Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 2

Diferencial. Proposiciones fundamentales.

“Somos lo que hacemos día a día, de modo que la excelencia no es un acto sino un hábito.”

Atistóteles

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

Definición 1. *Diferencial es la parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente.*

Bernoulli-L'Hôpital

En consecuencia:

Regla 1. *El diferencial de una cantidad constante es nulo.*

En el libro de Bernoulli-L'Hôpital se asumen (sin demostración) los siguientes postulados (suposiciones básicas en las que se apoyarán los razonamientos posteriores):

Postulado 1. Se consideran como iguales dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad que es infinitamente pequeña en relación con ellas.

Postulado 2. Una línea curva es considerada como el ensamblaje de una cantidad infinita de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña o, lo que es lo mismo, como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño.

Observaciones:

1. La idea expresada en el postulado 1 ya fue utilizada en múltiples ocasiones en el capítulo anterior cuando en una suma eliminábamos aquellas cantidades que eran infinitamente pequeñas respecto al sumando principal.

2. Gráficas en computadores como poligonales de infinitos lados infinitamente pequeños. (Página 109-110 de [1])

A continuación estudiaremos como se encontraban las reglas que permitirán operar con los diferenciales.

Supongamos que las contidades u, v dependen de cierta variable x.

$$
\begin{array}{rcl}
u = u(x) & \wedge & v = v(x) \\
& \Downarrow & \\
u(x + \underbrace{dx}_{\text{cantidad pequeña}}) = u + du & \wedge & v(x + dx) = v + dv
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Si } y = u(x) + v(x) & = & u + v \\
& \Downarrow & \\
y + dy & = & u(x + dx) + v(x + dx) \\
& = & u + du + v + dv \\
& \Downarrow & \\
y + dy & = & u + v + du + dv \\
dy = du + dv & &
\end{array}
$$

Regla 2. $d(u \pm v) = du \pm dv$

Tal regla puede ser aplicada y extendida a un número finito cualquiera de sumandos. Dejamos al lector su demostración por inducción completa.

De modo análogo, si ahora $y = u(x)v(x) = uv$, tendremos que

$$y + dy \quad = \quad uv + dy$$

Regla 3. $d(uv) = udv + vdu$

Ej 1.

$$
\begin{array}{lll}
d(x^2) & = d(x \cdot x) & = \quad xdx + xdx = 2xdx \\
\\
d(x^3) & = d(x^2 \cdot x) & = \quad x^2dx + xd(x^2) \\
& & = \quad x^2dx + x \cdot 2x \cdot dx \\
& & = \quad 3x^2dx \\
\\
d(x^4) & = d(x^3 \cdot x) & = \quad x^3dx + xd(x^3) \\
& & = \quad x^3dx + x \cdot 3x^2dx \\
& & = \quad 4x^3dx
\end{array}
$$

Generalizando tenemos que $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, para $n \in \mathbb{N}$. Dejamos al lector como ejercicio propuesto su demostración usando inducción completa.

Ej 2. *Sea* $y = \alpha u(x)$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{aligned} y + dy &= \alpha u(x + dx) \\ &= \alpha(u + du) \\ \alpha u + dy &= \alpha u + \alpha du \\ &\Downarrow \\ d(\alpha u(x)) &= \alpha \cdot du \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ej 3. *Para* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) &= a_1 dx + 2a_2 x dx + 3a_3 x^2 dx + \cdots + n a_n x^{n-1dx} \\ &= (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}) dx \end{aligned}$$

Estos mínimos conocimientos permiten atacar uno de los problemas fundamentales: el trazado de la tangente de una línea curva.

Mientras los matemáticos se limitaron al estudio de las cónicas y algunas pocas curvas más, la definición de tangente existente resultaba satisfactoria. Sin embargo, ya el estudio de curvas polinomiales evidenció que la recta concebida geométricamente como tangente podía cortar a la curva en varios puntos y, además la curva no tenía que permanecer a un mismo lado de dichas rectas. Esta situación provocó que se definiera la recta tangente de una forma completamente diferente.

