Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Conferencia 1

Funciones elementales. Fórmula del binomio. Triángulo de Pascal. Coeficientes binomiales.

" A veces sentimos que lo que hacemos es tan solo una gota en el mar, pero aún el mar sería menos si le faltara una gota. "

Madre Teresa de Calcuta

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

1. Introducción al curso

Bienvenido al curso *Introducción al Análisis Matemático*. A lo largo del mismo estudiaremos los siguientes temas:

- Tema 1: Funciones elementales
- Tema 2: Introducción al Cálculo Diferencial
- Tema 3: Introducción al Cálculo Integral.

Mediante la plataforma EVEA y el canal de Telegram de la asignatura se compartirán los materiales para el estudio:

- Conferencias (deben ser complementadas por usted con el estudio del Libro de Textos y las conferencias presenciales)
- Clases Prácticas

La bibliografía básica de la asignatura está conformada por los materiales anteriores y el libro [1]. Se brindará bibliografía complementaria.

Tendremos, en principio, **tres encuentros semanales**: en las semanas impares serán 2 Conferencias y 1 Clase Práctica y, en las pares, 1 Conferencia y 2 Clases Prácticas. Se coordinarán horarios de consulta (preferiblemente de manera virtual en foros de EVEA).

Se harán evaluaciones sistemáticas y los Trabajos de Control (TC) serán en las semanas siguientes:

- Semana 6: TC I (Tema **1**)
- Semana 8: TC II (Temas 1 y **2**)
- Semana 12: TC III (Temas 1, 2 y **3**)

En lo anterior, los temas en **negrita** serán los de mayor peso en cada examen. La asignatura <u>**NO** tiene Examen Final</u>, por lo que deben poner gran empeño en los Trabajos de Control y las actividades sistemáticas.

Colectivo de la asignatura.

2. Preliminares

Se conoce que

$$
\begin{aligned}
&a^2 = a \cdot a \quad (\text{cuadrado de } a)\\
&a^3 = a \cdot a \cdot a \quad (\text{cubo de } a)\\
&\quad \dots\\
&a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \ veces},\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \quad (\text{potencia } n-\text{ésima de } a)
\end{aligned}
$$

Esta notación fue apareciendo gradualmente y se cristalizó en la obra de René Descartes (Figura 5, **Anexo 1**) y fue generalizada por Isaac Newton (Figura 6, **Anexo 2**).

La notación anterior es apropiada para reflejar las propiedades básicas de la potenciación. Se ve, a partir de ellas, que

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

lo que se puede demostrar por *inducción matemática* (también llamada *inducción completa*).

Teniendo en cuenta que

$$1 \cdot a^n = a^n$$

para que se mantenga (2.1) es natural utilizar la notación

$$a^0 = 1$$

ya que entonces tendríamos que

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0.$$

De (2.1) se deduce la propiedad

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ para } m, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.2}$$

Además, con $a > 0$, para

$a > 1:$ a^n crece en la medida que n crece

$a < 1:$ a^n decrece en la medida que n crece

A continuación encontraremos una fórmula para la expresión $(a+b)^n$ con $n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0$. Comencemos por observar algunos casos particulares:

$$(a+b)^{\color{red}0} = {\color{blue}1}$$

$$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

Note las regularidades en los desarrollos anteriores. Para hacerlas más claras, ordenemos los coeficientes en las expresiones anteriores en forma de triángulo, el denominado **triángulo de Pascal** (Figura 1).

