Álgebra II

CP9: Matriz Asociada a una aplicación lineal

Lic. David Balbuena Cruz

Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos principales:

- Construir la matriz asociada a una aplicación lineal respecto a una base dada.
- Analizar el efecto de cambiar una base sobre la matriz asociada a una aplicación lineal.

Le recomendamos consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Sección 2.1 y 2.2.

Ejercicios

1. Encuentre las representaciones matriciales de las siguientes aplicaciones lineales con respecto a las bases que se indican:

   (a) $F : K_{n+1}[x] \to K_{n+1}[x]$ definida por $F(P) = -nxP + x^2P'$ con respecto a la base $(1, x, \ldots, x^n)$ considerada tanto en el dominio como en el espacio de llegada F.

   (b) $g : (\mathbb{C}^2, \mathbb{R}) \to (\mathbb{C}, \mathbb{R})$ tal que:

   $$\begin{aligned} g(1,1) &= 1 & g(i,1) &= i-1 \\ g(1,i) &= 1-i & g(i,0) &= 2i-3 \end{aligned}$$

2. ¿Por qué puede asegurarse que existe una aplicación lineal T de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^2$ cuya matriz con respecto a las bases canónicas de dichos espacios es

   $$\begin{pmatrix} 1 & i & -2i \\ 2 & -4 & i-1 \end{pmatrix}$$

   Encuentre $T(x, y, z)$ para todo (x, y, z) de $\mathbb{C}^3$.

3. Sea T el endomorfismo de K^2 que con respecto a la base $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ de dicho espacio tiene por matriz

   $$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   . Encuentre $T(0, 1)$.

4. Sea T el endomorfismo de K^3 tal que

$$M(T(e_i)) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Dado el vector $v = (1, 0, 1)$, calcule $T(v)$ y $T^2(v)$

   (b) Pruebe que el sistema $\{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de K^3.

   (c) Encuentre la representación matricial de T con respecto a esta nueva base.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica. Encuentre la matriz B que representa a f respecto a la base $\{(1, 3), (2, 5)\}$.

6. Sea P la matriz de cambio de coordenadas desde la base A a la base B de un espacio vectorial E. Entonces, para todo endomorfismo f de E tenemos que $M(f, B) = P^{-1}M(f, A)P$