Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 3

Análisis del comportamiento de las funciones mediante su derivada.

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas."

Albert Einstein

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

1. Introducción

Proponemos la lectura del epígrafe II.4 “Resolución de problemas históricos con el cálculo de diferenciales” que se encuentra en las páginas 134-141 de [1].

2. Algunos resultados importantes sobre el estudio de extremos de una función

En las conferencias y clases prácticas anteriores hemos visto cómo el diferencial y la derivada pueden ser aplicados en la resolución de numerosos problemas, entre ellos la determinación de la tangente a una curva en un punto dado (si esta existe).

Mostraremos a continuación el uso que se puede hacer de la derivada para analizar detalladamente el comportamiento de una función y sus gráficos.

A partir de este momento trabajaremos siempre en intervalos tales qeu tanto la función como su derivada estén definidos.

2.1. Método empleado para la determinación de extremos

En la primera conferencia de este tema expusimos el método empleado por Fermat para hallar los posibles puntos donde una curva alcanzaba sus extremos (máximo y mínimo).

Veremos a continuación cómo la derivada permite aclarar aún más estas ideas y permite simplificar el algoritmo de Fermat.

Recordemos entonces que

$$(x_0, f(x_0)) \text{ es extremo local (o relativo)}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_0, f(x_0)) \text{ máximo local (o mínimo local)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0),\ \ f(x) \leq f(x_0)\ \ (f(x) \geq f(x_0))$$

Este carácter local es lo que permite la determinación haciendo uso de la derivada de la función que describe la curva. Ya sabemos que

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f'(x)$$

Entonces supongamos que $x_0 \in I$ siendo I un intervalo en el que f y f' están definidas y x_0 es punto interior de I.

Si el gráfico de f posee un máximo local en $x = x_0$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in V(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \text{ cuando } (x_0 + \Delta x) \longrightarrow x_0 \ (\Delta x < 0 \ \vee \Delta x > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$sg\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) = sg(-\Delta x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{si} \quad \Delta x > 0 \\ \\ \geq 0 & \text{si} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

En el miembro izquierdo se encuentra el cociente incremental, que representa la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

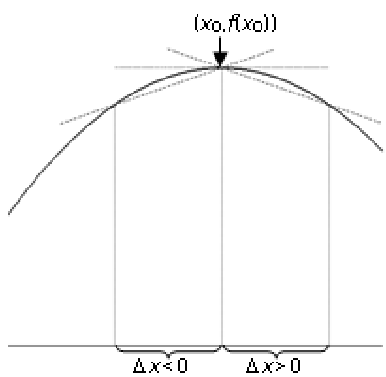


Figura 1: Secantes

Además, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ ocupa la posición límite de estas secantes.

Entonces, intuitivamente, dado que a la izquierda de x_0, las rectas secantes tienen pendiente mayor que cero y a la derecha de x_0 tienen pendiente menor que cero debe ocurrir que la tangente a la curva en el punto interior x_0 debe tener pendiente igual a cero (existe debido a que f es derivable en I por hipótesis); esto es

***Teorema* 2.1.** *(Fermat) f, f' definidas en I, I intervalo, x_0 punto interior de I, f alcanza en x_0 un extremo local o relativo*

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

Un razonamiento análogo nos conduce a la misma conclusión cuando el gráfico de la función tiene en $(x_0, f(x_0)$ un punto mínimo.

Para que un punto $(x_0, f(x_0))$ sea un extremo local de una función $y = f(x)$ (máximo o mínimo local) es necesario que $f'(x_0) = 0$, es decir, que x_0 sea ***punto estacionario*** (que en él se anule la derivada).

Ahora, todos los puntos estacionarios **no tienen** que ser puntos de extremo de f.

¿Cómo distinguimos entonces cuándo lo son?

