Tema III:
Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Conferencia 6:
Método de Gauss.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Ejemplo inicial:

Se reúnen 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y el triple de mujeres exceden en 20 el doble de los niños. También se sabe que entre hombres y mujeres se duplican al número de niños.

Plantear las ecuaciones para cada situación.

- Se reúnen 30 personas entre hombres, mujeres y niños:

$$x+y+z=30$$

- Se sabe que entre los hombres y el triple de mujeres exceden en 20 el doble de los niños:

$$x+3y=2z+20$$

- También se sabe que entre hombres y mujeres se duplican al número de niños:

$$x+y=2z$$

Definición: Una ***ecuación*** con n variables se dice ***lineal*** si se puede escribir de la siguiente forma: $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$

Definición: Llamaremos **Sistema de ecuaciones lineales (SEL)** al sistema formado por m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los números $a_{ij}\,(i = 1...m,\ j = 1...n)$ son los coeficientes del SEL y $b_1, ..., b_m$ son los términos independientes.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Planteando el SEL para el ejemplo inicial, tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x + 3y - 2z = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Métodos conocidos de solución:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción

Definición: Llamaremos ***solución particular de un SEL*** al sistema de números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que satisfagan todas las ecuaciones del sistema.

Definición: Llamaremos ***solución general de un SEL*** al conjunto formado por todas las soluciones particulares.

¿Todo SEL siempre tendrá solución?

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ 2x = 8 \end{cases}$$

$x + y = 1 \longrightarrow y = -3$

$x - y = 5 \longrightarrow y = -1$

$2x = 8 \longrightarrow x = 4$

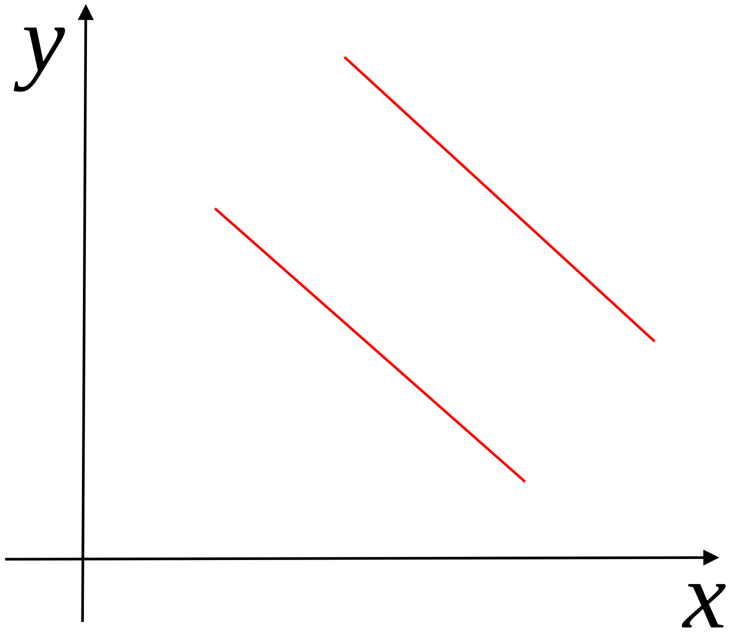
$\Rightarrow$ No tiene solución

*Los **S**istemas de **E**cuaciones **L**ineales se clasifican según la existencia o no de soluciones.*

Sistema de Ecuaciones Lineales

- **No tiene solución**
  - **Incompatible**
- **Tiene Solución (Compatible)**
  - **Única**
    - **Compatible determinado**
  - **Infinitas**
    - **Compatible indeterminado**

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara Gonzάlez Gonzάlez, celia@matcom.uh.cu ,



