Introducción al Análisis Matemático

Tema 3: Introducción al Cálculo Integral

Conferencia 1

Algunos problemas que motivaron la aparición de las herramientas de integración

"Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es un país."

David Hilbert

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

La integración es una herramienta de gran utilidad en Matemática. Entre sus aplicaciones se encuentran la medida de magnitudes como las geométricas (área de figuras, planos, volúmenes de cuerpos, longitudes de arco), magnitudes físicas como el trabajo, cálculo de probabilidades, entre otras.

El primer gran especialista en la resolución de tales problemas fue Arquímedes de Siracusa (285 a.c. - 212 a.c.). Dejó una metodología eficaz para la medición de magnitudes y una huella en Matemática, Física, Astronomía y Mecánica (ver datos biográficos en [1]).

- **Problema de la cuadratura**

  En la antigüedad greco-latina hallar el área de una figura mediante la construcción de un cuadrado de igual área.

- **Problema de la cubatura**

  Calcular el volumen de un cuerpo mediante la construcción de un cubo de igual volumen.

1. Algunos problemas que motivaron la aparición de las herramientas de integración

El cálculo de las áreas de los polígonos fue uno de los primeros problemas que se enfrentaron y resolvieron satisfactoriamente en los estudios geométricos de las civilizaciones antiguas. Sin embargo, la determinación de áreas limitadas por líneas no poligonales ofrecía, en general, grandes dificultades. Incluso el cálculo del área de un círculo evolucionó muy lentamente en la obra de los clásicos de la antigüedad. Para los helenos el cálculo de áreas se resolvía describiendo la forma de construir (con regla y compás solamente) un cuadrado que tuviera la misma área que la figura dada, de ahí la denominación de *cuadratura* para significar el cálculo de un área. Otro problema clásico era encontrar la longitud de una curva. En este caso se trataba de construir (solo con regla y compás) un segmento de recta con la longitud de la curva dada, por eso a este problema se le llamaba *rectificación de curvas*.

Ya en "Los Elementos" de Euclides (s. III a.n.e.) aparece la proporcionalidad del área de un círculo con el cuadrado de su radio y de la longitud de la circunferencia con el radio. Concretamente, si A_r denota el área de un círculo de radio r y L_r la longitud de su circunferencia, entonces

$$A_r = kr^2 \quad \text{y} \quad L_r = k'r$$

donde k y k' son constantes. Algo más tarde Arquímedes determinó la relación entre estas dos constantes: $k' = 2k$ y con ello las redujo a una sola: al área del círculo unidad, es decir, lo que hoy denotamos como el número π.

Para ello Arquímedes aproximó el área de un círculo y la longitud de su circunferencia por las áreas y perímetros, respectivamente, de polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

Dado un círculo C de radio r, denotemos por Q_n^1, Q_n^2 los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos a C, respectivamente, y por $A(Q_n^i)$ y $P(Q_n^i)$, $i = 1, 2$ sus correspondientes áreas y perímetros. Entonces, mediante la división en n triángulos congruentes (ver Figura 1), se ve fácilmente que:

$$A(Q_n^1) = n \times \frac{b_n h_n}{2} = \frac{P(Q_n^1) h_n}{2}$$

donde h_n es la apotema de Q_n^1 y b_n es la longitud del lado del polígono inscrito. Análogamente se obtiene

$$A(Q_n^2) = \frac{r}{2} P(Q_n^2).$$

Por otra parte:

$$A(Q_n^1) \leq A_r \leq A(Q_n^2) \;\text{ y }\; P(Q_n^1) \leq L_r \leq P(Q_n^2) \tag{1.1}$$

donde A_r y L_r denotan respectivamente el área de C y la longitud de su circunferencia.

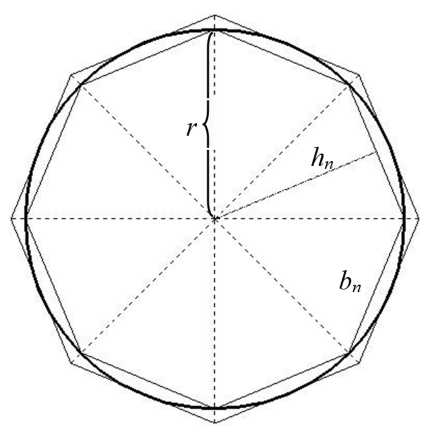

Figura 1: Circunferencia con polígonos inscritos y circunscritos

No es difícil observar que cuando n se hace cada vez mayor los polígonos "tienden" a confundirse con la circunferencia y que, por tanto, sus áreas estarán tan cerca como se desee del área del círculo; análogamente, el perímetro de los polígonos estaría también próximo a la longitud de la circunferencia. Siempre haciendo uso de la figura, se observa que cuando $n \to \infty$ que h_n se "acercará indefinidamente" al radio del círculo ($h_n \to r$), luego debe cumplirse:

$$A(Q_n^1) = \frac{P(Q_n^1) \cdot h_n}{2} \leq A_r \leq \frac{P(Q_n^2) \cdot h_n}{2} = A(Q_n^2)$$

haciendo $n \to \infty$ se tiene que

$$\frac{L_r \cdot r}{2} \leq A_r \leq \frac{L_r \cdot r}{2}$$

de donde

$$A_r = L_r \cdot \frac{r}{2}. \tag{1.2}$$

Sin embargo, las consideraciones anteriores no satisfacían los cánones de rigor de la matemática helena y, por tanto, para demostrar completamente (1.2) realizaban un complicado razonamiento mediante una doble reducción al absurdo.

Este método de aproximar el círculo por polígonos regulares inscritos y circunscritos divulgado por Arquímedes fue perfeccionado por muchos otros seguidores, lográndose estimaciones muy buenas para el número π.

