Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Conferencia 4

Fórmula de Taylor con resto integral

"La diferencia entre el poeta y el matemática es que el poeta intenta meter su cabeza en los cielos, mientras que el matemático intenta meter los cielos en su cabeza."

G.K. Chesterton

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

En conferencias anteriores encontramos una manera de representar una función mediante una serie de potencias, la denominada **serie de Taylor**, cuyas sumas parciales constituían una forma de aproximación para la función. Sin embargo, este método presentaba la dificultad de no brindar un medio de estimación del error cometido en tal aproximación.

1. La Fórmula de Taylor con resto integral

Johann Bernoulli también llegó a esta representación en serie, pero lo hizo de manera completamente diferente a Taylor: utilizó un método equivalente a la aplicación reiterada de la fórmula de integración por partes.

Más de un siglo después, el matemático francés Augustin Louis Cauchy advirtió que el método de Bernoulli no solo conducía a la serie, sino que, además podía ser usado en la determinación de una fórmula que sirviera para estimar el error que se comete cuando se consideran solo un número finito de términos de la serie, es decir el polinomio de Taylor. Veamos cuál es esta fórmula y algunas aplicaciones que de ella podemos hacer.

Sea $I = [a, b]$ y sea $x \in [a, b]$ fijo

$$\Downarrow$$

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

de modo que

$$f(x) = f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t).$$

Asumiendo que $f \in D^n[a, b] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, integrando por partes tomando

$$u = f'(t),\; du = f''(t)dt,\; dv = d(x-t),\; v = x-t$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) - f'(t)(x-t)\big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes nuevamente, tomando

$$u = f''(t),\ du = f'''(t)dt,\ dv = (x-t)dt,\ v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

de modo que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \left[-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right]|_a^x + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt.$$

Repitiendo el proceso k veces obtenemos la representación

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

donde el **polinomio de Taylor** de f de orden n alrededor de $x = a$ es el sumando

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

y el **resto integral** de orden n es el sumando

$$\gamma_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

El error cometido al aproximar una función por su polinomio de Taylor NO lo conocemos de forma exacta, pero sí se puede estimar cuál es su peor comportamiento, esto es, cuál es el error máximo que se comete con esta aproximación. Para ello es preciso acotar a $\gamma_n(x)$, lo que significa encontrar un número M tal que para los valores de x que nos interesan se cumple

$$|\gamma_n(x)| \leq M,$$

así podemos garantizar que el error cometido (por defecto o por exceso) no sobrepasa en valor absoluto al número M.

La expresión encontrada para el resto está en forma de integral, de modo que, para ser capaces de acotar ese resto será conveniente tener propiedades de la integral que involucren desigualdades.

Propiedades de la integral que involucran desigualdades

- **Propiedad 1:**

$$f(x) \geq 0 (> 0),\ \forall x \in [a,b],\ f \in R[a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f(x)dx\ (> 0).$$

- **Propiedad 2:**

$$f,\ g:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f,\ g \in R[a,b], f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) - f(x) \geq 0\ (> 0)\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0\ (> 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq\ (<) \int_a^b g(x)dx.$$

***Ejemplo* 1.1.** *Apliquemos la expresión obtenida para la fórmula de Taylor con resto integral a $y = e^x$ (alrededor de $x = 0$).*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Si aproximamos

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

el error que se comete viene dado por

$$\gamma_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt. \tag{1.1}$$

Para acotar el resto, supongamos que, por ejemplo, $x \in [0,1]$ ya que estamos trabajando alrededor de $x = 0$; entonces

$$0 \leq t < x \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$e^0 \leq e^t \leq e^x \leq e^1$$

$$\Downarrow$$

$$1 \leq e^t < 3$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot 3$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_n(x) \leq \int_0^x 3\frac{(x-t)^n}{n!}dt = 3\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^x \overset{(1)}{\leq} \frac{3}{(n+1)!}$$

lo que permite afirmar que a medida que n crece el resto $\gamma_n(x)$ se hace más pequeño. En (1) se utilizó que $x \in [0,1]$. De hecho, para $n = 10$ con $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\gamma_n(x) \leq \frac{3}{11!} < 10^{-7}.$$

Queda indicado que usted analice el ejercicio 2 de las páginas 237-238.

***Ejemplo* 1.2.** *¿Cuál es el error máximo que puede cometerse en la aproximación usada en conferencias anteriores*

$$\operatorname{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$*?*

Como todas las derivadas de orden par de la función $y = \operatorname{sen} x$ *en* $x = 0$ *son nulas podemos considerar que estamos trabajando con el polinomio de Taylor de grado 6, de modo que el error se expresa por*

$$\gamma_6(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \operatorname{sen}^7 t dt;$$

como

$$\operatorname{sen}^{(7)} t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}^{(7)} t \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$-\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt \leq \gamma_6(x) \leq \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt.$$

$$\Downarrow$$

$$|\gamma_6(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt = \frac{x^7}{7!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \cdot \frac{1}{7!} < 0{,}00004$$

La Fórmula de Tylor con resto no es útil solo en la valoración del error que comete al truncar la serie de Taylor, sino que tiene aplicaciones diversas, por ejemplo, la demostración de desigualdades.

