Álgebra II

Cp#12: Diagonalización de endomorfismos y matrices

Lic. David Balbuena Cruz

Ejercicios

1. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$$

   Determine si f es diagonalizable o no. Si lo fuera, encuentre una base $\{a_i\}$ de $\mathbb{R}^3$ y una matriz diagonal D tal que $M(f, \{a_i\}) = D$.

2. Sea la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Determine si A es diagonalizable o no. Si lo fuera, encuentre una matriz diagonal D y una matriz P inversible tales que $D = P^{-1}AP$.

3. Demuestre que si un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n tiene exactamente n valores propios distintos, entonces el endomorfismo es diagonalizable.

4. Determine para qué valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}$$

   es diagonalizable.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

   (a) Demuestre que si b y c son del mismo signo entonces el polinomio característico de A tiene todos sus valores propios reales.

   (b) Demuestre que si A es simétrica, entonces A es diagonalizable.