Álgebra II Computación Extraordinario 2013 – 2014

Nombre:____ **Grupo:**____________

1. Sea $f: M_2(R) \to C^2$ tal que:

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,i)$ $\quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (i,1)$ $\quad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$ $\quad f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,1+i)$

a. Encuentre un valor de a tal que la aplicación lineal exista pero no sea única. Justifique.

b. Para $a = 0$

   i. Halle la expresión analítica de f

   ii. Halle el núcleo de f

   iii. Determine si f es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifique.

2. Sea $g: MS_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a+c)x^2 + (a+b)x + b - c$$

a. Halle la imagen de g.

b. Encuentre, si es posible, un suplementario de $V = L[x^2+2x+1]$ en la imagen de g.

c. Halle la matriz asociada a g en las bases $(a_i) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ y $(b_j) = [1, x, x^2]$

3. Para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & a-4 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & -b+2 & 4 \end{pmatrix}$ representa una forma cuadrática q definida en $\mathbb{R}^3$.

b. Escriba la expresión de q para los valores de a y b hallados en el inciso anterior.

c. Reduzca q a una forma canónica mediante transformaciones ortogonales.

4. Demuestre o refute en cada caso.

a. Sea $q: R^2 \to R$ una forma cuadrática dada por la expresión $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Entonces q es definida positiva si $a > 0$ y $b^2 - ac < 0$.

b. Sea $H = \left\{Z \in \mathbb{C} : Z^{p^n} = 1,\ para\ algún\ n\right\},\ p \in \mathbb{N}$. H es un subgrupo del grupo $(\mathbb{C}, *)$, siendo $*$ el producto usual.

c. Sean E un espacio con producto escalar sobre K, f, g endomorfismos de E que poseen adjunto, entonces $(f \circ g)$ tienen adjunto y $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

d. Def: Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión finita y sea V un subespacio vectorial de E, llamaremos ortogonal de V, al conjunto de los elementos de W de E tal que $w \in E :< v, w >= 0\ \forall v \in V$. Al ortogonal de V se le denota $V^{\perp}$. Es decir: $V^{\perp} = \{w \in E :< v, w >= 0\ \forall v \in V\}$ $V^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E.

Sea E un espacio vectorial con producto escalar de dimensión finita y V y W subespacios de E entonces $(V+W)^{\perp} \subset V^{\perp} \cap W^{\perp}$