TIMS: Álgebra

Sesión 1

Números complejos y sus propiedades

Lic. David Balbuena Cruz
Msc. Wilfredo Morales Lezca
Alicia Pérez Figueredo (AAyudt.)
Juliet Bringas Miranda (AAyudt.)
Pedro Alejandro Rodríguez S.P (AAyudt.)

Licenciatura en Matemática

Curso 2020-2021

Introducción

¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución?

Si despejamos a x de la ecuación, tenemos que $x = \sqrt{-1}$. Pero $\sqrt{-1}$ no tiene ningún sentido, por lo tanto $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución... o al menos es lo que pensaban los matemáticos hace unos 300 años.

Mientras que existen infinitas ecuaciones con soluciones reales, también existen una infinidad de ecuaciones en cuyo resultado aparece la raíz de un número negativo. Hasta el siglo 18, los matemáticos hacían la vista gorda a las ecuaciones que tenían este "defecto". Sin embargo, Leonard Euler rompió el hielo introduciendo $\sqrt{-1}$ en su famoso libro *Elementos del Álgebra*:

"*... no es igual a nada, ni mayor que nada, ni menor que nada... aun así, estos números se presentan así mismos en nuestra mente; existen en nuestra imaginación y tenemos ideas suficientes sobre ellos; ... nada nos impide usar estos números imaginarios y aplicarlos en nuestros cálculos.*"

Euler llamó a $\sqrt{-1}$ unidad imaginaria y la denotó por i, el cual es uno de los símbolos más usados por la comunidad científica. El estudio de los números complejos continúa y ha ido evolucionando durante los últimos dos siglos y medio; de hecho, es imposible imaginar la matemática moderna sin los números complejos. Incluso otras disciplinas como mecánica, física, hidrodinámica y química usan a la unidad imaginaria regularmente. Nuestro objetivo es introducir al lector en este fascinante tema.

En esta sesión usted aprenderá

- La terminología de los números complejos
- Cómo se definen sus operaciones aritméticas

Números complejos

¿Números complejos o números imaginarios? En realidad ambos términos son válidos, pero hoy en día preferimos usar el de números complejos por todo el rigor científico que han conseguido.

DEFINICIÓN 1

Un **número complejo** es cualquier número de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria definida por $i^2 = -1$.

Terminología

El número real a en $z = a + bi$ se llama **parte real** de z, y el número real b se llama **parte imaginaria** de z. Las partes real e imaginaria de un número complejo z se abrevian $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente. Por ejemplo, si $z = 4 - 9i$, entonces, $Re(z) = 4$ e $Im(z) = -9$. Un número complejo z que tenga parte real nula, es decir $Re(z) = 0$, se llama **imaginario puro**. Por ejemplo, $z = 6i$ es un número imaginario puro. Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes reales e imaginarias son iguales. Puesto que este sencillo concepto es muy útil (tanto en el cálculo algebraico como en las demostraciones teóricas), lo formalizaremos como definición.

DEFINICIÓN 2

Sean los números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. Decimos que z_1 y z_2 son **iguales** $(z_1 = z_2)$ si, y solo si, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Por último, denotaremos con el símbolo $\mathbb{C}$ al conjunto de todos los números complejos; aquí observen un detalle importante: cualquier número real a se puede escribir como $z = a + 0i$, entonces el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Operaciones artiméticas

Al igual que los números reales, los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ las operaciones se definen como sigue

Cuadro 1: Operaciones aritméticas

Suma:	$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
Resta:	$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
Multiplicación:	$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$

División:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}, \quad a_2 \neq 0 \text{ o } b_2 \neq 0\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\end{aligned}$$

Por supuesto, no es necesario memorizar las fórmulas del cuadro 1. De hecho, para la suma, resta y multiplicación solo es necesario tener en cuenta las leyes usuales de los números reales y que $i^2=-1$.

PROPOSICIÓN 1

- Para sumar (o restar) dos números complejos, solo es necesario sumar (o restar) las correspondientes partes real e imaginaria.
- Para multiplicar dos números complejos, podemos usar la ley distributiva y el hecho de que $i^2=-1$.

EJEMPLO 1. Si $z_1=2+4i$ y $z_2=-3+8i$, determine (a) z_1+z_2 y (b) z_1z_2

Solución (a) Sumando las partes real e imaginaria, la suma de z_1 y z_2 es

$$z_1+z_2=(2+4i)+(-3+8i)=(2-3)+i(4+8)=-1+12i$$

(b) Por la ley distributiva e $i^2=-1$ tenemos que

$$\begin{aligned}z_1z_2=(2+4i)(-3+8i) &= 2(-3+8i)+4i(-3+8i)\\ &= -6+16i-12i-32\\ &= -38+4i\end{aligned}$$

■

La definición de división es un poco más delicada que las anteriores, y en breve la explicaremos. Pero primero, veamos los conceptos de **cero**, **unidad** y **conjugado**.

