# Introducción al Análisis Matemático

## Tema 1

## Conferencia 3

## Un poco de historia sobre sumas infinitas

*"Hola mundo."*

Fulano De Tal

Licenciatura en Matemática

Curso 2020-2021

# 1. Primeras aproximaciones a las sumas infinitas: la serie geométrica

Las sumas de términos infinitos han estado presentes en el trabajo de los matemáticos desde hace siglos. Las primeras de las que se tiene noticias proceden de la civilización helénica, y fueron de tipo geométricas. Esta es una especie de suma infinita muy útil y sencilla, veamos de qué se trata.

> **Problema de la serie geométrica.** *Sea $r \in \mathbb{R}$. Determinar la suma (si existe) dada por la expresión*
> $$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Para investigar esta expresión calculémosla *parcialmente*, es decir, a través de las sumas $S_n$ dadas por los primeros $n$ sumandos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es conocida la relación

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{1.1}$$

cuando $r \neq 1$. Esta fórmula puede ser demostrada fácilmente utilizando inducción completa, entre otras diversas maneras de obtenerla. Los helénicos emplearon procedimientos particularmente ingeniosos para dar solución al problema de la serie geométrica, no obstante, nosotros nos centraremos en el análisis de la expresión 1.1.

**Caso 1.** $|r| < 1$

Notemos que agregar más sumandos a nuestra suma se traduce en hacer crecer el valor de $n$ en la fórmula 1.1, lo cual a su vez implica el decrecimiento de la expresión $r^{n+1}$ en el miembro derecho de la relación, dado que $|r| < 1$.

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + \overset{\text{crece}}{r^n} = \frac{1 - \overset{\text{decrece pues } |r| < 1}{\boxed{r^{n+1}}}}{1 - r}$$

De hecho, en la medida en que $n$ crece, la expresión $r^{n+1}$ se puede hacer tan cercana a 0 como se desee. Es decir, no solo decrecerá sino que se hará *infinitamente pequeña* para valores *infinitamente grandes* de $n$. Esto se suele representar de la siguiente manera:

$$r^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Luego podemos apreciar que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \underbrace{\frac{1}{1-r}}_{\substack{\text{constante para cada } r \\ \text{(no depende de } n\text{)}}} - \underbrace{\frac{r^{n+1}}{1-r}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\, 0}.$$

De aquí que, cuando $|r| < 1$, resulta natural asignarle a la suma infinita $1 + r + r^2 + \dots$ el valor $\frac{1}{1-r}$.

**Proposición 1.1.** Sea $r \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$. Entonces podemos calcular la serie geométrica y se cumple que

$$1 + r + r^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

El caso $|r| \geq 1$ no es tratado en [1] en el segmento dedicado a las series, no obstante, podemos analizarlo de forma bastante simple.

$\boxed{\textbf{Caso 2. } r \geq 1}$

Veremos primero el caso $|r| > 1$. Como hicimos antes, aplicamos la relación 1.1 para analizar las sumas $S_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pero en este caso obtenemos un resultado muy diferente:

