Apuntes para un curso de Algebra Lineal

Dra. Mayra Solana Sagarduy

Dra. Rita Roldán Inguanzo

Facultad de Matemática y Computación

Universidad de La Habana

CORRECCION: NOSOTRAS, ETC

ISBN

ETC

NOTA DE LAS AUTORAS

INDICE

TEMA I

NUMEROS COMPLEJOS

1.1 El sistema de los números complejos

Ya hemos visto en los distintos cursos de álgebra elemental, que se han efectuado "enriquecimientos" de los conjuntos de los números. Se comienza desde la escuela primaria con el conjunto de los números naturales, pasando posteriormente al conjunto de los números enteros y números fraccionarios positivos. Posteriormente se van introduciendo los números negativos, o sea, se forman los sistemas numéricos fundamentales: el sistema de los números enteros, que consta de todos los números enteros, positivos y negativos, incluyendo el cero, y el sistema más amplio de los números racionales, que consta de todos los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos. Más adelante, se introduce el conjunto de los números irracionales, cuya unión con los números racionales forma el sistema de números reales.

En este primer capítulo se ampliará el sistema de números reales, obteniendo el sistema de números complejos, que como veremos posee propiedades muy útiles.

Como todos conocen, los números reales no son suficientes para resolver cualquier ecuación cuadrática con coeficientes reales. Por ejemplo, cuando tratamos de resolver la ecuación cuadrática más simple

$$x^2+ 1 =0, \qquad (1.1)$$

si solo tenemos el conjunto de los números reales, vemos que no encontramos solución, dado que equivaldría a resolver la ecuación $x^2 = -1$ y sabemos que no existe ningún número real que elevado al cuadrado nos dé un número negativo.

Este problema nos lleva a la necesidad de ampliar el sistema de números reales hasta obtener un sistema tal de números, en el que la ecuación (1.1) tenga solución. Para construir este nuevo sistema tomemos los puntos del plano, siguiendo la idea de que la representación gráfica de los números reales son los puntos de una recta y que no hacemos distinción entre número real y el punto que le corresponda en dicha recta.

Es decir, queremos definir un sistema de números que se puedan representar por todos los puntos del plano.

Supongamos que en el plano se ha elegido un sistema de coordenadas rectangulares. Convengamos en designar los puntos del plano con las letras z, z_1, z_2, z_3, .. y en representar con la notación (a, b) el punto z de abscisa “a” y ordenada “b”, es decir, que según lo convenido en la Geometría Analítica, el punto z será igual al par ordenado de números reales (a, b), o sea $z = (a,b)$.

Definamos ahora, siguiendo esta idea, los números complejos:

Definición 1.1

Llamaremos *número complejo* a todo par ordenado de números reales, es decir, a todo par de la forma (a,b) donde "a" y "b" son números reales

Al primer número (en este caso "a") le llamaremos parte real del número z y lo denotaremos por Re (z), y al segundo ("b") le llamaremos parte imaginaria de z y lo denotaremos por Im (z).

Así,

$$\boxed{z = (a, b) \text{ si y solo si } \operatorname{Re}(z) = a \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = b.}$$

Ejemplos:

1. $z = (3, \sqrt{2})$ $\operatorname{Re}(z) = 3$ y $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$.
2. $z = (-1, 0)$ $\operatorname{Re}(z) = -1$ y $\operatorname{Im}(z) = 0$.
3. $z = (0, \sqrt{3})$ $\operatorname{Re}(z) = 0$ y $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{3}$.

Al conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por la letra .

De esta definición vemos que podemos identificar cada número complejo z = (a, b) con el punto del plano que tiene coordenadas a y b.

1.2 Igualdad entre números complejos

Definición 1.2

Dos números complejos serán *iguales* sí y solamente sí, son iguales las componentes respectivas.

Es decir, dados $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, entonces

$$\boxed{z_1 = z_2 \iff a = c \text{ y } b = d.} \tag{1.2}$$

Si queremos que el conjunto de números juegue un rol análogo al del resto de los conjuntos numéricos que conocemos, debemos definir operaciones algebraicas en él.

Veamos:

1.3 Operaciones con números complejos

1.3.1 Suma

Definición 1.3

Dados los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, llamaremos *suma* de z_1 y z_2 y lo denotaremos por $z_1 + z_2$, al número complejo $(a + c , b + d)$.

O sea,

$$\boxed{(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) .} \qquad (1.3)$$

Ejemplos:

1. $(3, -1) + (2, 4) = (3 + 2, [-1] + 4) = (5, 3)$.
2. $(2, 0) + (0, 3) = (2, 3)$.
3. $(-8, 5) + (0, 0) = (-8, 5)$.

Esta operación posee todas las propiedades principales que posee la suma en el sistema de números reales.

Propiedades de la suma

1s) La suma es asociativa.

Es decir cualesquiera sean z_1, z_2, y z_3 en , se cumple que

$$\boxed{[z_1 + z_2] + z_3 = z_1 + [z_2 + z_3].} \qquad (1.4)$$

Ejemplo:

$[(2, 1) + (3, -4)] + (1,5) = (5, -3) + (1, 5) = (6, 2)$

$(2, 1) + [(3, -4) + (1,5)] = (2, 1) + (4, 1) = (6, 2)$.

2s) La suma es conmutativa.

Es decir cualesquiera sean z_1, y z_2 en , se cumple que

$$\boxed{z_1 + z_2 = z_2 + z_1 .} \qquad (1.5)$$

Ejemplo:

$(2,-1) + (3/2, 5/2) = (2+3/2, -1+5/2) = (7/2,3/2)$

$(3/2, 5/2) + (2,-1) = (3/2 +2, 5/2-1) = (7/2,3/2)$.

La demostración de estas dos propiedades queda como ejercicio al lector.

3s) Existencia de un elemento neutro.

Sabemos que en el conjunto de los números reales se encuentra un elemento (que es el 0) tal que $\alpha+0 = 0+\alpha$ cualquiera sea α real, y a este elemento se le denomina neutro para la suma de números reales.

Veamos que en también podemos encontrar un número con tales propiedades:

La idea es que exista un número complejo z = (c,d), tal que para todo z_1 = (a,b) se cumpla que

$$z_1 + z = z_1$$

Es decir, que

$$(a, b) + (c, d) = (a, b).$$

Utilizando la definición de suma tendremos que

$$(a + c, b + d) = (a, b)$$

y de la igualdad de números complejos tendremos las igualdades de números reales:

$$\begin{cases} a + c = a \\ b + d = b \end{cases}.$$

De donde tenemos que c = 0 y d = 0, es decir

El neutro para la suma de números complejos es el número complejo (0,0).

Así, el neutro de la suma se corresponde con el origen de coordenadas del plano cartesiano.

Ejemplo:

1. $(\sqrt{2},5) + (0,0) = (\sqrt{2},5)$.
2. $(-4,3) + (0,0) = (-4,3)$.

4s) Existencia del opuesto.

Recordemos que para cada número real existe un opuesto para la suma, es decir, otro número real tal que su suma es 0.

Para los complejos tendríamos que, para cada número complejo z_1 = (a, b) existe otro número complejo z = (c, d), tal que

$$z_1 + z = (0,0).$$

Es decir,

$$(a, b) + (c ,d) = (0,0)$$

$$(a + c, b + d) = (0,0),$$

de donde a su vez tendremos las igualdades reales

$$a + c = 0 \quad \text{y} \quad b+d=0,$$

que nos llevan a que $c = -a$ y $d = -b$.

Al opuesto de z_1 lo denotaremos por $-z_1$.

Así:

$$\boxed{\text{El opuesto de } z_1 = (a, b) \text{ es } -z_1 = (-a, -b)\ .}$$

Ejemplos:

1. El opuesto de (3/5,-8/3) es (-3/5,8/3).
2. El opuesto de ($\sqrt{2}$,5) es (-$\sqrt{2}$,-5).

Siguiendo el modelo de los números reales definamos ahora un producto para los números complejos.

1.3.2 Producto de números complejos

Definición 1.4

Llamaremos *producto* de los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, y lo denotamos por z_1z_2, al número complejo, cuya parte real es $ac - bd$ y la parte imaginaria es $ad + bc$.

O sea,

$$\boxed{z_1z_2 = (a, b)\,(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).} \qquad (1.6)$$

Ejemplo:

(3,-2)(1,5)= ([3][1]- [-2][5], [3][5]+[-2][1])=(3+10 ,15-2)= (13,13).

Propiedades del producto:

1p) El producto es asociativo.

Es decir, cualesquiera sean z_1, z_2, y z_3 en se cumple que:

$$\boxed{[\, z_1\, z_2\,]\, z_3 = z_1\, [z_2\, z_3]\ .} \qquad (1.7)$$

Ejemplo:

(2,5)[(-1,3)(4,-5)] = (2,5)(-4+15,5+12) = (2,5)(11,17) = (22-85,34+55) = (-63,89)

[(2,5)(-1,3)](4,-5) = (-2-15,6-5)(4,-5) = (-17,1)(4,-5) = (-68+5,85+4) = (-63,89).

2p) El producto es conmutativo

Es decir, cualesquiera sean z_1, y z_2 en se cumple que:

$$\boxed{z_1 z_2 = z_2 z_1.}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{3},-1\right)\left(1,\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2},\sqrt{6}-1\right)$$
$$\left(1,\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3},-1\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2},-1+\sqrt{6}\right).$$

La demostración de estas dos propiedades anteriores queda como ejercicio al lector.

3p) Existencia de un elemento neutro.

Sabemos que en el conjunto de los números reales existe un elemento (que es el 1), tal que $\alpha 1 = \alpha$ para cualquier número real α

Veamos que en también podemos encontrar un número con tales propiedades:

La idea es que exista un número complejo z = (c, d), tal que cualquiera sea z_1 = (a, b) se cumpla que

$$z_1\, z = z_1.$$

Es decir

$$(a, b)\ (c, d) = (a, b).$$

Utilizando la definición de producto tendremos que

$$(ac - bd, ad + bc)= (a, b)$$

y de la igualdad de números complejos tendremos las igualdades de números reales

$$\left.\begin{aligned} ac - bd &= a \\ bc + ad &= b \end{aligned}\right\}.$$

Multiplicando la primera por “a” y la segunda por “b” y sumando llegamos a:

$$(a^2+b^2)c= a^2+b^2.$$

De ahí que

$$(a^2+b^2)(c-1)=0$$

y, si “a” y “b” no son cero a la vez, se tiene que c =1. Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos d = 0.

Es decir (a,b) (1,0) = (a,b). Pero si a=0 y b=0, se tiene que (0,0) (1,0) = (0,0).

Luego podemos concluir que

$$\boxed{\text{El neutro para el producto es el número (1,0),}}$$

que se corresponde en el plano con el punto de coordenadas (1, 0), situado en el eje de abscisas a la distancia 1 del origen de coordenadas a la derecha.

Ejemplo:

(5,-8) (1,0) = (5[1]-[-8]0, 5[0]+[-8]1) = (5,-8).

4p) Existencia del inverso.

Sabemos que para cada número real diferente de cero existe un inverso, es decir, existe otro número real tal que el producto de ambos es 1.

Para el sistema de complejos tendríamos que: para cada número complejo z = (a, b), diferente del (0,0), existe otro número complejo z^{-1} = (c, d), tal que

$$z^{-1} z = (1,0)$$

y a este número se le conoce como inverso de z.

Es decir,

$$(a, b)\ (c ,d) = (1,0),$$

lo que nos lleva a

$$(ac - bd, ad + bc)= (1,0),$$

de donde a su vez tendremos las igualdades de números reales

$$ac - bd =1$$

$$ad + bc= 0.$$

Resolviendo el sistema con respecto a “c” y “d” y, teniendo en cuenta que “a” y “b” no son ceros a la vez, se obtiene

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$d = \frac{-b}{a^2 + b^2}\ .$$

Es decir,

El inverso del z = (a,b) es $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$	(1.8)

Ejemplo: Dado z = (4,-3)

$(4,-3)^{-1}$ = (4/25 ,3/25), pues $4^2+(-3)^2 = 25$.

5p) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Esta propiedad se deduce de las igualdades:

$[(a, b) + (c, d)]\,(e, f) = (a+ c, b + d)\,(e, f) =(ae +ce-bf-df, af+cf+be+de)$

$(a, b)\,(e, f) + (c, d)\,(e, f) = (ae - bf , af + be) + (ce - df , cf+ de)$

$= (ae-bf+ce-df, af+be+cf+de).$

De ahí podemos concluir que

Cualesquiera sean z_1, z_2 y z_3 en , se cumple $[z_1+z_2]\, z_3 = z_1\, z_3 +z_2\, z_3.$

Ejemplo:

$[(5,6)+(3,-1)](-2,4)= (8,5)(-2,4)= (-16-20,32-10)= (-36,22)$

$(5,6)\,(-2,4)+(3,-1)\,(-2,4) = (-10-24,20-12)+ (-6+4,12+2) = (-34,8)+ (-2,14)$

$=(-36,22).$

También se pueden definir las operaciones inversas de la suma y el producto de números complejos.

Veamos:

1.3.3 Diferencia de dos números complejos

Definición 1.5

Dados los números complejos $z_1= (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, la *diferencia* de z_1 y z_2 ($z_1 - z_2$) se define como el número complejo (x, y), tal que $(c, d) + (x, y) = (a, b)$.

De aquí se deduce que

$$\begin{cases} c + x = a \\ d + y = b \end{cases}.$$

De donde $x = a-c$ y $y = b-c$.

Por lo tanto:

La diferencia de los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ es el número complejo $z_1- z_2 =(a-c, b-d)$.

Ejemplo:

$(1,6\sqrt{5})- (8,4\sqrt{5})= (-7, 2\sqrt{5}).$

1.3.4 Cociente

Supongamos ahora que se dan los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2=(c, d)$, y que el número z_2 es diferente de cero, o sea, que al menos uno de los números reales c ó d es diferente de cero y, por consiguiente, $c^2+ d^2 \neq 0$.

Siguiendo siempre el modelo de los números reales, el cociente de la división de z_1 por z_2 tiene que ser un número complejo (x, y) tal que (c, d) (x, y) = (a, b). De aquí se tiene que

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases},$$

de donde, multiplicando la primera ecuación por "c" y la segunda por "d" y sumando obtenemos que

$$(c^2+d^2)\, x= ac+bd.$$

De ahí que

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\ .$$

Si multiplicamos la primera ecuación por "d" y la segunda por "c" y restamos, llegamos a

$$y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\ .$$

Por lo tanto, para $z_2 \neq 0$, el cociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ es

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)}. \tag{1.9}$$

Ejemplo:

Si $z_1 = (3, -1)$ y $z_2= (-2, 4)$, entonces

$z_1/z_2 =$ (3, -1) /(-2, 4) = (-6-4, 2-12) / (4+16)= (-10,-10) /20= (-1/2,-1/2).

1.4 El plano complejo

El plano cartesiano, cuyos puntos se han identificado con los números complejos, se conoce como plano com*plejo*. El eje de abscisas de este plano se llama *eje real*, puesto que sus puntos representan a los números reales; respectivamente, el eje de ordenadas del plano complejo se *llama eje imaginario.*

PLANO COMPLEJO

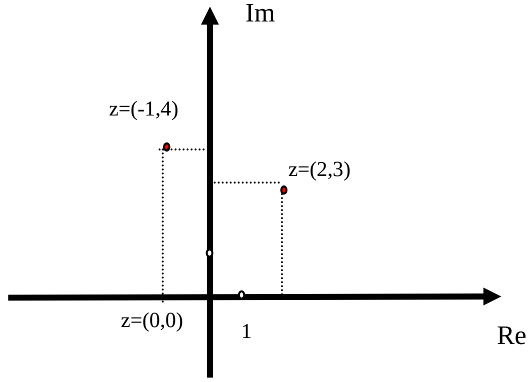


Fig 1.1

1.5 Forma binómica de los números complejos

Notemos que sin lugar a dudas este sistema representa una ampliación del sistema de números reales. En el plano cartesiano los puntos situados en el eje de abscisas se corresponden con los números complejos de la forma (a, 0). Ahora, como esos son puntos de un eje real, podemos poner en correspondencia al punto (a,0) con el número real “a”. Esta correspondencia es biunívoca entre el conjunto considerado de puntos y el conjunto de todos los números reales, ya que a cada punto (a,0) le corresponde uno y solo un número real “a”.

La aplicación a estos números de las fórmulas para la suma y el producto proporciona las igualdades

$$\boxed{\begin{array}{c}(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)\\ (a, 0) \cdot (b, 0) = (a\,b, 0),\end{array}}$$

o sea, los números (a, 0) se suman y se multiplican entre sí igual que los números reales correspondientes. Por lo tanto, el conjunto de los números de la forma (a,0) representados en el eje de abscisas considerado como un subconjunto de no se diferencia en nada, por sus propiedades algebraicas, del sistema de números reales, representado por puntos de una recta. Es por ello que no hacemos distinción entre el número complejo (a,0) y el número real “a”, o sea, que escribimos

$$\boxed{(a,0) = a.}$$

En particular, el cero es (0,0) =0 y la unidad es (1,0) =1.

Resta ver que entre los números complejos está contenida una raíz de la ecuación $x^2+1=0$. Es decir, que existe un número complejo cuyo cuadrado sea igual al número real -1.

Veamos que el número (0,1), que se corresponde con el punto situado en el eje de ordenadas a la distancia 1 del origen de coordenadas, en la dirección positiva del eje tiene por cuadrado a "-1". En efecto, multiplicando este número por sí mismo obtenemos

$$\boxed{(0,1)\,(0,1) = (-1,0) = -1.}$$

Designémoslo por la letra i, de modo que

$$\boxed{(0,1) = i \quad \text{y} \quad -1 = i^2.}$$

Utilizando los resultados anteriores tendremos que

$$\boxed{bi = (b,0)\,(0,1) = (0,b),}$$

por consiguiente, el número complejo "bi" se corresponde con punto que tiene abscisa 0 y ordenada "b" y está situado, por tanto, en el eje de ordenadas.

Sea ahora (a,b) un número complejo arbitrario. En virtud de la igualdad

$$(a,b)= (a,0)+ (0,b),$$

se tiene

$$\boxed{(a,b) = a+bi.}$$

La expresión a+bi es conocida como *forma binómica* del número complejo (a,b).

Ejemplo:

$$(3,-\sqrt{7}) =(3,0)+(0,-\sqrt{7}) =3 -i\sqrt{7} .$$

Al número complejo "i" lo llamaremos *unidad imaginaria*, y a los números de la forma "bi", *números imaginarios puros* y se representan por los puntos del plano que están sobre el eje de ordenadas. En la expresión del número complejo z en la forma z = a + bi, el número "a" es la parte real del número z, y el número "b", es la parte imaginaria.

La suma, resta, multiplicación y división de los números complejos expresados en la forma a + bi, se efectúan del modo siguiente:

$$\boxed{\begin{gathered}(a + bi) + (c+ di) = (a + c) + (b + d)\, i;\\ (a + bi) - (c + di) = (a- c) + (b - d)\, i;\\ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i;\\ \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i\, .\end{gathered}}$$

Observemos que no es necesario recordar las fórmulas anteriores, dado que estas operaciones se pueden tratar como las operaciones correspondientes entre binomios. En el caso de la suma y la diferencia se suman por separado sus partes reales y sus partes imaginarias como si fuera una suma de dos binomios, agrupando sus términos semejantes. De esa manera es

$$(a + bi) + (c+ di) = (a + c) + bi + d\,i= (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a + bi) - (c+ di) = a - c + bi - d\,i= (a+c) - (b+d)i.$$

El producto se puede obtener si multiplicamos los binomios siguiendo las reglas conocidas y teniendo en cuenta que i^2 es -1.

$$(a + bi)(c + di) = a (c + di)+bi (c + di) = a c + adi +bi c + bd i^2) = (ac - bd) + (ad + bc) i.$$

El cociente de dos binomios se realiza multiplicando y dividendo por otro monomio que resulta de cambiar de signo a uno de los términos del denominador. Siguiendo esta idea tenemos

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Ejemplos:

1. $(3+2i) + (-1+4i) = (3-1) + (2+4)i = 2 + 6i.$
2. $(2-5i) - (3+i) = (2-3) + (-5-1)i = -1 -6i.$
3. $(2+3i)(5-4i) = (2)(5) + (2)(-4i) + (3i)(5) + (3i)(-4\,i) = 10 -8i +15i- 12\,i^2$

   $=10 + 7i +12 = 22 + 7i\,.$
4. $\frac{23+i}{3+i} = \frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{70-20i}{10} = 7-2i\,.$

1.6 Forma trigonométrica de los números complejos

Para la expresión del número z en la forma z =a + bi, utilizamos las coordenadas cartesianas del punto correspondiente a este número. Sin embargo, la posición del punto en el plano queda también determinada si se conocen la distancia r del origen de coordenadas al punto y el ángulo φ que forma la dirección positiva del eje de abscisas con la dirección que va desde el origen de coordenadas hacia este punto (Figura 1.2).

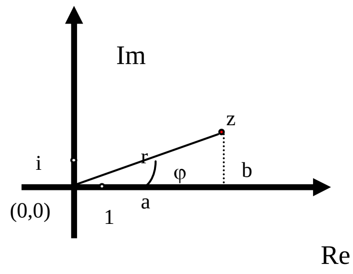


Fig.1.2

Dado que r es una distancia, será un número real y no negativo, siendo además igual a cero solamente para el origen de coordenadas, que se corresponde, como ya sabemos, con el número real 0.

A r se le llama *módulo* del número z, representándose por la notación $|z|$. Si z está situado en el eje real, su módulo r es el valor absoluto de z.

El ángulo φ se llamará *argumento* del número z y lo denotaremos como arg z. Además, φ puede tomar cualesquiera valores reales tanto positivos como negativos, teniendo que medirse los ángulos positivos en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj. Sin embargo, si los ángulos se diferencian entre sí en un número múltiplo de 2π, sus puntos correspondientes del plano coinciden.

Así, el argumento de un número complejo z tiene infinitos valores, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π; de ahí que, de la igualdad de dos números complejos, representados por sus módulos y sus argumentos, solamente se puede hacer la conclusión de que sus argumentos se diferencian en un número entero múltiplo de 2π, mientras que sus módulos son iguales.

Solamente para el número 0 el argumento no está definido; sin embargo, este número queda completamente determinado por la igualdad

$$\boxed{|0| = 0}.$$

El argumento de un número real positivo es igual a cero, el argumento de un número real negativo es π.

La parte real "a" y la parte imaginaria "b" del número complejo z = a+ib están relacionadas con el módulo y el argumento de z mediante las fórmulas

$$\boxed{a = r \cos \varphi, \quad b = r \operatorname{sen} \varphi,} \tag{1.10}$$

que se cumplen independientemente de la posición z en el plano complejo.

De aquí que

$$\boxed{r = +\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{1.11}$$

Sustituyendo "a" y "b" como en las fórmulas (1.10) para el número complejo z = a+bi tenemos

$$z = a+bi = r \cos \varphi + (r \operatorname{sen} \varphi)i,$$

o sea,

$$\boxed{z = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} \tag{1.12 }$$

Inversamente, supongamos que el número z = a+bi se expresa en la forma trigonométrica $z= r_0 (\cos \varphi_0 + i \operatorname{sen} \varphi_0)$, donde r_0 y φ_0 son números reales, siendo $r_0 \geq 0$. Entonces

$$r_0 \cos \varphi_o =a, \quad r_0 \operatorname{sen} \varphi_o = b, \quad \text{de donde} \quad r_0 = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

y, utilizando (1.11), se obtiene $r_0 = |z|$.

De las formulas (1.10), obtenemos

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi, \quad \operatorname{sen} \varphi_0 = \operatorname{sen} \varphi$$

o sea,

$$\varphi_o = \arg z.$$

Por lo tanto, todo número complejo z se expresa en la forma (1.12), donde

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z$$

y el argumento φ está definido salvo un sumando, múltiplo de 2π.

La expresión $r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, se conoce como forma trigonométrica del número z y se puede escribir abreviadamente como

$$\boxed{r \operatorname{cis} \varphi.}$$

La forma trigonométrica es de uso frecuente y de gran utilidad en algunos tipos de cálculo, como veremos posteriormente.

Ejemplos:

1. Si $z_1 = 4(\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)$, entonces $|z_1| = 4$ y $\arg z_1 = \pi/3$.
2. Si $z_2 = \cos(-9\pi/4) + i \operatorname{sen}(-9\pi/4)$, entonces $|z_2| = 1$ y $\arg z_2 = -9\pi/4$.

No están dados en forma trigonométrica los números complejos

$z_3 = (-5)(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2)$,

$z_4 = \sqrt{2}(\cos 2\pi/3 - i \operatorname{sen} 2\pi/3)$,

$z_5 = 7(\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/5)$,

a pesar de que estas expresiones se parecen a la expresión (1.12). Pues en el caso de z_3 la r que aparece es negativa, en el z_4 tenemos un signo negativo y en el z_5 los ángulos no son iguales. Se le propone al lector la búsqueda de la expresión trigonométrica de z_3, z_4 y z_5.

Veamos ahora como realizar el producto de dos números complejos dados en forma trigonométrica.

Sean $z_1 = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, $z_2 = r'(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')$.

Multiplicando los binomios tendríamos

$z_1 z_2 = [r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)][r'(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')]$.

$z_1 z_2 = r r'(\cos \varphi \cos \varphi' + i \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi')$,

o sea,

$$\boxed{z_1 z_2 = r r' [\cos(\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')].} \qquad (1.13)$$

Así hemos obtenido la expresión del producto en la forma trigonométrica, de donde $|z_1z_2| = r\,r'$, es decir, el módulo del producto de números complejos es igual al producto de los módulos de los factores

$$\boxed{|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|.} \qquad (1.14)$$

Además, $\arg(z_1z_2) = \varphi + \varphi'$. O sea, el argumento del producto de números complejos es igual a la suma de los argumentos de los factores

$$\boxed{\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.}$$

Estas reglas son válidas para cualquier número finito de factores. Así es

$$\boxed{\begin{array}{c} |z_1z_2 \cdots z_n| = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_n| \quad \text{y} \\ \arg(z_1z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n \end{array}}$$

Ejemplos:

1. Si $z_1 = 3(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$, $z_2 = 4(\cos 5\pi/3 + i \operatorname{sen} 5\pi/3)$, entonces

   $z_1 z_2 = 3(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)4(\cos 5\pi/3 + i \operatorname{sen} 5\pi/3)$

   $=12(\cos 7\pi/3 + i \operatorname{sen} 7\pi/3)$

2. Si $z_1 = 3(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$, $z_2 = 5(\cos 4\pi/5 + i \operatorname{sen} 4\pi/5)$, entonces

   $z_1 z_2 = 15(\cos(2\pi/3 + 4\pi/5) + i \operatorname{sen}(2\pi/3 + 4\pi/5))$

   $=15(\cos 22\pi/15 + i \operatorname{sen} 22\pi/15)$

3. Si $z_1=5$ y $z_2 = -6$, es decir, $z_1=5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ y $z_2 = 6(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$,

   tenemos $z_1 z_2=(5)(6)(\cos(0+\pi) + i \operatorname{sen}(0+\pi)) = 30(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -30$.

La división también se facilita con el uso de la forma trigonométrica. En efecto, sea

$z_1 = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, $z_2 = r'(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi')$, donde $z_2 \neq 0$, o sea, $r' \neq 0$.

Entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\operatorname{sen}\varphi')} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi' - i\operatorname{sen}\varphi')}{(\cos\varphi' + i\operatorname{sen}\varphi'(\cos\varphi' - i\operatorname{sen}\varphi')}$$

$$= \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi' + i\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi' - i^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'}{(\cos\varphi')^2 - i^2(\operatorname{sen}\varphi')^2}$$

$$= \frac{r}{r'}\frac{\cos\varphi\cos\varphi' + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'}{(\cos\varphi')^2 + (\operatorname{sen}\varphi')^2}.$$

De ahí que

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'}\ [\cos(\varphi - \varphi') + i\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi')]}. \qquad (1.15)$$

O sea, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r}{r'}$,por lo que el módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor.

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}. \qquad (1.16)$$

Además, $\arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi - \varphi'$, o lo que es lo mismo

$$\boxed{\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2}. \qquad (1.17)$$

El significado geométrico de las operaciones con números complejos puede verse en el plano complejo. Así, para la suma podremos utilizar la forma de par ordenado. Formamos el paralelogramo de vértices en el origen y en z_1 y z_2, entonces el restante vértice será la suma de z_1 y z_2. (Figura 1.3)

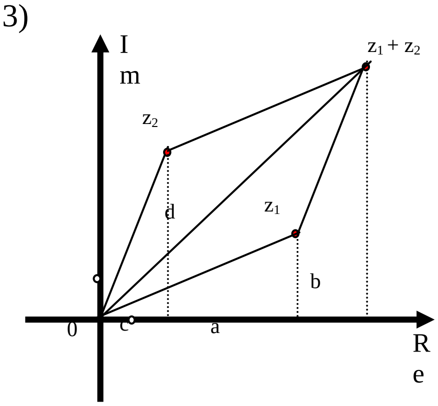


Fig 1.3

Para el producto utilizamos la forma trigonométrica (Figura 1.4).

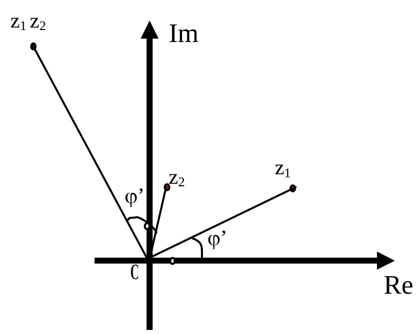


Fig. 1.4

Si $z_1 = r\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ y $z_2 = r'\,(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi')$, situamos ambos números en el plano complejo y después al ángulo φ' le sumamos φ en el sentido de las agujas del reloj. Sobre la línea obtenida buscamos rr' como indica la Figura 1.4 , obteniendo así el número z_1z_2.

1.7 Números complejos conjugados

Definición 1.6

Si $z = a+bi$ llamaremos *conjugado* de z, y lo denotaremos por $\bar{z}$ al número complejo a-ib.