Cero y unidad

El **cero** en el sistema de números complejos es el número $0+0i$, y la **unidad** es $1+0i$. El cero y la unidad se denotan por 0 y 1, respectivamente; símbolos que estamos acostumbrados a usar en los números reales y que mantienen su escencia en los números complejos. Decimos que el cero es el **neutro para la suma** ya que, para cualquier número complejo $z = a + bi$, se tiene $z + 0 = z$. Podemos demostrar esto usando la definición de suma:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = (a + 0) + i(b + 0) = a + ib = z$$

De manera similar, la unidad es el **neutro para la multiplicación** de los complejos pues, para cualquier número complejo z, tenemos que $z \cdot 1 = z$:

$$z \cdot 1 = (a + bi)(1 + 0i) = a \cdot 1 + a \cdot 0i + bi \cdot 1 + bi \cdot 0i = a + bi = z$$

Conjugado

Sea $z = a + bi$ un número complejos cualquiera. Si cambiamos el signo de la parte imaginaria de z, es decir $\bar{z} = a - bi$, obtenemos un nuevo número complejo que se llama **conjugado** de z, el cual denotamos por $\bar{z}$. Por ejemplo, si $z = 6 + 3i$ entonces $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$ entonces $\bar{z} = -5 + i$. Un detalle muy curioso es que si z es un número real, entonces $z = \bar{z}$, por ejemplo, si $z = 7$ entonces $\bar{z} = 7$.

División de números complejos

Ahora sí estamos listos para aprender a dividir números complejos (y de una forma más práctica que memorizar la fórmula del cuadro 1).

PROPOSICIÓN 2

Sean dos números complejos z_1 y z_2 tal que $z_2 \neq 0$. Para dividir z_1 entre z_2, solo es necesario multiplicar el numerador y el denominador de z_1/z_2 por el conjugado de z_2. Es decir

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

EJEMPLO 2. Si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 6i$, determine z_1/z_2.

Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, que en este caso es z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{2 - 3i}{4 + 6i} \cdot \frac{4 - 6i}{4 - 6i} = \frac{8 - 12i - 12i + 18i^2}{4^2 + 6^2} = \frac{-10 - 24i}{52}$$

Si queremos una respuesta en la forma $a + bi$, rescribimos el último resultado al dividir la parte real e imaginaria del numerador $-10 - 24i$ entre 52 y simplificando los términos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-10 - 24i}{52} = -\frac{10}{52} - \frac{24i}{52} = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i$$

■

Inverso

En el conjunto de los números complejos, cada número z tiene un **inverso aditivo**. Como en el sistema de los números reales, el inverso aditivo de $z = a + ib$ es su negativo $-z$, donde $-z = -a - ib$. Para cualquier cualquier número complejo z, tenemos que $z + (-z) = 0$. Similarmente, cada número complejo z diferente de cero, tiene un **inverso multiplicativo**. Dicho de otro modo, para cada $z \neq 0$ existe uno y sólo un número complejo z^{-1} diferente de cero tal que $zz^{-1} = 1$. El inverso multiplicativo z^{-1} es igual al recíproco $1/z$.

EJEMPLO 3. Determine el recíproco (o inverso multiplicativo) de $z = 2 - 3i$

Solución: Usando el método de división, obtenemos

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

Toma unos segundos comprobar que $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ es efectivamente el inverso de z:

$$zz^{-1} = (2-3i)\left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right) = 1$$

■

Ejercicios propuestos

1. Exprese el número dado en la forma $a + ib$

   a) $i(5 + 7i)$

   b) $(5 - 9i) + (2 - 4i)$

   c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i\right)$

   d) $\dfrac{1-4i}{3+5i}$

   e) $\dfrac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)}$

f) $(2+3i)\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)^2$

2. Evalúe las siguientes potencias de i:

   a) i^8

   b) i^{11}

   c) i^{48}

   d) i^{105}

3. Sea $z = x + iy$. Determine

   a) $Re(1/z)$

   b) $Re(z^2)$

   c) $Im(2z + 4\bar{z} - 4i)$

   d) $Im(\bar{z}^2 + z^2)$

4. Sean z, w dos números complejos. Demuestre que:

   a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

   b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

   c) $\bar{\bar{z}} = z$

   d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

5. Sean tres números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ y $z_3 = a_3 + b_3 i$ cualesquiera. Demuestre que

   a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

   b) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

   c) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

   d) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

   e) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

6. Encuentre todos los números complejos tales que $Im\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$.

7. Determine qué números reales x e y cumplen que

$$(1+2i)x + (3-5i)y = 1 - 3i$$

8. Averigüe cuáles deben ser las condiciones para que el producto de dos números complejos sea imaginario puro.