Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Ejercicios Resueltos 3

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Halle el punto c de las fórmulas del valor medio para $f(x) = 3x^2 - 5$, siendo $a = -2, b = 0$.

Respuesta

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$6c = \frac{3(0)^2+5-(3(-2)^2+5)}{2} = -6 \Longrightarrow c = -1$

Ejercicio 2

Analiza el crecimiento y los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

b) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

Respuesta

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$
Haciendo el análisis de signos se concluye que la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$.
Sus mínimos son $x_0 = -1,\ x_1 = 2$ y máximo es $x_2 = 0$.

b) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$
$y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)}}$
Se tiene que la función es creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, siendo mínimos $x_0 = -1,\ x_1 = 1$ y máximo $x_2 = 0$.

Ejercicio 3

Pruebe que

$$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}.$$

Respuesta

$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$
Sea $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\arctan\sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{2}{(1+x)2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{x+1})^2}}\frac{2}{(x+1)^2} = 0$
Analizando el dominio de $f(x)$ se tiene que es aquel conjunto donde

$$-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$$

Quedando que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}_+\}$. Evaluando
$f(1) = -\arcsin(0) + 2\arctan 1 = 0 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ por lo que $f(x) = \frac{\pi}{2},\ \forall x \geq 0.$

Ejercicio 4

Pruebe que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ para $a, b > 0$.

Respuesta

Sea $f(x) = \sqrt{ax},\ a > 0, \Longrightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} > 0,\ f''(x) = -\frac{\sqrt{a}}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$
Por tanto f es creciente y convexa en $(0, +\infty)$, por lo que el gráfico queda por debajo de sus tangentes. En $x = a,\ f'(a) = \frac{1}{2}$ y $f(a) = a$ por lo que la ecuación de la recta tangente a f en a es $y = \frac{a+x}{2}$. Por lo planteado se tiene que $f(x) \leq \frac{a+x}{2}, \forall x \geq 0$, en particular $f(b) = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Ejercicio 5

Analiza la convexidad de los gráficos de las siguientes funciones

a) $y = x^a,\ x > 0,\ a \in \mathbb{R}$

b) $y = x^2 \ln x$

Respuesta

a) $y' = ax^{a-1},\ y'' = a(a-1)x^{a-2}$
Cóncava si $a(a-1) < 0$
Convexa si $a(a-1) > 0$

b) $y' = 2x\ln x + x,\ y'' = 2\ln x + 3$
Cóncava $(0, e^{-3/2})$
Convexa $(e^{-3/2}, +\infty)$

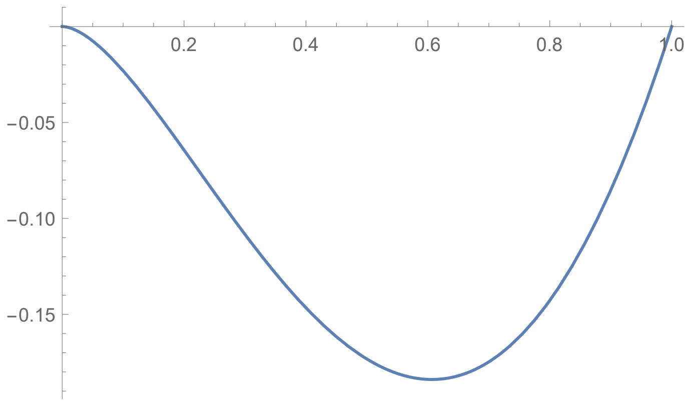

Figura 1: Inciso (b) $f(x)$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.