R})$, entonces $f \in C\,[-\delta_0, \delta_0]$ con lo cual se puede afirmar, por el teorema de Weierstrass, que f alcanza su máximo K y su mínimo k en $[-\delta_0, \delta_0]$.

Pero, por construcción, se tiene que $a, b \in [-\delta_0, \delta_0]$, por lo que

$$K \geq \max(f(a), f(b)) > \varepsilon_0 \text{ y } k \leq \min(f(a), f(b)) \leq -\varepsilon_0,$$

de modo que f alcanza sus extremos K y k en $\mathbb{R}$.

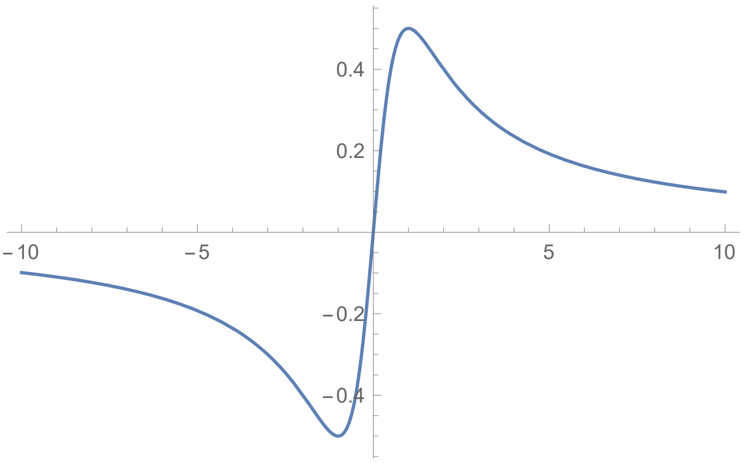


Figura II.3.1.: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, ejemplo de función que cumple las hipótesis del problema

b) En caso de que no existan los puntos a, b, tales que $f(a)f(b) < 0$, la función mantiene su signo constante en todo $\mathbb{R}$ y, como los límites al infinito se anulan, solo puede asegurarse la existencia de supremo e ínfimo y que se alcanza solo uno de ellos (dependiendo del signo de la función, como se observa en el contraejemplo cuyo gráfico se muestra en II.3.2).

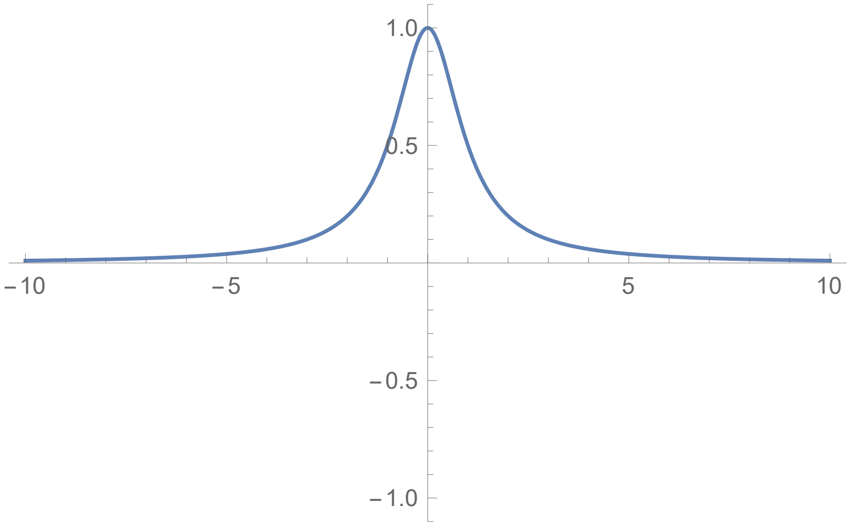


Figura II.3.2.: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ejemplo de función que no cumple las hipótesis del problema

Ejercicio 3.8.

Sea la función
$$f(x) = \frac{a_1}{x-\sigma_1} + \frac{a_2}{x-\sigma_2} + \frac{a_3}{x-\sigma_3}.$$
Se define el polinomio
$$P(x) = (x-\sigma_1)(x-\sigma_2)(x-\sigma_3)$$
y la función
$$H(x) = \begin{cases} f(x)P(x) & x \neq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \lim\limits_{x\to\sigma_i} f(x)P(x) & x = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \end{cases}.$$
Nota que $H(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y que los ceros de H coinciden exactamente con los ceros de f. Para comprobar esta última afirmación, observa que si fuera, por ejemplo, $H(\sigma_1) = 0$; como
$$f(x)P(x) = a_1(x-\sigma_2)(x-\sigma_3) + a_2(x-\sigma_1)(x-\sigma_3) + a_3(x-\sigma_1)(x-\sigma_2),$$
sería
$$\lim_{x\to\sigma_1} f(x)P(x) = a_1(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3) = 0,$$
y, por tanto, dado que por hipótesis $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, se tendría $a_1 = 0$, en contradicción con que, también por hipótesis, $a_1 > 0$. Se tiene entonces que $H(x) \neq 0$ para $x = \sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, de modo que $f(x)P(x) = 0$ implica $f(x) = 0$. Por otra parte, es claro que $f(x) = 0$ implica que $H(x) = 0$.

A partir de lo anterior, basta probar que H posee dos raíces reales comprendidas en los intervalos (σ_1, σ_2) y (σ_2, σ_3), para poder concluir que también las posee f.

Puesto que $H \in C(\mathbb{R})$, entonces H es continua en los intervalos $[\sigma_1, \sigma_2]$ y $[\sigma_2, \sigma_3]$ y satisface
$$\begin{aligned} H(\sigma_1) &= a_1(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3) > 0, \\ H(\sigma_2) &= a_2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3) < 0, \\ H(\sigma_3) &= a_3(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1) > 0. \end{aligned}$$
Aplicando el segundo teorema de Bolzano, se puede afirmar que existen $c \in (\sigma_1, \sigma_2)$ y $d \in (\sigma_2, \sigma_3)$, tales que $H(c) = H(d) = 0$, con lo cual queda demostrada la proposición.

Ejercicio 3.9.

La continuidad y acotación de esta función en $\mathbb{R}$ es evidente. Para demostrar que la continuidad uniforme no tiene lugar, se consideran las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ de término general

$$x_n = \sqrt{n\pi}, \qquad y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Nota que se cumple

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0,$$

luego, para todo $\delta > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|x_n - y_n| < \delta$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= \left|\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= |\operatorname{sen}(n\pi) - \cos(n\pi)| = |0 - (-1)^n| = 1. \end{aligned}$$

Seleccionando entonces un $\varepsilon \in (0,1)$ cualquiera fijo, se cumple que para todo $\delta > 0$ existen x_n, y_n $(n > N)$ con $|x_n - y_n| < \delta$, pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$, lo cual niega la continuidad uniforme de f.

Ejercicio 3.10.

a) Como $f(x) = \dfrac{x}{8 - x^3}$ es continua para toda $x \in [-2, 1]$, por teorema de Cantor, f es uniformemente continua en $[-2, 1]$.

b) Vía 1
En este caso el intervalo a analizar es abierto y la función $f(x) = \ln x$ no es continua en el correspondiente intervalo cerrado $[0, 1]$, por lo que no es posible aplicar el teorema de Cantor.

Para aplicar entonces la definición de continuidad uniforme, observa que el comportamiento del gráfico de la función sugiere considerar las sucesiones de término general

$$x_n = e^{-n}, \qquad y_n = e^{-n-1},$$

para las cuales se cumple que

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\ln e^{-n} - \ln e^{-n-1}| = 1.$$

Sin embargo,

$$|x_n - y_n| = |e^{-n} - e^{-n-1}| = \frac{e^{n+1} - e^n}{e^n e^{n+1}} = \frac{e-1}{e^{n+1}} \to 0.$$

De aquí que para toda $\delta > 0$, existe N tal que para toda $n \geq N$ se cumple $|x_n - y_n| < \delta$, pero

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon,$$

donde ε puede tomarse como cualquier valor fijo del intervalo $(0,1)$. Se tiene así que $f(x) = \ln x$ no es uniformemente continua en $(0,1)$.

Vía 2
Es conocida la caracterización de la continuidad uniforme que se da a continuación:

f es uniformemente continua en $[a,b]$ si y solo si f es continua en (a,b) y además existen (son finitos) los límites

$$\lim_{x\to a+} f(x) \text{ y } \lim_{x\to b-} f(x).$$

A partir de ello, basta tener en cuenta que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty,$$

para concluir que $\ln x$ no es uniformemente continua en $(0,1)$

c) La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no es continua en $[0,\pi]$, pues no lo es en $x=0$, donde no está definida. Como f posee en $x=0$ una discontinuidad evitable, se puede considerar la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,\pi) \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pi \end{cases},$$

que constituye una prolongación de la función analizada. Esta función es continua en $[0,\pi]$ y, por tanto, por teorema de Cantor, es uniformemente continua en dicho intervalo, luego, también lo es en $(0,\pi)$, donde coincide con la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, lo cual garantiza la continuidad uniforme de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \in (0,\pi)$.

d) Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$. Por la desigualdad triangular

$$|f(x) - f(y)| = |x - y + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y| + |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|.$$

Mediante la aplicación de identidades trigonométricas apropiadas y propiedades de módulo, se puede asegurar que, para todos los valores de x e y reales,

$$\begin{aligned}|x-y| + |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| &= |x-y| + 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \\ &= |x-y| + 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{x-y}{2}\right| \quad \text{y} \quad \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq 1,$$

se obtiene

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y| + 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = 2|x-y|.$$

Considerando entonces $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, se puede concluir que cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, tal que para todos los valores reales de x, y que satisfacen $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, se cumple que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, de donde se deduce la continuidad uniforme en $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$.
Advierte que la acotación

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

también se puede probar aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a la función $y = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[x, y]$ donde x, y son reales arbitrarios tales que $x < y$.

e) Para las sucesiones de término general

$$x_n = n\pi, \qquad y_n = n\pi + \frac{1}{n}$$

se observa que

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Como $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(y_n)| &= \left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\left|\operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\pi + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \pi \neq 0,\end{aligned}$$

de modo que $f(x) = x \operatorname{sen} x$ no es uniformemente continua en $[0, +\infty)$.

f) Como f es continua e impar, para demostrar la continuidad uniforme de la función $f(x) = \arctan x$ en $\mathbb{R}$, basta comprobarlo en $[0, +\infty)$, pues ello implica la continuidad uniforme de f en los intervalos de la forma $[a, +\infty)$ y $(-\infty, -a]$ para $a > 0$ y el Teorema de Cantor lo garantiza en el intervalo cerrado y acotado $[-a, a]$.

Aplicando las propiedades de $y = \arctan x$, se tiene que

$$|\arctan x - \arctan y| = \left|\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right| \leq \left|\frac{x-y}{1+xy}\right| < |x-y| < \varepsilon$$

para $\delta = \varepsilon$, lo cual garantiza la continuidad uniforme de f en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.11.

Puesto que f está, por hipótesis, definida y acotada en $\mathbb{R}$, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$, cualquiera sea $M > 0$ existe δ_M tal que para todo x que satisface $|x| > \delta_M$ se tiene $|x^3| > M$.

Si tomamos entonces $a < -\delta_M$ y $b > \delta_M$ cualesquiera, se tiene que $a^3 < -M < f(a)$ y $f(b) < M < b^3$, de modo que la función $x \mapsto f(x) - x^3$ satisface las hipótesis del primer teorema de Bolzano en el intervalo $[a, b]$ con lo cual puede asegurarse la presencia de una raíz de h en tal intervalo.

II.4. Cálculo diferencial

No hay nada repartido de modo más equitativo que la razón; todo el mundo está convencido de tener suficiente.
René Descartes

Lo sabe todo, absolutamente todo. Figúrense lo tonto que será.
Miguel de Unamuno

A veces sentimos que lo que hacemos es tan solo una gota en el mar, pero aún el mar sería menos si le faltara una gota.
Madre teresa de Calcuta

La grandeza de un hombre está en reconocer su propia pequeñez.
Blaise Pascal

Los grandes conocimientos engendran las grandes dudas.
Aristóteles

Ejercicio 4.1.

Para probar lo deseado, construye la función auxiliar

$$H(x) = (a-x)(b-x)f(x),$$

que es diferenciable en $[a,b]$ al ser el producto de $f(x)$ que, por hipótesis, es diferenciable en $[a,b]$ y de un polinomio que también lo es. $H(x)$ cumple además que $H(a) = H(b) = 0$.

Por el teorema de Rolle se puede afirmar que existe $c \in (a,b)$, tal que $H'(c) = 0$. Dado que

$$H'(c) = (c-b)f(c) + (c-a)f(c) + (a-c)(b-c)f'(c),$$

al dividir por $(c-a)(c-b) \neq 0$ (por ser $c \in (a,b)$), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{f(c)}{c-a} + \frac{f(c)}{c-b} + f'(c) &= 0, \\ f(c)\left[\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b}\right] + f'(c) &= 0. \end{aligned}$$

Como por hipótesis, f no se anula en $[a,b]$, se puede dividir la expresión anterior por $f(c)$, con lo cual se obtiene

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b} = -\frac{f'(c)}{f(c)},$$

que es equivalente a lo que se quería demostrar.

Ejercicio 4.2.

Considera la función $h(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$.

Como f es diferenciable sobre el segmento $[a,b]$ y $ab > 0$, la función h es diferenciable en el segmento $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$.

Se puede aplicar entonces el Teorema del Valor Medio de Lagrange a la función h en el intervalo $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, lo que garantiza la existencia de un elemento $\gamma \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$, que satisface

$$\begin{aligned}
h'(\gamma) &= \frac{h\left(\frac{1}{b}\right) - h\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = ab\frac{\frac{1}{b}f(b) - \frac{1}{a}f(a)}{a-b} \\
&= \frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Pero

$$h'(\gamma) = f\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma}f'\left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

y como $\gamma \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$, puede escribirse en la forma $\gamma = \frac{1}{\xi}$, donde $\xi \in [a,b]$, con lo cual

$$h'(\gamma) = h'\left(\frac{1}{\xi}\right) = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

quedando así probada la existencia de un elemento $\xi \in (a,b)$, tal que

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Ejercicio 4.3.

a) Como, por hipótesis, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = l$, se tiene que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para toda $x > \delta$, $|f'(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < f'(x) < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puesto que además $f \in D[0,+\infty)$, se cumple que $f \in D[x_0, x]$ para todas x_0 y x reales tales que $0 \leq \delta < x_0 < x$.

Aplicando entonces el teorema del valor medio de Lagrange a f en $[x_0, x]$, se puede asegurar que existe $c \in (x_0, x)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

lo cual puede ser reescrito en la forma

$$f'(c)(x - x_0) + f(x_0) = f(x).$$

Como $c \in (x_0, x)$, entonces

$$(l - \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) + f(x_0) < f'(c)(x - x_0) + f(x_0) < (l + \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) + f(x_0).$$

Al ser $x > 0$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$(l - \frac{\varepsilon}{2})\frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x} < \frac{f(x)}{x} < (l + \frac{\varepsilon}{2})\frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}$$

y nota que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left[(l - \frac{\varepsilon}{2})\frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}\right] &= l - \frac{\varepsilon}{2} > l - \varepsilon, \\ \lim_{x\to\infty}\left[(l + \frac{\varepsilon}{2})\frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}\right] &= l + \frac{\varepsilon}{2} < l + \varepsilon, \end{aligned}$$

de modo que cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda $x > \delta$ se cumple

$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < l + \varepsilon,$$

lo que significa que existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Advierte que si se probara que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, aplicando la regla de L'Hôpital, se podría demostrar lo que se pide en este inciso, pues se tendría que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

Intenta entonces, a partir razonamientos análogos a los anteriores, analizar si es posible concluir que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

b) Vía 1
Del inciso anterior se desprende de inmediato la proposición, pues como existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Pero como además, por hipótesis, existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f(x) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = l \cdot 0 = 0.$$

Vía 2
Nota que si existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, entonces existe $\lim_{x\to\infty} f(x+1) = l$, con lo cual existe $\lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$.

Como $f \in D[0,+\infty)$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f \in D[n, n+1]$. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a f en $[n, n+1]$ se garantiza la existencia, para cada n natural, de un $d_n \in (n, n+1)$, tal que

$$f'(d_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f(n+1) - f(n),$$

y como por hipótesis existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, aplicando la definición de límite según Heine, se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(d_n) = \lim_{n\to\infty}(f(n+1) - f(n)) = \lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0.$$

Ejercicio 4.4.

Conviene aquí razonar por el absurdo: Asume que existen dos ceros de f entre los que no hay ninguno de g y sean a y b tales ceros. Sin perder generalidad, sea $a < b$.

Dado que f y g son dos funciones diferenciables en el conjunto de los números reales, lo son también en el intervalo $[a, b]$, en el cual se tiene que $g(x) \neq 0$, lo que permite asegurar que la función auxiliar

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

es también diferenciable en $[a, b]$.

Se puede entonces aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a h en $[a, b]$, con lo cual existe $c \in (a, b)$, tal que

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{\dfrac{f(b)}{g(b)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{b - a} = h'(c).$$

Reescribiendo la expresión anterior en la forma

$$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(b)}{(b-a)g(b)g(a)},$$

ello conduce a una contradicción evidente, dado que el miembro izquierdo es no nulo, para toda x real, por la hipótesis $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$; en tanto el miembro derecho se anula, por ser a y b ceros de f. Se concluye finalmente que lo supuesto es falso de modo que entre dos ceros de f hay siempre un cero de g. Nota que, análogamente, entre dos ceros de g hay siempre un cero de f.

Ejercicio 4.5.

a) Observa inicialmente que, para que una recta que pasa por el punto $Q(3,5)$ forme un área finita en el primer cuadrante, debe tener pendiente negativa. Sea entonces m la pendiente de dicha recta, cuya ecuación será

$$y = m(x-3)+5.$$

Se debe hallar m, tal que el área que determine la recta con los ejes coordenados en el primer cuadrante sea mínima. La superficie encerrada entre la recta y los ejes coordenados será un triángulo cuyos vértices serán el $(0,0)$ y los interceptos de la recta con los ejes, los que tendrán la forma $(0,-3m+5)$ y $(3-\frac{5}{m},0)$.

Puesto que el triángulo es rectángulo, la expresión de su área, en términos de m, será

$$A(m) = \frac{(-3m+5)\left(3-\frac{5}{m}\right)}{2} = \frac{1}{2m}(-9m^2+30m-25) = -\frac{(3m-5)^2}{2m}.$$

Para hallar el valor de m que minimiza esta función se puede verificar que

$$A'(m) = \frac{(3m+5)(-3m+5)}{2m^2} = \frac{9m^2-25}{2m^2},$$

se anula para $m = \pm\dfrac{5}{3}$, con lo cual el único punto estacionario de interés es el correspondiente a $m = -\dfrac{5}{3}$.

Nota que si m tiende a cero, $A(m)$ tiende a $+\infty$ y si m tiende a $-\infty$, $A(m)$ tiende a $+\infty$. Queda claro entonces que la función alcanza un valor mínimo que, además, es absoluto.

Es posible comprobar que tal mínimo se alcanza, analizando los cambios de signo de la primera derivada alrededor, en particular, de $m = -\dfrac{5}{3}$. Se puede igualmente, que es lo que se hará a continuación, calcular la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{-25}{m^3}$$

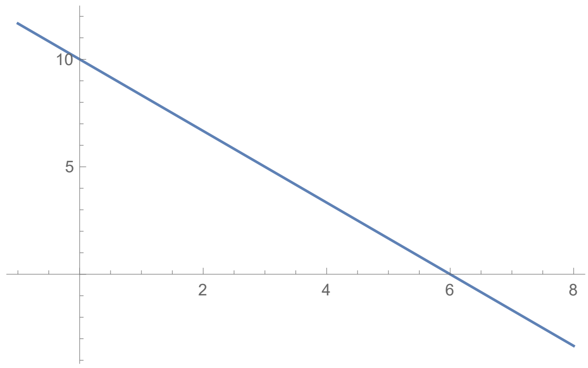


Figura II.4.1.: Función lineal que forma, junto a los ejes coordenados, el triángulo de área mínima

y observar que resulta ser positiva para toda $m < 0$. Se garantiza así que $A(x)$ alcanza en $m = -\dfrac{5}{3}$ el mínimo buscado. De este modo, la ecuación de la recta que se deseaba obtener es

$$y = -\frac{5}{3}(x-3) + 5 = -\frac{5}{3}x + 10,$$

cuyo gráfico se muestra en la figura II.4.1

b) Sean,

- P el punto donde está situado el hombre sobre el bote de remos,
- A el punto a 5 km de P,
- B, el punto a 6 km de A al que el hombre debe llegar,
- C, el punto al cual el hombre se dirigirá remando desde P para, de allí, seguir caminando hasta B, y que se encuentra a una distancia x de A, como se muestra en la figura II.4.2.

Se desea que el hombre llegue del punto P a B en el menor tiempo posible. Se debe determinar, la posición del punto C al que el hombre deberá llegar remando para de allí seguir, a pie, hasta B.

Nota que el triángulo PAC es rectángulo en A (dado que PA es la distancia de P a A y, por tanto, es perpendicular a la recta AB que representa parte de la costa), con lo que la longitud del segmento PC es, por teorema de Pitágoras, $\sqrt{25+x^2}$.