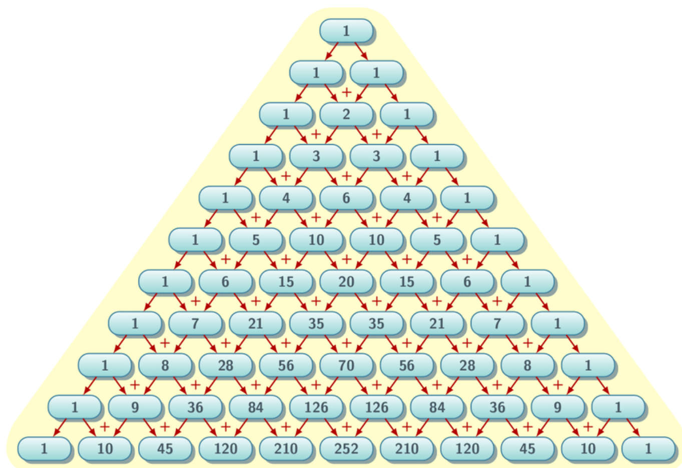

Figura 1: Triángulo de Pascal (primeras 11 filas)

Note que cada número es la suma de los dos contiguos situados en la fila superior.

A continuación, en aras de encontrar la fórmula general para $(a+b)^n$ hallemos una expresión general para estos coeficientes. Para ello observemos las diagonales del triángulo de Pascal, en la Figura 2.

i) La primera diagonal (desde la izquierda) está compuesta solo por números 1.

ii) La segunda diagonal la conforman los números naturales

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

iii) La tercera diagonal la conforman los llamados *números triángulares*

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

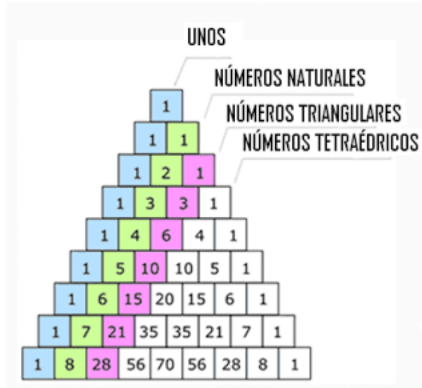

Figura 2: Diagonales del Triángulo de Pascal

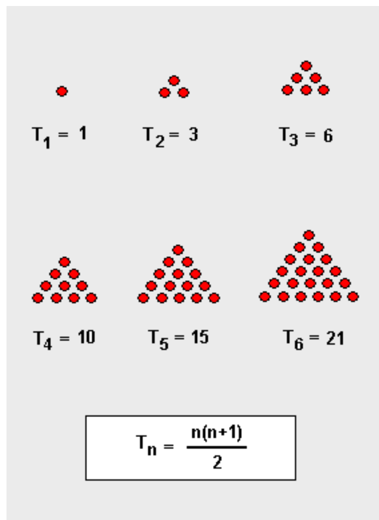

Figura 3: Números triangulares

La Figura 3 muestra gráficamente el significado de *número triangular*:

Como se observa, son de la forma

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

y se demuestra fácilmente que esta expresión es equivalente a

$$T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \ n \geq 2$$

a través del método de inducción completa. En el **Anexo 3** se muestra una demostración de la equivalencia anterior hecha por el ingenioso Carl Friedrich Gauss (Figura 7) en su niñez.

iv) La cuarta diagonal está constituida por los números tetraédricos, que son generados por la expresión

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$$

donde T_k es el $k-$ésimo número triangular. Se cumple que

$$P_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \; n \geq 3.$$

Y así sucesivamente.

La observación de las regularidades anteriores sugieren el resultado siguiente:

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n \qquad (2.3)$$

y esta suma solo contiene un número finito de sumandos (exactamente $n+1$ sumandos).

Probemos la fórmula anterior empleando el método de inducción completa. Para los primeros valores de n ya (2.3) fue comprobada antes.

Supongamos que para $n = k-1$ los valores de (2.3) están comprobados. Asumamos que (2.3) es válida, esto es que

$$(a+b)^{k-1} = a^{k-1} + \frac{k-1}{1}a^{k-2}b + \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2}a^{k-3}b^2 + \cdots + \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i}a^{k-i-1}b^i + \ldots \qquad (2.4)$$

y probemos que entonces la fórmula se cumple para $n = k$.

