Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 4

Derivadas de orden superior: su uso en la investigación de funciones. Aplicaciones del Cálculo Diferencial.

"El arte es la ciencia de la belleza, las matemáticas son la ciencia de la verdad."

Oscar Wilde

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

1. Introducción

En esta conferencia veremos algunos ejemplos de la utilidad del Cálculo Diferencial. Estudiaremos las derivadas de orden superior y su empleo en el estudio de las propiedades de las funciones. Introduciremos una nueva propiedad: la convexidad. Veremos también una condición suficiente para extremos. Recomendamos revisar los contenidos de las conferencias anteriores (algunos se recuerdan en esta conferencia).

2. Utilidad del trabajo con la función derivada

Retomemos el problema de la Conferencia 1:

Ejemplo 1

Hallar entre todos los pares de números positivos que suman 100, aquellos que arrojan el resultado máximo al multiplicar el cubo del primero por el cuadrado del segundo.

Se obtenía entonces el pilonomio que indica la multiplicación entre ambos números

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3(100-x)^2 \\ &= x^3(10000-200x+x^2) \\ &= x^5-200x^4+10000x^3 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 5x^4-800x^3+30000x^2 \\ &= 5x^2(x^2-160x+6000) \\ &= 5x^2(x-100)(x-60) \end{aligned}$$

de donde se obtienen como posibles extremos

$$x_0 = 0,\ x_1 = 60,\ x_2 = 100.$$

Note que

$$p(x) = x^3(100-x)^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} p(x) &< 0 \ \ \forall x < 0 \\ p(x) &> 0 \ \ \forall x > 0 \end{aligned}$$

Del análisis de signo de p' se obtiene que $x_1 = 60$ es un máximo local y que $x_2 = 100$ es un mínimo local, de modo que los números buscados son

$$x = 60 \ \text{ y } \quad 100 - x = 40.$$

(Fin del Ejemplo).

Proponemos el estudio del ejercicio 7 de la página 157 de [1] sobre el rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en región limitada por parábolas y rectas. También proponemos el estudio del ejercicio 8 de la página 152 de [1], que fue uno de los problemas que motivó a Fermat a la búsqueda de valores extremos; este problema es de la Física y tiene que ver con la refracción de la luz.

Ejemplo 2

Probemos las desigualdades siguientes:

a) $\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b \leq a.$

b) $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$. (Ejercicio 10)

Respuestas

a) Puesto que $0 < b \leq a$, probar a) es equivalente a probar

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\ln a - \ln b}{a - b} \leq \frac{1}{b}.$$

La expresión del centro hace pensar en la obtenida por el teorema de Lagrange. Tomando $f(x) = \ln x \in D(0, +\infty)$, por lo que

$$f \in D[b, a], \ \forall b > 0, \ a \geq b.$$

Se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Para $b \neq a$ por el teorema de Lagrange se tiene que

$$\exists c \in (b, a): \ f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}.$$

Dado que $c \in (b, a)$ entonces

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \ \text{ dado que } 0 < b < a.$$

La igualdad en

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b \leq a$$

se alcanza cuando $a = b$. Por tanto, se demostró la cadena de desigualdades.

b) De lo probado anteriormente, si asumimos $a = 1 + x,\ b = 1$ se tiene que

$$\frac{(1+x)-1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{(1+x)-1}{1}, \quad \forall x \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \geq 0. \tag{2.1}$$

La desigualdad de la derecha de (4.1) es

$$\ln(1+x) \leq x, \ \ \forall x \geq 0$$

De hecho, la desigualdad de la izquierda en (4.1) se puede probar para $x > -1$. Tomando $f(x) = \ln(1+x) \in D(-1, +\infty)$. Probemos entonces que

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x), \ \ \forall x > -1 :$$

Sea

$$h(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \in D(-1, +\infty).$$

Note que $h(0) = 0$ y que

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

por lo que, haciendo el análisis del signo de f' se concluye que en $x = 0$ $h(x)$ tiene un mínimo local. Como h está definida para $x > -1$ etonces el mínimo hallado es absoluto. De lo anterior se tiene que

$$h(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} \geq 0 = h(0)$$

quedando demostrada la desigualdad

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x), \ \ \forall x > -1.$$

(Fin del ejemplo).

