Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Conferencia 6

Relación entre las funciones trigonométricas y la exponencial

" Si cierras la puerta a tus errores, dejarás afuera la verdad. "
Rabindranath Tagore

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

1. Introducción

En esta clase veremos la relación que existe entre las funciones trigonométricas y la exponencial, las cuales son funciones trascendentes.

Lo básico sobre las funciones trigonométricas(definición y propiedades fundamentales) se estudió profundamente en los cursos de la enseñanza preuniversitaria, así como en el curso propedéutico *TIMS* que se brindó en los meses de mayo a julio de 2021 (estos materiales los pueden encontrar acá https://evea.uh.cu/mod/folder/view.php?id=64232). También en [1] se estudian las funciones trigonométricas.

2. Aparición de las *cantidades imaginarias*

En el siglo XVI se comienzan a considerar cantidades imaginarias vinculadas al problema de la solución de ecuaciones algebraicas.

***Ejemplo* 2.1.** *El siguiente problema fue considerado por Gerolamo Cardano*[1]*: Dado un segmento de longitud* 20*, formar un rectángulo cuya área sea* 40*.*

Figura 1: Rectángulo del problema de Cardano

Este problema es equivalente a hallar $x, y \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{cases} 2(x+y) = 20 \\ \\ xy = 40 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

[1]Talentoso médico, mecánico y matemático italiano.

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ \\ x(10-x) = 40 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-x^2 + 10x - 40 = 0$$

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Nótese que un rectángulo con perímetro 20 *no puede tener área mayor que 25, debido a lo siguiente: consideremos la ecuación*

$$xy = A;$$

en este caso se tiene, por el dato del perímetro, la siguiente ecuación

$$x^2 - 10x + A = 0 \tag{2.1}$$

Para el caso general, se tiene que

$$P = 2(x+y), \quad A = xy \Rightarrow x^2 - \frac{P}{2}x + A = 0$$

donde x es el valor posible de uno de los lados.

La ecuación cuadrática (2.1) *tiene discriminante*

$$D = 100 - 4A$$

de modo que si

- *Si $A \leq 25$ entonces* (2.1) *tiene soluciones reales, es decir, es posible construir un rectángulo con dichas carácterísticas (notar que $A \geq 0$ por ser área, por lo que no tiene sentido analizar el caso $A < 0$ aunque la ecuación* (2.1) *tenga sentido y soluciones para estos valores).*
- *Si $A > 25$ entonces* (2.1) *no tiene soluciones reales.*

Sin embargo, aunque para $A = 40$ este problema no admite soluciones reales, el álgebra proporciona soluciones a esta ecuación

$$x^2 - 10x + A = 0$$

pues si notamos que

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 25 + 15 = 40$$

$$5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=10$$

tendría sentido entonces pensar que

$$5\pm\sqrt{-15}$$

podrían ser consideradas soluciones (no reales) de este problema.

Así aparecen las llamadas *cantidades imaginarias.* En este preciso momento no se les puede asignar un sentido concreto pero resultan ser de mucha utilidad en los cálculos, apareciendo con frecuencia, en particular en las soluciones de ecuaciones de tercer y cuarto grado (fórmulas en las que aparecen radicales de números menores que cero).

Realizando operaciones formales con ellos se obtenían soluciones reales que podía comprobarse directamente que eran "verdaderas" soluciones de la ecuación propuesta.

3. Sistematización del trabajo con cantidades imaginarias

Paulatinamente se regulariza el uso de estas cantidades imaginarias considerándose idóneas para el cálculo.

Euler (1707-1783) contribuye al perfeccionamiento y difusión de este instrumento, fundamentalmente en el estudio de las funciones elementales.

Bajo la influencia de **Gauss (1777-1855)** se consigue la aceptación de tales cantidades como números y la asignación de un sentido geométrico a las mismas.