Es decir,

$$\boxed{\bar{z} = a - bi} \qquad (1.18)$$

Ejemplo:

1. Si $z = 3+4i$, entonces su conjugado es $\bar{z} = 3-4i$.
2. Si $z = -2-5i$, su conjugado es $\bar{z} = -2+5i$.
3. Si $z = -6i$, entonces $\bar{z} = 6i$.
4. Si $z = 8$, entonces $\bar{z} = 8$.

Gráficamente, los números conjugados se representan por puntos simétricos entre sí con respecto al eje real (Figura 1.5).

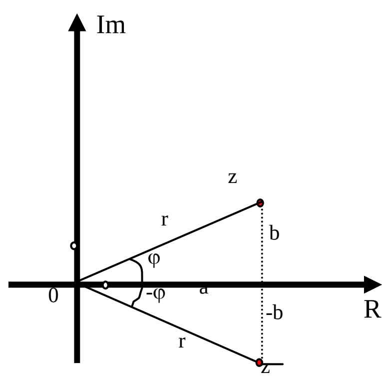


Fig. 1.5

De aquí se pueden deducir las igualdades

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z. \qquad (1.19)$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$z + \bar{z} = 2a, \qquad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2. \qquad (1.20)$$

Ejemplo:

Si $z= 3+4i$ y $\bar{z} = 3-4i$, entonces es

$z+\bar{z} = (3+4i) + (3-4i)= 6=2\cdot 3$,

$z\,\bar{z} = (3+4i)(3-4i)= 9-12i+12i-16i^2= 9+16= 3^2 +4^2$.

Es decir, que tanto la suma como el producto de dos números complejos conjugados es un número real.

Además $\boxed{\bar{z} = z \quad \text{si y solo si } z \text{ es real}}$

y $\boxed{\bar{z} = -z \quad \text{si y solo si } z \text{ es imaginario puro}}$.

Es fácil comprobar que

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}\ , \tag{1.21}$$

pues si $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, entonces

$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi)+ (c - di)= (a+c) - (b+d)i$,

como queríamos mostrar.

De manera análoga, utilizando que

$$(a - bi)\,(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)\,i,$$

resulta que el conjugado del producto de dos números es igual al producto de los conjugados de los factores, es decir

$$\boxed{\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}\ . \tag{1.22}$$

Ejemplo:

Sean $z_1= 1+5i$ y $z_2= 3-4i$, entonces es $\bar{z}_1= 1-5i$ y $\bar{z}_2= 3+4i$. De ahí que sea

$z_1+ z_2= (1+5i)+(3-4i)= 4+i$

y por tanto

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 4 - i$.

Además,

$z_1\, z_2 = (1+5i)(3-4i)= 23+11i$,

de donde

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 23 - 11i$.

Una comprobación directa muestra que se verifican también igualdades

$$\boxed{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}} \tag{1.23}$$

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}\ . \tag{1.24}$$

Se deja al lector la comprobación de las mismas.

1.8 Potencias de números complejos

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, podemos obtener todas las potencias de i. Así es $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y en general

$$\boxed{i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1 \quad i^{4k+3} = -i\ .} \tag{1.25}$$

Supongamos que queremos elevar el número complejo $z = a + bi$ al cuadrado. El número $a + bi$ puede ser tratado como un binomio y por tanto, le podemos aplicar la fórmula de Newton. Es decir,

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2$$

y como $i^2 = -1$, se tiene

$$\boxed{(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.}$$

De igual manera, para elevar un número complejo $z = a + bi$ a una potencia entera y positiva n, basta aplicar la fórmula del binomio de Newton y las igualdades (1.25) a la expresión $a + bi$.

Ejemplo:

$$(2+i)^3 = 2^3+3.2^2i+3.2.i^2+ i^3 = 8+12i+6i^2+i^3 = 8+12i- 6+i=2+13i.$$

Si el número z está dado en forma trigonométrica, entonces, siendo n entero y positivo, de aplicar la fórmula (1.13) n veces resulta

$$\boxed{[r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi]^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi),} \tag{1.26 }$$

conocida como fórmula de Moivre.

La fórmula de Moivre es también válida para los exponentes enteros negativos en virtud de la igualdad $z^{-n} = (z^{-1})^n$, por lo que es suficiente aplicarla al número z^{-1}, cuya forma trigonométrica viene dada por la fórmula (1.26).

La utilización de la fórmula de Newton es más trabajosa que la de Moivre, por lo que para elevar un número complejo a una potencia entera se utiliza esta última, de manera que basta elevar el módulo del número a esta potencia y multiplicar su argumento por el exponente de la potencia.

Ejemplos:

1) $(1 + 2i)^3 = 1^3 + 3.1^2.2i + 3.1.2^2 i^2 + 2^3 i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$

2) $[\sqrt{3} (\cos 3\pi/4 + i \text{ sen } 3\pi/4)]^5 = (\sqrt{3})^5 [(\cos 15\pi/4 + i \text{ sen } 15\pi/4)].$

3) $[4 (\cos \pi/3 + i \text{ sen } \pi/3)]^{-3} = (4)^{-3} [\cos (-3\pi/3) + i \text{ sen } (-3\pi/3)]$

$= 1/64 [\cos (-\pi) + i \text{ sen } (-\pi)]= -1/64.$

4) $i^{29} = i$.

1.9 Extracción de raíces de números complejos

Comencemos por la extracción de la raíz cuadrada del número z = a + bi. Supongamos que existe un número complejo c + di que es la raíz cuadrada de z, entonces podemos escribir

$$\sqrt{a + bi} = c + di .$$

De ahí que $(c + di)^2 = a + bi$, de donde resulta

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = a \\ 2cd = b \end{cases} . \qquad (1.27)$$

Elevando al cuadrado las igualdades (1.27), obtenemos

$$c^4 - 2c^2d^2 + d^4 = a^2$$

$$4c^2d^2 = b^2.$$

Y sumándolas,

$$c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2$$

$$(c^2 + d^2)^2 = a^2 + b^2,$$

de donde

$$c^2 + d^2 = + \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Aquí tomamos las raíces positivas porque los números c y d son reales y el primer miembro de la igualdad es positivo. De esta igualdad y de la primera de las igualdades (1.27), resulta

$$c^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) ,$$

$$d^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) .$$

Así se obtienen dos valores para "c", que se diferencian en el signo, y también dos valores para "d". Es decir,

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \qquad y \qquad d = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ .$$

Observemos que todos estos valores son reales, ya que para cualesquiera “a” y “b”, las raíces cuadradas se extraen de números positivos. Los valores obtenidos de “c” y “d” no se pueden combinar entre sí de modo arbitrario, puesto que de la segunda de las igualdades (1.27) se deduce que el signo del producto cd coincide con el signo de” “b. Por ejemplo, si b>0, tenemos las dos posibilidades

$$c = +\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ , \quad d = +\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ ,$$

ó

$$c = -\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ , \quad d = -\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ .$$

Y, si b<0, tenemos las posibilidades

$$c = +\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ , \quad d = -\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ ,$$

ó

$$c = -\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ , \quad d = +\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\ .$$

Resultando así dos combinaciones posibles de los valores de “c” y “d”, o sea, dos números de la forma c + di, que pueden servir de valores de la raíz cuadrada del número z; estos números se diferencian entre sí en el signo.

Para la obtención de la raíz resulta más cómoda la forma trigonométrica y con su aplicación se resuelve totalmente el problema.

Si queremos extraer la raíz n-ésima del número z= r (cos φ + i sen φ), podemos suponer que ésta se puede hallar y que es de la forma ρ (cos θ+ i sen θ), de donde tendríamos

$$\boxed{[\rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = r\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\ .} \qquad (1.28)$$

Utilizando la fórmula de Moivre se obtiene $\rho^n = r$, o sea, $\rho = \sqrt[n]{r}$. En cuanto al argumento se observa que el argumento del primer miembro de la igualdad (1.28) es nθ. Pero no podemos afirmar que φ sea igual a nθ, porque estos argumentos pueden diferir en un sumando que es múltiplo entero del número 2π. De ahí que sea nθ = φ+ 2kπ, donde k es entero y $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$.

Recíprocamente, para cualquier k entero, positivo o negativo, la n-ésima potencia del número

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right]$$

es igual a z.

Por lo tanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right]}. \qquad (1.29)$$

Veamos, por ejemplo, el caso n =2

$$\sqrt{z}=\sqrt{r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+\ i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right).$$

Dándole valores a k podemos obtener las diferentes raíces

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{r}$ [cos φ /2 +i sen φ/2]

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{r}$ [cos (φ+ 2π) /2 +i sen (φ+ 2π) /2]

$= \sqrt{r}$ [cos (φ/2+ π) +i sen (φ/2+ π)]

$= \sqrt{r}$ [-cos φ/2 -i sen φ/2]= √ r [cos(- φ/2) +i sen (-φ/2)]

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt{r}$ [cos (φ+ 2.2π) /2 +i sen (φ+ 2.2π) /2]

$= \sqrt{r}$ [cos (φ/2+ 2π) +i sen (φ/2+ 2π)]

$= \sqrt{r}$ [cos (φ/2) +i sen (φ/2)].

Como podemos observar, el valor que obtenemos para k=2 es el mismo que para k=0, es decir, se repiten los valores obtenidos anteriormente.

En el caso de la raíz n-ésima, siendo

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (1.30)$$

se obtienen n valores distintos de la raíz, puesto que el aumento de k en una unidad ocasiona un aumento del argumento en 2π/n.

Veamos que no obtenemos otros valores diferentes para la raíz. Supongamos para ello que k es arbitrario. Si k = nq + r,   con $0 \le r \le n-1$, entonces tenemos

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi\,.$$

Es decir, el valor del argumento para nuestro valor de k difiere del valor del argumento para k = r en un múltiplo de 2π. Por consiguiente, se obtiene el mismo valor de la raíz que resulta para k = r, incluido en el sistema (1.30).

Concluyendo, siempre podemos extraer la raíz n-ésima de un número complejo z, y obtenemos n valores distintos. Todos los valores de la raíz n-ésima están situados en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$ con centro en el origen, dividiendo a ésta en n partes iguales.

Si z es real, también tendrá n raíces n-ésimas diferentes. Entre ellas puede haber dos reales, una o ninguna, dependiendo del signo de z y de si n es par o impar.

Ejemplos:

1. Dado $z = \sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$. Se tiene

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z.$$ (ver Figura 1.6)

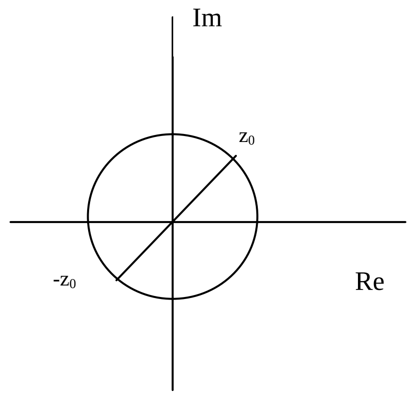


Fig 1.6

2. Si $z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = 2\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right]$, entonces es

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

z_1 = 2 (cos π + i sen π) = -2,

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

1.10 Raíces de la unidad.

Las raíces n-ésimas del número real "1" juegan un importante papel en el trabajo con números complejos y se conocen como raíces n-ésimas de la unidad. Para este número también encontraremos n raíces diferentes.

Sabemos que $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ y de la fórmula (1.29), obtenemos que todas las raíces n-ésimas de la unidad vienen dadas por la fórmula

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1. \qquad (1.31)$$

Así, los valores reales de la raíz n-ésima de la unidad los obtendremos de la fórmula (1.31) para los valores $k = 0$ y $k = n/2$, si n es par, y para $k = 0$, si n es impar.

En el plano complejo las raíces n-ésimas de la unidad están situadas en la circunferencia de radio 1 y la dividen en n arcos iguales. El punto (1,0), correspondiente al numero real "1", es uno de los puntos de división y las raíces n-ésimas de la unidad que no son reales están situadas simétricamente con respecto al eje real, es decir, son conjugadas entre sí.

Por ejemplo, si buscamos las raíces cuadradas de la unidad, encontramos los valores: 1 y -1.

La raíces cúbicas no son tan evidentes. De (1.31), tenemos

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3}\right),$$

de donde obtenemos los números

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}, \qquad \text{donde } k = 0, 1, 2,$$

Entonces es

$$\varepsilon_0 = 1 \quad \text{si} \quad k=0,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{si} \quad k=1,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{si} \quad k=2.$$

El conocimiento de estas raíces nos permite calcular las raíces cúbicas de cualquier número complejo z, pues si α es una raíz cúbica de z, tenemos $\alpha^3 = z$ y como $(\varepsilon_k)^3 = 1$, es $\alpha^3 (\varepsilon_k)^3 = z$. De ahí que $(\alpha\varepsilon_k)^3 = z$, por lo que $\alpha\varepsilon_k$ es también raíz cúbica de 1. Luego, podemos encontrar las raíces cúbicas de un número encontrando una de sus raíces y multiplicando las otras por las raíces cúbicas de la unidad.

Para la raíz cuarta encontramos los valores: 1, -1, i y -i.

Ejemplo:

Hallar las raíces cúbicas de -8.

Sabemos que una de las raíces es $z_0 = -2$, entonces las otras raíces serán:

$$z_1 = -2\varepsilon_1 = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}\ ,$$

$$z_2 = -2\varepsilon_2 = -2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = -2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}\ .$$

De igual manera, todos los valores de la raíz n-ésima del número complejo z se pueden obtener multiplicando uno de estos valores por todas las raíces n-ésimas de la unidad.

Las raíces n-ésimas de la unidad gozan de propiedades de gran utilidad. Veamos:

1) Si ε y η son raíces n-ésimas de la unidad, entonces $\varepsilon\eta$ es también una raíz n-ésima de la unidad. Es decir,

$$\boxed{\varepsilon^n = 1 \text{ y } \eta^n = 1 \Rightarrow (\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n \eta^n = 1}.$$

En efecto, si $\varepsilon^n = 1$ y $\eta^n = 1$, entonces $1 = \varepsilon^n \eta^n = (\varepsilon\eta)^n$.

2) Si ε es raíz n-ésima de la unidad, entonces ε^{-1} es también una raíz n-ésima de la unidad. O sea

$$\boxed{\varepsilon^n = 1 \Rightarrow (\varepsilon^{-1})^n = 1,}$$

lo que se obtiene de inmediato de $\varepsilon\,\varepsilon^{-1} = 1$, pues $\varepsilon^n\,(\varepsilon^{-1})^n = 1$, o sea, $(\varepsilon^{-1})^n = 1$.

3) Si ε es raíz k-ésima de la unidad y m es un múltiplo de k, entonces ε es también una raíz m-ésima de la unidad. Es decir

$$\boxed{\varepsilon^k = 1 \text{ y } m = pk \Rightarrow \varepsilon^m = 1,}$$

dado que $\varepsilon^m = \varepsilon^{pk} = (\varepsilon^k)^p = (1)^p = 1$.

Por ejemplo, como -1 es una raíz cuadrada de la unidad, entonces será también raíz cuarta, sexta, etcétera.

En el conjunto de todas las raíces n-ésimas de la unidad se encuentran raíces m-ésimas de la unidad para todos los valores m que dividen a n. Pero del hecho de que sea n>m, se desprende que existirán raíces n-ésimas de la unidad que no son raíces de la unidad de orden menor. A estas raíces les llamaremos *raíces primitivas* n-ésimas de la unidad.

Por ejemplo 1 y -1 son raíces cuartas de la unidad, que también son raíces cuadradas. Pero, la unidad también tiene raíces cuartas "i" y "-i" y estas no son raíces de la unidad de ningún orden inferior, luego son raíces cuartas primitivas.

EJERCICIOS

1. Determine parte real y parte imaginaria y sitúe en un gráfico los siguientes números complejos

   a) $z_1 = (2, 5)$ b) $z_2 = (1, 3)$ c) $z_3 = (-4, 1)$

   d) $z_4 = (3, -5)$ e) $z_5 = (-1, -2)$ f) $z_6 = (\cos 45º, \operatorname{sen} 45º)$

2. ¿Para qué valores reales de x e y se cumplen las siguientes igualdades de números complejos?

   a) $(x, y) = 4$

   b) $(x, y) = (0,4)$

   c) $(3x + y - x + 5, -1) = (8, -y)$

   d) $\left(x^2 - 3x, y - 4\right) = (-2,3)$

   e) $\left(x^2 - y, -y\right) = \left(5 - 2x, 3(1 - x)\right)$

3. ¿Para qué valores de x e y son reales los números siguientes? ¿Cuándo son imaginarios puros?

   a) $\left(x + \sqrt{4x - 1} - 5,\ 2y - 1\right)$

   b) $\left(\dfrac{1}{2x - 2} + \dfrac{3}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{4},\ y^2 + y + 1\right)$

4. Calcule y sitúe en un gráfico los puntos resultantes

   a) (3, 2)+(5, 3) b) (3, -2)+[(0, 3)+(6, -2)]

   c) (4,-2)-(2,-4) d) (-6,-2)-(-4, -3)

   e) (4, 2)(5, 2) f) $\frac{1}{4}(-2, -4)$

   g) (3, 2)[(3, -2)(1, 0)] h) $(3, 2)^{-1}$

   i) $(3, -2)^{-1}$ j) $\dfrac{(0,1)}{(1, -2)}$

   k) $\dfrac{(-4, 5)}{(2, 3)}$ l) $\dfrac{-(2,1)(5, -3)}{(1, -2)(4, 2)}$

   m) $z = (2, -1)(3,1) - (\frac{1}{2}, 4)$ n) $z = (1,1)(1, -1) - 5(2, 3)(1, -1)$

   o) $z = (1,1)^3 - (1, -1)^3$ p) $z = (\sqrt{2}, 1)^2 - (\sqrt{3}, -1)^2$

5. Sean $z_1 = (a+2, 3)$, $z_2 = (5, b-1)$. Halle los valores de a y b para que se cumpla

   a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 0$ b) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0$

   c) $\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = 0$ d) $\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 0$

6. Demuestre las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y producto de números complejos

7. ¿Es conmutativa la diferencia de números complejos? Justifique su respuesta.

8. Calcule

   a) $(3+2i)+(5+3i)$ b) $(3-2i)+3i+(6-2i)$ c) $(4-2i)-(2-4i)$

   d) $(-6-2i)-(-4-3i)$ e) $(4+2i)(5+2i)$ f) $\frac{1}{4}(-2-4i)$

   g) $(3+2i)(3-2i)$

9. Halle $\operatorname{Re}(z)$ y $\operatorname{Im}(z)$ si

   a) $z = 3 - 4i$ b) $z = \frac{2+5i}{2}$ c) $z = (2-i)(i+\sqrt{5})$

   d) $z = 12(\cos 30^\circ - i \operatorname{sen} 30^\circ)$ e) $z = (2-i)(3+i) - (\frac{1}{2} + 4i)$

   f) $z = (1+i)(1-i) - 5(2+3i)(1-i)$ g) $z = (1+i)^3 - (1-i)^3$

   h) $z = (\sqrt{2} + i)^2 - (\sqrt{3} - i)^2$

10. Halle los pares (x, y) de números reales que cumplen

    a) $x^2 - 3x + (y-4)i = -2 + 3i$ b) $x - iy = 4$

    c) $(x + 2 - i)(y - 1 - i) = 3 - 4i$ d) $x^2 - y - yi = 5 - 2x + 3(1-x)i$

    e) $(3x - i) + (y - x + 5) = 8 - iy$ f) $(x + iy)(1 - 5i) = 2 + 5i$

11. Resuelva la ecuación lineal compleja

    a) $(1-2i)x - i = 0$

    b) $(2+3i)x + (4-5i) = 0$

    c) $(3-i)(4+2i)x + (2+i)(5-3i) = 0$

12. Halle el valor real de k en la expresión $z = \frac{3-ki}{1+3i}$ para que

    a) z sea un número real

    b) z sea un número imaginario puro.

13. La diferencia entre dos números complejos es $2-2i$ y su producto es $4+2i$. Determine dichos números.

14. Represente en forma binómica

a) $(2-i)(\frac{5}{2}+\frac{i}{2})$ b) $\dfrac{(\frac{2i}{3}-5)(1-i)}{3(\cos\frac{\pi}{4}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4})}$ c) $(3-5i)^2(i-3)$

d) $\dfrac{(8+i)(2-ei)}{4i}$ e) $(3-i)^2$

15. Halle $|z|$

a) $z=3+4i$ b) $z=\mathrm{tg}\,45º+i$

c) $z=2\cos x+2i\,\mathrm{sen}\,x$ e) $z=x^2-y^2+2xyi$

16. Calcule y halle $|z|$ y $\arg(z)$

a) $z=\dfrac{4+2i}{2+i}$ b) $z=\dfrac{10+10i}{4-2i}$

c) $z=\dfrac{(1+i)(2+2i)}{3+3i}$ d) $z=\dfrac{11-2i}{2i-1}+\dfrac{7+i}{1-i}$

e) $z=\dfrac{(3+5i)(2-3i)}{1+i}$ f) $z=\dfrac{3(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2})}{15(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4})}$

17. Demuestre que

a) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

18. Exprese en forma trigonométrica

a) $z=-2$ b) $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

c) $z=1+i\sqrt{3}$ d) $z=-2+2i\sqrt{3}$

e) $z=-5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$ f) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

g) $z=7\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

19. Exprese en forma binómica cada uno de los siguientes números complejos

a) $z = \operatorname{cis} 90^{\circ}$

b) $z = 2\operatorname{cis} 180^{\circ}$

c) $z = 4(\cos\pi + i\,\operatorname{sen}\pi)$

d) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\,\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

e) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

20. Halle los valores de ρ y φ en

a) $\rho\operatorname{cis}\varphi = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

b) $\rho\operatorname{cis}\varphi = \dfrac{(2-i)(1+i)}{1-3i} + \dfrac{\sqrt{3}-4i}{4}$

21. Representa gráficamente los siguientes números complejos, sin expresarlos en forma binómica

a) $A = 2\operatorname{cis} 0^{\circ}$

b) $A = 4\operatorname{cis} 180^{\circ}$

c) $C = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

d) $D = 3(\cos 30^{\circ} + i\,\operatorname{sen} 30^{\circ})$

22. Calcule

a) $(\cos 60^{\circ} + i\,\operatorname{sen} 60^{\circ})\cdot 4(\cos 30^{\circ} + i\,\operatorname{sen} 30^{\circ})$

b) $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\left(\frac{7}{10}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\frac{5}{21}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\dfrac{8(\cos 60^{\circ} + i\,\operatorname{sen} 60^{\circ})}{2(\cos 45^{\circ} + i\,\operatorname{sen} 45^{\circ})}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{cis} 30^{\circ}}{\sqrt{5}\operatorname{cis}(-120^{\circ})}$

f) $\dfrac{4\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}}{2\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} \div \dfrac{24\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}}{6\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

23. Halle z y $\bar{z}$ si

a) $z = \frac{3}{2} - \sqrt{2}i$

b) $z = 2 - i$

c) $z = (2-i) + (2+i)$

d) $z = (1+i)^4$

e) $z = (1+2i)^3 + i^{25}$

24. Demuestre que

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

c) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{z^2}{|z|^2}$

25. ¿Para qué valores reales de x e y son conjugados los números $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$, $z_2 = 8y^2 + 20i^7$?

26. Determine el número complejo z que satisface

a) $z^2 = \bar{z}$ b) $z^2 = -\bar{z}$

27. Calcule

a) $\sqrt{i}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{1}$ d) $\sqrt{2\sqrt{2}(1+i)}$

28. Determine las coordenadas de los otros dos vértices de un triángulo rectángulo con ortocentro en el origen de coordenadas y un vértice en el punto (1, 0).

29. Determine las coordenadas de un hexágono regular con un vértice en el punto (1, 0) y cuya diagonal más larga mide 1.

30. Represente gráficamente cada uno de los siguientes conjuntos

a) $\{z \in C;\ 2 < |z| < 4\}$ b) $\{z \in C;\ |z+1| \le 3\}$

c) $\left\{z \in C;\ |z| > \dfrac{2}{3}\right\}$ d) $\{z \in C;\ |z-i| > 2\}$

e) $\{z \in C;\ -1 \le \mathrm{Re}(z) < 5\}$ f) $\{z \in C;\ \mathrm{Im}(z) = 3\}$

g) $\{z \in C;\ \mathrm{Im}(z) \ge -1\}$

31. Escriba y calcule en forma trigonométrica

a) $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$ b) $z = \dfrac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$

c) $z = \dfrac{2i(\sqrt{3}-i)}{(1+i)(-\sqrt{3}-i)}$ d) $z = \dfrac{(1-i)(9+3\sqrt{3}i)}{(4+4i)5i}$

32. Halle los números reales x e y tales que

$$\frac{\dfrac{x+i}{2i} + \dfrac{2-yi}{3+i}}{i(2-i)} = 4 + 3i.$$

33. Demuestre que

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+i}{1-i\sqrt{1+x^2}} = i, \quad x \in$ b) $\dfrac{(1+i)^2}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(1-i)^2}$

34. Resuelva el sistema de ecuaciones complejas

a) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = -1 - i \\ 3z_1 + 2z_2 = 2 - 3i \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(z_1 - z_2) + z_1 = 1 - 2i \\ z_2 - z_1 - 3z_1 = 2 - 4i \end{cases}$

35. Explique el significado geométrico de las transformaciones siguientes, donde al número complejo z se le hace corresponder el número complejo z'

a) $z' = z - 2i$ b) $z' = z - 4$

c) $z' = zi$ d) $z' = -zi$

36. (El tesoro del pirata) Un joven encontró un pergamino que describía el enterramiento del tesoro de un pirata en una isla desierta. El pergamino estaba en muy buen estado y en él, además de la posición geográfica de la isla, decía:

"En la isla hay una palma, un cedro y una horca. Camina desde la horca hacia la palma contando los pasos, al llegar a la palma gira 90º a la derecha. Camina el mismo número de pasos en esa nueva dirección y clava una estaca. Regresa a la horca, camina hacia el cedro contando los pasos, al legar al cedro gira 90º a la izquierda, camina el mismo número de pasos en esa nueva dirección y clava una estaca. El tesoro está en el centro del camino recto entre las dos estacas."

El joven decidió visitar la isla, pero al llegar descubrió que la horca había desaparecido y sólo quedaban el cedro y la palma, de modo que no pudo hallar el tesoro y regresó a casa abatido.

Lo triste de esta historia es que con la ayuda de los números complejos hubiese sido muy fácil hallar el tesoro. Explique cómo hacerlo.

37. Sea la ecuación $z^3 - az + 4 = 0$ (a, z son números complejos). Si una de sus raíces es $z = 1 - i$, halle módulo y argumento del número $\omega = a + 2i$.

38. Si $z = \dfrac{i-5}{2}$, halle módulo y argumento del número $\omega = \dfrac{1}{z+2} + i^3$.

39. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. Halle los números, su producto y su cociente.

40. El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es igual a 5 y el módulo del dividendo es el duplo del módulo del divisor. Halle los números.

41. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

a) $z^2 + 9 = 0$ b) $z^2 - 3z = 0$ c) $z^2 + z + 1 = 0$

d) $z^3 = 8iz$ e) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$

TEMA II

LOS POLINOMIOS

2.1 Polinomios

Ya son conocidas de la enseñanza media las ecuaciones de primero y segundo grado y se han aprendido a resolver. En el capítulo precedente vimos además que las ecuaciones de segundo grado, que no tenían solución cuando trabajábamos en el sistema de números reales, las tienen siempre cuando trabajamos con el sistema de números complejos. Pero estas no son las únicas ecuaciones que se nos presentarán en nuestro trabajo diario, existen también ecuaciones de grado superior. La forma general de una ecuación de n-ésimo grado es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (2.1)$$

donde n es cierto número entero positivo y los coeficientes a_o, $a_{1,}$ ....a_{n-1}, a_n son números arbitrarios, reales o complejos, y el coeficiente a_n es diferente de cero.

Ejemplos

1. $4x^5+3x^2+(8+3i)x-1=0$ es una ecuación de quinto grado.
2. $x^{16}-7=0$ es una ecuación del grado 16.

Resolver la ecuación (2.1) significa, al igual que en los casos de primero y segundo grado, hallar valores numéricos para la incógnita x que la satisfagan, es decir, que al sustituirlos en lugar de la incógnita, reduzcan a cero el primer miembro de la ecuación (2.1), convirtiéndola en la identidad 0=0.

Ahora, para intentar resolver una ecuación de este tipo, debemos conocer bien el primer miembro de la misma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{- - -} + a_1 x + a_0\,, \qquad (2.2)$$

que nombraremos polinomio en la indeterminada x.

Definición 2.1

Llamaremos *polinomio en una indeterminada con coeficientes en* (= ó) a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{- - -} + a_1 x + a_0,$$

donde n es un número natural y a_i pertenece a (i =1.....n).

Para designar los polinomios utilizaremos las notaciones: p (x), q (x), h (x), etcétera.

A "*x*" se le denomina *indeterminada* del polinomio y a los a_i se les llama *coeficientes.* Así, un polinomio es una suma de potencias no negativas de la indeterminada x, tomadas con ciertos coeficientes numéricos a_i.

A a_0 se le conoce como término *independiente*, al mayor de los subíndices i tales que $a_i \neq 0$ se le denomina *grado del polinomio*. Al grado del polinomio p(x) lo denotaremos por grad p(x).

El polinomio que tiene todos sus coeficientes nulos se conoce como *polinomio nulo* y como en él todos los coeficientes son cero, diremos que no tiene grado y lo denotaremos por 0.

Si p(x) es de grado n, al coeficiente de x^n se le denomina *coeficiente principal* y si este coeficiente es 1, se dice que el polinomio es *mónico***.** No son polinomios las expresiones que contengan la indeterminada x con exponentes negativos o fraccionarios.

Ejemplos:

1. $x^5 + x^3 - 5x^2 + 4x + 8$ es un polinomio de grado 5, mónico, término independiente 8.
2. $(2+i)x^3 + 3x^2 + ix - (3+5i)$ es un polinomio de grado 3, coeficiente principal (2+i), término independiente 3+5i.
3. $q(x) = x^6 - (2-3i)x^4 + (5+i)x^2 + 2$ tiene grado 6 y es mónico, pues el coeficiente principal es 1. Los coeficientes de x^5, x^3 y de x son cero, por eso no aparecen esos términos en el polinomio.