Veamos inicialmente algunos ejemplos:

***Ejemplo* 2.1.** *Sea $y = x^2$, entonces $y' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, por lo que $x = 0$ es un punto estacionario de $y = f(x)$. Por otra parte $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego, $(0, 0)$ es mínimo local de $y = f(x) = x^2$.*

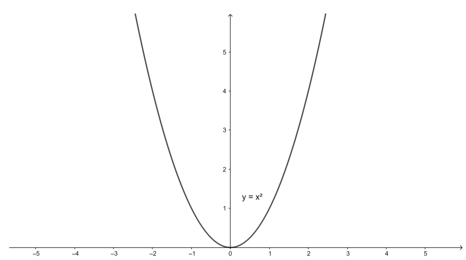


Figura 2: Función $y = x^2$

***Ejemplo* 2.2.** *Sea $y = x^3$, entonces $y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, por lo que $x = 0$ es un punto estacionario de $y = f(x)$. Sin embargo:*

$$f(x) = x^3 \geq 0 \text{ para } x \geq 0$$

$$f(x) = x^3 \leq 0 \text{ para } x \leq 0$$

por lo que $(0, 0)$ NO es extremo local de $y = f(x) = x^3$.

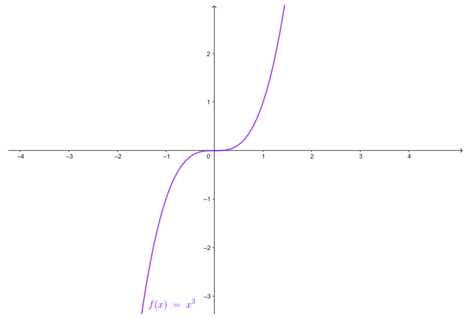
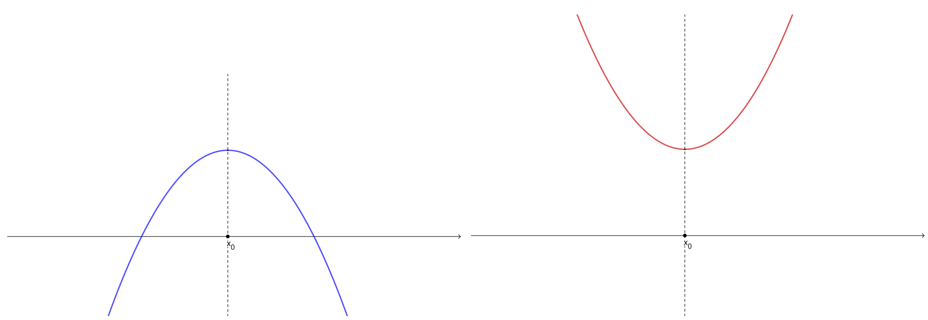


Figura 3: Función $y = x^3$

Por tanto, la anulación de l aderivada en un punto es una condición NECESARIA pero NO SUFICIENTE para que este punto sea un extremo local.

Precisamos entonces de condiciones suficientes para caracterizar tales puntos.

Notemos entonces el siguiente comportamiento de las funciones alrededor de los puntos extremos:



(a) Ejemplo de máximo local (b) Ejemplo de mínimo local

Figura 4: Extremos locales

Necesitamos entonces analizar si existe relación entre la monotonía de una función y el signo de su derivada:

Sea $I = (a, b)$, con f y f' definidas en I y sea f creciente en I

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b): \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

de modo que si tomamos f creciente en (a, b) y sea $\Delta x : \ (x + \Delta x) \in I$

$$\Updownarrow$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad \Delta x > 0 \\ \\ \leq 0 & \text{si} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \ \ \forall \Delta x > (<) 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I$$

***Teorema* 2.2.** *Sea f creciente en (a, b), f, f' definidas en (a, b)*

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$$

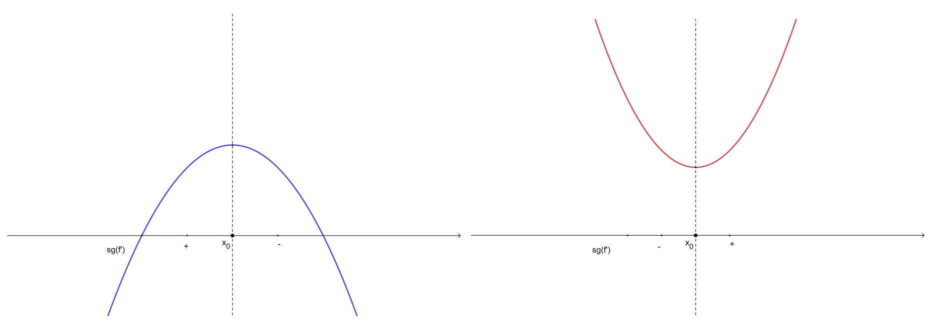
Análogamente se prueba que

***Teorema* 2.3.** *Sea f decreciente en (a, b), f, f' definidas en (a, b)*

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$$

Tenemos entonces que:



