Álgebra II Examen Final Ciencia de la Computación Curso 2013 – 2014

Nombre:____ Grupo:___________

1. Sea $T:\mathbb{R}_3[x]\to MS_2(\mathbb{R})$ dada por la expresión:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix} a+c & a+b \\ a+b & b-c \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que T es una aplicación lineal.
b. Halle el núcleo de T.
c. Halle un suplementario del núcleo de T en V, $V=\left\{ax^2+bx+a: a,b\in\mathbb{R}\right\}$.
d. Determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifique.

2. Sea $f\in end\left(MS_2(\mathbb{R})\right)$, $A=M\left(f,(e_i)\right)$, (e_i) base canónica.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Halle $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b. Encuentre la expresión analítica de f.
c. Halle el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios.
d. Encuentre, si es posible, una matriz diagonal D semejante con A y una matriz inversible P tal que sea posible la relación de semejanza.

3. Sea $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $q(x,y,z)=x^2+4\mathrm{xy}+4\mathrm{y}^2+2\mathrm{xz}+z^2+4\mathrm{yz}$

a. Halle la matriz asociada a q en la base canónica.
b. Reduzca q a una forma canónica mediante transformaciones ortogonales.
c. Argumente si la matriz del *inciso a* puede ser considerada como la matriz asociada a un producto escalar real.

4. Demuestre o refute según corresponda en cada caso.

a. Sean f, g endomorfismos de un espacio vectorial E, v un vector propio de f y g. Entonces $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, v es vector propio de $\alpha f+\beta g$.
b. Si A es una matriz ortogonal entonces el determinante de A es 1 o -1.
c. Sea E un espacio vectorial euclideano, entonces $\forall x,y\in E$ se cumple que: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$
d. Sea G es un grupo abeliano y H un subgrupo de G entonces $\mathrm{S}(\mathrm{H})=\left\{\mathrm{x}\in\mathrm{G}/\mathrm{x}^2\in\mathrm{H}\right\}$ es un subgrupo de G