TIMS: Álgebra

Sesión 4

Divisibilidad de polinomios

Lic. David Balbuena Cruz
Msc. Wilfredo Morales Lezca
Alicia Pérez Figueredo (AAyudt.)
Juliet Bringas Miranda (AAyudt.)
Pedro Alejandro Rodríguez S.P (AAyudt.)

Licenciatura en Matemática

Curso 2020-2021

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

En la sesión 3, vimos cómo se definen las operaciones artiméticas entre polinomios pero no tocamos la división. A simple vista, una expresión del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2+1}{x^3-x+3}$$

parece sencilla de analizar, pero cuando hablamos de división hay otro concepto que aparece casi al instante y al que debemos prestar especial atención. En efecto, estamos hablando del *elemento inverso*.

Decimos que un número a es *inversible* si y solo existe otro número b del mismo conjunto tal que:

$$a \cdot b = 1$$

Dado el caso, a b precisamente se le llama *inverso de a*. Por ejemplo, en el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ todos los números son inversibles. En este caso si $a \in \mathbb{Q}$ entonces su inverso es $1/a$. ¿Ocurrirá lo mismo en el conjunto de todos los polinomios? Es decir

¿Cualquier polinomio $\boldsymbol{p}(x)$ es inversible?

Vamos a intentar contestar la pregunta anterior. Supongamos que $p(x)$ es un polinomio inversible cualquiera, entonces existe otro polinomio $q(x)$ tal que

$$p(x) \cdot q(x) = 1$$

Pero la multiplicación de polinomios nos indica que: $\operatorname{gr}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{gr}(p(x)) + \operatorname{gr}(q(x))$, entonces $\operatorname{gr}(p(x)) + \operatorname{gr}(q(x)) = 0$. Como los grados solo son positivos, nos queda que $\operatorname{gr}(p(x)) = \operatorname{gr}(q(x)) = 0$, o sea $p(x)$ es un polinomio constante: $p(x) = \alpha$.

Esto nos demuestra que solo los polinomios de grado 0 son inversibles

Por lo tanto, el conjunto de los polinomios y $\mathbb{Q}$ no se parecen, al menos cuando hablamos de división. Pero... por otro lado... en $\mathbb{Z}$ solo el número 1 es inversible. Ya este caso es un poco más parecido al de los polinomios.

En esta sesión vamos a construir la división de polinomios tomando como ejemplo la división entre números enteros. También usted aprenderá:

- Cómo efectuar el algoritmo de división con resto
- Cuándo un polinomio es divisible por otro
- La división sintética
- Qué es una raíz[1]
- El teorema fundamental del Álgebra

[1] De un polinomio, no de un árbol

Algoritmo de división con resto

Ya que en $\mathbb{K}[x]$ no existe inverso para todo $p(x)$, se parece un poco a $\mathbb{Z}$ pues en este conjunto solo el 1 tiene inverso. Entonces es natural pensar que la división de polinomios pueda definirse de forma similar a la división entre números enteros. Nos estamos refiriendo a la **división con resto**.

TEOREMA 1

Sean $a(x)$ y $b(x) \in \mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) donde $b(x) \neq 0$. Existen entonces $q(x)$ y $r(x)$ *únicos* tales que

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o $0 \leq \operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} b(x)$.

Tanto en $\mathbb{K}[x]$ como en $\mathbb{Z}$, la división con resto también es conocida como división euclidiana. Al polinomio $q(x)$ lo llamaremos **cociente**, y a $r(x)$ **resto** de la división.

Como hemos señalado antes, el algoritmo de división entre polinomios se efectúa de forma muy parecida al algoritmo de la división de números enteros. **La idea es reducir poco a poco el grado del resto de la división.**

EJEMPLO 1. Sean $a(x) = 9x^4 - 16x^2 + 5x - 6$ y $b(x) = 3x^2 + 5x - 6$. Para construir el cociente $q(x)$ de la división de $a(x)$ por $b(x)$, nos ocupamos solamente de los términos de grado maximal.