4. $x^2 - 3/x + 4$,
5. $6x^{-3} + x^{--2} + x^{-1} + 6 + 7x + 2x^2$,
6. $5x^{1/2} + x$.

Estos 3 últimos NO son polinomios dado que las potencias de x que aparecen son negativas o fraccionarias. En el 5 tenemos x^{-3}, x^{-2} y x^{-1} y en el ejemplo 6 tenemos $x^{1/2}$.

Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en lo denotaremos por [x].

2.2 Igualdad de polinomios

Definición 2.2

Dos polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

se dicen *iguales* (o *idénticamente iguales*), y lo denotaremos por $p(x) = q(x)$, si:

$$m=n, \quad a_i= b_i \text{ para todo i tal que } 0\le i \le n,$$

ó

$$m<n, \quad a_i= b_i \text{ para todo i tal que } 0 \le i \le m,$$

$$a_i= 0 \text{ para todo i tal que } m+1 \le i \le n,$$

ó

$$n<m \quad a_i= b_i \text{ para todo i tal que } 0 \le i \le n,$$

$$b_i= 0 \text{ para todo i tal que } n+1 \le i \le m.$$

Ejemplo:

Dados los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ tales que

$p(x)= x^5+3x^4+x^2-x-1$

$q(x)= x^5+3x^4+x^3-x-1$,

$h(x)= 0x^6 +x^5+3x^4+x^2-x-1$,

se cumple que $p(x)=h(x)$, pero $p(x)\neq q(x)$ y $h(x)\neq q(x)$.

En particular, un polinomio no puede ser idéntico al polinomio nulo, si al menos uno de sus coeficientes es diferente de cero.

Observación importante

Esta igualdad que hemos definido para los polinomios se debe entender como una identidad de los mismos. Es decir, una igualdad que se cumple para todos los valores de la indeterminada x.

Por supuesto, para cualquier número natural n existen polinomios de grado n. Examinando todos los polinomios posibles, además de los polinomios de primer grado, segundo grado, tercer grado etc., nos encontraremos con polinomios de grado cero, es decir, con números diferentes de cero.

Ejemplos:

1. 7
2. 2+3i

son ambos polinomio de grado 0, pues sólo tienen el término independiente distinto de cero.

Veamos cómo son las operaciones con polinomios.

2.3 Suma de polinomios

Definición 2.3

Sean p (x) y q (x) los polinomios con coeficientes en , tales que:
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_{\mathbf{n}} \neq 0$
y $q(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + ... + b_1 x + b_0$, $b_{\mathbf{s}} \neq 0$, donde $n \geq s$,
se llamará *suma* de p(x) y q(x) y lo denotaremos por p(x) +q(x) al polinomio que se obtiene sumando los coeficientes de las potencias iguales de la indeterminada en las expresiones de p(x) y q (x).

Es decir:

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)\, x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + ... + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0), \qquad (2.3)$$

donde, para $n > s$, se supone que los coeficientes $b_{s+!}$, b_{s+2}, ... ,b_n son iguales a cero. El grado de la suma será igual a n, si n es mayor que s; pero para n = s, puede ocurrir que éste sea menor que n, precisamente cuando $b_n = -a_n$.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = 3x^2 + 2x + 1 \\ q(x) = 5x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) + q(x) = 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2 .$$

2.3.1 Propiedades de la suma de polinomios

1. La suma de dos polinomios con coeficientes en es un nuevo polinomio con coeficientes en .

   Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición.

2. La suma es asociativa, o sea cualesquiera sean p(x), q (x) y r(x) en [x] se cumple que

$$\boxed{[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)].}$$

Ejemplo:

Sean $p(x) = 2x^3+x+4$, $q(x) = x^2+x+3$, y $h(x) = x^4+3x^3+3x^2$, entonces

$$p(x)+q(x) = 2x^3+x^2+2x+7$$

$$[p(x) + q(x)] + h(x) = x^4+4x^3+4x^2+2x+7.$$

Si sumamos primero q(x) y h(x) tenemos que

$$q(x)+ h(x)=x^4+2x^3+4x^2+x+3,$$

$$p(x) +[q(x)+ h(x)] = x^4+4x^3+4x^2+2x+7.$$

Como vemos, el resultado es el mismo.

3. La suma es conmutativa, es decir, cualesquiera sean p(x), q (x) en [x] se cumple que

$$\boxed{p(x) +q (x) = q (x) +p(x).}$$

Ejemplo:

Sean $p(x)= 2x^3+x+4$ y $q(x)= x^2+x+3$, entonces

$$p(x)+q(x)= 2x^3+x^2+2x+7.$$

Si sumamos q(x) con p(x) tenemos

$$q(x)+p(x)= 2x^3+x^2+2x+7,$$

que es el mismo resultado

Se dejan como ejercicios las demostraciones de estas dos propiedades.

4. La suma posee un elemento neutro que es el polinomio nulo. Es decir, cualquiera sea p(x) en [x] se tiene

$$\boxed{p(x) +0 = 0+p (x) = p(x).}$$

Ejemplo:

Sea $p(x) = 2x^3+x^2+2x+7$, entonces

$$p(x)+0= (2+0)x^3+(1+0)x^2+(2+0)x+(7+0)= 2x^3+x^2+2x+7.$$

5. Para cada polinomio p(x) en [x] se puede encontrar otro polinomio en [x] que lo denotaremos por -p(x) tal que p(x) + [-p(x)] =0.

Así, si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ - - - + a_1 x + a_0$, entonces

$$\boxed{-p(x) = -a_o - a_l x -.....- a_{n-1}x^{n-1} - a_n x^n.}$$

Estas dos últimas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de suma.

2.4 Producto de polinomios

Definición 2.4

Llamaremos *producto* de los polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \text{- - -} + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

y $$q(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \text{- - -} + b_1 x + b_0, \qquad b_s \neq 0,$$ donde $n \geq s$,

y lo denotamos por p(x)q(x) al polinomio

$$p(x)q(x) = d_{n+s}\, x^{n+s} + d_{n+s-1}x^{n+s-1} + \quad + d_l x + d_o,$$

cuyos coeficientes están dados por

$$d_i = \sum_{k+l-i} a_j b_l \qquad i = 0,1. \ldots n+s-1, n+s.$$

(2.4)

O sea, el coeficiente d_i se obtiene de sumar todos los productos de aquellos coeficientes de los polinomios p (x) y q (x), tales que la suma de sus índices es igual a i. En particular,

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ \ldots \ , \ d_{n+s}. = a_n b_s.$$

De la última igualdad resulta la desigualdad $d_{n+s} \neq 0$. Por consiguiente, el grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de sus grados.

De aquí se deduce que el producto de polinomios no nulos nunca dará como resultado el polinomio nulo.

Ejemplo:

Sean

$$p(x) = 3x + 2x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = 1 + 3x + 4x^3$$

entonces es

$$p(x)q(x) = d_5x^5 + d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_l x + d_o ,$$

donde

$d_0 = 1\cdot 0 = 0$, $d_1 = 0\cdot3+1\cdot3=3$, $d_2 = 0\cdot0+3\cdot3+2\cdot1=11$, $d_3 = 0\cdot4+3\cdot2=6$

$d_4 = 3\cdot4 = 12$, $d_5 = 2\cdot4 = 8$.

De ahí que

$$p(x) \cdot q(x) = 8x^5 + 12x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 3x .$$

2.4.1 Propiedades del producto

1. El producto de dos polinomios en [x] es un nuevo polinomio en [x]. Esta propiedad se deduce de la propia definición de producto.
2. El producto de polinomios es conmutativo. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la propiedad conmutativa para el producto de los números y de que en la definición del producto de polinomios, los coeficientes de ambos factores p(x) y q(x) se empleen de un modo equivalente.

Así pues:

$$\boxed{p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x).}$$

3. El producto de polinomios es asociativo. Si tenemos los polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots. + a_1 x + a_0, \qquad a_{\mathbf{n}} \neq 0$$

$$q(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0, \qquad b_{\mathbf{s}} \neq 0,$$

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1}x^{t-1} + \ldots\ldots.. + c_l x + c_{o,} \qquad c_t \neq 0.$$

entonces el coeficiente de $x^í$, (i=0, 1,.....,n + s + t) del polinomio [p(x)q(x)]·h(x) será el número

$$\sum_{j+m=i}\left(\sum_{k+l=j} a_k b_l\right)c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m\,,$$

mientras que en el producto p(x)·[q(x)h(x)], será el número

$$\sum_{j+m=i} a_k\left(\sum_{k+l=j} b_l\right)c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m\,.$$

Por lo que ambos polinomios resultantes tendrán los mismos coeficientes y, por tanto, serán iguales. Es decir

$$\boxed{[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)].}$$

4. El polinomio mónico de grado cero, es decir, el “1”, es la unidad en el producto de los polinomios.

En otras palabras el neutro para el producto es el polinomio constante “1”. De donde

$$\boxed{p(x) \cdot 1 = p(x) \qquad \text{para todo polinomio } p(x).}$$

5. El producto es distributivo respecto a la suma .

Es decir:

$$\boxed{[p(x)+q(x)]\cdot h(x)= p(x)\cdot h(x)+q(x)\cdot h(x).}$$

En efecto, si tenemos p(x), q(x) y h(x) dados como en la propiedad 3, los coeficientes del producto de p(x)+q(x) por h(x) serán $\sum_{k+l=j}(a_k+b_k)c_l$, pero como los coeficientes de los polinomios son números, tenemos que

$$\sum_{k+l=j}(a_k+b_k)c_l=\sum_{k+l=j}a_kc_l+\sum_{k+l=j}b_kc_l$$

y $\sum_{k+l=j}a_kc_l$ y $\sum_{k+l=j}b_kc_l$, son los coeficientes de los productos de p(x) por h(x) y q(x) por h(x) respectivamente, de donde se obtiene la igualdad planteada.

Observemos que, teniendo en cuenta las propiedades del producto y de la suma, podemos operar disponiendo los coeficientes en una tabla, tal y como hacemos con los números reales. Tomemos los polinomios $p(x)=4x^3+3x+1$ y $q(x)=2x^2+3x$, entonces

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 4x^3 & & +3x & +1\\
 & & & 2x^2 & +3x & \\
\hline
8x^5 & & +6x^3 & +2x^2 & & \\
 & 12x^4 & & +9x^2 & +3x & \\
\hline
8x^5 & +12x^4 & +6x^3 & +11x^2 & +3x &
\end{array}$$

Observe que $2x^2(4x^3+3x+1)=8x^5+6x^3+2x^2$ y que $3x(4x^3+3x+1)=12x^4+9x^2+3x$.

Cabe preguntarnos si para cada polinomio existe un polinomio inverso, tal y como sucede con los números reales.

Supongamos que sí existe. Es decir, que dado un polinomio $p(x)\neq 0$, siempre podemos encontrar un polinomio q(x), tal que $p(x)\cdot q(x)=1$. En este caso tendríamos que grad p(x)+ grad q(x) =0 y como ambos son números naturales, tenemos que p(x) es un polinomio de grado cero. Es decir que solamente los polinomios constantes no nulos tienen inverso.

De aquí se deduce al dividir dos polinomios no siempre encontramos otro polinomio. Es decir, dados p(x) y q(x) en [x], $q(x)\neq 0$ no implica que $\frac{p(x)}{q(x)}\in \mathbb{K}[x]$. Sin embargo, al igual que para los números enteros, podemos encontrar un algoritmo para la división con resto.

2.5 Algoritmo de la división de polinomios

Teorema

Cualesquiera sean los polinomios a(x) y b (x), es posible encontrar dos polinomios q(x) y r (x), tales que: $$a(x) = b(x)\, q(x) + r(x), \qquad (2.5)$$ donde el grado de r (x) es menor que el de b (x), o bien, r (x)=0. Los polinomios q(x) y r (x) que satisfacen esta condición se determinan de manera única.

Supongamos que n y s son los grados respectivos de los polinomios a(x) y b(x). Si $n<s$, entonces podemos tomar $q(x) = 0$, $r(x) = a(x)$ y se verificaría (2.5).

Supongamos entonces que $n \geq s$ y escribamos a(x) y b(x) en la forma

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{- - -} + a_1 x + a_0 \quad \text{con} \quad a_n \neq 0,$$

$$b(x) = b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \text{- - -} + b_1 x + b_0 \quad \text{con} \quad b_s \neq 0.$$

Llamemos $r_1(x)$ a la diferencia

$$r_1(x) = a(x) - \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} b(x). \qquad (2.6)$$

El grado de $r_1(x)$ es menor que n, dado que $x^{n-s}\, x^s = x^n$ y $b_s \frac{a_n}{b_s} = a_n$, por lo que al realizar la diferencia el término en x^n tiene coeficiente 0, es decir, no aparece en $r_1(x)$.

Designemos el grado de $r_1(x)$ por n_1, y el coeficiente principal del polinomio $r_1(x)$, por r_{1,n_1}. Si n_1 es menor que s, queda demostrado el teorema, pues tomamos el cociente igual cero y el resto igual a r_1. Si $n_1 \geq s$, tomamos la diferencia

$$r_1(x) - \frac{r_{1,n_1}}{b_s} x^{n_1 - s} b(x) = r_2(x). \qquad (2.7)$$

Supongamos que el grado de $r_2(x)$ es n_2 y el coeficiente principal es r_{2,n_2}. Así seguimos el proceso escribiendo ahora

$$r_2(x) - \frac{r_{2,n_2}}{b_s} x^{n_2 - s} b(x) = r_3(x). \qquad (2.8)$$

De esa misma manera vamos obteniendo polinomios r_j

$$r_j(x) = r_{j-1}(x) - \frac{r_{j-1,n_{k-1}}}{b_s} x^{n_{k-1} - s} b(x) \qquad (2.9)$$

cuyos grados van decreciendo ($n>n_1 > n_2 > ... >0$) y así, repitiendo el proceso un número finito de veces, vamos obteniendo las r(x) de grado n_k, menor que s, con lo que se termina el proceso. Si sumamos las igualdades (2.6), a la (2.9) (con todas las correspondientes a los índices j intermedios), se obtiene

$$r(x)-\left(\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}+\frac{r_{1,n_1}}{b_s}x^{n_1-s}+....+\frac{r_{j-1,n_{j-1}}}{b_s}x^{n_{j-1}-s}\right)b(x)=r_j(x)\,,$$

de donde los polinomios

$$q(x)=\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}+\frac{r_{1,n_1}}{b_s}x^{n_1-s}+....+\frac{r_{j-1,nj-1}}{b_s}x^{n_{j-1}-s}\,,$$

con r (x) = r_j (x) de grado menor que el de b(x) satisfacen la igualdad (2.5).

Veamos ahora que estos polinomios son únicos para a(x) y b(x).

Supongamos que existen otros dos polinomios q*(x) y r*(x) que satisfacen a la condición

$$a(x) = b(x)\, q^*(x) + r^*(x), \qquad (2.10)$$

siendo r*(x) de menor grado que b(x).

Restando miembro a miembro las igualdades (2.5) y (2.10) tenemos

$$0=b(x)\,[q(x) - q^*(x)] - r^*(x) + r(x),$$

o lo que es lo mismo

$$b(x)\,[q(x) - q^*(x)] = r^*(x) - r(x).$$

El grado de r*(x) -r(x) es menor que el de b(x), mientras que si q(x) - q*(x) ≠ 0, el grado del polinomio del primer miembro es mayor o igual al grado de b (x). Por lo que q(x) - q*(x) = 0, o sea, q(x) =q*(x), de donde y r(x)= r*(x), es decir q(x) y r(x) son únicos para a(x) y b(x).

Al polinomio q(x) se le llama *cociente* de la división de a (x) por b (x) y a r (x) se le dice *resto*.

Ejemplo: Sean

$a(x) = 9x^4 - 28x^2 + 5x - 6$

$b(x) = 3x^2 + 5x - 6.$

Podemos disponer los polinomios como estamos acostumbrados en e ir realizando las divisiones

$$
\begin{array}{llll}
9x^4 & & - 28x^2 + 5x - 3 & \big|\ \underline{3x^2 + 5x - 6} \\
9x^4 & -15x^3 & + 18x^2 & \quad 3x^2 - 5x + 5 \\
\hline
 & -15x^3 & - 10x^2 + 5x - & \\
 & 15x^3 & + 25x^2 - 30x & \\
\hline
 & & 15x^2 - 25x - 3 & \\
 & & -15x^2 - 25x + 30 & \\
\hline
 & & \quad -50x + 27 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Así, al dividir a(x) entre b(x) obtenemos el cociente

$$q(x) = 3x^2 - 5x+5$$

y el resto

$$r(x) = -50x + 27$$

y podemos escribir

$$9x^4 - 28x^2 + 5x - 3 = (3x^2 + 5x-6)(3x^2 - 5x+5)+(-50x + 27).$$

2.6 Divisibilidad de Polinomios

Definición 2.5

> Dados los polinomios a(x) y b(x), no nulos con coeficientes reales o complejos, diremos que el polinomio a(x) *es divisible por* b(x) [o que a(x) *es múltiplo de* b(x) o que b(x) *es divisor de* a(x)]. Si el resto de la división de a(x) por b(x) es el polinomio nulo.

Es decir:

> a(x) es divisible por b(x) si y solo si existe un polinomio q(x) tal que
>
> a(x) =q(x)b(x).

Ejemplos:

1. En [x] el polinomio $3x^2 -2x-1$ es divisible por x-1, pues $3x^2 -2x-1= (x-1)(3x+1)$, pero no es divisible por x-2, pues $3x^2 -2x-1 = (x-2)(3x+4)+7$.
2. En [x] el polinomio $p(x) = x^2+1$ es divisible por x-i,

$$
\begin{array}{rl|l}
x^2 & +1 & x-i \\ \cline{3-3}
-x^2 - ix & & x-i \\ \cline{1-1}
 -ix & +1 & \\
 ix & -1 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

dado que el resto es el polinomio nulo.

2.6.1 Propiedades de la divisibilidad de polinomios

1. Si $a(x)$ es divisible por $b(x)$ y $b(x)$ es divisible por $c(x)$, entonces $a(x)$ es divisible por $c(x)$.

   En efecto, si $a(x) = b(x)q_1(x)$ y $b(x)=c(x)q_2(x)$, tenemos que $a(x) = c(x)q(x)$, donde $q(x)=[q_2(x)\, q_1(x)]$.

Ejemplo:

$a(x) = x^3-x$ es divisible por $b(x) = x^2-1$, pues

$$a(x)= x\,(x^2-1)$$

y $b(x)$ es a su vez es divisible por $x-1$, pues

$$b(x)=(x-1)(x+1),$$

luego, $a(x)$ es divisible por $x-1$, o sea,

$$a(x)= x\,(x-1)\,(x+1).$$

2. Si un polinomio $c(x)$ divide a $a(x)$ y $b(x)$, también divide a

$$a(x)+b(x) \quad \text{y} \quad a(x)-b(x).$$

En efecto, tomando las igualdades

$$a(x) = c(x)\, q_1(x)$$

$$b(x) = c(x)\, q_2(x),$$

sumando o restando resulta

$$a(x) \pm b(x) = c(x)\,[q_1(x) \pm q_2(x)].$$

Ejemplo:

Sean

$$a(x)= x^3-x \quad y \quad b(x) = x^2+x ,$$

ambos polinomios son divisibles por x, pues

$$a(x)+b(x)= x^3 -x +x^2 +x= x^3 +x^2 = x (x^2-x),$$

$$a(x)-b(x)= x^3 -x -x^2 -x = x^3 -x^2 -2x = x (x^2 -x-2) .$$

3. Si el polinomio a(x) es divisible por un polinomio c(x), entonces el producto de a(x) por cualquier otro polinomio b(x) también es divisible por c(x).

   En efecto, si $a(x) = c(x)q_1(x)$, se tiene

$$a(x)b(x) = [c(x)q_1(x)]\, b(x) = c(x)[q_1(x)\, b(x)].$$

Ejemplo:

Sea $a(x)= x^3-x$, el cual es divisible por x. Si multiplicamos a(x) por cualquier otro polinomio b(x), nos quedaría

$$a(x)b(x)= (x^3 - x)b(x)= x (x^2 - 1)\, b(x),$$

que es divisible por x.

4. Como consecuencia de las tres propiedades anteriores, si tenemos una colección de polinomios $p_1(x), p_2(x), \ldots p_k(x)$ que son divisibles por un polinomio a(x), entonces el polinomio $p_1(x)\, b_1(x)+p_2(x)\, b_2(x)+\ldots+p_k(x)\, b_k(x)$ es también divisible por a(x) cualesquiera sean los polinomios $b_1(x), b_2(x)\ldots\ldots\ldots b_k(x)$.

5. Los polinomios constantes no nulos dividen a todo polinomio a(x).

   Se ve claramente que si $a(x)= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ - - - + a_1 x + a_0$ y "c" es un polinomio de grado cero, es decir un número cualquiera diferente de cero, entonces todos los coeficientes de a(x) se pueden dividir por "c" y podemos escribir

$$a(x) = c\left(\frac{a_n}{c}x^n + \frac{a_{n=1}}{c}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c}x + \frac{a_0}{c}\right),$$

   donde se observa que el resto de la división de a(x) por "c" es el nulo, luego a(x) es divisible por "c".

Ejemplo:

El polinomio $a(x)= 2x^3+4x-1$ es divisible por cualquier número $c\neq 0$, digamos $c=5$, ya que

$$a(x) = 5\left(\frac{2}{5}x^3 + \frac{4}{5}x - 1\right).$$

6. Los polinomios $ca(x)$ con $c\neq 0$, y solamente éstos, son los divisores del polinomio $a(x)$, con el mismo grado que $a(x)$.

   Tenemos que, como c es una constante no nula, podemos multiplicar y dividir por ella al polinomio $a(x)$. Es decir

   $$a(x) = c^{-1}[ca(x)],$$

   luego al dividir $a(x)$ por $ca(x)$, el resto es cero, por lo que $a(x)$ es divisible por $ca(x)$ y ambos tienen el mismo grado.

   Supongamos ahora que $b(x)$ divide a $a(x)$ y que son del mismo grado. Entonces como $a(x)=q(x)b(x)$, el grado de $q(x)$ tiene que ser igual a cero, es decir, $q(x)$ es un polinomio constante "c". De ahí que sea $a(x) = c\, b(x)$, $c \neq 0$, de donde $b(x) = c^{-1}a(x)$. Es decir, $b(x)$ es el producto de una constante por $a(x)$.

7. Dos polinomios $a(x)$ y $b(x)$ se dividen mutuamente si y solo si existe una constante no nula "c" tal que $b(x) = ca(x)$.

   En efecto, si $b(x)$ es divisible por $a(x)$ entonces existe un polinomio $q(x)$ tal que

   $$b(x)=q(x)a(x).$$

   Pero si $a(x)$ es divisible por $b(x)$, entonces existe un polinomio $q'(x)$ tal que

   $$a(x)=q'(x)b(x).$$

   De estas dos igualdades tenemos que

   $$b(x)=q(x)q'(x)b(x).$$

   De ahí que el polinomio $q(x)q'(x)$ tiene grado cero, es decir, es una constante, por lo que $b(x) =ca(x)$ (de manera análoga se pudo llegar a que $a(x)=d\, b(x)$).

   Ahora, si existe una constante no nula c tal que $b(x) = ca(x)$, vemos que $b(x)$ es divisible por $a(x)$ y además, podemos multiplicar por $1/c$ y obtenemos que $(1/c)b(x)=a(x)$, luego $b(x)$ divide al polinomio $a(x)$.

2.7 Máximo común divisor

Al igual que en el caso de los números, en ocasiones necesitamos calcular un común divisor de varios polinomios y que éste sea el mayor posible, y al igual que en ese caso le llamaremos máximo común divisor. Veamos:

Definición 2.6

> Dados unos polinomios arbitrarios $a(x)$ y $b(x)$. Llamaremos *divisor común* de $a(x)$ y $b(x)$ a todo polinomio $d(x)$ que sea divisor a la vez de $a(x)$ y de $b(x)$.

Ya sabemos que todo polinomio de grado cero es divisor de $a(x)$ y de $b(x)$ y, por tanto, divisor común de ambos.

Si $a(x)$ y $b(x)$ tienen solamente por divisores comunes a los polinomios de grado cero, se dice que son primos entre sí.

Ejemplo:

Los polinomios $a(x)=x^3-x$ y $b(x)=x^3-x^2-2x$ tienen como divisores comunes a todos los polinomios constantes, pero en este caso no son primos entre sí, pues tienen también a x y a $x-1$ como divisores comunes.

Definición 2.7

> Llamaremos *máximo común divisor* de los polinomios $a(x)$ y $b(x)$, diferentes de cero, al polinomio $d(x)$ tal que:
>
> - $d(x)$ es divisor común a ambos,
> - $d(x)$ es mónico,
> - todo otro divisor común de $a(x)$ y $b(x)$, es también un divisor de $d(x)$.

Al máximo común divisor de los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ lo denotaremos por m.c.d.($a(x)$, $b(x)$).

2.7.1 Cálculo del máximo común divisor

En el caso de los números enteros existe un método para el cálculo del máximo común divisor de dos números, denominado algoritmo de las divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides. Este método también puede aplicarse a los polinomios y consiste en lo siguiente:

Si aplicamos el algoritmo de la división a los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ tenemos que

$$a(x) = b(x)q(x) + r_1(x),$$

o lo que es lo mismo

$$r_1(x) = a(x) - b(x)q(x).$$

Lo que nos dice que, todo divisor de a(x) y b(x) también lo será de r_1(x). En particular el m.c.d.(a(x), b(x)) también dividirá a r_1(x).

Tenemos entonces que

$$a(x) = b(x)\, q_1(x) + r_1(x).$$

Si ahora dividimos b(x) por r_1 (x), obtenemos el resto r_2 (x), es decir,

$$b(x) = r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x).$$

Dividamos r_1 (x) por r_2 (x),

$$r_1(x) = r_2(x)\, q_3(x) + r_3(x)$$

y así sucesivamente vamos dividiendo por el resto correspondiente

$$\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)\, q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \\ &r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)\, q_k(x) + r_k(x), \qquad (2.11) \\ &r_{k-1}(x) = r_k(x)\, q_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Como los grados de los restos van disminuyendo, llegaremos a un resto igual al nulo, es decir, a una división exacta, con lo que terminaremos el proceso.

La última igualdad nos muestra que r_k(x) es divisor de r_{k-1}(x). De aquí resulta que ambos sumandos del segundo miembro de la igualdad

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)\, q_k(x) + r_k(x),$$

son divisibles por r_k (x), y por lo tanto, r_k (x) también es divisor de r_{k-2} (x). A continuación, subiendo del mismo modo a las igualdades anteriores, obtenemos que r_k (x) también es divisor de r_{k-3} (x),..., r_2 (x), r_1 (x). De aquí, en virtud de la segunda igualdad, resulta que r_k (x) es divisor de b(x), de donde, en virtud de la primera igualdad, también es divisor de a(x). Por lo tanto, r_k (x) es un divisor común de a(x) y b(x).

Veamos que d(x)= r_k (x) es el máximo de los divisores comunes de a(x) y b(x). Para ello mostremos que todo los divisores comunes de a(x) y b(x) son también divisores de d(x).

Supongamos pues que tenemos un divisor común arbitrario c(x) de los polinomios a(x) y b(x). Como, tanto el primer miembro como el primer sumando del segundo miembro de la primera de las igualdades (2.11) son divisibles por c(x), entonces r_1(x), también será divisible por c(x). Del mismo modo tenemos que todos los polinomios r_2 (x), r_3 (x),..., son divisibles por c(x). Si finalmente, se ha demostrado que r_{k-2}(x) y r_{k-1}(x) son divisibles por c(x), de la penúltima igualdad obtenemos que r_k (x) es divisible por c(x), por lo que d(x)=r_k(x) es divisible por c(x). Así, el polinomio d(x) dividido entre su coeficiente principal nos dará el máximo común divisor de los polinomios a(x) y b(x).

Hemos demostrado que existe el máximo común divisor para dos polinomios arbitrarios dados y hemos obtenido un método para su cálculo.

Ya habíamos dicho que dos polinomios eran primos entre sí cuando sus únicos divisores comunes eran los polinomios constantes. En este caso cuando buscamos el polinomio mónico vemos que es la unidad, luego el máximo común divisor de dos polinomios primos entre sí será el 1.

Ejemplo:

Hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$a(x) = x^4 -x^3-x^2-x-2 \qquad y \qquad b(x)= x^4 +x^3-x^2+x-2.$$

Para evitar coeficientes fraccionarios, al aplicar el algoritmo de Euclides visto anteriormente a los polinomios con coeficientes enteros, se les puede multiplicar el dividendo o simplificar el divisor por cualquier número diferente de cero, no sólo al comenzar alguna de las divisiones sucesivas, sino también durante el proceso de la división misma. Naturalmente, esto conducirá a una alteración del cociente, pero los restos que nos interesan adquirirán solamente un factor de grado cero, lo que, como ya sabemos, es admisible al buscar el máximo común divisor.

Dividimos a(x) por b(x)

$$\begin{array}{r|l}
x^4 -x^3- x^2-x-2 & x^4 +x^3-x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
-x^4 -x^3 +x^2-x+2 & 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 -2x &
\end{array}$$

Entonces $r_1(x) = -2x^3 -2x$ y simplificamos dividiendo por -2.

Ahora dividimos b(x) entre $x^3 +x$

$$\begin{array}{r|l}
x^4 -x^3- x^2+x-2 & x^3 + x \\ \cline{2-2}
-x^4 - \quad x^2 \qquad\quad & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3-2x^2+x-2 & \\
-x^3 \qquad\; -x \quad & \\ \cline{1-1}
-2x^2 \quad - 2 &
\end{array}$$

y dividiendo nuevamente por -2 y nos quedaría

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x & x \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

y encontramos que $x^2 + 1$ es el último resto, por el que se divide exactamente el resto anterior. Por lo tanto, éste es el máximo común divisor.