En lugar de los problemas de optimización vistos en [1] comenzaremos a analizar el siguiente problema de optimización que permitirá introducir la segunda derivada, el criterio de la segunda derivada para extremos y convexidad.

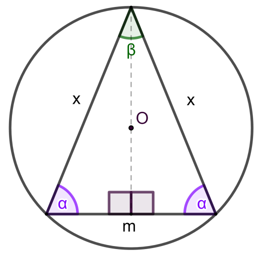

Figura 1: Triángulo isósceles inscrito en un círculo

Ejemplo 3

(*Ej 20 pág 163 [1]*) Entre los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado (Figura 1) hallar aquel que tiene perímetro máximo.

Trabajaremos la amplitud de los ángulos en radianes. Por suma de ángulos se tiene que

$$\beta = 2\pi - 2\alpha. \tag{2.2}$$

De lo anterior se deduce que

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{2.3}$$

Se desea maximizar el perímetro del triángulo, es decir

$$P = 2x + m,$$

y se cumple que

$$0 < x < 2R, \quad 0 < m \leq 2R$$

siendo R el radio del círculo dado (está fijo) y cumpliéndose la relación

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{m}{\sin\beta} = 2R \tag{2.4}$$

por la *Ley de los Senos*.

A partir de (2.2) se tiene que

$$\sin(\beta) = \sin(2\alpha). \tag{2.5}$$

de modo que

$$\begin{cases} x = 2R\sin\alpha \\ \\ m = 2R\sin\beta = 2R\sin(2\alpha). \end{cases}$$

Por tanto, se tiene la siguiente expresión para el perímetro del triángulo

$$p(\alpha) = 4R\sin\alpha + 2R\sin(2\alpha) \tag{2.6}$$
$$\Downarrow$$
$$p'(\alpha) = 4R\cos\alpha + 4R\cos(2\alpha) = 4R[\cos\alpha + \cos(2\alpha)] = 4R[\cos\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)] \tag{2.7}$$

Hallemos los extremos de $p(\alpha)$. Por el teorema de Fermat debemos analizar los puntos estacionarios:

$$p'(\alpha) = 4R(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 &= 0 \;\; \text{ya que } R \neq 0 \\ (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se tienen las posibles soluciones α_1 y α_2 tales que

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \;\; \text{y} \;\; \cos\alpha_2 = -1$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} \;\; \text{y} \;\; \alpha_2 = \pi.$$

Por (2.3) se descarta α_2, por lo que la solución válida es α_1. Análicemos el signo de p' para verificar si este punto estacionario es un extremos de p. Se tiene que

$$p'(\alpha) = 4R(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1);$$

para $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple que

$$\cos\alpha + 1 > 0;$$

ahora, para $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ se tiene que

$$2\cos\alpha - 1 > 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha > \frac{1}{2},$$

por lo que $p'(\alpha) > 0$, mientras que para $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene que

$$2\cos\alpha - 1 < 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha < \frac{1}{2},$$

por lo que $p'(\alpha) < 0$. El análisis anterior puede ser visto gráficamente en la figura 2. Luego, se concluye que $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ constituye un máximo local para $p(\alpha)$, el cual es absoluto en $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Por tanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$, de modo que el triángulo isósceles de perímetro máximo inscrito en un círculo es el triángulo equilátero.
(Fin del Ejemplo).

Más adelante veremos otro modo de resolver este problema.

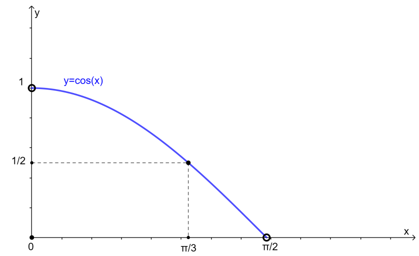

Figura 2: Función $y = \cos x$ en $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejemplo 4

Cuántos ceros puede tener, a lo sumo,

$$f(x) = 2^x - 1 - x^2.$$

Nótese inicialmente que

$$f(0) = 2^0 - 1 - 0^2 = 0 = 2^1 - 1 - 1 = f(1),$$

por lo que $f(x)$ posee dos ceros, al menos. ¿Cómo determinamos con exactitud cuántos posee a lo sumo?