El tiempo que emplea el hombre en recorrer el camino es la suma del tiempo que invierte remando de P a C y, caminando, de C a B. El tiempo que viaja de P a C (entendido por el cociente entre el espacio

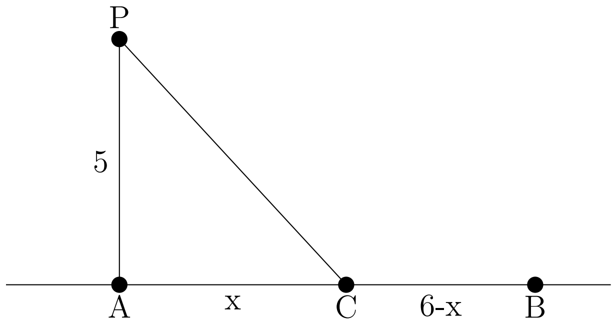


Figura II.4.2.: Situación planteada por el problema

PC recorrido y la velocidad a la que lo recorre remando que, por dato, es 2 km/h), no es más que

$$\frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$$

mientras que el tiempo que emplea caminando, a razón de 4 km/h, de C a B es

$$\frac{6-x}{4}.$$

De este modo, la función a minimizar viene dada por

$$T(x) = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}, \qquad \text{para } x \in [0;6].$$

Nota que

$$T'(x) = \frac{2x-\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$$

y que

$$2x - \sqrt{25+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

con lo cual el único punto estacionario de interés, dado que x representa la distancia de A a C y que, por tanto es positiva, es $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Se concluye entonces, teniendo en cuenta que

$$x < \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad T'(x) < 0,$$

$$x > \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad T'(x) > 0$$

y que

$$T(0)=\frac{\sqrt{25+0^2}}{2}+\frac{6-0}{4}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4,$$
$$T(6)=\frac{\sqrt{25+6^2}}{2}+\frac{6-6}{4}=\frac{\sqrt{61}}{2}=3{,}9$$
$$T\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{25+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}+\frac{6-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{\sqrt{25+\frac{75}{9}}}{2}+\frac{6-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{4}=3{,}7,$$

que la función alcanza su mínimo absoluto en $x=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, por lo que, para lograr que el recorrido de P a B, pasando por C, sea en el menor tiempo posible, el punto C deberá estar situado a $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ km (aproximadamente a 2,9 km) de A.

Nota que $T(0)$ es el tiempo que habría empleado el hombre si hubiese remado hasta A y caminado hasta B y, $T(6)$, el que habría tardado en ir remando directamente de P a B.

c) Considera inicialmente,

- $(0;0)$ como el punto de partida de A,
- $(65;0)$ como la posición inicial de B dado que se encontraba a 65m.m de A,
- $(65-10t;0)$ como la nueva posición de B transcurridas t horas, dado que viaja al oeste a una velocidad de 10 m.m/h,
- $(0;15t)$ como la nueva posición de A, transcurridas las mismas t horas, dado que viaja al sur a razón de 15 m.m/h.

Observa que el triángulo de vértices $(0;0)$, $(65-10t;0)$ y $(0;15t)$ es rectángulo y que la función que se debe minimizar no es más que la distancia entre las nuevas posiciones de A y B transcurridas t horas que, por Pitágoras, viene dada por la expresión

$$D(A,B)=D(t)=\sqrt{(65-10t)^2+(15t)^2}$$

Dado el crecimiento estricto de la función $y=\sqrt{x}$, minimizar tal función será equivalente, a minimizar el radicando

$$r(t)=(15t)^2+(65-10t)^2.$$

Observa que, al ser $r(t)$ de tipo polinomial, específicamente una parábola que abre hacia arriba, se simplifica mucho el análisis que resta por hacer pues obviamente alcanzará el valor mínimo en su vértice que es, de hecho, el punto $(t, D(t))$ donde $r'(t) = 50(13t - 26) = 0$, lo cual ocurre para $t = 2$. Nota que

$$r''(t) = 650 > 0$$

para toda t, como era de esperar y, en particular, para $t = 2$.

Se concluye así que la distancia mínima entre estos dos barcos se alcanza transcurridas 2 horas y es $D(2) = 15\sqrt{13}$ m.m (lo que equivale aproximadamente a 18 m.m).

d) Se debe resolver el problema de calcular las dimensiones del campo rectangular con perímetro mínimo y cuya área sea 216 m^2.

Sean entonces x e y las longitudes de los lados del terreno. A partir del valor del área se obtiene una primera relación entre las variables dada por $xy = 216$, que es equivalente (dado que x e y no pueden ser nulas) a

$$x = \frac{216}{y}. \tag{II.4.1}$$

Por otro lado, se desea minimizar el perímetro del terreno a cercar, el cual viene dado por

$$P(x, y) = 2x + 3y,$$

que, dada la condición II.4.1, puede escribirse dependiendo de una sola variable en la forma

$$P(y) = \frac{432}{y} + 3y, \tag{II.4.2}$$

El mínimo buscado debe hallarse entre los puntos estacionarios o críticos de $P(y)$ y los extremos del intervalo donde y varía. De

$$P'(y) = -\frac{432}{y^2} + 3 = \frac{-432 + 3y^2}{y^2} = 0,$$

resulta que los puntos estacionarios son $y = \pm 12$ y el punto crítico es $y = 0$.
Al analizar el signo de la primera derivada en los diferentes intervalos se

$+$	-12	$-$	0	$-$	12	$+$

concluye que el punto de mínimo local se alcanza cuando $y = 12$, en cuyo caso el perímetro del campo a cercar, incluyendo la cerca paralela a uno de los lados que divide el campo a la mitad, es

$$4 \cdot 9 + 3 \cdot 12 = 72\ m.$$

A partir de lo anterior se tiene que las dimensiones del rectángulo exterior que requieren la menor cantidad total de cerca son 12 m y 18 m y que 72 m es la cantidad mínima de cerca a usar para encerrar y dividir el terreno.

Ejercicio 4.6.

a) Considera la función auxiliar $g(x) = e^{-x}f(x)$, diferenciable en $\mathbb{R}$ por ser el producto de dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}$. Se tiene además que

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0,$$

dado que $e^{-x} > 0$ y $f'(x) > f(x)$ para todo valor real de x. Se puede afirmar entonces que la función g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y como $g(x_0) = e^{-x_0}f(x_0) = 0$, se cumple que $g(x) > g(x_0) = 0$ para todo $x > x_0$. Como $e^{-x} > 0$ para todo valor real de x, se concluye finalmente que $f(x) > 0$ para toda $x > x_0$.

b) Se define la función $h = f - g$, que es derivable en el conjunto de los números reales por serlo f y g. Esta función es derivable en los intervalos $[a, x]$ para $a < x$ y $[x, a]$ para $x < a$.

Vía 1
Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a la función h en esos intervalos, existe $c \in [a, x]$ o $c \in [x, a]$ (según sea el caso), tal que

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{f(x) - g(x) - (f(a) - g(a))}{x - a} = \frac{f(x) - g(x)}{x - a}.$$

Pero

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) > 0,$$

ya que, por hipótesis, para toda x real se cumple

$$f'(x) > g'(x).$$

Entonces de

$$h'(c) = \frac{f(x) - g(x)}{x - a} > 0$$

se concluye que

$$f(x) > g(x) \quad \text{para todo } x > a$$

$$f(x) < g(x) \quad \text{para todo } x < a.$$

Vía 2
Como $h = f - g$ es creciente (por $f' > g'$) y se anula en a,

$$h(x) > h(x_0), \ \forall x > a,$$

de donde

$$h(x) > 0, \ \forall x > a,$$

Análogamente

$$h(x) < 0, \ \forall x < a,$$

concluyendo que h es positiva después de a y negativa antes de a.

c) Si se omite la hipótesis $f(a) = g(a)$ ya no sería cierta la tesis, como muestra el ejemplo de las funciones $f(x) = \arctan x$ y $g(x) = 5$, para las cuales

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 = g'(x)$$

sin embargo, para toda x real, $f(x) < g(x)$.

d) Vía 1
Para probar la veracidad de la proposición se debe desarrollar cada una de las funciones usando la fórmula de Taylor con resto integral en una vecindad de $x = a$. Se tiene así que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots \\ &\quad + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt, \\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x-a) + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots \\ &\quad + g^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt. \end{aligned}$$

Como $f(a) = g(a)$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para toda $k = 1, \ldots, n-1$ y $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ para toda $x > a$, ello conduce a que

$$(f-g)(x) = \int_a^x (f-g)^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt > 0$$

para toda $x > a$, de donde se deduce que, en efecto, $f(x) > g(x)$ para toda $x > a$.

Vía 2
Aplicando inducción respecto a n.

Inicio de inducción
La solución dada en el *inciso b)* de este ejercicio prueba la veracidad del problema para $n = 1$.

Hipótesis de inducción
Asume que se cumple que

$$f(a) = g(a), f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a),\ k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x) \implies f(x) > g(x), \forall x > a$$

Tesis de inducción
Se desea probar que

$$f(a) = g(a), f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a),\ k = 1, 2, \dots, n$$

$$f^{(n+1)}(x) > g^{(n+1)}(x) \implies f(x) > g(x), \forall x > a$$

Demostración
Sea

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

y se define

$$H(x) = h'(x).$$

Nota que H cumple las hipótesis de inducción, de modo que

$$H(x) > 0, \forall x > a,$$

por lo que se tiene finalmente que

$$h(a) = 0 \text{ y } h'(x) > 0, \forall x > a,$$

es decir,

$$f(a) = g(a), f'(x) > g'(x), \forall x > a.$$

El problema se reduce de ese modo al inicio de inducción demostrado antes; completando así la demostración.

Vía 3
Si $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ para toda $x > a$, por propiedades de la integral, se tiene que

$$\int_a^x f^{(n)}(x)dx > \int_a^x g^{(n)}(x)dx,$$

lo cual, por el teorema fundamental del cálculo, conduce a

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) > g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(a).$$

Como por hipótesis, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para los valores naturales de k tales que $0 < k < n$, esta desigualdad es equivalente a

$$f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(a) - g^{(n-1)}(a) = 0.$$

De aquí se concluye que

$$f^{(n-1)}(x) > g^{(n-1)}(x)$$

para toda $x > a$. Razonando de manera análoga, se repite el proceso anterior hasta concluir, dado que $f(a) = g(a)$ y $f'(a) > g'(a)$ para toda $x > a$, que $f(x) > g(x)$ para toda $x > a$.

e) Vía 1

Para resolver esta desigualdad auxiliémonos de la propiedad demostrada anteriormente

Sea $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}, g(x) = \operatorname{sen} x, h(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ y nótese que

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) &= h(0) &= 0 \\ f'(0) &= g'(0) &= h'(0) &= 1 \\ f''(0) &= g''(0) &= h''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= g'''(0) &= h'''(0) &= -1 \end{aligned} \tag{II.4.3}$$

Dado que

$$0 = f^{IV}(0) < g^{IV}(0) = 1,$$

se puede afirmar que

$$f(x) < g(x), \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Continuando con la derivación se tiene que

$$\begin{aligned} g^{V}(0) &= h^{V}(0) &= 1 \\ g^{VI}(0) &= h^{VI}(0) &= 0, \end{aligned} \tag{II.4.4}$$

y como
$$-1 = g^{VII}(0) = h^{VII}(0) = 0,$$
en efecto, se tiene la desigualdad que se desea probar
$$f(x) < g(x) < h(x), \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Vía 2:
Para demostrar la desigualdad basta aplicar la serie de Taylor con resto en forma integral
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \operatorname{sen}^{(5)} t dt = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \operatorname{sen}^{(7)} t dt \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \cos t dt, \end{aligned}$$
y tener en cuenta que
$$\frac{(x-t)^4}{4!} \cos t \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{(x-t)^6}{6!} \cos t \geq 0 \text{ para } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
Aplicando las propiedades conocidas de la integral, se tiene que
$$r_4 = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos t \geq 0 \quad \text{y} \quad r_6 = -\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \cos t \leq 0,$$
con lo cual, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos t dt$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \cos t dt \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$
de modo que
$$x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Ejercicio 4.7.

a) Vía 1
Considera la función $f(x) = e^x - 1 - x$, para la cual $f'(x) = e^x - 1$ y, por tanto, $f'(0) = 0$.

Además se tiene que $f''(x) = e^x$, con lo cual $f''(0) = 1 > 0$, de lo que se concluye que la función posee un mínimo local en $x = 0$, que es, de hecho, absoluto dada la convexidad de la función (nota que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$).

A partir de todo lo anterior queda claro que $f(x) \geq f(0) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, lo que demuestra la desigualdad para todo valor real de x.

Vía 2
Como $y = e^x$ es convexa hacia abajo en todo su dominio, el gráfico de la función queda por encima de todas sus tangentes, en particular de la que tiene en $(0, 0)$, cuya expresión es justamente $y = 1 + x$.

b) Vía 1
Para $x < 0$ la desigualdad resulta obvia. Se define entonces para $x > 0$ la función $f(x) = e^x - ex$, entonces $f'(x) = e^x - e$ y, por tanto $f'(1) = 0$.

Como $f''(1) = e > 0$, la función posee un mínimo en $x = 1$ que es absoluto dada su convexidad. De aquí que

$$f(x) \geq f(1) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo cual es equivalente a que

$$e^x \geq ex \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vía 2
Si se divide por e la expresión que se desea probar, se tiene que

$$e^{x-1} > x.$$

Si se hace a continuación el cambio de variables $x = y + 1$, se tendría que demostrar que

$$e^y > y + 1,$$

lo cual no es más que la desigualdad ya comprobada en el primer inciso de este ejercicio.

c) Se desea probar que para $x \in (0, 1]$ se cumple

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) \ln(1 + x) = \frac{3 + x}{3x} \ln(1 + x) < 1,$$

que equivale probar que

$$(3+x)\ln(1+x) < 3x.$$

Considera la función $y = (3+x)\ln(1+x)$, que satisface que

$$y' = \ln(1+x) + \frac{3+x}{1+x} \quad \text{y} \quad y'' = \frac{x-1}{(1+x)^2} < 0,$$

pues $x \in (0,1]$.

De este modo, por la convexidad de la función, es posible afirmar que las tangentes a su gráfico en el intervalo $(0,1]$ quedan por encima de la curva en todo punto del intervalo.

Teniendo en cuenta que $y'(0) = 3$ y $y(0) = 3$, se tiene que la recta $y = 3x$ es tangente a la curva en el punto $(0,0)$, lo que prueba la proposición.

d) Vía 1

Nota que la función $f(x) = \ln x$ es convexa hacia arriba en todo su dominio, con lo cual su gráfico queda por encima de cualquiera de las secantes que unen un par de puntos arbitrarios sobre la curva. Luego, para todo x_1 y x_2 tales que $0 < x_1 \leq x_2$ y cualquier $\alpha \in [0,1]$, se cumple la desigualdad

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Asumiendo en particular $\alpha = \dfrac{3}{5}$, se tiene que

$$\ln\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2\right) \geq \frac{3}{5}\ln(x_1) + \frac{2}{5}\ln(x_2),$$

lo que resulta ser equivalente a la desigualdad que se desea demostrar

$$5\ln\left(\frac{3x_1+2x_2}{5}\right) - 3\ln(x_1) \geq 2\ln(x_2).$$

Vía 2

Sea

$$x_1 = x, \quad x_2 = x+a, \quad a > 0,$$

con lo cual la desigualdad a demostrar se convierte en

$$5\ln\left(3\frac{x}{5} + \frac{2}{5}(x+a)\right) - 3\ln x \geq 2\ln(x+a)$$

que será equivalente a probar que

$$5\ln\left(3\frac{x}{5}+\frac{2}{5}(x+a)\right)\geq 3\ln x+2\ln(x+a)=\ln(x^3(x+a)^2);$$

es decir,

$$\ln\left(\frac{3x+2(x+a)}{5}\right)^5\geq\ln(x^3(x+a)^2).$$

Pero, por el crecimiento del logaritmo, esto será equivalente a probar que

$$\left(x+\frac{2a}{5}\right)^5\geq x^3(x+a)^2,$$

lo cual se confirma con el desarrollo algebraico de la expresión, siendo, en efecto

$$\frac{3a^2x^3}{5}+\frac{16a^3x^2}{25}+\frac{16a^2x}{125}+\frac{32a^5}{3125}\geq 0.$$

e) Vía 1

Cualesquiera sean los valores reales positivos de c y d diferentes de 1, las funciones

$$f(x)=c^x,\qquad g(x)=d^x$$

son funciones convexas hacia abajo. Entonces, para $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, y para todo x, y reales, se cumple

$$c^{\alpha x+\beta y}\leq\alpha c^x+\beta c^y \tag{II.4.5}$$

$$d^{\alpha x+\beta y}\leq\alpha d^x+\beta d^y. \tag{II.4.6}$$

Considerando en particular, en (II.4.5) $x=1$, $y=0$ y, en (II.4.6) $x=0$, $y=1$, se obtiene

$$c^\alpha\leq\alpha c+\beta \tag{II.4.7}$$

$$d^\beta\leq\alpha+\beta d. \tag{II.4.8}$$

Todo lo que resta es sumar (II.4.7) y (II.4.8), con lo que se obtiene la relación

$$c^\alpha+d^\beta\leq\alpha c+\beta+\alpha+\beta d=\alpha c+\beta d+1,$$

como se quería demostrar.

Vía 2

Como la función $f(x)=a^x$ es convexa hacia abajo, cualquiera sea $x\in[0,1]$ para $a>0$, $a\neq 1$, se cumple que la secante que pasa por los puntos $(0,1)$

y $(1, a)$ queda por encima del gráfico de la función en dicho intervalo. Luego, para toda $x \in [0, 1]$, se tiene que

$$(a-1)x + 1 \geq a^x,$$

de donde

$$ax - x + 1 \geq a^x.$$

Si en la desigualdad anterior se toma $a = c$ y $x = \alpha$ se obtiene que

$$c\alpha - \alpha + 1 \geq c^\alpha, \tag{II.4.9}$$

y, de manera análoga, para $a = d$ y $x = \beta = 1 - \alpha$,

$$d\beta - \beta + 1 \geq d^\beta. \tag{II.4.10}$$

Sumando ahora (II.4.9) y (II.4.10) y teniendo en cuenta que $\alpha + \beta = 1$, se llega a la desigualdad

$$c\alpha - \alpha + 1 + d\beta - \beta + 1 \geq c^\alpha + d^\beta,$$

que resulta ser equivalente a

$$c^\alpha + d^\beta \leq \alpha c + \beta d + 1.$$

Ejercicio 4.8.

a) Vía 1

Efectuando operaciones algebraicas y empleando infinitésimos equivalentes se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x - x\cos x)(\operatorname{sen} x + x\cos x)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x\cos .x}{x^3}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x}\right)
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (\cos x - x\operatorname{sen} x)}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{3}, \\
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim_{x\to 0}\cos x = 1 + 1 = 2,
\end{aligned}$$

con lo cual
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

Vía 2

Utilizando desarrollos de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x &= \left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)\\ x^2\cos^2 x &= x^2\left[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right]^2 = x^2(1-x^2+o(x^3)) = x^2-x^4+o(x^5).\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^5)}{x^4}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

b) Vía 1

Como existe $f''(a)$, entonces $f'(a)$ es continua en $x=a$, por lo que $f'(x)$ existe para $x\in(a-2h,a+2h)$, donde $h>0$ es algún número suficientemente pequeño.

De aquí, que $f(x)$ es derivable en $[a-h,a+h]$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\\ =\ &\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}\\ =\ &\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]\\ =\ &\frac{1}{2}2f''(a)=f''(a).\end{aligned}$$

Vía 2

Utilizando desarrollos de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)\\ f(a-h) &= f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a)h^2+o(h^2)}{h^2}=f''(a).$$

Ejercicio 4.9.

a) Sea

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}=|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}.$$

El dominio de esta función es

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}:x\leq 2 \text{ o } x>3\},$$

con lo cual podemos escribir la función en la forma

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}} & \text{si } x\in[0,2]\cup(3,+\infty) \\ -x\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}} & \text{si } x\in(-\infty,0) \end{cases}.$$

Ceros $(0;0)$ y $(2;0)$.

Interceptos con el eje y $(0;0)$.

Continuidad
$f(x)$ es continua en su dominio $(-\infty,2]\cup(3,+\infty)$ y como

$$\lim_{x\to 3^+} x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=+\infty$$

la recta $x=3$ es, por la derecha, una asíntota vertical de la función.

Asíntotas oblicuas
Para $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=1.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-x\right) = \lim_{\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-1\right) \\
&= \lim_{\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}.\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x-3} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1-\frac{3}{x}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De modo que $y = x + \dfrac{1}{2}$ es una asíntota oblicua para f cuando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = -1.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+x\right) = \lim_{\to-\infty} -x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-1\right) \\
&= \lim_{\to-\infty} -x\left(\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}.\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1-\frac{3}{x}} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

luego, $y = -x - \dfrac{1}{2}$ es una asíntota oblicua para f cuando $x \to -\infty$.

Monotonía y extremos locales

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-4)(2x-3)}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}} & \text{si } x \in [0;2] \cup (3,+\infty) \\[2ex] -\dfrac{(x-4)(2x-3)}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}} & \text{si } x \in (-\infty;0) \end{cases}$$

f es monótona decreciente para $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right] \cup (3; 4]$.

f es monótona creciente para $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup [4; +\infty]$

$y(0) = y(2) = 0$, y $y(4) = 4\sqrt{2}$ son mínimos locales.

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es un máximo local.

Nota que $y = f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues los límites laterales de la primera derivada en cero son $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, entonces $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}x$ son tangentes laterales a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

Convexidad y puntos de inflexión

$$y'' = \operatorname{sgn}(x)\frac{11x - 24}{4\sqrt{(x-2)^3(x-3)^5}}, \quad x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty).$$

f es convexa hacia abajo para $x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$ y es convexa hacia arriba para $x \in [0; 2]$. El punto $(0; 0)$ es, por tanto, un punto de inflexión.

La figura II.4.3 muestra el gráfico de la curva.

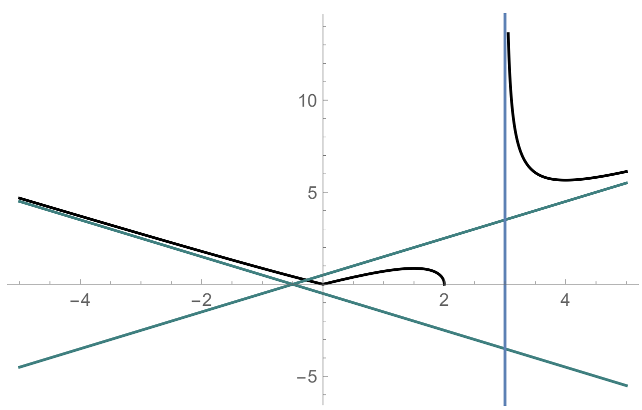


Figura II.4.3.: Gráfico de $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3}} = |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$

b) $y = (x - 1)\sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

Dominio $Dom(f) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

Ceros: $(2; 0)$.

