Álgebra II Ciencia de la Computación Extraordinario Curso 2012 – 2013

Nombre:____ Grupo:____________

1. Considere la relación $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ tal que:

$$T(1,0,1,0) = (i, 1) \qquad T(0,1,1,0) = (1 - i, -1 + i)$$

$$T(0,1,0,1) = (1, i) \qquad T(1,1,1,1) = (k + i, 1 + i)$$

a) Determine para que valor de $k \in \mathbb{R}$ existe alguna aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores. ¿Es única? Justifique

b) En caso de no ser única, para $k = 1$ encuentre una aplicación encuentre una aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores y tal que $\operatorname{Im} T \oplus V = \mathbb{C}^2$

$$V = \{(a + bi, c + di): a + d = 0, b + c = 0\}$$

c) Halle el núcleo de T

2. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

a) ¿Puede ser A considerada como la matriz asociada a una forma cuadrática? Justifique.

b) En caso afirmativo:
   i. Halle su expresión analítica sobre $\mathbb{R}^3$, tomando A en la base canónica de dicho espacio.
   ii. Halle una forma canónica asociada a la forma cuadrática mediante transformaciones ortogonales.

c) ¿Puede ser A considerada como la matriz asociada a un endomorfismo de $\mathbb{R}_3[x]$? Justifique.

d) En caso afirmativo:
   i. Halle su expresión analítica considerando la base de $\mathbb{R}_3[x]$, $(x^2 + 1, x, 1)$.
   ii. Halle el rango del endomorfismo.
   iii. Determine si el endomorfismo es inyectivo y/o sobreyectivo. Justifique.

3. Demuestre o refute en cada uno de los siguientes casos.

a) Sean A, B matrices asociadas a un mismo endomorfismo, entonces poseen el mismo polinomio característico.

b) Sea T un endomorfismo de E, espacio vectorial $\mathbb{R}$ Si v, w son vectores propios de T asociados al valor propio λ, entonces $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que $\alpha v + \beta w$ es un vector propio asociado a λ.

c) Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, la expresión $\langle x, y\rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$ define un producto escalar real si $a > 0 \wedge b^2 - ac > 0$

d) Sea G un grupo, con neutro e, tal que $\forall\ x \in G, x^2 = e$ entonces G es abeliano.