- *Primer paso*: escogemos $3x^2$ porque multiplicando por el término de grado maximal de $b(x)$ (es decir $3x^2$) se obtiene $9x^4$, el término de grado maximal de $a(x)$. Restamos $a(x) - 3x^2 \cdot b(x)$ y buscamos el próximo término.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
9x^4 & & -\,16x^2 & +\,5x & -\,6 & 3x^2 + 5x - 6 \\ \cline{6-6}
-\,9x^4 & -\,15x^3 & +\,18x^2 & & & 3x^2 \\ \cline{1-3}
 & -\,15x^3 & +\,2x^2 & +\,5x & -\,6 &
\end{array}$$

- *Segundo paso*: escogemos $-5x$ porque multiplicando por el término de grado maximal de $b(x)$ (es decir $3x^2$) se obtiene $-15x^3$, el término de grado maximal del resto precedente.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
9x^4 & & -\,16x^2 & +\,5x & -\,6 & 3x^2 + 5x - 6 \\ \cline{6-6}
-\,9x^4 & -\,15x^3 & +\,18x^2 & & & 3x^2 - 5x \\ \cline{1-3}
 & -\,15x^3 & +\,2x^2 & +\,5x & -\,6 & \\
 & +\,15x^3 & +\,25x^2 & -\,30x & & \\ \cline{2-4}
 & & 27x^2 & -\,25x & -\,6 &
\end{array}$$

- Seguimos así hasta que el grado del resto sea menor que el grado de $b(x)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
9x^4 & & -\ 16x^2 & +\ \ 5x & -\ \ 6 & 3x^2 + 5x - 6 \\ \cline{6-6}
-\ 9x^4 & -\ 15x^3 & +\ 18x^2 & & & 3x^2 - 5x + 9 \\ \cline{1-3}
& -\ 15x^3 & +\ \ 2x^2 & +\ \ 5x & -\ \ 6 & \\
& +\ 15x^3 & +\ 25x^2 & -\ 30x & & \\ \cline{2-4}
& & 27x^2 & -\ 25x & -\ \ 6 & \\
& & -\ 27x^2 & -\ 45x & +\ 54 & \\ \cline{3-5}
& & & -\ 70x & +\ 48 &
\end{array}
$$

Entonces $q(x) = 3x^2 - 5x + 9$ y $r(x) = -7x + 48$, de donde:

$$9x^4 - 16x^2 + 5x - 6 = \left(3x^2 + 5x - 6\right)\left(3x^2 - 5x + 9\right) + (-70x + 48)$$

■

Divisibilidad de un polinomio

Un caso muy interesante en la división de los enteros de $\mathbb{Z}$ es cuando el resto es igual a 0; por ejemplo $4 = 2 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$. En estos casos decimos que un número es*divisible por el otro*. Ahora veremos cómo se trata esta cuestión en los polinomios.

DEFINICIÓN 1

Sean $a(x)$ y $b(x) \in \mathbb{K}[x]$ con $b(x) \neq 0$. Se dice que $b(x)$ es un *divisor* de $a(x)$, o que $b(x)$ *divide* a $a(x)$, o también que $a(x)$ es *divisible por* $b(x)$, si el resto de la división de $a(x)$ por $b(x)$ es el polinomio nulo.

Observemos que si $a(x)$ es divisible por $b(x)$ entonces existe un polinomio $q(x)$ tal que $a(x) = b(x) \cdot q(x)$. Reordenando el producto tenemos que $a(x) = q(x) \cdot b(x)$, es decir $q(x)$ también es un divisor de $a(x)$.

EJEMPLO 2.

A) En $\mathbb{R}[x]$, el polinomio $a(x) = 3x^2 - 2x + 1$ no es divisible por $b(x) = x - 2$ ya que

$$3x^2 - 2x + 1 = (3x + 4)(x - 2) + 9.$$

B) En $\mathbb{C}[x]$, $a(x) = x^2 + 1$ es divisible por $b(x) = x - i$ y por $q(x) = x + i$ ya que

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

PROPOSICIÓN 1

- Todo polinomio es divisible por cualquier polinomio constante no nulo.
- Si $a(x)$ es divisible por $b(x)$ y $b(x)$ es divisible por $c(x)$, entonces $a(x)$ es divisible por $c(x)$.
- Si $a(x)$ y $b(x)$ son divisibles por $c(x)$, el polinomio $\alpha(x)a(x) + \beta(x)b(x)$ es divisble por $c(x)$ para cualesquiera polinomios $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{K}[x]$.
- Si los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ se dividen mutuamente, entonces existe una constante no nula $c \in \mathbb{K}$ tal que $a(x) = c \cdot b(x)$.

División Sintética

Ya hemos visto algunas consecuencias de que el resto $r(x)$ sea nulo. Ahora consideremos otro caso particular de la división entre polinomios, en la cual el divisor es de la forma $(x - a)$ donde $a \in \mathbb{K}$. Para estos divisores usamos un método conocido como *División Sintética*, *Regla de Horner* o *Regla de Ruffini*. Ilustraremos el método por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 3. Sea $p(x) = 4x^4 - 30x^3 + 25x^2 - 30$ y realicemos la división de $p(x)$ por $(x - 2)$.