Asumiendo válida (2.4) multipliquemos ambos miembros por $(a+b)$, en cuyo caso se obtiene

$$(a+b)^{k-1}(a+b) = (a+b)^k = (a+b)^{k-1}a + (a+b)^{k-1}b$$

$$\begin{aligned}
&= a^k + \frac{(k-1)}{1}a^{k-1}b + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot i}a^{k-i}b^i + \dots \\
&\ + a^{k-1}b + \frac{(k-1)}{1}a^{k-2}b^2 + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2}a^{k-3}b^3 + \dots \\
&\ + \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(i-1)}a^{k-i}b^i + \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot i}a^{k-i-1}b^{i+1} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^k + \left[\frac{(k-1)}{1} + 1\right]a^{k-1}b + \left[\frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2} + \frac{(k-1)}{1}\right]a^{k-2}b^2 \\
&\ + \left[\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2}\right]a^{k-2}b^2 + \cdots + \\
&\ + \left[\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)(k-i)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot i} + \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(i-1)}\right]a^{k-i}b^i + \dots
\end{aligned}$$

Observemos ahora que

- $\dfrac{(k-1)}{1} + 1 = k$
- $\dfrac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2} + \dfrac{(k-1)}{1} = \dfrac{k(k-1)}{1\cdot 2}$
- En general, para $i \leq k$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)(k-i)}{1\cdot 2\cdot\ \dots\ \cdot i} + \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ \dots\ \cdot(i-1)} \\
&= \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ \dots\ \cdot(i-1)}\left[\frac{k-i}{i} + 1\right] = \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ \dots\ \cdot i}
\end{aligned}$$

(Lo anterior constituye la prueba de la Fórmula de Pascal, que se verá más adelante).

De donde se obtiene que

$$(a+b)^k = a^k + \frac{k}{1}a^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}a^{k-2}b^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{k-3}b^3 + \cdots + b^k,$$

lo que demuestra que para $n = k$ se cumple la fórmula (2.3).

Los coeficientes en (2.3) pueden ser escritos en forma más sintética teniendo en cuenta que

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot i}\cdot\frac{(n-i)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-i)\dots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

donde se ha introducido el símbolo "!" que indica

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot k$$

y se denomina **factorial** del número $k \in \mathbb{Z}_+$. Desde un punto de vista combinatorio, $k!$ indica de cuántas formas se puede organizar un conjunto de k elementos (sin repetir elementos).

Los coeficientes anteriores son denominados *coeficientes binomiales* y se designan por

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

El número $\binom{n}{i}$ fue estudiado en 12^{mo} grado al estudiar el número de formas de elegir i objetos de un total de n objetos cuando los objetos son indistinguibles entre sí, es decir, que no importa el orden y no se repiten los objetos elegidos. El número $\binom{n}{i}$ se lee "combinaciones de n en i", por eso se le llama también *número combinatorio*.

Observaciones:

1- Solo consideraremos el símbolo $\binom{n}{k}$ cuando $k \leq n$ para $n, k \in \mathbb{Z}_+$

2- Para que todo sea coherente se tiene el convenio siguiente:

$$0! = 1.$$

Además, tiene sentido lo anterior desde el punto de vista combinatorio, ya que existe una sola forma de ordenar un conjunto con una cantidad nula de elementos (¿Cree usted que existe más de una? ¿Cree usted que no existe ninguna?).

3- A partir de las relaciones vistas en el Triángulo de Pascal y luego de conocer que sus elementos son números combinatorios (como se ve en las Figuras 1 y 4 respectivamente) se puede llegar a las siguientes expresiones:

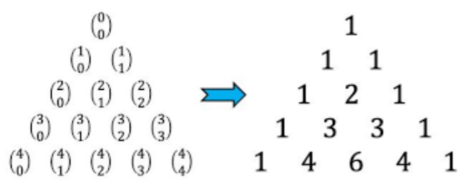

Figura 4: Triángulo de Pascal y coeficientes binomiales

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

  Esto se obtiene claramente de la definición de coeficiente binomial.

