Examen Final — Algebra I — 2017-2018
Ciencia de la Computación
Nombre: Grupo:

1. Sean $O_n=\{p(x)\in\mathbb{K}_n[x]: p(x)=-p(-x)\}$ y $E_n=\{p(x)\in\mathbb{K}_n[x]: p(x)=p(-x)\}$.

1.1 Halle un polinomio de grado mínimo de E_n tal que α es una de sus raíces.

1.2 Halle un polinomio de grado mínimo de O_n con coeficientes reales tal que $2i$ es una de sus raíces.

1.3 El polinomio $q(x)=x^5-6x^4+17x^3-24x^2+52x$ es divisible por la familia de polinomios que satisface 1.2), escriba la descomposición en factores irreducibles de $q(x)$ sobre $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

1.4 Pruebe que $E_n\subseteq_s\mathbb{K}_n[x]$.

1.5 Asumiendo que $E_n\subseteq_s\mathbb{K}_n[x]\wedge O_n\subseteq_s\mathbb{K}_n[x]$:

1.5.1 Pruebe que E_n y O_n son suplementarios en $\mathbb{K}_n[x]$.

1.5.2 Halle una base de $\mathbb{K}_n[x]$ formada por la unión de bases de E_n y O_n para $n=5$.

1.5.3 Halle la dimensión de O_n.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y+z=k \\ x+y+az=2 \qquad a,k\in\mathbb{K} \\ 2x+y+az=k \end{cases}$$

2.1 Clasifique el sistema según los valores de los parámetros $a,k\in\mathbb{K}$.

2.2 Obtenga una solución particular del sistema del dado para $a=2, k=2$.

2.3 Determine si a la matriz $(A|b)$ del sistema puede agregársele una fila de modo que el rango de esta nueva matriz sea siempre mayor que el rg$(A|b)$ independientemente del valor de $a,k\in\mathbb{K}$.

3. Responda verdadero o falso y justifique cada respuesta.

3.1 ___Sea E espacio vectorial (e.v.) con $v_1,v_2,v_3\in E$ tal que $v_1+v_2+v_3=0_E$ entonces $L[v_1,v_2]=L[v_1,v_3]$

3.2 ___Sea $A\in M_{5x7}(\mathbb{K})$ con rango 5, entonces, el sistema $Ax=b$ tiene al menos una solución.

3.3 ___La matriz $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ no es invertible.

3.4 ___Sean $A,B\in M_n(\mathbb{K})$ diagonales entonces $\det AB=\det A\cdot\det B$.

3.5 ___ Sea E un e.v. sobre $\mathbb{K}$, $\dim(E)=n$, $\{a_i\}$ base de E, una condición necesaria y suficiente para que un sistema finito de vectores sea linealmente independiente, es que el sistema de sus vectores coordenados con respecto a la base $\{a_i\}$ sea linealmente independiente en $\mathbb{K}^n$.

3.6 ___Sea $U\subseteq_S W\subseteq_S E$ tales que $\dim U=k, \dim W=m, k<m,$ y sea $k<l<m,$ entonces, existe $X\subseteq_S E$ tal que $U\subseteq_S X\subseteq_S W\wedge\dim X=l$.

3.7 ___Sea $A\in M_{mxn}(\mathbb{K})$ y $B\in M_{nxr}(\mathbb{K})$, entonces se cumple que rg$(AB)\le$ rg(B).

Nota: En todos los ejercicios debe justificar rigurosamente su respuesta, apoyándose en la teoría vista a lo largo del curso.

Nota: Al entregar el examen, cada ejercicio debe estar en hojas independientes.

¡¡¡Éxito!!!