

Álgebra II

CP8: Aplicaciones lineales y teorema de valores prefijados

Lic. David Balbuena Cruz

Objetivos

Esta clase práctica tiene como objetivos principales:

- Analizar si una aplicación entre espacios vectoriales es lineal.
- Construir una aplicación lineal a partir de imágenes prefijadas respecto a una base.

Le recomendamos consultar el libro *Álgebra Tomo I* de Teresita Noriega. Sección 2.1 y 2.2.

Ejercicios

1. Analice si son lineales o no las siguientes aplicaciones:

- (a) $f : K^3 \rightarrow K^2$, definida por $f(x, y, z) = (z, x + y)$.
- (b) $f : K \rightarrow K^2$ definida por $f(x) = (x, 1)$
- (c) $f : K^2 \rightarrow K$, definida por $f(x, y) = |x - y|$
- (d) $f : M_2(K) \rightarrow M_2(K)$ definida por $f(A) = AT - TA$.
- (e) $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ donde E_1 y E_2 son dos subespacios del espacio vectorial E .
- (f) $\varphi : E \times F \rightarrow E \times F$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$, donde E y F son dos espacios vectoriales sobre K y f es una aplicación lineal de E en F .

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1, 2) = (3, -1, 5)$$

$$f(k, 1) = (2, 1, -1)$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

- (a) ¿Con estos datos bastará para hallar $f(1, -1)$?

(b) Será posible hallar $f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

3. Sean los sistemas de vectores A y B , dados por:

$$a_1 = (1, 1) \quad a_2 = (2, -1) \quad a_3 = (-3, 2)$$

$$b_1 = (1, 0) \quad b_2 = (0, 1) \quad b_3 = (1, 1)$$

¿Existirá alguna aplicación lineal T de K^2 en K^2 tal que $T(a_i) = b_i$ para $i = 1, 2, 3$? ¿En caso de encontrar una aplicación, existirán otras?

4. ¿Cuántas aplicación lineales T de C^3 en C^2 existen tales que:

$$T(1, -i, 1 + i) = (1, 0) \quad \text{y} \quad T(i, 1, 1) = (0, 1)$$

5. ¿Existirá alguna aplicación lineal de K^3 en K^3 cuya imagen esté generada por $(1, 1, 0)$ y $(1, 2, 3)$? Si existe, hállela. ¿Será única?

(a) Responda la pregunta 4 considerando una aplicación de K^4 en K^2 cuya imagen esté generada por $(1, 1)$.