La noción de curva asociada al postulado 2 permite definir *la recta tangente a una curva en un punto M como la recta que resulta de la prolongación de uno de los pequeños lados Mm de la poligonal que constituye la línea curva.*

A continuación mostraremos como determinar esta recta tangente haciendo uso del diferencial.

Determinación de la recta tangente haciendo uso del diferencial

Supongamos dada una curva AM tal que la ordenada $PM = y$ es una función de la abscisa $OP = x$, se desea encontrar un método que permita trazar la tangente MT por un punto M de esta curva.

Si el segmento $Pp = dx$ es muy pequeño, entonces $RM = dy$ es también pequeño, además podemos suponer que el arco de la curva Mm constituye uno de los lados de la poligonal y la tangente buscada MT es prolongación de Mm.

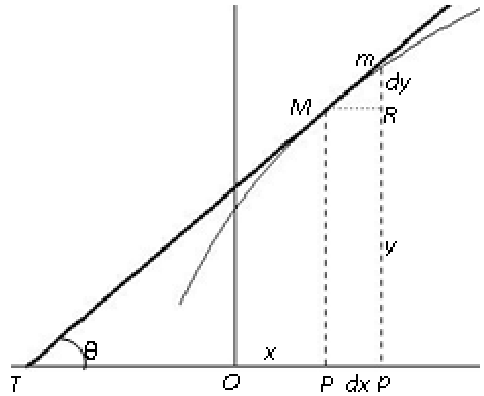

Fig.12

Figura 1: Rectángulo del problema de Cardano

$$\begin{array}{ccc} \Delta MRm & \sim & \Delta TPM \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{mR}{MR} = & \dfrac{dy}{dx} & = \dfrac{MP}{PT} \end{array}$$

es decir, en el lenguaje de los diferenciales: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{PT}$. De modo que el segmento PT se puede determinar por la relación $PT = y\frac{dx}{dy}$, con lo cual se conoce la abscisa del punto T y se puede trazar la tangente TM.

Notemos adicionalmente que el cociente

$$\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$$

proporciona la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma la recta tangente MT con el eje horizontal, es decir la pendiente de la recta tangente viene dada por:

$$\tan\theta = \frac{y}{PT} = \frac{y}{y\frac{dy}{dx}} = \frac{dy}{dx}.$$

Veamos cómo funciona este método en un ejemplo concreto: tenemos la curva $x = y^n$, entonces $dx = ny^{n-1}dy$, lo que implica que

$$PT = y\frac{dy}{dx} = y\frac{ny^{n-1}dy}{dy} = ny^n = nx.$$

Entonces, si se toma el punto P de modo tal que el segmento PT tenga una longitud n veces mayor que OP y se traza la recta MT, ésta será la recta tangente en el punto M.

Luego, la pendiente de la recta tangente a $x = y^n$ en el punto $(1,1)$ es:

$$\tan\theta = \frac{y}{PT} = \frac{y}{nx} \implies \tan\theta = \frac{1}{n} \text{ en } (1,1).$$

luego la ecuación de dicha recta es

$$y = \frac{1}{n}(x-1) + 1.$$

1. Otras reglas de diferenciación y la derivadación

Ya vimos en la conferencia anterior que

$$\begin{aligned} dc &= 0 && (1.1)\\ d(u+v) &= du + dv && (1.2)\\ d(cu) &= cdu \quad c \in \mathbb{R} && (1.3)\\ d(x^n) &= nx^{n-1}dx && (1.4) \end{aligned}$$

Sea ahora $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ Claramente se supone que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom\ v$, entonces

$$\begin{aligned} y + dy = \frac{u(x+dx)}{v(x+dx)} \quad &\implies \quad dy = \frac{u(x+dx)}{v(x+dx)} - y = \frac{u(x+dx)}{v(x+dx)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v}\\ &= \quad \frac{v(u+du) - u(v+dv))}{v(v+dv)} = \frac{uv + vdu - uv - udv}{v^2 + vdv} = \frac{vdu - udv}{v^2\left(1 + \frac{dv}{v}\right)} \end{aligned}$$