Analicemos el comportamiento de la función a la izquierda del punto $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} (x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x \to 0^-} (x-1)\sqrt{1-\frac{2}{x}} = -\infty.$$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad no evitable de segunda especie, de modo que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical por la izquierda para la curva.

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left((x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}} - x \right).$$

Con el cambio de variable

$$h = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \left((x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}} - x \right) &= \lim_{h \to 1} \frac{h^3 + h + 2}{1 - h^2} = \lim_{h \to 1} \frac{(h-1)(h^2+h+2)}{(1-h)(1+h)} \\ &= \lim_{h \to 1} -\frac{h^2+h+2}{1+h} = -2, \end{aligned}$$

luego, la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua de la gráfica de la función dada.

Monotonía y extremos

$$y' = \frac{x^2 - x - 1}{x(x-2)} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 0 \text{ para } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

y

$$y' \text{ no existe cuando } x = 0 \text{ o } x = 2$$

con lo cual, como $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$, el único posible punto de extremo local es $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ y además el signo de y' coincide con el de $x^2 - x - 1$, de modo que f es monótona decreciente si $x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0)$

y es monótona decreciente si $x \in (-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (2, +\infty)$. A partir de todo lo anterior se tiene que f alcanza un máximo local en $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $f(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}}$.

Convexidad y puntos de inflexión

$$y'' = \frac{x-3}{x^2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}.$$

Como $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$, el único posible punto de inflexión se alcanza en $x = 3$. Pero f es convexa hacia abajo en el intervalo $(2; 3)$ y convexa hacia arriba en los intervalos $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$, de donde podemos concluir que, en efecto, $(3, \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ es punto de inflexión a la curva.

La Figura II.4.4 muestra el gráfico de la función.

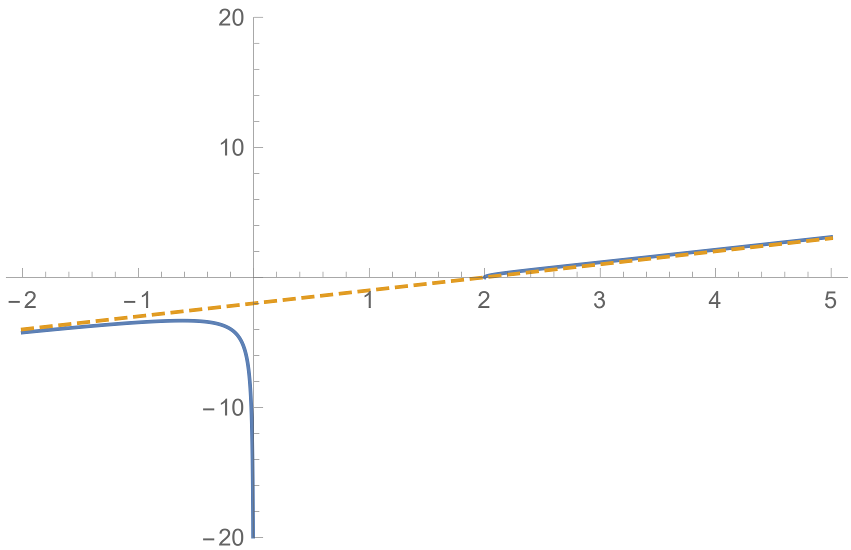


Figura II.4.4.: Gráfico de $y = (x-1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$

Ejercicio 4.10.

a) Supongamos, sin perder generalidad, que en x_0 la función $u(x)$ alcanza un máximo local positivo. En tal caso, se tiene:

- Como u diferenciable en x_0, por el teorema de Fermat, $u'(x_0) = 0$.
- $u''(x_0) \leq 0$, por la condición suficiente de extremo local.
- $u(x_0) > 0$ por ser un máximo local positivo.

Esto contradice el hecho de que la función $u(x)$ satisface la ecuación

$$u''(x) = e^x u(x) > 0, \forall x \in [0; 1],$$

dado que, evaluando en particular en x_0 se tendrá que

$$0 \geq u''(x_0) = e^{x_0} u(x_0) > 0.$$

De manera análoga se procede en el caso de un mínimo local negativo.

b) La función u es diferenciable y, por tanto, continua en $[0, 1]$, por lo que el teorema de Weierstrass garantiza que alcanza sus extremos absolutos en ese intervalo. Del hecho $u(0) = u(1) = 0$, el máximo tendría que ser no negativo y el mínimo no positivo.

Como por el inciso anterior ya se sabe que $u(x)$ no puede tener un máximo local positivo ni un mínimo local negativo en $x_0 \in (0; 1)$, tiene que ser

$$\max_{x \in (0,1)} u(x) = \min_{x \in (0,1)} u(x) = 0,$$

con lo que queda claro que la función es constante en el intervalo analizado y justamente es $u(x) \equiv 0$.

¿Se podrá debilitar la condición dada; $u(0) = u(1) = 0$, con el objetivo que se siga cumpliendo la tesis de la proposición?

Ejercicio 4.11.

a) Nota que

$$f'(x) = 3x^2 - a,$$

entonces para $a \leq 0$ se tiene $f'(x) \geq 0$, con lo cual f es creciente para toda x real si $a \leq 0$.

Si por el contrario, $a > 0$, entonces

$$f'(x) = 3x^2 - a = (\sqrt{3}x - \sqrt{a})(\sqrt{3}x + \sqrt{a}),$$

con lo cual se tiene el siguiente esquema de signos para la primera derivada

de donde se concluye que, siendo $a > 0$, la función es decreciente en $(-\frac{\sqrt{a}}{3}; \frac{\sqrt{a}}{3})$ por lo que no será creciente en todo el dominio de f.

$+$	$-\dfrac{\sqrt{a}}{3}$	$-$	$\dfrac{\sqrt{a}}{3}$	$+$

b) $f'(x) = a - \cos x > 0$ para toda $a \geq 1$, valor para el cual f será creciente para toda $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = ax + 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.

Vía 1
Dado que $f'(x) = a-(4\operatorname{sen} x-3\cos x)$ e $Im(\cos x) = Im(\operatorname{sen} x) = [-1, 1]$, podría suponer que el mayor valor que alcanza la expresión $4\operatorname{sen} x-3\cos x$ es 7, con lo cual, en principio, se puede tomar $a > 7$ con lo que se tendría $f'(x) > 0$ y, consecuentemente, f es creciente para $a > 7$.

Sin embargo, dado que no existe x real tal que simultáneamente se tenga $senx = 1$ y $cosx = -1$, es posible encontrar una mejor cota si se escribe la derivada en la forma

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + 3\cos x - 4\operatorname{sen} x = a + \sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\right) \\ &= a + \sqrt{3^2+4^2}(\operatorname{sen}\alpha\cos x - \cos\alpha\operatorname{sen} x) = a + 5\operatorname{sen}(x-\alpha), \end{aligned}$$

donde α puede ser tomado como el ángulo del primer cuadrante para el cual $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Basta tomar

$$a \geq -5\operatorname{sen}(x-\alpha) \geq -5(-1) = 5$$

para que $f'(x) \geq 0$, con lo que se puede garantizar el crecimiento de f para $a \geq 5$.

Vía 2
Como se analizó antes, a debe ser mayor que el valor máximo de $3\cos x - 4\operatorname{sen} x$ dado que

$$f'(x) = a + 3\cos x - 4\operatorname{sen} x$$

Sea entonces

$$g(x) = 3\cos x - 4\operatorname{sen} x$$

y busquemos el mayor valor que puede tomar g. Dado que

$$g'(x) = -3\operatorname{sen} x - 4\cos x$$

nota que si hacemos $g'(x) = 0$ tenemos

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

Pero los valores x que cumplen estas condiciones también cumplen que

$$\operatorname{sen} x_1 = -\frac{4}{5} \text{ y } \cos x_1 = \frac{3}{5}$$

o

$$\operatorname{sen} x_2 = \frac{4}{5} \text{ y } \cos x_2 = -\frac{3}{5}$$

Se obtienen así dos posibles extremos de g y sus correspondientes coterminales, es decir, los puntos $\{x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Comprobemos si, en efecto, son puntos de extremo de la función g; determinando, en el caso en que lo sean, si son máximos o mínimos. Para este propósito calculemos

$$g''(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$$

y veamos que

$$g''(x_1 + 2k\pi) < 0$$
$$g''(x_2 + 2k\pi) > 0$$

luego, los puntos en que g alcanza los valores de máximo, serán aquellos de la forma $\{x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ en los que

$$g(x_1 + 2k\pi) = 5$$

luego, efectivamente, $a > 5$.

Ejercicio 4.12.

La ecuación posee dos soluciones obvias que son $x = 0$ y $x = 1$. Analicemos entonces si posee otras soluciones, para lo cual reescribiremos la ecuación anterior en la forma $5^x - 4^x = 3^x - 2^x$. Consideremos x constante y los puntos $5, 4, 3, 2$ como puntos donde evaluaremos la función $f(t) = t^x$. Sobre los intervalos $[2, 3]$ y $[4, 5]$ la función $f(t) = t^x$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange, por lo que existen $t_1 \in [2, 3]$ y $t_2 \in [4, 5]$, tales que

$$\begin{aligned} f'(t_1) &= x t_1^{x-1} = 5^x - 4^x \\ f'(t_2) &= x t_2^{x-1} = 3^x - 2^x. \end{aligned}$$

Como $5^x - 4^x = 3^x - 2^x$, se tiene entonces que

$$xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1},$$

de donde se concluye que $x = 0$ o que

$$t_1^{x-1} = t_2^{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1$$

Como $t_1 \neq t_2$, por pertenecer a intervalos disjuntos, la identidad anterior se satisface solo si $x = 1$. Se demuestra de este modo que las únicas soluciones de la ecuación $5^x + 2^x = 4^x + 3^x$ son $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 4.13.

Vía 1
Sea la función $f(x) = \dfrac{3^x}{x^3}$ definida para $x > 0$.
Su derivada

$$f'(x) = \frac{3^x x^3 \ln 3 - 3^x 3x^2}{x^6}$$

puede ser escrita en la forma

$$f'(x) = \frac{3^x(x \ln 3 - 3)}{x^4},$$

con lo cual $f'(x) > 0$ para $x > \dfrac{3}{\ln 3}$, lo que hace creciente a la función para $x > \dfrac{3}{\ln 3}$. Como $\dfrac{3}{\ln 3} < 3 < \pi$, se tiene que $f(3) < f(\pi)$, por lo que

$$f(3) = \frac{3^3}{3^3} = 1 < f(\pi) = \frac{3^\pi}{\pi^3},$$

de donde se deduce que $\pi^3 < 3^\pi$.

Vía 2
Puede trabajarse de manera análoga considerando la función $f(x) = 3^x - x^3$.

Ejercicio 4.14.

Considera la función auxiliar $s(x) = f^2(x)f(1-x)$, que es diferenciable en $[0, 1]$ dado que f lo es. Puesto que $s(0) = s(1) = 0$, por el teorema de Rolle se puede asegurar que existe c en $(0, 1)$ tal que $s'(c) = 0$.

Pero

$$s'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x) - f^2(x)f'(1-x),$$

de donde se deduce que

$$s'(c) = 2f(c)f'(c)f(1-c) - f^2(c)f'(1-c) = 0,$$

y, por tanto, que

$$2f(c)f'(c)f(1-c) = f^2(c)f'(1-c).$$

Dividiendo por $f(c) \neq 0$ se obtiene que

$$2f'(c)f(1-c) = f(c)f'(1-c).$$

Por otra parte, como para toda $x \in (0;1)$, $f(x) > 0$ entonces $f(c)$ y $f(1-c)$ son no nulos, lo que implica que

$$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Ejercicio 4.15.

Puesto que f es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y satisface

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, \qquad f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2,$$

no puede poseer entonces más de tres ceros reales pues, de tener cuatro, por el corolario del teorema de Rolle, su primera derivada tendría al menos tres ceros y su segunda derivada, al menos dos, en contradicción con el hecho de que $f''(x)$ posee solo un cero real, dada la inyectividad de la función $y = 2^x$.

Ejercicio 4.16.

Teniendo en cuenta que la condición $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$ que debe satisfacer la función f puede ser escrita en la forma equivalente $f^2(b) - b^2 = f^2(a) - a^2$, conviene considerar la función auxiliar $h(x) = f^2(x) - x^2$.

A partir de las propiedades de f se deduce que esta función es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y cumple además la igualdad

$$h(b) = f^2(b) - b^2 = f^2(a) - a^2 = h(a),$$

con lo cual satisface las hipótesis del teorema de Rolle. Puede asegurarse entonces la existencia de un elemento $x_0 \in (a,b)$ tal que $h'(x_0) = 0$. Ello significa que

$$h'(x_0) = 2f'(x_0)f(x_0) - 2x_0 = 0,$$

lo que es equivalente a plantear que

$$f'(x_0)f(x_0) - x_0 = 0,$$

a partir de lo cual se puede asegurar la existencia de al menos una raíz en (a,b) para la ecuación $f'(x)f(x) = x$.

Ejercicio 4.17.

Vía 1
Dado que por hipótesis $y(t)$ es positiva, la condición $y'(t) \leq ky(t)$ que, para toda $t \geq 0$ satisface la función, puede ser escrita del modo equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \leq k \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Como ambos miembros de la desigualdad preliminar son integrables en el intervalo $[0,t]$, aplicando propiedades de la integral se puede asegurar que

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} d\tau \leq \int_0^t k d\tau,$$

con lo cual, para toda $t \geq 0$ se cumple

$$\ln y(t) - \ln y(0) \leq kt.$$

Empleando propiedades de logaritmo, lo anterior se transforma en la desigualdad

$$\ln \frac{y(t)}{y(0)} \leq kt.$$

Como la función exponencial de base mayor que 1 es estrictamente creciente en todo su dominio y $y(0) \geq 0$, se obtiene

$$\frac{y(t)}{y(0)} \leq e^{kt},$$

que finalmente conduce la desigualdad $y(t) \leq e^{kt}y(0)$ para toda $t \geq 0$.

Vía 2
Nota que, a diferencia de la primera vía, en esta no será preciso tener en cuenta el signo de la función y.

Considera la función auxiliar $g(t) = e^{-kt}y(t)$, que es diferenciable para toda $t \geq 0$.

De la condición $y'(t) \leq ky(t)$ para toda $t \geq 0$ se deduce que

$$g'(t) = e^{-kt}(y'(t) - ky(t)) \leq 0$$

para toda $t \geq 0$. Por tanto, la función $g(t)$ es decreciente y

$$g(t) \leq g(0) = y(0);$$

es decir,

$$e^{-kt}y(t) \leq y(0),$$

de donde se deduce que $y(t) \leq e^{kt}y(0)$ para toda $t \geq 0$.

Ejercicio 4.18.

Vía 1
Nota que lo que se desea demostrar es consecuencia directa de lo probado en el ejercicio anterior pues no es más que un caso particular si se considera que, en la vía 2 de la solución de dicho ejercicio, $k = 2$ y $f(0) = 0$.

De la hipótesis $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ para toda x en $[0, 1]$, se deduce que $f(0) \geq 0$, lo que lleva a una contradicción con el hecho de que, al considerar ahora la función auxiliar $g(x) = e^{-2x}f(x)$ se obtiene, razonando análogamente a como se hizo en la vía 2 del inciso anterior, que $f(x) \leq 0$ para toda x en $[0, 1]$, de lo cual se concluye que $f(x) = 0$ para toda x en $[0, 1]$.

Vía 2
A partir de la condición $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ para toda x en $[0, 1]$, se deduce la monotonía creciente de f en $[0, 1]$.

Además, como f es diferenciable en [0,1], g también lo es. Aplicando ahora el teorema del valor medio de Lagrange a g en $[0, 1]$, se garantiza la existencia de c en $(0, 1)$ que cumple, dado que, por hipótesis, $f(0) = g(0) = 0$,

$$0 \geq \mathrm{e}^{-2c}(-2f(c) + f'(c)) = g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) = \mathrm{e}^{-2c} f(1) \geq 0.$$

De todo lo anterior se deduce que $g'(c) = \mathrm{e}^{-2c} f(1) = 0$, con lo que $f(1) = 0$. Se tiene así que f es una función monótona creciente en $[0, 1]$, cuyos extremos coinciden ($f(0) = f(1) = 0$), de lo cual se deduce que $f(x) \equiv 0$ para toda x en $[0, 1]$.

Vía 3
Como f es diferenciable en todo $[0, 1]$, también lo es $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} f(x)$ y, por ende, en todo intervalo de la forma $[0, c]$, siendo $c \in [0, 1]$ arbitrario.

Aplicando ahora el teorema del valor medio de Lagrange a la función g en cada uno de estos intervalos y teniendo en cuenta que $g(0) = \mathrm{e}^0 f(0) = 0$, se puede asegurar que existe $d \in (0, c)$ tal que

$$0 \geq \mathrm{e}^{-2d}(-2f(d) + f'(d)) = g'(d) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c} = \frac{\mathrm{e}^{-2c}}{c} f(c) \geq 0,$$

dadas las condiciones del problema y el hecho de que la función $y = \mathrm{e}^{-2x}$ es positiva en todo su dominio.

De lo anterior se deduce que $g'(d) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2c}}{c} f(c) = 0$, lo que permite concluir que $f(c) = 0$ para toda c de $[0, 1]$.

Ejercicio 4.19.

Como la función $y = x \operatorname{sen} x$ es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$, los puntos de inflexión de la curva deben estar entre los puntos cuya abscisa anula la segunda derivada. Pero

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{sen} x + x \cos x, \\ y'' &= 2\cos x - x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

La condición $y'' = 0$ implica que

$$2\cos x - x \operatorname{sen} x = 0,$$

y, por ende,

$$4\cos^2 x = x^2 \operatorname{sen}^2 x = (x \operatorname{sen} x)^2 = y^2.$$

Como $x = 0$ no es abscisa de ningún punto de inflexión de la curva y tampoco lo es ninguno que anule $\operatorname{sen} x$, se puede considerar el cociente

$$\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = x^2,$$

del cual se tiene que

$$\begin{aligned} y^2(4 + x^2) &= (x \operatorname{sen} x)^2 \left(4 + \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) \\ &= (x \operatorname{sen} x)^2 \frac{4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 4x^2, \end{aligned}$$

lo que muestra claramente que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ están situados sobre la curva cuya ecuación es $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

Ejercicio 4.20.

Considera la función $g(x) = e^x f(x)$, que cumple que $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua con $g(0) = g(1) = 0$ y existe $g''(x)$ para toda x en $(0, 1)$. Además

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x(f(x) + f'(x)) \\ g''(x) &= e^x(f(x) + 2f'(x) + f''(x)). \end{aligned}$$

Dado que $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$, y que $e^x > 0$ para toda x en $(0, 1)$, se tiene que $g''(x) \geq 0$ para toda x en $(0, 1)$. Luego, g es convexa hacia abajo en el intervalo $(0, 1)$ y por tanto, su gráfico queda por debajo de la secante que une los puntos $(0, g(0)) = (0, 0)$ y $(1, g(1)) = (1, 0)$, que no es otra que la recta $y = 0$. De este modo es posible afirmar que $g(x) \leq 0$ para toda x en $[0, 1]$. De la definición de g puede concluirse finalmente que $f(x) \leq 0$ para toda x en $[0, 1]$.

Ejercicio 4.21.

a) Vía 1
Para $|x| \geq 2$ se cumple que

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq -1,$$

de modo que

$$\left|1 - \frac{x^2}{2}\right| \geq 1,$$

y como $|\cos x| \leq 1$ para toda x real, para $|x| \geq 2$ se tendrá que

$$\cos x \geq -1 \geq 1 - \frac{x^2}{2},$$

como se puede observar en la figura II.4.5, que se muestra a continuación.