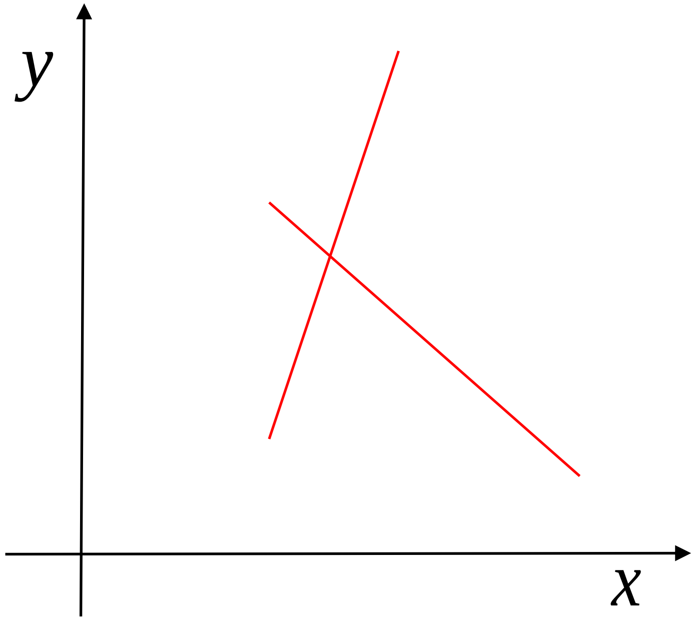
Sistema incompatible

Rectas paralelas
(**ninguna intercepción**)

Idea grafica en $\mathbb{R}^2$, utilidad geométrica.

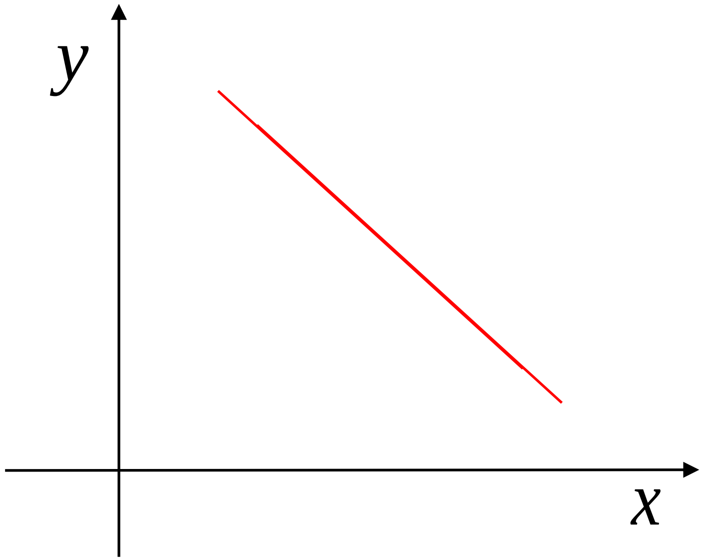
Las posiciones de las rectas representadas por las ecuaciones dependen de la clasificación del SEL que ellas componen.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,



Sistema **Compatible Determinado**

Rectas secantes
(**única intercepción**)



Sistema **Compatible Indeterminado**

Rectas coincidentes
(**infinitas intercepciones**)

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

¿Existirá algún SEL que siempre tenga solución?

Si $b = 0 \Rightarrow$ sistema homogéneo

$$\Downarrow$$

siempre tiene al menos una solución

$$x_i = 0$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ solución general

$$x_1 = x_2 = 0$$

¿Cómo resolver un SEL cualquiera?

Método de sustitución hacia atrás

Partiendo de la solución de la última ecuación se van resolviendo las ecuaciones anteriores.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 \quad + 2x_4 = 4 \\ \quad\quad -4x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

sistema escalonado

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

MATCOM

Ejemplo 3 (continuación)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 4 \\ -4x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_4 = -\frac{2+4x_3}{2} = \boxed{-1-2x_3}$$

$$2x_2 + 2(-1-2x_3) = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{6+4x_3}{2} = \boxed{3+2x_3}$$

$$x_1 - 4(3+2x_3) + x_3 - 3(-1-2x_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 10 + x_3}$$

$$S = \left\{ \left(10 + x_3, 3 + 2x_3, x_3, -1-2x_3\right), x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sistema Compatible Indeterminado

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

¿Como transformar un sistema cualquiera a un sistema escalonado sin perder la solución?