Arquímedes también logró cuadrar un segmento parabólico, esto es, la región determinada por un arco de la parábola y la cuerda correspondiente.

La cuadratura de la parábola

El problema consiste en calcular el área comprendida entre el eje X, la parábola $y = x^2$ con x entre 0 y a, es decir, la región OaB de la figura 2.

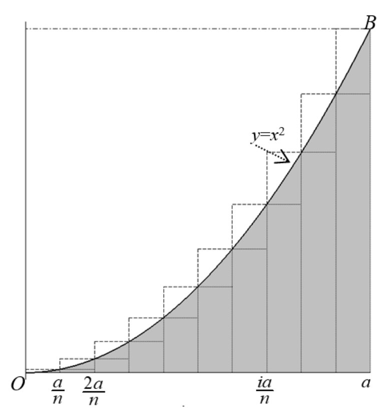

Figura 2: Aproximación del área entre la parábola y OX por rectángulos

En lugar de realizar la aproximación de la figura mediante triángulos, utilizaremos rectángulos, o mejor, figuras formadas por la unión de rectángulos, todos ellos apoyados en el eje de abscisas y de modo que se "vayan adaptando" cada vez mejor a la figura OaB cuya área se desea calcular.

Subdividamos el intervalo $[0, a]$ en n partes iguales de longitud $\frac{a}{n}$ y consideremos rectángulos con base en cada una de estas subdivisiones y altura igual al valor de la función en uno de los extremos, por ejemplo en el extremo derecho. Queda así formado un polígono

$$Q_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

donde R_i es el rectángulo de base

$$i\frac{a}{n} - (i-1)\frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

y de altura $f(x_i)$ donde $x_i = \dfrac{ia}{n}$, con $0 \leq i \leq n$.

Sea

$$x_i = \frac{ia}{n},\ 1 \leq i \leq n$$

entonces

$$\begin{aligned}
A(Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ia}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 a^3}{n^3} \\
&= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)
\end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$ se tiene que la expresión anterior "tiende" a $\dfrac{a^3}{3}$, de modo que (usando aproximaciones por exceso)

$$A(Q_n) = A(OaB) = \frac{a^3}{3},\ \text{cuando } n \to \infty.$$

Si se hubieran usado aproximaciones por defecto hubiera quedado:

$$\begin{aligned}
A(Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i-1)a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2 a^3}{n^3} \\
&= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\
&= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

De modo que, cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\frac{a^3}{3} \le A(OaB) \le \frac{a^3}{3},$$

por lo que

$$A(OaB) = \frac{a^3}{3}.$$

El método de cuadratura de Fermat

Para el razonamiento realizado anteriormente fue necesario poseer una fórmula para la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Por este motivo, su generalización al cálculo de las áreas bajo las curvas $y = x^k$, cuando k es un entero grande o un número negativo o fraccionario precisa de conocer expresiones semejantes para este tipo de sumas cuando el exponente 2 se sustituye por k.

Esta dificultad motivó a Pierre Fermat para modificar la forma de realizar la división del intervalo $[0, a]$. Fermat consideró los puntos de subdivisión de modo que las longitudes de los subintervalos constituyeran una progresión geométrica.

Ejemplifiquemos esta idea con el cálculo del área comprendida entre la curva $y = x^k$, k entero positivo, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ (Figura 3).

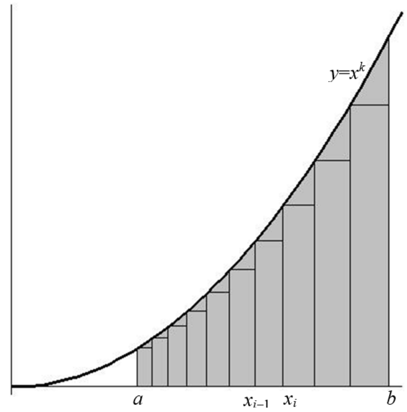

Figura 3: Aproximación del área entre la curva $y = x^k$ y OX, con $k \in \mathbb{Z}_+$.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ por medio de los puntos

$$x_i = ar^i, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

donde r se escoge de forma que $ar^n = b$ o $r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$. Observemos que la longitud del subintervalo $i-$ésimo es

$$x_i - x_{i-1} = ar^i - ar^{i-1} = ar^{i-1}(r-1)$$

por tanto en la medida que n aumenta, r se acerca a 1

$$r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1, \text{ cuando } n \to \infty$$

y la longitud de todos los subintervalos se hará cada vez más pequeña, es decir

$$ar^{i-1}(r-1) \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

El área A_n de la figura formada por la totalidad de los rectángulos con base en los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y altura igual a $(x_{i-1})^k$ es:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1}(r-1)(ar^{i-1})^k = a^{k+1}(r-1)\sum_{i=1}^{n}(r^{k+1})^{i-1} \\
&= a^{k+1}(r-1)\cdot\frac{(r^{k+1})^n-1}{r^{k+1}-1} \\
&= a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}\cdot n}-1\right)\cdot\frac{r-1}{r^{k+1}-1} \\
&= a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}-1\right)\cdot\frac{r-1}{r^{k+1}-1} \\
&= a^{k+1}\left(\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{a^{k+1}}\right)\cdot\frac{r-1}{r^{k+1}-1} \\
&= (b^{k+1}-a^{k+1})\cdot\frac{r-1}{(r-1)(r^k+r^{k-1}+\cdots+r+1)} \\
&= \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(r^k+r^{k-1}+\cdots+r+1)}
\end{aligned}
$$

Cuando $r \longrightarrow 1$ entonces

$$
A_n \longrightarrow \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}.
$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.