Paso 1 Construimos la tabla de Ruffini, esto es trazar dos líneas a manera de ejes definiendo tres filas de la manera siguiente:

$$\begin{array}{c|c} & \text{primera fila} \\ & \text{segunda fila} \\ \hline & \text{tercera fila} \end{array}$$

En la primera fila ponemos los coeficientes del polinomio dividendo $p(x)$ (ordenados de mayor a menor). Si faltase algún término debemos poner 0. Si el polinomio es de grado n implica que deben escribirse $n+1$ coeficientes. En nuestro ejemplo quedaría

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Como $p(x)$ es de grado 4 deben aparecer 5 coeficientes.

En la segunda fila, a la izquierda de la vertical, ponemos el número correspondiente al divisor $(x - a)$, en este ejemplo $a = 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ \color{blue}{2} & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

ATENCIÓN: En caso de que, por ejemplo, el divisor sea $(x + 3)$ debemos poner a la izquierda -3. Pues en este caso sería $a = -3$.

Paso 2 Empezamos bajando el primer número de la primera fila (correspondiente al coeficiente principal) a la tercera fila

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 4 & & & & \end{array}$$

Multiplicamos 4 por el número correspondiente al divisor (el que fue colocado a la izquierda de la vertical en el Paso 1). Esto es $4 \cdot \color{blue}{2} = 8$. Ponemos el resultado en la segunda fila debajo del próximo coeficiente.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & & & \\ \hline & 4 & & & & \end{array}$$

Paso 3 Sumamos los coeficientes de la segunda columna

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8\,+ & & & \\ \hline & 4 & -22 & & & \end{array}$$

y repetimos el Paso 2 con el valor de la suma. Esto es $(-22) \cdot \color{blue}{2} = -44$ y colocamos el resultado en la columna siguiente.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & & \\ \hline & 4 & -22 & & & \end{array}$$

Paso 4 Volvemos a sumar la columna y repetimos el proceso hasta el final

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & & \\ \hline & 4 & -22 & -19 & & \end{array}$$

(A)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & -38 & \\ \hline & 4 & -22 & -19 & & \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & -38 & \\ \hline & 4 & -22 & -19 & -38 & \end{array}$$

(C)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & -38 & -76 \\ \hline & 4 & -22 & -19 & -38 & \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & -38 & -76 \\ \hline & 4 & -22 & -19 & -38 & -106 \end{array}$$

(E)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -30 & 25 & 0 & -30 \\ 2 & & 8 & -44 & -38 & -76 \\ \hline & 4 & -22 & -19 & -38 & \boxed{-106} \end{array}$$

(F)

Para terminar, interpretamos el resultado de (F):

- El cociente $q(x)$ se forma con los números obtenidos en la fila de abajo, excepto el rojo. Entonces en este caso $q(x) = 4x^3 - 22x^2 - 19x - 38$.
- El cociente será siempre un grado menos que el dividendo. Aquí como el dividendo es de grado 4, el cociente será de grado 3.
- El resto es el número final recuadrado en ROJO
- La conclusión final de la división es que

$$p(x) = 4x^4 - 30x^3 + 25x^2 - 30 = (x-2)(4x^3 - 22x^2 - 19x - 38) - 106 \quad (1)$$

■

Observen que en (1) si sustituimos $x = 2$, tenemos que $p(2)$ es igual al resto de la división. Es decir $p(2) = -106$. ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier otro polinomio que se divida por $(x - a)$?

Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $(x - a)$ tal que $a \in \mathbb{K}$. Por el Teorema 1, la división entre ambos polinomios se puede expresar como

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

Si sustituimos $x = a$ en $p(x)$, tenemos que $p(a) = r(a)$. Pero el grado de $r(x)$ debe ser menor que el grado de $(x - a)$, es decir $r(x)$ es un polinomio constante. Por lo tanto $r(x) = p(a) = \alpha$ en donde α es una constante de $\mathbb{K}[x]$. Con este planteamiento hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2

El resto $r(x)$ de la división de $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ por $(x - a)$ es igual al polinomio evaluado en a.

$$r(x) = p(a) = \alpha \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{K}$$

La regla de Ruffini se convierte, además, en un proceso para verificar si un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a)$. ¿Será posible, con ayuda de dicha regla, determinar si $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $ax + b$? Dejamos esta interrogante como estudio independiente para el lector.

Raíz de un polinomio

Sea $p(x)$ un polinomio arbitrario de $\mathbb{K}[x]$. Cuando $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $(x - a)$, el coeficiente a recibe un nombre muy especial.

