Álgebra I Examen Final Ciencia de la Computación 2012-2013

Nombre:____ Grupo:_________________

1. Sea $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ y $q(x) = x^2 + 1$

a) Demuestre que $x = 2cis\,(\pi/2)$ es raíz de $p(x)$

b) Descomponga totalmente $p(x)$ en factores irreducibles de $C[x]$ y $R[x]$

c) Descomponga en fracciones simples de $R(x)$ la fracción racional $q(x)/p(x)$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k+1)x - 3y + 6z = 0 \\ x - y + kz = 0 \\ -ky - 3z = -1 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $k \in R$ el sistema es compatible indeterminado con una variable libre

b) Encuentre, si es posibles, la solución del sistema por el método de Cramer para $k = 0$

3. Sea $E = M_2(R)$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b + c - d = 0, a, b, c, d \in R \right\}$, $S = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \right)$ sistema de vectores de E

a) Demuestre que V es un subespacio vectorial del E

b) Halle una base y la dimensión de V

c) Encuentre, si es posible, una base de V a partir de un subsistema linealmente independiente máximal de S

d) Halle la matriz de cambio de coordenadas de A (base encontrada en el inciso c) a B (base encontrada en el inciso b)

4. Sea $E = R_4[x]$, $V = L[x^3 + 2x + 1, x^2 + 1]$, $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, a - b + d = 0, a, b, c, d \in R\}$

a) Caracterice V

b) Halle $V \cap W$ y $V + W$

c) Halle un suplementario de $V \cap W$ en V

5. Demuestre o refute cada uno de los siguientes planteamientos

a)___ Sea $z = \sqrt{3} + i$ entonces las raíces cúbicas de z son los vértices de un triángulo equilátero

b)___ Sea $p(x) \in C[x]$ y $\alpha \in C$ raíz de $p(x)$ entonces $\overline{\alpha}$ siempre es raíz de $p(x)$

c)___ Sean $A, B \in M_n(K)$ invertibles entonces AB siempre es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

d)___ Sea $S = (u, v, w)$ un sistema linealmente dependiente entonces w siempre es combinación lineal de u, v

e)___ Sea E un espacio vectorial de dimensión 5, $S = (u, v, w)$ un sistema linealmente independiente de E entonces existe una base de E cuyos primeros vectores son $(u + v, v + w, u + v - w)$