(a) Signo de f' en caso de máximo local (b) Signo de f' en caso de mínimo local

Figura 5: Signo de f' en caso de extremos locales

***Teorema* 2.4.**
Si f crece a la izquierda de $x_0 \Longrightarrow f'(x) \geq 0$ si $x < x_0$

$$y$$

si f decrece a la derecha de $x_0 \Longrightarrow f'(x) \leq 0$ si $x > x_0$

De modo que, a partir de la presencia de un extremo de f en un punto interior de un intervalo, conocemos cómo varía el signo de la derivada alrededor del punto pues ya conocemos cómo a partir de la monotonía de una función derivable en un intervalo se conoce el signo de su derivada al ser evaluada sobre los elementos de ese intervalo... PERO!!! lo que se desea es lo contrario: se quiere, a partir del signo de f', determinar la monotonía de la función en un intervalo, entonces debemos analizar la valide del recíproco del teorema hallado antes.

Para justifcar la validez de este recíproco introduzcamos, de modo geométrico, un resultado de Lagrange (que probó en forma analítica pero que tal prueba resulta engorrosa para este primer curso.)

Sea C una curva dada por el gráfico de la función $y = f(x)$, derivable en todo el intervalo $I = (A, B)$ y sean $a, b \in I$ arbitrarios: $a < b$.

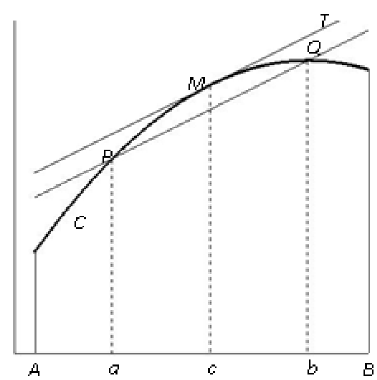


Figura 6: Prueba geométrica del teorema de Lagrange

Tracemos la secante PQ que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ sobre C.

Trasladaremos la secante en forma paralela a sí misma de modo que los puntos P y Q se tornen cada vez más próximos. Entonces cuando la distancia entre P y Q sea infinitesimal el segmento $\overline{PQ}$ se torna uno de los lados infinitamente pequeño de la poligonal con la que identificamos a C (Figura 6).

Entonces la secante PQ (prolongación de este lado de la poligonal) se convierte en la tangente MT a C.

Lo anterior significa que hemos encontrado un punto $c \in I$ donde las tangentes a la curva en este punto es paralela a la secante PQ o, equivalentemente,

***Teorema* 2.5.** *(Lagrange)*

$$f \in D[a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in (a,b): \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Supongamos ahora que $y = f(x): \; f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (A,B) = I$

$$\Downarrow$$

sean $x, x+\Delta x \in (A,B)$ arbitrarios.

Consideremos el intervalo $(x, x+\Delta x)$ si $\Delta x > 0$ o $(x+\Delta x, x)$ si $\Delta x < 0$

$$\Downarrow$$

$\exists c$ entre x y $x+\Delta x$, por tanto $c \in (A,B)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Como $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (A,B)$ y $c \in (A,B)$ entonces

$$f'(c) \geq 0$$

de modo que se tiene

$$f'(c) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

Por tanto

$$sg(f(x+\Delta x)-f(x)) = sg(\Delta x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad \Delta x > 0 \\ \\ \leq 0 & \text{si} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+\Delta x) \begin{cases} \geq f(x) & \text{si} \quad \Delta x > 0 \\ \\ \leq f(x) & \text{si} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ creciente en } (A,B) = I.$$

de modo que hemos encontrado un

Criterio para el análisis del crecimiento de una función

$$f \in D(A,B),\ (A,B) = I,\ f \text{ creciente en } I \text{ (o decreciente)}$$
$$\Updownarrow$$
$$f'(x) \geq 0\ (\leq 0)\ \forall x \in I.$$

***Ejemplo* 2.3.** *Sea* $y = x^2$,

$$y' = 2x \begin{cases} > 0 & si \quad x > 0 \\ \\ < 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