DEFINICIÓN 2

Diremos que a es **raíz** del polinomio $p(x)$ si $p(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Por el Teorema 2, es equivalente decir que a es raíz del polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$.

EJEMPLO 4. El valor $a = \sqrt{5}$ es raíz de $p(x) = x^2 - 5$, pues $p(x)$ se puede descomponer como $p(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

Veamos otro ejemplo. Sea

$$p(x) = (x-5)^2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$. Aquí tenemos que $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -3$ y $\alpha_3 = 1/2$ son raíces de $p(x)$, pero observen que $(x-5)$ está elevado al cuadrado. Es como si la raíz $\alpha_1 = 5$ "estuviese repetida", lo que nos da pie a la próxima definición.

DEFINICIÓN 3

Diremos que α es **raíz de multiplicidad k** del polinomio $p(x)$, si $p(x)$ es divisible por $(x-\alpha)^k$ y no por $(x-\alpha)^{k+1}$; es decir, si y solo si $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ y $q(x)$ no es un polinomio divisible por $(x-\alpha)$.

También podríamos decir que a es raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$ si y solo si $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ y $q(\alpha) \neq 0$.

EJEMPLO 5. El valor $\alpha = 5$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio

$$p(x) = (x-5)^2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

sin embargo $\alpha = 5$ no es una raíz de multiplicidad 3 o superior porque $p(x)$ no es divisible por $(x-5)^k$ donde $k \geq 3$

■

Existencia de una raíz

Hasta el momento nos hemos referido a $\mathbb{K}[x]$ como cualquiera de los conjuntos $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{C}[x]$. Sin embargo, ahora que estamos considerando la definición de raíz es importante prestar atención al conjunto en que estamos trabajando. Pues es posible que un polinomio tenga raíces en un conjunto pero en otro no. Por ejemplo $p(x) = x^2 - 5$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}[x]$ pero sí en $\mathbb{R}[x]$. La idea central es:

La existencia o no de raíces depende del conjunto en que se esté trabajando.

En el caso de los polinomios cuadráticos, recordemos que la existencia o no de raíces en $\mathbb{R}[x]$ puede determinarse de manera segura por medio de la fórmula del discriminante. Generalicemos, o mejor dicho, actualicemos este resultado.

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio cuadrático tal que $P(x) = ax^2 + bx + c$. La fórmula del discriminante está dada por $D = b^2 - 4ac$, de donde teníamos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Como estamos considerando el conjunto $\mathbb{R}[x]$, es decir solo raíces reales, el término $\sqrt{D}$ sería inválido en el caso de que $D < 0$. Por lo tanto existen 3 opciones:

- si $D > 0$, $P(x)$ posee dos raíces reales diferentes,
- si $D = 0$, $P(x)$ posee dos raíces reales iguales (o una raíz de multiplicidad 2),
- si $D < 0$, $P(x)$ no posee raíces reales

Aquí entonces surge una duda muy importante:

¿Qué ocurre en el conjunto $\mathbb{C}[x]$?

Al permitir la existencia de raíces complejas ya la expresión $\sqrt{D}$ sí tiene sentido incluso cuando $D < 0$. Esto quiere decir que cualquier polinomio cuadrático tendría al menos una raíz en $\mathbb{C}[x]$!! ¿Pasará lo mismo para cualquier otro polinomio sin importar su grado? La respuestas de estas interrogantes las brinda el Teorema Fundamental del Álgebra.

Teorema Fundamental del Álgebra

TEOREMA 3

Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes en $\mathbb{C}$, posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Dicho de una manera más coloquial, cualquiera que sea polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha) = 0$.

Existen diferentes demostraciones de este Teorema, pero todas (incluso la primera que se debe a Gauss) se basan en las propiedades topológicas de los números reales y complejos, e incluso técnicas del análisis matemático. En este curso introductorio solo nos centraremos en los resultados y aplicación básica de estos, por lo que no profundizaremos en las demostraciones de los teoremas, proposiciones o corolarios.

Ahora veamos algunos resultados que se desprenden como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra.

PROPOSICIÓN 2

A) Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de $gr(P(x)) = n \geq 1$ posee exactamente n raíces (contada cada una tantas veces como indique su multiplicidad).

De A) podemos obtener otra conclusión B):

B) Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de $gr(P(x)) = n \geq 1$, se descompone totalmente en factores lineales de $\mathbb{C}[x]$.

EJEMPLO 6. Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra podemos afirmar que $P(x)$ posee a lo sumo 3 raíces complejas (contando la multiplicidad). En efecto, $P(x)$ se descompone como $P(x) = (x+2)(x-1)^2$ y como podemos ver posee dos raíces: $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 1$, la primera de multiplicidad 1 y la segunda de multiplicidad 2.