Ahora bien, $1 + \frac{dv}{v} \sim 1$. De modo que, por el postulado 1:

$$\boxed{\text{Si } v(x) \neq 0 \implies d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

Las reglas de diferenciación anteriores permiten encontrar el diferencial de cualquier función racional

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ej 4. *Sea* $y = \frac{1}{x^n}$, *entonces*

$$d\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n d1 - 1d(x^n)}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}dx}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}dx$$

En lo que sigue calcularemos los diferenciales para las llamadas funciones trascendentes elementales: exponencial, logarítmica y trigonométricas. Para ello nos auxiliaremos de las representaciones en serie de potencias estudiadas en el capítulo anterior.

1.1. Diferencial de la función exponencial:

Sea $y = e^x$, entonces

$$\begin{aligned} dy = e^{x+dx} - e^x = e^x(e^{dx} - 1) &= e^x\left(1 + dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots - 1\right) \\ &= e^x\left(dx + \underbrace{\frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \dots}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx}\right), \end{aligned}$$

Luego, por el postulado 1,

$$\boxed{d(e^x) = e^x dx}$$

1.2. Diferencial de la función logarítmica:

Sea $y = \ln x$, $x > 0$,

$$dy = \ln(x + dx) - \ln x = \ln\left(\frac{x + dx}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{dx}{x}\right)^3 - \dots}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx},$$

Luego, por el postulado 1,

$$\boxed{d(\ln x) = \frac{dx}{x}}$$

1.3. Diferencial de las funciones trigonométricas:

Consideremos $y =$sen$x$, entonces

$$\begin{aligned} dy &= \operatorname{sen}(x+dx) - \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x\cos dx + \cos x \operatorname{sen} dx - \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x(\cos dx - 1) + \cos x \operatorname{sen} dx \\ &= \operatorname{sen}x\left(1 - \underbrace{\frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^4}{4!}}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx} - \cdots - 1\right) + \cos x\left(dx - \underbrace{\frac{(dx)^3}{3!} + \ldots}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx}\right) \\ &= \operatorname{sen}x\left(\underbrace{\frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^4}{4!}}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx} - \ldots\right) + \cos x\left(dx - \underbrace{\frac{(dx)^3}{3!} + \ldots}_{\text{Cantidades infinitesimales respecto a } dx}\right) \end{aligned}$$

Luego, por el postulado 1,

$$\boxed{d(\operatorname{sen}x) = \cos x dx}\ .$$

Análogamente,

$$\boxed{d(\cos x) = -\operatorname{sen}x dx}$$

Por último, para $y = \tan x$,

$$\begin{aligned} d(\tan x) = d\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x \cdot d(\operatorname{sen}x) - \operatorname{sen}x \cdot d(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x dx + \operatorname{sen}^2 dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$\boxed{d(\tan x) = \sec^2 x dx}$$

Finalmente, usando que $d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$, obtenemos las restantes

$$\begin{aligned} d(\cot x) &= -\csc^2 x\ dx \qquad (1.5) \\ d(\sec x) &= \tan x\ \operatorname{sen}x\ dx \qquad (1.6) \\ d(\csc x) &= -\cot x\ \ \csc x\ dx \qquad (1.7) \end{aligned}$$

1.4. Derivada de una función. Derivación de las funciones elementales.

Hemos visto que

$$
\begin{array}{rclrcr}
d(c) & = & 0 & d(\text{sen} x) & = & \cos x dx \\
d(x^n) & = & nx^{n-1}dx & d(\cos x) & = & -\text{sen} x dx \\
d(e^x) & = & e^x dx & d(\tan x) & = & \sec^2 x dx \\
d(\ln x) & = & \frac{dx}{x} & d(\cot x) & = & -\csc^2 x dx
\end{array}
$$

Dado el diferencial dy de una función, su derivada se expresa en la forma

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Para las funciones de una sola variable, que son las únicas que trabajaremos este curso, las dos nociones, diferencial y derivada de una función, están íntimamente relacionadas y lo que cambia es la forma, el énfasis y no la significación en el estudio del comportamiento de las funciones.