Recordemos algunos resultados anteriores

- **Teorema de Lagrange** (Figura 3)

$$f \in D[a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c \in (a,b) : \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Teorema de Rolle**(Figura 4)

$$f \in D[a,b], \; f(a) = f(b)$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c \in (a,b) : \; f'(c) = 0.$$

- **Corolario de Rolle**(Figura 5)
  Entre dos ceros de una función derivable existe un cero de su derivada.

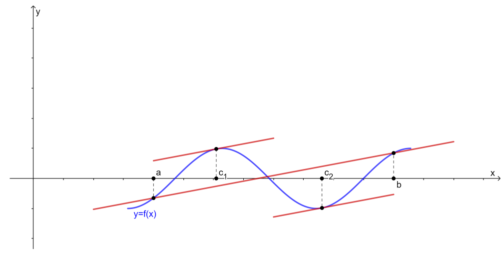

Figura 3: Descripción gráfica del teorema de Lagrange

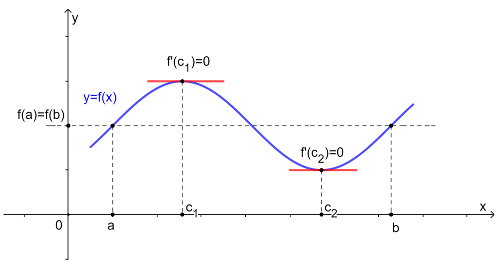

Figura 4: Descripción gráfica del teorema de Rolle

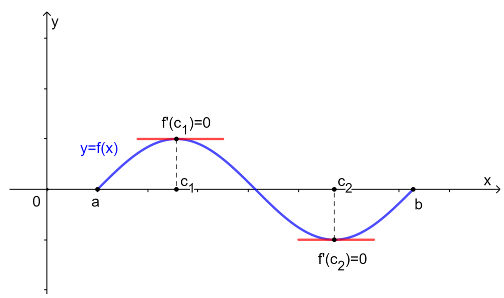

Figura 5: Descripción gráfica del corolario de Rolle

A partir de las figuras 3, 4 y 5 se puede notar que la existencia del número $c \in (a, b)$ no implica unicidad.

Si analizamos la figura 6 podemos deducir que entre dos ceros de la función derivada f' no puede haber más de un cero de la función f (puede no haber ninguno)

Apliquemos este resultado al ejemplo que estamos tratando. Puesto que

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$$

nada resulta de lo de aquí obtenido, pues no es obvia la determinación de las raíces de

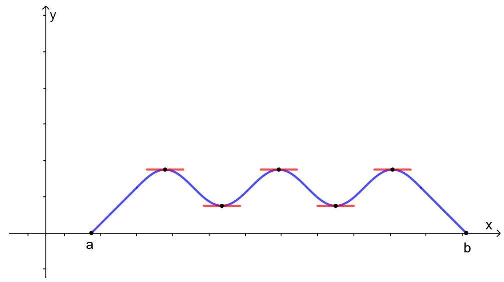

Figura 6: Descripción gráfica de lo deducido desde el corolario de Rolle

esta ecuación

$$2^x \ln 2 - 2x = 0 \tag{2.8}$$

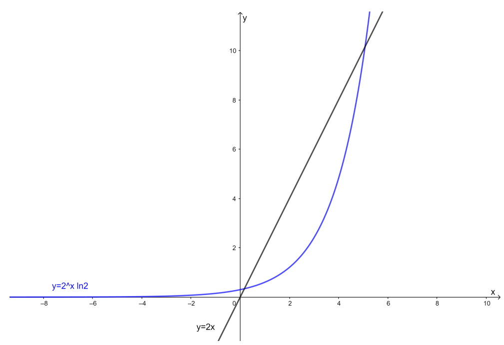

Figura 7: Gráficos de las funciones $y = 2^x \ln 2$ y $y = 2x$

Si bien puede observarse en la figura 7 que los gráficos de las funciones $y = 2^x \ln 2$ y $y = 2x$ se cortarían en dos puntos a lo sumo pero, a menos que se haga con "la mayor exactitud posible", un gráfico no es una demostración.