Es Euler quien introdujo la notación actual de la letra i para asignar $\sqrt{-1}$

$$i=\sqrt{-1}\Longleftrightarrow i^2=-1$$

de modo que las soluciones encontradas por Cardano en su problema se representan como

$$5\pm\sqrt{15}\;i.$$

Surge así el conjunto de los *números complejos*, denotado por $\mathbb{C}$. En general

$$c\in\mathbb{C}\longrightarrow c=a+b\;i$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, a es la *parte real* de c y se denota como $a = Re(c)$ y b es la *parte imaginaria* de c y se denota como $b = Im(c)$. Además, se tiene que

$$\bar{c} = a - b\ i$$

es el *complejo conjugado* de c y

$$c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2 = |c|^2.$$

Respecto a la suma y el producto de este tipo de números se conoce que

$$z = a + bi,\ \ z' = a' + b'i$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + (b + b')i \\ z \cdot z' &= (a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (a'b + ba')i \end{aligned}$$

4. La fórmula de De Moivre

En lo que sigue trabajaremos como lo hizo Euler en general.

A partir de la identidad fundamental trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

se tiene, utilizando la representación trigonométrica de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$: $z = \cos x + i \operatorname{sen} x = cis(x)$ que

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos x - i \operatorname{sen} x) = \cos^2 x - i^2 \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (-1) \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$cis(x) \cdot cis(-x) = 1$$

Consideremos ahora el producto de $z = cis(x)$ con $z' = cis(y)$:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (\cos x \pm i \operatorname{sen} x)(\cos y \pm i \operatorname{sen} y) \\ &= \cos x \cos x \pm i \cos x \operatorname{sen} y \pm i \operatorname{sen} x \cos y + i^2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ &= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \pm i(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y) \\ &= \cos(x + y) \pm i \operatorname{sen}(x + y) \end{aligned}$$

Hemos obtenido que

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)(\cos y \pm i \operatorname{sen} y) = \cos(x+y) \pm i \operatorname{sen}(x+y) \tag{4.1}$$

Si aplicamos sucesivamente esta relación obtenemos que

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^2 = \cos(2x) \pm i \operatorname{sen}(2x)$$
$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^3 = \cos(3x) \pm i \operatorname{sen}(3x)$$
$$\dots$$

De modo que, generalizando, se obtiene la llamada *Fórmuala de De Moivre*

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) \pm i \operatorname{sen}(nx) \tag{4.2}$$

Nunca la formuló explícitamente pero sí escribió una igualdad vinculada a la solución del problema de la división de un ángulo en n partes iguales.[1]

La suma y diferencia de estas dos relaciones

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$$
$$(\cos x - i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)$$

proporcionan las expresiones que emplearemos para obtener el desarrollo en serie de las funciones seno y coseno. Nótese que

$$\cos(nx) = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n + (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2}$$
$$\operatorname{sen}(nx) = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n - (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2i}$$

Si $x \longrightarrow 0$ entonces $\operatorname{sen} x \approx x$ y $\cos x \approx 1$ (se puede ver gráficamente). Haciendo entonces $x = \frac{y}{N}$, y fijo, $N \longrightarrow \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}\cos y = &\cos^N\left(\frac{y}{N}\right) - \frac{N(N-1)}{2!}\cos^{N-2}\left(\frac{y}{N}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{y}{N}\right)\\ &+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\cos^{N-4}\left(\frac{y}{N}\right)\operatorname{sen}^4\left(\frac{y}{N}\right) + \dots\end{aligned}$$

que cuando N es suficientemente grande se tiene que

$$\cos y \approx 1 - \frac{N(N-1)}{2!}\cdot 1 \cdot \left(\frac{y}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\cdot 1 \cdot \left(\frac{y}{N}\right)^4 + \dots \tag{4.3}$$

$$\cos y \approx 1 - \frac{N}{N}\frac{(N-1)}{N}\frac{y^2}{2!} + \frac{N}{N}\frac{(N-1)}{N}\frac{(N-2)}{N}\frac{(N-3)}{N}\frac{y^4}{4!} + \dots \tag{4.4}$$

Como

$$\frac{N-i}{N} \longrightarrow 1 \text{ cuando } N \longrightarrow \infty$$

entonces

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots \tag{4.5}$$

que es un desarrollo que solo presenta potencias de y de índice par, coincidiendo con el conocido hecho de que coseno es una función par.

