Examen Final Algebra II Ciencia de la Computación 2010-2011

Nombre: ____ Grupo: ___________

1. Sea $\mu: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$\mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = x^2+1 \qquad \mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = x-1 \qquad \mu\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = x^2+kx+2$$

a) Determine cómo debe ser tomado $k \in \mathbb{R}$ para que exista alguna aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores. Justifique.

b) ¿Es única? Justifique.

   I. En caso de no serlo, encuentre una aplicación lineal tal que su núcleo sea suplementario con V.

$$V = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}: a-b-c=0, d=0\right\}$$

   II. Encuentre su expresión analítica.

   III. Halle la imagen.

   IV. Determine si la aplicación encontrada es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. Sea $T\ end\ MS_2(\mathbb{R})$ dado por la expresión $T\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & c\\ c & b+c\end{pmatrix}$

a) Halle $A = M(T,(a_i))$, $(a_i) = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

b) Halle los valores propios de T.

c) Halle los subespacios propios de T.

d) De ser posible, represente T por una matriz diagonal D y encuentre una matriz inversible P tal que $D = P^{-1}AP$.

3. Sea $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya matriz en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halle la expresión analítica de q.

b) Encuentre la expresión de una forma canónica asociada a q y escriba la transformación de coordenadas correspondiente.

c) Determine si q es definida positiva.

d) Halle el índice positivo de inercia y el índice negativo de inercia.

4: Clasifique en verdaderos o falsos los enunciados siguientes. Demuestre o refute según convenga.

a.___ Sean A, B subespacios de E entonces $A \cap B$ es un subespacio de E.

b.___ Si A es inversible entonces $\lambda = 0$ no puede ser valor propio de A.

c.___ Sea E un espacio vectorial en el que está definido un producto escalar real f, $(a_i), (b_i)$ son bases de E, $A = M(f,(a_i))$ y $B = M(f,(b_i))$ entonces existe P inversible tal que $B = P^T AP$.

d.___ Sea E un espacio euclidiano, entonces para todo $x, y \in E$ se cumple que:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$