EXAMEN EXTRAORDINARIO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

MATEMÁTICA, CURSO 2012 – 2013

Nombre y apellidos: ____

Grupo: ____

I- Calcule la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ desde el punto $(0; 0)$ hasta el punto $(a; b)$ siendo $a > 0$ y tal que la recta tangente a la curva en $(a; b)$ sea paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x + 5$.

II- Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso su respuesta:

a) _____ $y = 2arctanx + arcsen\frac{2x}{1+x^2} = \pi$ para todo $x \geq 1$.

b) _____ Si $f\,(a) = g(a)$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para todo $k = 1, .. n-1$ y $f^{(n)}(a) > g^{(n)}(a)$ para todo $x > a$, entonces $f\,(x) > g\,(x)$ para todo $x > a$.

II.I- ¿ Qué puede afirmarse sobre el inciso a) si $x \leq -1$?

III- Siendo $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ definida para $0 < x < \infty$, demuestre que f es estrictamente creciente en tal intervalo.

RESPUESTAS:

I- a) Para calcular la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ desde el punto $(0;0)$ hasta el punto $(a;b)$ siendo $a > 0$ y tal que la recta tangente a la curva en $(a;b)$ sea paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x + 5$ debe tenerse en cuenta que:

- la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2 = x$, o lo que es lo mismo, $y = \mp\sqrt{x}$, en el punto $(a;b)$ siendo $a > 0$, debe satisfacer la condición $y'(a) = \frac{1}{2}$ para garantizar que sea paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x + 5$. Ahora bien, como $y'(x) = \mp\frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $y = \mp\sqrt{x}$ y $y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ resulta imposible para todo $x > 0$, el punto buscado se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y sería aquel cuya abscisa satisface $y'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$, lo que conlleva a que $a = 1$, con lo que el punto buscado sería $(1;1)$. Se debe buscar entonces la longitud del arco de parábola sobre la curva $y^2 = x$ desde el punto $(0;0)$ hasta el punto $(1;1)$.

- $y^2 = x \to 2ydy = dx \to \frac{dx}{dy} = 2y \to \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 4y^2$ con lo cual la longitud del arco de parábola que se desea hallar vendrá dada por la expresión

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Hagamos entonces uno de los cambios de variable siguientes:

$$y = \frac{tan\theta}{2},\ \ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\quad dy = \frac{sec^2\theta}{2}d\theta$$

donde $y = 0 \to \theta = 0$, $y = \frac{tan\theta}{2} = 1 \to tan\theta = 2 \to \theta = arctan2$

con lo cual, teniendo en cuenta que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} \sqrt{1 + tan^2\theta}\, sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} |sec\theta|\, sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta$$

Basta ahora escribir la integral anterior en la forma

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec\theta\, sec^2\theta d\theta$$

y aplicar el método de integración por partes, haciendo en este caso particular

$$u = sec\theta, \qquad dv = sec^2\theta d\theta$$

$$du = sec\theta tan\theta d\theta, \qquad v = tan\theta d\theta$$

con lo que se obtiene

$$L = \frac{1}{2}\left[sec\theta tan\theta \Big|_{0}^{arctan2} - \int_0^{arctan2} sec\theta tan^2\theta d\theta\right]$$

Téngase en cuenta ahora que si $\theta = arctan2$ entonces $tan\theta = 2$ con lo cual $sec\theta = \sqrt{5}$. Se tiene así que

$$L = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5} - \int_0^{arctan2} sec\theta(sec^2\theta - 1)d\theta\right] = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta$$

De lo anterior resulta entonces que

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta$$

lo que conduce a que

$$2\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\int_0^{arctan2} sec\theta d\theta$$

con lo cual

$$\int_0^{arctan2} sec^3\theta d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{arctan2} sec\theta d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{arctan2} \frac{(sec^2\theta + sec\theta tan\theta)}{(sec\theta + tan\theta)} d\theta$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} ln|sec\theta + tan\theta| \Big|_{0}^{arctan2}$$

de lo que resulta finalmente que el valor de la longitud de arco buscada es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5} + 2\right) \quad u$$

II- a) _V_ $y = 2arctanx + arcsen\frac{2x}{1+x^2} = \pi$ para todo $x \geq 1$.