Definición (transformaciones elementales): Dado un SEL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se denominan transformaciones elementales a las siguientes:

Transformaciones elementales (continuación)

T1: Intercambiar dos ecuaciones.

$$E_i^{'} = E_j \wedge E_j^{'} = E_i$$

T2: Multiplicar una ecuación por una constante no nula.

$$E_i^{'} = cE_i, c \neq 0 / c \in \mathbb{K}$$

T3: Adicionarle a una ecuación otra multiplicada por una constante.

$$E_i^{'} = E_i + cE_j$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Definición: *Dos* ***SEL*** se dicen ***equivalentes*** si presentan el mismo conjunto solución.

Teorema: Si a un SEL se le realizan ***transformaciones elementales***, el sistema resultante es ***equivalente*** al inicial.

Los métodos de solución para los SEL se apoyan en operaciones sobre los coeficientes, por tanto se abrevia el proceso escribiendo solo sus coeficientes y términos independientes.

Matriz : estructura (tabla) compuesta por filas y columnas

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix.}_{\text{Matriz del sistema }(A)} \left|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)}^{\text{Matriz ampliada }(A|b)}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

MATCOM

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 1 \\ 3x + 3y - 3z - 3w = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Nota: a cada **ecuación** se le hace corresponder una **fila** y
a cada **variable** se le hace corresponder una **columna**

Método de Gauss: Consiste en realizar *transformaciones elementales* que permiten reducir el SEL a una forma escalonada.

Pasos:

1- Comenzando por $k=1$ seleccionar el primer elemento como pivote en la fila 1 (El pivote no puede ser nulo).
Si $a_{ik}=0$ buscar en esa columna un elemento diferente de 0 e intercambiar las filas.

2- Transformar a cero todos los elementos debajo del pivote (en la misma columna) para todas las filas.

2- Transformar a cero todos los elementos debajo del pivote (en la misma columna) para todas las filas.

$$\text{Pivote} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

para hacer 0 a a_{21}

$$f_2^{'} = f_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) f_1 \Rightarrow a_{21}^{'} = 0$$

3- Realizar el procedimiento hasta obtener un sistema escalonado.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Ejemplo 5:

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y - 3z - 3w = 5 \end{cases}$$

Sistema escalonado

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3E_1 + E_2 \to E_2' \\ -3E_1 + E_3 \to E_3' \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 2 \end{array}\right)$$

Compatible indeterminado

Ejemplo 5 (continuación)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 2 \end{array}\right)$$

$$E_3' \Rightarrow 3z - 12w = 2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2+12w}{3}}$$

$$E_2' \Rightarrow -y + 5\left(\frac{2+12w}{3}\right) - 7w = 1 \Rightarrow \boxed{y = 7/3 + 13w}$$

$$E_1 \Rightarrow x + \left(7/3 + 13w\right) - 2\left(\frac{2+12w}{3}\right) + 3w = 1 \Rightarrow \boxed{x = -8w}$$

$$S = \left\{\left(-8w, 7/3 + 13w, \frac{2+12w}{3}, w\right)\right\}$$

Compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Ejemplo 6:

$$\begin{cases} x-2y+5z=12 \\ 2x+3y-z=5 \\ x+3y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 12 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2E_1+E_2 \to E_2' \\ -E_1+E_3 \to E_3' \end{array}$$

Sistema escalonado

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{array}\right) -\tfrac{5}{7}E_2'+E_3' \to E_3'' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & \tfrac{6}{7} & \tfrac{18}{7} \end{array}\right)$$

Compatible determinado

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Ejemplo 6 (continuación)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 7 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{E}_3'' \Rightarrow 6z = 18 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

$$\mathrm{E}_2' \Rightarrow 7y - 11(3) = -19 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\mathrm{E}_1 \Rightarrow x - 2(2) + 5(3) = 12 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$S = \{(1, 2, 3)\}$ Compatible determinado (solución única)

Ejemplo 7:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ -x - 3y + 6z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2E_1 + E_2 \to E_2' \\ E_1 + E_3 \to E_3' \end{array}$$

Sistema escalonado

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 11 & 2 \end{array}\right) E_2' + E_3' \to E_3'' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Incompatible

$$S = \varnothing$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,


¿ALGUNA DUDA?