Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Conferencia 2

Polinomios de interpolación

"La lección más difícil de aprender es que aprender es un proceso continuo."

David Gerrold

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

1. Introducción

En la conferencia anterior se estudió la Fórmula del Binomio, esto es, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n \quad (1.1)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k. \end{aligned}$$

Los coeficientes binomiales, como ya vimos, siguen el esquema conocido como el Triángulo de Pascal, en el que cada término de una fila se obtiene sumando los dos términos de la fila anterior colindantes con él.

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0}1 & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0}1 & & \binom{1}{1}1 & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0}1 & & \binom{2}{1}2 & & \binom{2}{2}1 & & \\
 & & \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots & \\
n=k & \binom{k}{0}1 & & \binom{k}{1}k & & \cdots & & \binom{k}{k-1}k & & \binom{k}{k}1
\end{array}$$

De aquí se desprenden las dos propiedades fundamentales de los coeficientes binomiales:

(P1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

(P2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ para $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$.

Otras propiedades de los coeficientes binomiales fueron dejadas como ejercicios propuestos al lector:

(P3) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ para $n, k, m \in \mathbb{N}$, $m \leq k \leq n$.

(P4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ para $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

(P5) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ para $n, k \in \mathbb{N}$.

El siglo XVII con sus cálculos de astronomía y navegación dio a Newton la idea de utlizar este tipo de esquema, ya visto en el Triángulo de Pascal, para un problema totalmente diferente.
En esta conferencia estudiaremos un problema de naturaleza distinta al abordado en la conferencia anterior. Sin embargo, los coeficientes binomiales volverán a ser de interés.

2. Polinomio de interpolación

Definición 2.1. Se llama polinomio o función polinomial de grado $n \in \mathbb{N}$, a una función de la forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

La simplicidad de los polinomios motiva a que en distintos contextos de la matemática y sus aplicaciones se acuda a ellos como un instrumento en la resolución de diversos tipos de problemas. Uno de ellos es la búsqueda de un polinomio cuyo gráfico contenga una cierta cantidad de puntos del plano dados previamente, es decir, un polinomio que *pase* por esos puntos.

> **Problema de la interpolación polinomial.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $n+1$ puntos distintos del plano (x_i, y_i) $i = 0, 1, \ldots, n$, tal que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, hallar un polinomio de grado menor o igual a n cuyo gráfico contenga dichos puntos.*

Notemos que la condición $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, exigida para los puntos predeterminados, no puede descartarse. En efecto, si $x_i = x_j = t$ para ciertos $i \neq j$, tendremos que $y_i \neq y_j$ porque los puntos son distintos dos a dos, pero en ese caso el polinomio buscado le asignaría a un mismo valor t dos valores distintos, lo cual es imposible. Luego dicho polinomio no existiría.
Exploremos ahora el problema estudiando primeramente los casos más simples.

Ejemplo 2.2. n=0 y un único punto (x_0, y_0).

Solución. En este caso nuestro polinomio será de la forma $y = c$ para cierto $c \in \mathbb{R}$, es decir, será una función constante. Luego el polinomio pasará por el punto (x_0, y_0) si y solo si $c = y_0$. □

Ejemplo 2.3. n=1 y puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

Solución. Al ser de grado 1 ó 0 nuestro polinomio estará representado por una recta, es decir, será una función de la forma $y = mx + n$ para ciertos $m, n \in \mathbb{R}$. Luego los puntos dados pertenecerán a la recta si y solo si m y n satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0 = mx_0 + n \\ y_1 = mx_1 + n \end{cases}.$$

Restando ambas ecuaciones y despejando, obtenemos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \tag{2.1}$$

y de ahí que, sustituyendo en la primera ecuación,

$$n = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0.$$

Obtenemos así el polinomio $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$, que, somo es fácil de comprobar, pasa por los puntos dados. $\square$

Notemos que, al despejar para obtener la expresión 2.1, hemos necesitado asumir que $x_0 \neq x_1$ para establecer el cociente. No obstante, podría suceder que y_0 y y_1 coincidieran y en ese caso sucedería que $m = 0$ y nuestro polinomio sería de grado 0.