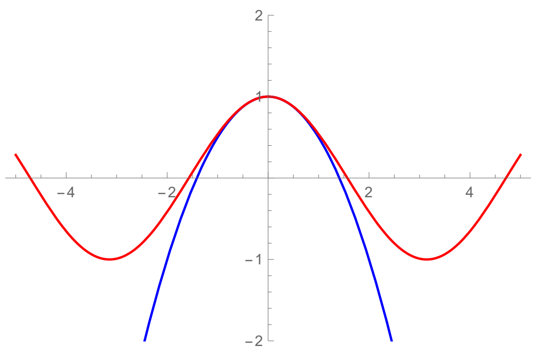


Figura II.4.5.: $y = 1 - \frac{x^2}{2}$, $y = \cos x$

Se debe analizar entonces qué ocurre para $|x| < 2$. Para ello se hará el desarrollo en serie de la función $y = \cos x$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9 \cdot 10}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

con lo cual basta tener en cuenta que para $|x| < 2$ y $n \geq 4$, el cociente de la forma $\dfrac{x^2}{(n+1)(n+2)}$ es menor que 1, por lo que los sumandos de la forma

$$\frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

son todos positivos, siendo así

$$\frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9 \cdot 10}\right) + \cdots > 0.$$

Entonces para $|x| < 2$ se cumple que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9 \cdot 10}\right) + \cdots \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$$

Vía 2
Sea $h(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Tal función es derivable ($h \in D^n$) en todo $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$h'(x) = -\operatorname{sen} x + x,$$

y, por tanto,

$$h'(0) = 0$$

Como

$$h''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

entonces

$$h''(0) = 0,$$

y

$$h'''(x) = \operatorname{sen} x$$

por lo que

$$h'''(0) = 0$$

Pero se tiene que

$$h^{IV}(x) = \cos x,$$

con lo cual, dado que

$$h^{IV}(0) = 1 > 0,$$

se puede concluir que h posee en $x = 0$ un mínimo absoluto. Se cumple entonces, para toda x real,

$$h(x) = \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq h(0) = 0.$$

Vía 3
Es conocida la fórmula del desarrollo de $\cos 2x$, para la que se tiene que

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) && \text{(II.4.11)}\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) && \text{(II.4.12)}\end{aligned}$$

Usando ahora que

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces, teniendo que son positivos ambos miembros

$$\operatorname{sen}^2 x \leq x^2 \qquad \text{(II.4.13)}$$

Finalmente usando (II.4.12) y (II.4.13) se llega a que

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\\ &\le 1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\\ &\le 1-\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

resultando en la desigualdad deseada.

b) Sea $h(x)=\operatorname{sen} x+\tan x$ definida para $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Entonces

$$h'(x)=\cos x+\sec^2 x,$$

$$h''(x)=-\operatorname{sen} x+2\sec^2 x\tan x=\frac{\operatorname{sen} x(2-\cos^3 x)}{\cos^3 x}.$$

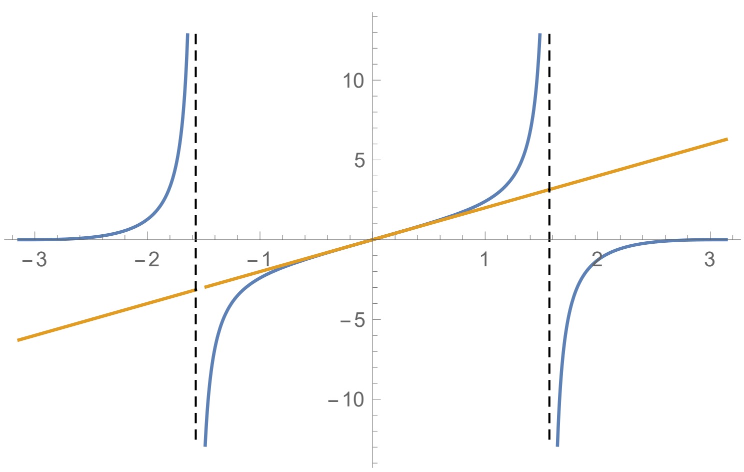


Figura II.4.6.: Ploteo de las funciones $y=\operatorname{sen} x+\tan x, y=2x$

Como $h''(x)>0$ para toda $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, entonces h es una función convexa hacia abajo en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, su gráfico en ese intervalo, como se muestra en la figura II.4.6, queda por encima de la tangente a $h(x)=\operatorname{sen} x+\tan x$ en el punto $(0,0)$, que no es otra que la recta $y=2x$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}>1\quad\text{para todo } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Ejercicio 4.22.

a) Vía 1

Considera la función $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$.

Nota que la condición $a^b = b^a$ es equivalente a la condición $h(a) = h(b)$ ya que si

$$\begin{aligned} a^b = b^a \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(a^b\right) = \ln\left(b^a\right) \\ &\Leftrightarrow \quad b \ln a = a \ln b \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \end{aligned}$$

Como $h'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, se tiene que $h'(e) = 0$, $h'(x) > 0$ si $x < e$ y $h'(x) < 0$ si $x > e$, de modo que para que se cumpla la condición $h(a) = h(b)$, es preciso que sea $0 < a < e < b$.

De lo anterior y del hecho de que a es un entero positivo, se concluye que $a = 1$ o $a = 2$.

Para $a = 1$, la condición $a^b = b^a$ implica $1 = 1^b = b^1 = b$, lo cual es imposible, pues a y b deben satisfacer que $0 < a < b$, luego, tiene que ser $a = 2$.

Para $a = 2$, debe ser $2^b = b^2$, con $b > a = 2$. Si $b = 3$, se tiene que $2^3 \neq 3^2$. Sin embargo, si $b = 4$, se cumple que $2^4 = 4^2$. Para $b > 4$, puede probarse por inducción matemática que $2^b > b^2$, de modo que la única solución es $a = 2$, $b = 4$.

Vía 2

Como a y b son enteros que deben satisfacer $0 < a < b$, existe $d > 0$ tal que $b = a(1 + d)$ (d no es necesariamente un número entero). Con ello la condición $a^b = b^a$ se transforma en la condición equivalente

$$a^{a(1+d)} = [a(1 + d)]^a,$$

de donde

$$a^a \left(a^a\right)^d = a^a (1 + d)^a,$$

con lo que

$$\left(a^d\right)^a = (1 + d)^a \quad \Rightarrow \quad a^d = 1 + d.$$

Para $d > 0$ se tiene

$$a^d = 1 + d < 1 + d + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \cdots + \frac{d^n}{n!} + \cdots = e^d,$$

de modo que $1 \leq a < e$.

De lo anterior y del hecho de que a es un entero positivo, se concluye que $a = 1$ o $a = 2$ y la solución del ejercicio continúa como en la vía 1.

b) Transforma la expresión dada de la siguiente forma

$$\frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}.$$

Considera la función

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$

y su derivada

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

entonces $h'(x) = 0$ si $x = e$, por lo que h alcanza un máximo local en e pues $h'(x) > 0$ si $x \in (0, e)$ y $h'(x) < 0$ si $x > e$. De hecho, más que local, es absoluto. (Pruébalo!)

A partir de lo anterior, para toda $x > 0$

$$h(x) \leq h(e) = \frac{1}{e},$$

se cumple que

$$x^e \leq e^x,$$

de donde se concluye que $a = e$.

c) Transformando la expresión dada se obtiene

$$(e - x)\ln(e + x) > (e + x)\ln(e - x).$$

Pero al realizar transformaciones análogas a las anteriores, el resultado se encuentra fuera de los límites del intervalo, por tanto considera la función auxiliar

$$h(x) = (e - x)\ln(e + x) - (e + x)\ln(e - x)$$

y sus derivadas

$$h'(x) = \frac{2(x^2 + e^2)}{e^2 - x^2} - \ln(e^2 - x^2),$$

$$h''(x) = \frac{2x(5e^2 - x^2)}{(x-e)^2(x+e)^2}.$$

De aquí que
$$h''(x) > 0, \quad \forall x \in (0, e),$$
por lo que h' crece en $(0, e)$. Como
$$h'(0) = 0$$
entonces h' es positiva para $x \in (0, e)$, de donde se deduce que h es creciente en $(0, e)$, con lo cual
$$h(x) > h(0) = 0, \quad \forall x \in (0, e)$$
por lo que
$$(e - x)\ln(e + x) > (e + x)\ln(e - x),$$
demostrando así lo deseado.

Ejercicio 4.23.

Vía 1
La desigualdad se demuestra usando el desarrollo de Taylor hasta el orden 1 de las funciones implicadas.

Vía 2
Sea la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \tan x$ definida para $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Nota que
$$f'(x) = 2\cos x + \sec^2 x,$$
con lo cual
$$f'(0) = 2\cos 0 + \frac{1}{\cos^2 0} = 3.$$
Como
$$f''(x) = -2\operatorname{sen} x - 2\cos^{-3} x(-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} x\left(1 - \frac{1}{\cos^3 x}\right)$$
y $1 - \dfrac{1}{\cos^3 x} < 0$, dado que $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ implica que $\cos^3 x \in (0, 1)$, entonces $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

De modo que la función

$$f(x) = 2\operatorname{sen} x + \tan x$$

es convexa hacia arriba en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, todos los puntos del gráfico de $y = f(x)$ con abscisa en ese intervalo se encuentran por encima de la recta tangente a la curva en cualquier punto $(x, f(x))$ con $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Como $f(0) = 0$, en particular, la ecuación de la recta tangente a la curva

$$f(x) = 2\operatorname{sen} x + \tan x$$

en el punto $(0,0)$ es $y = 3(x-0)+0 = 3x$, entonces, para toda $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ se cumple la desigualdad de Huygens

$$2\operatorname{sen} x + \tan x \geq 3x.$$

Ejercicio 4.24.

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, f es derivable y continua, en particular, en todo intervalo $[a,b]$. Sean entonces $f'(a) = \alpha$ y $f'(b) = \beta$, siendo α y β reales arbitrarios y probemos que f' toma todos los valores intermedios entre $f'(a)$ y $f'(b)$; es decir, que para todo γ entre α y β, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $f'(c) = \gamma$.

Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange en $[a,b]$ se garantiza la existencia de $d \in (a,b)$ tal que

$$f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Define entonces las funciones

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ \\ f'(a) & x = a \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & x \neq b \\ \\ f'(b) & x = b \end{cases},$$

y nota que

$$f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(b) = h(a).$$

Como $g \in C[a,b]$ y $h \in C[a,b]$, entonces

$$g(a) = f'(a) \qquad \text{y} \qquad g(b) = f'(d),$$

$$h(a) = f'(d) \qquad \text{y} \qquad h(b) = f'(b),$$

luego, por el segundo teorema de Bolzano, g alcanza todos los valores intermedios entre $f'(a)$ y $f'(d)$ y h alcanza todos los valores intermedios entre $f'(d)$ y $f'(b)$.

Resta ahora probar que cada valor intermedio que alcanza $g(x)$ (o $h(x)$) entre $f'(a)$ y $f'(d)$ (o entre $f'(d)$ y $f'(b)$) puede ser escrito como un $f'(c)$ con $c \in \mathbb{R}$. Pero como f es derivable en $[a,b]$ entonces es derivable en $[x,b]$ y en $[a,x]$ para toda $x \in [a,b]$. Por el teorema del valor medio de Lagrange, existe

$$\begin{aligned} \xi \in (x,b) \quad &: \quad f'(\xi) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = h(x) \\ \eta \in (a,x) \quad &: \quad f'(\eta) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = g(x), \end{aligned}$$

de modo que todo valor intermedio que se alcanza g entre $f'(a)$ y $f'(d)$ (o h entre $f'(d)$ y $f'(b)$) puede ser escrito como un $f'(\delta)$ con $\delta \in (a,b)$.

Ejercicio 4.25.

a) El límite cuyo valor se desea calcular es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y puede ser resuelto por diferentes vías.
Aquí, en particular, considera que $\ln(1+\arctan x^4) \sim x^4$ cuando $x \to 0$ y los desarrollos de Taylor de las funciones involucradas en el numerador, esto es

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \implies e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+\arctan x^4)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

b) Usando los desarrollos de Taylor de las funciones $\sqrt{1+x^2}$ y $\cos x$ hasta grado 4, dado que $\tan x^4 \sim x^4$ cuando $x \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\ &= 1-\frac{x^4}{3}+o(x^4),\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}1-\sqrt{1+x^2}\cos &= 1-\left(1-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)\\ &= \frac{x^4}{3}+o(x^4),\end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\tan^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{3}.$$

c) El límite cuyo valor se desea calcular es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y puede ser resuelto por diferentes vías. Aquí en particular, se resuelve haciendo transformaciones algebraicas que permiten aplicar los infinitésimos equivalentes y la regla de L'Hôpital.

Como $\tan^3 x \sim x^3$ cuando $x \to 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^x-(\operatorname{sen} x)^x}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^x\left[1-\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^x\left[1-e^{x\ln\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right]}{x^3}.$$

Se conoce que

$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0 \quad \text{y}$$

$$1 - e^{x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \sim -x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ cuando } x \to 0,$$

con lo cual, si existe,

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\left[1 - e^{x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right]}{x^3}$$

se tiene que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^x \left[1 - e^{x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right]}{x^3} = \lim_{x \to 0+} \frac{\left[1 - e^{x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right]}{x^3}.$$

Basta entonces tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} \frac{\left[1 - e^{x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right]}{x^3} &= \lim_{x \to 0+} \frac{-x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{x^3} = \lim_{x \to 0+} \frac{-\ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0+} -\frac{\ln \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0+} -\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{x^3}.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la regla de L'Hôpital este límite se transforma en

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos x}{3x^2},$$

y aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital o que $\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$ se llega a que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6},$$

de modo que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^x - (\operatorname{sen} x)^x}{\tan^3 x} = \frac{1}{6}.$$

d) Reescribe el límite a calcular, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en la forma

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{x^3 \ln x} = \lim_{x\to 0+} x^x \frac{1 - \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{x^x}}{x^3 \ln x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$, si existe el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{x^x}}{x^3 \ln x} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{x^3 \ln x} = l.$$

Por otra parte, se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{x^x}}{x^3 \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{(\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x) - x\ln(x)}}{x^3 \ln x}.$$

Pero

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0,$$

de donde, aplicando el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en el numerador, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - x\ln(x)}}{x^3 \ln x} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x}{x^3 \ln x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{x\ln x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\ln \operatorname{sen} x}{x^3 \ln x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\ln x - \ln \operatorname{sen} x) + \left[\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\ln \operatorname{sen} x}{x^3 \ln x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{-x\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^3 \ln x} + \frac{\left[\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\ln \operatorname{sen} x}{x^3 \ln x}\right].
\end{aligned}$$

Separa estos límites y demuestra la existencia de cada uno de ellos. Denota por

$$A = \lim_{x\to 0+} \frac{-x\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^3 \ln x} \quad \text{y} \quad B = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\ln \operatorname{sen} x}{x^3 \ln x}.$$

Calcula A aplicando el desarrollo de Taylor e infinitésimos equivalentes

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^3\ln x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3!\ln x} = 0.
\end{aligned}$$

Para calcular B aplica además la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]\ln\operatorname{sen} x}{x^3\ln x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]}{x^3}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3!}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\ln x}\\
&= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene entonces

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x-(\operatorname{sen} x)^{senx}}{x^3\ln x} = A+B = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 4.26.

a) **VERDADERO**.

Si f es una función derivable en $x=a$, existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Como entonces

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = f'(x)\cdot 0 = 0,$$

queda probado que f es continua en $x=a$.

b) **FALSO**.

Basta considerar como contraejemplo a la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

con la que puede constatarse de inmediato que:

- es continua en $x = 0$ dado que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

  por ser el producto de una función infinitesimal (cuando $x \to 0$) por una acotada, y

- no posee siquiera una derivada lateral en $x = 0$ dado que

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x},$$

  que, como se sabe, no tiene límites (ni siquiera laterales).

c) **FALSO**.

Basta considerar como contraejemplo a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

con la que puede constatarse de inmediato que:

- es derivable en $x = 0$, dado que existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

- su derivada

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

  no es continua en $x = 0$ dado que, como es bien conocido, no existe $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ al existir $\lim\limits_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$ pero no existir $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

d) **VERDADERO**.

Vía 1
Usando el desarrollo de Taylor de f en $x = a$ se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$$

Basta sumar las igualdades anteriores para obtener el resultado deseado.

Ejercicio 4.27.

Asume que $f(x) \neq 0$ en $[a, b]$ y llegarás a una contradicción.

Si $f(x) \neq 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) \neq 0$ por tanto $f(c) > 0$ o $f(c) < 0$.

Por otra parte, puesto que f tiene primera y segunda derivada en $[a, b]$, entonces f y f' son continuas en $[a, b]$. Como $p \in C[a, b]$ se cumple que

$$f''(x) = \lambda f(x) - p(x)f'(x)$$

también será continua en $[a, b]$.

Puesto que $f \in C[a, b]$, por el teorema de Weierstrass, f alcanza su máximo y mínimo en $[a, b]$. Como $f(a) = f(b) = 0$ y existe c en (a, b) tal que $f(c) \neq 0$, al menos uno de los extremos se alcanza en un punto interior del intervalo.

Sea $d \in (a, b)$, tal que $f(d)$ es un extremo no nulo de f en $[a, b]$. Por el teorema de Fermat $f'(d) = 0$. Ahora, si $f(d)$ es máximo (mínimo) $f''(d) \leq 0$ ($f''(d) \geq 0$), teniendo así que

- $f(d) > 0$ (< 0),
- $f'(d) = 0$,
- $f''(d) \leq 0$ ($f''(d) \geq 0$).

Pero entonces

$$\underbrace{f''(c)}_{\leq 0 (\geq 0)} = \underbrace{\lambda f(c)}_{>0(<0)} - \underbrace{p(c)f'(c)}_{=0}.$$

Se llega así a una contradicción, de donde se concluye que

$$f(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b].$$

Ejercicio 4.28.

Se desea probar que

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si se define

$$h(x) = f^2(x) + g^2(x),$$

se tendría que probar que h es constante en $\mathbb{R}$ y luego bastaría evaluar en un valor cómodo.

Dado que por hipótesis $f, g \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$, entonces $h \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$. Por tanto, probar que h es constante es equivalente a probar que

$$h'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x),$$

se debe determinar entonces $f'(x)$ y $g'(x)$ para hallar $h'(x)$.

Nota primeramente que

$$g(0) = g(0 + 0) = f(0)g(0) + f(0)g(0) = 2g(0)f(0),$$

de donde $g(0)(1 - 2f(0)) = 0$, lo que nos conduce a que

$$g(0) = 0 \quad \text{o} \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

Pero $f(0) \neq \dfrac{1}{2}$, pues si lo fuera, sería

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0 + 0) = f(0)f(0) - g(0)g(0) = f^2(0) - g^2(0) \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} - g^2(0) \\ -\frac{1}{2} &= g^2(0), \end{aligned}$$

lo cual es imposible, por tanto, $g(0) = 0$.

Nota ahora que

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) - g(x)g(0) = f(x)f(0),$$

de donde

$$f(x)(1 - f(0)) = 0,$$

lo que implica que $f(x) \equiv 0$ o $f(0) = 1$. Pero lo primero es imposible, por ser f no constante por hipótesis.

Se tiene entonces

$$g(0) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Puesto que

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

fijando x y derivando respecto a y se tiene que

$$f'_y(x+y) = f(x)f'(y) - g(x)g'(y),$$

Considerando ahora $y = 0$ y teniendo en cuenta que $f'(0) = 0$, se tiene

$$f'(x+0) = f(x)\underbrace{f'(0)}_{=0} - g(x)g'(0),$$

de modo que

$$f'(x) = g(x)g'(0).$$

Razonando de manera análoga

$$\begin{aligned} g'_y(x+y) &= g(x)f'(y) + f(x)g'(y) \\ g'(x+0) &= g(x)\underbrace{f'(0)}_{=0} + f(x)g'(0). \end{aligned}$$

Por tanto

$$g'(x) = f(x)g'(0),$$

con lo que finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2f(x)\left(-g(x)g'(0) + 2g(x)\left(f(x)g'(x)\right)\right) \\ &= -2f(x)g(x)g'(0) + 2f(x)g(x)g'(0) = 0, \end{aligned}$$

luego, $h'(x) \equiv 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que h es constante en $\mathbb{R}$.

Resta finalmente ver que

$$h(x) = h(0) = f^2(0) + g^2(0) = 1,$$

con lo que se demuestra que

$$f^2(x) + g^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4.29.

Considera la función auxiliar $h(x) = e^{-x} f(x)$. Como $f \in D[0,1]$ y $e^{-x} \in D[0,1]$, entonces $h \in D[0,1]$ y

$$h'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x).$$

Asume que $E = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ es infinito, en cuyo caso posee al menos dos elementos x_1, x_2 y $x_1 < x_2$ sin pérdida de la generalidad, tales que

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

y, por tanto,

$$h(x_1) = h(x_2) = 0.$$

Como h es derivable en $[0,1]$, aplicando el Teorema de Rolle existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $h'(c) = 0$, de donde

$$\underbrace{e^{-c}}_{\neq 0}(f'(c) - f(c)) = 0.$$

Así se ha obtenido que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) - f(c) = 0,$$

lo que contradice el hecho de que, por hipótesis, no existe $x \in [0,1]$ con $f'(x) = f(x)$.

De aquí que el conjunto $\{x : f(x) = 0\}$ no solo es finito, sino que, posee a lo sumo un único elemento.

Ejercicio 4.30.

Por la condición
$$f(x) + f'(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
se piensa inicialmente en la función
$$h(x) = e^x f(x) \in \mathbf{D}(\mathbb{R}),$$
que satisface $h(0) = 0$ y para la cual es
$$h'(x) = e^x \left(f(x) + f'(x)\right) \leq e^x.$$

Como $h \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$, entonces $h \in \mathbf{D}[0,1]$, y aplicando el teorema del valor medio de Lagrange existe $c \in (0,1)$ tal que
$$h'(c) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h(1).$$
Pero
$$h'(c) = e^c \left(f(c) + f'(c)\right) \leq e^c < e^1$$
por tanto $h(1) < e$ implica que $f(1) < 1$, valor que no se alcanza por función alguna, por lo que no puede ser el valor máximo de $f(1)$.

Con el objetivo de afinar la cota, considera la función
$$h(x) = e^x(f(x) - 1),$$
que es derivable para todo $\mathbb{R}$ por serlo $f - 1$ y e^x. Nota que
$$h(0) = e^0(f(0) - 1) = -1$$
y derivando h
$$h'(x) = e^x \left(\underbrace{f(x) + f'(x)}_{\leq 1} - 1 \right),$$
de modo que $h'(x) \leq 0$. Entonces h es decreciente en $\mathbb{R}$ y se cumple
$$h(0) \geq h(1) \Longleftrightarrow -1 \geq e(f(1) - 1) \Longleftrightarrow -\frac{1}{e} + 1 \quad \geq \quad f(1).$$
Por esta vía se obtiene que
$$f(1) \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

Pero este es el mayor valor que puede tomar $f(1)$, pues si fuera $f(1) > 1 - \dfrac{1}{e}$, sería

$$h(1) = e(f(1) - 1) > e(1 - \frac{1}{e} - 1) \Longleftrightarrow h(1) > -1 = h(0)$$

en contradicción con el hecho de que h es decreciente.

Halla ahora una función con las condiciones que pide este ejercicio y que alcance tal valor. Para ello ten en cuenta que debe ser

$$h(0) = -1, h(1) = e(f(1) - 1) = e(1 - \frac{1}{e} - 1) = -1,$$

de modo que $h(0) = h(1)$, pero como h es decreciente, entonces h es constante en $[0, 1]$.

Sea entonces $h(x) = k$, con k constante; es decir,

$$e^x(f(x) - 1) = k,$$

de modo que

$$f(x) = ke^{-x} + 1,$$

y como $f(0) = 0$ por hipótesis, se puede hallar tal k, tal que

$$f(0) = k + 1 = 0 \implies k = -1,$$

luego, la función que alcanza el valor máximo de $f(1)$ es

$$f(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x}.$$

Ejercicio 4.31.

