Examen Final ÁLGEBRA I Ciencia de la Computación Curso 2021-22

Nombres y Apellidos:____ Grupo:_________

Atención: Resuelva las preguntas en hojas separadas (una pregunta por hoja).

1. Diga Verdadero o Falso. Justifique en cada caso.

a) __ La dimensión de $F=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]: p(0)=p(2)=0\}$ es 2.

b) __ Si $AB=BA$ y A,B son inversibles, entonces $A^{-1}B=B^{-1}A$.

c) __ La función de $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(z)=\dfrac{(z-1)^3}{z^2+z-1}$ tiene dos puntos fijos ($z\in\mathbb{C}$ es punto fijo de f si $f(z)=z$).

d) __ La representación en el plano complejo de los números w,z y 0 serán tres puntos alineados $\Leftrightarrow z/w\in\mathbb{R}$.

e) __ El determinante de una matriz antisimétrica es siempre cero.

2. Sea la matriz: $M=\begin{pmatrix} 2 & -2a+b & 2a & 5 & b \\ 2a+1 & -5 & 4a & 2a+7 & 1 \\ -2 & 4-b & 1-2a & -4 & a-1/2 \end{pmatrix}$

a) Analice si existen valores a y b para los cuales la matriz M tiene rango 2.

b) Considere que M es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales y seleccione valores no nulos para los parámetros a y b. Haciendo uso del Teorema de Kronecker-Capelli, clasifique el sistema obtenido y plantee el conjunto solución.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2-\mathbb{R}$ espacio considere el conjunto: $V=\{(a+bi,c+di):-c+2d=0,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

   a. Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2-\mathbb{R}$ espacio.

   b. Sea $S=\{(2i,0),(0,2+i),(i,2+i)\}$ un sistema de vectores:

   b.1) Construya una base de V a partir de un subsistema linealmente independiente maximal de S.

   b.2) Complete una base de $\mathbb{C}^2-\mathbb{R}$ espacio a partir de la base hallada en el inciso anterior.

   c. Halle el subespacio vectorial suplementario de V en $\mathbb{C}^2-\mathbb{R}$ espacio. Expréselo de forma analítica.

3.1) ¿Para qué valores de α y β forman los vectores $u_1=(3+\beta,6,1+\alpha)$ y $u_2=(1-\beta,2,3+2\alpha)$ una base del subespacio vectorial $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2x-y-3z=0\}$?

4. Sea $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal tal que:

- $\operatorname{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}): \begin{matrix} 5x_1-x_2-5x_3=0 \\ 5x_1+x_2-5x_4=0\end{matrix}\right\}$
- $f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=x^2+x+2$
- $\operatorname{Im} f=\{y_1x^2+y_2x+y_3\in\mathbb{R}_3[x]: y_1+y_2-y_3=0\}$
- Existe $\lambda\in\mathbb{R}$: $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}=\lambda x^2+(\lambda+1)x+\lambda$

   a. ¿Es f, cumpliendo con las condiciones anteriores, una aplicación lineal única? Justifique.

   b. Calcule $f\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

   c. Diga el rango y la nulidad de f.

4.1) ¿Para qué valores de n existe algún endomorfismo $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Im} f$?

5. Sean $f:E\to E$, E espacio vectorial, $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ base de E que satisface:

- $f(a_1)=3a_1+2a_2+2a_3$ y $f(a_2)=2a_1+2a_2$, $M(f,B)$ es simétrica y $2a_1-2a_2-a_3\in\operatorname{Ker} f$.

5.1) Halle la matriz que representa la aplicación en la base B.
5.2) Verifique si el endomorfismo es diagonalizable, de serlo, halle la matriz diagonal asociada al endomorfismo y la base propia.
5.3) Es el endomorfismo inyectivo, sobreyectivo y/o biyectivo. Justifique.

Justifique todas sus respuestas. Éxitos.