Sin embargo, dada una función $y = f'(x)$, ¿tendría sentido preguntarse si existe $y = [f'(x)]'$? A fin de cuentas, de acuerdo a como entendimos $f'(x)$, si

$$\exists \ \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} [f'(x)]'$$

Definición* 2.1.** *Llamaremos* ***segunda derivada de f *a*

$$[f'(x)]' = f''(x).$$

De manera general, siempre que exista

$$\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad \textit{cuando } \Delta x \to 0$$

entonces

$$\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f^{(n)}(x)$$

Aplicando ahora el corolario de Rolle a

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$$

se tiene

$$[f'(x)]' = [2^x \ln 2 - 2x]' = 2^x (\ln 2)^2 - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2^x = \frac{2}{(\ln 2)^2}.$$

Como la función del miembro izquierdo $y = 2^x$ es inyectiva, entonces la solución de la ecuación es única:

$$x = \log_2 \left(\frac{2}{(\ln 2)^2} \right).$$

De esta forma se tiene que

$$f''(x) \text{ tiene una raíz}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \text{ tiene, a lo sumo, dos raíces}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \text{ tiene, a lo sumo, tres raíces}$$

Como sabemos que $x = 0$ y $x = 1$ son raíces de $f(x)$ entonces podría tener, a lo sumo, una más. Con esto hemos llegado a la respuesta buscada.
(Fin del Ejemplo).

3. Convexidad del gráfico de una función

Ya estudiamos en la conferencia anterior que el signo de la derivada permite conocer cuando dicha función crece o decrece, pero una función puede crecer sin comportarse del mismo modo atendiendo a su convexidad.

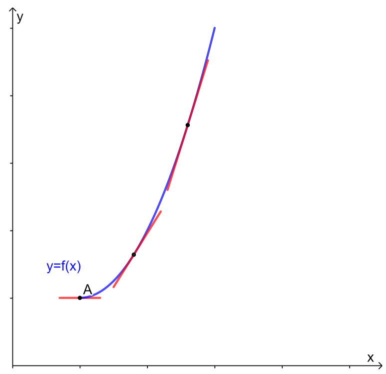

Figura 8: Gráfico de una función convexa hacia abajo

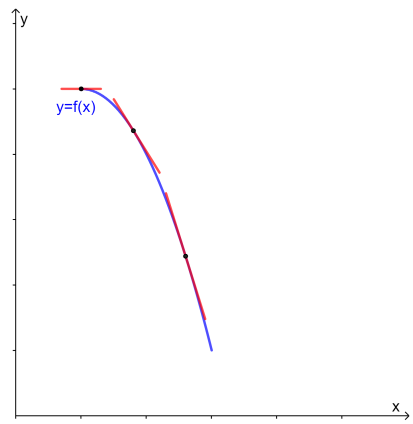

Figura 9: Gráfico de una función convexa hacia arriba

Las rectas tangentes a la curva en todo punto (a, b) quedan:

por debajo del gráfico de f en una *vecindad* de (a, b)

por encima del gráfico de f en una *vecindad* de (a, b)

Supongamos que $f \in D(a, b)$. La función que describe las pendientes de las rectas tangentes a la curva en cada $x \in (a, b)$ es $f'(x) = y$.

Si las pendientes crecen (decrecen) cuando el gráfico es convexo hacia abajo (arriba)

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \text{ debe ser creciente (decreciente) en } (a, b)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Si existe, } f''(x) \geq \ (\leq)\ 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

de modo que

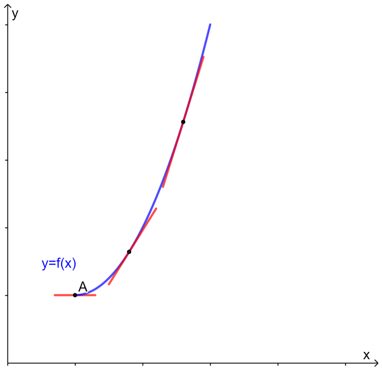

Figura 10: Gráfico de una función convexa hacia abajo

$$\Updownarrow$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

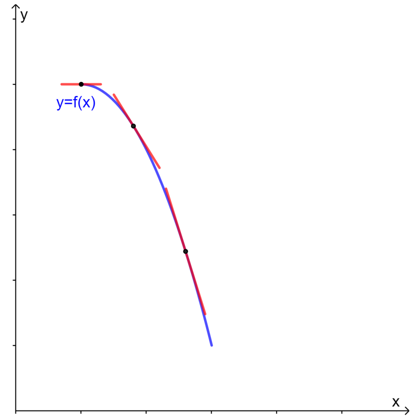

Figura 11: Gráfico de una función convexa hacia arriba

$$\Updownarrow$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

***Observación* 3.1.**

- *Si x_0 es un punto estacionario de $y = f(x)$ en (a,b), $f \in D^2(a,b)$ y $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$*