***Ejemplo* 1.3.** *En el ejemplo anterior vimos que*

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \operatorname{sen}^7 t dt$$

pero

$$\operatorname{sen}^{(7)} t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{7\pi}{2}\right) = -\cos t \leq 0, \forall 0 \leq t < x \leq \frac{\pi}{2},$$

de modo que la función integrando en el resto es negativa y, por tanto,

$$\gamma_6(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por tanto se cumple que

$$\operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Por otra parte, si consideramos el desarrollo siguiente

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \operatorname{sen}^5 t dt,$$

tenemos que

$$\operatorname{sen}^{(5)} t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos t \geq 0, \forall 0 \leq t < x \leq \frac{\pi}{2},$$

por lo que

$$\gamma_4(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por tanto se cumple que

$$\operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{3!}.$$

Hemos probado que

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \operatorname{sen} x \leq \operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Se puede probar que la desigualdad anterior es válida para todo $x \geq 0$.

***Observación* 1.1.** *En este ejemplo aplicamos la fórmula de Taylor en la función seno para encontrar y probar una relación de desigualdad con su polinomio de Taylor de grado 5. Es claro qeu con un procedimiento semejante pueden encontrarse y demostrarse otras desigualdades para la función seno y desigualdades del mismo tipo para otras funciones.* *Es claro que con un procedimiento semejante pueden encontrarse y demostrarse otras desigualdades para la función seno y desigualdades del mismo tipo para otras funciones*

En Clase Práctica se prueba que si $f,\ g$ satisfacen que

$$f(a) = g(a),\ f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a),\ k = 1, \ldots, n-1, \quad \text{y } f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)\ \forall x > a$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) > g(x),\ x > a.$$

Este resultado se puede utilizar para prboar desigualdades como

i) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},\ x \geq 0.$

ii) $\tan x \geq x + \frac{x^3}{3},\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

***Ejemplo* 1.4.** *Consideremos una curva $y = f(x)$ cuyo gráfico sea convexo hacia abajo en $[a,b]$, es decir, cuya segunda derivada en (a,b) sea mayor que cero, entonces la curva está situada, salvo en el punto de tngencia, por encima de cualquiera de las rectas tangentes trazadas en puntos del intervalo (a,b).*

Demostremos esta propiedad haciendo uso de la fórmula de Taylor:

Sea $x_0 \in (a,b)$ y escribamos la fórmula de Taylor de $f(x)$ en x_0 con $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \gamma_1(x),$$

donde

$$\gamma_1(x) = \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt,\ a \leq x \leq b.$$

Como la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en x_0 s justamente

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

entonces solo debemos probar que

$$f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)] \geq 0,\ \forall x \in (a,b),$$

lo que es equivalente a probar que

$$\gamma_1(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b).$$

- *Cuando $x_0 \leq x$ entonces*

$$x_0 \leq t \leq x$$

  por lo que

$$(x - x_0) \geq 0.$$

Como el gráfico es convexo hacia abajo en (a, b) entonces

$$(x - x_0)f''(t)dt \geq 0,$$

usando la propiedad 1 de las integrales vistas anteriormente se tiene que

$$\gamma_1(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t)f''(t)dt \geq 0.$$

- *Cuando $x \leq x_0$, entonces*

$$\gamma_1(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t)f''(t)dt = -\int_{x}^{x_0} (x - t)f''(t)dt$$

como $t \in (x, x_0)$ entonces $(x - t) < 0$, por tanto, ahora está claro que el integrando es negativo y el resto será positivo, es decir

$$\gamma_1(x) \geq 0 \ \forall (a, b).$$

Se puede probar un resultado análogo al anterior para las funciones convexas hacia arriba.

Veamos ahora una aplicación completamente diferente de la fórmula de Taylor.

Ejemplo 1.5. *Probemos que e* ***es un úmero irracional****, esto es probar que e no puede ser escrito como una fracción irreducible en la que p y q sean enteros, $q \neq 0$.*

Ya se conoce que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \gamma_n(x)$$

con

$$\gamma_n(x) = \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} e^t dt.$$

En particular, e se obtiene al hacer $x = 1$ en la fórmula anterior, es decir:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \gamma_n(1)$$

donde

$$\gamma_n(1) = \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n!} e^t dt.$$

Supongamos entonces que existen p, q enteros, con $q \neq 0$, con $\frac{p}{q}$ irreducible y tal que $e = \frac{p}{q}$. Como

$$2 \leq e \leq 3$$

entonces podemos suponer que $p \geq 1$ y $q \geq 2$. Como n puede tomar cualquier valor entero positivo consideremos $n = q$

$$\Downarrow$$

$$e = \frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \gamma_q(1).$$

Si multiplicamos por $q!$ en ambos miembros de la igualdad anterior se tiene que

$$\frac{p \cdot q!}{q} = p(q-1)! = \left(2q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right) + \gamma_q(1) \cdot q!.$$

En esta última igualdad el miembro izquierdo y la cantidad que está entre paréntesis son números enteros, por tanto, también deberá ser entero el producto $\gamma_q(1) \cdot q!$.

Por otra parte,

$$\gamma_q(1) = \gamma_q = \int_0^1 \frac{(1-t)^q}{q!} e^t dt$$

y

$$\frac{(1-t)^q}{q!} < \frac{(1-t)^q}{q!} e^t < 3\frac{(1-t)^q}{q!},\ t \in (0,1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{q!}\int_0^1 (1-t)^q dt < \gamma_q < \frac{3}{q!}\int_0^1 (1-t)^q dt$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{q+1} < \gamma_q \cdot q! < \frac{3}{q+1}.$$

Como $q \geq 2$ esto significa que

$$0 < \gamma_q \cdot q! < 1,$$

lo cual es una contradicción con su condición de entero. Esta contradicción prueba la irracionalidad de e.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.