No obstante, en el estudio de las funciones de varias variables y en otras investigaciones más modernas, el concepto diferencial adquiere una mayor importancia no solo práctica, sino también para las investigaciones teóricas.

1.5. Interpretación geométrica de la derivada.

Tenemos que

$$dy = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

para valores muy pequeños de dx. De aquí que

$$f(x + dx) \approx f'(x)dx + f(x),$$

de modo que arribamos a la expresión

$$f'(x) \approx \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Notemos que hemos obtenido un cociente de la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

donde $\Delta(> 0\ o < 0)$ es el incremento de la variable x, y se denomina cociente incremental de f en el punto x. Con lo cual *la derivada de una función f en un punto x es aproximadamente igual al cociente incremental, cuando el incremento Δx es muy pequeño.*

1.6. Interpretación física de la derivada.

- La velocidad instantánea es igual a la derivada del espacio respecto al tiempo.

$$v(t) = \frac{dE}{dt}$$

  Esta relación proviene de la conocida fórmula para calcular la velocidad media de un móvil que se desplaza sobre una línea recta:

$$v_m(t) = \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{\Delta t}.$$

- De forma similar se puede calcular la densidad de una línea material (por ejemplo, un hilo) en un punto s:

$$\delta(s) = \frac{d\Phi}{ds} = \Phi'(s),$$

  donde $m = \Phi(s)$ es la masa del hilo y depende de su longitud.
  Si el hilo es homogéneo la masa está distribuida uniformemente

  Si la distribución de la masa no es uniforme, entonces

$$\Delta m = \Phi(s + \Delta s) - \Phi(s),$$

  de donde se obtiene el coeficiente incremental

$$\frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{\Phi(s + \Delta s) - \Phi(s)}{\delta s}$$

1.7. Reglas de la derivación.

$$f(x) = c \implies f'(x) = 0 \tag{1.8}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{1.9}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{1.11}$$

con $x \neq 0, \forall x \in (\mathrm{Dom} f) \cap (\mathrm{Dom} g)$

Función Primitiva	Función Derivada
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\text{sen}x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\text{sen}x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

Ej 5. *Hallemos la derivada de* $y = x^5 \ln x$.

$$\begin{aligned} y = x^5 \ln x \implies y' &= 5x^4 \ln x + x^5 \frac{1}{x} \\ &= 5x^4 \ln x + x^4 \\ &= x^4(5 \ln x + 1) \end{aligned}$$

1.8. Derivada de la función inversa.

$y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ son gráficos simétricos respecto a $y = x$. Lo que implica que las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $y = f(x)$ en (a, b), con $b = f(a)$ son recíprocas (siempre que sea distinta de cero) a las pendientes de las rectas tangentes a $x = f^{-1}(y)$ en (b, a). Así tenemos entonces que

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{g'(f(a))} \tag{1.12}$$

De igual forma se tiene en el lenguaje de los diferenciales: donde $dy = f'(x)dx$ y $dx = g'(y)dy$,

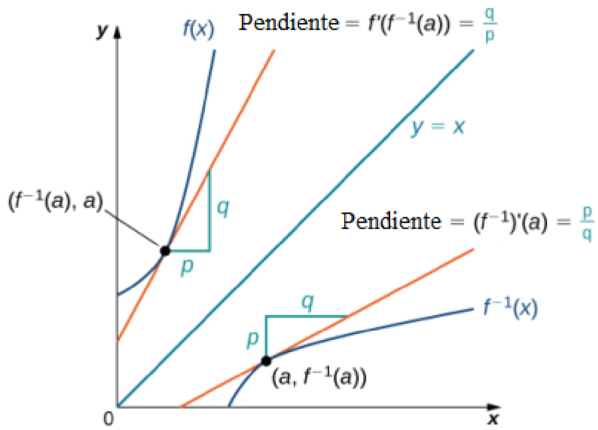

Figura 2: Gráficos de f, f^{-1}

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)} \tag{1.13}$$

Regla de la derivada de la función inversa.

