Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Ejercicios Resueltos 1

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Considere la expansión binomial de $\left(2x + \frac{k}{x}\right)^9$ donde $k > 0$. Se conoce que el coeficiente en el término x^3 es igual al coeficiente en el término x^5. Halle k.

Respuesta

Note que a partir de la *fórmula del binomio de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{0.1}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \left(2x + \frac{k}{x}\right)^9 &= \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} (2x)^{9-i} \left(\frac{k}{x}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} 2^{9-i} \cdot \frac{x^{9-i}}{x^i} \cdot k^i \\ &= \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} 2^{9-i} \cdot k^i \cdot x^{9-2i} \end{aligned}$$

En los pasos anteriores se utilizaron las propiedades de las potencias.

Se conoce que los coeficientes de x^3 (c_3) y de x^5 (c_5) son iguales. Se tiene por una parte que

$$9 - 2i = 3 \Rightarrow i = 3$$

por lo que

$$c_3 = \binom{9}{3} 2^{9-3} \cdot k^3 = \binom{9}{3} 2^6 \cdot k^3;$$

por la otra parte

$$9 - 2i = 5 \Rightarrow i = 2$$

por lo que

$$c_5 = \binom{9}{2} 2^{9-2} \cdot k^2 = \binom{9}{2} 2^7 \cdot k^2.$$

Por dato se conoce que $c_3 = c_5$, por lo que se llega a la ecuación

$$\binom{9}{3} 2^6 \cdot k^3 = \binom{9}{2} 2^7 \cdot k^2$$

cuya solución es

$$k = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{9}{3}} \cdot 2 = \frac{\frac{9!}{2!7!}}{\frac{9!}{3!6!}} \cdot 2 = \frac{3!6!}{2!7!} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Ejercicio 2

Halle la solución de la inecuación siguiente

$$\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} > 32n, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 3.$$

Respuesta

Debemos resolver la siguiente inecuación en los naturales

$$\begin{aligned}
\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} &> 32n \\
\frac{n!}{(n-3)!3!} - \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} &> 32n \\
\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(2n-1) &> 32n \\
n^3 - 15n^2 - 184n &> 0 \\
n(n^2 - 15n - 184) &> 0
\end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ entonces $n > 0$, por lo que se debe cumplir lo siguiente

$$\begin{aligned}
n^2 - 15n - 184 &> 0 \\
(n-23)(n+8) &> 0
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la inecuación, con $n \in \mathbb{N}$, es $n > 23$.

Ejercicio 3

Halla el coeficiente de x en la expansión binomial de $(2x^2 + x - 3)^8$.

Respuestas

Vía 1: Aplicando la descomposición en factores lineales de la expresión cuadrática se tiene

$$\begin{aligned}(2x^2+x-3)^8 &= [(2x+3)(x-1)]^8 = (2x+3)^8\cdot(x-1)^8 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(2x)^{8-k}3^k\right)\left(\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-1)^k x^{8-k}\right).\end{aligned}$$

Note ahora que el término lineal del desarrollo viene dado por la suma algebraica de los términos lineales que resultan de aplicar la propiedad distributiva a la expresión anterior. De ese modo, el coeficiente de x viene dado por

$$\binom{8}{7}\binom{8}{8}2\cdot 3^7-\binom{8}{8}\binom{8}{7}3^8=8\cdot 3^7(2-3)=-8\cdot 3^7=-17496.$$

Vía 2: Separando convenientemente los sumandos en la fórmula binomial se tiene

$$(2x^2+x-3)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(2x^2)^{8-k}(x-3)^k.$$

Para obtener el término en x es preciso eliminar primeramente las potencias de x^2, para lo cual se debe tomar $k=8$, con lo que se obtiene

$$\binom{8}{8}(x-3)^8=(x-3)^8=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}x^{8-i}(-3)^i.$$

Basta ahora considerar el término correspondiente al índice $i=7$ para obtener el coeficiente buscado de x

$$\binom{8}{7}(-3)^7x=8(-3)^7=-17496.$$

Ejercicio 4

Demuestre que para todo n natural y todo k natural con $k\le n$ el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es natural.