Haciendo $h = x - c$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{f(x) - L(x)}{x - c} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - L(c+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - (f(c) + f'(c)h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f'(c)h}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right) - f'(c) \\
&= f'(c) - f'(c) = 0.
\end{aligned}$$

Se prueba así que L satisface la condición propuesta. Prueba ahora que es la única función lineal que lo hace.

Asume que $k(x)$ es otra función que satisface tal límite. Como f es diferenciable en $[a, b]$ y continua en $[a, b]$, entonces f es continua en c, por tanto

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Ahora, por continuidad de f y k en c se tiene que

$$\begin{aligned} f(c) - k(c) &= \lim_{x \to c} f(x) - k(c) \\ &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - k(c)}{x - c}(x - c) \\ &= \underbrace{\lim_{x \to c} \frac{f(x) - k(c)}{x - c}}_{0,\text{ por cumplir } k(x) \text{ dicha propiedad}} \quad \underbrace{\lim_{x \to c}(x - c)}_{0}, \end{aligned}$$

de modo que $k(x)$ pasa por $(c, f(c))$. Solo resta probar que pasa por tal punto con tangente $m = xf'(c)$.

Sea $k(x) = f(c) + m(x - c)$, entonces

$$\begin{aligned} m = k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{k(c + h) - k(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{\frac{k(c + h) - f(c + h)}{h}}_{0 \text{ por hipótesis}} + \underbrace{\frac{f(c + h) - k(c)}{h}}_{\text{como } f(c) = k(c)} \right) \\ &= f'(c), \end{aligned}$$

con lo cual $k(x) = f'(c)(x - c) + f(c) = L(x)$.

Ejercicio 4.32.

a) De acuerdo al desarrollo de Taylor de f centrado en $x = 0$ con resto en forma de Lagrange

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(\xi_x)\frac{x^3}{6}; \quad x \in [-1, 1],$$

donde ξ_x es un número en el intervalo abierto con extremos en 0 y x. Evaluando la expresión anterior en $x = -1$ y $x = 1$ se obtienen dos números $\xi_{-1} = \alpha \in (-1, 0)$ y $\xi_1 = \beta \in (0, 1)$, respectivamente, tales que

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\alpha)}{6} \Leftrightarrow 1 = f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\alpha)}{6},$$
$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\beta)}{6} \Leftrightarrow 0 = f(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\beta)}{6}.$$

Restando las ecuaciones anteriores se llega a que $f'''(\alpha) + f'''(\beta) = 6$.

b) Si la función fuera tres veces derivable en $(-1, 1)$ no se cumple la afirmación del inciso a), lo cual se comprueba fácilmente usando como contraejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Ejercicio 4.33.

La pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $(x; y)$, donde $x \in [1, 5]$, viene dada por la expresión

$$y' = 2\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x.$$

Se debe encontrar el valor de $x \in [1, 5]$ que minimiza la pendiente y aquel que la maximiza para lo cual se deben hallar los extremos de la función

$$h(x) = 2\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x$$

ten en cuenta entonces que

$$h'(x) = \frac{2}{x} + x - 3 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \ o\ x = 2$$

Analizando los signos de la derivada se concluye que en $x = 1$ hay un máximo local y en $x = 2$, un mínimo local. Es preciso analizar los valores de la pendiente en los extremos del intervalo, de modo que debes calcular además cuanto vale la función en $x = 5$ y comparar el resultado con los valores de la función en $x = 1$ y $x = 2$.

Se tiene que

$$h(1) = \frac{-5}{2} = -2{,}5, h(2) = 2\ln 2 - 4 = -2{,}6137, h(5) = 2\ln 5 - \frac{5}{2} = 0{,}7189$$

De modo que la recta de menor pendiente es la que es tangente a la curva en el punto $x = 2$ y, la de mayor pendiente, la que es tangente a la curva en $x = 5$.

Ejercicio 4.34.

a) Considera la función auxiliar $h(x) = f(x) - x$ que que satisface las hipótesis del teorema de Bolzano dado que

- h es continua en $[0, 1]$ por ser la diferencia de dos funciones continuas en $[0, 1]$,
- $h(0) = f(0) > 0, h(1) = f(1) - 1 < 0$ pues $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$.

A partir de lo anterior, se puede asegurar la existencia de un $c \in [0, 1]$ tal que $h(c) = 0$, lo que es equivalente a que tal c satisface la condición $f(c) = c$, es decir, que tal c es un punto fijo de f.

b) Observa inicialmente que bajo las condiciones impuestas en este inciso no se puede asegurar la existencia del punto fijo para f. Mostraremos a continuación que, de poseerlo, no puede tener más de uno.

Asume para ello que posea más de un punto fijo. En tal caso, sean a y b dos puntos fijos de f, con lo que se tiene que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Sin perder generalidad, sea $a < b$. Dado que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, también lo será en $[a, b]$. Aplicando a f el teorema de Lagrange, se puede asegurar la existencia de un $d \in [0, 1]$ tal que

$$f'(d) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pero ello conduce a una contradicción evidente dado que entonces, como $f(a) = a$ y $f(b) = b$, se tiene que

$$f'(d) = \frac{b - a}{b - a} = 1$$

y, por hipótesis, ya se sabe que $f'(x) \neq 1$ para todo x real. Se prueba así, que una función derivable en $\mathbb{R}$ que satisfaga $f'(x) \neq 1$ para todo x real, puede tener (si es que lo posee), a lo sumo, un punto fijo.

II.5. Cálculo integral

Un problema matemático ha de ser lo suficientemente difícil para atraernos pero no totalmente inaccesible como para burlar nuestros esfuerzos.
HILBERT

El genio es un uno por ciento de inspiración, y un noventa y nueve por ciento de transpiración.
THOMAS ALVA EDISON

Lo poco que he aprendido carece de valor, comparado con lo que ignoro y no desespero en aprender.
RENÉ DESCARTES

Toda la dignidad del hombre está en el pensamiento.
BLAISE PASCAL

Ejercicio 5.1.

Sea
$$u(t) = 1 + 2\int_0^t f(s)ds.$$

Puesto que f es continua en $[0,1]$, $u(t)$ es derivable en $[0,1]$ y
$$u'(t) = 2f(t).$$

Como f satisface, para toda t en $[0,1]$, la condición
$$f^2(t) \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds,$$

entonces, dado que f es positiva en $[0,1]$, se tiene que
$$f(t) \leq \sqrt{u(t)},$$

con lo cual
$$\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} \leq 1 \quad \forall t \in [0,1].$$

Nota ahora que
$$\sqrt{u(t)} - 1 = \int_0^t \frac{u'(s)}{2\sqrt{u(s)}}ds \leq \int_0^t ds = t,$$

de donde, para toda t en $[0,1]$, se cumple
$$f(t) \leq \sqrt{u(t)} \leq 1 + t.$$

Ejercicio 5.2.

Al hacer el cambio de variable $y = \sqrt[6]{1+x}$ se obtiene que $y^6 = 1 + x$, con lo cual

$$x = y^6 - 1, \quad x^2 = (y^6-1)^2 = y^{12} - 2y^6 + 1,$$

$$y^3 = \sqrt{1+x}, \quad y^2 = \sqrt[3]{1+x},$$

$$dx = 6y^5 dy.$$

de modo que la integral que se desea calcular se transforma como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx &= \int \frac{y^{12}-2y^6+1+y^3}{y^2}6y^5dy \\
&= \int (6y^{15}-12y^9+6y^3+6y^6)dy \\
&= 6\frac{y^{16}}{16}-12\frac{y^{10}}{10}+6\frac{y^4}{4}+6\frac{y^7}{7}+C \\
&= \frac{3}{8}(1+x)^{\frac{8}{3}}-\frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}+\frac{6}{7}(1+x)^{\frac{7}{6}}+C.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.

a) Nota que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n} &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,
\end{aligned}$$

siendo $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ y $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ una partición del intervalo $[0,1]$ en n partes iguales con $x_k=\left(\frac{k}{n}\right)$ y la selección de nodos $\xi_k=x_k$ para $k=1,\ldots,n$. Como f es una función Riemann-integrable en el intervalo $[0,1]$, la suma de la derecha constituye una suma de Riemann de f en ese intervalo, por lo que cuando n tiende a ∞, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2},$$

con lo cual

$$\lim_n \left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)=\ln\frac{3}{2}.$$

b) Como

$$\begin{aligned}
\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,
\end{aligned}$$

donde $f(x) = x^\alpha$ y $\{x_k\}_{k=0}^n$ es la partición equidistante del intervalo $[0,1]$ con $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)$ y $\xi_k = x_k$ para $k = 1, \dots, n$. Al ser f una función Riemann-integrable en el intervalo $[0,1]$, la suma de la derecha constituye una suma de Riemann de f en ese intervalo, con lo cual cuando n tiende a ∞, se cumple que

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_0^1 x^\alpha dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1},$$

de donde se concluye que

$$\lim_n \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

c) Se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \\ = \ & \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right) \\ = \ & \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k, \end{aligned}$$

siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ y $\{x_k\}_{k=0}^n$ una partición del intervalo $[0,1]$ en n partes iguales con $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)$ y la selección de nodos $\xi_k = x_k$ para $k = 1, \dots, n$.. Como es f una función Riemann-integrable en el intervalo $[0,1]$, la suma de la derecha constituye una suma de Riemann de f en ese intervalo, por lo que cuando n tiende a ∞, se cumple que

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4},$$

luego,

$$\lim_n \left(\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{1^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

d) Para calcular

$$\lim_n \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n x_n,$$

hagamos

$$\begin{aligned} y_n &= \ln x_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\ln\frac{n+3}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

de modo que $y_n = \ln x_n$ es una suma de Riemann de $h(x) = \ln(1+x)$ para la partición equidistante del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \dfrac{k}{n}$ (donde $k = 0,\dots,n$). A partir de todo lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_n y_n &= \lim_n \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)(\ln(x+1)-1)]\big|_0^1; \end{aligned}$$

es decir

$$\lim_n y_n = 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{e}.$$

Como

$$\lim_n y_n = \lim_n \ln x_n = \ln \lim_n x_n = \ln\frac{4}{e},$$

se tiene entonces que

$$\lim_n x_n = \lim_n \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}.$$

e) Nota que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+1)\cdots(n+n)} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)} \\ &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

de donde se obtiene, de manera análoga al inciso anterior, que

$$\lim_n a_n = \frac{4}{e}.$$

f) Se conoce que para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$x - \frac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x,$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}. \quad \text{(II.5.1)}$$

Nota que, del inciso c), se obtiene que

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{n^2}$$

de donde, empleando el teorema del emparedado, se llega a

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 = 0,$$

y aplicando nuevamente dicho teorema en II.5.1 se obtiene que

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

g) Se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}}.$$

Dado que se cumple

$$e^x > 1+x, \ \forall x > 0$$

entonces

$$a^x > 1 + (\ln a)x, \ \forall x > 0$$

de donde se deduce que

$$2^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{\ln 2}{n},$$

con lo cual

$$2^{\frac{k}{n}} > \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}} = 2^{\frac{k-1}{n}} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{kn}} > 2^{\frac{k-1}{n}} \frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{kn}}.$$

Ahora bien, para $k \geq 2$, se tiene que

$$\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{kn}} > 1,$$

de donde

$$2^{\frac{k}{n}} > \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}} > 2^{\frac{k-1}{n}}.$$

Multiplicando la expresión anterior por $\dfrac{1}{n}$ y sumando cada una de las desigualdades se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{n},$$

de modo que, pasando al límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que $\sqrt[n]{2} \to 1$, se llega a

$$\int_0^1 2^x dx > \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \int_0^1 2^x dx.$$

Por último, aplicando el teorema del emparedado, se obtiene

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Ejercicio 5.4.

Advierte que la función tiene la forma

$$\lfloor \mathrm{e}^x \rfloor = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 2, & \ln 2 \leq x \leq \ln 3 \\ 3, & \ln 3 \leq x \leq \ln 4 \\ \cdots & \cdots \\ 8, & \ln 7 \leq x \leq 2 \end{cases},$$

como se evidencia en la figura II.5.1 que se muestra a continuación.

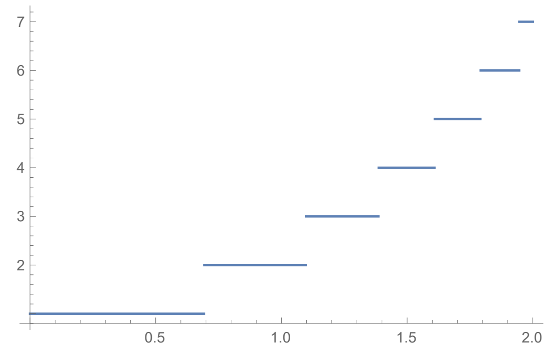


Figura II.5.1.: $y = \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor$ en $[0,2]$

La integral a calcular se puede descomponer entonces como

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor dx &= \int_0^{\ln 2} 1dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2dx + \cdots + \int_{\ln 7}^{2} 7dx \\
&= \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + \cdots + 7(2 - \ln 7) \\
&= -\ln 2 - \ln 3 - \ln 4 - \ln 5 - \ln 6 - \ln 7 + 14 \\
&= 14 - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 6 + \ln 7) \\
&= 14 - \ln(7!) \approx 5{,}5.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.

Para calcular el valor del área de la figura limitada por la curva $y = \operatorname{sen}^3 3x$, los ejes coordenados y la recta $x = \dfrac{\pi}{2}$, debes tener en cuenta que $y = \operatorname{sen}^3 3x \geq 0$ si $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}^3 3x \leq 0$ si $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (ver figura II.5.2). El área buscada se debe escribir entonces en la forma

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^3 3x dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 3x dx.$$

Calcula la primitiva de la función $y = \operatorname{sen}^3 3x$ mediante la transformación

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 3x dx &= \int \operatorname{sen}^2 3x \operatorname{sen} 3x dx = \int (1 - \cos^2 3x) \operatorname{sen} 3x dx \\
&= \int \operatorname{sen} 3x dx - \int \cos^2 3x \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos^3 3x}{9} + C,
\end{aligned}$$

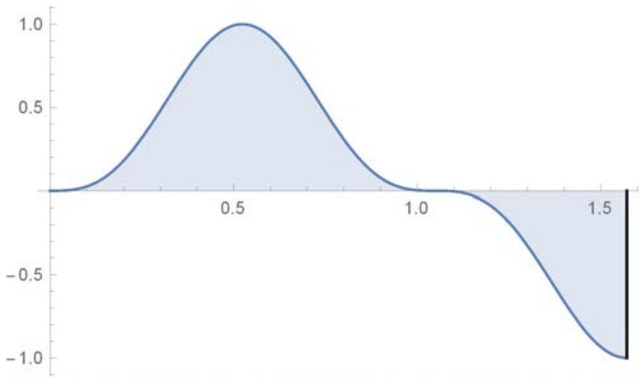


Figura II.5.2.: Área limitada por $y = \operatorname{sen}^3 3x$, los ejes coordenados y la recta $x = \dfrac{\pi}{2}$

con lo cual se tiene finalmente que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^3 3x dx &= \left[-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos^3 3x}{9}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{9}, \\
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 3x dx &= \left[-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos^3 3x}{9}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^3 3x dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 3x dx = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3},$$

con lo cual el área buscada

$$A = \frac{2}{3}u^2.$$

Ejercicio 5.6.

Para calcular el área de la figura limitada por la curva $y = e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, el eje de las abscisas y por dos rectas paralelas al eje de las ordenadas que pasan por los puntos extremos de la función, se debe comenzar por determinar cuáles son tales extremos.

Para ello se calcula la derivada de

$$y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2 = \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} + e^2,$$

que es

$$y' = \frac{(2x+3)e^x - (x^2+3x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2 - x + 2}{e^x} = \frac{(-x+1)(x+2)}{e^x}$$

y se aplica el criterio de la primera derivada a los posibles extremos para determinar si lo son o no. Se tiene así que las abscisas de los puntos de extremo

$-$	-2	$+$	1	$-$

son $x = -2$ y $x = 1$, que representan a su vez las ecuaciones de las rectas paralelas al eje de las ordenadas que delimitarán la región conjuntamente con el eje de las abscisas.

Nota que $y(-2) = 0$ y que la función entre $x = -2$ y $x = 1$ es creciente, de modo que la figura II.5.3 que representa el área a buscar es

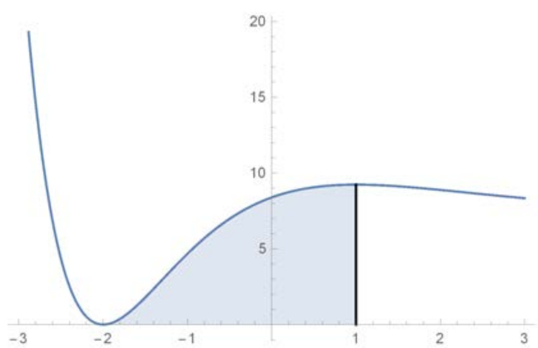


Figura II.5.3.: Región limitada por $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, el eje de las abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 1$

Esta área se determina directamente por el cálculo de la integral

$$A = \int_{-2}^{1} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} + e^2 \right) dx.$$

Tal integral se calcula aplicando dos veces el método de integración por partes, tomando en cada caso como función a derivar el polinomio correspondiente y como función a integrar, la exponencial e^{-x}. El resultado del área es

$$A = \frac{3e^3 - 12}{e} u^2.$$

Ejercicio 5.7.

a) Para hallar un par de valores de a y b, para los cuales sea

$$\int_0^1 (ax+b)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \frac{3}{2},$$

basta reconocer que la derivada de la expresión cuadrática en el integrando es $2x+3$, de modo que si se hace el cambio $u = x^2+3x+2$, se tendrá $du = 2x+3$ y la igualdad

$$\int_0^1 (2x+3)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \int_2^6 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}.$$

Puesto que $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}$, teniendo en cuenta la linealidad de la integral, se tiene que

$$\frac{9}{2}\int_0^1 (2x+3)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \int_2^6 \frac{9}{2}\frac{du}{u^2} = \frac{3}{2},$$

y dado que,

$$\int_0^1 \frac{9}{2}(2x+3)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \int_0^1 \left(9x + \frac{27}{2}\right)(x^2+3x+2)^{-2}dx = \frac{3}{2},$$

basta tomar entonces $a = 2\cdot\frac{9}{2} = 9$; $b = 3\cdot\frac{9}{2} = \frac{27}{2}$ para lograr el resultado deseado.

b) Se deben buscar ahora valores de reales a y b, tales que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{bx - \operatorname{sen} x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt = 1$$

Nota inicialmente que a debe ser positivo para garantizar que $\sqrt{a+t}$ sea no nula para toda $t \in [0,x]$ y $\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}$ sea acotada para toda t entre 0 y x. Con ello se puede asegurar que $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}$ es continua en $[0,x]$ y, por tanto,

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt$$

es derivable en $[0,x]$; siendo

$$F'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a+x}}.$$

Como además $F(0) = 0$, el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{bx - \operatorname{sen} x}$$

es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{bx - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{b - \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\sqrt{a + x}} \frac{1}{(b - \cos x)}.$$

Resta ahora notar que si $b \neq \cos 0 = 1$, el valor de este límite será

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x^2}{\sqrt{a + x}} \frac{1}{(b - \cos x)} \right] = \left[\frac{0}{\sqrt{a}} \frac{1}{(b - 1)} \right] = 0.$$

Como deseamos que el valor del límite sea 1 y no 0, se debe tomar $b = 1$, en cuyo caso el límite se expresa en la forma

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x^2}{\sqrt{a + x}} \frac{1}{(1 - \cos x)} \right],$$

en la cual $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, pues $x \to 0$, de modo que

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x^2}{\sqrt{a + x}} \frac{1}{(1 - \cos x)} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x^2}{\sqrt{a + x}} \left(\frac{2}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{a + x}} = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Para que se cumpla entonces

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{bx - \operatorname{sen} x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a + t}} dt = 1,$$

basta tomar $a = 4$, $b = 1$.

¿Existirán a y b tales que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{bx - \operatorname{sen} x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a + t}} dt = 1?$$

Ejercicio 5.8.

Veamos que $f(a)(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx$. Como existe f', entonces f es continua en $[a,b]$ y, por el teorema del valor medio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Por hipótesis, $f'(x) > 0$ para toda $x \in [a,b]$, con lo que f es estrictamente creciente en $[a,b]$, de modo que se cumple

$$f(a)(b-a) < f(c)(b-a),$$

de donde se deduce que

$$f(a)(b-a) < \int_a^b f(x)dx.$$

Por otra parte, como $f''(x) > 0$ para toda $x \in [a,b]$, f es convexa hacia abajo, con lo cual

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a), \quad \forall x \in [a,b]$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)dx &\leq \int\limits_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right] dx \\
&\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}\bigg|_a^b + f(a)x|_a^b \\
&\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} + f(a)(b-a) \\
&\leq \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)
\end{aligned}$$

Nota que si, en particular, $f(x) > 0$, la interpretación geométrica de la desigualdad que se ha demostrado es que el área del trapecio curvilíneo formado por las rectas $x = a, x = b, y = 0$ y la secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es mayor que el área que el trapecio curvilíneo formado por $f(x)$ en este intervalo.
¿Se podría probar que la desigualdad es estricta?

Ejercicio 5.9.

Toma la función auxiliar

$$h(x) = f(x)\mathrm{e}^{-cx}$$

para la cual

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-cx}[f'(x) - cf(x)]$$

Como, por hipótesis, $f'(x) = cf(x)$ para toda x real,

$$h'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo que existe $k \in \mathbb{R}$ constante tal que $h(x) = k$ para todo valor real de $\mathbb{R}$, de modo que

$$f(x) = k\mathrm{e}^{cx}$$

para toda x real con lo que se demuestra el resultado.

Ejercicio 5.10.

a) Nota que la curva $y^2 = (1-x^2)^3$ satisface la condición $f(-x,-y) = f(x,y)$, lo que significa que es simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas. De ello se deduce que el área buscada será la correspondiente a 4 veces el área que la curva delimita en el primer cuadrante (ver figura II.5.4).

