Examen Mundial ÁLGEBRA I — Ciencias de la Computación

Nombre y Apellidos: ____________________ Grupo: ______ Curso 2021-2022

1. Responda Verdadero o Falso. Justifique en cada caso.
   (a) ___ No existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{2z-i}{2+iz}$ sea un número real.
   (b) ___ Sea $s(x) = x^3 + 2kx^2 + 2k^2x + k^2, k \in \mathbb{R}$. Sea a, b, c raíces del polinomios $s(x)$ entonces $a^2 + b^2 + c^2$ no depende del valor de k.
   (c) ___ Sean A y B matrices inversibles entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   (d) ___ Sea $f : \mathbb{R}_5[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tal que $f(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ d & e+1 \end{pmatrix}$ es una aplicación lineal.
   (e) ___ Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos de 0 tales que $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$. Los puntos determinados en el plano complejo por los números $0, z_1, z_2$ y $z_1 + z_2$ conforman un paralelogramo.

2. Sean $p(x) = 2x^4 - (a+2)x^3 + (a+5)x^2 - (a+3)x + 3$ y
   $q(x) = 4x^4 - (2a+4)x^3 + (2a+11)x^2 - (2a+7)x + 7, a \in \mathbb{R}$. Demuestre que independientemente del valor de a, no existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = q(x_0) = 0$.

3. Sea A la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales donde la última columna contiene a los términos independientes.

$$A = \begin{pmatrix} -2k^2 & 3 & 4 & 1-2k^2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 5-2k^2 & 2 & k^2+4 & 6-2k^2 & 1 \\ k^2 & -1 & k^2 & k^2 & k \end{pmatrix}$$

   (a) Haciendo uso del teorema de Kronecker-Capelli, determine los valores de k para los cuales el sistema no tiene solución.
   (b) Escoja un valor no nulo de k de forma tal que el sistema sea compatible, clasifíquelo y exprese el conjunto solución del mismo.

4. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:
   - $V = L[(1,-1,2,0), (1,2,-1,3), (2, 2+\alpha, 3+2\alpha, 3)]$
   - $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + (\beta - 1)x_3 + x_4 = 0; x_1 + x_2 + x_4 = 0; x_1 + x_2 - 2\beta x_3 = 0\}$

   (a) En función de los valores de α y β, determine la expresión analítica, dimensión y una base de los siguientes espacios $V \cap W$ y $V + W$.

5. Sea el endomorfismo de $MS_2(\mathbb{R})$ que satisface:
   - $f\begin{pmatrix} a-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & a+1 \\ a+1 & 4 \end{pmatrix}$
   - $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
   - $a \neq -1$.
   - La matriz asociada a la base canónica es simétrica.
   - $\begin{pmatrix} 2 & c \\ c & 2 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a un valor propio $\lambda \neq 1$.

   (a) Determine los posibles valores de a y defina el endomorfismo.
   (b) Halle el núcleo y la imagen de f, su nulidad y rango. Verifique que se satisface el teorema del rango.
   (c) Diga si f es inyectiva , sobreyectiva y/o biyectiva.
   (d) Diga si el endomorfismo es diagonalizable y de serlo, halle los subespacios propios, la matriz diagonal y la base propia.