Ejemplo 2.4. n=2 y puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Solución. Al ser de grado 2 o menor, el polinomio buscado será de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y estará representado por una parábola (si $a \neq 0$) o una recta (en caso contrario). De forma similar al caso anterior, tendremos que a, b, c deberán satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx^0 + c \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}.$$

Esta vez obtendremos soluciones mucho más complejas. En el curso de *Introducción al Álgebra* se aprenderán métodos para facilitar la resolución del sistema, adelantamos que este sistema es soluble siempre que x_0, x_1, x_2 sean distintos dos a dos y, por tanto, siempre podremos encontrar el polinomio que buscamos. $\square$

Es posible apreciar que el problema se va complejizando considerablemente según crece el valor de n. El caso $n = 3$ dará lugar a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro variables, y así sucesivamente. Por tanto, para enfocar el problema cuando $n = 3$ veamos solo un caso particular y más sencillo (¡pero no por ello menos importante!).

Problema de la interpolación polinomial (para abscisas equidistantes)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $n+1$ puntos distintos del plano, de abscisas equidistantes y distintas, hallar un polinomio de grado menor o igual a n que pase por todos ellos.*

Ejemplo 2.5. $n = 3$ y los puntos $(0, y_0), (1, y_1), (2, y_2), (3, y_3)$.

Solución. Llamemos p al polinomio buscado. Esta vez, tendrá la forma

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Evaluando en los puntos dados deberemos resolver, como antes, un sitema de ecuaciones.

$$\begin{cases} y_0 &=& d & (1) \\ y_1 &=& a+b+c+d & (2) \\ y_2 &=& 8a+4b+2c+d & (3) \\ y_3 &=& 27a+9b+3c+d & (4) \end{cases} \tag{2.2}$$

Restando (1) a (2), (2) a (3) y (3) a (4) en 2.2, obtenemos un nuevo sistema, esta vez de tres ecuaciones y tres variables.

$$\begin{cases} \Delta y_0 &=& y_1 - y_0 &=& a+b+c & (1) \\ \Delta y_1 &=& y_2 - y_1 &=& 7a+3b+c & (2) \\ \Delta y_2 &=& y_3 - y_2 &=& 19a+5b+c & (3) \end{cases} \tag{2.3}$$

Hemos definido $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ para cada $i \in \{0,1,2\}$. A estas diferencias las llamaremos *diferencias de primer orden*. Ahora, notemos que con el nuevo sistema podemos realizar el mismo procedimientopara obtener un sistema de dos ecuaciones y dos variables. Restemos entonces (1) a (2) y (2) a (3) en 2.3.

$$\begin{cases} \Delta^2 y_0 &=& \Delta y_1 - \Delta y_0 &=& 6a+2b & (1) \\ \Delta^2 y_1 &=& \Delta y_2 - \Delta y_1 &=& 12a+2b & (2) \end{cases} \tag{2.4}$$

En este caso, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ para cada $i \in \{0,1\}$, y estas diferencias se llamarán *diferencias de segundo orden*. Finalmente, sustrayendo (1) a (2) en 2.4,

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 6a, \tag{2.5}$$

donde $\Delta^3 y_0$ es la única *diferencia de tercer orden* que posee el sistema. Depejando en 2.5 obtenemos

$$a = \frac{\Delta^3 y_0}{6}.$$

Luego, despejando b en 2.4 (1) se tendrá

$$b = \frac{\Delta^2 y_0 - 6a}{2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}.$$

Por último, sustituyendo estas dos últimas expresiones en 2.3 (1) concluimos que

$$c = \Delta y_0 - a - b = \Delta y_0 - \frac{\Delta^3 y_0}{6} - \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right) = \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \Delta y_0.$$

