Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Ejercicios Resueltos 4

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Demuestre que si:

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a), \quad a \in \mathbb{R} \\ f'(x) &< g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) &< g(x), \quad \forall x > a \\ f(x) &> g(x), \quad \forall x < a \end{aligned}$$

a) Demuestre con un ejemplo la falsedad de lo anterior si faltara la hipótesis

$$f(a) = g(a).$$

Respuesta

Sea

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x), \\ h(a) &= 0, \\ h'(x) &= g'(x) - f'(x) > 0, \end{aligned}$$

entonces $h(x)$ es estrictamente monótona y cambia de signo en el punto a.

$$\begin{aligned} f(x) &< g(x), \quad \forall x > a \\ f(x) &> g(x), \quad \forall x < a \end{aligned}$$

Lo que prueba el ejercicio.

a) Sean $f(x) = e^x = f'(x)$ y $g(x) = 2e^x = g'(x)$.

Se cumple que $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, además,

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2

Demuestre las desigualdades

a) $e^x \geq 1 + x$.

b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

c) $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Respuesta

a) $(e^x)'' = e^x > 0$ y por lo que es convexa ($\cup$). Por tanto está por encima de todas sus tangentes. Pero $1 + x$ es la tangente en el punto $(0; 1)$.

b) Si $|x| \geq 2$ es obvia la desigualdad.
Analicemos $|x| < 2$ para $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, & x < 0 \\ f'(x) = 0, & x = 0 \\ f'(x) > 0, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo local.}$$
$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ es convexa} \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo global.}$$

y como $f(0) = 0$, entonces se cumple la desigualdad pedida.

c) $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\right]$ obviamente, pues es una función positiva comparada con otra negativa.
Veamos que sucede en $x \in \left(0; \frac{\pi}{2};\right)$: Como $(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x < 0$ la función es cóncava, y por tanto ella es mayor que cualquier secante. En específico, la que pasa por los puntos $(0; 0)$ y $(\frac{\pi}{2}; 1)$, que es exactamente $y = \frac{2}{\pi} x$.

Ejercicio 3

$$2 \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos}(1 - 2x^2) \quad \forall x \in [0; 1]$$

Respuesta

Sea

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\operatorname{arc\,sen} x - \arccos(1-2x^2)\\
f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = 0\\
f(0) &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto $f(x) \equiv 0$ y queda probada la igualdad de las funciones.

Ejercicio 4

Demuestre (asumiendo que existen las raíces de las que se habla en los incisos correspondientes) que:

a) La ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ posee una cantidad par de soluciones reales, que a lo sumo son 2.

b) La ecuación $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ posee a lo sumo una raíz real.

c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > f(x)$ para todo valor real de x y que satisface $f(x_0) = 0$, se cumple que $f(x) > 0, \ \ \forall x > x_0$.

Respuesta

a) Sea $f(x) = x^2 - x\operatorname{sen} x - \cos x \Rightarrow f'(x) = x(2 - \cos x)$. Como la derivada tiene un solo cero, la ecuación tendría 2 ceros, o ninguno.

b) Sea la función $f(x) = 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow f'(x) = 3 - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$. Por tanto $f(x)$ posee a lo sumo una raíz real.

c) Si $f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(0) > 0 = f(0)$ y por tanto f es estrictamente creciente todo $\mathbb{R}$. Dado que satisface $f(x_0) = 0$ entonces $f(x_0 + h) > 0$ siendo h lo suficientemente pequeño. Y como es estrictamente creciente, es inyectiva, y por tanto no se puede volver a anular. Lo que prueba que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.

Ejercicio 5

Determine los coeficientes a, b, c, d tales que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $x = -1$ cuyo valor sea 10 y un punto de inflexión en $(1; -6)$.

Respuesta

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$.
Para el máximo en $(-1; 10)$ y un punto de inflexión en $(1; -6)$:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 10 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = -6 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases}$$

De donde se obtiene $a = 1$, $b = -3$, $c = -9$, $d = 5$.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.