# Álgebra II

## CP7: Suma directa. Subespacios suplementarios

Lic. David Balbuena Cruz

## Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos principales:

- Determinar si la suma de dos subespacios vectoriales se considera directa
- Analizar si dos subespacios son suplementarios respecto a un espacio vectorial.
- Construir una base del espacio suma a partir de las bases de los subespacios sumandos.

Le recomendamos consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Sección 1.9 y 1.13.

## Ejercicios

1. Dado el subespacio $V$ de $K^4$ constituido por las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 8x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Encuentre, si es posible, los subespacios que se describen a continuación. Analice en todos los casos la unicidad de su respuesta.

(a) Un subespacio de $K^4$ cuya suma con $V$ sea directa pero que no sea suplementario de $V$ en $K^4$

(b) Un suplementario de $V$ en $K^4$.

(c) Un suplementario de $V$ en $K^4$ que contenga a todos los múltiplos del vector $(-2, 0, 4, -3)$.

(d) Un subespacio de $K^4$ cuya suma con $V$ sea el subespacio constituido por los vectores $(x, y, z, t)$ tales que $2x - 3y + z = 0$, pero que no sea suplementario de $V$ en dicho subespacio vectorial.

(e) Un subespacio de $K^4$ en el cual $V$ y el subespacio generado por el vector $(1, 2, 3, 4)$ sean suplementarios.

(f) Un suplementario del subespacio $L[(1,2,2,1)]$ en $V$.

2. Sea $E$ un $K$-espacio de dimensión 5 y supongamos que el sistema $\{u_i\}_{1\leq i\leq 5}$ es una base de $E$. Sea $V$ el subespacio de $E$ generado por los vectores:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 2u_2 + u_4 - 2u_5 \\ v_2 &= 2u_1 + 3u_2 - u_3 - u_4 - u_5 \\ v_3 &= 2u_1 + u_2 - 3u_3 - 7u_4 + 5u_5 \end{aligned}$$

y $W$ el subespacio generado por $u_2$ y $u_1 + k \cdot u_4$, $(k \in K)$.

Determine cómo debe ser tomado el escalar $k$ para que la suma de $W$ con $V$ sea directa sin que $W$ sea suplementario con $V$ en $E$. Seleccione un valor concreto de $k$ de modo que esto ocurra y encuentre un suplementario de $V + W$ en $E$.

3. En $K[x]$ sea $p(x)$ un polinomio fijo de grado $n$. Se define:

$$P = \{p(x) \cdot q(x) \;\;/\;\; q(x) \in K[x]\}$$

Demuestre que $P$ es un subespacio de $K[x]$ y $K[x] = P \oplus K_n[x]$.