EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

MATEMÁTICA, CURSO 2010 - 2011

Nombre y apellidos: ____

Grupo: ____

I- Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso su respuesta:

a) ____ La igualdad $\arctan x = \operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{2}$ es válida para todo valor admisible de x

b) _____ $0{,}999999999\ldots = 1$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ convergente a $\frac{3}{4}$

c) _____ La ecuación $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ posee dos raíces reales.

d) _____ Si f es una función impar y derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces para todo número positivo K existe un número c en (- K , K) tal que $K\,f\,'(c) = f\,(K)$.

e) _____ $\int_0^1 x^2\, arctanxdx = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} + \ln\frac{2}{e}\right)$

II- Demuestre que la función que permite medir la longitud de arco de la curva $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ si se considera a P (1, 1) como punto inicial tiene la forma $s(x) = x^2 + \frac{\ln x}{8} - 1$.

III- Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto Q (3, 5) y corta un área mínima en el primer cuadrante.

RESPUESTAS:

I- a) V La igualdad $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ es válida para todo valor admisible de x.

Para demostrar la validez de esta afirmación basta considerar la función $\mathrm{h(x)} = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ y tener en cuenta que su derivada es nula para todo valor admisible de la variable, lo cual indica que dicha función es constante en todo su dominio.

Para conocer el valor de la constante basta evaluarla en un valor cómodo de x, por ejemplo, en x = 1, se tiene de esta modo que $h(1) = \arctan 1 + \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

b) V $0{,}999999999\ldots = 1$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ convergente a $\frac{3}{4}$

Para la primera parte de esta afirmación es preciso escribir el número 0,99999… en la forma $0{,}999999999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ y tener en cuenta que ésta es una serie geométrica de razón $\frac{1}{10} < 1$, por tanto convergente al valor $9\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1$, con lo que se tiene ya la igualdad deseada.

En cuanto a la segunda afirmación se tiene que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ puede ser expresada en la forma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

que no es más que la suma de dos series telescópicas convergentes cuya suma es conocida, es decir,

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 0 + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{4}$$

b) F La ecuación $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ posee dos raíces reales.

Supongamos que tal afirmación fuese cierta y denotemos por $x_1, \; x_2$ a tales raíces. Sin perder generalidad, asumamos $x_1 < x_2$. Se tiene de ese modo, dado que la función h(x) = $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, que, en particular, lo es en el intervalo $[x_1, \; x_2]$ donde además se cumple $h(x_1) = 0, \; h(x_2) = 0$. Podemos aplicar entonces el corolario del Teorema de Rolle que afirma que entre dos raíces de una función derivable hay al menos un cero de su derivada pero h´(x) = $3 - \frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ sólo para $sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{6}{\pi} > 1$, lo cual es obviamente imposible. Queda demostrado de ese modo que la ecuación $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ no puede poseer una raíz real.

d) V Si f es una función impar y derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces para todo número positivo K, existe un número c en (- K , K) tal que $K\, f\,'(c) = f\,(K)$.

Vía 1: Se debe probar inicialmente que, siendo f una función impar, entonces para todo x se cumple que f(-x) = - f (x), de modo que en particular para x = 0 se tendría

f(-0) = f(0) = - f (0)

de donde se deduce inmediatamente que f(0) sólo puede valer 0.

Seguidamente y teniendo en cuenta que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, se puede afirmar que f es derivable en el intervalo $[0\,, \mathrm{K}\,]$, en el que se puede entonces aplicar el Teorema de Lagrange. Se tiene así que cualquiera sea K > 0, existe un c en (0, K) que satisface

$$f\,'(c) = \frac{f(K) - f(0)}{K - 0} = \frac{f(K)}{K}$$

,

de donde se obtiene la igualdad deseada.

Vía 2: Puede aplicar Lagrange directamente en el intervalo $[-K, K]$ donde la función es derivable y teniendo en cuenta que por ser f impar en todo $\mathbb{R}$, $f\,(-K) = f\,(K)$, con lo cual cualquiera sea K > 0, existe un c en (-K, K) que satisface

$$f\,'(c) = \frac{f(K) - f(-K)}{K - (-K)} = \frac{2f(K)}{2K} = \frac{f(K)}{K}$$

,

de donde se obtiene la igualdad deseada.

e) V Para calcular $\int_0^1 x^2\, arctanx dx$ es preciso integrar por partes para usar posteriormente fracciones racionales y sustitución.