Análogamente se obtiene para seno que

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \tag{4.6}$$

que es un desarrollo que solo presenta potencias de y de índice impar, coincidiendo con el conocido hecho de que seno es una función impar.

5. Solución del *Problema de Basilea*

El *Problema de Basilea* consiste en hallar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Del Álgebra elemental conocemos la descomposición

$$p(x) = 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 = (1 - a_1x)(1 - a_2x)(1 - a_3x) \tag{5.1}$$

donde $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ son las raíces del polinomio $p(x)$ y se cumple, en particular, la relación

$$a_1 + a_2 + a_3 = A \tag{5.2}$$

Como esta relación es válida para polinomios de grado arbitrario, entonces Euler decidió aplicarla a "polinomios de grado infinito", es decir, a las series en potencias de la variable x. Del desarrollo del *seno* (4.6) se obtiene inmediatamente la representación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots \tag{5.3}$$

Por otra parte, la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene como raíces a los números $\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \dots$. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\dots\\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi}\right)\dots\end{aligned}$$

Entonces la generalización de (5.2) (con reemplazo de x por x^2) para una serie en potencias de x permite escribir

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots = \frac{1}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Este método heurístico, independientemente de su audacia y belleza, no satisfacía los estándares de rigor, incluso del siglo *XVIII*. Por esta razón, Euler realizó numerosos cálculos aproximados del valor de la suma, todos los cuales le condujeron a la certeza de que el resultado obtenido era correcto. Años más tarde daría otras dos formas de demostración, más complicadas, pero que satisfacían mejor a los matemáticos.

6. Relación entre las funciones exponencial y trigonométricas

Ya se llegó anteriormente a que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + (ix) - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \\
&= \cos x + i \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

De modo que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \tag{6.1}$$

En particular, para $x = \pi$, se tiene

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) = -1$$

o, de modo equivalente,

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

relación que involucra a las cinco constantes más importantes de la Matemática $(e, \pi, i, 1, 0)$ y que resultó en una encuesta de 1990 el primer lugar de las más bellas fórmulas matemáticas (entre los primeros cinco lugares se encontraban tres fórmulas de Euler).

6.1. Expresión de las funciones trigonométricas en términos de la exponencial

De (6.1) se tiene que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x,$$

por lo que se obtienen las relaciones

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{6.2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{6.3}$$

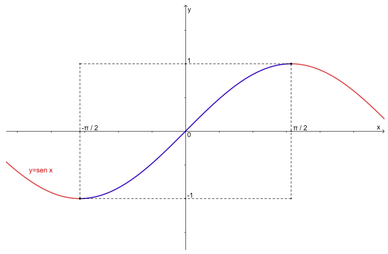
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \tag{6.4}$$

7. Funciones trigonométricas inversas

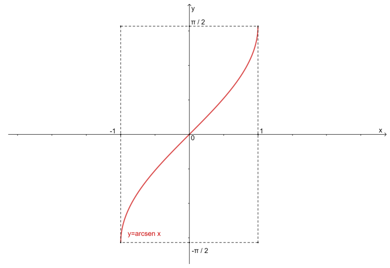
Conocemos las funciones trigonométricas desde la enseñanza preuniversitaria. Recordemos algunas propiedades fundamentales de $y = \operatorname{sen} x$, $y = cosx$ y $y = \tan x$.

