Álgebra II

CP6: Operaciones con espacios y subespacios vectoriales

Lic. David Balbuena Cruz

Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos principales:

- Construir los subespacio suma e intersección de dos subespacios vectoriales.
- Determinar una base y la dimensión de los subespacios intersección y suma.

Le recomendamos consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Sección 1.9.

Ejercicios

1. A continuación, se muestran dos subespacios V y W de un espacio E. Determine una base y la dimensión de los subespacios suma e intersección de V y W.

   (a) $$E = K^4, \quad \begin{aligned} V &= \{(x, y, z, t) : 3x - y + z - t = 0,\ y + z + t = 0\} \\ W &= L[(1, 2, 3, 4),\ (2, 2, 2, 6)] \end{aligned}$$

   (b) $$E = K^3, \quad \begin{aligned} V &= \{(a, b, c) : a + b + c = 0\} \\ W &= \{(a, b, a) : a, b \in K\} \end{aligned}$$

   (c) $E = K_n[x],\ V = K,\ W = \{p(x) : p(1) = 0\}$

   (d) $$E = M_n(K), \quad \begin{aligned} V &= \text{subespacio de las matrices triangulares superiores} \\ W &= \text{subespacio de las matrices diagonales} \end{aligned}$$

2. **Teorema 1** *Sean dos subespacios vectoriales U y W de un espacio vectorial E. Entonces*

   $$dim\ (U + W) = dim\, U + dim\, W - dim(U \cap W)$$

   Supongamos que U y W son dos subespacios vectoriales distintos de dimensión 4 contenidos en el espacio vectorial E, donde dim $E = 6$. Encuentre todas las posibles dimensiones de $U \cap W$.

3. En $M_2(K)$, sean A el subespacio de las matrices antisimétricas ($A^t = -A$) y T el subespacio de las matrices de traza nula [1].

   (a) Probar que A es un subespacio de T no coincidente con T.

   (b) Encontrar un subespacio B de $M_2(K)$ tal que $A + B = T$.

4. Encuentre una condición que caracterice el hecho de que la suma de dos subespacios de un espacio vectorial sobre K, coincida con alguna de los subespacios sumandos.

5. Muestre que en el espacio vectorial K^3 la intersección de los subespacios $V = L[x, y]$ y $W = L[z, t]$, donde $x, y, z, t \in K^3$ son vectores distintos, no puede reducirse al subespacio nulo. Analice si se cumple necesariamente lo mismo en K^4.

[1] la traza de una matriz es la suma de su diagonal principal