Examen Final de Álgebra I — Ciencia de la Computación — Curso 2018-19
Universidad de La Habana — Plan E
Grupo: *Nombre y Apellidos*:

1. Halle el polinomio de menor grado, tal que al dividirlo por $(x+1)^2$ el resto es $3x$ y al dividirlo por $x+2$ el resto es -5.
2. Dado $E = \mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio, sea $V \subseteq_S E$, constituido por las soluciones del SEL homogéneo:

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 4a + b + 2c = 0 \end{cases}, (a+bi, c+di) \in E$$

   Encuentre, si es posible:

   2.1 Un subespacio de E, cuya suma sea directa, pero que no sea suplementario con V en E.

   2.2 Un suplementario con V en E.

   2.3 Un suplementario con V en E que contenga a todos los múltiplos del vector $(-2, 4-3i)$.

   2.4 Un subespacio de E cuya suma con V sea el subespacio constituido por todos los vectores $(a+bi, c+di)$ tal que $2a-3b+c=0$, pero que no sea suplementario con V en dicho subespacio.

   2.5 Un suplementario del subespacio generado por el vector $(1, -2+i)$ en V.
3. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}_4[x] \to MS_2(\mathbb{R})$

   $f(x^3+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(x^3-x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   3.1 ¿Para qué valores de $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$, f define una aplicación lineal?

   3.2 Para los valores de $p(x)$ hallados, diga si la aplicación lineal es única o no.

   3.3 Encuentre, por separado, si es posible una aplicación lineal que satisfaga las condiciones anteriores y que:

   3.3.1 $\mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b - c = 0, a - b + d = 0; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

   3.3.2 El vector $3x^3 - x^2 \in \mathrm{Ker} f$.

   3.4 Encuentre, de ser posible, la expresión analítica, de cada una.

   3.5 Diga si es inyectiva o sobreyectiva.

   3.6 Halle la segunda columna de $M(f, A, B)$ en una de las aplicaciones encontradas, teniendo que $A = \{x^3+x^2, x^3-x^2, x, 1\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Responda verdadero o falso. Justifique adecuadamente cada selección.

   4.1 Sea $z \in \mathbb{C}$ $Im(\overline{z})^2 = (Im\overline{z})^2$.

   4.2 Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si $\mid z_1 + z_2 \mid = \mid z_1 - z_2 \mid$ entonces $i\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}, z_2 \neq 0$.

   4.3 Sea $p(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ tal que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y sea $z = a + bi$, $b \neq 0$, una raíz de $p(x)$ entonces $\overline{z}$ también es raíz y el polinomio es factorizable por $(x-a)^2 + b^2$.

   4.4 Toda matriz ortogonal($Q \in M_n(\mathbb{K}), Q^{-1} = Q^t$), tiene determinante -1 o 1.

   4.5 Sean $f : E \to F$, $g : F \to E$ aplicaciones lineales no inyectivas entonces $g \circ f$ es no inyectiva.

Justifique adecuadamente cada respuesta!!!!

Opcional: Demuestre que en el subespacio de las funciones reales los respectivos subconjuntos de las funciones pares e impares, son subespacios que se suplementan.