Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Clase Práctica 3

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Al estudiante:

Bienvenido a la Clase Práctica 3 del Tema 1 del curso *Introducción al Análisis Matemático*. Los siguientes ejercicios pueden ser abordados con los conocimientos adquiridos en la Conferencia 1.3 sobre series numéricas. ¡Esperamos que le vaya bien!

Colectivo de la asignatura

EJERCICIOS

Ejercicio 1.

Probar que para $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Ejercicio 2.

Pruebe que:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ es convergente.

Ejercicio 3.

Empleando razonamientos similares a los expuestos para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ¿podrías hallar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$?

Ejercicio 4.

Un número fraccionario se puede escribir siempre en forma decimal, efectuando la división aritmética del numerador entre el denominador. Por ejemplo, si dividimos 3 entre 22, obtenemos $\frac{3}{22} = 0{,}1\overline{36}$.

a) Probar que el número así obtenido, o tiene una cantidad finita de cifras decimales, o tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

b) Demuestra que también tiene lugar el recíproco: una fracción, en forma decimal que tiene un número finito de cifras o infinitas cifras periódicas, puede escribirse como el cociente de dos enteros.

c) Comprueba que $0.\bar{9} = 1$.

Ejercicio 5.

Calcula las sumas:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{5^{n+2}}$

Ejercicio 6.

Argumente cómo puede justificarse la divergencia de la serie armónica a partir de la siguiente idea concebida en el siglo XIV por el filósofo Oresme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Ejercicio 7.

De los dos desarrollos siguientes cuál consideras correcto y explica la razón:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$$

a) $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{7}\right) + \ldots = 1$

b) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2} + \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{2} + \dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}{2} + \ldots = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 8.

Calcula la suma de las series:

a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{3}}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

Ejercicio 9.

Halle el término general a_n y la suma de la serie cuyas sumas parciales son

$$S_n = \frac{n+1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 10.

Encuentra una expresión en función de n para las sumas:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) \binom{n}{k}$

Ejercicio 11.

Calcule la suma de:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{1+n^4(n+1)^4} \right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$.