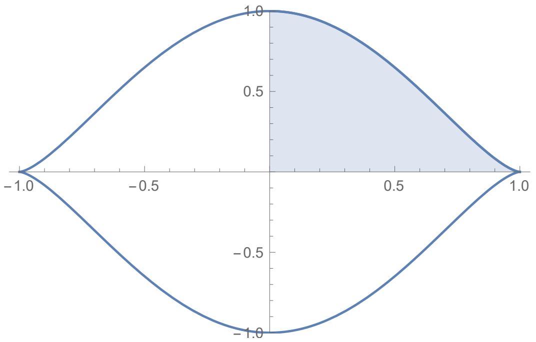


Figura II.5.4.: Representación de la curva $y^2 = (1-x^2)^3$

De $y^2 = (1-x^2)^3$ se tiene que $y = \pm\sqrt{(1-x^2)^3}$ para $x \in (-1,1)$. El área buscada es entonces

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx = 4\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Para calcular la integral anterior se realiza el cambio de variables $x = \operatorname{sen} t$, válido para $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y del cual se deduce que

$$dx = \cos t dt, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

con lo cual

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$$

Debe tenerse en cuenta ahora que

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + cos2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos^2 2t}{4}$$

y

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2},$$

de modo que el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4t}{8}\right) dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t}{8}\right) dt \\ &= 4 \left[\frac{3}{8} t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{32}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\frac{\pi}{4} u^2. \end{aligned}$$

b) Como en el inciso anterior, dado que la curva en cuestión es simétrica respecto a ambos ejes, el área limitada por dicha curva no es más que 4 veces el área limitada por la curva en el primer cuadrante (ver figura II.5.5).

Se tiene entonces que

$$A = 4 \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4} dx = 4 \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = 2 \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2} dx.$$

Haciendo ahora el cambio $u = 1 - x^2$, $du = -2x dx$, se obtiene que

$$A = -2 \int_1^0 \sqrt{u} du = 2 \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{4}{3}.$$

El área buscada es, finalmente, $\frac{4}{3} u^2$.

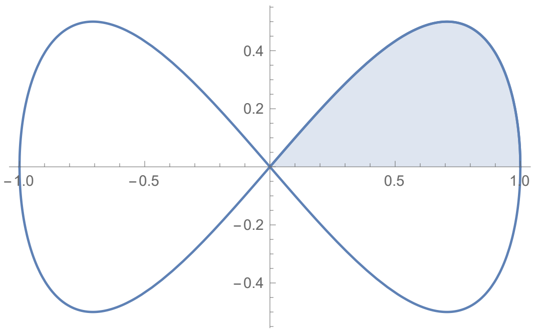


Figura II.5.5.: Representación de la curva $y^2 = x^2 - x^4$

Ejercicio 5.11.

Se desea calcular la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (a,b), que tenga abscisa $a > 0$ y en el cual la recta tangente a la curva sea paralela a $y = \dfrac{1}{2}x + 5$.

Para garantizar lo anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2 = x$ en el punto (a,b) debe satisfacer la condición $y'(a) = \dfrac{1}{2}$.

Ahora bien, como $y'(x) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, dado que $y = \pm\sqrt{x}$, debe tomarse la rama asociada a $y = \sqrt{x}$ que es la que tendrá puntos cuyas tangentes sean positivas. Nota que el único punto que satisface todo lo anterior es $(1,1)$.

Se debe buscar entonces la longitud del arco de parábola sobre la curva $y^2 = x$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,1)$.

Por otra parte

$$y^2 = x \quad \Rightarrow \quad 2ydy = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = 2y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 4y^2,$$

con lo que la longitud del arco de parábola que se desea hallar vendrá dada por la expresión

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\,dy.$$

Considera el cambio de variable

$$y = \frac{\tan\theta}{2}, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad dy = \frac{\sec^2\theta}{2} d\theta,$$

donde

$$y = 0 \Rightarrow \theta = 0, \qquad y = \frac{\tan\theta}{2} = 1 \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \theta = \arctan 2,$$

con lo cual, teniendo en cuenta que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene,

$$L = \int\limits_0^{\arctan 2} \sqrt{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec\theta\sec^2\theta d\theta.$$

Aplicando a continuación el método de integración por partes se toma

$$u = \sec\theta \qquad dv = \sec^2\theta d\theta$$

$$du = \sec\theta\tan\theta d\theta \qquad v = \tan\theta,$$

con lo que

$$L = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\arctan 2} - \int\limits_0^{\arctan 2} \sec\theta\tan^2\theta d\theta\right).$$

Ten en cuenta a continuación que si $\theta = \arctan 2$, entonces $\tan\theta = 2$, con lo cual $\sec\theta = \sqrt{5}$. Se tiene así que

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} - \int_0^{\arctan 2} \sec\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta\right) \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec\theta d\theta - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec^3\theta d\theta. \end{aligned}$$

De lo anterior resulta que

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec^3\theta d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec\theta d\theta - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec^3\theta d\theta,$$

lo que conduce a

$$\int\limits_0^{\arctan 2} \sec^3\theta d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\arctan 2} \sec\theta d\theta,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\arctan 2} \sec^3\theta d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec\theta d\theta \\
&= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta \\
&= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \frac{d(\sec\theta + \tan\theta)}{\sec\theta + \tan\theta} \\
&= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta)\Big|_0^{\arctan 2}.
\end{aligned}$$

El valor de la longitud de arco buscado es, finalmente,

$$L = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5} + 2).$$

Ejercicio 5.12.

La función que permite medir la longitud de arco de la curva

$$y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$$

teniendo a P como punto inicial, tiene la forma

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt,$$

donde

$$1+f'(x)^2 = 1+\left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2} = 4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2.$$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
s(x) &= \int_1^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = s(x) = \int_1^x \sqrt{\left(2t + \frac{1}{8t}\right)^2} dt \\
&= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt = \left(t^2 + \frac{1}{8}\ln t\right)\Big|_1^x \\
&= x^2 + \frac{\ln x}{8} - 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.13.

a) Para hallar el área A de la región limitada por la curva $y = \ln(1-x^2)$, el eje de las abscisas y la recta $x = \dfrac{1}{2}$ (la cual es mostrada en la figura II.5.6) debes notar ante todo que, para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $y = \ln(1-x^2) \leq 0$, siendo en particular $y(0) = 0$, con lo cual

$$A = -\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x^2)dx.$$

Para calcular esta integral se debe aplicar el método de integración por partes considerando

$$u = \ln(1-x^2) \quad dv = dx$$

$$du = \frac{-2dx}{1-x^2} \qquad v = x,$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x^2)dx &= x\ln(1-x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2-1}{1-x^2}dx \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2}{1-x^2}dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}dx \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \ln 3 = \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Así, finalmente, el valor del área buscada es

$$A = 1 - \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{2\sqrt{3}e}{9}u^2.$$

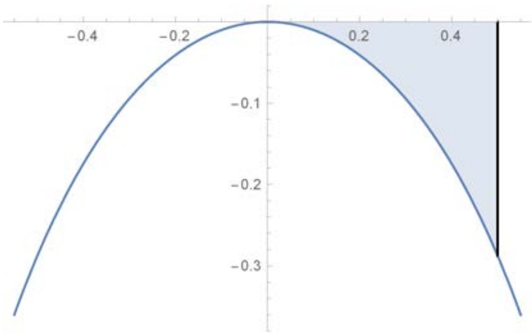


Figura II.5.6.: Área limitada por la curva $y = \ln(1 - x^2)$, el eje de las abscisas y la recta $x = \dfrac{1}{2}$

b) Para hallar la longitud de arco de la curva $y = \ln(1-x^2)$ siendo $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, ten en cuenta que $y' = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, de donde

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2, \end{aligned}$$

con lo cual, para $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ se tiene

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Para hallar la longitud de arco debe calcularse la integral

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2+2x^2}{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{1-x^2}dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{1-x^2}dx. \end{aligned}$$

Nota que esta integral ya fue calculada en el inciso anterior y su valor es $-1 + \ln 3$, por lo que finalmente se concluye que la longitud de arco de la curva dada en el intervalo señalado es

$$L = \frac{1}{2} - 1 + \ln 3 = \ln 3 - \frac{1}{2} = \ln \frac{3\sqrt{e}}{e} u.$$

Ejercicio 5.14.

a) Para hacer un esbozo del gráfico de la curva $f(x) = xe^{-x}$ se hará inicialmente un análisis de su comportamiento.

Dominio $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio, por lo que no posee asíntotas verticales.

Interceptos con los ejes $(0;0)$.

Signos $f(x) > 0$ si $x > 0$ y $f(x) < 0$ si $x < 0$.

Asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x} = \begin{cases} 0 & x \to +\infty \\ +\infty & x \to -\infty, \end{cases} \\ b &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0, \end{aligned}$$

de modo que $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Monotonía y extremos

$$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

con lo cual $f'(x) > 0$ si $x < 1$ y $f'(x) < 0$ si $x > 1$. Esto significa que f es estrictamente creciente para $x < 1$ y estrictamente decreciente para $x > 1$. En $x = 1$ la función alcanza un máximo local que vale $f(1) = \frac{1}{e}$ y que, de hecho, es absoluto pues ya se sabe que $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}dx = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}dx = 0$.

Convexidad y puntos de inflexión

$$f''(x) = e^{-x}(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,$$

con lo cual $f'(x) > 0$ si $x > 2$ y $f'(x) < 0$ si $x < 2$. Esto significa que f es convexa hacia abajo si $x > 2$ y es convexa hacia arriba si $x < 2$. En $x = 2$ la función posee un punto de inflexión que vale $f(2) = \frac{2}{e^2}$.

A partir de todos los elementos analizados anteriormente se esboza el gráfico de la curva que se muestra en la figura II.5.7.

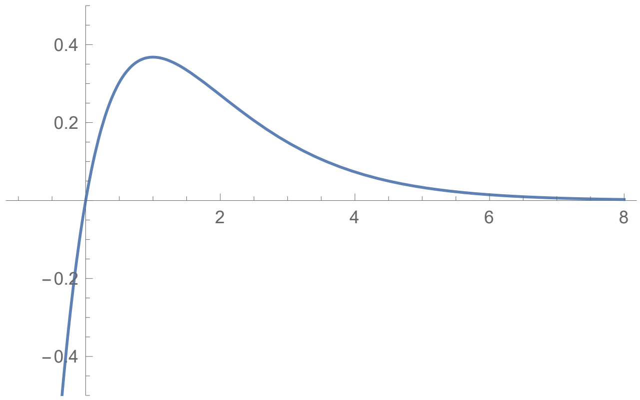


Figura II.5.7.: $f(x) = xe^{-x}$

b) Para hallar el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva del inciso anterior, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje de las abscisas (ver figura II.5.8), se tiene que

$$A = \int_{-1}^{0} -xe^{-x}dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}dx = (x+1)e^{-x}\Big|_{-1}^{0} - (x+1)e^{-x}\Big|_{0}^{1},$$

con lo cual

$$A = 1 - 0 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} = \frac{2(e-1)}{e}u^2.$$

Ejercicio 5.15.

a) Se tiene

$$(x^2 + 2x)e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ x = -2.$$

Puesto que $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} \leq 0, \forall x \in [-2, 0]$, para hallar el área de la región limitada por la curva $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de las abscisas (ver figura II.5.9) basta hallar

$$A = \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)e^{-x}dx,$$

cuyo valor se obtiene integrando por partes dos veces.

Considerando que $u = x^2 + 2x$ y $dv = -e^{-x}dx$, con lo cual $du = (2x+2)dx$ y $v = e^{-x}$, se obtiene que

$$A = (x^2 + 2x)e^{-x}\Big|_{-2}^{0} - 2\int_{-2}^{0}(x+1)e^{-x}dx = 2\int_{-2}^{0} -(x+1)e^{-x}dx.$$

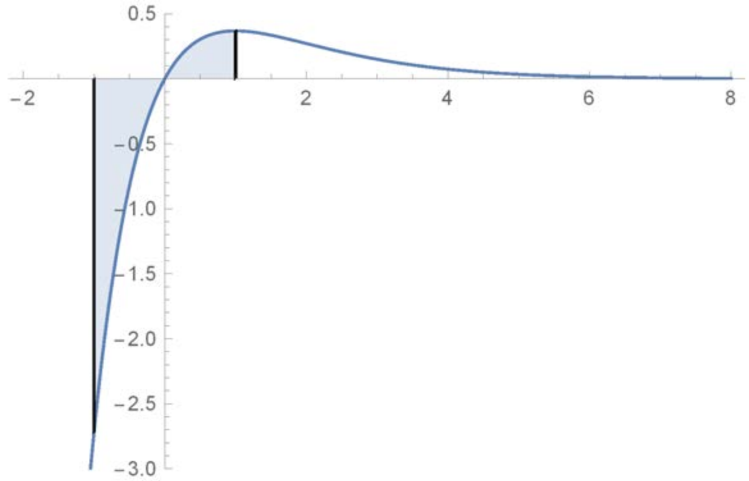


Figura II.5.8.: Trapecio curvilíneo limitado por $y = xe^{-x}$, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje de las abscisas

A continuación, tomando $u = x + 1$ y $dv = -e^{-x}$ dx, con lo cual $du = dx$ y $v = e^{-x}$ se llega

$$A = 2\left((x+1)e^{-x}\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{-x}dx \right) = 2\,(x+2)e^{-x}\Big|_{-2}^{0} = 4,$$

de donde se concluye que el área buscada es

$$A = 4u^2.$$

b) Para calcular la longitud de arco de la curva $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3 - 1}dt$ para $1 \le x \le 4$, basta tener en cuenta que la función $f(t) = \sqrt{t^3 - 1}$ es continua para todo $t \ge 1$, con lo cual $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3 - 1}dt$ es derivable y su derivada es $y' = \sqrt{x^3 - 1}$, de donde se tiene que la longitud de arco que se busca está dada por

$$\int_1^4 \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + x^3 - 1}dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4 = \frac{65}{2}.$$

Finalmente, se concluye que la longitud de arco que se desea hallar es

$$L = 12{,}4u.$$

c) La curva $24xy - 48 = x^4$ (ver figura II.5.10) puede ser escrita en la forma

$$y = \frac{x^4 + 48}{24x},$$

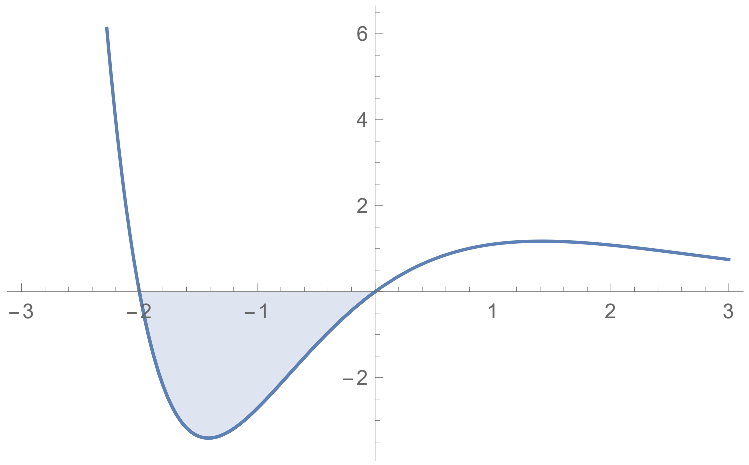


Figura II.5.9.: Región limitada por $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de las abscisas

de donde se tiene que

$$y' = \frac{x^4 - 16}{8x^2},$$

con lo cual

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2 = \frac{x^8 + 32x^4 + 256}{64x^4} = \left(\frac{x^4 + 16}{8x^2}\right)^2.$$

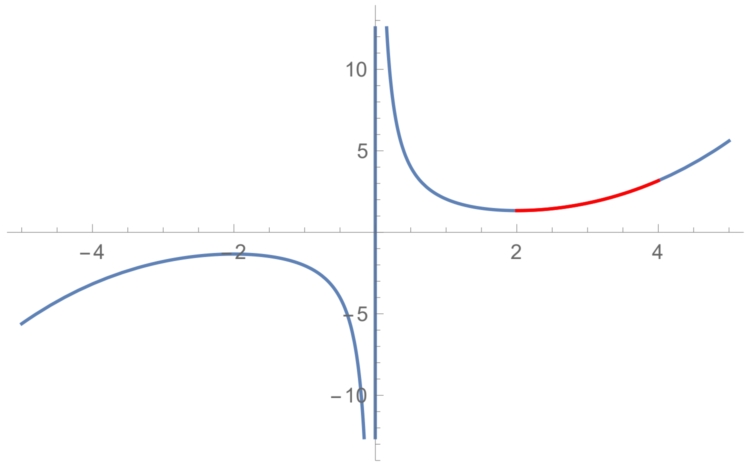


Figura II.5.10.: Representación de la curva $24xy - 48 = x^4$ destacando el segmento de curva cuya longitud se desea encontrar

La longitud de arco de la curva desde $x = 2$ hasta $x = 4$ viene dada entonces por

$$\int_2^4 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_2^4 \frac{x^4+16}{8x^2}dx = \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{16}{x}\right)\Bigg|_2^4;$$

es decir,

$$L = \frac{17}{6}u.$$

d) El volumen pedido (ver figura II.5.11) podrá buscarse hallando el valor de la integral

$$V = \pi \int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 x dx.$$

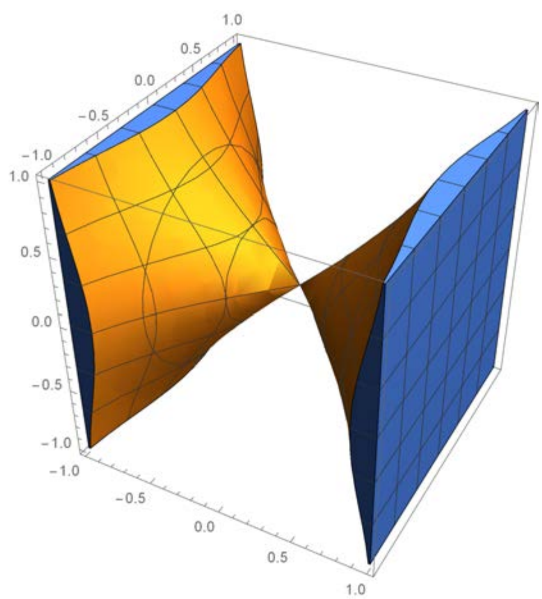


Figura II.5.11.: Rotación del $\operatorname{arcsen} x$ alrededor del eje x

Esta integral puede resolverse integrando por partes, si se considera

$$u = \operatorname{arcsen}^2 x \qquad dv = dx,$$

con lo cual

$$du = 2\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = x,$$

y se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 x dx &= x\operatorname{arcsen}^2 x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \operatorname{arcsen}^2 1 - 2\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.\end{aligned}$$

Para calcular ahora $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ se propone el cambio de variables

$$t = \operatorname{arcsen} x \implies dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ y } x = \operatorname{sen} t,$$

$$x = 0 \implies t = 0 \text{ y } x = 1 \implies t = \frac{\pi}{2}.$$

El cálculo de la integral se reduce a hallar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen} t dt = -t\cos t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt.$$

Tomando $u = x \quad dv = \operatorname{sen} x dx$, se obtiene que

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1,$$

de donde

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 x dx &= \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \\ &= \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right),\end{aligned}$$

entonces

$$V = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)u^3.$$

Ejercicio 5.16.

Para calcular el área de la figura limitada por la curva $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta $x = 4$, nota inicialmente que para que la ecuación de la curva tenga soluciones, x debe ser mayor o igual que 1.

Teniendo en cuenta la simetría de la curva respecto al eje x y el hecho de que está definida para $x \geq 1$, al área a calcular estará dada por

$$A = 2\int_1^4 2\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = 4\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$$

Para calcular la integral se propone el cambio

$$u = \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 1 = x,$$

con lo cual

$$dx = 2udu, \quad x = 1 \Rightarrow u = 0, \quad x = 4 \Rightarrow u = \sqrt{3},$$

y la integral inicial se transforma en

$$\begin{aligned}
4\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u}{u^2+1}2udu &= 8\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+1}du \\
&= 8\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du \\
&= 8\int_0^{\sqrt{3}} du - 8\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= 8\left[u - \arctan u\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} = 8(\sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}) = 8\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$A = 8\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)u^2.$$

Ejercicio 5.17.

La función $y = f(x)$ está definida, es continua para todo número real x y satisface

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + c.$$

Derivando a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$f(x) = -x^2 f(x) + 2x^3 + 2x^5 \quad \Rightarrow \quad (1+x^2)f(x) = 2x^3(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad (1+x^2)(f(x) - 2x^3) = 0,$$

a partir de lo cual se deduce que $f(x) = 2x^3$. Se tiene entonces que

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2t^3 dt = \left.\frac{2t^4}{4}\right|_0^x = \frac{x^4}{2},$$

y

$$\int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + c = \int_x^1 2t^5 dt + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + c = \frac{1-x^6}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + c = \frac{1}{3} + \frac{x^4}{2} + c,$$

de donde

$$\frac{x^4}{2} = \frac{1}{3} + \frac{x^4}{2} + c \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{3} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{3}.$$

Ejercicio 5.18.

Debe tenerse en cuenta aquí que:

- la función
$$g(t) = \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}$$
es continua en todo $\mathbb{R}$, con lo cual la función
$$F(x) = \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2} dt$$
es derivable en $\mathbb{R}$ y
$$F'(x) = f'(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{2 + x^2};$$
- $f(0) = 3 + \displaystyle\int_0^0 \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2} dt = 3 = P(0);$
- $f'(0) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} 0}{2 + 0^2} = \dfrac{1}{2} = P'(0);$
- $f''(x) = \dfrac{(\cos x)(2 + x^2) - 2x(1 + \operatorname{sen} x)}{(2 + x^2)^2} \implies f''(0) = \dfrac{1}{2} = P''(0).$

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $P(0) = c = 3$, $P'(0) = b = \dfrac{1}{2}$, $P''(0) = 2a = \dfrac{1}{2}$, de modo que $c = 3$, $b = \dfrac{1}{2}$, $a = \dfrac{1}{4}$. Finalmente

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3.$$

Ejercicio 5.19.