Es decir

$$\text{m.c.d.}(a(x), b(x)) = x^2 + 1.$$

Observemos que cuando aplicamos el algoritmo para el cálculo del máximo común divisor llegamos a

$$d(x)=b(x)- r_{k-1}(x)q(x) = b(x)- [a(x) - b(x)q_1(x)]q(x).$$

Agrupando ahora convenientemente se tiene

$$d(x)= - q(x)\, a(x) + [1+ q_1(x)\, q_2(x)]\, b(x).$$

Si denotamos a $-q(x)$ por $u(x)$ y a $[1+ q_1(x)\, q_2(x)]$ por $v(x)$ podemos escribir

$$d(x)= u(x)a(x) + v(x)\, b(x),$$

de donde se puede concluir que el máximo común divisor de dos polinomios es una suma de productos de los polinomios por polinomios $u(x)$ y $v(x)$.

Es decir

Si $a(x)$ y $b(x)$ son dos polinomios cualesquiera de [x] y $d(x)$ su máximo común divisor, existen entonces dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que $d(x) = u(x)a(x)+v(x)b(x)$.

Este resultado se conoce como *Teorema de Bezout.*

En el caso en que el m.c.d(a(x),b(x)). sea 1, es decir, si los polinomios son primos relativo,s de la relación anterior se tiene

$$\boxed{u(x)a(x)+v(x)b(x)=1.} \tag{2.12}$$

Ejemplo:

En ejemplo desarrollado anteriormente tenemos que

$$x^2 + 1= u(x)(x^4 -x^3- x^2-x-2)+v(x)(x^4 +x^3-x^2+x-2),$$

donde

$$u(x) = -\frac{1}{4}(x+1) \quad y \quad v(x) = -\frac{1}{4}(x-1).$$

Apoyándonos en que $a(x)\, u(x) + b(x)\, v(x) = 1$ si $a(x)$ y $b(x)$ son primos entre sí, se pueden demostrar algunas propiedades importantes sobre este tipo de parejas de polinomios.

2.7.2 Propiedades de los polinomios primos entre sí

- Si m.c.d.(a(x), b(x))=1 y m.c.d.(a(x), c(x))=1, entonces m.c.d.(a(x), c(x)b(x))=1, pues según (2.12), existen unos polinomios u (x) y v (x) tales que

  $$a(x)u(x) + b(x)\, v(x) = 1.$$

  Multiplicando ambos miembros de la igualdad por c (x), obtenemos

  $$a(x)\,[u(x)\,c(x)] + [b(x)\,c(x)]\,v(x) = c(x).$$

  De ahí que todo divisor común de a(x) y de b(x)c(x) es también divisor de c(x). Pero a(x) y c(x) no tienen divisores comunes, luego a(x) y b(x)c(x) son primos entre sí, que es lo que queríamos probar.

- Si el producto de los polinomios a (x) y b(x) es divisible por c(x), pero a(x) y c(x) son primos entre si, entonces b(x) es divisible por c(x).

  Podemos utilizar la igualdad $a(x)\cdot u(x) + c(x)\cdot v(x) = 1$ y multiplicarla por b(x). Así obtenemos

  $$[a(x)b(x)]u(x) + c(x)[v(x)b(x)] = b(x).$$

  Como ambos sumandos del primer miembro de esta igualdad son divisibles por c(x), también b(x) lo será.

2.8 Máximo común divisor de un sistema finito de polinomios

La definición de máximo común divisor se puede generalizar al caso de cualquier sistema finito de polinomios.

Definición 2.8

> Llamaremos *máximo común divisor* de los polinomios $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$ a su divisor común mónico, que es, además, divisible por cualquier otro divisor común de los mismos.

En particular, se dice que $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{s-1}$ es un sistema de polinomios primos entre sí, si los únicos divisores comunes de ellos son los polinomios de grado cero, o sea, si su máximo común divisor es igual a 1. Si $s > 2$, puede ocurrir que los polinomios no sean primos entre sí dos a dos y, sin embargo, sea un sistema de polinomios primos entre sí.

Ejemplo:

Los polinomios

$$p(x) = x^2-x+6, \qquad q(x)=3x^2+5x-2, \qquad h(x) = 3x^2-10x+3$$

son primos entre sí. Sin embargo si buscamos el máximo común divisor dos a dos, encontramos que m.c.d.(p(x),q(x))= x + 2, m.c.d.(p(x), h(x)) = x - 3, m.c.d.(q(x), h(x)) = x -1/3.

2.9 Raíces de los polinomios

Definición 2.9

Sea c es un número perteneciente a y

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + - - - + a_1 x + a_0 \qquad (2.13)$$

un polinomio con coeficientes en . Se denomina *valor del polinomio* p(x) *para* x=c al número obtenido al sustituir la indeterminada x por el número c en la expresión (2.13) de p(x). Es decir, el valor del polinomio en x=c es el número

$$p(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + - - - + a_1 c + a_0 .$$

Como consecuencia de esta definición tenemos que:

- Si p(x) = q(x), entonces p(c)= q(c) para cualquier c.
- Si p(x) = a(x) +b(x), entonces p(c) = a(c) +b(c).
- Si p(x)= a(x)b(x) entonces q(c)= a(c)b(c).

Definición 2.10

Se dice que el número *c es raíz del polinomio* p(x), si p(c)=0, o sea, si el polinomio p(x) se anula al sustituir x por el número c. También se dice que c es un *cero* del polinomio p(x) o que c es *raíz de la ecuación* p(x) = 0.

Del algoritmo de la división sabemos que si se divide el polinomio p(x) por un polinomio arbitrario de primer grado, el resto de la división será un polinomio de grado cero o el polinomio nulo, es decir, siempre será un número r.

En este caso tenemos

$$p(x)=(x- c)\, q(x)+r.$$

Evaluando ambos miembros de esta igualdad para x = c, obtenemos

$$p(c)=(c- c)\, q(c)+r.$$

De aquí se deduce que el resto de la división de un polinomio p(x) por un polinomio de primer grado (o lineal) x - c es igual al valor p(c) que toma el polinomio p(x) para x = c.

Es decir:

El resto de la división de un polinomio p(x) por x-c es p(c).

De ahí que

El número c es raíz del polinomio p(x) sí y sólo sí p(x) es divisible por x -c.

Ejemplo:

Sea $p(x)= x^2+2x+1= (x+1)^2$. Entonces

$$p(-1)=0,$$

por lo que -1 es raíz del polinomio y $x-(-1)$ es un divisor del polinomio.

En general, si p(x) es divisible por algún polinomio de primer grado ax + b, es también divisible por el polinomio x-(-b/a), o sea, por un polinomio de la forma x-c. De este modo, la determinación de las raíces del polinomio p(x) es equivalente a la determinación de sus divisores de primer grado.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, resulta de interés conocer un método de división de un polinomio p(x) por el binomio x-c, que sea más simple que el algoritmo general de división de los polinomios.

2.9.1 Regla de Horner

Sea

$$p(x)= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ .... + a_1 x + a_0 \qquad (2.14)$$

y supongamos que

$$p(x) = (x-c)q(x) +r , \qquad (2.15)$$

donde $q(x)= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2}+ - - - + b_1 x + b_0$.

Igualando en (2.15) los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$p(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2}+ .... + b_1 x + b_0)(x-c) +r$$

$$= b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1}+ - - - + b_1 x^2 + b_0 x - cb_{n-1}x^{n-1} -c b_{n-2}x^{n-2} - ..... - cb_1 x -c b_0 +r.$$

De donde, igualando coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - cb_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3}- c b_{n-2} \qquad (2.16) \\ &.................. \\ a_o &= r- cb_0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $b_{n-1} = a_n$, $b_k = cb_{k+1} +a_{k+1}$ $(k = 1, 2, . . .,n - 1)$, o sea, se obtiene el coeficiente b_k multiplicando el coeficiente anterior b_{k+1} por "c" y agregándolo el coeficiente correspondiente a_{k+1}. Finalmente, se tiene el resto $r = cb_0 + a_0$, que, como ya sabemos, es igual a p(c).

Esto nos permite utilizar un método cómodo para determinar el cociente de p(x) por x-c, escribiendo los coeficientes en una tabla. Para ello se escriben todos los coeficientes de p(x) en la primera fila. En la siguiente fila se escribe la constante "c", si estamos dividiendo por x-c. Pasamos una línea y vamos realizando los cálculos teniendo en cuenta las igualdades (2.16). Finalmente nos queda el siguiente esquema:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	.... a_1	a_0
c		$b_{n-1}.c$	$b_{n-2}\ .c$	$b_{n-3}\ .c$	....	b_0c
	$b_{n-1}=a_n$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_0	r

Dicho esquema se conoce como *división sintética* o *regla de Ruffini* o *regla de Horner*.

Los coeficientes del cociente y el resto se pueden obtener sucesivamente leyendo la última línea.

Ejemplos:

1. Dividir el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + x -2$ por $x - 4$.

   Formamos una tabla siguiendo el esquema de división sintética, colocando en la primera fila los coeficientes del polinomio p(x) y, a la izquierda, el valor dado de "c"

	1	-2	0	1	-2
4		4·1	4·2	4·8	4·(33)
	1	2	8	33	130

   Por lo tanto, el cociente buscado es

   $$q(x) = x^3 + 2x^2 + 8x + 33,$$

   y el resto es r = 130. Recordemos que el resto es p(4) .

2. Dividir $p(x)= x^5 + x^4 +2x^3 -2x$ por $x+1$.

	1	1	2	0	-2	0
-1		(-1)·1	(-1)·0	(-1)·(2)	(-1)·(-2)	(-1)·(0)
	1	0	2	-2	0	0

   Por consiguiente, el cociente es

   $$q(x)= x^4 +2x^2 -2x$$

   y el resto r = p(-1) = 0.

En este ejemplo p(x) es divisible por x-1 o, dicho de otro modo, x =-1 es raíz del polinomio p(x).

2.10 Raíces múltiples

Puede ocurrir que p(x) no sólo sea divisible por la primera potencia del binomio lineal x - c, sino también por otras potencias superiores. Es decir, que exista un número natural "k" tal que p(x) sea divisible por $(x - c)^k$, pero no por $(x - c)^{k+1}$.

En otras palabras

$$p(x) = (x - c)^k q(x),$$

donde el polinomio q(x) ya no es divisible por x - c, o sea, el número "c" es raíz de p(x) pero no es raíz de q(x).

Por ejemplo, el polinomio $p(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2 = (x-2)(x+1)^3$ tiene las raíces 2 y -1, y se observa que -1 es raíz de $(x+1)^3$, pero no lo es de q(x)=x-2.

Entonces al número "k" le llamaremos *orden de multiplicidad de la raíz "c" del polinomio p(x)* y decimos que "c" es *una raíz de multiplicidad "k" de p(x).* Si k = 1, se dice que "c" es *una raíz simple.*

En el ejemplo anterior, el número -1 es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio p(x) y el numero 2 es una raíz simple.

El concepto de raíz múltiple está estrechamente ligado con el concepto de derivada del polinomio que recordaremos a continuación.

Definición 2.11

Dado el polinomio de n-ésimo grado

$$p(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+ - - - +a_3x^3+a_2x^2+ a_1 x + a_0$$

con coeficientes en , llamaremos *derivada de p(x)* al polinomio de grado n-1

$$p'(x)= na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}+ - - - +3a_3x^2+ 2a_2 x + a_1.$$

Tanto los polinomios constantes como el polinomio nulo tienen por derivada al polinomio nulo.

Como la derivada de un polinomio es otro polinomio, podemos nuevamente derivarlo. Este nuevo polinomio se conoce como segunda derivada del polinomio p (x) y se designa con p''(x). Asi,

$$p''(x)= n(n-1)a_nx^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+ - - - +3 \cdot 2x+ 2a_0.$$

Para este nuevo polinomio podemos también hallar la derivada siguiendo la misma regla

$$p'''(x)= n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4}+ - - - + 3 \cdot 2.$$

Este polinomio será la derivada tercera de p(x).

Así podemos seguir derivando hasta encontrar la derivada n-ésima de p(x), que denotaremos por $p^{(n)}(x)$. O sea,

$$p^{(n)}(x) = n!\, a_n,$$

de donde vemos que, si seguimos derivando, como $p^{(n)}(x)$ es un polinomio constante, se obtiene

$$p^{(n+1)}(x) = 0,$$

es decir, la (n + 1)-ésima derivada de un polinomio de n-ésimo grado es igual al polinomio nulo.

Recordemos algunas propiedades de las derivadas que nos serán de utilidad en el trabajo

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x), \tag{2.17}$$

$$(p(x)\,.q(x))' = p(x)\, q'(x) + p'(x)\, q(x), \tag{2.18}$$

$$(p^{(k)}(x))' = k\, p^{(k-1)}(x)\, p'(x) \tag{2.19}$$

Las fórmulas (2.17) y (2.18) se comprueban aplicando la definición de derivada dada anteriormente y la (2.19) es consecuencia inmediata de aplicar la (2.18) al producto del polinomio p(x) por sí mismo "k" veces.

El siguiente resultado es de gran utilidad en el cálculo de raíces de un polinomio.

Teorema

Si el número "c" es una raíz de multiplicidad k (k >1), del polinomio p(x), entonces "c" será una raíz de multiplicidad k-1 de la primera derivada de p(x). Si k = 1, el número "c" no será raíz de p'(x).

Supongamos que

$$p(x) = (x - c)^k\, q(x), \quad (k \geq 1), \tag{2.20}$$

donde q(x) no es divisible por x-c. Derivando la expresión anterior y aplicando (2.19) se obtiene

$$p'(x) = (x - c)^k\, q'(x) + k\,(x - c)^{k-1}\, q(x) = (x - c)^{k-1}\, [(x - c)\, q'(x)+kq(x)].$$

El término (x -c)q'(x) es divisible por x - c, mientras que kq(x) no lo es, dado que k es una constante y habíamos dicho que q(x) no era divisible por (x-c). Entonces toda esta suma no puede ser divisible por x - c. Teniendo en cuenta que el cociente de la división de p(x) por $(x - c)^{k-1}$ es único, resulta que $(x - c)^{k-1}$ es la máxima potencia del binomio x-c, por la que es divisible el polinomio p'(x), como queríamos demostrar.

Aplicando sucesivamente este resultado, se obtiene que toda raíz de multiplicidad k del polinomio p(x) es raíz de multiplicidad k-s de la s-ésima derivada de este polinomio para todo s<k y que no será raíz de la k-ésima derivada de p(x),

Ejemplo:

Sea $p(x) = x^3-x^2-8x+12$, entonces $p(2) = 8-4-16+12=0$.

Así mismo es

$p'(x) = 3x^2-2x-8$ con $p'(2) = 12-4-8=0$

y

$p''(x) = 6x-2$ con $p'''(2) = 12-2 \neq 0$

Luego, 2 es raíz de multiplicidad 2 de $p(x)$ y podemos escribir

$$p(x) = (x-2)^2 q(x).$$

Notemos que 2 es raíz además de $p'(x)$, pero no de $p''(x)$.

Observemos que si existen raíces múltiples de $p(x)$ se tiene que

$$p(x)=(x-a)^k\, q(x)$$

y

$$p'(x)=(x-a)^{k-1}\, h(x).$$

Luego el m.c.d.$(p,p') = (x-a)^{k-1}\, h(x) \neq 1$, es decir, p y p' no son primos relativos. De aquí podemos concluir que si p y p' son primos relativos no existen raíces múltiples.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de coeficientes complejos, cuyo grado no sea menor que 1, admite al menos una raíz compleja.

La demostración de este teorema no es de interés en este curso. Lo más importante para nosotros en estos momentos son algunos resultados que se derivan del mismo. Veamos:

1. Número de raíces de un polinomio. Descomposición en [x].

Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$, por el teorema fundamental $p(x)$ admite una raíz compleja α_1. Luego es

$$p(x)=(x-\alpha_1)q_1(x).$$

Pero ahora $q_1(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y se puede aplicar el mismo teorema, de donde

$$p(x)=(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)q_2(x),$$

y así se puede repetir el proceso hasta llegar a

$$p(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,(x-\alpha_3).......\,(x-\alpha_{n-1})\,(x-\alpha_n)\,c.$$

Observemos que "c" es el coeficiente principal de $p(x)$.

De ahí podemos concluir que:

- ♦ Todo polinomio p(x) de [x] de grado n posee exactamente n raíces complejas, contada cada raíz tantas veces como sea su multiplicidad. Los polinomios de grado cero no tienen raíces y el polinomio idénticamente nulo es el que se anula para todos los valores de la variable.

- ♦ Todo polinomio de [x] puede ser descompuesto totalmente en factores lineales de [x].

Ejemplo:

$$p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x+2i)(x-2i)$$

tiene 3 raíces y se descompone completamente en factores lineales.

2. Principio de identidad para polinomios

Si dos polinomios p(x) y q(x), de grado no mayor que n, toman valores iguales para más de n valores de la indeterminada, entonces p(x) =q(x).

En efecto, el polinomio p(x)-q(x) no puede tener más de n raíces. Por hipótesis tenemos que $p(a_i) = q(a_i)$ para i=1...m (m>n), lo que implica que p(x)-q(x) tendría más de n raíces. Todo ello nos lleva a afirmar que p(x)-q(x) es el polinomio idénticamente nulo, es decir, p(x)=q(x) para todo x.

Si el polinomio p(x) tiene grado n y su coeficiente principal es 1, es decir, si es de la forma

$$p(x)=x^n + a_{n-1}x^{n-1} + - - - + a_1 x + a_0,$$

y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son sus raíces (pueden ser algunas iguales entre sí), se puede escribir

$$p(x)= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2).......(x-\alpha_n),$$

de donde, multiplicando e igualando coeficientes, se tiene

$$a_{n-1} = - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$$

$$a_{n-2} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + ... + \alpha_1 \alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + ... + \alpha_2\alpha_n + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$a_{n-3} = - (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

....

$$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \alpha_2 ....\alpha_{n-1} + \alpha_1 \alpha_2 .... \alpha_{n-2}\alpha_n + ... + \alpha_2\alpha_3 .... \alpha_n)$$

$$a_0 = (-1)^n (\alpha_1\alpha_2 ....\alpha_n)$$

Estas expresiones son conocidas como *fórmulas de Vieta*.

Ejemplo:

1. Si n=2 y las raíces son α_1=3 y α_2= -1, tenemos que

   a_2 =1

   a_1 =-(3-1)

   a_0 = $(-1)^2$ (3)(-1),

   de donde

   $p(x) = x^2-2x-3.$

2. Si n=3 y las raíces son α_1 =2, α_2 = -1, α_3=1, tenemos

   a_3 =1

   a_2 =-(2-1+1)=2

   a_1 =$(-1)^2$[2(-1)+2(1)+(-1)(1)]=-1

   a_0 = $(-1)^3$ [(2)(-1)(1)]=2 ,

   de donde

   $p(x) = x^3-2x^2-x+2.$

3. Descomposición de un polinomio en [x]

   Supongamos que tenemos el polinomio

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ - - - + a_1 x + a_0 \in \quad [x]$$

y que $\alpha \in$ es raíz de p(x). Veamos que $\overline{\alpha}$ también es raíz de p(x).

En efecto, si α es raíz, ya sabemos que $p(\alpha)$ =0. Es decir,

$$p(\alpha)=a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+ - - - + a_1 \alpha + a_0=0.$$

Buscando el conjugado en cada miembro y teniendo en cuenta que

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ para todos z_1 y z_2 complejos,

obtenemos

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} = 0$$

$$a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0,$$

lo que nos dice que $\overline{\alpha}$ es también raíz de p(x).

De lo anterior podemos concluir que p(x) es divisible por $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$, es decir, por el polinomio $x^2 -(\alpha + \overline{\alpha})x+ \alpha\overline{\alpha}$ cuyos coeficientes son reales. Además α y $\overline{\alpha}$ son raíces con la misma multiplicidad pues si así no fuera, es decir, si la multiplicidad de α fuera h y la multiplicidad de $\bar{\alpha}$ fuera k (h>k) tendríamos

$$p(x) = (x-\alpha)^h (x- \bar{\alpha})^k q(x)= Q(x) (x-\alpha)^{h-k} q(x),$$

de donde p(x) quedaría con coeficientes complejos en contra del supuesto de que pertenece a [x].

Todo polinomio p(x) de [x] puede ser descompuesto totalmente en factores de [x] de la forma $(x-\alpha_i)$ y $x^2 + \beta_j x+ \gamma_j$ donde α_i, β_j y γ_j son reales y los polinomios de segundo grado no tiene descomposición en . O sea,

$$p(x)= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).....(x-\alpha_s) (x^2 + \beta_1 x+ \gamma_1)(x^2 + \beta_2 x+ \gamma_2).....(x^2 + \beta_k x+ \gamma_k).$$

Ejemplo:

Sea $p(x) = x^3 -x^2 +4x-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

de donde $p(x) = (x-1)(x^2 +4)$. Observemos que el segundo factor no tiene descomposición en .

2.11 Cálculo de las raíces de un polinomio

Si bien el teorema fundamental del álgebra asegura la existencia de raíces para cualquier polinomio de n-ésimo grado con coeficientes complejos, el mismo no brinda procedimiento alguno para su determinación, cuestión de vital importancia desde el punto de vista práctico.

Desde la más remota antigüedad, diversos problemas de la actividad práctica del hombre, como podría ser la repartición de herencia o la determinación de las ofrendas, llevaron al planteamiento de ecuaciones algebraicas. En el año 830 DNE, en el libro Al-Jabr del árabe Al Juarismi, se da un procedimiento general para la solución de ecuaciones de segundo grado con su correspondiente interpretación geométrica, aunque sin admitir la existencia de soluciones no reales.

Es en 1545 cuando aparece el Arx Magna, obra fundamental del italiano G. Cardano, donde se recogen fórmulas generales para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados a partir de las ideas de los también italianos Tartaglia y Ferrari.

Veamos ahora estas fórmulas .

2.11.1 Ecuaciones de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 +bx+c =0$, teniendo en cuenta que "a" es diferente de cero, podemos, sin perder generalidad, dividir por "a", llegando a la ecuación

$$x^2 +px+q =0$$

con coeficientes en . Podemos completar $x^2 +px$ a un cuadrado perfecto sumando y restando $\frac{p^2}{4}$ y obtenemos

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0 \; .$$

Dado que el número $\frac{p^3}{4}-q$ tiene raíz en el sistema de los números complejos, podemos despejar $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ y extraer raíz en ambos miembros. Los dos valores de la raíz del número complejo $\frac{p^2}{4}-q$, se diferencian entre sí solamente en el signo y los escribiremos en la forma

$$\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\;,$$

de donde

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\;,$$

y las raíces de la ecuación dada se pueden obtener despejando x

$$x=-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\;.$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2-5x+(7+i)= 0$

Aplicando la fórmula obtenida, resulta

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-(7+i)}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{25-28-4i}$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3-4i}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}(1-2i),$$

por lo que las soluciones serán $x_l = 3-i$, $x_2=2+i$.

2.11.2 Ecuaciones de tercer grado.

Para resolver la ecuación cúbica

$$y^3+ay^2+ by+c=0, \qquad (2.21)$$

con coeficientes complejos cualesquiera, se elimina el término en y^2 mediante el cambio de variable

$$y= x -a/3, \qquad (2.22)$$

obteniéndose una ecuación del tipo

$$x^3+px+q=o. \qquad (2.23)$$

Así, hallando las raíces de la ecuación (2.23), utilizando el cambio de variable propuesto en (2.22), se obtienen también las raíces de la ecuación (2.21).

Del teorema fundamental del álgebra superior se infiere que la ecuación (2.23), que es de tercer grado, posee tres raíces complejas. Llamemos x_o a una de esas raíces. Examinemos el polinomio h(t) dado por

$$h(t) = t^2 -x_0t -p/3,$$

donde t es una incógnita auxiliar.

Esta ecuación tiene dos raíces complejas α y β. Utilizando las fórmulas de Vieta, tenemos que la suma de α y β es x_0, mientras que su producto es -p/3. Es decir

$$\alpha+\beta=x_0 \qquad (2.24\ )$$

$$\alpha\beta = -p/3. \qquad (2.25)$$

Como habíamos supuesto que x_0 es una raíz de (2.23), podemos sustituir y obtenemos

$$(\alpha+\beta)^3 +p\ (\alpha+\beta) +q=0.$$

O bien, desarrollando la potencia y agrupando términos semejantes

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)\ (\alpha+\beta) + q =0. \qquad (2.26)$$

De (2.25) se deduce que $3\alpha\beta+p=0$; lo que sustituido en (2.26) nos lleva a

$$\alpha^3+\beta^3 = -q. \qquad (2.27)$$

Además, también de (2.25), elevando al cubo, se deduce que

$$\alpha^3\beta^3 = - p^3/27 \qquad (2.28)$$

Como la suma de α^3 y β^3 es -p y su producto es $-p^3/27$ y teniendo en cuenta las fórmulas de Vieta, α^3 y β^3 serán raíces de la ecuación de segundo grado

$$z^2+qz- p^3/27 =0. \qquad (2.29)$$

Ahora podemos resolver la ecuación (2.29) y obtenemos

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Por lo que

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{y} \qquad \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

de donde se obtinen los valores de α y β

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,, \qquad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,. \qquad (2.30)$$

De ahí que se verifique la fórmula

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,,$$

conocida por el nombre de *fórmula de Cardano*.

Teniendo en cuenta que un número complejo tiene 3 raíces cúbicas, las fórmulas (2.30) nos dan tres valores para α y tres valores para β. Ahora bien, al aplicar la fórmula de Cardano, no se puede combinar cualquier valor del radical α con cualquier valor del radical β, dado que tenemos que $\alpha\beta = -p/3$.

Así, si llamamos α_1 a uno de los tres valores del radical α y teniendo en cuenta, como vimos en el Tema I que las otras dos raíces de α se pueden obtener multiplicando α_1 por las raíces cúbicas de la unidad u y u^2, se obtiene que si α_2 y α_3 son las otras dos raíces de α, entonces

$$\alpha_2 = \alpha_1 u, \qquad \alpha_3 = \alpha_1 u^2.$$

Sea ahora β_1 el valor del radical β que se corresponde con el valor α_1 del radical α, de modo que se cumpla $\alpha_1 \beta_1 = -p/3$.

Los otros dos valores de β serán

$$\beta_2 = \beta_1 u, \qquad \beta_3 = \beta_1 u^2.$$

Como $u^3 = 1$,

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1 u\beta_1 u^2 = \alpha_1\beta_1 u^3 = \alpha_1\beta_1 = -p/3,$$

de donde llegamos a que al valor α_2 del radical α le corresponde el valor β_3 del radical β y el valor β_2 se corresponde con el valor α_3. Luego todas las raíces de la ecuación (2.23) están dadas por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_1 u^2 + \beta_1 u \end{aligned}\right\}. \tag{2.31}$$

Veamos qué sucede si la ecuación (2.21) tiene coeficientes reales. En este caso podemos hacer el mismo cambio de variable y obtener la ecuación (2.23), pero ahora con coeficientes reales,

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (2.32\ )$$

Siguiendo la misma línea de razonamiento, se llega a la solución de la ecuación

$$z^2+qz-p^3/27=0,$$

que nos lleva al radical

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\,,$$

que aparece en la fórmula de Cardano.

Observemos que si el número

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

es mayor que cero, una de las tres raíces de la ecuación es real y las otras son complejas conjugadas, pues los números que aparecen bajo los símbolos de cada uno de los radicales cúbicos en la fórmula de Cardano serán reales. Así tendremos para el radical α una raíz real α_1 y en el radical de β tendremos el valor real β_1 que se corresponde a α_1 para satisfacer la fórmula (2.25). De aquí resulta que la raíz $x_1= \alpha_1 + \beta_1$ de la ecuación (2.32) es también real. Las dos raíces restantes se hallan sustituyendo en las fórmulas (2.31) las raíces de la unidad u y u^2 por sus expresiones. Así es

$$x_2 = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 = \alpha_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1),$$

$$x_3 = \alpha_1 u^2 + \beta_1 u = \alpha_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1),$$

que son números complejos conjugados, pues los números α_1 y β_1 son reales y $\alpha_1 \neq \beta_1$;

Por otra parte, si $\frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27}$, entonces todas las raíces de la ecuación (2.32) son reales, siendo dos de ellas iguales entre sí, dado que $\alpha = \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$.

De aquí obtenemos que

$x_1 = 2\,\alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = -\alpha$

La posibilidad de que el número $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ sea negativo nos lleva a que las tres raíces de la ecuación (2.32) son reales, dado que en la formula

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

entraríamos el radical $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ con una cantidad subradical negativa, lo que nos lleva a que los números bajos los radicales cúbicos en α y β son complejos conjugados. Ahora bien, la ecuación (2.32) es de tercer grado con coeficientes reales, por lo que tiene al menos una raíz real.

Sea $x_1 = \alpha_0 + \beta_0$ esta raíz real y como, por otra parte, $\alpha_0\,\beta_0 = -p/3$ es real, tenemos que α_0 y β_0 tienen que ser complejos conjugados.

De ahí que también $x_2 = \alpha_0\,\varepsilon + \beta_0\varepsilon^2$, $x_3 = \alpha_0\,\varepsilon^2 + \beta_0\varepsilon$ sean números reales.

Por otra parte, tenemos que ellos son diferentes dos a dos, pues en caso contrario si elegimos x_1 de tal manera que sea $x_2 = x_3$, tendríamos que $\alpha_0\,(\varepsilon - \varepsilon^2) = \beta_0\,(\varepsilon - \varepsilon^2)$, de donde $\alpha_0 = \beta_0$, lo cual es no es posible.

2.11.3 Observación sobre las ecuaciones de grado superior

La resolución de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 + ax^3 + b\,x^2 + cx + d = 0 \qquad (2.33)$$

con coeficientes complejos arbitrarios se realiza mediante la resolución de la ecuación

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

a la que se llega eliminando el término en x^3 realizando el cambio de variable $x = y - a/4$.

Durante casi tres siglos se trabajó en la búsqueda de fórmulas que expresasen las raíces de ecuaciones de grado superior a 4, hasta que se logró demostrar que no existen tales fórmulas para las ecuaciones de n-ésimo grado, cuando $n \geq 5$.

2.12 Acotación de las raíces reales de un polinomio de [x]

Como en la práctica solamente nos interesarán las raíces de los polinomios con coeficientes reales, nos ocuparemos de la determinación de éstas, tratando de encontrar valores aproximados.