crece modularmente tanto
como se quiera cuando $|r| > 1$

crece

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - \boxed{r^{n+1}}}{1-r}$$

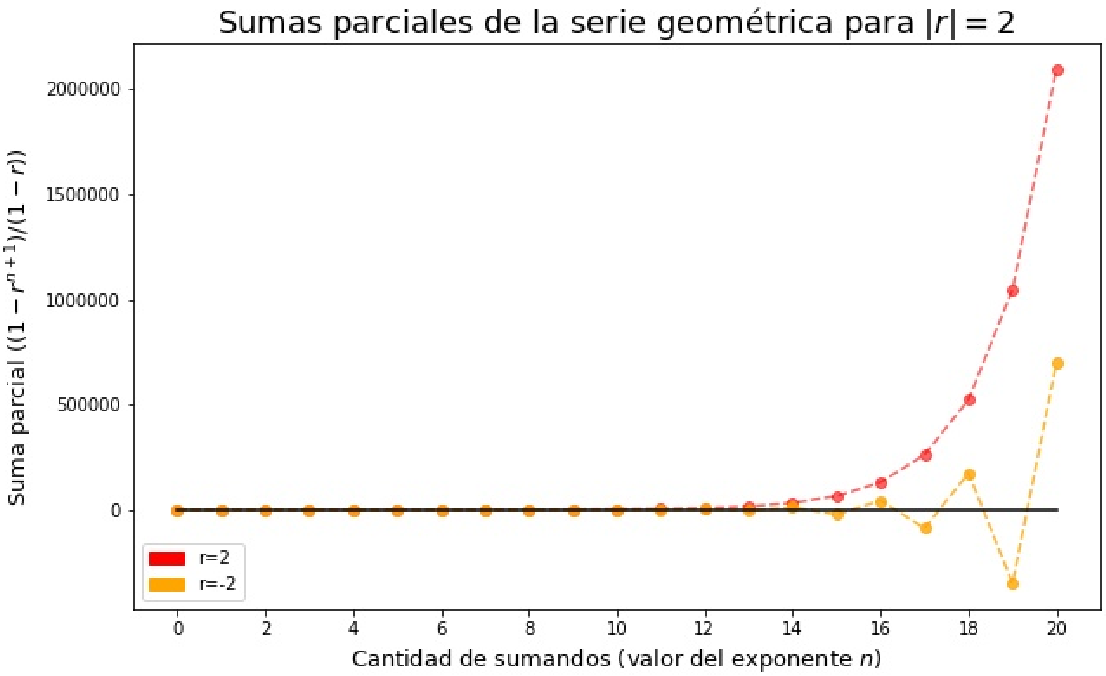
La expresión $r^{n+1}$ crece modularmente al crecer el valor de $n$, de hecho, se vuelve *infinitamente grande* para valores *infinitamente grandes* de $n$. Esto se denota de la siguiente manera:

$$r^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

De ahí que $1 - r^{n+1}$ también crezca infinitamente y, por tanto, también lo haga $S_n$ puesto que depende directamente de esta última expresión. Es decir,

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Luego no existe ningún valor real del que podamos decir que $S_n$ se acerca a él *infinitamente* cuando $n$ crece, sino que, por el contrario, $S_n$ se hará infinitamente grande o *tenderá al* *infinito*. Por tanto, es intuitivo que en este caso no podemos asignarle ninguna suma finita a la expresión $1+r+r^2+\ldots$, lo cual es visible en la siguiente gráfica que evidencia, particularmente para $|r|=2$, el comportamiento de $S_n$.




Veamos ahora el caso $|r|=1$. Notemos que para $r=1$ no podemos aplicar la relación 1.1, pues el denominador se anularía. No obstante, esto no será un problema dado que, en este caso, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 1+r+r^2+\ldots+r^n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1 \text{ veces}} = n+1.$$

Obviamente, la expresión $n+1$ crece al crecer el valor de $n$, de hecho, se vuelve *infinitamente grande* para valores *infinitamente grandes* de $n$. Es decir,

$$S_n = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Luego en este caso ocurre lo mismo que en el anterior, no podremos calcular la expresión $1+r+r^2+\ldots$ pues esta es intuitivamente *infinitamente grande*.

Tampoco lo podremos hacer para $r=-1$, pero en este caso por una razón ligeramente diferente. Veamos que

$$S_n = 1+r+r^2+\ldots+r^n = 1-1+1-\ldots+(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Este es un caso muy interesante, pues si le asignáramos una suma $S$ a la expresión $1 + r + r^2 + \ldots$, entonces podríamos hacer el siguiente agrupamiento:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) \\ &= 1 - S \end{aligned}$$

Por tanto, $S = \frac{1}{2}$, lo cual no parece tener mucho sentido. El problema es que estamos en presencia de **sumas infinitas**, y en ellas las propiedades que usualmente utilizamos (asociatividad, conmutatividad, distributividad) y que sabemos se cumplen para las sumas finitas, no necesariamente se cumplen. Para profundizar en esto último es necesario primero aclarar ciertas definiciones.

## 2. Sumas infinitas, definiciones generales.

Veamos cómo tratar de forma general este tipo de sumas.

**Definición 2.1.** Llamamos *serie numérica* a una expresión del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

donde $a_n$ se llama *término general*. Si sumamos los $n$ primeros términos obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n$$

donde $S_n$ es la *suma parcial de orden* $n$ (cuyo valor está estrechamente vinculado al de $n$), de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \,, \\ &= S_n + r_n \end{aligned}$$

donde $r_n$ se llama *resto parcial de orden* $n$.