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}_+, \; k \leq n-1 \quad$ *(Fórmula de Pascal)*

  Probemos la Fórmula de Pascal:

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot (k-1)} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot k} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot (k-1)} \left[1 + \frac{n-k}{k}\right] = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad \square.
\end{aligned}$$

Con la nueva notación introducida, la fórmula (2.3) puede ser escrita en la forma

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Anexos

Anexo 1: René Descartes

René Descartes (Francia, 1596 - Suecia, 1650). Filósofo, matemático y físico inglés padre de la geometría analítica y la filosofía moderna y uno de los principales protagonistas en el umbral dela revolución científica.

Figura 5: René Descartes

Pierde a su madre a los 12 meses. Es criado por su abuela, su padre y una nodriza de los que nunca se separó.

Su padre le llamaba "pequeño filósofo" porque desde su más temprana infancia se planteaba preguntas sobre todo.

A continuación presentamos algunas frases célebres de este sabio:

> "*Cogito, ergo sum*" (Pienso, luego existo).
>
> "Todo lo complejo puede dividirse en partes simples."
>
> "Para investigar la verdad, es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas."
>
> "Daría todo lo que sé por la mitad de lo que ignoro."

“Sentir no es otra cosa que pensar.”

“Apenas hay algo dicho por uno cuyo opuesto no sea afirmado.”

“Vivir sin filosofar es, propiamente, tener los ojos cerrados, sin tratar de abrirlos jamás.”

“No hay nada repartido de modo más equitativo que la razón: todo el mundo está convencido de tener suficiente.”

“La lectura es una conversación con los hombres más ilustres de los siglos pasados.”

“Conducir con orden mis pensamientos empezando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para ascender poco a poco, gradualmente, hasta el conocimiento de los más complejos y suponiendo incluso un orden entre ellos que no se paracen, naturalmente, unos a otros.”

Anexo 2: Isaac Newton

Isaac Newton (Reino Unido, 1643-1727). Teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Es autor de los “Philosophiæ naturalis principia mathematica”, más conocidos como los *Principia*, donde describe la ley de la gravitación universal y establece las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Fue investido Caballero en 1708 por la Reina Ana, convirtiéndose así en el primer científico que por su trabajo ostentó el título de Sir antes de su nombre.

Figura 6: Isaac Newton

A continuación presentamos algunas frases célebres de este sabio:

“Lo que sabemos es una gota de agua, lo que ignoramos es el océano.”

“Los hombres construimos demasiados muros y no suficientes puentes.”

"Si consigo ver más lejos es porque he conseguido pararme sobre hombros de gigantes."

"La unidad es la variedad y la variedad en la unidad es la ley suprema del universo."

"La naturaleza se complace con la simplicidad y la naturaleza no es ninguna tonta."

"La verdad siempre se halla en la simplicidad y no en la multiplicidad y confusión de las cosas."

"Si he realizado descubrimientos invaluables ha sido por tener más paciencia que cualquier otro talento."

"Puedo calcular el movimiento de los cuerpos pero no la locura de la gente."

"Para explicar toda la naturaleza no basta ni un hombre ni una edad completa. En su lugar, lo mejor es que el hombre busque un poco de verdada y certeza, dejando el resto para los demás, para los que vendrán con conjeturas y sin dar nada por hecho."

"Ningún gran descubrimiento fue hecho jamás sin una conjetura audaz."

Anexo 3: Demostración de Gauss

A continuación presentamos la demostración de la suma

$$S_n = 1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2},$$

con $n \in \mathbb{N}$, dada por Carl Friedrich Gauss siendo un niño:

Figura 7: Carl Friedrich Gauss

La idea es considerar el siguiente sistema igualdades

$$\begin{array}{rcl} 1 + & n & = n+1 \\ 2 + & (n-1) & = n+1 \\ 3 + & (n-2) & = n+1 \\ & \ldots & \\ n + & 1 & = n+1 \end{array}$$

Sumando en bloque las igualdades anteriores se obtiene que

$$[1 + 2 + \cdots + n] + [n + (n-1) + (n-2) + \ldots 2 + 1] = n(n+1)$$

Podemos sustituir las sumas entre corchetes por lo siguiente

$$S_n + S_n = n(n+1) \Rightarrow 2S_n = n(n+1)$$

Obteniéndose finalmente que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.