$$\Downarrow$$

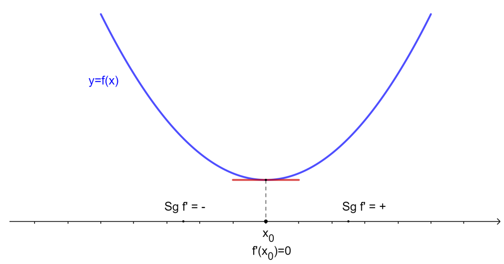

Figura 12: Análisis del signo de f' alrededor de un punto estacionario cuando $f''(x) \geq 0$ en (a,b)

- *Si x_0 es un punto estacionario de $y = f(x)$ en (a, b), $f \in D^2(a, b)$ y $f''(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$*

$$\Downarrow$$

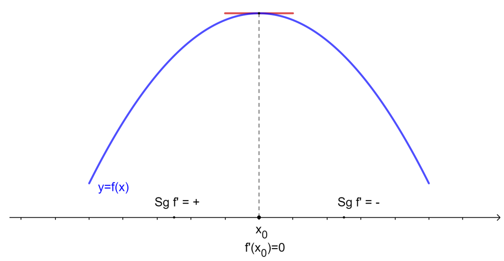

Figura 13: Análisis del signo de f' alrededor de un punto estacionario cuando $f''(x) \leq 0$ en (a, b)

Hemos obtenido una

Condición suficiente de extremos locales

Sea $x_0 \in (a, b) : \;\; f'(x_0) = 0.$

$$f''(x_0) > 0 \; (< 0)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_0, f(x_0)) \text{ es punto de mínimo local de } f \text{ (máximo local de } f).$$

***Observación* 3.2.** *En ocasiones puede ocurrir que $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$, entonces se busca $f^{(iv)}(x_0)$ y se razona análogamente.*

En general, sea $y = f(x) \in D^{2n}(a, b)$, $x_o \in (a, b)$, $f^{(k)}(x_0) = 0$ con $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) y $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$. Si $f^{(2n)}(x_0) > 0 \; (< 0)$

$$\Downarrow$$

$(x_0, f(x_0))$ es punto de mínimo local de f (máximo local de f).

Definición* 3.1.** *Un* ***punto de inflexión *de la curva $y = f(x)$ es aquel en el que cambia el sentido de su convexidad.*

4. Ejemplos integradores

Ejemplo 5

Demuestre que

a) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) < 1 \quad \forall x \in (0, 1]$

b) Cualesquiera sean x_1, x_2 tales que $0 < x_1 \leq x_2$ se cumple

$$5 \ln\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}\right) - 3 \ln x_1 \geq 2 \ln x_2$$

Respuestas

a) Probar que $\forall x \in (0, 1]$
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) < 1$$
es equivalente a probar que
$$\left(\frac{x+3}{3x}\right) \ln(1+x) < 1.$$
Como $x > 0$ entonces es equivalente a probar que
$$(x+3) \ln(1+x) < 3x \quad \forall x \in (0, 1].$$
Sea entonces
$$h(x) = (x+3) \ln(1+x) \in D(0, 1],$$
por tanto
$$h'(x) = \ln(1+x) + \frac{3+x}{1+x}$$
$$h''(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$
Se tiene que $h''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$, por lo que h es convexa hacia arriba.

Las tangentes a la curva en el intervalo $(0, 1]$ quedarán por encima del gráfico de la curva en ese intervalo y, en particular, se tiene que
$$h'(0) = \ln 1 + 3 = 3,$$

por lo que la recta tangente a la curva $(x, f(x))$ en $(0, 0)$ es

$$y = h'(0)(x - 0) + h(0) = 3x.$$

De esta forma se concluye que

$$h(x) = (3 + x)\ln(1 + x) < 3x \ \forall x \in (0, 1].$$

Pasaremos a responder el inciso b) luego de las siguientes observaciones.