Probar la igualdad anterior significa, en primer lugar, probar que la función es constante para $x \geq 1$ y, en segundo lugar, hallar el valor de tal constante evaluando la función en un punto conveniente del intervalo dado.

Para probar que la función es constante basta usar el corolario del Teorema de Lagrange que asegura que si la derivada de la función es nula sobre un conjunto, la función es constante sobre tal conjunto.
Calculando entonces la derivada de la función se tiene que

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{(1+x^2)}{|x^2-1|}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|x^2-1|}$$

De modo que $y' = 0$ solo si $|x^2-1| = x^2-1$ lo que se tiene cuando $x \geq 1$ ó $x \leq -1$.
La función es constante entonces cuando $x \geq 1$ ó $x \leq -1$.
El valor de la constante si $x \geq 1$ puede hallarse calculando

$$y(1) = 2arctan1 + 2arcsen\frac{2}{1+1} = 2\frac{\pi}{4} + arcsen1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

II.I- Para $x \leq -1$ la función, como ya se vio, también es constante. En cuanto al valor de la constante si $x \leq -1$, éste puede ser hallado calculando

$$y(-1) = 2arctan(-1) + 2arcsen\frac{-2}{1+1} = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

y, dado el resultado obtenido, se tiene que para $x \leq -1$, el inciso a) es falso.

b) _V_ Si $f(a) = g(a)$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para todo $k = 1, .. n-1$ y $f^{(n)}(a) > g^{(n)}(a)$ para todo $x > a$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$.

Para probar la veracidad de lo enunciado en este inciso se debe desarrollar cada una de las funciones usando la fórmula de Taylor con resto integral en una vecindad de $x = a$.
Se tiene así que

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$
$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + g^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^x g^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$
lo que conduce, dado que $f(a) = g(a)$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para todo $k = 1, .. n-1$ y $f^{(n)}(a) > g^{(n)}(a)$ para todo $x > a$, a

$$(f-g)(x) = \int_a^x (f-g)^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \; > 0 \text{ para todo } x > a$$

que lo cual se deduce que, en efecto, bajo las hipótesis supuestas, $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$.

III- Para demostrar la monotonía estrictamente creciente de la función en $0 < x < \infty$, debe probarse que su derivada

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

es estrictamente positiva en $(0;+\infty)$, de modo que debe probarse que, para todo valor de x en $(0;+\infty)$ se cumple

$$ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

Para probar lo anterior resulta conveniente transformar algebraicamente la desigualdad que se desea demostrar en la forma

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$

que sugiere más claramente el uso del Teorema de Lagrange en tal prueba.

Sea entonces la función auxiliar $g(x) = lnx$, diferenciable en $(0,+\infty)$, por lo que lo es en todo intervalo de la forma $[x, x+1]$ con $x > 0$.

Aplicando a continuación el Teorema de Lagrange se puede asegurar la existencia de $c_x \in (x, x+1)$ tal que

$$g'(c_x) = \frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x} = \ln(x+1) - \ln(x).$$

Como $g'(x) = \frac{1}{x}$ se obtiene que

$$\frac{1}{c_x} = \ln(x+1) - \ln(x) \quad \text{siendo} \quad c_x \in (x, x+1)$$

con lo que

$$\frac{1}{x+1} < c_x < \frac{1}{x}$$

,

o lo que es lo mismo, que

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - lnx < \frac{1}{x}$$

para todo valor de $x > 0$.

Lo anterior implica que

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 \text{ para todo valor de } x > 0,$$

de donde se deduce que f es estrictamente monótona creciente.

Observación final: En este ejercicio el estudiante puede abordar igualmente la solución mediante el estudio de la función $h(x) = ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, diferenciable en $(0,+\infty)$, a través del comportamiento de sus derivadas $h'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} < 0$ y $h''(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} > 0$, que permiten afirmar el decrecimiento y la convexidad de h hacia abajo de la función en $(0,+\infty)$,