Si se asume que existe una función derivable, no negativa en $[0, 1]$, que satisface las condiciones

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \qquad \int_0^1 xf(x)dx = a, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2,$$

con $0 \leq a \leq 1$; se tendría

$$a^2 \int_0^1 f(x)dx = a^2, \qquad -2a \int_0^1 xf(x)dx = -2a^2, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2,$$

con lo cual f debería satisfacer también la condición

$$\int_0^1 (a-x)^2 f(x)dx = 0,$$

lo cual es imposible, pues f es derivable y no negativa en $[0, 1]$.

Ejercicio 5.20.

a) Sea $H(x)$ una primitiva de $f(t) = \cos t^2$, cuya existencia podemos garantizar por la continuidad de $f(t) = \cos t^2$ en todo $\mathbb{R}$. $H(t)$ satisface entonces la condición $H'(t) = \cos t^2$ para toda t y, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cos t^2 dt = H\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - H\left(\frac{1}{x}\right),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cos t^2 dt\right) &= \left(H\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - H\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= H'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' - H'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Nota que se ha podido hallar lo que se quería sin necesidad de conocer la expresión explícita de la primitiva H.

b) Puesto que $f(t) = \ln^2 t$ es continua para toda $x > 0$, existe una primitiva $H(t)$ de la función $f(t) = \ln^2 t$, que cumple $H'(t) = \ln^2 t$ para toda $x > 0$. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene entonces que

$$\int_x^{2x} \ln^2 t dt = H(2x) - H(x),$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} \ln^2 t dt\right) &= 2H'(2x) - H'(x)\\ &= 2\ln^2(2x) - \ln^2 x.\end{aligned}$$

c) Sean

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + \operatorname{sen}^4 t} dt, \qquad G(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} k}{k} dk.$$

y sea $H = FoG$ por lo que

$$H(x) = \int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} k}{k} dk} \frac{1}{t^2 + \operatorname{sen}^4 t} dt = F(G(x)),$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen} k}{k}$ es continua para toda $k \in [1, x]$ y $\dfrac{1}{t^2 + \operatorname{sen}^4 t}$ es continua por ser el cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula para toda $t \neq 0$, entonces se tiene

$$H'(x) = F'(G(x))G'(x) = \frac{1}{G(x)^2 + \operatorname{sen}^4 G(x)} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Ejercicio 5.21.

Vía 1
Se asume, sin perder generalidad, que g es monótona creciente en $[a, b]$, (la demostración para g decreciente es análoga, pues bastará variar el orden de las desigualdades), entonces, cualquiera sea $x \in [a, b]$, se tiene que $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$.

Por hipótesis, f no cambia de signo en $[a, b]$, por lo que se puede asumir f es positiva para toda $x \in [a, b]$ (si fuese negativa se razona de manera análoga).

Multiplicando la desigualdad anterior por $f(x)$, se obtiene para toda $x \in [a, b]$ la relación

$$g(a)f(x) \leq g(x)f(x) \leq g(b)f(x).$$

Como $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y también $g \in \mathcal{R}[a, b]$ por ser monótona en $[a, b]$, entonces $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y, aplicando propiedades de la integral, se obtiene

$$g(a) \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq g(b) \int_a^b f(x)dx,$$

de modo que $\int_a^b g(x)f(x)dx$ resulta ser un valor intermedio entre $g(a)\int_a^b f(x)dx$ y $g(b)\int_a^b f(x)dx$.

Sea ahora
$$H(z) = g(a)\int_a^z f(x)dx + g(b)\int_z^b f(x)dx$$
Como $f \in R[a,b]$, entonces $H \in C[a,b]$ y además se cumple que
$$\begin{aligned} H(a) &= g(b)\int_a^b f(x)dx \\ H(b) &= g(a)\int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$
con lo cual se puede concluir, aplicando el segundo teorema de Bolzano, que H alcanza todos los valores intermedios entre $H(a)$ y $H(b)$. En particular, H alcanza el valor $\int_a^b g(x)f(x)dx$. Se garantiza entonces la existencia de un $\varepsilon \in [a,b]$, tal que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^\varepsilon f(t)dt + g(b)\int_\varepsilon^b f(t)dt.$$

Vía 2
Sea
$$H(z) = g(a)\int_a^z f(x)dx + g(b)\int_z^b f(x)dx - \int_a^b g(x)f(x)dx$$
Como ya se vio en la vía anterior $f, g \in R[a,b]$ con lo que $H \in C[a,b]$. Nota además que
$$\begin{aligned} H(a) &= g(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)f(x)dx = \int_a^b (g(b)-g(x))f(x)dx \\ H(b) &= g(a)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)f(x)dx = \int_a^b (g(x)-g(a))f(x)dx, \end{aligned}$$
de modo que $H(a)H(b) \leq 0$, por ser g monótona en $[a,b]$. Se puede concluir entonces, aplicando el primer teorema de Bolzano, que existe $\varepsilon \in [a,b]$, tal que
$$H(\varepsilon) = g(a)\int_a^z f(x)dx + g(b)\int_z^b f(x)dx - \int_a^b g(x)f(x)dx = 0,$$
lo que es equivalente a lo que se desea demostrar.

Observación: Si se suprime la hipótesis de que f no cambia de signo en $[a, b]$, el resultado es igualmente válido, pero la demostración se hace mucho más compleja. [1]

Ejercicio 5.22.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x) = x^x(\ln x + 1)$, tal que $F(1) = 1$, se calcula

$$\lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5\mathrm{arcsen}(x-1)^2}.$$

Para calcular

$$F(x) = \int x^x(\ln x + 1)dx = \int e^{x\ln x}(\ln x + 1)dx,$$

se toma

$$u = x\ln x \quad \Rightarrow \quad du = (\ln x + 1)dx,$$

por lo que

$$F(x) = \int e^u du = e^u + c = e^{x\ln x} + c = x^x + c.$$

Dado que $F(1) = 1$ se tiene que $c = 0$, de modo que $F(x) = x^x$.

Por otra parte, de la condición inicial $F(1) = 1$ se deduce que estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, que es posible tratar con la regla de L'Hôpital,dado que F es derivable para toda $x > 0$. Como además

$$\mathrm{arcsen}(x-1)^2 \sim (x-1)^2 \text{ cuando } x \to 1,$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5\mathrm{arcsen}(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5(x-1)^2}. \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2F'(x)F(x) - 2x}{10(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{F'(x)F(x) - x}{5(x-1)}
\end{aligned}$$

[1] Ver por ejemplo el tomo II de Ilin,V. y E. Pozniak, Fundamentos del Análisis Matemático II, Editorial MIR, Moscú, 1992, p 46.

Al ser $F(x)$ una primitiva de $f(x) = x^x(\ln x + 1)$, se cumple que $F'(x) = x^x(\ln x + 1)$ y, por tanto, es F derivable con $F'(1) = 1$, de modo que aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5\operatorname{arcsen}(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{F'(x)F(x) - x}{5(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{F''(x)F(x) + (F'(x))^2 - 1}{5} \\
&= \frac{F''(1)F(1) + (F'(1))^2 - 1}{5}
\end{aligned}$$

y dado que

$$F''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1} \quad \Rightarrow \quad F''(1) = 2,$$

se concluye finalmente que

$$\lim_{x\to 1} \frac{F^2(x) - x^2}{5\operatorname{arcsen}(x-1)^2} = \frac{2}{5}.$$

Ejercicio 5.23.

a) Como $\dfrac{x^7}{\sqrt[3]{3+x^2}} > 0$ para toda $x \in (0,1)$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{3+x^2}} dx > 0.$$

Además $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3+x^2}}$ es continua en $[0,1]$ y x^7 es continua y no cambia de signo en $[0,1]$, por lo que, en virtud del segundo teorema del valor medio para integrales, se puede asegurar que existe $c \in (0,1)$, tal que

$$\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{3+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3+c^2}} \int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{3+c^2}} < \frac{1}{8},$$

pues $\sqrt[3]{3+c^2} > 1$ para toda c real. Se demuestra así que

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{3+x^2}} dx < \frac{1}{8}.$$

b) Nota que para toda $x \in \left[\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right]$ se tiene que $\operatorname{sen} x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, de modo que
$$\frac{\sqrt{2}}{2x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$
Aplicando las propiedades de la integral relativas a desigualdades y teniendo en cuenta que las funciones implicadas en la desigualdad anterior son todas integrables, se obtiene
$$\begin{aligned}
\frac{1}{5\sqrt{2}} &= \frac{\ln e^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{2}} < \frac{\ln 3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln x|_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2x} dx \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x} dx = \ln x|_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} = \ln 3.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.24.

Nota que estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que aplicando la regla de L'Hôpital se tiene que
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{h} dh}{x^3} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{2x \operatorname{sen} \sqrt{x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{2sen|x|}{3x} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } x \to 0^+ \\ -\frac{2}{3} & \text{si } x \to 0^- \end{cases},$$
de modo que no existe
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{h}}{x^3} dh.$$

Ejercicio 5.25.

a) Sean
$$h_1(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}, \qquad h_2(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{6},$$
derivables en todo $\mathbb{R}$ y en particular en [0,1], se tiene que
$$h_1'(x) = \frac{x^2(3x^2+2)}{1+x^2} \geq 0, \qquad h_2'(x) = \frac{x^2(x^2-1)}{1+x^2} \leq 0,$$

con lo cual se puede asegurar que $h_1(x)$ es monótona creciente y $h_2(x)$ es monótona decreciente en $[0,1]$. Esto implica que para toda x en $[0,1]$ se tiene

$$h_1(x) \geq h_1(0) = 0, \qquad h_2(x) \leq h_2(0) = 0,$$

lo que es equivalente a que

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \frac{x^3}{6}.$$

b) A partir del inciso anterior y usando las propiedades de la integral, para toda x en $[0,1]$ se cumple la desigualdad

$$\int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)dx \leq \int_0^1 e^{x^2} \arctan x dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)dx.$$

Nota que

$$\int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3}xe^{x^2}dx.$$

Haciendo el cambio $u = x^2$, con $xdx = \dfrac{du}{2}$, se obtiene

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u du = \frac{e-1}{2},$$

Integrando ahora por partes, con $u = \dfrac{x^2}{3}$ y $dv = xe^{x^2}$, se llega a que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3}xe^{x^2}dx = \left.\frac{x^2}{6}e^{x^2}\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{e}{6} - \frac{e-1}{6} = \frac{1}{6},$$

con lo cual

$$\int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{e}{2} - \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} \arctan x dx.$$

Por último, de manera análoga, se obtiene

$$\int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3}xe^{x^2}dx = \frac{e}{2} - \frac{7}{12},$$

con lo cual

$$\int_0^1 e^{x^2} \arctan x dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)dx = \frac{e}{2} - \frac{7}{12}.$$

Así se concluye finalmente que

$$\frac{e}{2} - \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} \arctan x dx \leq \frac{e}{2} - \frac{7}{12}.$$

Ejercicio 5.26.

Para probar que para toda x en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ se cumple

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arccos}\sqrt{\alpha}d\alpha + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{4},$$

se debe demostrar inicialmente que la función

$$S(x) = \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arccos}\sqrt{\alpha}d\alpha + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha}d\alpha$$

es constante en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, lo que puede constatarse comprobando que su derivada se anula sobre ese intervalo.

Puesto que

$$\cos^2 x \in [0,1] \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x \in [0,1]$$

para toda x en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, se puede garantizar la continuidad de las funciones integrando en los respectivos intervalos de integración y, por tanto, se garantiza la derivabilidad de la función $S(x)$ y

$$\begin{aligned} S'(x) &= \operatorname{arccos}\sqrt{\cos^2 x}(-2\cos x \operatorname{sen} x) + \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}(2 \operatorname{sen} x \cos x) \\ &= \operatorname{arccos}(\cos x)(-\operatorname{sen} 2x) + \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 2x) \\ &= (x - x)\operatorname{sen} 2x = 0, \end{aligned}$$

con lo cual $S(x)$ es constante en todo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Resta solo determinar el valor constante de $S(x)$ en ese intervalo, para lo cual basta evaluar la función en un valor "cómodo" de x, por ejemplo, en el propio $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int\limits_0^{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \operatorname{arccos}\sqrt{\alpha}d\alpha + \int\limits_0^{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}} \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha}d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccos}\sqrt{\alpha}d\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen}\sqrt{\alpha}d\alpha. \end{aligned}$$

Dado que

$$A(x) = \text{arccos}x + \text{arcsen}x = \frac{\pi}{2}$$

para toda x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se tiene que

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (\text{arccos}\sqrt{\alpha} + \text{arcsen}\sqrt{\alpha})d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 5.27.

Dada la función $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$, para hacer el estudio de la existencia de extremos locales y absolutos y de sus puntos de inflexión, conviene primero conocer las derivadas de esa función. Puesto que $y = e^{-t^2}$ es continua para todo valor real de t, existe

$$G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2} - 1\right).$$

a) Para los extremos locales y absolutos se tiene que $G'(x) = 0$ si

$$x = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}.$$

Como $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, entonces el único posible punto de extremo local de G es $x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ y, como el signo de $G'(x)$ coincide con el de $2e^{-3x^2} - 1$, se tiene que

- $G'(x) \geq 0$ si $x \in \left[0, \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\right]$,
- $G'(x) \leq 0$ si $x \in \left[\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}, +\infty\right)$,

de modo que G alcanza un máximo local en el punto de abscisa $x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$. Por otra parte, se debe observar que puesto que $G(x) > 0$ para toda t real y $G(0) = 0$, entonces G alcanza su mínimo absoluto en el punto $(0, 0)$ y que el punto $x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ es, inclusive, un punto de máximo absoluto.

b) Para hacer el análisis de la existencia de los puntos de inflexión de G, se debe calcular

$$G''(x) = 2xe^{-x^2} - 16xe^{-4x^2} = 2xe^{-x^2}\left(1 - 8e^{-3x^2}\right).$$

Nuevamente se observa que G tiene el único posible punto de inflexión en $x = \sqrt{\ln 2}$ y dado que el signo de $G''(x)$ coincide ahora con el de $1 - 8e^{-3x^2}$, se tiene que

- $G''(x) \leq 0$ si $x \in \left[0, \sqrt{\ln 2}\right]$,
- $G''(x) \geq 0$ si $x \in \left[\sqrt{\ln 2}, +\infty\right)$,

de modo que G posee un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = \sqrt{\ln 2}$.

Ejercicio 5.28.

Como f es continua en $[0, 2]$, entonces $e^{-f(x)}$ y $e^{f(x)}$ también lo son, por lo que, aplicando el primer teorema del valor medio para integrales, existen $c \in (0, 1)$ y $d \in (1, 2)$, tales que

$$\int_0^1 e^{-f(x)}dx = e^{-f(c)}(1 - 0) = e^{-f(c)}$$

$$\int_1^2 e^{f(x)}dx = e^{f(d)}(2 - 1) = e^{f(d)},$$

con lo cual

$$\int_0^1 e^{-f(x)}dx \int_1^2 e^{f(x)}dx = e^{-f(c)}e^{f(d)} = e^{f(d)-f(c)}.$$

Por otra parte, como f continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, se puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange, que garantiza la existencia de ε en $(c, d) \subset (0, 2)$, tal que

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

lo que puede escribirse de modo equivalente, en la forma

$$f'(\varepsilon)(d - c) = f(d) - f(c),$$

entonces

$$\int_0^1 e^{-f(x)}dx \int_1^2 e^{f(x)}dx = e^{f(d)-f(c)} = e^{f'(\varepsilon)(d-c)}.$$

Ahora bien, dado que existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para toda x en $(0, 2)$, en particular se tiene que

$$-k \leq f'(\varepsilon) \leq k,$$

y como $c \in (0, 1)$ y $d \in (1, 2)$, entonces $0 \leq (d - c) \leq 2$. De aquí que

$$-2k \leq 0 \leq f'(\varepsilon)(d - c) \leq 2k,$$

con lo que

$$e^{-2k} \leq e^{f'(\varepsilon)(d-c)} \leq e^{2k},$$

de donde se obtiene, finalmente la desigualdad

$$e^{-2k} \leq \int_0^1 e^{-f(x)}dx \int_1^2 e^{f(x)}dx \leq e^{2k}.$$

Se puede demostrar aún más dado que es posible probar que la desigualdad es estricta. ¡Inténtelo!

Ejercicio 5.29.

Considera la función auxiliar

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt.$$

Dado que f es derivable en $[0, 1]$, es continua en $[0, 1]$, por lo que $F(x)$ es derivable en $[0, 1]$ y

$$F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t)dt - [f(x)]^3 = f(x) \left(2 \int_0^x f(t)dt - [f(x)]^2 \right).$$

Como $f'(t) > 0$ para toda $t \in [0, 1]$, entonces f es estrictamente creciente en $[0, 1]$ y de $f(0) = 0$ se deduce que $f(x) > 0$ para toda $x \in [0, 1]$.

Sea ahora la función

$$G(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - [f(x)]^2,$$

la cual es derivable en $[0, 1]$ con

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0,$$

pues $f'(t) \leq 1$ y ya habíamos probado que $f(x) > 0$ para toda $x \in [0, 1]$. De ahí que $G(x)$ es una función monótona creciente y como $G(0) = 0$, se puede afirmar que $G(x) \geq 0$ para toda x en $[0,1]$.

Para toda x en $[0,1]$ se tiene entonces que

$$F'(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt - [f(x)]^2\right) = f(x)G(x) \geq 0,$$

de donde se concluye que $F(x)$ es monótona creciente. Nota que, por construcción, $F(0) = 0$, de modo que $F(x) \geq 0$ para toda x en $[0,1]$, de donde se deduce finalmente que para toda $x \in [0,1]$ se cumple que

$$\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2 \geq \int_0^x [f(t)]^3 dt.$$

Ejercicio 5.30.

a) Como g es continua en $[a,b]$ y $0 < g(x) < 1$ para toda $x \in [a,b]$, existe

$$h'(x) = \left(\int_a^x g(t)dt\right)' = g(x) > 0,$$

de donde puede concluirse el crecimiento estricto de la función $h(t)$.

Por otra parte, también por la continuidad de la función $g(x)$, se puede aplicar el corolario para funciones continuas del primer teorema del valor medio para integrales y asegurar la existencia de un elemento $c \in (a,x)$, tal que

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt = g(c)\int_a^x dt = g(c)(x-a)$$

Dado que por hipótesis es $g(x) \in (0,1)$, se tiene que

$$0 \leq h(x) = g(c)(x-a) < x - a \quad \text{para toda } x \in [a,b].$$

b) Como f y g son continuas en $[a,b]$, entonces $fg \in C[a,b]$ y, por tanto, existe

$$k'(x) = \left(\int_a^x f(t)g(t)dt\right)' = f(x)g(x)$$

Por otra parte, $0 \leq h(x) < x - a$ implica que

$$a \leq a + h(x) \leq a + x - a = x \leq b$$

, de donde se concluye que para toda $x \in [a,b]$ se cumple que $f \in C[a, a+h(x)] \subset C[a,b]$. De aquí que la función $l(x)$ es derivable en $[a, a+h(x)]$ para toda $x \in [a,b]$.

Sea ahora

$$L(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

entonces

$$L(a + h(x)) = l(x)$$

y

$$l'(x) = L'(a + h(x))h'(x) = f(a + h(x))h'(x).$$

Resta ahora probar que $l'(x) \leq k'(x)$ para toda $x \in [a, b]$, lo que es equivalente a probar que

$$f(a + h(x))h'(x) \leq f(x)g(x),$$

y, dado que $h'(x) = g(x)$, lo anterior se reduce a probar que

$$f(a + h(x)) \leq f(x)$$

para toda $x \in [a, b]$. Dado que por hipótesis la función $f(x)$ es creciente en $[a, b]$ y ya se probó que $a + h(x) \leq x$ para toda $x \in [a, b]$, se concluye que $f(a + h(x)) \leq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

Ejercicio 5.31.

Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces es continua en todo $\mathbb{R}$, con lo cual la función

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $G'(x) = f(x)$.

Sea ahora

$$F(x) = \int_0^{x^2-5x+6} f(t)dt.$$

Se tiene entonces que $F(x) = G(x^2 - 5x + 6)$, de modo que F es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser la compuesta de dos funciones derivables y

$$F'(x) = G'(x^2 - 5x + 6)(2x - 5) = f(x^2 - 5x + 6)(2x - 5) = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0, \quad \text{o} \quad 2x - 5 = 0,$$

por ser

$$f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,$$

entonces los posibles extremos de la función deben buscarse en los puntos de abscisa

$$x = \frac{5}{2}, \quad x = 3, \quad x = 2.$$

Basta ahora tener en cuenta que

$$F''(x) = 2f(x^2 - 5x + 6) + f'(x^2 - 5x + 6)(2x - 5)^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned} F''(3) &= 2f(0) + f'(0) > 0 \\ F''(2) &= 2f(0) + f'(0) > 0. \end{aligned}$$

Como, por hipótesis es $f'(t) > 0$ para toda t real y $f(t) = 0$ solo cuando $t = 0$, la función posee un par de mínimos locales en los puntos de abscisa $x = 3$ y $x = 2$.

Por último,

$$F''\left(\frac{5}{2}\right) = 2f\left(\frac{-1}{4}\right) < 0,$$

dado que f es estrictamente creciente por la condición $f'(t) > 0$ para toda t real y $f(0) = 0$, entonces la función posee un máximo local en el punto de abscisa $x = \frac{5}{2}$.

Ejercicio 5.32.