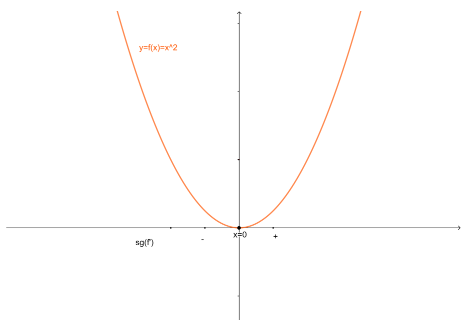


Figura 7: Gráfico de $f(x) = x^2$ y el signo de f'

***Ejemplo* 2.4.** *Sea* $y = x^3,\ y' = 3x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Esta función es creciente en todo su dominio.*

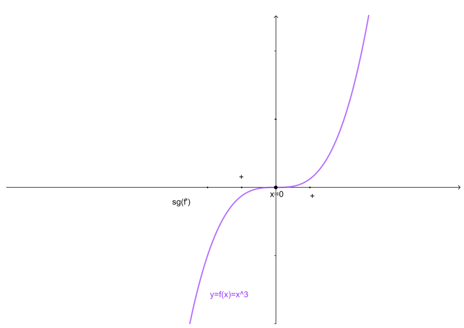


Figura 8: Gráfico de $f(x) = x^3$ y el signo de f'

2.1.1. Consecuencias del teorema de Lagrange

Veamos ahora algunas consecuencias del teorema de Lagrange.

Ya vimos anteriormente que

$$f \text{ constante en } I \Longrightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in I.$$

La fórmula del valor medio proporciona una forma de justificar el recíproco de esta afirmación:

En efecto, si aplicamos el teorema de Lagrange a dos puntos arbitrarios $a, b \in I$ se tiene que

$$\exists c \in (a,b): \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si $f'(c) = 0 \ \forall c \in (a,b)$, como $b - a > 0$, $f(b) = f(a) \ \forall a, b \in I: \ a < b$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ constante en } I$$

de modo que

***Proposición* 2.1.** *(Consecuencia 1 del Teorema de Lagrange)*

$$f \in D(a,b), \ f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$$
$$\Updownarrow$$
$$f \ \textit{constante en}(a,b).$$

Sean ahora $F'(x) = G'(x) = f(x) \ \forall x \in (A, B)$

$$\Downarrow$$

$$(F' - G')(x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(F - G)'(x) = 0$$

por tanto, $F - G$ es constante en (A, B), por lo que existe $c \in \mathbb{R}: \ F(x) = G(x) + c \ \forall x \in (A, B)$.

Se tiene así que

***Proposición* 2.2.** *Todas las primitivas de f en (A, B) se diferencian entre sí en una constante.*

Esta última observación será mmuy valiosa para el estudio de la integración en el capítulo siguiente.

3. Condición suficiente de extremo local o relativo

Veamos ahora cómo puede ayudarnos el análisis del crecimiento de una función con derivadas para la determinación de los puntos de extremo de una función (si los estacionarios son o no extremos y de qué tipo).

Sea x_0 punto estacionario de $y = f(x)$, esto es, $f'(x_0) = 0$, entonces se tiene la **condición suficiente de extremo local o relativo**:

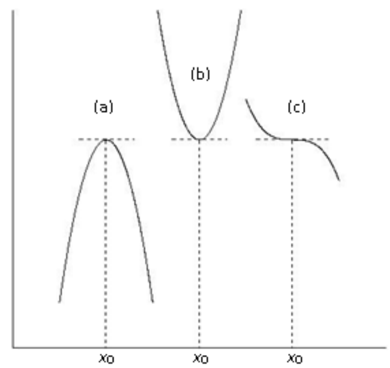


Figura 9: Casos para extremo local

Caso 1 Supongamos que para $\Delta x < 0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x) \geq 0$ y para $\Delta x > 0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x) \leq 0$, entonces la función será creciente antes de x_0 y decreciente después de este valor. Esto significa que $y = f(x)$ tendrá un **máximo** en el punto de abscisa x_0. (Figura 9a)

Caso 2 Consideremos ahora que para $\Delta x < 0$ (pequeño) $f'(x_0 + \Delta x) \leq 0$ y para $\Delta x > 0$ (pequeño) $f'(x_0 + \Delta x) \geq 0$, entonces la función será decreciente antes de x_0 y creciente después de este valor. Esto significa que $y = f(x)$ tendrá un **mínimo** en el punto de abscisa x_0. (Figura 9b)

Caso 3 Si para todo Δx, suficientemente pequeño, tanto positivo como negativo, $f'(x_0 + \Delta x) \leq 0$ (o $f'(x_0 + \Delta x) \geq 0$), entonces la función $y = f(x)$ permanecerá siempre decreciente (o creciente) en las cercanías de x_0 y, por tanto, **no tendrá extremo** en ese punto (Figura 9c).