Respuestas

Demostrémoslo por inducción completa.

- **Inicio**
  Para $n = 1$ se tiene que $\binom{1}{1} = 1$, que es natural.

- **Hipótesis**
  Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que
  $$\binom{n}{k} \in \mathbb{Z},\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \ k \leq n$$

- **Tesis**
  Entonces se cumple que
  $$\binom{n+1}{k} \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ k \leq n+1$$

- **Demostración**
  Por la *Fórmula de Pascal* se tiene que
  $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},\ \forall n,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ k \leq n$$
  y, por hipótesis, se tiene que cada sumando es natural, por lo que la suma es un número natural.

  Para el caso $k = n+1$ se tiene que $\binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$, lo que concluye la demostración.

Ejercicio 5

Calcule:
$$2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + ... + (n+1)\binom{n}{n}.$$

Respuestas

La suma S_d se puede representar como sigue

$$\begin{aligned} S_d = &\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &+ \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] + \left[\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] + \left[\binom{n}{n}\right] \end{aligned}$$

Reorganizando la suma (porque es finita), sumando los sumandos entre corchetes el 2do con el último, el 3ro con el penúltimo, etcétera, quedan $\frac{n}{2}$ sumandos entre corchetes, cada uno vale 2^n por la propiedad siguiente de los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k \leq n. \tag{0.2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
S_d &= (2^n - 1) \\
&+ \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] + \cdots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] \\
&= (2^n - 1) \\
&+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] + \cdots + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] \\
&= (2^n - 1) + \frac{n}{2}2^n = 2^n\left(\frac{n}{2} + 1\right) - 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Halle el término de valor máximo en el desarrollo de $(1+\sqrt{2})^{30}$.

Respuestas

Por la fórmula del binomio sabemos que los términos del desarrollo de $(1+\sqrt{2})^{30}$ tienen la forma

$$c_i = \binom{30}{i} 2^{\frac{i}{2}} \text{ con } i \in \{0, 1, 2, ..., 30\},$$

entonces basta hallar i_0 para el cual c_{i_0} es el máximo del conjunto de valores de los términos. Notemos que estamos en presencia de un número combinatorio y se conoce que este crece hasta llegar a 15 y después decrece; por otra parte se encuentra la función exponencial que, como $\sqrt{2} > 1$, es creciente (conocido desde la enseñanza preuniversitaria). Para hacer un análisis más profundo del comportamiento de estos términos veamos cuándo ocurre que un elemento es mayor o igual que su antecesor y que su sucesor (lo que indica que es *máximo*); esto es:

- $$c_i \geq c_{i+1} \Longleftrightarrow \binom{30}{i} 2^{\frac{i}{2}} \geq \binom{30}{i+1} 2^{\frac{i+1}{2}} \Longleftrightarrow \frac{30!}{(30-i)!i!} 2^{\frac{i}{2}} \geq \frac{30!}{(30-(i+1))!(i+1)!} 2^{\frac{i+1}{2}}$$

y se llega a que $i \geq \frac{30 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 1}{2^{\frac{1}{2}} + 1} \approx 17{,}15$.

- $$c_i \geq c_{i-1} \Longleftrightarrow \binom{30}{i} 2^{\frac{i}{2}} \geq \binom{30}{i-1} 2^{\frac{i-1}{2}} \Longleftrightarrow \frac{30!}{(30-i)!i!} 2^{\frac{i}{2}} \geq \frac{30!}{(30-(i-1))!(i+1)!} 2^{\frac{i-1}{2}}$$

  y se llega a que $i \leq \frac{31}{2^{-\frac{1}{2}} + 1} \approx 18{,}15$.

Por lo que $17{,}15 \leq i_0 \leq 18{,}15$, entonces $i_0 = 18$ y el término es

$$c_{i_0} = \binom{30}{18} 2^9.$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.