Al crecer $n$ indefindidamente, las sumas parciales pueden crecer también tanto como se desee, en cuyo caso **NO** podemos asignar un número que sea suma de la serie. Lo mismo sucede cuando las sumas parciales toman valores “caóticos”, como en el último caso que vimos en cuanto a la serie geométrica. Veremos entonces que la serie es *divergente*.

Si por el contrario, en la medida que $n$ crece, $S_n$ se acerca tanto como se quiera a un único valor $S$, esto se simbolizará por alguna de las siguientes expresiones:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \qquad \text{ó} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

y en este caso se dice que la serie *converge* a un valor $S$ que es su *suma*.
Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.2.** Determinar, para $a \in \mathbb{R}$, la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + \ldots + a + \ldots$$

*Solución.* Analizando las sumas parciales el resultado es muy fácil de apreciar. Primero notemos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a = na,$$

por tanto solo tenemos dos casos:

- Si $a \neq 0$, ocurre que $S_n = na \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ y la serie diverge.
- Si $a = 0$ tenemos que $S_n = n \cdot 0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de ahí que $\sum_{k=1}^{\infty} a = 0$. Luego la serie es convergente y tiene suma 0.

$\square$

**Ejemplo 2.3.** Como vimos en el análisis inicial, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ es divergente

**Observación 2.4.** Nótese que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \text{ (la suma converge a cierto } S \in \mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \\
&\Leftrightarrow \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
&\Rightarrow \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

aunque no se cumple la implicación contraria, para lo cual ofreceremos contraejemplos más adelante.

La idea descrita resulta intuitivamente aceptable y fue la más aceptada hasta el siglo XIX cuando se enunciaron las definiciones formales de límite y de serie convergente. Es coveniente comentar que estas no eran las únicas formas “autorizadas” para asignarle valor o suma a una serie, y destacar que otras formas alternativas (algunas de los cuales veremos aquí) resultaron de gran interés tanto teórico como práctico.
Veamos entonces algunos ejemplos de cómo analizar la convergencia de algunas series sencillas.

**Ejemplo 2.5.** Christian Huygens, prestigioso físico y matemático, le planteó al joven abogado y diplomático Gottfried Wilhelm Leibniz este reto: calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares. Es decir, encontrar

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots$$

*Solución.* La respuesta de Leibniz tras unos pocos días fue original y reflejó una mente muy ingeniosa. Observó que

$$\begin{aligned} S &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 8} + \dots\right) \\ &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots\right]. \end{aligned}$$

Luego, pareciera que

$$S = 2 \cdot 1 = 2.$$

Notemos que empleando la idea de Leibniz, el término general de la serie toma la forma

$$a_n = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= 2\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \end{aligned}$$

Aquí se percibe que cuando $n$ crece, $\frac{1}{n+1}$ se hace tan pequeño como se desee, permitiendo así que $S_n$ se acerque a 2 tanto como se quiera. Se tiene así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2,$$

esto es,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots = 2.$$

$\square$

**Ejemplo 2.6.** Consideramos ahora la serie armónica, esto es, la serie de los inversos de todos los números naturales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

*Solución.* Como $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, podría pensarse que las sumas parciales de esta serie podrían no crecer demasiado. Esta idea intuitiva se refuerza cuando se calculan los valores de sumas parciales para distintos valores de $n$ lo que puede verse en la tabla que se muestra en [1] donde puede verse que para $n = 10^6$, $S_n < 14{,}4$.

**Observación 2.7.** A propósito de este comentario, es importante destacar en este momento que es un ERROR analizar la convergencia de una serie y, aún más, buscar su suma (si la tiene) asignando valores a $n$.

Regresando al análisis de la serie, debido a este comportamiento de "lento crecimiento" de sus sumas parciales, fueron muchos los matemáticos que se sorprendieron enormemente al probar que en realidad estas pueden hacerse tan grandes como se quiera. Es decir, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge,}$$

lo cual veremos a continuación, demostrado rigurosamente. El asombro tan grande que causó este hecho motivó que fueran varios los matemáticos que se dieron a la tarea de hallar procedimientos para probar la divergencia de esta serie. Por ello, mostraremos tres vías de desmotración de particular relevancia y belleza.