En ocasiones resulta útil poder expresar un polinomio en potencias del polinomio lineal $(x-x_0)$. Veamos:

Sea $p(x)= a_n x^n +a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2} +...+a_1x+a_0$ un polinomio de grado n. Deseamos escribir el polinomio p(x) en la forma

$$p(x)= A_n (x-x_0)^n +A_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+A_{n-2}(x-x_0)^{n-2} +...+A_2(x-x_0)^2+A_1(x-x_0)+A_0.$$

Evaluando el polinomio en x_0 podemos calcular A_0, nos queda entonces que $A_0=p(x_0)$.

Derivando y evaluando las derivadas en x_0 tenemos que

$$p'(x)= A_n n (x-x_0)^{n-1} +A_{n-1}(n-1)(x-x_0)^{n-2}+A_{n-2}(n-2)(x-x_0)^{n-3} +...+2A_2(x-x_0)+A_1,$$

es decir

$$p'(x_0)=A_1 \quad \text{y}$$

$$p''(x)= A_n n(n-1) (x-x_0)^{n-2} +A_{n-1}(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}+A_{n-2}(n-2)(n-3)(x-x_0)^{n-4} +...+2A_2,$$

es decir,

$$p''(x_0)=2A_2.$$

Si continuamos el proceso hasta la k-ésima derivada ($k\leq n$), el término independiente es de la forma $k!A_k$ y los restantes sumandos contienen al factor $(x-x_0)$ por lo que $p^{(k)} (x_0)= k!A_k$ para $k\leq n$.

Resumiendo:

$$\begin{cases} A_0 = p(x_0) \\ A_1 = p'(x_0) \\ A_k = \dfrac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{para} \quad 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

De donde, se obtiene que

$$p(x) = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots + \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + p'(x_0)(x-x_0) + p(x_0)$$

,

conocida como *fórmula de Taylor* para p(x) en el punto x_0 y que será estudiada con más detalle en el curso de Análisis Matemático.

Ejemplo:

Si $p(x)= x^3+3x^2+2x+1$ para $x_0 =1$, tenemos que $p(1)= 7$

$p'(x)= 3x^2+6x+2$, $p''(x)=6x+6$, $p'''(x)=6$,

que evaluadas en x=1 nos dan

$p'(1)=11$ $p''(1)=12$ $p'''(1)=6$

Luego es

$$p(x) = \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{1!}(x-1) + 7 = (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 11(x-1) + 7 .$$

2.12.1 Método de Newton

No siempre es posible encontrar con exactitud las raíces reales de un polinomios pero existen métodos que nos permiten acotar las mismas.

Veamos el procedimiento conocido como Método de Newton para la determinación de una cota superior para las raíces reales de un polinomio de [x].

Dado que los polinomios pueden ser escritos utilizando la fórmula de Taylor para p(x) en “c”, donde “c” es una contante real arbitraria, tenemos

$$p(x) = \frac{p^{(n)}(c)}{n!}\left(x-c\right)^n + \cdots + \frac{p''(c)}{2!}\left(x-c\right)^2 + \frac{p'(c)}{1!}(x-c) + p(c) .$$

Si “c” es un número tal que p(c) y todas sus derivadas hasta $p^{(n)}$ (c) son estrictamente positivas, “c” será una cota superior de las raíces reales de p(x), puesto que α no puede ser una raíz de p(x) si es mayor que “c”, dado que en ese caso $p(\alpha)$ sería mayor que cero, lo que contradice que sea raíz.

Ejemplo:

$p(x)= x^5 +3x+1$	$p'(x) = 5x^4 +3$	$p''(x) = 20x^3$
$p'''(x) = 60x^2$	$p^{(iv)}(x) = 120x$	$p^{(V)}(x)= 120$

Como podemos ver, si evaluamos en x=2, tanto p(x) como sus derivadas son positivas. Luego 2 es una cota superior para las raíces reales de dicho polinomio.

La acotación de raíces quedará completada cuando pueda darse, además, una cota inferior de las mismas. Para ello se construye el polinomio $g_1(x) = p(-x)$ y, si α es una es raíz negativa de p(x), entonces $-\alpha$ es una raíz positiva de g_1. De aquí que si M_1 es una cota superior de las raíces positivas de $g_1(x)$ tendríamos que $M_1 >-\alpha$, de donde $\alpha>-M_1$.

Así, en el siguiente ejemplo podremos encontrar una cota inferior para las raíces del polinomio

$$p(x)= x^5 +3x+1.$$

En este caso $g_1 (x) = p (-x) = -x^5 -3x+1$ y le buscamos las raíces positivas por el método de Newton:

$g_1'(x) = -5x^4 -3,\qquad g_1''(x) = -20x^3,\qquad g_1'''(x) = -60x^2,$

$g_1^{(iv)}(x) = -120x,\qquad g_1^{(V)}(x)= -120.$

Observemos que en este caso no existe ningún x en el cual la quinta derivada sea positiva. Sin embargo g_1 y $-g_1$ tienen las mismas raíces.

Luego, podemos utilizar $h_1= -g_1 = x^5+3x-1$ para nuestro análisis, siendo

$h_1' (x) = 5x^4 +3,\qquad h_1''(x) = 20x^3,\qquad h_1'''(x) = 60x^2,$

$h_1^{(i\,v)}(x) = 120x,\qquad h_1^{(v)}(x)= 120.$

Aquí podemos observar que para x=2, h(x) y sus derivadas son todas positivas, entonces 2 es una cota superior de las raíces positivas de g_1 y, por tanto, -2 es una cota inferior de las raíces negativas de p(x).

En ocasiones solamente interesan las raíces positivas o negativas de un polinomio en [x], pudiéndose extender el método de Newton al hallazgo de una cota inferior para las raíces positivas o de una cota superior para las raíces negativas.

Para ello tendremos en cuenta que:

- Si M_2 es una cota superior de las raíces positivas de $g_2(x)= x^n\, p(1/x)$, entonces $1/M_2$ será una cota inferior de las raíces positivas de p(x).
- Si M_3 es una cota superior de las raíces positivas de $g_3(x) = x^n\, p (-1/x)$, entonces $-1/M_3$ será una cota superior de las raíces negativas de p(x).

En el mismo ejemplo anterior tenemos que

$$g_2(x)= x^5\, p(1/x)= x^5 \{(1/x)^5 +3(1/x)+1\}= 1+3x^4+x^5$$

y aplicando el método de Newton para este nuevo polinomio, se obtiene

$g_2(x) = x^5+3x^4+1,$

$g_2' (x) = 5x^4 +12x^3,\qquad g_2''(x) = 20x^3 +36x^2,\qquad g_2'''(x) = 60x^2+72x,$

$g_2^{(i\,v)}(x) = 120x+72,\qquad g_2^{(v)}(x)= 120,$

que son positivas para x=2. Luego, 1/2 es una cota inferior de las raíces positivas de p(x).

Para el caso de la cota superior de las raíces negativas utilizaremos

$h_3(x) = x^5\, p (-1/x) = x^5\{ (-1/x)^5 +4(-1/x)+1\}= -1-3x^4 +x^5.$

Auxiliándonos ahora con $h_3(x)= x^5-3x^4-1$ es

$h_3'(x) = 5x^4 -12x^3$ $h_3''(x) = 20x^3 -36x^2$ $h_3'''(x) = 60x^2-72x$

$h_3^{(iv)}(x) = 120x -72$ $h_3^{(v)}(x)=120$,

que son todas positivas si la evaluamos en x =3, de donde se obtiene que x= -1/3 es una cota superior de las raíces negativas de p(x).

2.12.2 Método de Sturm

Ahora nos interesaremos por el numero de raíces reales de un polinomio de [x].

Debemos señalar primero que casi todos los métodos para la determinación del número de raíces reales se apoyan en el cálculo del número de variaciones de signo de un determinado sistema ordenado de números reales. Por ejemplo, en el sistema 3, 4, -2, 1, -7, -9, -6, 5, 3 tenemos los signos

+, +, -, +, -, -, -, +, +,

donde encontramos

1 variación de "+" a "-" (de 4 a -2),

1 variación de "-" a "+" (de -2 a 1),

1 variación de "+" a "-" (de 1 a -7),

1 variación de "-" a "+" (de -6 a 5).

En total tendremos entonces 4 variaciones. Si en el sistema se encuentra un 0, éste se elimina a los efectos de la variación del signo, es decir, si el sistema fuera

3, 4, -2, 1, 0, -7, -9, -6, 5, 3

las variaciones serian las mismas.

El método de Sturm se apoya en la determinación de las variaciones de signo de un sistema numérico, que se obtiene de la evaluación de un determinado sistema de polinomios.

Veamos:

Definición 2.12

Sea $p(x)$ un polinomio de [x] que no posee raíces múltiples. Se denomina *sistema de Sturm asociado a p(x)* a todo sistema ordenado de polinomios de [x]

$p_0(x), p_1(x),......,p_s(x)$ tales que:

1. $p_0(x) = p(x)$.
2. Dos polinomios consecutivos del sistema no poseen raíces comunes.
3. $p_s(x)$ no posee raíces reales.
4. Si α es raíz de $p_k(x)$ $(1\leq k \leq s-1)$, entonces $p_{k-1}(\alpha)$ y $p_{k+1}(\alpha)$ poseen signos distintos.
5. Si α es raíz de $p(x)$, entonces el signo del producto $p_0(x)\ p_1(x)$ cambia de "menos" a "mas" cuando x , al crecer, pasa por α.

El siguiente teorema nos muestra la posibilidad de determinar el número de raíces de un polinomio de [x] con ayuda de un sistema de polinomios de Sturm asociado al mismo.

Teorema (de Sturm)

Sea $p_0(x), p_1(x),......,p_s(x)$ un sistema de polinomios de Strum asociado al polinomio $p(x) \in$ [x] que no posee raíces múltiples y sea $W(c)$ el número de variaciones de signo del sistema de números

$$p_0(c), p_1(c),......,p_s(c),$$

donde c no es raíz de $p(x)$. Entonces, si "a" y "b" son dos números reales que no son raíces de $p(x)$ tales que $a<b$, el número de raíces reales de $p(x)$ que están entre "a" y "b" viene dado por $W(a)-W(b)$.

Para poder aplicar este resultado para encontrar la raíces de un polinomio $p(x)$ sin raíces múltiples, basta conocer cómo encontrar un sistema de polinomios de Sturm asociados al mismo. Para ello podemos utilizar el siguiente procedimiento:

- Se toma $p_0(x)= p(x)$ y $p_1(x)= p'(x)$.
- Se divide $p(x)$ entre $p_1(x)$ y se toma $p_2(x)$ como el resto de la división cambiado de signo.
- En general, $p_{i+1}(x)$ será el resto de la división de $p_{i-1}(x)$ entre $p_i(x)$ cambiado de signo

Notemos que este sistema cumple con la condiciones de los polinomios de Sturm.

Ejemplo:

Sea

$$p(x)=x^4-5x^2+3,$$

entonces es

$$p_1(x)=p'(x)=4x^3-10x.$$

Dividimos p(x) entre p'(x) y obtenemos el resto es $-5/2\ x^2+3$. Podemos tomar entonces

$$p_2(x)= 5x^2-6.$$

Dividiendo nuevamente obtenemos

$$p_3(x)=x$$

$$p_4(x)=6$$

Hagamos una tabla para los signos de los valores

	p(x)	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	#de cambios
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Hay 4-0 = 4 cambios, por lo que hay 4 raíces.

Analicemos el signo para varios valores enteros de x

	p(x)	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	#de cambios
-4	+	-	+	-	+	4
-3	+	-	+	-	+	4
-2	-	-	+	-	+	3
-1	-	+	-	-	+	3
0	+	0	-	0	+	2
1	-	-	-	+	+	1
2	-	+	+	+	+	1
3	+	+	+	+	+	0

Observando ambas tablas vemos que se encuentran raíces menores que -3. Entre -3 y -2 tenemos una raíz, las siguientes están entre -1 y 0 , entre 0 y 1 y entre 2 y 3.

En el caso de que el polinomio posea raíces múltiples debemos dividirlo por el máximo común divisor entre él y su derivada con lo cual se obtiene un polinomio de raíces simples.

Cuando no se conoce una acotación para las raíces del polinomio, es siempre posible determinar el número de raíces negativas y positivas del polinomio, considerando las variaciones del signo del sistema de polinomios de Sturm en 0 y para valores suficientemente pequeños y grandes de las variables, equivalentes estos últimos al comportamiento del polinomio en $-\infty$ y $+\infty$

EJERCICIOS

1. Determine si las siguientes expresiones representan polinomios. En caso positivo, diga si son elementos de [x] o de [x]].

   a) $2x^3 + 5x + 7i$ b) $2x^4 + 3x^{-1} + 2$

   c) $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ d) $2x^2 + 2\sqrt{x} + 1$

2. Halle los valores de las constantes en mayúsculas para que se cumpla la igualdad de polinomios

   a) $Ax^3 + x^2 + 5x + B = Cx^2 + Dx + 1$

   b) $(A + B)x^3 + Cx^2 + Dx + E + 2 = Ex^3 + Dx^2 + x + 2E$

3. Efectúe la operación indicada

   a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

4. Efectúe la división con resto de los polinomios

   a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ entre $x - 1$

   b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ entre $x + 3$

   c) $4x^3 + x^2$ entre $x + 1 - i$

   d) $x^3 - x^2 - x$ entre $x - 1 + 2i$

   e) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ entre $x^2 - 3x + 1$

   f) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ entre $3x^2 - 2x + 1$

5. Determine la relación que debe existir entre los números reales m, p q para que el polinomio

   a) $x^3 + px + q$ sea divisible por un polinomio de la forma $x^2 + mx - 1$

   b) $x^4 + px^2 + q$ sea divisible por un polinomio de la forma $x^2 + mx + 1$

6. Aplicando la regla de Horner, calcule $p(x_0)$ si

   a) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ y $x_0 = 4$

   b) $p(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$ y $x_0 = -2 - i$

7. Desarrolle el polinomio $p(x)$ en potencias de $x - x_0$

   a) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ y $x_0 = -1$

   b) $p(x) = x^5$ y $x_0 = 1$

   c) $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ y $x_0 = 2$

   d) $p(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 5 + i$ y $x_0 = -i$

   e) $p(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (11+18i)x^2 - (14-20i)x - 24 - 22i$ y $x_0 = -1 + 2i$

8. Desarrolle en potencias de x a $p(x)$ siendo $p(x) = x^4 - x^3 + 1$

9. Halle los valores del polinomio $p(x)$ y de sus derivadas en x_0 si

   a) $p(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ y $x_0 = 2$

   b) $p(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$ y $x_0 = 1 + 2i$

10. Determine el orden de multiplicidad de la raíz 2 para

    a) $p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

    b) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 4x$

11. Determine el valor del coeficiente k para que $x_0 = -1$ sea raíz, de orden no menor que 2, del polinomio $x^5 - kx^2 - kx + 1$.

12. Determine los valores de los coeficientes A y B para que el trinomio dado sea divisible por $(x-1)^2$

    a) $Ax^4 + Bx^3 + 1$ b) $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$

13. Demuestre que el número 1 es raíz múltiple de tercer orden del polinomio $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.

14. Demuestre que el polinomio

$$x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(-x^{n+2} + x^{n-1}) + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}(x^{n+1} - x^n) - 1$$

    es divisible por $(x-1)^5$ y no es divisible por $(x-1)^6$.

15. Determine el orden de multiplicidad de la raíz c del polinomio

$$\frac{x-c}{2}\left[f'(x)-f'(c)\right]+f(x)-f(c)$$

donde $f(x)$ es un polinomio tal que $f'''(c) \neq 0$.

16. Demuestre que el polinomio $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ no tiene raíces múltiples.

17. Descomponga en factores lineales los polinomios

a) $x^3-6x^2+11x-6$ b) x^4+4 c) $x^4+4x^3+4x^2-1$

d) x^4-10x^2+1 e) x^6+27

18. Descomponga los polinomios del ejercicio anterior en factores irreducibles con coeficientes reales.

19. Construya un polinomio con coeficientes reales de grado mínimo que tenga

a) la raíz doble 1 y las raíces simples 2, 3, 1+i

b) la raíz triple –1 y las raíces simples 3, 4

c) la raíz doble i y la raíz simple –1-i

20. Halle el máximo común divisor de los polinomios

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ y $(x-1)^2(x+2)(x+5)$

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ y $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ y $(x^2-1)^3$

21. Halle el máximo común divisor del polinomio y su derivada

a) $p(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$

b) $p(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$

22. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $x^2-6x+5=0$ b) $x^2+2x+1=0$

c) $x^2+x+1=0$ d) $x^4+2x^2+1=0$

e) $x^3-6x^2+11x-6=0$ f) $x^3-4x^2+5x-2=0$

g) $x^3+x^2+x+1=0$ h) $x^4-2x^2-4x=0$

23. Determine el valor de la constante λ para que

   a) una de las raíces de la ecuación $x^3 - 7x + \lambda = 0$ sea el doble de otra raíz.

   b) la suma de dos de las raíces de la ecuación $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ sea igual a 1.

24. Compruebe que si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$, se cumple que $x_3 = x_1 + x_2$ y resuelva la ecuación.

25. Acote superior e inferiormente la raíces reales de

   a) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$

   b) $p(x) = x^5 + 7x^3 - 3$

   c) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x + 14$

26. Construya los polinomios de Sturm y separe las raíces de

   a) $x^3 - 3x - 1$

   b) $x^3 + x^2 - 2x - 1$

   c) $x^3 - x + 5$

   d) $x^3 - 7x + 7$

TEMA III

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este tema estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y los determinantes y veremos algunos métodos para resolverlos. Comenzaremos por algunas definiciones

3.1 Ecuaciones lineales

Definición 3.1

> Una ecuación con n variables $x_1, \ldots, x_n$ se dice *lineal*, si puede escribirse en la forma
>
> $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b. \qquad (3.1)$$
>
> Las a_i son los *coeficientes* y b es el *término independiente* de la ecuación. A las variables se les llama incógnitas o indeterminadas. Si b = 0, la ecuación se dice *homogénea*, en caso contrario se dice *no homogénea*.

La ecuación que se obtiene de sustituir "b" por 0 en (3.1), es la *ecuación homogénea asociada* con la ecuación (3.1).

Ejemplos:

1. La ecuación

   $$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5$$

   es una ecuación lineal no homogénea, donde las incógnitas son x_1, x_2, x_3 y x_4 y los coeficientes son 1, 3, - 4 y 6; su término independientes es -5. Su ecuación lineal homogénea correspondiente es $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0$.

2. $2x_1 - x_2 + \sqrt{7}x_3 = 0$ es una ecuación lineal homogénea. Las incógnitas son x_1, x_2, y x_3 y los coeficientes son 2, -1 y $\sqrt{7}$.

3. Las ecuaciones $xy = 2$, $x - y^2 = 1$, $\cos x = y$

   no son lineales, dado que no pueden ser escritas en la forma (3.1).

Solución de una ecuación lineal

Definición 3.2

> Una solución particular de una ecuación lineal es un sistema $k_1, k_2, \ldots k_n$ de números, tales que, al ser sustituidos en la ecuación, se obtiene una identidad.

Por ejemplo, si sustituimos x_1, x_2, x_3 y x_4 por 3, 2, 5, 1 respectivamente en la ecuación del ejemplo 1, obtenemos $3+3\cdot 2-4\cdot 5+6\cdot 1= -5$, es decir, la ecuación se nos convierte en la identidad -5 = -5.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal, se conoce como conjunto solución de la ecuación. Este se obtiene despejando una de las variables en función de las restantes, y haciendo que cada variable libre tome cualquier valor escalar. Con ello se llega a un elemento genérico del conjunto solución, al cual se le llama *solución general*.

Ejemplo:

Si queremos determinar la solución general de la ecuación

$$x_1+ 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5,$$

despejaremos la variable x_1 para obtener $x_1 = -3x_2 + 4x_3 -6 x_4 -5$. Las variables libres x_2, x_3, x_4 pueden tomar cualquier valor, por ejemplo, $x_2 = r$, $x_3 = s$ y $x_4= t$, Por consiguiente, la solución general se expresa como:

$$\begin{cases} x_1 = -3r + 4s - 6t - 5 \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \text{para todas } r, s, t \in$$

Las letras r, s y t empleadas para representar a las variables libres se conocen como parámetros. Todas las soluciones particulares se pueden encontrar a partir de la solución general, asignando valores a los parámetros.

Por ejemplo, si $r = 2$ y $s = 5$ y $t=1$, obtenemos la solución $x_1 =3$, $x_2 =2$, $x_3 = 5$ y $x_4 =1$.

3.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.3

Un *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* $x_1,...,x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

Los números a_{ij} (i= 1,....,m j= 1,......,n) son los *coeficientes* del sistema y b_l, b_2,......b_m son los *términos independientes*.

Si los términos independientes son todos cero, el sistema se dice *homogéneo*. Cuando este último tiene los mismos coeficientes que el sistema (3.2) se dice que es su *sistema homogéneo correspondiente o asociado*.

Así, el sistema homogéneo correspondiente al sistema dado es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

Ejemplo:

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Sus coeficientes son 2, 1, -1, 1, 2. -3, 3, -2, 1 y los términos independientes son 1, -4 y 2.

El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Veamos qué entenderemos por solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Definición 3.4

> Se denomina una *solución* del sistema (3.2) a un sistema de n números $k_1, k_2, \ldots k_n$, tales que, al sustituir $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ...$x_n = k_n$ en todas las ecuaciones de sistema, las satisfacen idénticamente. El conjunto de todas las soluciones posibles se conoce como el *conjunto solución*. Cualquier elemento genérico del conjunto solución se llama *solución general*.

Ejemplo:

Probemos que $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 3$ es una solución particular del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}.$$

En efecto, si sustituimos los valores correspondientes tenemos

$$4(-4)+3(-1)+3 = -16-3+3= -16,$$

$$2(-4) - (-1) + 5(3) = -8+1+15=8.$$

Los sistemas de ecuaciones se clasifican, de acuerdo con la existencia o no de solución para el mismo, en *compatibles* e *incompatibles*. Si la solución es única, se dice es que *compatible_determinado* y si posee más de una solución se dice que es *compatible indeterminado*.

El sistema del ejemplo anterior es compatible pero no es determinado, puesto que podemos encontrar otras soluciones además de la ya encontrada. Por ejemplo, x_1= -8/10, x_2= -46/10, x_3= 1 es también una solución del sistema.

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -1 \end{cases}$$

no es compatible. Observemos que si multiplicamos por 2 la primera ecuación nos quedaría 4x+6y = 8 y no podemos encontrar un "x" y un "y" que cumplan que 4x + 6y = -1 y 4x+6y= 8 a la vez.

El hecho de que un sistema pueda tener una, infinitas o ninguna solución se puede ilustrar geométricamente para los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por ejemplo, sea el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

En este caso se trata de dos rectas que se cortan en un punto, luego el sistema tiene solución única. (Figura 3.1)

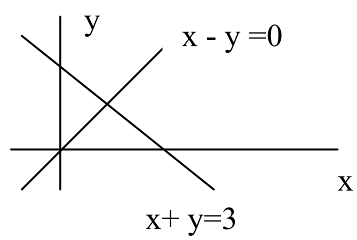


Fig 3.1

Para el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

hay infinitas soluciones, dado que al dividir la segunda ecuación por 2, obtenemos la primera. Esto significa que las rectas son coincidentes y se tienen infinitas soluciones para el sistema. (Figura 3.2)

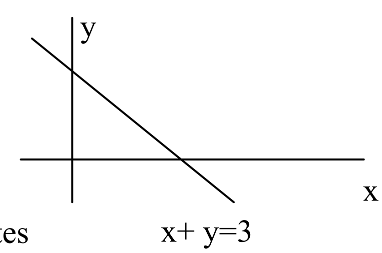


Fig 3.2

El sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

no tiene solución, pues no podemos encontrar un par de números "x" e "y" tales que su suma sea 1 y 3 a la vez.

Su representación gráfica es la de dos líneas paralelas no coincidentes. (Figura 3.3)

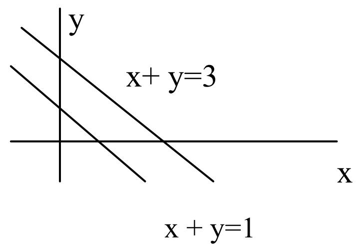


Fig 3.3

3.2.1 Resolución de un sistema lineal

Nuestro objetivo ahora será lograr un método práctico para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, para determinar todas las soluciones en caso de que estas existan. Los sistemas más fáciles de resolver tienen la forma triangular, o de escalón. En ellos, la variable delantera en cada ecuación se presenta a la derecha de la variable delantera de la ecuación escrita arriba, o sea, en la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Esos sistemas se resuelven comenzando en la parte inferior y avanzando hacia arriba. Primero se soluciona la última ecuación, a continuación se sustituyen los valores en la ecuación inmediata superior, con lo que también la resolveremos. A este método se le conoce como *método de sustitución hacia atrás.*

Ejemplo:

Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 \quad + 2x_4 = 4 \\ \quad - 4x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}, \qquad (3.4)$$

podemos rápidamente encontrar su solución despejando en la última ecuación x_4 en función de x_3 (o x_3 en función de x_4, lo que en este caso no es conveniente dado que x_3 no aparece en la segunda ecuación)

$$x_4 = 1 + 2x_3.$$

Despejando x_2 en la segunda ecuación y sustituyendo tenemos

$$x_2= 2-x_4 =2-1-2x_3= 1-2x_3.$$

Despejando x_1 en la primera ecuación y sustituyendo llegamos a:

$$x_1 =1+4x_2-x_3+3x_4 =1 +(4-8x_3)-x_3+(3+6x_3)= 8-3x_3$$

Es decir el sistema solución sería

$$\begin{cases} x_1 = 8-3x_3 \\ x_2 = 1-2x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 1+2x_3 \end{cases}.$$

Una solución particular del mismo sería, por ejemplo,

$$x_1=5, \quad x_2= -1, \quad x_3=1, \quad x_4=3.$$

Veremos ahora un método que nos permita trasformar un sistema dado a un sistema escalonado fácil de resolver, para lo cual necesitamos formalizar algunos conceptos.

Definición 3.5

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si ambos poseen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo:

Los sistemas

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 3x-y=5 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 5y=20 \end{cases}$$

son equivalentes ya que ambos tienen como única solución $x=3$, $y= 4$.

Definición 3.6 (transformaciones elementales en ecuaciones)

Dado un sistema de ecuaciones lineales se denominan *transformaciones elementales* sobre el sistema a las siguientes:

- Intercambiar dos ecuaciones ($E_i \leftrightarrow E_j$).
- Sustituir una ecuación por su suma con otra multiplicada por una constante ($E_i+cE_j \rightarrow E_i$).
- Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero y poner esta nueva ecuación en su lugar ($cE_i \rightarrow E_i$).

Ejemplo:

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases},$$

una transformación elemental en el mismo sería intercambiar las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 11 \end{cases}.$$

Otra consiste en multiplicar la primera ecuación por -3

$$\begin{cases} -3x - 6y = -33 \\ 3x - y = 5 \end{cases},$$

y otra sería multiplicar la primera por -3, sumarla con la segunda y ponerla en lugar de la segunda

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ \quad -7y = -28 \end{cases}.$$

Se propone al lector determinar las soluciones de dichos sistemas y verificar que es la misma en todos los casos.

Si el sistema dado es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.5}$$

y a la segunda fila (sin perder generalidad) le sumamos la primera multiplicada por un número "c" distinto de cero, tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ (ca_{11} + a_{21})\,x_1 + (ca_{12} + a_{22})\,x_2 + ... + (ca_{1n} + a_{2n})\,x_n = cb_1 + b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{3.6}$$

Observemos que si el conjunto solución del sistema (3.5) es $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$, éste también será solución del sistema (3.6), dado que al sustituirlo en el primer miembro de la segunda ecuación se tiene que

$$(ca_{11}+a_{21})\,k_1+(ca_{12}+a_{22})\,k_2+\ldots+(ca_{1n}+a_{2n})\,k_n$$

$$=c\,(a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n)+(a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n)$$

$$=c\,b_1+b_2.$$

Ahora, si el sistema $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}, k_n$ es solución del sistema de ecuaciones (3.6), solamente tendríamos que probar que satisface la segunda ecuación de (3.5). Pero tenemos que

$$(ca_{11}+a_{21})\,k_1+(ca_{12}+a_{22})\,k_2+\ldots+(ca_{1n}+a_{2n})\,k_n=c\,b_1+b_2,$$

de donde

$$c\,(a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n)+(a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n)=c\,b_1+b_2.$$

Pero como el conjunto de los k_i satisface también la primera ecuación del sistema (3.5) y se tiene que

$$c\,b_1+(a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n)=c\,b_1+b_2,$$

de donde

$$a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n=b_2,$$

que es lo que queríamos mostrar.

Procediendo de manera análoga se puede probar que si en un sistema se realiza alguna de las otras transformaciones elementales, el nuevo sistema obtenido es equivalente al anterior. Se dejan las demostraciones como ejercicio al estudiante.

Podemos concluir con el siguiente

Teorema

Si sobre un sistema de ecuaciones lineales se realiza una transformación elemental, el sistema resultante es equivalente al inicial.

Ejemplo:

Tomemos los sistema ya vistos anteriormente

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 3x-y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+6y=33 \\ 3x-y=5 \end{cases},$$

donde el segundo se obtuvo de multiplicar la primera ecuación por 3. Ambos sistemas tienen solución única y es $x=3$ $y=4$.

Lo mismo sucedería si tomamos los sistemas

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x+3y=27 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x-y=5 \\ x+2y=11 \end{cases},$$

los cuales también tiene el mismo conjunto solución que los dos anteriores.

Veamos ahora un método para reducir un sistema de ecuaciones lineales a un sistema lineal escalonado.

3.2.2 Método de Gauss

Supongamos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (3.7)$$

Si el coeficiente de x_1 es cero, realizamos un cambio de ecuaciones y ponemos en primer lugar alguna ecuación, en la cual el coeficiente de x_1 sea diferente de cero. Como ésta es una transformación elemental, ambos sistemas tendrían el mismo conjunto solución.