***Observación* 4.1.** *Sea $y = f(x)$ convexa hacia arriba (abajo) en (a, b)*

$$\Downarrow$$

- *las rectas tangentes a $y = f(x)$ en cada punto $x \in (a, b)$ quedan por encima (debajo) del gráfico de la curva en (a, b);*
- *a su vez, las secantes que pasan por (x_1, y_1), (x_2, y_2), $a < x_1 < x_2 < b$ quedan por debajo (encima) del gráfico de la curva en $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ (ver figura 14).*

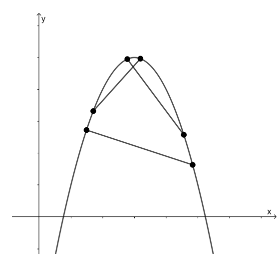

Figura 14: Secantes que unen los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

La observación anterior nos lleva a lo siguiente:

$$f \text{ convexa hacia arriba en } (a, b)$$
$$\Updownarrow$$

El gráfico de f en (a, b) queda por encima de la secante que une a $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

Esto es lo mismo que decir que

$$f \text{ convexa hacia arriba en } (a, b)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b): \ x_1 < x_2 \text{ y } x \in [x_1, x_2] \text{ se tiene que}$$
$$f(x) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ahora bien,

$$x \in [x_1, x_2] \Longleftrightarrow \exists \alpha \in [0,1]: \; x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = x_1 + \alpha(x_2 - x_1),$$

de modo que

$$f \text{ convexa hacia arriba en } [x_1, x_2] \subset (a,b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}[(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) - x_1] + f(x_1) \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(\alpha(x_2 - x_1)) + f(x_1) \\ &= -\alpha[f(x_1) - f(x_2)] + f(x_1) \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$f(x) \geq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2), \quad \forall \alpha \in [0,1], \; \forall [x_1, x_2] \subset (a,b).$$

De modo que

$$f \text{ convexa hacia arriba (abajo) en } [x_1, x_2] \subset (a,b)$$

$$\Updownarrow$$

$\forall x \in [x_1, x_2] \subset (a,b), \; \forall \alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$f[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2] \geq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

$$(f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)).$$

Con este resultado estamos en condiciones de probar el inciso b).

b) Cualesquiera sean x_1, x_2 tales que $0 < x_1 \leq x_2$ se cumple

$$5 \ln\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}\right) - 3\ln x_1 \geq 2\ln x_2. \tag{4.1}$$

Basta con escribir (4.1) convenientemente en la forma

$$\ln\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2\right) \geq \frac{3}{5}\ln x_1 + \frac{2}{5}\ln x_2$$

y notar que tomando $\alpha = \frac{2}{5}$ y la función $y = \ln x$ que es convexa hacia arriba, solo se debe aplicar el resultado anterior.

Ejemplo 6

Pruebe que la ecuación

$$e^x - 1 = \ln(1+x)$$

no puede tener 3 raíces reales.

Respuestas

Sea

$$h(x) = e^2 - 1 - \ln(1+x) \in D(-1,+\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = e^x = \frac{1}{1+x}$$
$$h''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

Note inicialmente que $h(0) = 0$, por tanto, h posee al menos una raíz real.

Como $h''(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces h'' no posee raíz alguna en $\mathbb{R}$, por tanto, no la posee en $(-1,+\infty)$.

$$\Downarrow$$

$$h' \text{ puede tener, a lo sumo, 1 raíz en } (-1,+\infty)$$

$$\Downarrow$$

h puede poseer, a lo sumo, 2 raíces en $(-1,+\infty)$. Luego, queda probado lo que se quería.