Sea

$$F(x) = \int_1^x f'(t)dt$$

con $x \geq 1$. Por el teorema fundamental del cálculo integral

$$\int_1^x f'(t)dt = f(t)|_1^x = f(x) - f(1),$$

entonces

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{t^2 + f^2(t)}.$$

Dado que $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)} > 0$ para toda x real, en particular para toda $x \geq 1$, ello implica que $f(x)$ es creciente para toda $x \geq 1$, de donde se tiene que $f(x) \geq 1$ para toda $x \geq 1$, por ser $f(1) = 1$, entonces

$$f(x) - f(1) = \int_1^x \frac{dt}{t^2 + f^2(t)} \leq \int_1^x \frac{dx}{t^2+1} = \arctan t|_1^x = \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

Como para toda x real $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$f(x) - f(1) \leq \arctan x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

de modo que

$$f(x) \leq f(1) + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Se ha probado así que $f(x)$ es creciente y acotada superiormente por $1 + \dfrac{\pi}{4}$, por tanto se puede asegurar la existencia de

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

¿Se podría probar la desigualdad estricta?(¡Inténtalo!).

Ejercicio 5.33.

a) Como $g(t) = \dfrac{e^{2(t+1)}}{t+1}$ es Riemann-integrable en $[0, 1]$, por ser continua en $[0, 1]$, entonces

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1} dt$$

es continua en $[0, 1]$.

Como $g(t)$ es continua en $[0, 1]$, existe

$$f'(x) = \frac{e^{2(x+1)}}{x+1},$$

que también es continua en $[0, 1]$. Queda probado así que f es continua y posee derivada continua en $(0, 1)$.

Se debe demostrar ahora la existencia de la inversa f^{-1} continua en $[0, f(1)]$

Vía 1
Nota que para $x \in [0,1]$ se cumple que

$$f'(x) = \frac{e^{2(x+1)}}{x+1} > 0$$

y es continua, de modo que f es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva en $[0,1]$. Como $f : [0,1] \to [0, f(1)]$, entonces, por el teorema de la función inversa, existe f^{-1} y es continua en $[0, f(1)]$.

Vía 2
Se puede probar directamente que f es inyectiva en [0,1]; es decir, que

$$\int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt = \int_0^y \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Observa que

$$\int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt = \int_0^y \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt$$

para $x, y \in [0,1]$, implica que

$$\int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt - \int_0^y \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt = 0.$$

Aplicando propiedades de la integral, esto se puede escribir en la forma

$$\int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt + \int_y^0 \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt = \int_y^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt = 0,$$

lo que implica que $x = y$, dado que $g(t) = \dfrac{e^{2(t+1)}}{t+1} > 0$ y es continua para toda $t \in (0,1)$.

b) Se quiere demostrar que la ecuación $f(x) + x^2 = 1$ tiene una única raíz en $[0,1]$. Para ello se probará inicialmente la existencia de raíces.

Sea

$$H(x) = \int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt + x^2 - 1,$$

continua en $[0,1]$, por serlo $y = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt$ y $y = x^2 - 1$. Nota además que

$$H(0) = -1, \qquad H(1) = \int_0^1 \frac{e^{2(t+1)}}{t+1}dt > 0,$$

por $y = \dfrac{e^{2(t+1)}}{t+1} > 0$ para t en $[0,1]$.

Aplicando entonces el primer teorema de Bolzano, se puede asegurar la existencia de al menos una raíz de la función H en $[0,1]$.

La unicidad de la raíz se prueba usando el corolario del teorema de Rolle, pues de existir más de una raíz de la función en el intervalo $[0,1]$, su derivada tendría que tener entonces al menos una raíz en este intervalo, lo cual es imposible, dado que

$$H'(x) = \frac{e^{2(x+1)}}{x+1} + 2x > 0$$

para toda x en $[0,1]$.

Ejercicio 5.34.

Como $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ es continua, entonces f es continua en $[0,x]$ para toda $x > 0$. Sea $g(t) = tf(t)$. Esta función es continua en $(0,+\infty)$ por ser el producto de dos funciones continuas en $(0,+\infty)$ y en particular, en $[0,x]$ para toda $x > 0$.

Existe entonces

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left(\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}\right)' = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}. \end{aligned}$$

Como $y = t$ es continua en $[0,x]$ y $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ y no cambia de signo en $[0,x]$ si $x > 0$, se aplica el segundo teorema del valor medio para asegurar la existencia de ε en $[0,x]$ tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \varepsilon \int_0^x f(t)dt,$$

de modo que

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt - \varepsilon\int_0^x f(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)(x-\varepsilon)\int_0^x f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

Finalmente basta tener en cuenta que siendo $\varepsilon \in [0,x]$ y $f(x) > 0$ y continua en $[0,x]$, se tiene

$$(x-\varepsilon)\int_0^x f(t)dt > 0,$$

con lo cual se puede afirmar que $\varphi'(x) > 0$ para toda x en $(0, +\infty)$, de manera que φ es monótona creciente en $(0, +\infty)$.

Ejercicio 5.35.

a) Advierte primeramente que por definición la longitud del arco $\widehat{AM}$ es

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Se desea hallar la curva $y = f(x)$ tal que

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}dt = 2f'(x).$$

Derivando ambos miembros de la igualdad se tiene que

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = 2f''(x) = 2\frac{df'(x)}{dx},$$

que es equivalente a

$$dx = \frac{2df'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Integrando ambos miembros respecto a x se llega a

$$x = 2\int \frac{2df'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}dx.$$

Haciendo $u = f'(x) \;\Rightarrow\; du = df'(x)$, esta igualdad se convierte en

$$x = 2\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Para calcular esta integral hagamos el cambio de variable

$$u = \operatorname{senh} z \quad \Rightarrow \quad du = \cosh z dz,$$

de donde

$$x = 2\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = 2\int \frac{\cosh z}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 z}}dz.$$

Como

$$\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 z} = \cosh z,$$

se tiene

$$x = 2\int \frac{\cosh z}{\cosh z}dz = 2\int dz = 2z + C = 2\operatorname{arcsenh} u + C;$$

es decir,

$$\frac{x-C}{2} = \text{arcsenh } u \quad \Rightarrow \quad u = \text{senh} \frac{x-C}{2},$$

Pero

$$u = f'(x) = \frac{df}{dx},$$

de modo que

$$df = \text{senh} \frac{x-C}{2} dx,$$

lo que implica que

$$\int df = \int \text{senh} \frac{x-C}{2} dx,$$

de donde

$$f(x) = 2\cosh \frac{x-C}{2} dx + C_1$$

con $C, C_1 \in \mathbb{R}$.

b) Se debe ahora hallar una curva $y = f(x)$, tal que $f(x) > 0$, que $f(x)$ sea derivable para todo valor real de x, y que para cualquier valor $a > 0$ se cumpla que el volumen del cuerpo obtenido por la rotación de la figura limitada por la curva, el eje de las abscisas, el de las ordenadas y la recta $x = a$ sea igual a $\delta \pi a f^2(a)$.

Dado que el volumen mencionado está dado por la expresión

$$V = \pi \int_0^a f^2(x) dx,$$

se deberá cumplir entonces que

$$V = \pi \int_0^a f^2(x) dx = \delta \pi a f^2(a)$$

con $a > 0$ arbitrario, por lo que se tendrá que

$$\int_0^a f^2(x) dx = \delta a f^2(a). \tag{II.5.2}$$

Como lo anterior deberá suceder para toda $a > 0$ arbitrario, es posible considerar a la integral

$$\int_0^a f^2(x) dx$$

como una integral con límite superior variable. Denota entonces por

$$F(a) = \int_0^a f^2(x) dx$$

Como $f(x)$ es derivable para todo valor real de x, también lo será $f^2(x)$ para todo valor real de x en el intervalo $[0,a]$ y, por tanto, será continua en el mismo intervalo. Se puede asegurar entonces que $F(a)$ es derivable y que

$$F'(a) = f^2(a),$$

de modo que, por II.5.2 se tiene

$$F'(a) = \left(\int_0^a f^2(x)dx\right)' = (\delta a f^2(a))';$$

es decir, que

$$f^2(a) = \delta f^2(a) + 2\delta a f(a) f'(a).$$

De aquí que

$$(1-\delta) f^2(a) = 2\delta a f(a) f'(a),$$

que por el signo positivo de $f(x)$, resulta equivalente a

$$(1-\delta) f(a) = 2\delta a f'(a),$$

que se escribirá, a su vez, en la forma

$$\frac{1-\delta}{2\delta a} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

Integrando ahora en ambos miembros se tiene

$$\int \frac{1-\delta}{2\delta a} da = \int \frac{f'(a)}{f(a)} da$$

y, por tanto,

$$\frac{1-\delta}{2\delta} \ln a = \ln f(a),$$

entonces

$$\ln a^{\frac{1-\delta}{2\delta}} = \ln f(a),$$

lo que conduce finalmente a que la función buscada es

$$f(a) = a^{\frac{1-\delta}{2\delta}}.$$

Ejercicio 5.36.

a) Verifica inicialmente que f está bien definida. Para ello debes comprobar que la función $t \mapsto g(t)/t$ es integrable entre 0 y x para toda $x \neq 0$.

Como, por hipótesis, g es derivable en $\mathbb{R}$, entonces g es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, $g(t)/t$ es continua para toda t no nula. De lo anterior se deduce que f es continua para toda x no nula.

Para analizar la continuidad de f en $x = 0$, basta notar que existe, aplicando L'Hôpital y definición de g'(0),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(g(x)-g(0))}{x} = g'(0) = f(0).\end{aligned}$$

(Puede verse también lo anterior teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{g'(x)}{1} = g'(0),$$

debido a la continuidad de g' en 0 que se tiene pues, por hipótesis, g es dos veces derivable en 0).

A partir de todo lo anterior se concluye que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Más aún, puesto que para toda $x \neq 0$ existe

$$f'(x) = \frac{g(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2},$$

observa (a partir de la expresión obtenida) que no solo se tiene la derivabilidad de la función f para todo $x \neq 0$ sino que además de ella puede concluirse la continuidad de f' para toda $x \neq 0$ lo que nos será muy útil para el análisis que se pide hacer en el inciso siguiente.

Resta ahora analizar la derivabilidad de f en $x = 0$. Para ello, nota que existe

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t - g'(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^h \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t - hg'(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{g(h)}{h} - g'(0)}{2h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-hg'(0)}{2h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-g'(0)}{4h}.\end{aligned}$$

Nota que no es posible volver a aplicar la regla de L'Hôpital dado que nada se afirma en las hipótesis sobre la derivabilidad de g' alrededor de

0, pero sí se conoce que es derivable en 0, pues $g \in D^2(0)$, luego admite desarrollo de Taylor de primer orden en $h = 0$ con lo que:

$$g'(h) = g'(0) + hg''(0) + \mathrm{o}(h). \tag{II.5.3}$$

Sustituyendo ahora en el límite anterior se llega a que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(0) + hg''(0) - g'(0) + \mathrm{o}(h)}{4h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(g''(0) + \varepsilon(h))}{4h} = \frac{g''(0)}{4}, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye finalmente que f es derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Para comprobar si f es de clase C^1 en $\mathbb{R}$, es decir, si f' es continua en $\mathbb{R}$, basta ver que $f' \in C(0)$ pues en el inciso anterior ya quedó claro que f' es derivable si $x \neq 0$.

Queda solo demostrar entonces que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Ahora bien, nota que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - \dfrac{g(x)}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{xg'(x) - g(x)}{2x^2}.$$

Como g es dos veces derivable en $x = 0$, admite desarrollo de Taylor de segundo orden:

$$g(x) = \underbrace{g(0)}_{=0} + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + \mathrm{o}(x^2) \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = g'(0) + \frac{x}{2}g''(0) + \mathrm{o}(x).$$

Sustituyendo lo obtenido en (II.5.3) y en la expresión anterior, en el límite que se desea calcular, se llega a que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\big(g'(0) + xg''(0) + \mathrm{o}(x)\big) - \big(g'(0) + xg''(0)/2 + \mathrm{o}(x)\big)}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}g''(0) + \mathrm{o}(x)}{2x} = \frac{g''(0)}{4} = f'(0). \end{aligned}$$

A partir de todo lo anterior se puede concluir finalmente que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5.37.

Como la segunda derivada es estrictamente positiva, la función es convexa hacia abajo y su gráfico queda por encima de la tangente en el punto $(c, f(c))$. El área A entre la curva $y = f(x)$, la recta tangente a esta curva en el punto $(c, f(c))$ y las rectas $x = a$, $x = b$ será, por tanto,

$$A(c) = \int_a^b [f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)]\, dx.$$

Dado que esta área será la misma encuéntrese donde se encuentre en el plano, se puede asumir, sin perder generalidad, que tanto la curva $y = f(x)$ como el segmento de recta tangente a la curva en $(c, f(c))$ para x en $[a, b]$ se encuentran en el primer cuadrante.

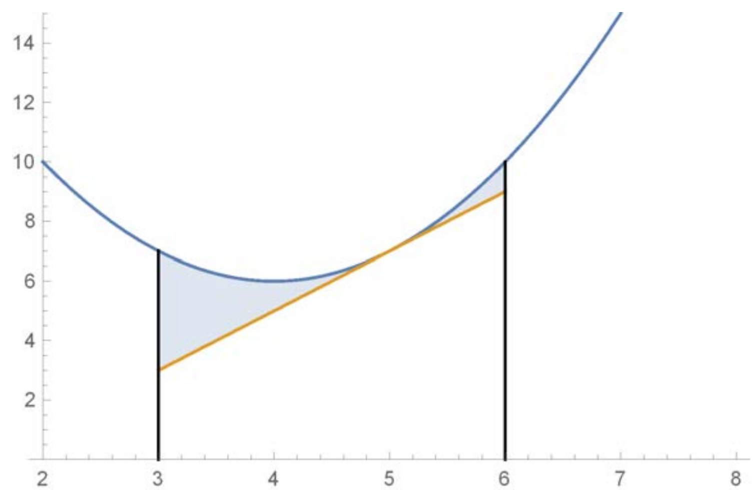


Figura II.5.12.: Región limitada por la curva $y = f(x)$, la recta tangente a esta curva en el punto $(c, f(c))$ y las rectas $x = a$, $x = b$

Se puede escribir entonces la expresión del área que se desea minimizar como la diferencia entre el área limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ y el área del trapecio limitado por la recta tangente a esta curva en el punto $(c, f(c))$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ (ver figura II.5.12); es decir,

$$\begin{aligned} A(c) &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f'(c)(b-c) + f(c) + f'(c)(a-c) + f(c)}{2}(b-a) \\ &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f'(c)(b+a-2c)}{2}(b-a) - f(c)(b-a) \\ &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f'(c)(b^2-a^2)}{2} + cf'(c)(b-a) - f(c)(b-a) \end{aligned}$$

Se deben buscar ahora los valores de c que hagan mínima esta área.

Dado que la función f es dos veces derivable, $A(c)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que, para buscar el área mínima, basta derivar la relación anterior y hallar los extremos.

$$\begin{aligned} A'(c) &= -\frac{f''(c)(b^2-a^2)}{2} + f'(c)(b-a) + cf''(c)(b-a) - f'(c)(b-a) \\ &= -\frac{f''(c)(b^2-a^2)}{2} + cf''(c)(b-a) = f''(c)(b-a)\frac{c-(a+b)}{2}, \end{aligned}$$

por lo que $A'(c) = 0$ para c tal que $f''(c) = 0$ (lo cual es imposible por ser $f''(x) > 0$ para toda x real) o para $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Como $A'(c) > 0$ para $c > \dfrac{a+b}{2}$ y $A'(c) < 0$ para $c < \dfrac{a+b}{2}$, se tiene que $A(c)$ es convexa hacia abajo y alcanza en $c = \dfrac{a+b}{2}$ su único extremo en (a, b), que es justamente su mínimo.

Ejercicio 5.38.

Como $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = c$, la condición dada es equivalente a

$$f'(t) - f(t) = \int_0^1 f(t)dt = c$$

Considera la función auxiliar

$$F(x) = e^{-x}f(x),$$

cuya derivada cumple

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-x}(f'(x) - f(x)) \\ &= e^{-x}\int_0^1 f(t)dt \\ &= e^{-x}c. \end{aligned}$$

Sea la función $G(x) = -ce^{-x}$, de derivada

$$G'(x) = ce^{-x},$$

entonces

$$F'(x) - G'(x) = F'(x) - G'(x) = 0,$$

de donde

$$F(x) - G(x) = k,$$

(k es constante), pero

$$F(x) - G(x) = f(x)e^{-x} + ce^{-x} = (f(x) + c)e^{-x},$$

de modo que

$$f(x) = ke^x - c.$$

Resta solamente hallar el valor de c, para lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} f'(t) - f(t) &= \int_0^1 f(t)dt \\ ke^x - ke^x + c &= \int_0^1 (ke^t - c)dx = (ke^x - cx)|_0^1, \end{aligned}$$

de donde, despejando se tiene

$$2c = k(e-1) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{k(e-1)}{2},$$

entonces las funciones buscadas tienen la forma

$$f(x) = ke^x + \frac{k(e-1)}{2} = k\left(e^x + \frac{e-1}{2}\right).$$

Ejercicio 5.39.

Sea $f(a) = \int_a^{a^2} h(x)\,\mathrm{d}x$, con $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x-1}{32}$.
Como $a > 1$, h es continua en $[a; a^2]$ y, por tanto, f es de clase C^1. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(a) = 2a\,h(a^2) - h(a) &= \frac{2a}{a^2}\ln\frac{a^2-1}{32} - \frac{1}{a}\ln\frac{a-1}{32} \\
&= \frac{1}{a}\left(2\ln\frac{(a+1)(a-1)}{32} - \ln\frac{a-1}{32}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(2\ln(a+1) + 2\ln\frac{a-1}{32} - \ln\frac{a-1}{32}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\ln(a+1)^2 + \ln\frac{a-1}{32}\right) = \frac{1}{a}\ln\frac{(a+1)^2(a-1)}{32}.
\end{aligned}$$

Nota que

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{(a+1)^2(a-1)}{32} = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2(a-1) = 32.$$

Desarrollando la última igualdad se arriba a la ecuación $a^3 + a^2 - a - 33 = 0$, la cual no es difícil de comprobar que tiene como única raíz a $a = 3$.

Para comprobar que $a = 3$ es un mínimo, analiza el signo de f':

$$f'(2) = \frac{1}{2}\ln\underbrace{\frac{9}{32}}_{<1} < 0; \qquad f'(4) = \frac{1}{4}\ln\underbrace{\frac{75}{32}}_{>1} > 0.$$

Con esto se satisface la condición suficiente de mínimo local, y como f no tiene más puntos críticos, se concluye que $a = 3$ es el mínimo (global) de f.

Ejercicio 5.40.

Como, por hipótesis, $f \in \mathbf{C}[0,1]$ y $f(0) = f(1) = 0$, aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (0,1)$, tal que $f'(c) = 0$.

Por hipótesis f' es decreciente, de modo que $f'' < 0$ para toda $x \in [0,1]$. De ello se deduce que f es creciente en $(0, c)$ y decreciente en $(c, 1)$.

La longitud de arco de f en $[0,c]$ viene dada por

$$\begin{aligned} L(0,c) &= \int_0^c \sqrt{1+f'^2(x)}dx \\ &= \lim_n \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}, \end{aligned}$$

donde $\xi_k \in \left(\frac{kc}{n}, \frac{(k+1)c}{n}\right)$, pues la existencia del límite(independiente de la partición y de la selección de los ξ_i) se garantiza por la integrabilidad de la función $\sqrt{1+f'^2(x)}$, dada a partir de las hipótesis del problema.

Escoge los ξ_i atendiendo a que, como

$$f \in \mathbf{C}\left[\frac{kc}{n}, \frac{(k+1)c}{n}\right], \quad \forall k > 0, \quad \forall c \in (0,1),$$

entonces aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, existe $\xi_k \in \left(\frac{kc}{n}, \frac{(k+1)c}{n}\right)$ tal que

$$f'(\xi_k) = \frac{f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)}{\frac{c}{n}},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} L(0,c) &= \lim_n \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{c}{n}\right)^2 + \left(f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)\right)^2} \\ &\leq \lim_n \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{c}{n} + f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)\right) \\ &\leq \lim_n \left(\frac{(n-1)c}{n} + f\left(\frac{c}{n}\right) - f(0) + \cdots + f\left(\frac{nc}{n}\right) - f\left(\frac{(n-1)c}{n}\right)\right) \\ &\leq c + f(c). \end{aligned}$$

De manera análoga se llega a que

$$L(c,1) \leq 1 - c + f(c),$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
L(0,1) &= L(0,c) + L(c,1) \\
&\leq c + f(c) + 1 - c + f(c) \\
&\leq 1 + 2f(c) \leq 1 + 2 \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Abbott, S.: *Understanding Analysis*; 2000.

[2] Aksoy, A. y M. Khamsi : *A Problem Book in Real Analysis*; Springer, 2010.

[3] Berman, G.: *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*; Editorial MIR, Moscú, 1977.

[4] Estela, M. R., E.Cuello y Carmona, A.: *Cálculo Problemas y soluciones*; Ediciones UPC ISBN 84-8301-390-8, 2000.

[5] Ilin,V.y Pozniak, E.: *Fundamentos del Análisis Matemático I, II, III*, MIR, Moscú, 1992.

[6] Kaczor, W. and M. Nowak: *Problems in Mathematical Analysis Volumen 1, 2, 3*, American Mathematical Society, 2000.

[7] Kudriávtsev, L.D., A.D. Kutásov y Chejlov, V.I., Shabunin.M.I.: *Problemas de Análisis Matemático*, Editorial MIR, Moscú, 1989.

[8] Larson, C., Loren: *Problem-Solving Through Problems*, 1983.

[9] Ney de Souza, P. Silva, J-N.: *Berkeley Problems in Mathematics*, Third Edition, Springer, 2000.

[10] Radulescu, D. and T. Andreescu: *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer, 2009.

[11] Sánchez Fernández, C.: *Análisis Matemático I, II*, Editorial Félix Varela, La Habana, 2012.

[12] Spivak, M.: *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, 1996.

[13] Valdés Castro, C. y C. Sánchez Fernández: *Análisis de Funciones de una variable*, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 2014.

[14] Valdés Castro, C. y C. Sánchez Fernández: *Introducción al Análisis Matemático*, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 2008.