Supongamos pues que $a_{11} \neq 0$. Transformemos ahora el sistema (3.7) eliminado la incógnita x_1 de todas las ecuaciones, menos de la primera. Para esto multiplicamos la primera ecuación por el número a_{i1}/a_{11} y restamos la ecuación i, escribiendo el resultado en lugar de esta última. De este modo obtendríamos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{m1}x_2 + a'_{m2}x_3 + \cdots\cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} . \qquad (3.8)$$

El sistema (3.8) es equivalente al (3.7), pues solamente hemos realizado transformaciones elementales. Si alguna de las ecuaciones obtenidas tiene todos los coeficientes del primer miembro iguales a cero mientras que su término independiente es diferente de cero, concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, es incompatible y se termina el proceso. Si una de las ecuaciones tiene todos los coeficientes nulos y el término independiente también nulo, la quitamos del sistema, puesto que en este caso esa ecuación es satisfecha por cualquier conjunto solución que encontremos para las restantes ecuaciones. Supongamos entonces que hemos eliminado las ecuaciones que se hayan anulado y que el sistema no presenta ninguna ecuación incompatible.

Considerando ahora $a'_{22} \neq 0$ (de no ser así se procedería como en el caso anterior), procedemos a eliminar los coeficientes a'_{i2} para $i \geq 3$, multiplicando la segunda fila por

a'_{i2}/a'_{22} y restándola de la fila i correspondiente. Como nuevamente hemos realizado una transformación elemental, obtenemos el sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots\cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{array}\right. . \qquad (3.9)$$

Seguimos el proceso de manera análoga a la descrita. Así, suponiendo que hemos eliminado aquellas ecuaciones nulas y que no hemos encontrado ninguna incompatibilidad, llegaríamos a el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a^{(i-2)}_{i-1\ i-1}x_{i-1} + a^{(i-2)}_{i-1\ i1}x_i + \ldots + a^{(i-2)}_{i-1\ n}x_n = b^{(i-2)}_{i-1} \\ \qquad\qquad a^{(i-1)}_{i\,i}x_i + \ldots + a^{(i-1)}_{i\ n}x_n = b^{(i-1)}_i \end{array}\right. . \qquad (3.10)$$

En este sistema a_{11} , a'_{22}, ... $a^{(i-1)}_{i\,i}$ son todas diferentes de cero. Si i=n el sistema es compatible determinado y si i<n es compatible indeterminado. En el caso i=n nos quedaría el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots\cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a^{(n-1)}_{mn}x_n = b^{(n-1)}_m \end{array}\right. , \qquad (3.11)$$

donde vemos en la última ecuación un valor absolutamente determinado para x_n y utilizando el método de sustitución hacia atrás obtenemos todos los valores únicos de las x_i.

Si i<n pasamos toda las incógnitas desde i+1 hasta n con sus respectivos coeficientes para el segundo miembro, quedándonos así un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1i}x_i = b_1 - a_{1,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_{2i}x_i = b'_2 - a'_{2.i+1}x_{i+1} - \cdots - a'_{2,n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a^{(i-1)}_{i,i}x_i = b^{(i-1)}_i - a^{(i-1)}_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a^{(i-1)}_{i,n}x_n \end{cases}, \quad (3.12)$$

en el que dándole valores arbitrarios a la x_j desde j= i+1 hasta.n y realizando la sustitución hacia atrás llegamos a la solución deseada. En esta caso el sistema es compatible indeterminado, dado que los valores de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i$ dependen de los dados a $x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Ejemplos:

1. Apliquemos el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y - 3z - 3w = 5 \end{cases} .$$

Sustituimos la segunda ecuación por la suma de ella con la primera multiplicada por -3, y la tercera por la suma de ella con la primera multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ \quad - y + 5z - 7w = 1 \\ \qquad\quad 3z - 12w = 2 \end{cases} .$$

En este caso ya se detiene el proceso. Solamente nos queda despejar

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 - 3w \\ \quad - y + 5z = 1 + 7w \\ \qquad\quad 3z = 2 + 12w \end{cases}$$

y podemos determinar x, y, z en función de w

$$z = \frac{2 + 12w}{3}$$

$$y = 5z - 7w - 1 = \frac{7 + 39w}{3}$$

$$x = 1 - y + 2z - 3w = -8w .$$

El sistema dado es compatible indeterminado.

2. Apliquemos el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = -16 \end{cases}.$$

Eliminando la x_1 en las tres últimas ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -12x_2 - 16x_3 = 52 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}.$$

Eliminando ahora x_2 de las dos últimas ecuaciones nos queda

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Observemos que la ultima ecuación puede se eliminada, dado que no aporta solución, entonces se tiene el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{cases}.$$

que es compatible determinado. La solución sería

$$x_3 = -1, \quad x_2 = -3, \; x_1 = 2.$$

Los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales se apoyan en la realización de determinadas operaciones con sus coeficientes, por lo que en la práctica es conveniente abreviar la escritura de un sistema lineal, escribiendo solamente sus coeficientes y términos constantes debidamente ordenados en forma de rectángulo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.13)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & bm \end{array}\right), \qquad (3.14)$$

a las cuales se les denominará respectivamente *matriz y matriz ampliada* del sistema de ecuaciones lineales (3.7). Se acostumbra a poner una línea a modo de separador para indicar dónde está la columna de los términos independientes. Si llamamos A a la matriz del sistema usaremos la notación $\overline{A}$ para su matriz ampliada.

Si tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases},$$

entonces, escribiendo solamente los coeficientes de las incógnitas x_1, x_2 y x_3, tenemos la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es cuadrada de orden 3 y la diagonal principal está formada por los números 2, 2, 3. El elemento a_{23} es el que esta situado en la segunda fila tercera columna y es el -3.

Si le agregamos otra columna, formada por los términos independientes de la ecuación, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right),$$

que es la matriz ampliada del sistema. Esta matriz no es cuadrada ya que tiene 3 filas y 4 columnas.

En general, se define una matriz como un arreglo rectangular de números. La matrices juegan un papel muy importante dentro del álgebra lineal y serán estudiadas con más detalle en este tema.

Formalicemos pues el concepto de matriz, del cual ya habíamos hablado.

3.3 Concepto de matriz

Definición 3.6

Llamaremos *matriz de m filas y n columnas* a toda tabla rectangular de números dispuestos en m filas horizontales y n columnas, en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mxn.}$$

A los números a_{ij} les llamaremos *coeficientes* de la matriz y la matriz se dirá *real* o *compleja* en dependencia de si sus coeficientes son reales o complejos.

La i-ésima fila de A es $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{pmatrix}$ y la j-ésima columna es

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

El número a_{ij} es el *(i,j)-ésimo elemento de A* y está situado en la fila i, columna j. Si la matriz tiene m filas y n columnas diremos que es una matriz de *tamaño mxn*. Si m=n diremos que es una *matriz cuadrada de orden n*. A la diagonal de la matriz cuadrada donde están los elementos de la forma a_{ii} se le conoce como *diagonal principal*. Si en una matriz cuadrada de orden n todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y el resto son ceros, se dice que esta matriz es la *matriz identidad de orden n*.

Si todos los coeficientes de una matriz de mxn son ceros, decimos que ésta es la *matriz nula* de tamaño mxn y se denota por 0_{mxn} o simplemente por 0 si no hay lugar a dudas.

Si m=1, diremos que es A una *matriz fila* y si n=1 diremos que es una *matriz columna*.

Si A es cuadrada real y $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y todo j, la matriz se dice *simétrica* y, si $a_{ij} = -a_{ji}$, se dice *antisimétrica*. Si A es una matriz compleja, se habla de matriz *hermítica* y *antihermítica* respectivamente.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\mathrm{x}1}$ es una matriz columna.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{1\mathrm{x}3}$ es una matriz fila.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2 & 3 \\ -6+3i & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1+i & 1 \end{pmatrix}_{3\mathrm{x}4}$

   es una matriz de 3 filas y 4 columnas (tamaño 3x4) con coeficientes complejos. -3 es el coeficiente a_{23}, dado que está en la fila 2 columna 3.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ Esta es una matriz simétrica de orden 3.

6. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es matriz nula de 2x1 o matriz columna nula de tamaño 2x1.

7. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz nula de orden 2.

8. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\mathrm{x}3}$ es la matriz nula de tamaño 4x3.

Veamos los siguientes casos particulares de matrices.

Si A es una matriz cuadrada cuyos elementos son a_{ij}, entonces su diagonal principal estará formada por los a_{ii}. La matriz A es *triangular superior* si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero. A es *triangular inferior* si todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero. A es *diagonal* si todos los elementos arriba y debajo de la diagonal principal son cero. A se dice *escalar* si es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales.

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$.

Esta matriz, cuadrada de orden 3 con coeficientes complejos, es una matriz triangular superior y los elementos de la diagonal son 1, 3 y 1+i.

2. La matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal de orden 4 con coeficientes reales.

Las operaciones matriciales que se corresponden con las operaciones elementales en ecuaciones se llaman operaciones elementales por filas y pueden aplicarse a cualquier matriz.

Formalicemos estas operaciones.

3.3.1 Transformaciones elementales por fila en una matriz

Definición 3.7

Las *operaciones elementales* por fila en una matriz son:

- Sustituir una fila por su suma con un múltiplo de otra fila ($f_i + cf_j \rightarrow f_i$).
- Sustituir una fila por un múltiplo no nulo de ella misma ($cf_i \rightarrow f_i$).
- Intercambiar dos filas ($f_i \leftrightarrow f_j$).

Definición 3.8

Dos matrices A y B son del mismo tamaño, se dicen *equivalentes* si una se puede obtener a partir de la otra por medio de un número finito de operaciones elementales. Se utiliza la notación A~B para indicar que "la matriz A es equivalente a la matriz B".

Ejemplos:

1. Las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

son equivalentes, pues si a partir de la matriz A realizamos sucesivamente las transformaciones $f_1 \leftrightarrow f_2$, $f_3 + f_1 \rightarrow f_3$, y finalmente, $f_3+(-1)f_2 \rightarrow f_3$ obtenemos B.

$$A\left[f_1 \leftrightarrow f_2\right]\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\left[f_3+f_1 \rightarrow f_3\right]\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}\left[f_3-f_2 \rightarrow f_3\right]B.$$

Debido a que las operaciones elementales que hemos definido para las matrices, coinciden con las que hemos definido para sistemas de ecuaciones lineales, podemos concluir que a sistemas de ecuaciones equivalentes le corresponden matrices equivalentes.

2. Apliquemos las matrices equivalentes para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y-2z+3w=1\\ 3x+2y-z+2w=4\\ 3x+3y-3z-3w=5\end{cases}.$$

La matriz ampliada sería

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 5\end{array}\right),$$

que es equivalente a la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 5 & -7 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -12 & 2\end{array}\right).$$

De donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x+y-2z=1-3w\\ -y+5z=1+7w\\ 3z=2+12w\end{cases},$$

que nos permite determinar rápidamente los valores de x, y, z en función de los de w.

Hagamos ahora un estudio mas detallado de las matrices.

3.3.2 Igualdad de matrices

Definición 3.9

> Dos matrices A=(aij) y B= (b_{ij}) son *iguales* si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales. Es decir, si $a_{ij}=b_{ij}$ para todo i y j.

Ejemplo:

Sean

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i & 2-1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4+i \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & i & 2-1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4+i \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & i & 2-1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí se tiene que B=A, pero A≠C, pues no son iguales los coeficientes homólogos.

3.4 Operaciones con matrices

Dentro del trabajo con matrices es de gran importancia la realización de determinadas operaciones entre las mismas, es por ello que estudiaremos dichas operaciones y sus propiedades.

Denotemos por M_{mxn}( ) al conjunto de todas las matrices de tamaño mxn con coeficientes en donde es o .

3.4.1 Suma de matrices

Definición 3.10

> Sean $A=(aij)_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{mxn}$, dos matrices del mismo tamaño. Entonces la *suma* de A y B, que denotaremos por A+B, es también una matriz de tamaño mxn, definida por
>
> $$A+B=(c_{ij})_{mxn},$$
>
> donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para todo i y j .

Es decir, que para sumar dos matrices, se suman sus coeficientes homólogos disponiendo el resultado en la misma posición que ocupan los sumandos. Es importante destacar que dos matrices de diferente tamaño no se pueden sumar.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & .. & \dots \end{pmatrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & .. & \dots \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & .. & \dots \end{pmatrix}.$$

Ejemplo:

Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 4 & 3 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -5 & 3 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces se tiene

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Propiedades de la suma

Sean A, B y C matrices cualesquiera de $M_{mxn}(\ )$. Entonces

1. (A+ B)+C= A+(B +C) (asociatividad de la suma)
2. A +B =B +A (conmutatividad de la suma).

Dejamos la prueba de estas dos propiedades como ejercicio al estudiante, toda vez que se basa solamente en la conmutatividad y la asociatividad de la suma de números.

3. Existe una matriz N en $M_{mxn}(\ )$ tal que A+N =N+A=A, para toda matriz $A \in M_{mxn}(\ )$.

   A esta matriz le llamaremos *neutro* para la suma de matrices de tamaño mxn.

   En efecto, sea $A= (a_{ij})$ una matriz cualquiera de $M_{mxn}(\ )$. Entonces, si $N=(n_{ij})$ y

   $$A+N= (a_{ij}) +(n_{ij})= (a_{ij} +n_{ij})= (a_{ij})=A,$$

   tendremos que $a_{ij} +n_{ij} = a_{ij}$ para todo i, j. Luego $n_{ij} =0$, por lo que N es la matriz nula de tamaño mxn, que ya vimos que se representa por 0.

   Es decir:

El neutro para la suma de matrices de tamaño mxn es la matriz nula de tamaño mxn.

4. Para toda matriz $A=(a_{ij}) \in M_{mxn}(\ )$ existe una matriz A' tal que

$$A+A' = A'+A=0.$$

Esta matriz se conoce como la opuesta de A.

Sea $A'=(a'_{ij})$, entonces de la definición de suma tenemos que $a_{ij} + a'_{ij} =0$ para todo i, j.

De ahí que $a'_{ij} = - a_{ij}$ para todo i, j, de donde se obtiene $A'= (-a_{ij})$. Esta matriz se denota por -A.

Es decir:

La opuesta de la matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ es la matriz $-A= (-a_{ij})_{mxn}$

3.4.2 Producto de una matriz por un número

Definición 3.11

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de tamaño mxn y sea α un número. Se define el *producto* de α por A (y se denota αA) como una matriz de tamaño mxn, cuyo coeficiente ij viene dado por $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 3\sqrt{2} \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de una matriz por un número

Para todo par de matrices A y B y todo par de números α y β, se cumple que:

1. $1A=A$.
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)= \beta(\alpha A)$.
4. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

La prueba de las propiedades se deja como ejercicio al lector y se basa en las propiedades del producto de números.

Ejemplos:

1. $\sqrt{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

2. $(5+\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 15 & 20 & 30 \\ 30 & 35 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 7\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

3.4.3 Producto de matrices

Definición 3.12

Sean $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{nxp}$ dos matrices de tamaños mxn y nxp respectivamente. Entonces el *producto de A y B*, que lo denotaremos por AB, es una matriz de tamaño mxp definida de la forma siguiente:

$$AB=(c_{ij})_{mxp},$$

donde $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j}+a_{i2}\, b_{2j}+....+a_{in}b_{nj}.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}_{mxp} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}_{pxn} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{mxn}.$$

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, entonces

$$AB=\begin{pmatrix} 1(-2)+(3)0+(2)0 & 1(4)+3(-1)+2(1) & 1(1)+3(2)+2(-1) & (1)0+3(-3)+2(-2) \\ (-1)(-2)+(2)0+(0)0 & (-1)4+2(-1)+0(1) & (-1)1+2(2)+0(-1) & (-1)0+2(-3)+0(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & -13 \\ 2 & -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de matrices

1. A(BC)=(AB)C cualesquiera sean las matrices A, B y C de tamaños mxn, nxp y pxk respectivamente. Es decir, el producto de matrices es asociativo.
2. A(B + C)=AB+AC cualesquiera sean las matrices A de tamaño mxn y B y C de tamaño nxk. El producto de matrices es distributivo a la izquierda respecto a la suma.
3. (B+C)A=BA+CA cualesquiera sean las matrices A de tamaño mxn y B y C de tamaño kxm. El producto de matrices es distributivo a la derecha respecto a la suma.
4. $\alpha(BC)=(\alpha B)C= B(\alpha C)$ cualquiera sea el número α y B y matrices de tamaños mxn y nxp respectivamente.
5. $I_mA_{mxn}=A_{mxn}I_n=A_{mxn}$ donde I_m e I_n son las matrices identidades de orden m y n respectivamente.
6. $0_{pxm}A_{mxn} = 0_{pxn}$ y $A_{mxn}0_{nxp}=0_{mxp,}$ donde 0_m y 0_n son las matrices nulas de orden m y n respectivamente.

Observaciones

1. El producto de dos matrices no es conmutativo en general, dado que no está definido el producto AB de dos matrices de tamaños mxn y pxm.
2. El producto de dos matrices puede ser la matriz nula sin que lo sean las matices factores. Por ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$, entonces es

$$AB=\begin{pmatrix}-2+2 & 1-2(1/2)\\ -4+4 & 2+4(-1/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que las matrices se pueden multiplicar, podemos escribir el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

utilizando la notación matricial

AX=B,

donde A es la matriz del sistema, X es el vector columna formado con las incógnitas y B es el vector columna formado con los términos independientes.

Es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

3.4.4 Transpuesta de una matriz

Definición 3.13

Se denomina *transpuesta* de la matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & .... & .... & ..... \\ a_{1n} & a_{2n} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}_{nxm}$$

que tiene por filas las columnas de A y se denota por A^t.

Observemos que A^t tiene tamaño nxm.

Ejemplos:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$,

   entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \\ 3 & 4 \\ -4 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, entonces A^t=A.

Propiedades de la transpuesta

Cualesquiera sean las matrices A y B se cumple que:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
3. $(cA)^t = cA^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.
5. Si A es simétrica, entonces ella es su propia traspuesta.

Se propone como ejercicio la prueba de estas propiedades.

Veamos ahora un nuevo concepto que jugará un papel importante en el estudio de los sistemas de ecuaciones.

3.5 Determinante de una matriz cuadrada de orden 2 y de orden 3

Los determinantes son de gran utilidad en Algebra Lineal, con muchas aplicaciones en Ingeniería, Física, Economía y Matemática entre otras. Con ellos podemos resolver sistemas lineales con gran facilidad. Es por ello que le dedicaremos este epígrafe. Comencemos por las definiciones.

Definición 3.14

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2x2 con coeficientes en (= ó).

Llamaremos *determinante* de A y lo denotaremos por detA, al número

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

El determinante se escribe de forma análoga a la matriz pero utilizando barras verticales en lugar de paréntesis.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Así, por ejemplo, el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

sería $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (3)(3) = -19$.

Definición 3.15

Si la matriz es cuadrada de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

se le denomina *determinante* de la matriz A al número

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

y escribimos $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ahora, para calcular un determinante de orden 3 se siguen los siguientes pasos:

Se adjuntan las dos primeras columnas a la derecha

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{matrix}.$$

Se calculan los productos de los elementos de las diagonales que se forman tomando de izquierda a derecha los productos de arriba hacia abajo con signo (+) y los de abajo hacia arriba con signo (-).

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{matrix}$$

Se realiza su suma algebraica.

A este desarrollo se le conoce como *desarrollo de Sarrus para un determinante de orden 3.*

Ejemplo:

Calculemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Agregamos las dos primeras columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{matrix}.$$

Multiplicando las diagonales de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo nos quedan los productos

$$(1)(4)(-3), \quad (2)(5)\,(-2), \quad (-1)(3)(6).$$

Haciendo lo mismo, pero calculando los productos de las diagonales de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{matrix},$$

obtenemos los productos con signo "menos"

$$-(-2)(4)(-1), \quad -(6)(5)(1), \quad -(-3)(3)(2).$$

El siguiente paso consiste en sumar algebraicamente todos esos productos

$$(1)(4)(-3)+ (2)(5)(-2) + (-1)(3)(6)-(-2)(4)(-1)-(6)(5)(1) -(-3)(3)(2)$$
$$=-12-20-18-8-30+18 = -70.$$

3.5.1 Regla de Cramer para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

El método de Gauss expuesto anteriormente, aún cuando es aplicable a la resolución de cualquier sistema de ecuaciones lineales, no expresa las soluciones del sistema en término de los coeficientes del mismo, ni de los términos independientes, por lo que se hace necesario desarrollar la teoría con otros métodos de resolución.

Con el uso de los determinantes podemos encontrar un nuevo método para resolver los sistemas de ecuaciones.

Comencemos un sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Tomemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}\, y = b_1 \\ a_{21}\, x + a_{22}y = b_2 \end{cases}. \qquad (3.15\ \ )$$

Para resolverlo, despejamos la "y" en la primera ecuación (suponiendo $a_{12} \neq 0$, en caso contrario despejamos “x”)

$$y = \frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}},$$

y lo sustituimos en la segunda, de donde nos queda

$$a_{21}x + a_{22}\frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}} = b_2 .$$

Despejando “x” tenemos que

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}}$$

y sustituyendo en "y" se obtiene

$$y = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}},$$

suponiendo que $a_{11}a_{22} - a_{12}\, a_{21} \neq 0$.

Es fácil comprobar que estos valores encontrados para "x" e "y" nos brindan la solución única de este problema.

Observemos que los denominadores de "x" e "y" son iguales y coinciden con el determinante de la matriz del sistema, es decir, es el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Utilizando la notación del determinante encontramos que la solución del sistema (3.15) se puede escribir como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} .$$

Al determinante del denominador se le conoce como *determinante del sistema* y se acostumbra denotarlo por Δ_s, mientras que los determinantes que aparecen en los numeradores se conocen como *determinantes de las incógnitas* "x" e "y", denotándose por Δ_x y Δ_y respectivamente.

Observemos además que estos últimos determinantes se obtienen de cambiar en Δ_s la primera o la segunda columna, según corresponda, por la columna de los términos independientes.

Es importante destacar que el hecho de que el sistema cuadrado dado sea compatible determinado está relacionado con que el determinante de la matriz del sistema sea diferente de cero. Es decir:

- Si el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero, el sistema es compatible determinado y su solución viene dada por $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_s}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_s}$.
- Si el determinante de la matriz del sistema es cero, el sistema es incompatible o compatible indeterminado.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}.$$

En este caso es $\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (3)(3) = -19 \neq 0$, por lo que el sistema es compatible determinado.

Cambiando la primera y la segunda columnas por la columna de los términos independientes obtenemos

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (7)(-5) - (1)(3) = -38 \qquad \text{y} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (3)(7) = -19,$$

de donde $\quad x = \dfrac{-38}{-19} = 2 \quad$ e $\quad y = \dfrac{-19}{-19} = 1$.

3.5.2 Regla de Cramer para sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas

Sea ahora el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Para resolver este sistema procedemos de manera análoga al caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Eliminamos una variable de dos ecuaciones (digamos la x_3) y nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x_1 y x_2), de las cuales eliminamos una (por ejemplo, x_2). Nos quedaría finalmente

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}},$$

si el número del denominador es diferente cero.

Observemos que el número que aparece en denominador es el determinante de la matriz de sistema

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y en el numerador tenemos el determinante de la matriz que resulta de sustituir en la matriz del sistema la primera columna por los términos independientes. Así, para calcular las incógnitas del sistema utilizamos el mismo procedimiento que en el caso de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y tenemos que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \text{y} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Los determinantes de los numeradores son los determinantes de las incógnitas y el determinante del denominador es el determinante del sistema y se denotan por Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} y Δ_s respectivamente. De esta manera tenemos que

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_s}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_s} \qquad \text{y} \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta_s}.$$

Ejemplo:

Apliquemos el método de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 5z = 12 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}.$$

Calculando el determinante de la matriz del sistema se tiene

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 8+15-3-2-30+6 = -6.$$

Para encontrar Δ_x sustituimos la primera columna del determinante por la columna de los términos independientes.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 12 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Cambiando la segunda y la tercera columna por la columna de los términos independientes obtenemos Δ_y y Δ_z respectivamente. Así es $\Delta_y = -12$ y $\Delta_z = -18$, de donde obtenemos la solución $x = 1$, $y = 2$, y $z = 3$.

3.6 Determinante de una matriz cuadrada

Teniendo en cuenta que los determinantes de segundo y tercer orden nos permitieron obtener un nuevo método para la resolución de sistemas de ecuaciones de orden 2 y 3, podemos pensar que este método podría ser válido también para sistemas cuadrados de mayor número de ecuaciones.

Continuemos pues el estudio de los determinantes de matrices cuadradas de cualquier orden.

Recordemos cómo eran los desarrollos de los determinantes de orden 2 y 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Observemos las regularidades que presentan estas expresiones:

- ♦ El número de factores coincide con el orden de la matriz
- ♦ En cada producto interviene un factor de cada fila y de cada columna, sin que estas se repitan dentro de cada uno de los productos.
- ♦ El signo que corresponde a cada producto puede determinarse de acuerdo con el número de inversiones que es preciso realizar para que la forma en que las columnas aparecen dispuestas en un producto determinado pueda llevarse al ordenamiento natural. Si este número es par, el signo es positivo y si es impar el signo es negativo.

Por ejemplo, en el segundo término que aparece en el determinante de orden 3, los subíndices que aparecen son: 13, 21, 32. Observemos que los números de las filas (primeros números) están ordenados en orden ascendente (1, 2, 3) y si queremos ordenar los números de las columnas, también en orden ascendente, tenemos que mover el 3 dos posiciones hacia atrás

$$(3\ \ 1\ \ 2 \rightarrow 1\ \ 3\ \ 2 \rightarrow 1\ \ 2\ \ 3),$$

luego, su signo es "+".

En el cuarto término tenemos 13, 22, 31. Ordenando las columnas

$$(3\ \ 2\ \ 1 \rightarrow 2\ \ 3\ \ 1 \rightarrow 2\ \ 1\ \ 3 \rightarrow 1\ \ 2\ \ 3),$$

necesitamos 3 movimientos, por lo que el signo es "-"

Siguiendo estas ideas demos una definición para el determinante de una matriz cuadrada de orden n.

Definición 3.16

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada de orden n. El *determinante* de A es el número que se obtiene con la suma algebraica de productos de coeficientes de la matriz siguiendo las siguientes reglas:

- Hay n! sumandos.
- Cada sumando es un producto que contiene n factores.
- En cada producto aparece representada una sola vez cada fila y cada columna de la matriz.
- Cada producto va precedido de un signo, que se obtiene de acuerdo con el número de inversiones que es preciso realizar para que la forma en que aparecen dispuestas las columnas (una vez dispuestas las filas en orden natural ascendente), pueda ser llevada a orden natural ascendente. Si este número es par, el producto correspondiente estará precedido de signo positivo, si el número de inversiones resulta impar, el producto estará precedido de signo negativo.

Es decir el determinante de una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ de orden n, viene dado por una expresión del tipo

$$\det A = \sum (-1)^k a_{ij_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\,, \qquad (3.16)$$

donde k es el numero de inversiones realizados para ordenar las columnas.

Al determinante de A lo denotaremos por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo:

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

3. Si A es de orden 4, es decir,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

   tres de sus términos serían, por ejemplo, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$, donde podemos observar que el segundo término que aparece tiene signo "-", pues las columnas tienen el orden 1, 2, 4, 3, y para ordenarla solo hay que realizar un cambio (el 3 con el 4). Mientras que en el tercer término tenemos 2, 3, 1, 4, por lo que tenemos que intercambiar el 1 con el 3 (2 1 3 4) y después el 1 con el 2 (1 2 3 4).

Para los determinantes de orden superior a 3 no es posible utilizar el método de Sarrus, por lo que se hace necesario buscar algún método práctico para calcularlos.

3.6.1 Propiedades de los determinantes

Veamos algunas propiedades de los determinantes que nos facilitarán su cálculo.

Propiedad 1

Si una de las columnas (filas) de un determinante esta íntegramente constituida por ceros, el determinante es nulo.

Supongamos que en la matriz $A=(a_{ij})_n$ la columna j esta íntegramente formada por ceros, entonces, dado que en cada sumando de (3.16) hay un miembro de la columna j, cada uno de los sumandos es cero, por lo que el determinante es 0.

Propiedad 2

Si en un determinante se intercambian dos columnas (filas), éste cambia de signo.

Mostrémoslo en un determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Intercambiando la segunda y la tercera fila nos queda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{33}a_{22} - a_{13}a_{21}a_{32}\,.$$

Observe que los términos que tienen signo "+" en el primer determinante, tienen signo "-" en el desarrollo del segundo, y viceversa.

Propiedad 3

Si en un determinante hay dos columnas (filas) iguales, éste es cero.

Supongamos que el determinante donde hay dos columnas iguales es Δ. Por la propiedad 2, si intercambiamos dos columnas, el determinante cambia de signo. Es decir, ahora sería $-\Delta$. Pero si intercambiamos las dos columnas iguales el determinante sigue siendo Δ. De donde $\Delta = -\Delta$, lo que hace que Δ sea 0, como queríamos probar.

Propiedad 4

Si una de las columnas (filas) de un determinante se multiplica por un escalar, todo el determinante queda multiplicado por dicho escalar

Si multiplicamos la columna j del determinante (3.16) por el número α y tenemos en cuenta que en cada término de su desarrollo aparece un elemento de esa columna, podemos sacar α factor común, por lo que todo el determinante queda multiplicado por α.

Ejemplifiquemos en un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha a_{22}a_{33} + a_{13}\alpha a_{21}a_{32} + a_{12}\alpha a_{23}a_{31} - a_{13}\alpha a_{22}a_{31} - a_{11}\alpha a_{23}a_{32} - a_{12}\alpha a_{21}a_{33}$$

$$= \alpha\,(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Propiedad 5

Si un determinante tiene una columna (fila) que es múltiplo de otra columna (fila), éste es cero.

Supongamos que nuestro determinante es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \alpha a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \alpha a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \alpha a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Como la columna j está multiplicada por α, por la propiedad 4 podemos sacar α fuera del mismo y nos queda

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pero en este determinante hay dos columnas iguales y por la propiedad 2, será igual a cero, como se quería mostrar.