- Sea
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sen} x$$
tiene como dominio
$$Dom\ f = \mathbb{R}$$
y como imagen
$$Im\ f = [-1, 1],$$
de modo que no es sobreyectiva porque el conjunto de llegada $\mathbb{R}$ no coincide con la imagen $[-1, 1]$. Esta función tampoco es inyectiva, debido a que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = f(x')$ para $x' = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, esta función no tiene inversa porque no es biyectiva. Sin embargo, si restringimos el conjuntos de salida y el conjunto de llegada de la siguiente manera entonces la nueva función sí es biyectiva:
$$\hat{f} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1],\ \hat{f}(x) = \operatorname{sen} x.$$
Las funciones f y $\hat{f}$ son distintas a pesar de tener la misma expresión analítica, pues difieren en sus conjuntos de salida y de llegada. Como $\hat{f}$ es biyectiva entonces tiene función inversa, la cual es la siguiente
$$\hat{f}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \hat{f}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}(x),$$
es decir,
$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \Longleftrightarrow x = \operatorname{sen} y,\ \text{para}\ \ -1 \leq x \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

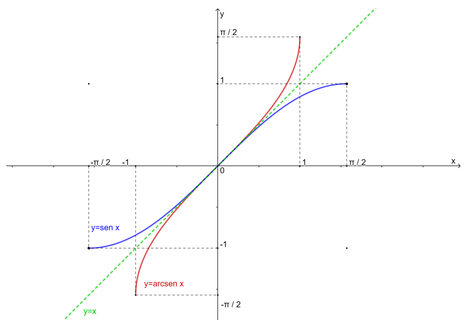
- Sea
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \cos x$$
tiene como dominio
$$Dom\ g = \mathbb{R}$$
y como imagen
$$Im\ g = [-1, 1],$$
de modo que no es sobreyectiva porque el conjunto de llegada $\mathbb{R}$ no coincide con la imagen $[-1, 1]$. Esta función tampoco es inyectiva, debido a que para todo $x \in \mathbb{R}$



(a) Gráfico de la restricción de $y = \operatorname{sen} x$



(b) Gráfico de $y = \operatorname{arc\,sen} x$



(c) Gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$ (restringida) y su inversa $y = \operatorname{arc\,sen} x$

Figura 2: Función seno y su inversa arcoseno

se tiene que $g(x) = g(x')$ para $x' = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, esta función no tiene inversa porque no es biyectiva. Sin embargo, si restringimos el conjuntos de salida y el conjunto de llegada de la siguiente manera entonces la nueva función sí es biyectiva:

$$\hat{g} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],\ \hat{g}(x) = \cos x.$$

Las funciones g y $\hat{g}$ son distintas a pesar de tener la misma expresión analítica, pues difieren en sus conjuntos de salida y de llegada. Como $\hat{g}$ es biyectiva entonces tiene función inversa, la cual es la siguiente

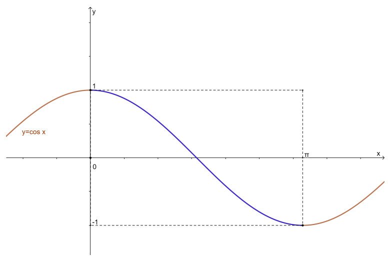
$$\hat{g}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]\,,\ \hat{g}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,cos}(x),$$

es decir,

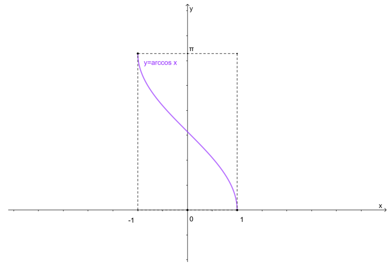
$$y = \operatorname{arc\,cos}(x) \Longleftrightarrow x = \cos y,\ \text{ para } \ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi.$$

- Sea

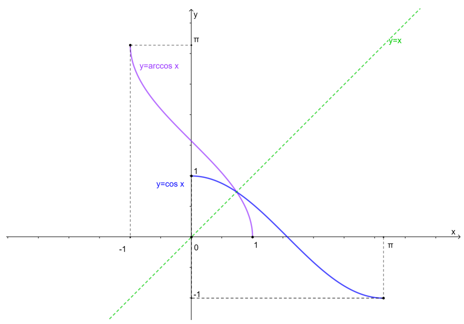
$$h : \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = \tan x$$



