Álgebra II

CP4: Bases y dimensión de los espacios vectoriales

Lic. David Balbuena Cruz

Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos principales:

- Determinar si un sistema de vectores constituye una base de cierto espacio vectorial.
- Construir una base a partir de un sistema linealmente independiente.
- Reducir un sistema de vectores generador a una base.

Le recomendamos consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Sección 1.12.

Ejercicios

1. Determine si el sistema de vectores S dado constituye una base del espacio vectorial E correspondiente. Justifique su respuesta. Si S es generador y no es base, extraiga de él una base. Por otra parte, si S no es generador, obtenga una base a partir de un subsistema de S linealmente independiente maximal del mismo.

   (a) $E = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,5,-6),(2,1,8),(3,-1,4),(2,1,1)\}$

   (b) $E = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,3,4),(1,4,-3),(2,3,11)\}$

   (c) $E = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,2,-1,-2),(2,3,0,-1),(1,2,1,4),(1,3,-1,0)\}$

   (d) $E = \mathbb{R}^n$, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde

   $$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & = & (1,2,3,\ldots,n) & \quad & x_3 & = & (0,0,3,\ldots,n) \\ & & & & & \vdots & \\ x_2 & = & (0,2,3,\ldots,n) & & x_n & = & (0,0,0,\ldots,n) \end{array}$$

   (e) $E =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores: $a_1 = (\sqrt{2},-1,-1)$ y $a_2 = (2,-3,2)$

   $S = \{(4-\sqrt{2},-5,5),(2,3\sqrt{2}-5,-2\sqrt{2})\}$

2. Considere el espacio vectorial $K_n[x]$ de todos los polinomios de grado menor estricto que n con coeficientes en K.

(a) Demuestre que el sistema $S = \{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\}$ es una base de dicho espacio vectorial.

(b) Demuestre que el sistema $S = \{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)\}$ tal que $\mathbf{grd}\ f_k(x) = k$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ es una base de $K_n[x]$

3. Determine cómo deben ser tomados los parámetros a y b reales para exista una base de $K_4[x]$ cuyos primeros vectores sean los polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= ax^3 + bx^2 + 2x + 1 \\ p_2(x) &= ax^3 + (2b-1)x^2 + 3x + 1 \\ p_3(x) &= ax^3 + bx^2 + (b+3)x + (2b-1) \end{aligned}$$

De los valores encontrados, selecione uno fijo para a y otro para b. Construya una base de $K_4[x]$ a partir del sistema $\{p_1, p_2, p_3\}$.

4. Encuentre una base y la dimensión de los espacios vectoriales que se indican:

(a) E =subespacio de $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}, +, *)$ generado por $(i, 2)$ y $(5, -2)$.

(b) E =subespacio de $(\mathbb{C}^2, \mathbb{R}, +, *)$ generado por $(i, 2)$ y $(5, -2)$.

(c) E =subespacio de de las matrices de traza nula de $M_n(\mathbb{C})$.

(d) E =subespacio de de las matrices de traza nula de $(M_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}, +, *)$.

(e) En general, si $(E, \mathbb{C}, +, *)$ es un e.v de dimensión n, ¿cuál es la dimensión de $(E, \mathbb{R}, +, *)$. Justifique su respuesta.