Propiedad 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{\alpha_{1j}+\beta_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j}+\beta_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj}+\beta_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teniendo en cuenta la definición (3.16) del determinante y aplicando las propiedades del producto y suma de números nos queda

$$\sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} (\alpha_{ij_i} + \beta_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} = \sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \alpha_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \beta_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$
,

lo que demuestra la propiedad.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-12-4)+(-2-24-4-6) = -52 .$$

Nótese que, si lo calculamos directamente, obtendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2-36-8-6=-52.$$

Observemos que la propiedad 6 nos dice que el determinante de la suma de dos matrices no es igual a la suma de los determinantes de las matrices sumandos.

Ejemplo:

Sean

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det A+\det B=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}=-3+(12-20)=-11.$$

Por otra parte,

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=20-6=14\neq -11.$$

Propiedad 7

> El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo tamaño es el producto de los determinantes de dichas matrices. Es decir,
>
> $$\det(AB)=\det A \det B,$$
>
> donde A y B son dos matrices cuadradas de orden n.

Por ejemplo, si A y B son de orden 2, es decir,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

entonces,

$\det A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ $\det B = b_{11}\,b_{22} - b_{12}\,b_{21}$

$\det A \det B = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})(b_{11}\,b_{22} - b_{12}\,b_{21})$

$= a_{11}\,a_{22}\,b_{11}\,b_{22} - a_{12}\,a_{21}b_{11}\,b_{22} - a_{11}\,a_{22}\,b_{12}\,b_{21} + a_{12}\,a_{21}b_{12}\,b_{21}.$

Por otra parte

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

y si calculamos su determinante

$\det AB = (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})$

$=a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}-a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}-a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}$

$-a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}$

$= a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}\,a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}\,a_{22}b_{21},$

que coincide con el resultado encontrado anteriormente.

Propiedad 8

> Un determinante no se altera si a los elementos de una columna (fila) se le adicionan los de otra columna (fila) multiplicados por un escalar arbitrario.

Utilizando las propiedades 5 y 6 se obtiene de inmediato este resultado.

Veamos un ejemplo con un determinante de orden 3.

El determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} + a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} + a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

puede ser separado, utilizando la propiedad 6, como la suma de dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Aplicando la propiedad 5 al primer determinante tenemos

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y como el primer determinante que aparece en la suma es cero por tener dos columnas iguales (propiedad 3), se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11}+a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21}+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31}+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

como queríamos probar.

Propiedad 9

Para toda matriz cuadrada A se cumple que det A = det A^t

Mostremos este resultado para una matriz de orden 3.

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det A^t = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{21}\, a_{32} = \det A.$$

3.6.2 Menores de una matriz

Aunque ya se dispone de todo un conjunto de importantes propiedades que pueden ser aplicadas al cálculo de determinantes en situaciones específicas, las mismas presentan el inconveniente de requerir determinadas características en la matriz que no siempre están presentes en la práctica. Esto hace necesario encontrar una vía de cálculo más simple que la propia definición y que pueda ser aplicada al cálculo del determinante de una matriz en cualquier caso.

Partamos de una matriz de orden 3. En ese caso es

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}\, a_{22}a_{31} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

Si extraemos a_{11} factor común en los términos en que se encuentra y hacemos lo mismo con a_{12} y a_{13} tenemos que

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Notemos que cada uno de los paréntesis no es más que el determinante que resulta del inicial, al eliminar la fila y la columna en que se encuentra el coeficiente que multiplica a dicho paréntesis. Así,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (3.17)$$

Con la idea de generalizar esta propiedad a determinantes de mayor orden, veamos algunas definiciones.

Definición 3.17

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, se denominará *menor de orden (n-1) asociado al elemento a_{ij} de la matriz A*, al determinante de la matriz que resulta de eliminar de A la fila i y la columna j. Este menor se denotara por M_{ij}.

Ejemplo:

En la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -\sqrt{3} & 5 \\ \sqrt{2} & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

el menor M_{23} será

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

De (3.17) tenemos que $\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$. Observemos que el signo "+" y el signo "-", se corresponden con $(-1)^{i+j}$. Por ejemplo, si $i = j = 1$, entonces $i+j=2$ y como $(-1)^2 = 1$, el signo del término es "+".

Definición 3.18

Dada una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ de orden n, se denomina *cofactor asociado al elemento* a_{ij} de A al número $(-1)^{i+j} M_{ij}$, el cual será denotado por A_{ij}.

En la matriz del ejemplo anterior tenemos

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

3.6.3 Desarrollo de un determinante por menores

Teorema

Sea $a=(a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n, entonces

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \qquad (3.18)$$

o lo que es lo mismo

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}.$$

Tomemos el producto de cada elemento de la primera fila por el cofactor que le corresponde, es decir, consideremos los productos

$$a_{11}A_{11},\ \ a_{12}A_{12},\ \dots\dots\dots a_{1n}A_{1n}. \qquad (3.19)$$

Como ya sabemos, ningún coeficiente del determinante de A puede estar incluido en dos productos diferentes de (3.18) y todos los términos del determinante incluidos en el producto $a_{11}A_{11}$ contienen al coeficiente a_{11} , por lo que se diferencian de los términos que forman parte del producto $a_{12}A_{12}$. Además, el número total de términos del determinante de A que están incluidos en todos los productos (3.19) es igual a $(n-1)!n = n!$ y con ello se barren por completo los términos del determinante de A, por lo que se verifica (3.18).

Se puede obtener un desarrollo semejante si tomamos cualquier fila o columna. Es decir:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad \text{para} \quad 1 \le i \le n,$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \qquad \text{para} \quad 1 \le j \le n,$$

Ejemplo:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos su determinante utilizando la primera columna, que por contener un 0 facilita los cálculos

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&4&-2&-1\\-3&0&1&3\\-4&5&-3&2\end{vmatrix}$$

$$=1(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix}4&-2&-1\\0&1&3\\5&-3&2\end{vmatrix}+0(-1)^{2+1)}\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&1&3\\5&-3&2\end{vmatrix}$$

$$+(-3)(-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&-2&-1\\5&-3&2\end{vmatrix}+(-4)(-1)^{(4+1)}\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&-2&-1\\0&1&3\end{vmatrix}$$

$$=1(8-30+5+36)+0+(-3)(-8-36+5+30-6+8)+4(-12+12+2+12)$$
$$=19+21+56=96$$

Notemos que la presencia de un coeficiente cero en la posición (2,1) nos sugiere la conveniencia de efectuar el desarrollo por la primera columna.

Aplicando el desarrollo por menores, podemos ver rápidamente que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal. En efecto, sea

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\0&a_{44}&\cdots&a_{4n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\ldots=a_{11}a_{22}......a_{nn}\,.$$

3.6.4 Regla de Cramer para un sistema cuadrado de n ecuaciones con n incógnitas

Siguiendo la misma idea de los determinantes de orden dos y tres, podemos encontrar las soluciones de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Si el determinante del sistema es diferente de cero, tenemos solución única para el mismo y ésta viene dada por

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s} \quad \text{para} \quad i=1....n,$$

siendo Δ_s el determinante de la matriz del sistema y Δ_i el determinante que resulta de sustituir en Δ_s los coeficientes de x_i por los términos independientes.

En los siguientes epígrafes encontraremos otras aplicaciones de los determinantes.

3.7 Vectores fila y vectores columna

Recordemos que no siempre todas las ecuaciones que aparecen en un sistema lineal hacen un aporte significativo al conjunto solución del mismo, ya que en ocasiones, alguna de ellas pueden ser obtenidas mediante transformaciones elementales de las restantes. Por ejemplo, al aplicar el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 7 \\ 2x - 7y + 14z = -31 \end{cases},$$

vemos que la última de las ecuaciones puede obtenerse si multiplicamos la primera por 4 y después le sumamos la segunda multiplicada por 5, por lo que la misma no nos aporta nuevas soluciones a las obtenidas para las dos primeras.

Abordaremos el estudio de un concepto que permitirá expresar la relación de dependencia entre las ecuaciones y nos permitirá eliminar las que resulten de las tansformaciones elementales realizadas en el sistema inicial.

Definición 3.19

> Se denomina *vector n-dimensional* a todo sistema ordenado de n números $\alpha_1, \alpha_2,..,$ α_n . Si los α_i se disponen en la forma
>
> $$(\alpha_1, \alpha_2,\dots ,\alpha_n),$$
>
> el vector se denomina *vector fila*. Si los α_i se disponen en la forma
>
> $$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$
>
> el vector se denomina *vector columna.*

Estos vectores filas y columnas pueden ser interpretados como matrices de tamaño 1xn y nx1 respectivamente, por lo que para los mismos están definidas la suma y el producto por un escalar. Es decir,

$$(\alpha_1, \alpha_2,\dots ,\alpha_n) + (\beta_1, \beta_2,\dots ,\beta_n) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2,\dots, \alpha_n+\beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2,\dots ,\lambda\alpha_n)$$

y $$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\beta_1 \\ \lambda\beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\beta_n \end{pmatrix}.$$

Al vector que tiene todos los coeficientes iguales a cero se le conoce como *vector nulo*.

Definición 3.20

> Dado un sistema de n vectores fila (o columna) m-dimensionales ($v_1, v_2,\dots v_m$) se denomina *combinación lineal del sistema* (v_i) a toda expresión del tipo
>
> $$\alpha_1 v_1 +\alpha_2 v_2 .. +\alpha_m v_m$$
>
> donde los α_1 son elementos de   o   para todo i desde 1 hasta n.

Observemos que el resultado de una combinación lineal de un sistema de vectores fila (columna) es de nuevo un vector fila (columna).

Ejemplos:

1. Tomemos el sistema S= {(2,3,-1), (-3,6,-4), (-4,15,-9)}.Una combinación lineal de los vectores de S podría ser

(2+i)(2,3,-1)+i (-3,6,-4)-3 (-4,15,-9),

si consideramos que estamos trabajando en los complejos. Si los consideramos en los reales una combinación lineal pudiera ser

6(2,3,-1)+5 (-3,6,-4)-3 (-4,15,-9).

2. Si los vectores fuesen columna sería similar. Es decir, si

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} \right\},$$

una combinación lineal sería

$$6\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Observemos que con un sistema de vectores podremos formar infinitas combinaciones lineales dado que y tienen infinitos elementos. Es de destacar aquella combinación lineal en la cual todos los coeficientes son iguales a cero

$$0v_1+0v_2+....+0v_m,$$

que se conoce como *combinación lineal trivial* y el resultado es el vector nulo, lo que nos dice que el vector nulo siempre puede ser obtenido como combinación lineal de cualquier sistema de vectores.

También puede suceder que el vector nulo sea obtenido como combinación lineal no trivial de los vectores de un sistema.

Por ejemplo, si tenemos el sistema S= {(2,3,-1), (-3,6,-4), (-4,15,-9), se puede obtener el nulo como la combinación lineal (2,3,-1)+2 (-3,6,-4)- (-4,15,-9)=0, donde los coeficientes son no nulos. En estos casos decimos que el sistema es *linealmente dependiente*.

Definición 3.21

Un sistema de vectores filas (o columnas) (v_1, v_2, ...v_n) se dice *linealmente dependiente* (l.d.) si existe una combinación lineal no trivial de los v_i, que dé como resultado el vector nulo. En caso contrario, es decir, si la única combinación lineal de los vectores del sistema, que da como resultado el vector nulo, es la trivial, se dice que el sistema es *linealmente independiente* (l.i.).

Ejemplos:

1. El sistema S= {(2,3,-1), (-3,6,-4), (-4,15,-9)} es linealmente dependiente, dado que

$$(2,3,-1)+2\,(-3,6,-4)-(-4,15,-9)=(0,0,0).$$

2. Todo sistema que contenga al vector nulo es l.d.

   En efecto, si tenemos el sistema $(v_1, v_2, ..., v_n)$ donde algún vector es nulo, por ejemplo, el v_i, podemos establecer una combinación lineal tomando a cero como coeficiente de los v_j con $j\neq i$ y para v_i tomamos un coeficiente diferente de cero.

$$0v_1+0v_2+......+\alpha v_i+......+0v_m.$$

   Esta combinación lineal es no trivial y da como resultado el vector nulo. Luego, el sistema es l.d.

3. El sistema

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

   es linealmente independiente, pues la combinación lineal

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   da como resultado el nulo solamente si α y β son cero a la vez.

Teorema

Un sistema de vectores $(v_1, v_2, ...v_n)$ es linealmente dependiente si y solamente si al menos uno de los vectores se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

Si partimos de la definición de dependencia lineal para un sistema de vectores tenemos que si el sistema es l.d., entonces

$$\alpha_1 v_1 +\alpha_2 v_2.+...+ \alpha_i v_i+.......+\alpha_m v_m=0, \qquad (3.20)$$

donde al menos uno de los coeficientes es diferente de cero. Supongamos que $\alpha_i \neq 0$.

Podemos entonces dividir toda la expresión por α_i y despejar a v_i

$$v_i = \frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_i} v_2 + ... + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} + ... + \frac{\alpha_m}{\alpha_i} v_m .$$

Supongamos ahora que uno de los vectores se puede expresar como combinación lineal de los restantes. Sea v_i tal vector. Entonces

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 .+...+ \alpha_{i-1} v_{i-1}. + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \alpha_m v_m.$$

Sumando el opuesto de v_i en ambos miembros de la igualdad obtenemos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 .+...+ \alpha_{i-1} v_{i-1}.-v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \alpha_m v_m = 0,$$

que es una combinación lineal no trivial de los vectores del sistema que da como resultado el nulo (el coeficiente de v_i es -1), con lo que queda demostrado el teorema.

Como consecuencia del teorema tenemos que

> Un sistema de vectores es l.i. si y sólo si ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

En particular un sistema formado por un solo vector v es l.i. si y solo si $v \neq 0$, dado que este caso y solo en éste, la única combinación lineal (αv) que da el nulo es cuando $\alpha = 0$.

Además, el sistema S que consta de 2 vectores será es l.d. si solo si los vectores son múltiplos uno del otro. En efecto el sistema (v;w) es l.d. si y solamente si existen números α_1 y α_2 no nulos a la vez, tales que $\alpha_1 v + \alpha_2 w = 0$. Si $\alpha_2 \neq 0$ tenemos que $w = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v$ y si $\alpha_1 \neq 0$ tenemos que $v = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} w$.

Ejemplos:

1. El sistema S={(3,-1), (9,-3)}, formado por dos vectores, es l.d. pues son múltiplos uno del otro.
2. S={(2,3,-1), (-3,6,-4), (-4,15,-9)}. Buscamos una combinación lineal que dé como resultado el nulo.

$$\alpha(2,3,-1) + \beta(-3,6,-4) + \gamma(-4,15,-9) = (0,0,0),$$

$$(2\alpha, 3\alpha, -\alpha) + (-3\beta, 6\beta, -4\beta) + (-4\gamma, 15\gamma, -9\gamma) = (0,0,0),$$

$$(2\alpha - 3\beta - 4\gamma, 3\alpha + 6\beta + 15\gamma, -\alpha, -4\beta - 9\gamma) = (0,0,0),$$

lo que nos lleva a las igualdades

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta - 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + 15\gamma = 0 \\ -\alpha - 4\beta - 9\gamma = 0 \end{cases}.$$

Tratando de eliminar β, si multiplicamos la primera ecuación por 2 y le sumamos la segunda obtenemos la ecuación $\alpha + \gamma = 0$

Y si multiplicamos la primera por 4 y le restamos la tercera multiplicada por 3, tenemos $\alpha + \gamma = 0$

Lo que nos lleva al sistema

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases},$$

de donde $\alpha = -\gamma$ y $\beta = -2\gamma$.

Luego, hay infinitas soluciones para el sistema de ecuaciones, por lo que el sistema de vectores es l.d.

3. Sea S= {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)}. Escribamos la combinación lineal

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0),$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Luego, la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo que el sistema es l.i.

Observemos que todo sistema tiene subsistemas l.i., a menos que sea el sistema formado por un único vector nulo. El sistema del ejemplo 2, a pesar de ser l.d., tiene todos los subsistemas unitarios y todos los subsistemas formado por dos vectores son l.i.

Definición 3.22

> Diremos que un sistema es l.i. *maximal*, si es l.i. y al agregarle otro vector, el nuevo sistema resulta linealmente dependiente.

Así, los sistemas formados por dos elementos en el ejemplo 2 son l.i. maximales.

Se puede probar que todos los subsistemas maximales de un sistema S poseen el mismo número de vectores, lo que nos permite dar la siguiente definición.

Definición 3.23

> Dado un sistema finito S de vectores fila o columna, se denomina *rango de S* al número de vectores de uno cualquiera de sus subsistemas l.i. maximales.

Ejemplos:

1. El sistema S= {(2,3,-1), (-3,6,-4), (-4,15,-9)}, tiene rango 2, dado que S es ld y el subsistema S_1= {(2,3,-1), (-3,6,-4)} es l.i.
2. El sistema S= {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)} tiene rango 3, pues S es un sistema l.i.

3.8 Rango de una matriz

Definición 3.24

Llamaremos *rango de una matriz* al rango del sistema formado por sus vectores filas. Al rango de A lo denotaremos por rg A.

Ejemplos:

1.Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & -4 \\ -4 & 15 & -9 \end{pmatrix}$,

entonces rg A=2, pues sus filas son los vectores del ejemplo 2 analizado anteriormente y vimos que el rango de ese sistema es 2.

Mientras que si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene rg B = 3, pues sus filas son los vectores del sistema del ejemplo 3 y este sistema tiene rango 3.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En esta matriz los vectores filas son l.i., pues no son múltiplos uno del otro. Luego es rg A = 2 .

3.8.1 Cálculo del rango de una matriz

Dado lo engorroso que puede resultar el cálculo del rango de una matriz en base a la definición, trataremos de encontrar un método práctico que permita calcular el mismo.

Definición 3.25

> Dada una matriz A de tamaño mxn y un número natural k≤ min (m,n), se denomina *menor de orden k* de A, al determinante de cualquier matriz cuadrada que resulte de intersecar k filas y k columnas de A.

Por ejemplo, en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

los determinantes enmarcados son menores de orden 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

y también lo es el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & _{34} \end{vmatrix},$$

que resulta de interceptar las filas 2 y 3 con las columnas 1 y 4.

Para esta matriz tenemos menores de orden 1, 2 y 3, pero no podemos formar determinantes de orden superior a 3, dado que ella tiene solamente 3 filas.

Teorema

> Una matriz es de rango r si posee un menor de orden r diferente de cero y todos los menores de orden k > r son nulos.

Demostración:

Sea r el orden superior de los menores de la matriz diferentes de cero. Sin perdida de generalidad supongamos que el menor de orden r en la esquina superior izquierda del matriz es no nulo. Llamémosle D a este menor, es decir, D≠0

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{n} \\ \cdots & D & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las primeras r columnas de la matriz serán l.i.

Mostremos ahora que cualquier s-ésima columna de la matriz, $r<s<n$ es combinación lineal de las r primeras.

Tomemos cualquier i entre r y m y formemos un determinante de orden r+1 bordeando a D, es decir, formemos el determinante

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{is} \end{vmatrix}.$$

Para cualquier i este determinante es cero, pues sería un determinante de orden r+1 y por hipótesis todos son cero. Por otra parte, si i es menor o igual que r, este determinante no será un menor de la matriz, dado que no se obtiene interceptando igual número de filas y columnas de la misma, sin embargo también sería cero pues contendría dos filas iguales.

Si consideramos los cofactores de los elementos de la última fila de D_i, notamos que D es el cofactor del elemento a_{is}. Para j entre 1 y r, el cofactor del elemento a_{ij} en D_i es el número A_j, donde

$$A_j=(-1)^{(r+1)+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rj-1} & a_{rj+1} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \end{vmatrix},$$

que no depende de i. El determinante D_i puede ser desarrollado por su última fila y como $D_i=0$, tenemos

$$a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+.....+a_{ir}A_r+a_{is}D=0.$$

Teniendo en cuenta que $D\neq 0$, podemos despejar a_{is} y nos queda

$$a_{is}=-\frac{A_1}{D}a_{i1}-\frac{A_2}{D}a_{i2}-....-\frac{A_r}{D}a_{ir}.$$

Esta igualdad es válida para todo i desde 1 hasta m y como los coeficientes no dependen de i, resulta que la s-ésima columna de la matriz A es combinación lineal de las primeras r columnas. Luego un sistema linealmente independiente maximal de columnas de A está formado por las primeras r columnas, lo que nos dice que el rango de A es r, como queríamos probar.

Este teorema nos brinda un método práctico para determinar el rango de una matriz, dado que basta encontrar un menor de orden r diferente de cero y analizar los que lo bordean de orden r+1, hasta encontrar uno diferente de cero o mostrar que todos son cero.

Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

el menor de orden 2 de la esquina superior izquierda es diferente de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Formamos los menores de orden 3 que lo bordean, hasta encontrar uno diferente de cero o verificar que son todos nulos.

Encontramos que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 .$$

Ahora tendríamos que probar con los menores de orden 4 que lo bordean. En este caso, solamente hay 2 y ambos son iguales a cero (se deja el cálculo como ejercicio) por lo que el rango de la matriz es 3.

Consecuencias

- Como el determinante de una matriz no cambia si se ésta se transpone, los menores de una matriz y los de su transpuesta son los mismos, por lo que

  $$\text{rg}A = \text{rg } A^t.$$

  De aquí que el rango de una matriz coincide con el número máximo de columnas l.i. que ella posee.

- Si A es de tamaño mxn, entonces rg $A \leq \min(m,n)$.

- Si A es cuadrada de orden n, entonces rg A=n $\Leftrightarrow$ det A$\neq$0$\Leftrightarrow$ las filas (columnas) de A son l.i.

3.9 Matriz inversible. Condición de inversibilidad

Definición 3.26

Se dice que la matriz A de orden n es *inversible*, o *no singular*, si existe una matriz B, llamada la *inversa de* A, tal que $AB = BA = I_n$

Obsérvese que la definición obliga a que B sea de orden n.

Una matriz inversible sólo tiene una inversa, es decir, la inversa es única. Si C fuera otra inversa, entonces sería

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

por consiguiente sería B=C.

La inversa de una matriz inversible A será denotada por A^{-1}.

Así

$$\boxed{AA^{-1}=A^{-1}A= I_n.}$$

Una matriz cuadrada que no tiene inversa se llama *no inversible* o *singular*.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, su inversa será la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ ¡ Compruébelo!

Observemos que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Por ejemplo, la matriz nula no tiene inversa, dado que no existe otra matriz que multiplicada por la nula nos dé la identidad.

Veamos como encontrar la inversa de una matriz de orden 2.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La inversa de A será una matriz de orden 2. Supongamos que sea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Entonces debe ser

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De ahí que

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que nos lleva a los sistemas

$$\begin{cases} ae + bg = 1 \\ ce + dg = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} af + bh = 0 \\ cf + dh = 1 \end{cases}.$$

En el primer sistema las incógnitas son e y g y en el segundo f y h. Observemos que ambos sistemas tienen solución única si ad-bc≠0, es decir, si el determinante de A no es cero. Aplicando la regla de Sarrus para resolver los sistemas, tenemos

$$e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \quad g = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = -\frac{c}{\det A}, \quad f = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = -\frac{b}{\det A},$$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplos:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

   entonces det A= -2, luego $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En este caso es det A =0, por lo que no existe A^{-1}, pues no podemos dividir por cero.

3.9.1 Propiedades de las matrices inversibles

1. El producto de dos matrices inversibles es inversible. Es decir, si A y B son matrices inversibles de orden n, también lo es AB y $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

   Necesitamos comprobar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB)=I$.

   Tenemos que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} =I$

   $$y\ \ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B= I.$$

   Notemos que la inversa del producto es el producto de las inversas de los factores en orden inverso.

   Nota: Si $A_l,A_2,...,A_{n-1}, A_n$ son inversibles y del mismo tamaño, también lo es el producto

   $A_1\, A_2 \cdots A_{n-1}\, A_n$. Su inversa es

   $$(A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

2. La inversa de una matriz inversible también es inversible. Es decir si A es inversible, también lo es A^{-1}, y $(A^{-1})^{-1} =A$.

   Como A es inversible, $AA^{-1} =I =A^{-1}A$. Esto demuestra que A^{-1} también es inversible, y

   $$(A^{-1})^{-1} =A.$$

3. El producto de una matriz inversible por un escalar distinto de cero es también una matriz inversible y su inversa es el producto del inverso del escalar por la inversa de la matriz. Es decir, si A es inversible y c es un escalar distinto de cero, entonces cA es inversible y

   $$(cA)^{-1} = (1/c)\, A^{-1}$$

   Sea B la inversa de cA entonces B(cA)=I, pero B(cA)=cBA, de donde BA=(1/c)I, de ahí que $B=(1/c)IA^{-1}$. Es decir, $B=(1/c)\, A^{-1}$.

4. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

   En efecto como $A \cdot A^{-1}=I$ tenemos que $\det A \cdot \det A^{-1}= \det I=1$, de donde, si despejamos $\det A^{-1}$, encontramos la propiedad planteada.

5. Potencias de matrices con exponentes negativos.

Si A es inversible, las potencias de A con exponentes negativos, se definen en la siguiente forma:

Para n entero y n > 0

$$A^{-n} = (A^{-1})^{n} = A^{-1} A^{-1} \ldots A^{-1} \quad \text{(n factores).}$$

3.9.2 Algoritmo para calcular la inversa de una matriz

Tratemos de encontrar un algoritmo para calcular la inversa de una matriz.

Veamos un ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y supongamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtienen los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3z=1 \\ x+2z=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2y+3t=0 \\ y+2t=1 \end{cases},$$

cuyas matrices ampliadas respectivas son

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Si las transformamos realizando operaciones elementales en ellas tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

De ahí que sea x =2, z= -1. Lo mismo hacemos con la segunda matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

de donde y= -3, t=2 y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que podríamos haber trabajado las dos matrices a la vez escribiendo la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Observe que comenzamos con el esquema [A : I] y terminamos con [I : A^{-1}].

Si A no es inversible, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

y pretendemos aplicar el mismo método que en el caso anterior, tendríamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

donde encontramos una fila de ceros, lo que nos impide solucionar el sistema de ecuaciones.

Este algoritmo es también válido para matrices de mayor tamaño.

3.10 Matrices elementales

Definición 3.27

> Una matriz cuadrada de orden n, se dice *elemental* si se puede obtener de la matriz identidad de orden n usando una y sólo una transformación elemental por fila. Así las matrices elementales de orden n son siempre equivalentes a I_n.

Recordemos que las transformaciones elementales son:

- Sustituir una fila por su suma con un múltiplo de otra fila ($f_i + cf_j \rightarrow f_i$).
- Sustituir una fila por un múltiplo no nulo de ella misma ($cf_i \rightarrow f_i$).
- Intercambiar dos filas ($f_i \leftrightarrow f_j$).

Ejemplo: Las matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son elementales. E_1 resulta de intercambiar las filas de I_2. E_2 se obtiene sumándole a la primera fila de I_2 la segunda multiplicada por 4 y E_3 se obtiene de multiplicar la segunda fila de I_3 por -3

Utilizando las propiedades de los determinantes, es fácil comprobar que si E es una matriz elemental que se obtiene por un intercambio de filas entonces det E= -1. Si E se obtiene mediante la transformación $cf_i+f_j \to f_j$, donde "c" es un número diferente de cero entonces det E= 1. Y si E se obtiene mediante $cf_i \to f_i$, con "c" diferente de cero, entonces su determinante es "c".

Observemos que

$$\det(EA) = \det E \det A = \begin{cases} -\det A \\ \det A \\ c\det A \end{cases},$$

en dependencia del tipo de matriz elemental que sea E.

Las matrices elementales tienen la propiedad de que al multiplicar a la izquierda una matriz A cualquiera por una matriz elemental E, el producto EA es la matriz que se obtiene al realizar en A la misma operación elemental que se utilizó en I para obtener E.

Por ejemplo, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Si pretendemos intercambiar dos filas, digamos la primera y la segunda, basta con premultiplicarla por la matriz elemental de orden 3, que resulta de la identidad de orden 3 al intercambiar la primera y la segunda fila.

Es decir,

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Observemos que al multiplicar la primera fila de E por las columnas de A, solamente quedan los elementos a_{2i}, luego la primera fila del producto sería el vector fila $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$, que es la segunda fila de A y cuando multiplicamos la segunda fila de E por las columnas de A, nos quedan solamente los elementos a_{1i}, de donde la segunda fila de la matriz producto sería la primera de A. Mientras que la tercera fila se queda igual.

De igual manera se prueba en los otros casos, lo cual dejamos como ejercicio al estudiante.

Ya vimos que una matriz de orden 2 es inversible si y solo si su determinante es no nulo. Sabemos además, que utilizando las transformaciones elementales en A, podemos reducirla a una matriz triangular. Como las transformaciones elementales equivalen a premultiplicar A por una matriz elemental, tenemos que A es equivalente a T si A se puede obtener de T premultiplicando T por un número finito de matrices elementales, es decir, si $A=E_1E_2E_3\cdots E_kT$.

De ahí que $\det A= \det E_1 \det E_2 \det E_3 \cdots \det E_k \det T$ y como el determinante de E_i es diferente de cero, tenemos que

$$\det A=0 \Leftrightarrow \det T=0.$$

Mostremos otra vía práctica para encontrar la matriz inversa de una matriz cuadrada A con determinante no nulo, utilizando la transpuesta de la matriz formada por los cofactores de los coeficientes de la matriz A, conocida como la *adjunta* de la matriz A.

Veamos que:

Si A es una matriz de orden n, entonces

$$A\ \mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I$$

Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces la adjunta de A será

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

donde A_{ij} es el cofactor de aij (i,j=1,...n).

Sea $C=(c_{ij})=(A)(\mathrm{adj}A)$, entonces

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Así es

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix},$$

de donde $c_{ij}= a_{i1}A_{j1}+ a_{i2}A_{j2}+ a_{i3}A_{j3}+\ldots\ldots +a_{in}A_{jn}$. Notemos que si $i=j$, obtenemos

$$c_{ii}=a_{i1}A_{i1}+ a_{i2}A_{i2}+ a_{i3}A_{i3}+\ldots\ldots +a_{in}A_{in},$$

que es el desarrollo del determinante de A por la fila i.

Y si $i\neq j$, esa suma es cero, pues sería el determinante de una matriz que tiene dos filas iguales. De aquí podemos concluir que

$$C=\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix},$$

como queríamos demostrar.

