Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Clase Práctica 5

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Al estudiante:

Bienvenido a la Clase Práctica 5 del Tema 1 del curso *Introducción al Análisis Matemático*. Los siguientes ejercicios pueden ser abordados con los conocimientos adquiridos en la Conferencia 1.6 sobre la relación entre las funciones trigonométricas y la exponencial. ¡Esperamos que le vaya bien!

Colectivo de la asignatura

EJERCICIOS

Ejercicio 1.

Calcular $sen(x),\ cos(x)\ tan(x)$ para
$x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{12}$

Ejercicio 2.

Prueba las fórmulas trigonométricas siguientes:

a) $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

b) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

c) $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

Ejercicio 3.

a) Justifique en forma trigonométrica que

$$\operatorname{sen}(x) \leq x \leq \tan(x),\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Prueba las siguientes desigualdades:

i) $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}.$

ii) $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

iii) $\tan(x) < \frac{2}{\pi - 2x},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$

Ejercicio 4.

Prueba por inducción matemática la validez de la Fórmula de Moivre

$$[\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)]^n = \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx)$$

Ejercicio 5.

Halle las sumas

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{sen}(k\theta)$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

Ejercicio 6.

Pruebe que

a) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2},\ |x| \leq 1.$

b) $\arctan(\frac{u+v}{1-uv}) = \arctan(u) + \arctan(v)$, con $u,\ v \in [-1, 1],\ uv \neq 1.$

c) $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}).$

d) $\arcsin(x) > x,\ x \in (0, 1).$

e) $|\arctan(x)| \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}.$

Ejercicio 7.

El sabio alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) introdujo las llamadas *funciones hiperbólicas*

$$\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Verifica las identidades siguientes:

i) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

ii) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

iii) $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

b) Encuentre las fórmulas para:

i) $\operatorname{senh}(2x),\ \operatorname{senh}(\frac{x}{2})$

ii) $\cosh(2x),\ \cosh(\frac{x}{2})$

iii) $\tanh(2x),\ \tanh(\frac{x}{2})$

c) Muestra que

i) $\operatorname{senh}(ix) = i\operatorname{sen}(x)$

ii) $\cosh(ix) = \cos(x)$

d) Encuentre los desarrollos en serie para $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$.

e) Las inversas de las funciones hiperbólicas ($arcsenh(x),\ arccosh(x),\ arctanh(x)$) pueden definirse de manera semejante al caso de las trigonométricas. Pruebe que

i) $arcsenh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ -\infty < x < \infty$

ii) $arccosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ x \geq 1$

iii) $arctanh(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}),\ |x| < 1.$