<u>Vía 1</u>

La demostración que se muestra a continuación se debe al profesor francés Nicolás Oresme (1323 - 1382), genio intelectual destacado en el siglo XIV por su actividad como matemático, astrónomo, físico, economista, filósofo, psicólogo y musicólogo. Es la primera demostración de la divergencia de la serie armónica y es la que se encuentra más frecuentemente en la mayoría de los textos modernos de Matemática.

Su argumento, notablemente simple e inteligente, se basa en agrupar fracciones consecutivas en la serie armónica en bloques de suma mayor que $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2} &> \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A partir de lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2} &> 1 \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{3}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8} &> 2 \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{16} &> \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que para toda $k$ natural se cumple

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+1}{2},}$$

lo cual se demuestra fácilmente por inducción. De esta forma, para cualquier cantidad finita $M$ existe un número natural $k$ (con $\frac{k+1}{2}>M$), de modo que la $k$-ésima suma parcial de la serie armónica es mayor que $M$, lo que garantiza que la serie armónica diverge al infinito.

Vía 2

Esta demostración se debe al matemático Pietro Mengoli (1625-1686), quien la obtuvo en 1647, adelantándose 40 años a la demostración de Johann Bernoulli. Se trataba de una argumentación muy simple, si se establecía primero el resultado preliminar

$$\boxed{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a} \quad \text{si } a\geq 2,}$$

cuya validez se deduce de

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2-1}>\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2}=\frac{3}{a}.$$

Para aplicar esta relación a la serie armónica, agrupamos convenientemente sus términos en ternas como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \\
&= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots \\
&> 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Al repetir el procedimiento a la serie del miembro derecho se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &> 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \\
&> 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\,.
\end{aligned}$$

Continuando este proceso tantas veces como sea necesario, se prueba que la serie armónica es mayor que cualquier número natural por grande que este sea, por tanto diverge. Notemos que la belleza de la argumentación de Mengoli reside en su naturaleza autorreplicativa. Cada vez que aplicaba su resultado preliminar a la serie armónica, encontraba de nuevo la misma serie pero aumentada en una unidad.

<u>Vía 3</u>
Esta vía fue propuesta por el gran matemático Johann Bernoulli (1667-1748), que además fue un destacado médico y filólogo suizo. Primeramente demostró que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n^2} &> \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n^2-n\text{ veces}} \\
&> \frac{n^2-n}{n^2}=1-\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

de modo que, para todo $n$ natural, se cumple

$$\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.}$$

Esto aporta la idea de agrupar los sumandos de la serie armónica en bloques de suma mayor que 1, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{25}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\cdots \\ &> 1+1+1+\cdots+1+\cdots,\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que la serie armónica es divergente. □

**Observación 2.8.** Acerca de las tres demostraciones anteriores es importante hacer notar que, en términos generales, las tres propuestas siguen la misma idea: agrupar términos de modo que cada agrupación aumente en una cantidad fija las sumas parciales, haciéndolas tan grandes como se desee. De hecho, nótese que en las tres ideas solo varió la forma en que se escogieron los términos a agrupar.

**Ejemplo 2.9.** Hallemos la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots$$

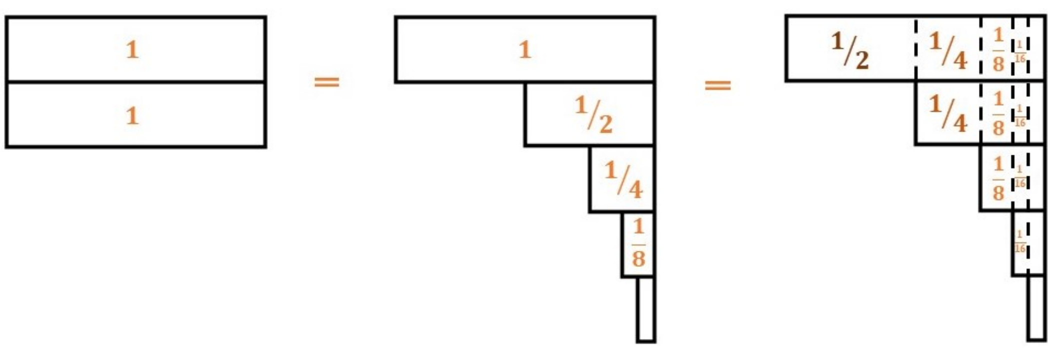
*Solución.* En la determinación de la convergencia y la suma de una serie, una de las dificultades principales es encontrar expresiones sencillas para sus sumas parciales. Es por tal razón que muchas veces se recurría a artificios de diferente índole. En este ejemplo en particular (conocido desde la Edad Media) se utiliza una ingeniosa idea geométrica.
Teniendo en cuenta que ya conocemos las series geométricas, sabemos que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

de modo que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Nos auxiliaremos entonces de la siguiente imagen.