(a) Gráfico de la restricción de $y = \cos x$



(b) Gráfico de $y = \arccos x$



(c) Gráfico de la función $y = \cos x$ (restringida) y su inversa $y = \arccos x$

Figura 3: Función coseno y su inversa arcocoseno

tiene como dominio

$$Dom\ h = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

y como imagen

$$Im\ h = \mathbb{R},$$

de modo que es sobreyectiva porque el conjunto de llegada $\mathbb{R}$ coincide con la imagen. Esta función, sin embargo, no es inyectiva, debido a la periodicidad de seno y coseno. Por tanto, esta función no tiene inversa porque no es biyectiva. Sin embargo, si restringimos el conjuntos de salida de la siguiente manera entonces la nueva función sí es biyectiva:

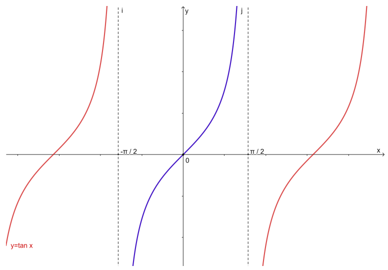
$$\hat{h} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \tan x.$$

Las funciones h y $\hat{h}$ son distintas a pesar de tener la misma expresión analítica, pues difieren en sus conjuntos de salida. Como $\hat{h}$ es biyectiva entonces tiene función inversa, la cual es la siguiente

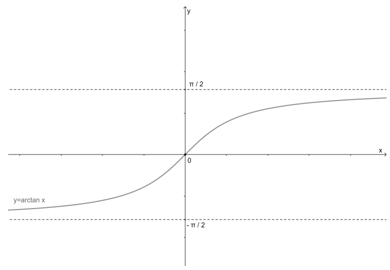
$$\hat{h}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),\ \hat{h}^{-1}(x) = \arctan(x),$$

es decir,

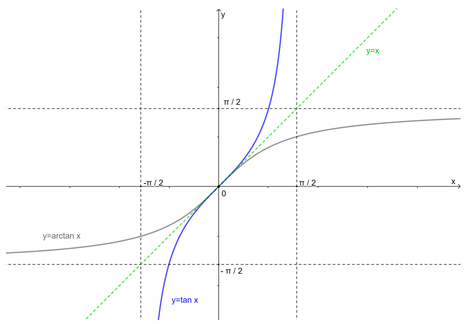
$$y = \arctan(x) \Longleftrightarrow x = \tan y, \text{ para } \quad -\infty < x < \infty, \; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$



(a) Gráfico de la restricción de $y = \tan x$



(b) Gráfico de $y = \arctan x$



(c) Gráfico de la función $y = \tan x$ (restringida) y su inversa $y = \arctan x$

Figura 4: Función tangente y su inversa arcotangente

7.1. Desarrollo en serie de $y = \arctan x$

Hallemos el desarrollo en serie de $h(x) = \arctan x$.

Sea $x = \tan y$. En virtud de (6.4) se tiene que

$$
\begin{aligned}
x = \tan y &= \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}}\right)\\
ix &= \left(\frac{e^{2iy}-1}{e^{2iy}+1}\right)\\
ix(e^{2iy}+1) &= e^{2iy}-1\\
ixe^{2iy}+ix &= e^{2iy}-1\\
1+ix &= e^{2iy}(1-ix)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$e^{2iy} = \frac{1+ix}{1-ix}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = 2iy$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
y = \arctan x &= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)\\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2i}\left(2\left(ix+\frac{(ix)^3}{3}+\frac{(ix)^5}{5}+\frac{(ix)^7}{7}+\dots\right)\right)\\
&= \frac{1}{i}\left(ix-\frac{ix^3}{3}+\frac{ix^5}{5}-\frac{ix^7}{7}+\dots\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots.$$

En (*) se usó el desarrollo en serie

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x|<1$$

visto en la clase anterior.

