Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 1

Problemas generadores. Diferencial. Propiedades fundamentales.

“El esfuerzo constante es la clave para liberar nuestro potencial. ”

Winston Churchill

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Problemas generadores

Problema 1:

Supongamos que se desea hallar, entre todos los pares de números mayores que cero que suman 100, aquellos para los cuales el producto del cubo del primero por el cuadrado del segundo es máximo.

Problemas de este tipo no pueden resolverse solo con el álgebra y la geometría aprendida en la enseñanza preuniversitaria.

Sean x, y los números buscados:

$$x, y > 0 : \quad x + y = 100 \implies y = 100 - x.$$

Se desea maximizar la expresión

$$P(x) = x^3(100 - x)^2 = x^5 - 200x^4 + 10000x^3.$$

Puesto que $0 < x < y < 100$ podría interpretarse el máximo que se busca como el valor de la abscisa $x \in (0, 100)$ donde la curva posee "una cumbre".

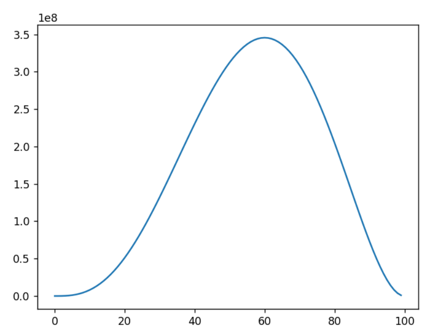

Figura 1: Gráfica de $P(x)$.

El análisis del gráfico nos permite precisar tal abscisa cercana a 60. Sin embargo, armados salvo de nuestros conocimientos de álgebra y geometría elemental no podremos dilucidar cual será exactamente ese calor (Ver explicación en detalle en pág 99 de [1]).

Cuando no contamos con programas computacionales que nos permitan ver el gráfico que representa las curvas y hacer "*zoom*" en los intervalos donde está la cumbre para poder precisar en la abscisa, ¿qué hacer? ¿Qué hacían en la antigüedad cuando no contaban con métodos de cómputo?

El problema de localizar los puntos de extremos (máximos o mínimos, "cumbres" o "valles") de una curva tiene tras de sí una larga historia que remonta a la antigüedad. No obstante, no es hasta el siglo $XVII$ que se elaboran procedimientos de búsqueda eficaz suficientemente generales. Entre los primeros sabios que expusieron ideas claras y plausibles para atacar tales problemas, está un célebre abogado francés, "aficionado" a las matemáticas, llamado Pierre de Fermat, quien estudió primeramente los lugares geométricos dados por ecuaciones de la forma $y = x^n$ y posteriormente para curvas polinómicas generales; encontrando un ingeniosos método de búsqueda de los puntos máximos y mínimos.

Para la determinación de extremos (puntos de máximo o mínimo), Fermat comparó los valores de la función f en el punto de interés con los valores en otros puntos próximos y observó que al tratarse de un punto cualquiera, estos valores son claramente diferentes, pero cuando el punto se encuentra en una cumbre o en un valle de una curva la diferencia era casi imperceptible.

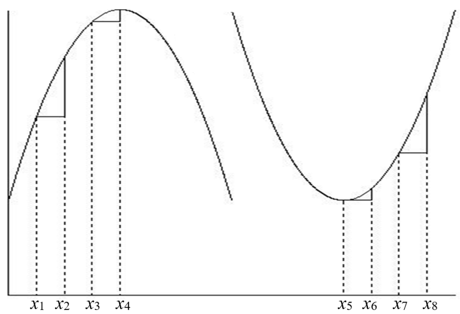

Figura 2: Método de Fermat

En la figura 2 se puede notar que

$$d(x_1, x_2) = d(x_3, x_4),\ \ d(y_1, y_2) > d(y_3, y_4)$$

de igual modo que

$$d(x_5, x_6) = d(x_7, x_8),\ \ d(y_5, y_6) < d(y_7, y_8).$$

Algoritmo de Fermat:

1. Formar el cociente
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. Simplificar.

3. Hacer $h = 0$.

4. Igualar a 0 el resultado obtenido en (3).

5. Resolver la ecuación correspondiente.

   Esto proporciona valores de x en los cuales el gráfico de f puede tener extremos (máximo o mínimo).

Ejemplo 1

$f(x) = x^3 - 3x + 2.$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - 3(x+h) + 2 - x^3 + 3x - 2}{h} \\
&= \frac{(x+h)^3 - x^3 - 3(x+h) + 3x}{h} \\
&= \frac{(x+h-x)((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) - 3(x+h-x)}{h} \\
&= \frac{h((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) - 3h}{h} \\
&= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 - 3h
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo $h = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\left.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|_{h=0} &= 3x^2 - 3 \\
&= 3(x^2 - 1) \\
&= 3(x-1)(x+1) = 0
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1 \quad o \quad x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$(1,0) \quad o \quad (-1,4)$$

Estos últimos serían los posibles extremos. Ahora bien, ¿cómo saber si en efecto lo son, o no? Para determinar si lo son o no, notemos que en este ejemplo en particular podemos hacer lo siguiente: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Note que $f(1) = 0 \implies (x-1)|f(x)$ y por tanto

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x^2 + x - 2) \\
&= (x-1)(x+2)(x-1) \\
&= (x-1)^2(x+2)
\end{aligned}$$

De modo que en putnos cercanos a $f(x) \geq 0 = f(1)$, con lo cual

$$\exists V(1) : \forall x \in V(1), f(x \geq f(1))$$

$$\Downarrow$$

$$(1,0) \text{ es un punto de mínimo local de } f(x).$$

Análogamente podemos obtener que $f(-1)=4$ es un máximo local. Para ello notemos que

$$\begin{aligned} (-1,4) \text{ máx local de } f \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists V(-1) : \forall x \in V(-1), f(x) \leq f(-1) = 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists V(-1) : \forall x \in V(-1), f(x) - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Veamos entonces que $f(x)-4 = x^3-3x-2$ y $f(-1)-4=(-1)^3-3(-1)-2=0$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x)-4 &= (x+1)(x^2-x+2) \\ &= (x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

De modo que para valores cercanos a -1, $f(x)-4 \leq 0$.

$$\Downarrow$$

$$\exists V(-1) : \forall x \in V(-1), f(x) \leq 4 = f(-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(-1) \text{ es máximo local de } f.$$

Ejercicio Propuesto: Localización de los primeros polinomios considerados en este epígrafe en [1].

Esta misma idea la va a usar Fermat para resolver otro antiguo e importante problema geométrico: realizar el trazado de tangentes a las líneas curvas.

Estudiar páginas 102-103 de [1], así como ver las interpretaciones físicas páginas 103-104 de [1].

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.