Como se ve, el rectángulo inferior de la primera figura puede descomponerse en la unión de rectángulos de la segunda, cuya área total es la misma. A continuación se pasa a la tercera figura mediante bisección sucesiva de cada rectángulo. $\square$

**Ejemplo 2.10** (Problema de Basilea)**.** Demostrar que la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Solución.* Esta es una serie a la cual los matemáticos, en particular Jacob Bernoulli, dedicaron mucho tiempo y esfuerzo. Jacob Bernoulli demostró su convergencia, para la cual tuvo en cuenta que

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Por tanto, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 < & S_n & = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} & \leq 1 + & \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} & . \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & \\
 & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} & & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} & & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots = 2 & \\
 & & & & & \text{(ejemplo 2.5)} &
\end{array}$$

Luego, nuestra serie es convergente. En efecto, sus sumas parciales al crecer $n$ son estrictamente crecientes (no oscilan), pues son sumas finitas de términos positivos, pero no crecen infinitamente sino que tienden a un valor $S$ fijo entre 0 y 3. Este valor $S$ se calculará más adelante tal cual lo obtuvo Leonard Euler. $\square$

**Observación 2.11.** Se verá de hecho que la serie de los inversos de los cuadrados converge a un número positivo menor que 2. Al problema que consistió en encontrar esta suma se le conoce como Problema de Basilea, debido a la ciudad donde fue propuesto y discutido intensamente. Basilea es la ciudad natal de los hermanos Jacob y Johanne Bernoulli así como de Euler, matemático que de modo extraordinario encontró la respuesta. Esta ciudad suiza está ubicada entre Francia y Alemania.

En muchos ejemplos anteriores hemos manipulado las sumas infinitas de forma similar a como trabajamos las finitas. Así procedieron los matemáticos por muchos años, pero esto puede conducir a grandes errores pues no todas las sumas infinitas resisten este tratamiento. Veamos un último ejemplo tomado de la obra de Jacob Bernoulli, quien advirtió una paradoja que no pudo explicar convincentemente.

**Ejemplo 2.12** (Paradojas aparentes relacionadas con el tratamiento incorrecto de las sumas infinitas)**.** Considérese la siguiente sucesión de resultados:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} &\stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} \\
&\stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \\
&\stackrel{?}{=} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.
\end{aligned}$$

Luego, tendríamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} \stackrel{?}{=} \left(\frac{2^p-1}{2^p}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \stackrel{?}{=} (2^p-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p},$$

es decir,

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p}} \quad \stackrel{?}{=} \quad 2^p - 1\ .$$

igualdad totalmente paradójica para $p \leq 1$

En efecto, fijémonos en algunos casos.

- En el caso $p = 1$, si aplicamos el "resultado" anterior veremos que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}} = 1.$$

  Pero cada sumando del numerador es estrictamente mayor que el correspondiente en el denominador, y de ahí también tenemos que las sumas parciales de la serie del numerador son estrictamente mayores que las de la serie del denominador. Sin embargo, obtuvimos que ¡la razón entre ambas series es 1!

- En el caso $p = \frac{1}{2}$, el resultado es aun más contraintuitivo. Veremos que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k}}} = \sqrt{2} - 1 < 1.$$

  Acá se repiten las relaciones que analizamos en el caso anterior para los sumandos del numerador y el denominador, pero ahora la razón entre las series es ¡incluso menor que 1!

¿Qué explicación tiene este hecho? Lo que está sucediendo es que **las series involucradas son divergentes** y, por tanto, el numerador y el denominador carecen de sentido como números, es decir, el cociente que estamos considerando no es realmente una razón entre números.
Al trabajar con sumas infinitas, como habíamos visto en la serie geométrica divergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k,$$

no se cumplen en general las prepiedades que sí satisfacen las sumas finitas.

Estudiaremos más adelante cuándo podemos afirmar que se cumplen la asociatividad, la conmutatividad y la distributividad en las series.

# Referencias


[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.