Álgebra II

CP1: Espacios vectoriales y Subespacios

Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos:

- Verificar si un conjunto dado constituye un espacio vectorial con las leyes especificadas.
- Comprobar si un subconjunto constituye un subespacio vectorial

Le recomendamos realizar los ejercicios señalados y consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Secciones 1.2, 1.3 y 1.4.

Ejercicios

Ejercicio 1: En $\mathbb{R}^n$ se definen las operaciones

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a - b \\ \alpha * a &= -\alpha\, a \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles de los axiomas de espacio vectorial satisface $\mathbb{R}^n$ con estas dos operaciones?

Ejercicio 2: En K^2 (donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se definen las operaciones:

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (a + d, b + c) \\ \alpha * (a, b) &= (\alpha\, a, \alpha\, b) \end{aligned}$$

para (a, b), $(c, d) \in K^2$, $\alpha \in K$. Determine si E es un espacio vectorial sobre K.

Ejercicio 3: En $\mathbb{R}^*_+$ se definen las operaciones:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= ab \\ \alpha * a &= a^\alpha \end{aligned}$$

Demuestre que E es un espacio vectorial.

Ejercicio 4: Consideremos el conjunto $E =]-\pi/2, \pi/2\,[$ y el cuerpo $K = \mathbb{R}$. Demuestre que (E, K) es un espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \arctan(\tan a + \tan b) \\ \alpha * a &= \arctan(\alpha \tan a) \end{aligned}$$

Ejercicio 5: En el conjunto de las funciones complejas de variable real $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ considere el subconjunto

$$V = \{\ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C})\ :\ f(-t) = \overline{f(t)}\ \}$$

Demuestre que V con las operaciones de suma y producto usual por un escalar, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ¿Puede ser V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

Ejercicio 6: Sea $V = \mathbb{R}^3$. Demuestre que W no es un subespacio de V, donde

(a) $W = \{(a, b, c) : a \geq 0\}$

(b) $W = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

Ejercicio 7: En el espacio de las matrices reales de orden 3, $M_3(\mathbb{R})$. diga cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $M_3(\mathbb{R})$:

(a) El de las matrices simétricas

(b) El de las matrices antisimétricas

(c) El de las matrices que tienen diagonal principal nula

(d) El de las matrices con determinante nulo

Ejercicio 8: Verifique si es verdadera o falsa la siguiente proposición:

"La intersección de una cantidad finita de subespacios, es un subespacio".