Como ya sabemos que $d = y_0$, estamos listos para calcular nuestro polinomio:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= \frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3 + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \Delta y_0\right)x + y_0 \qquad (2.6) \\ &= y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x^2 - x}{2}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)\Delta^3 y_0 \\ &= y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x^2 - x}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}\Delta^3 y_0 \qquad (2.7) \end{aligned}$$

con lo que concluimos. $\square$

Obsérvese que la expresión 2.6 nos muestra un agrupamiento respecto a las distintas potencias de la variable x. Al hacer modificaciones agrupando según el orden de las diferencias, obtenemos la expresión 2.7, que resulta muy sugerente. Desarrollémosla un poco más y veamos por qué.

$$p(x) = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\downarrow} y_0 + \underbrace{\frac{x}{1}}_{\downarrow} \Delta y_0 + \underbrace{\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}}_{\downarrow} \Delta^2 y_0 + \underbrace{\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{\downarrow} \Delta^3 y_0$$

Coeficientes binomiales del polinomio de interpolación

En efecto, la estructura de los coeficientes binomiales del polinomio de interpolación es muy parecida a la de los coeficientes binomiales que ya conocemos (ver la expresión 1.1) y que encontramos en el Triángulo de Pascal. Entonces, es de esperar que estos nuevos coeficientes binomiales satisfagan un esquema que posea propiedades análogas a las del Triángulo de Pascal.
Veamos que la aparición de los coeficientes binomiales **NO** resulta casual. Haciendo uso de la notación de las diferencias de primer, segundo y en general $n-$ésimo orden,

$$\begin{array}{rcl}
\Delta y_i & = & y_{i+1} - y_i \\
\Delta^2 y_i & = & \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\
\Delta^3 y_i & = & \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \\
& \vdots & \\
\Delta^n y_i & = & \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i,
\end{array}$$

Newton introdujo un modo de ordenar las diferencias que aún hoy perdura. Descubrimos entonces una interesante estructura triangular.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{y_0} & & & & & & \\
& - & \boxed{\Delta y_0 = y_1 - y_0} & & & & \\
y_1 & & & - & \boxed{\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0} & & \\
& - & \Delta y_1 = y_2 - y_1 & & & - & \boxed{\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0} \\
y_2 & & & - & \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 & & \\
& - & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & & & & \\
y_3 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

En este esquema, cada término es la diferencia de los dos términos colindantes a la izquierda. La similitud de la formación de este triángulo con la del triángulo de Pascal nos permite explicar la aparición de los coeficientes binomiales. Enunciemos formalmente el resultado obtenido.

Teorema 2.6. *Dados $n+1$ puntos del plano $(0, y_0), (1, y_1), \ldots, (n, y_n)$, existe un único polinomio p de grado menor o igual que n que interpola estos puntos y, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\Delta^2 y_0 + \\ & \quad \ldots + \frac{x(x-1)\ldots[x-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned}$$

Veamos entonces algunos ejemplos del uso de este resultado.

3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1. Hallar el polinomio de interpolación que pasa por los puntos

$$(0, 3), (1, 10), (2, 21), (3, 36), (4, 55).$$

Solución. Construyamos el esquema para hallar las diferencias de orden 1,2,3 y 4.

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \Delta^3 y_0 & \Delta^4 y_0 \\ \boxed{3} & & & & \\ 10 & \boxed{7} & & & \\ 21 & 11 & \boxed{4} & & \\ 36 & 15 & 4 & \boxed{0} & \\ 55 & 19 & 4 & 0 & \boxed{0} \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