En particular, para $x = 1$ se tiene que

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

que es la llamada *serie de Leibniz*, hermosa pero de poca utilidad en la práctica para la aproximación de π pues su convergencia es muy lenta.

Anexo: las funciones hiperbólicas

***Definición* 7.1.** *Las funciones*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se denominan, respectivamente, ***coseno hiperbólico*** *y* ***seno hiperbólico****.*

Las funciones hiperbólicas $y = \cosh(x)$ y $y = \operatorname{senh}(x)$ cumplen que:

1) Para todos x_1, x_2 y x:
   - $\operatorname{senh}(x_1 + x_2) = \operatorname{senh}(x_1)\cosh(x_2) + \cosh(x_1)\operatorname{senh}(x_2)$
   - $\cosh(x_1 + x_2) = \cosh(x_1)\cosh(x_2) + \operatorname{senh}(x_1)\operatorname{senh}(x_2)$
   - $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1.$
2) $\operatorname{senh}(0) = 1,\ \cosh(0) = 1.$

La prueba de estas propiedades se verá en la Clase Práctica correspondiente.

Estas fórmulas nos recuerdan las relaciones entre las funciones trigonométricas, las cuales, aveces, se denominan *funciones circulares* por estar referidas, en su interpretación geométrica, al círculo unidad: $x^2 + y^2 = 1$. Para $y = \operatorname{senh}(x)$ y $y = \cosh(x)$ se cumplen estas y otras relaciones análogas a las correspondientes para $y = \operatorname{sen}(x)$ y $y = \cos(x)$; de ahí el nombre de seno y coseno para ellas. El epíteto "hiperbólicas" está relacionado con el hecho de que las fórmulas

$$x = \cosh(t), \quad y = \operatorname{senh}(t) \tag{7.1}$$

definen paramétricamente una hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Análogamente,

$$x = \cos(t), \quad y = \operatorname{sen}(t)$$

definen paramétricamente al círculo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En efecto, elevando al cuadrado ambas igualdades en (7.1) y restándolas obtenemos

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

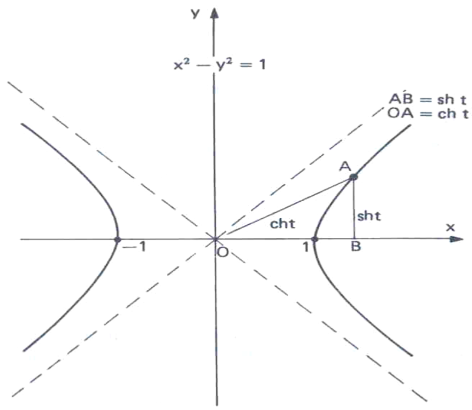


Figura 5: Parametrización de una hipérbola equilátera en forma canónica

ecuación que representa una hipérbola equilátera en forma canónica (Figura 5).

También por analogía con las funciones circulares, se pueden definir otras funciones hiperbólicas; así, por ejemplo:

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Las funciones $y = \cosh(x)$, $y = \operatorname{senh}(x)$ y $y = \tanh(x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$ y $y = \coth(x)$ está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

También existen las funciones hiperbólicas inversas (las cuales se denominan "funciones de área" porque dependen del área de un sector hiperbólico como se demuestra en el Cálculo Integral).

- La función $y = \operatorname{senh}(x)$ es biyectiva y su inversa existe en todo $\mathbb{R}$ y se denota por

  $$x = \operatorname{senh}^{-1}(y) = arcsenh(y)$$

- La inversa del coseno hiperbólico es posible considerarla cuando $y = \cosh(x)$ se restringe a $x \geq 0$ donde la función es biyectiva si se toma como codominio a $[1, +\infty)$. Esta función se denomina

