Álgebra II Ciencia de la Computación Examen Final Curso 2012 – 2013

Nombre:____ Grupo:____________

1. Sea $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$f(x^2+x) = (1,0)$ $\qquad$ $f(x-1) = (0,0)$ $\qquad$ $f(x^2+1) = (1,0)$

a) Determine si existe alguna aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores. ¿Es única? Justifique.
b) Encuentre una aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores y tal que $\ker f \oplus \mathrm{L}[x^2+x] = \mathbb{R}_3[x]$.
   i. Halle su expresión analítica.
   ii. Halle su conjunto imagen.
   iii. Determine si es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifique.

2. Sea $T\colon MS_2(\mathbb{R}) \to MS_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-z & -x-2y+z \\ -x-2y+z & -3y+z \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que T es una aplicación lineal.
b) Halle $A = M\big(T,(a_i)\big)$, $(a_i) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
c) Halle valores propios y subespacios propios.
d) *De ser posible*, encuentre una matriz diagonal D semejante con A y una matriz invertible P que garantice $A = P^{-1}DP$.

3. Sea $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $q(x,y,z) = 2x^2 + 6xy + 2y^2 - z^2$

a) Halle la matriz asociada a q en la base canónica.
b) Encuentre una forma canónica asociada a q mediante transformaciones ortogonales.
c) Halle el Índice Positivo de Inercia, Índice Negativo de Inercia y Signatura.
d) Determine si es definida positiva. Justifique.

4. Demuestre o refute en cada uno de los siguientes casos.

a) Toda aplicación lineal $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es sobreyectiva.
b) Sea $\lambda \neq 0$ valor propio de $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.
c) Toda matriz simétrica de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ es diagonalizable.
d) Sea E un espacio vectorial con producto escalar real, $x,y,z \in E$ ortogonales entre sí, entonces $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ se cumple que $\|\alpha x - (\alpha y + \beta z)\|^2 = \alpha^2(\|x\|^2 + \|y\|^2) + \beta^2\|z\|^2$.