Ejemplo 7

Sea $d : [a,b] \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable y

a) satisface la ecuación diferencial

$$d''(x) = e^x d(x) \tag{4.2}$$

pruebe que entonces d no puede tener un máximo local positivo ni un mínimo local negativo.

b) Si, además, $d(a) = d(b) = 0$ entonces pruebe que $d(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Respuestas

a) Procederemos por *Reducción al Absurdo*. Supongamos que d posee un máximo local positivo en $x_0 \in [a,b]$. Entonces

$$d(x_0) > 0, \quad d''(x_0) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

En la ecuación diferencial (4.2), que se cumple por hipótesis,

$$d''(x_0) = e^{x_0} d(x_0)$$

se tiene una contradicción, ya que el miembro izquierdo es no positivo, mientras que el miembro derecho es positivo. Por tanto, d no puede tener un méximo local positivo.

Análogamente se prueba que no puede tener un mínimo local negativo.

b) Como d no puede tener un máximo local positivo (mínimo local negativo) en $[a,b]$

$$\Downarrow$$

$$\max d \leq 0 \quad \text{en } [a,b]$$
$$(\min d \geq 0 \quad \text{en } [a,b])$$

$$\text{y como } d(a) = d(b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{[a,b]} d = \min_{[a,b]} d = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Ejemplo 8

Pruebe que

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Respuestas

Sea

$$h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \in D(\mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = -\operatorname{sen} x + x, \quad \text{y} \quad h'(0) = 0$$
$$h''(x) = -\cos x + 1, \quad \text{y} \quad h''(0) = 0$$

Como $h''(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que h es convexa hacia abajo. También del hecho de que $h''(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que h' es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$ y, como $h'(0) = 0$ entonces

$$h'(x) \geq h'(0) \ \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$\Downarrow$$

$$h \text{ es creciente en } \mathbb{R}_+ \text{ y } h(0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 = h(0) \ \ \forall x \geq 0.$$

La función h es par ya que

$$h(-x) = \cos(-x) - 1 + \frac{(-x)^2}{2} = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = h(x),$$

por lo que

$$h(x) \geq 0 \ \ \forall x \leq 0.$$

De este modo queda probado que

$$h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior puede verse en la figura 15.

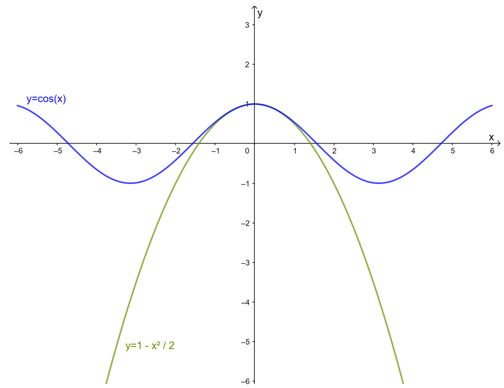

Figura 15: Gráfico de $y = \cos x$ y de $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Ejemplo 9

Demuestre que

$$c^\alpha + d^\beta \leq \alpha c + \beta d + 1 \;\; \forall \alpha, \beta, c, d \in \mathbb{R}_+^*, c \neq 1, d \neq 1, \alpha + \beta = 1.$$

Respuestas

Cualesquiera sean los valores $c > 0, d > 0, c \neq 1, d \neq 1$, las funciones

$$f(x) = c^x, \quad g(x) = d^x$$

son funciones convexas hacia abajo, por lo que se cumple $\forall \alpha > 0,\; \beta > 0,\; \alpha + \beta = 1$, $\forall x, y :\; x \geq 0,\; y \geq 0$ lo siguiente:

$$c^{\alpha x + \beta y} \leq \alpha c^x + \beta c^y \tag{4.3}$$

$$d^{\alpha x + \beta y} \leq \alpha d^x + \beta d^y \tag{4.4}$$

Tomando en (4.3) $x = 1,\; y = 0$ y en (4.4) $x = 0$ y $y = 1$ se tiene

$$c^\alpha \leq \alpha c + \beta \tag{4.5}$$

$$d^\alpha \leq \alpha + \beta d. \tag{4.6}$$

Sumando (4.5) y (4.6) se tiene que

$$c^\alpha + d^\alpha \leq (\alpha c + \beta) + (\alpha + \beta d) = \alpha c + \beta d + (\alpha + \beta)$$

$$\Updownarrow$$

$$c^\alpha + d^\alpha \leq \alpha c + \beta d + 1$$

ya que, por hipótesis,

$$\alpha + \beta = 1.$$

Por tanto, queda demostrado lo que se quería.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.