Del resultado anterior, tenemos que $A(\mathrm{adj}A)=(\det A)I$, y de ahí si $\det A\neq 0$, obtenemos

$$\frac{A(\mathrm{adj}A)}{\det A}=I_n .$$

Es decir,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A . \qquad (3.21\ )$$

Ejemplo:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Para determinar si A es o no inversible, calculamos su determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 - 9 + 10 = 3 \neq 0\,,$$

por lo que A es inversible

Podemos calcular adjA determinando previamente los A_{ij}. Así tenemos que

$$\operatorname{adj}A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{-13}{3} & \frac{-7}{3} \\ -1 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3.11 Análisis general de sistemas cuadrados

En este epígrafe aplicaremos los conceptos estudiados al análisis general de los sistemas cuadrados de ecuaciones lineales.

Consideremos el sistema cuadrado

$$AX=B,$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n con determinante no nulo. Como existe la inversa de A, podemos multiplicar la ecuación matricial por A^{-1} y nos quedaría

$$X=A^{-1}B,$$

relación que brinda la única solución de dicho sistema. Si sustituimos A^{-1} por la expresión (3.21), encontramos la generalización de Regla de Cramer al caso de n ecuaciones con n incógnitas

$$x_i = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + ... + b_n A_{ni}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Así podemos concluir que los sistemas cuadrados, donde la matriz A sea inversible, es siempre compatible determinado.

Los razonamientos anteriores no son válidos para los sistemas cuadrados, donde el determinante de la matriz sea igual a cero. Veamos cómo proceder en estos casos.

Consideremos el sistema general de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad AX=B.$$

Este sistema puede ser escrito en la forma

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots\cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bien más abreviadamente en la forma

$$x_1c_1+x_2c_2+......+x_nc_n=B, \tag{3.22}$$

donde c_i representa la i-ésima columna de A.

Notemos que si el sistema tiene solución (α_1, α_2, α_3,....... α_n), ello significa que al sustituir las x_i en (3.22) obtenemos que B es combinación lineal de los vectores columna de A, de donde se deduce que el rango de A es igual al de su matriz ampliada $(\overline{A})$.

Razonando inversamente vemos que si B no puede expresarse como combinación lineal de los vectores columna $c_{i,}$ entonces al añadirse B a A para obtener las matrices ampliadas, el rango aumentará en una unidad, de donde se concluye que si se supone rg A =rg $\bar{A}$, entonces existen escalares (α_1, α_2, α_3,....... ,α_n), tales que

$$\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2+......+\alpha_n c_n=B,$$

lo que significa que el sistema (α_1, α_2, α_3,....... α_n) es una solución del sistema lineal inicial y, por tanto, éste es compatible.

Podemos entonces concluir con el enunciado del teorema de Kronecker-Capelli:

Teorema

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones lineales AX=B sea compatible es que rgA= rg $\bar{A}$.

Una vez determinada la compatibilidad del sistema AX=B por el teorema de Kronecker-Capelli, es posible determinar el número de variables libres que eventualmente pudieran aparecer en su solución.

Supongamos que tenemos el sistema

$$AX=B,$$

o sea,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y que $\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}\bar{A} = r$.

Entonces podemos suprimir m-r ecuaciones del sistema, dado que ellas serían combinación lineal de las otras y nos quedaría

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_{r3} + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots\cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}. \qquad (3.23)$$

Está claro que $r \le n$, dado que el rango no puede ser mayor que el número de incógnitas.

Si r=n, el sistema (3.23) tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y tendrá solución única.

Si r<n, supongamos que el menor formado por las r primeras incógnitas es diferente de cero. Entonces podemos despejar las incógnitas x_1, x_2, ...x_r en función de las restantes

$x_{r+1}....x_n$. Traslademos pues al segundo miembro todos los términos que contienen las incógnitas $x_{r+1}....x_n$ y elijamos para estas incógnitas algunos valores c_{r+1}, ... c_n. Entonces obtenemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r == b_1 - a_{1,r+1} - \cdots\cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1} - \cdots\cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1} - \cdots\cdots - a_{rn}x_n \end{cases} . \qquad (3.24)$$

Este es un sistema de r incógnitas al que se le puede aplicar la regla de Cramer, hallando la solución única para c_1, c_2,...c_r . Entonces c_1, c_2,...c_r, c_{r+1},...c_n es solución del sistema (3.23) y como los valores c_{r+1},...c_n que toman las variables independientes x_1, x_2,...x_n son arbitrarios, se pueden obtener de este modo infinitas soluciones para los sistemas (3.23) y (3.24).

Entonces podemos concluir:

El sistema compatible (3.23) tiene solución única si y solo si el rango de la matriz del sistema es igual al número de incógnitas del mismo.

Ejemplo:

Dado el sistema

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ x + ky + z = 1, \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

analicemos su compatibilidad teniendo en cuenta los valores de “k”.

La matriz ampliada será

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right),$$

cuyo rango no puede ser superior a 3 dado que tiene 3 filas.

Calculemos el rango de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 - 1 - k - k + k = k^3 - k = k(k-1)(k+1)$$

y por tanto, el rango será 3 si $k\neq 0$, $k\neq 1$ y $k\neq -1$, por lo que en estos casos será compatible determinado.

Si $k=0$ tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 2, dado que $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, mientras que el rango de la matriz ampliada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

es 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ es diferente de cero.

Entonces podemos concluir que en el caso $k=0$ el sistema es incompatible.

Si $k=1$, entonces

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

de donde podemos apreciar que tanto el rango de A como el de la matriz ampliada es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ es no nulo, mientras que todos los de orden 3 son nulos.

De aquí podemos concluir que el sistema es compatible indeterminado, pues tiene 3 incógnitas y el rango es 2.

Si $k = -1$, la matriz del sistema será

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 2, pues su determinante es cero y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, mientras que la matriz ampliada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

tiene rango 3. Luego, para k= -1 el sistema es incompatible.

3.12 Sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Sabemos que el sistema AX=B es homogéneo si B es el vector nulo, en cuyo caso el sistema sería

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

En este caso siempre el rango de la matriz ampliada coincidirá con el rango de la matriz del sistema, por lo que siempre es compatible. Entonces tenemos dos posibilidades:

1. Si el rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y como siempre tiene la solución nula (cosa esta fácil de comprobar sustituyendo las x_i por 0), este sistema tiene por única solución la nula.
2. Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema tendrá infinitas soluciones.

Observemos además que si tenemos un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas, éste tendrá solución única si el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero, en caso contrario el sistema tendrá infinitas soluciones.

Ejemplo:

Analicemos las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}.$$

Ya sabemos que si k≠0 k≠1 y k≠-1, entonces el rango de la matriz del sistema es 3 y como el sistema es homogéneo, tendrá solución única.

En los casos k=0, k=1 y k=-1 el determinante de la matriz del sistema es cero, por lo que el sistema tendrá infinitas soluciones, contando entre ellas a la solución nula.

EJERCICIOS

1. Diga si las siguientes ecuaciones son o no lineales, en caso de ser lineal diga si es o no homogénea, determine su homogénea correspondiente. Dé una solución particular y la solución general de la ecuación dada.

   a) 3x-4=2x+2y+4

   b) 2+3x+y+z=2

   c) xy-3x+3y=0

2. Determine si existe o no solución para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de existir, encuentre la solución del mismo.

   a) $\begin{cases} x+5y=8 \\ 3x+6y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2ix+3y=1 \\ x+(1-i)y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-2y-4z=3 \\ 3x+y-5z=7 \end{cases}$

3. Encuentre condiciones sobre a, b, c y d para que el sistema dado no tenga solución

   $\begin{cases} ax-by=c \\ bx+ay=d \end{cases}$

4. En un corral hay solamente gallinas y carneros. En total se tienen 60 cabezas y 200 patas. ¿Cuánta gallinas y cuántos carneros hay en el corral?

5. Aplicando el método de eliminación de Gauss, determine si existe o no solución para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de existir encuentre la solución del mismo.

   a) $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ 3x+2y-z=-3 \\ 2x+4y+z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+y+z=5 \\ 5x+4y-z=3 \\ 3x+6y+z=13 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+6x_3-4x_4=4 \\ x_1+x_2-x_4=5 \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$

6. Sea

$$M=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -5 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Escriba dicho sistema de ecuaciones y aplique a M una operación elemental por fila para que el sistema de ecuaciones resulte en forma escalonada.

7. Escriba la matriz ampliada del sistema

$$\begin{cases} x+y=1\\ y+z=1\\ z+t=1\\ t+x=1 \end{cases},$$

redúzcala a la forma escalonada. Clasifique el sistema. Si fuese compatible encuentre su solución general.

8. Aplicando el método de Gauss, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$\text{a)}\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+2x_4=-7\\ -2x_1+2x_2+2x_4=-2\\ -x_1+x_2+x_3-2x_4=6\\ -2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-3 \end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases} -x_1+x_3+x_4-x_5=-1\\ x_2-x_4-x_5=0\\ x_2-x_3-x_4+x_5=-6\\ x_2+x_3-x_4=3\\ x_1-x_2-x_3+x_5=2 \end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=0\\ -x_3-x_4+x_5=0\\ x_1-x_2+x_4+x_5=0\\ -x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0\\ -x_1=0 \end{cases}$$

9. Analice la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales que tiene por matriz ampliada a la matriz

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & a & b & d & f \\ 0 & 2 & c & e & g \\ 0 & 0 & 0 & 2 & h \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & b & d \\ 0 & 2 & c & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

10. Compruebe que si el sistema lineal AX=C es incompatible, entonces el sistema AX=B es incompatible o tiene infinitas soluciones y que si AX=C es compatible determinado entonces le sistema AX+B también es compatible determinado, cualquiera sea B.

11. En cada uno de los casos siguientes diga si el vector w es combinación lineal de u y v.

a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b-2c \end{pmatrix}$

b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. Determine para qué valores de x, e y se verifica la igualdad de las matrices que se indica en cada caso.

a) $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & x+2y & 2y+z \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

13. En los casos que sea posible realice las operaciones indicadas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ b) $-4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. Si es posible, calcule los siguientes productos

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. Si

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 7 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que $A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \end{pmatrix}$.

16. Si

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 5 & -5 \\ \cdots & \cdots \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que

$$CD = \begin{pmatrix} C_{11}D_1 + C_{12}D_2 \\ C_{21}D_1 + C_{22}D_2 \end{pmatrix}$$

17. Escriba en cada caso el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz ampliada dada.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{array}\right)$

18. Determine en cada caso si la matriz es inversible. Si lo es, halle su inversa.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \\ 2 & -1 & 19 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & -12 & 10 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3-i & 2 & -i \\ 1 & 1-i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$

19. Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ es su propia inversa si $A=\pm I$ o si $\alpha_{11}=-\alpha_{22}$ y $\alpha_{21}\alpha_{21} + (\alpha_{11})^2 = 1$.

20. Muestre que para todo número real α la matriz dada es inversible y encuentre su inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

21. En cada caso encuentre la transpuesta de la matriz dada.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

22. Pruebe que si A y B son matrices simétricas del mismo orden, entonces A+B también es simétrica.

23. Pruebe que si A y B son matrices antisimétricas del mismo orden, entonces A+B es también antisimétrica

24. Muestre que cualquier matriz cuadrada puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

25. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz con elementos reales no negativos, que tienen las propiedades siguientes:

i) $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1 \quad \text{y} \, \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$

ii) $\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0$

Muestre que A es inversible y que $A^{-1}=A^t$.

26. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

calcule $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$ y compruebe que son iguales.

27. Determine cuales de las siguientes matrices son matrices elementales

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

28. Encuentre una matriz elemental E tal que EA=B, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -9 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

29. En cada caso encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. Muestre que cada una de las siguientes matrices es inversible y escríbala como producto de matrices elementales.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 4 \end{pmatrix}$

31. Calcule los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

32. Aplicando las propiedades de los determinantes calcule:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

33. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 5$$

Calcule

a) $\begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 3\alpha_{31} & 3\alpha_{32} & 3\alpha_{33} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha_{11}-2\alpha_{31} & 3\alpha_{12}-2\alpha_{32} & 3\alpha_{13}-2\alpha_{33} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$

34. Demuestre que si λ es un numero cualquiera y A es una matriz de orden n, entonces det $\lambda A=\lambda^n$ det A.

35. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

muestre que $\det A^{-1}=1/\det A$.

36. Determine los valores de t para los cuales las siguientes matrices son inversibles

a) $\begin{pmatrix} -3 & 1-t \\ t & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} t+1 & 2 & t+1 \\ t-1 & 1 & t-1 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

TEMA I

1. a) Re(z_1)=2, Im(z_1)=5; b) Re(z_2)=1, Im(z_2)=3; c) Re(z_3)=-4, Im(z_3)=1; d) Re(z_4)=3, Im(z_4)=-5; e) Re(z_5)=-1, Im(z_5)=-2; f) Re(z_6)=Im(z_6)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a) x=4, y=0; b) x=0, y=4; c) x=1, y=1; d) x=1, y=7 ó x=2, y=7; e) x=-1, y=-6 ó x=2, y=3.

3. a) real si $y=\frac{1}{2}$, $x\geq\frac{1}{4}$, imaginario si $x=7-\sqrt{23}$, $y\in$.

   b) nunca es real, imaginario si $x=5$ ó $x=-3$, $y\in$.

4. a) (8, 5); b) (9, -1); c) (2, 2); d) (–2, 1); e) (16, 18); f) (–1/2, -1); g) (13, 0);

   h) $\left(\frac{3}{13},-\frac{2}{13}\right)$; i) $\left(\frac{3}{13},\frac{2}{13}\right)$; j) $\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$; k) $\left(\frac{7}{13},\frac{22}{13}\right)$; l) $\left(-\frac{11}{10},\frac{7}{10}\right)$;

   m) $\left(\frac{13}{2},-5\right)$; n) (-23, -5); o) (0, 4); p) $\left(-1,2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right)$.

5. a) $a=-7$, $b\in$; b) $b=-2$, $a\in$; c) $a=3$, $b\in$; d) $a=\frac{13+2b}{1-b}$, $b\neq 1$.

7. La diferencia de números complejos no es conmutativa. Ejemplo:

   (3, 0) - (2, 0) = (1, 0), mientras que (2, 0) - (3, 0) = (-1, 0) ≠ (1, 0).

8. a) 8+5i; b) 9-i; c) 2+2i; d) –2+i; e) 16+18i; f) –1/2-i; g) 13.

9. a) Re(z)=3, Im(z)=-4; b) Re(z)=1, Im(z)=5/2; c) Re(z)= $2\sqrt{5}+1$, Im(z)= $2-\sqrt{5}$;

   d) Re(z)= $6\sqrt{3}$, Im(z)=-6; e) Re(z)=13/2, Im(z)=-5; f) Re(z)=-23, Im(z)=-5;

   g) Re(z)=0, Im(z)=4; h) Re(z)=-1, Im(z)= $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

10. a) (1,7), (2,7); b) (4,0); c) (0,3); d) (-1,-6), (2,3); e) (1,1); f) (- 23/26, 15/26).

11. a) $x=\frac{i-2}{5}$; b) $x=\frac{7+22i}{13}$; c) $x=\frac{-9+2i}{10}$.

12. a) k=-9; b) k=1.

13. $z_1=3-i$, $z_2=1+i$ ó $z_1=-1-i$, $z_2=-3+i$.

14. a) $\frac{11}{2}-\frac{3}{2}i$; b) $\frac{\sqrt{2}}{9}(-15+2i)$; c) $78+74i$; d) $\frac{(2-8e)-(16+e)i}{4}$; e) $8-6i$.

15. a) $|z|=5$; b) $|z|=\sqrt{2}$; c) $|z|=2$; d) $|z|=x^2+y^2$.

16. a) $|z|=2,\ \arg z=0$; b) $|z|=\sqrt{10},\ \arg z=\operatorname{arctg}3$; c) $|z|=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \arg z=\frac{\pi}{4}$;

d) $|z|=0$; e) $|z|=\sqrt{221},\ \arg z=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{11}{10}$; f) $|z|=\frac{1}{5},\ \arg z=\frac{3\pi}{4}$.

17. a) Sustituyendo en la igualdad la forma de los números; b) Usando a).

18. a) $z=2\operatorname{cis}\pi$; b) $z=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$; c) $z=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$; d) $z=4\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$; e) $z=5\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$;

f) $z=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$; g) $z=7\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$.

19. a) $z=i$; b) $z=-2$; c) $z=-4$; d) $z=-5-5i$; e) $z=3-3i$.

20. a) $\rho=\sqrt{2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$; b) $\rho=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \varphi=0$.

22. a) $4i$; b) -1; c) $\frac{\sqrt{2}}{24}\left((1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i\right)$; d) $\sqrt{2}\left((1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i\right)$;

e) $-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}\left(\sqrt{3}-i\right)$; f) $-1/2$.

23. a) $\bar{z}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}i$; b) $\bar{z}=2+i$; c) $z=\bar{z}=4$; d) $z=\bar{z}=-4$; e) $z=-11-i$, $\bar{z}=-11+i$.

24. a) y b) Sustituir la forma de $\overline{z_1+z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ y calcular directamente;

c) Multiplicando y dividiendo por z.

25. $x=-2,\ \ y=\pm 2$.

26. a) $z=0$ y $z=1$; b) $z=0$ y $z=-1$.

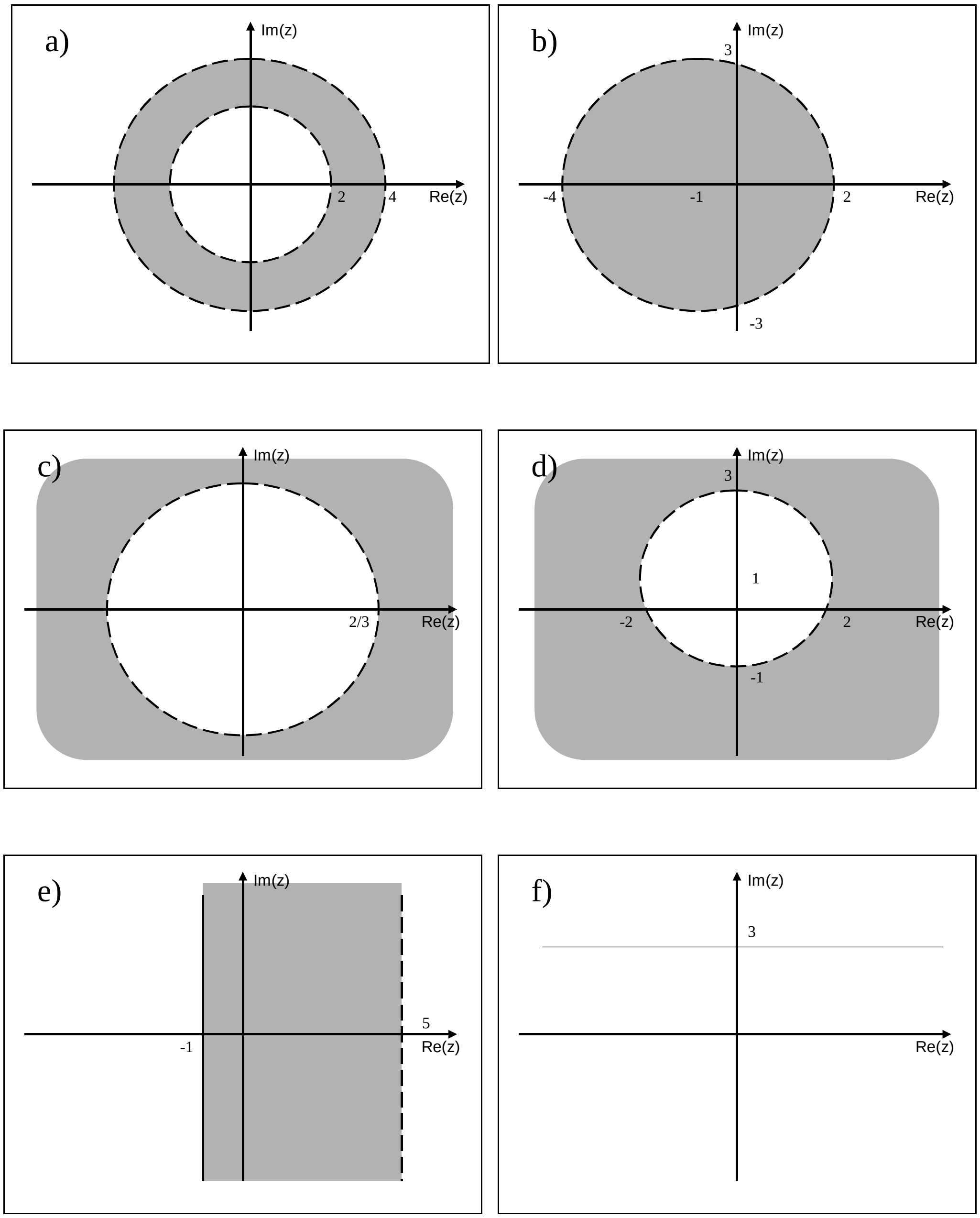
27. a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; b) $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$; c) ± 1, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$;

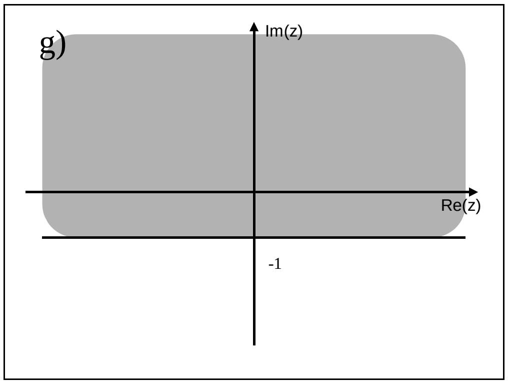
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.

28. $B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

29. $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ D(-1,0),\ E(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),\ F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

30.





31. a) $\dfrac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}}=-\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\dfrac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\cdot 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}}=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$; d) $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 6\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}}{4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot 5\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

32. x=-41, y=31.

33. a) Extraer factor común i en el numerador; b) Desarrollar miembros izquierdo y derecho.

34. a) $z_1=\frac{3}{2}-i,\ z_2=-\frac{5}{4}$; b) $z_1=-1+2i,\ z_2=-2+4i$.

35. a) Traslada a z verticalmente dos unidades hacia abajo; b) Traslada a z horizontalmente cuatro unidades hacia la izquierda; c) Rota a z 90º en sentido positivo; d) Rota a z 90º en sentido negativo.

36. Denotando por P a la palma, por C el cedro y por T al tesoro y haciendo P=1 y C=-1 en el plano complejo, se obtiene T=i.

37. $|\omega|=\sqrt{10}$, $\arg\omega=\operatorname{arctg}3$.

38. $|\omega|=\sqrt{5}$, $\arg\omega=\pi+arctg\,2$.

39. $z_1=2\pm 3i,\quad z_2=4\mp 3i,\ z_1z_2=17\pm 6i,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{25}\pm\frac{18}{25}i$.

40. $z_1=4+2i,\quad z_2=1-2i\quad$ y $\quad z_1=4-2i,\quad z_2=1+2i$.

41. a) $z=\pm 3i$; b) $z=0,\ z=3$; c) $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$; d) $z=0,\ z=2(1\pm i)$; e) $z=\pm i$.

TEMA II

1. a) Si, de [x]; b) No; c) Si, de [x]; d) No.
2. a) A=0, B=C=1, D=5; b) A+B=2, C=D=1, E=2.
3. a) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$; b) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$.
4. a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$;

   b) $2x^5 - 5x^3 - 8x = (x+3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327$;

   c) $4x^3 + x^2 = (x + 1 + i)(4x^2 - (3+4i)x - 1 + 7i) + 8 - 6i$;

   d) $x^3 - x^2 - x = (x - 1 + 2i)(x^2 - 2ix - 5 - 2i) - 9 + 8i$;

   e) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (2x^2 + 3x + 11)(x^2 - 3x + 1) + 25x - 5$;

   f) $x^3 - 3x^2 - x - 1 = \frac{1}{9}\left[(3x-7)(3x^2 - 2x + 1) - 26x - 2\right]$
5. a) $q = m, \quad p = -(m^2 + 1)$; b) $m \neq 0, \quad p = -m^2 + 2, \quad q = 1$ ó $m = 0, \quad q = p - 1$.
6. a) 136; b) -1+44i.
7. a) $(x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$;

   b) $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$;

   c) $(x-2)^4 - 18(x-2) + 38$;

   d) $(x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + 5 + 5i$

   e) $(x+1-2i)^4 - (x+1-2i)^3 + 10(x+1-2i)^2 + (x+1-2i) + 1 - 2i$.
8. $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^3 + 10(x-2) + 20$;
9. a) $f(2) = 18,\ f'(2) = 48,\ f''(2) = 124,\ f^{(3)}(2) = 216,\ f^{(4)}(2) = 240,\ f^{(5)}(2) = 120,$

   $f^{(n)}(2) = 0 \quad n \geq 6$;

   b) $f(1+2i) = -12 - 2i,\ f'(1+2i) = -16 + 8i,\ f''(1+2i) = -8 + 30i,$

   $f^{(3)}(1+2i) = 24 + 30i,\ f^{(4)}(1+2i) = 24,\ f^{(n)}(1+2i) = 0 \quad n \geq 5$.
10. a) 3; b) 2.
11. k = -5.
12. a) A = 3, B = -4; b) A = n, B = -(n+1).

13. Sugerencia: Calcule las derivadas

14. Sugerencia: Agrupe convenientemente los términos

15. 1.

16. Sugerencia: Calcule la derivada y compárela con el polinomio.

17. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1+i)(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $(x+1)^2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$;

d) $(x-\sqrt{5+2\sqrt{6}})(x+\sqrt{5+2\sqrt{6}})(x-\sqrt{5-2\sqrt{6}})(x+\sqrt{5-2\sqrt{6}})$;

e) $(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

18. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$; b) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$;

c) $(x+1)^2(x+1+\sqrt{2})(x^2+1-\sqrt{2})$;

d) $(x-\sqrt{5+2\sqrt{6}})(x+\sqrt{5+2\sqrt{6}})(x-\sqrt{5-2\sqrt{6}})(x+\sqrt{5-2\sqrt{6}})$;

e) $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$.

19. a) $x^5+(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-6+i$;

b) $x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-(1+i)$.

20. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

21. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$.

22. a) S={1, 5}; b) S={-1}; c) S={$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$}; d) S={i, -i}; e) S={1, 2, 3};

f) S={1, 2}; g) S={-1, i, -i}; h) S={0, 2, -1+i, -1-i}.

23. a) $\lambda=\pm 6$; b) $\lambda=3$.

24. S={1, 3, 4}

25. a) Cota superior: 3, Cota inferior: 1/3; b) Cota superior: 1, Cota inferior: 0;

c) Cota superior: 2, Cota inferior: -6.

26. a) Una raíz en (-2,-1), una raíz en (-1,0) y una raíz en (1,2);

b) Dos raíces en (-2,-1) y una raíz en (1,2);

c) Una raíz en (-2,-1);

d) Una raíz en (-4,-3) y dos raíces en (1,2).

TEMA III

1. a) Lineal no homogénea, x-2y =0 homogénea correspondiente, solución general (2y+8, y) una solución particular (10,1)
   b) Ecuación lineal homogénea, solución general (x, y, -3x-y), solución particular (0,0,0)
   c) Ecuación no lineal
2. a) tiene solución única x=2/9 y=14/9
   b) tiene solución única x=(-6-7i)/5 y=(-3+4i)/5
   c) no tiene solución.
3. a=b=0 y c≠0 ó d≠0
4. 20 gallinas y 40 carneros
5. a) Tiene solución única x=-1, y=1, z=2
   b) Tiene infinitas soluciones $\left(2-\frac{5}{4}y,\ y,\ 7-\frac{9}{4}y\right)$ $y\in$.
   c) tiene infinitas soluciones, la solución general es:
   $\left(5-\frac{13}{4}x_2, x_2, -1-\frac{3}{4}x_2, -\frac{9}{4}x_2,\right)$ x_2 arbitrario.
   e) tiene solución única x=0, y=0, z=0
6. El sistema de ecuaciones sería
   $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 - x_6 = 1 \\ -x_5 + x_6 = 0. \\ -2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$
   Cambiar la segunda y la tercera fila en la matriz.
7. Matriz ampliada del sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$,
   la forma escalonada sería
   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema es compatible indeterminado y la solución general (1-t , t, 1-t, t) $t\in$.

8. a) x_1= t, x_2= t+1, x_3=1, x_4= -2 $t\in$; b) x_1= 6+t, x_2= t-1, x_3=3, x_4=t. x_5= -1 $t\in$;
c) solución única (0,0,0,0,0)

9. a) Tiene infinitas soluciones; b) no tiene solución

11. a) si; b) no; c) no.

12. a) x=3, y= -1/2, z=0; b) para ningún valor, dado que no son del mismo tamaño.

13. a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -24 & -4 \end{pmatrix}$; c) no es posible pues no son del mismo tamaño.

14. a) (11) ; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; d) no es posible efectuar el producto.

17. a) $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 4x - y + 5z = 4 \\ 6x + y + 3z = 20 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = -7 \\ x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 8x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + 9y = 3 \end{cases}$.

18. a)Si, $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$, b) Si, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, c) Si, $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{6}{4} \end{pmatrix}$.

d) no es inversible

e) Si, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f) si $\begin{pmatrix} \frac{2+i}{7} & -\frac{i}{7} & \frac{3+i}{7} \\ -\frac{i}{7} & \frac{3i+1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3-i}{7} & -\frac{4i}{7} \end{pmatrix}$

20. Es su propia inversa

21. a) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

22. . $(A+B)^t= A^t+B^t$ = A+B.

23. $(A+B)^t= A^t+B^t$ = -A-B= - (A+B).

24. Sea A cuadrada, entonces A= $(A-A^t)/2 +(A+A^t)/2$. La primera matriz es antisimétrica y la segunda es simétrica.

26. $(A^{t})^{=1} = (A^{-1})^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27. a) no; b) no; c) si; d) no.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

31. a) –111; b) -84 ; c) 47

32. a)-260; b)-183; c) abcde

33. a) 5; b) 15; c)15

36. a) $t \neq -3$ y $t \neq 4$; b) $t \neq 1$ y $t \neq 3$