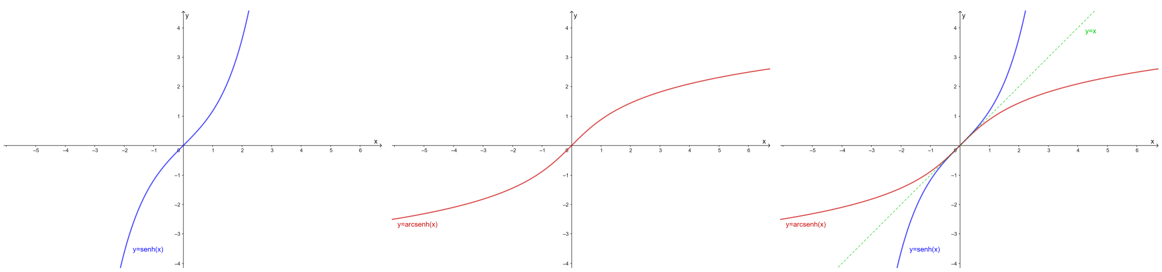
  $$x = \cosh^{-1}(y) = arccosh(y).$$

Las expresiones de las funciones hiperbólicas inversas en términos de logaritmos son las siguientes:

- $y = arcsenh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty.$
- $y = arccosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$
- $y = arctanh(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$

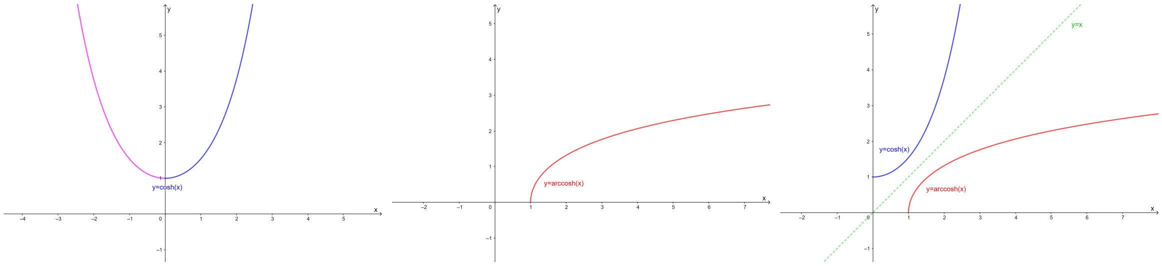
Las expresiones anteriores serán probadas en la Clase Práctica correspondiente.

A continuación se presentan gráficamente las funciones hiperbólicas y sus inversas:



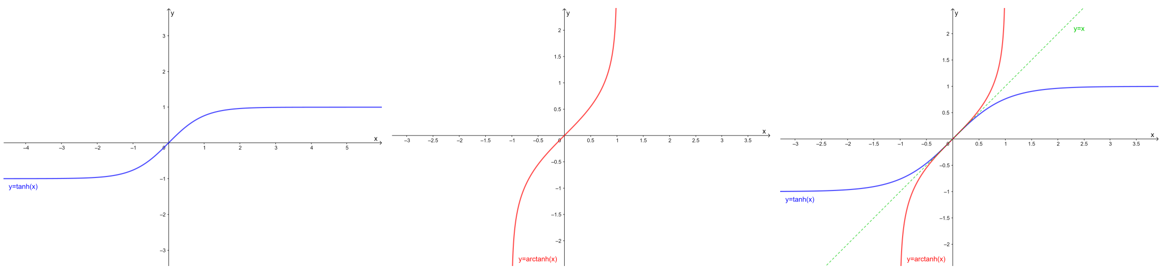
(a) Gráfico de $y = \text{senh}(x)$ (b) Gráfico de $y = arcsenh(x)$ (c) Ambas funciones

Figura 6: Seno hiperbólico y su inversa



(a) Gráfico de $y = \cosh(x)$ (en azul la restricción) (b) Gráfico de $y = arccosh(x)$ (c) Ambas funciones

Figura 7: Coseno hiperbólico y su inversa



(a) Gráfico de $y = \tanh(x)$ (b) Gráfico de $y = arctanh(x)$ (c) Ambas funciones

Figura 8: Tangente hiperbólica y su inversa

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.

[2] Sánchez, C. (1982) *Análisis Matemático Tomo I: Teoría de límites*