Si $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son funciones mutuamente inversas con $g'(y) \neq 0$ entonces

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{1.14}$$

Ej 6. *Sea* $y = \sqrt[3]{x} = f(x)$, *y por tanto* $x = g(y) = y^3$. *Entonces,*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

Válida siempre que $y \neq 0$. En $(0,0)$ la tangente de $x = y^3$ es horizontal, por tanto $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una tangente vertical en $(0,0)$.

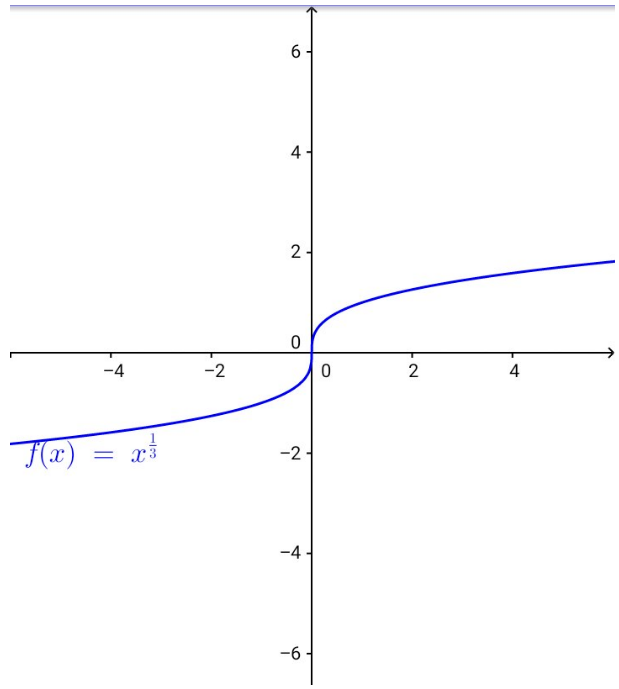

Figura 3: Función raíz cúbica

Derivada de las funciones trigonométricas inversas.

$$
\begin{aligned}
y = \underset{-1<x<1}{\operatorname{arcsen}} x \quad &\Longrightarrow \quad x = \underset{-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}} y \\
\Longrightarrow \ (\operatorname{arcsen}\, x)' \quad &= \quad \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{(\operatorname{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \underset{-1<x<1}{\mathrm{arc\,cos}} x \quad &\Longrightarrow \quad x = \underset{0<y<\pi}{\cos} y \\
\Longrightarrow (\mathrm{arc}\cos x)' \quad &= \quad \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\mathrm{sen} y} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{(\arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \underset{-\infty<x<\infty}{\arctan}\, x \quad &\Longrightarrow \quad x = \underset{-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}}{\tan} y \\
\Longrightarrow (\arctan x)' \quad &= \quad \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} \\
&= \quad \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{(\arctan\, x)' = \frac{1}{1+x^2}}
$$

1.9. Derivada de la función compuesta.

Sea $y = f(x)$ y $z = g(y) = g(f(x))$ tal que existe $(g \text{ o } f)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
dy = f'(x)dx & \\
dz = g'(y)dy \quad &= \quad g'(y)f'(x)dx \\
&= \quad g'(f(x))f(x)dx \\
&\Longrightarrow \quad z' = g(f(x))f'(x)
\end{aligned}
$$

La derivada de una función de la forma $z = h(x) = g(f(x))$ se calcula mediante la fórmula

$$
z = h'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{1.15}
$$

Ej 7. *Sea* $z = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$
z' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.
$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$

Sea $y = a^x,$ *con* $a > 0,$ *entonces*

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \qquad a > 0}$$

Sea $y = \log_a x,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$ *entonces*

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad a > 0, a \neq 1}$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.