Polinomios de $\mathbb{C}[x]$ con coeficientes reales

Un caso particular del Teorema Fundamental del Álgebra son los polinomios de $\mathbb{C}[x]$ que tengan solo coeficientes reales. Nos referimos por ejemplo a los polinomios como $p(x) = x^2 + 1$, que solo tienen coeficientes reales y aún así poseen raíces complejas en el contexto de $\mathbb{C}[x]$.

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

¿Cómo se comportan las raíces complejas de un polinomio de coeficientes reales? Esta es la pregunta que nos interesa. Analicemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\overline{\alpha}$ también es raíz de $P(x)$.

De aquí que se desprenda también

PROPOSICIÓN 3

Si $\alpha \in \mathbb{C}$, no real, es raíz del polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

EJEMPLO 7. El valor $\alpha = 2i$ es raíz del polinomio $p(x) = x^4 + 5x^2 + 4$, entonces $\alpha = -2i$ también es raíz de $p(x)$. De aquí podemos concluir que $p(x)$ es divisible por $(x-2i)(x+2i) = x^2 + 4$:

$$p(x) = (x^2 + 4)q(x)$$

La Proposición 3 y el Ejemplo 7 nos sugieren algo muy curioso: si un polinomio $p(x)$ tiene una raíz compleja α, entonces $p(x)$ será divisible por un polinomio cuadrático de coeficientes reales. Teniendo también en cuenta el Teorema Fundamental del Álgebra, nos queda que para los polinomios de coeficientes reales tenemos dos opciones:

- En $\mathbb{C}[x]$ los podemos descomponer completamente en factores lineales (por el teorema fundamental del Álgebra)
- En $\mathbb{R}[x]$ es posible descomponerlos hasta factores lineales y cuadráticos (por la proposición 3)

EJEMPLO 8. Sea $P(x) = x^4 + x^2 - 6$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-2)(x^2+3) \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3) \text{ descomposición de } P(x) \text{ en factores de } \mathbb{R}[x] \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3}) \text{ descomposición de } P(x) \text{ en factores de } \mathbb{C}[x]. \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Realiza las siguientes divisiones, en cada operación precise el cociente y el resto:

   a) $\dfrac{x^4-2x^3-11x^2+30x-20}{x^2+3x-2}$

   b) $\dfrac{2x^6+5x^4+3x^2-2x}{x^2-x+3}$

   c) $\dfrac{6x^3+2x^2-x+3i}{x-i}$

   d) $\dfrac{x^5+2x^3-x-8}{x^2-2i+1}$

2. Divide utilizando la regla de Ruffini

   a) $\dfrac{x^3+2x+70}{x+4}$

   b) $\dfrac{x^5-32}{x-2}$

   c) $\dfrac{x^4-x^2+2}{2x-3}$

   d) $\dfrac{x^4-3x^2+2}{x-2+i}$

3. Sin efectuar las divisiones, halla el resto de las siguientes operaciones

   a) $\dfrac{x^5-2x^2-3}{x-1}$

   b) $\dfrac{2x^4-2x^3+3x^2+5x+10}{x+2i}$

   c) $\dfrac{x^4-3x^2+2}{x-3}$

4. Indica cuáles de estas divisiones son exactas, sin realizar la operación:

   a) $\dfrac{x^3 - 5x - 1}{x - 3}$

   b) $\dfrac{x^6 + 1}{x + i}$

   c) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x - 1}$

   d) $\dfrac{x^{10} - 1024}{x + 2}$

5. Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

6. Hallar a y b para que el polinomio $ax^4 + bx^3 + 1$ admita la raíz $x = -1$ de multiplicidad 2.

7. Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

8. Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé como resto 4.

9. Determinar el valor de m para que $3x^4 + mx^2 + 4$ admita $x = i$ como una de sus raíces.

10. Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$.

11. Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

12. Construya $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que admita:

    a) Se anula para $x = 1 - 2i$, y tiene a $x = -1$ como raíz doble.

    b) Como raíces a $x_1 = i$; $x_2 = 1 - i$ y $x_3 = -1$ doble.

13. Sea $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + -2x + 2$

    a) Halle $P(i)$

    b) Escriba la descomposión en factores de $P(x)$.

14. Determine α para que el polinomio $P(x)$ tenga coeficientes reales:

$$P(x) = 3(x - 1)^2(x - (4 - i))(x - \alpha)$$

15. Construya el polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y de menor grado posible que tenga como raíces a $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ con multiplicidad 3 y $x_3 = 3 + i$; sabiendo además que $P(0) = 1$.