Columna en que aparecen diferencias constantes de orden 2

Podemos concluir que el polinomio buscado tendrá grado 2, pues las diferencias de orden 3 y 4 se anulan. El polinomio buscado será

$$y = 3 + 7x + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{2},$$

es decir, $y = 2x^2 + 5x + 3$. □

Ejercicio 3.2. Hallar el polinomio que pasa por los puntos de la forma

$$(n, 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + (4n-1))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Notemos primeramente que el polinomio buscado esta vez pasa por **infinitos** puntos del plano. Por tanto, el teorema 2.6 no asegura la existencia de dicho polinomio, sin embargo este puede existir y en ese caso puede ser calculado utilizando un procedimiento similar.
Ahora, si analizamos los cinco primeros puntos dados, es posible apreciar que estos poseen las mismas ordenadas que los puntos del ejercicio 3.1, aunque las abscisas aparecen *corridas*.

n	1	2	3	4	5
y_n	3	10	21	36	55

Luego, si el polinomio $y = 2x^2+5x+3$ pasaba por los puntos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$, $(3, y_4)$ y $(4, y_5)$, entonces el polinomio

$$y = 2(x-1)^2 + 5(x-1) + 3 = 2x^2 + x \tag{3.1}$$

pasará por los puntos $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(3, y_3)$, $(4, y_4)$ y $(5, y_5)$. De hecho, este resultado también podía deducirse de la siguiente forma.

$$\begin{array}{ccccccc}
n & y_n & & & & & \\
1 & 3 & = & 1\cdot 3 & = & 1(2\cdot 1+1) \\
2 & 10 & = & 2\cdot 5 & = & 2(2\cdot 2+1) \\
3 & 21 & = & 3\cdot 7 & = & 3(2\cdot 3+1) \\
4 & 36 & = & 4\cdot 9 & = & 4(2\cdot 4+1) \\
5 & 55 & = & 5\cdot 11 & = & 5(2\cdot 5+1)
\end{array}$$

Con lo que también podemos concluir que el polinomio que interpola estos cinco puntos es $y = x(2x+1) = 2x^2+x$. Pero queremos interpolar **todos** los puntos de la forma dada y no solo estos cinco. No obstante, la consideraciones anteriores nos ofrecen una sospecha de cuál puede ser la solución, luego podemos intentar probar que $y = 2x^2+x$ es el polinomio buscado, lo cual ocurre si y solo si

$$y_n = 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + (4n-1) = 2n^2 + n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es muy fácil de probar a través inducción completa, y también haciendo uso del siguiente análisis:

$$y_n = 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + (4n-1) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 4\frac{n(n+1)}{2} - n,$$

y esto último es igual a $2n^2 + n$, con lo cual concluimos que el polinomio buscado es $y = 2x^2 + x$, es decir, el polinomio p definido como $p(x) = 2x^2 + x$ interpola todos los puntos de la forma dada. $\square$

Ahora, notemos que el resultado reflejado en la ecuación 3.1 nos sugiere una manera de emplear la interpolación de polinomios en un contexto un poco más amplio: cuando las abscisas de los puntos están espaciadas por una unidad, pero la menor de ellas no es 0. Formularemos un resultado incluso más amplio que este, que sirve de pequeña generalización del teorema 2.6.

Teorema 3.3. *Sean $n+1$ puntos del plano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, tal que existe $h \in \mathbb{R}^*$ de modo que se cumple que*

$$x_i = x_0 + ih$$

para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Luego, existe un único polinomio p de grado menor o igual que n que interpola estos puntos y, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(x) \quad = \quad & y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x-1)}{2h^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x - x_0)(x-1)(x-2)}{6h^3}\Delta^2 y_0 + \\ & \dots + \frac{(x - x_0)(x-1)\dots[x-(n-1)]}{n!h^n}\Delta^n y_0. \end{aligned}$$

Este resultado nos permite calcular directamente el polinomio de interpolación de los puntos $(1, 3)$, $(2, 10)$, $(3, 21)$, $(4, 36)$ y $(5, 55)$, así como resolver otros problemas más amplios. En la Clase Práctica 1.2 se demostrará este teorema de forma rigurosa.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.