ÁLGEBRA I Ciencia de la Computación Examen de final 2022

Nombres y Apellidos:____ Grupo:_________

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

1.1) Pruebe que $z=1,\ z=\xi,\ z=\xi^2,\ z=\xi^3, \ldots z=\xi^{n-1}$ son todas las soluciones distintas de la ecuación $z^n = 1$.

1.2) Prueba que si $z=\mu$ es una solución de $z^n = w$, entonces todas las otras soluciones son de la forma $\mu \cdot \xi^j$, donde $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

1.3) Pruebe que para $k \in \mathbb{N}$,

$1+\xi^k+\xi^{2k}+\ldots+\xi^{(n-1)k} = 0,$ si n no divide a k, y

$1+\xi^k+\xi^{2k}+\ldots+\xi^{(n-1)k} = n,$ si n divide a k.

2. Sea:

$$\begin{cases} \quad\ \ - cy + bz = k \\ cx \qquad\ \ - az = m \\ -bx + ay \qquad\ \ = n \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones lineales, donde los parámetros $a, b, c, k, m, n \in \mathbb{R}$

2.1) Utilizando el Teorema de Kronecker- Capelli, clasifique el sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros.

2.2) Si (x_0, y_0, z_0) es una solución del sistema de ecuaciones lineales, demuestre que toda solución de dicho sistema se puede escribir $(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct),$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}.$

2.3) Halle la solución del sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros para $c \neq 0.$

3. Sean F subespacio vectorial de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que $F = L[\lambda x^2 + x + 1, -x^3 + 1]$ y $G = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) = 0 = p''(1)\}$.

3.1) Demuestre que G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_4[x]$.

3.2) Para qué valores de λ la $\dim(F \cap G) = 1$.

3.3) Para el λ hallado en el inciso anterior, halle $F+G$.

3.4) Halle un subespacio suplementario de $F+G$ en $\mathbb{R}_4[x]$.

4. Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que $f^2 - 2f + 3Id = 0$. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ vectores tales que $v_3 = f(v_2)$ y $v_4 = f(v_1)$ entonces $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$.

4.1) Calcula la matriz del endomorfismo f en la base B.

4.2) Halle el núcleo de f, la imagen de f, la nulidad de f y el rango de f.

4.3) Diga si f es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

4.4) Sea $B' = \{v_1+v_2, v_1-v_2, v_1+v_2+v_3, v_2-v_4\}$. ¿Es B' base de $\mathbb{R}^4$? Si la respuesta es positiva, halle la matriz del endomorfismo f en la base B' utilizando la relación de semejanza.

5. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. $B = \{u_1, u_2 \ldots, u_n\}$ base de V y f un endomorfismo de V definido por $f(u_1) = u_n;\quad f(u_n) = u_1;\quad f(u_i) = u_i$ si $1 < i < n$.

5.1) Demuestre que los valores propios de f son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

5.2) Pruebe que f es diagonalizable y calcule su forma diagonal, así como una base que diagonalice a f.

Éxitos.

Justifique todas sus respuestas.