Sea

$\mathrm{u} = \arctan \mathrm{x}$ con lo cual $du = \frac{dx}{1+x^2}$ y $dv = x^2dx$ con lo que $u = \frac{x^3}{3}$

Se tiene entonces que

$\int_0^1 x^2\, arctanx dx = \frac{x^3}{3} \arctan \mathrm{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\int_1^2\frac{du}{u} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ (ln2 - \ln 1) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}\ (ln2 - 1) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}\ \left(\ln\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} + \ln\frac{2}{e}\right)$

II- La función que permite medir la longitud de arco de la curva $f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ si se considera a P (1, 1) como punto inicial tiene la forma

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + f\,'(t)^2}\ dt$$

y puesto que

$$\mathrm{f}\,'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - \frac{1}{8\mathrm{x}} = 2\left(\mathrm{x} - \frac{1}{16\mathrm{x}}\right)$$

,

$$1 + \mathrm{f}\,'(\mathrm{x})^2 = 1 + \left(2\mathrm{x} - \frac{1}{8\mathrm{x}}\right)^2 = 1 + 4\mathrm{x}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64\mathrm{x}^2} = 4\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64\mathrm{x}^2} = \left(2\mathrm{x} + \frac{1}{8\mathrm{x}}\right)^2$$

.

De este modo,

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + f\,'(t)^2}\ dt = \int_1^x \sqrt{\left(2\mathrm{t} + \frac{1}{8\mathrm{t}}\right)^2}\ dt = \int_1^x \left(2\mathrm{t} + \frac{1}{8\mathrm{t}}\right) dt = t^2 + \frac{1}{8}\ln t\Big|_1^x$$

$$= x^2 + \frac{1}{8}\ln x - 1.$$

III- Aquí la primera observación es que para que una recta que pase por el punto (3, 5) forme un área mínima en el primer cuadrante debe tener pendiente negativa. Sea entonces <u>m</u> la pendiente de dicha recta cuya ecuación será

$$y = m\,(x - 3) + 5$$

Se debe ahora hallar m tal que el área que determine la recta con los ejes coordenados en el primer cuadrante sea mínima. La superficie encerrada entre la recta y los ejes coordenados será un triángulo cuyos vértices serán el (0,0) y los interceptos de la recta con los ejes que tendrán la forma (0, - 3m + 5) y (3 - $\frac{5}{m}$, 0). Puesto que el triángulo cuya área deseamos hallar es rectángulo, la expresión de su área, en términos de m, será

$$A(m) = \frac{(-3\mathrm{m}+5)\ (3 - \frac{5}{m})}{2} = \frac{1}{2m}\ (-9m^2+30m-25)$$

Hallemos ahora el valor de m que minimiza esta función. Se puede verificar que

$$A'(x) = \frac{(3\mathrm{m}+5)\ (-3\mathrm{m}+5)}{2m^2}$$

con lo cual puntos críticos y estacionarios serían los correspondientes a los valores

m = 0, m = $\mp\frac{5}{3}$.

(Nótese que si m tiende a cero, A(x) tiende a infinito y si tiende a -∞, $A(x)$ se acerca tanto como se quiera a $-\frac{9}{2}$, queda claro entonces que el valor mínimo de la función se alcanza en un punto interior).

Ahora bien, está claro que para m = 0, el punto en cuestión no pertenece al dominio de la función en tanto que para m = $\frac{5}{3}$, ya se sabe que el área ni siquiera estaría acotada, así que haremos el análisis correspondiente para m = $-\frac{5}{3}$ que, dado que

$$A''(x) = \frac{-25}{m^3} > 0 \qquad \forall\, m < 0,$$

está claro que es un punto en el que A(x) alcanza un mínimo absoluto si m $<$ 0 .

De este modo, la ecuación de la recta buscada es $y = -\frac{5}{3}x + 10.$