En resumen, para la localización de extremos locales o relativos en (A, B) se tienen los siguientes puntos como candidatos:

- $x_0 \in (A, B) : \; f'(x_0) = 0$
- $x_0 \in (A, B) : \; \nexists f'(x_0)$

- $x = A$ o $x = B$ (extremos del intervalo en cuestión)

***Definición* 3.1.** *Los **extremos absolutos** de una función son los extremos de esta en todo el dominio.*

***Ejemplo* 3.1.** *Sea*

$$y = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{19}{3}x^3 - 6x^2 + 1$$
$$\Downarrow$$
$$y' = f'(x) = x^4 + 8x^3 + 19x^2 - 12x$$

$$f'(1) = 0,\ f'(0) = 0 \Longrightarrow f'(x) = x(x-1)(x^2 - 17x + 12).$$

Factorizando nuevamente se tiene que

$$f'(x) = x(x-1)(x-3)(x-4).$$

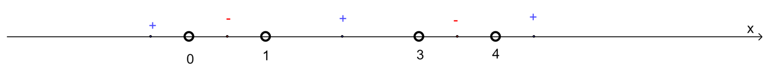


Figura 10: Análisis de signo de f'

Haciendo el análisis de signos de f' se concluye que

- *f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$*
- *f es decreciente en $(0, 1) \cup (3, 4)$.*

Note que f no tiene extremos absolutos en $\mathbb{R}$ debido a que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Como ya dijimos, los extremos (absolutos o relativos) pueden alcanzarse también en puntos del dominio donde la derivada no exista, siempre que alrededor de tales puntos la derivada exista y cambie de signo a la derecha y a la izquierda del punto.

***Ejemplo* 3.2.** *Sea*

$$y = f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

por lo que f' no está definida en $x = 0$.

Sin embargo, $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$, por tanto, f tiene un mínimo local en $(0, 0)$ y es absoluto debido a que $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

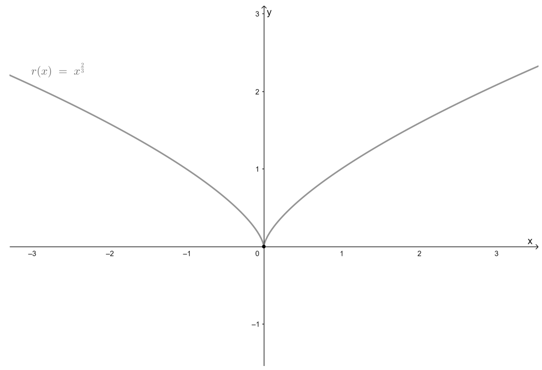


Figura 11: Gráfico de $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Retomemos el primer problema de la Conferencia 1:

***Ejemplo* 3.3.** *Se tiene*

$$y = f(x) = x^3(100 - x)^2 = x^5 - 200x^4 + 10000x^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 800x^3 + 30000x^2 \\ &= 5x^2(x^2 - 100x + 6000) \\ &= 5x^2(x - 60)(x - 100) \end{aligned}$$

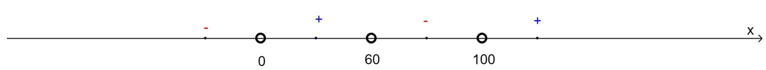


Figura 12: Análisis de signo de f'

Haciendo el análisis de signo de f' se concluye que

- *f es creciente en $(0, 60) \cup (100, +\infty)$*
- *f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (60, 100)$*

es decir,

- *f posee mínimos locales en $(0, 0)$ y en $(100, 0)$*
- *f posee un máximo local en $(60, f(60))$.*

Por tanto, los números buscados en este problema, cuya suma era 100 y el producto del cubo de uno por el cuadrado del otro era máximo, son 60 y 40.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.