Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 6

Ejercicios Resueltos

"El arte es la ciencia de la belleza, las matemáticas son la ciencia de la verdad."

Oscar Wilde

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Ejercicio 1

Demuestre que si f y g son dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ y tales que

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces entre dos raíces de $f(x) = 0$ hay, al menos, un cero de g.

Respuesta

Conviene aquí analizar por *reducción al absurdo*. Supongamos entonces que entre dos ceros de $f(x)$ no hay un cero de g y sean $a,\ b$ tales ceros. Sin pérdida de generalidad, sea $a < b$. Como

$$f, g \in D(\mathbb{R}) \Longrightarrow f, g \in D[a, b]$$

y como estamos asumiendo

$$g(x) \neq 0,\ \forall x \in [a, b]$$
$$\Downarrow$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in D[a, b].$$

Entonces, aplicando el teorema de Lagrange

$$\exists c \in (a, b) :\ h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = \frac{\frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{b - a}.$$

El Miembro Izquierdo de la igualdad anterior siempre es distinto de cero debido a que se tiene la hipótesis

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mientras que el Miembro Derecho es igual a cero ya que $f(a) = f(b) = 0$ y $b < a$. Lo anterior constituye una **contradicción**. Por tanto, lo supuesto es falso, es decir, entre dos ceros de f hay, al menos, un cero de g si

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2

Halle todas las soluciones reales de la ecuación

$$5^x + 2^x = 4^x + 3^x.$$

Respuesta

La ecuación posee dos soluciones obvias ($x = 0,\ x = 1$). Ahora, ¿serán estas las únicas? Reescribamos la ecuación anterior en la forma

$$5^x - 4^x = 3^x - 2^x.$$

Consideremos entonces la función

$$f(t) = t^x,\ t > 0,\ x \text{ fijo}.$$

Notemos que

$$f(t) \in D([2,3] \cup [4,5]),$$

luego, por el teorema de Lagrange

$$\exists t_1 \in [4,5] : f'(t_1) = x t_1^{x-1} = \frac{5^x - 4^x}{5-4} = 5^x - 4^x$$

y

$$\exists t_2 \in [2,3] : f'(t_2) = x t_2^{x-1} = \frac{3^x - 2^x}{3-2} = 3^x - 2^x.$$

Como

$$\begin{gathered} 5^x - 4^x = 3^x - 2^x \\ x t_1^{x-1} = x t_2^{x-1} \\ \Downarrow \\ x(t_1^{x-1} - t_2^{x-1}) = 0. \end{gathered}$$

De lo anterior se obtiene que $x = 0$ es una solución; se obtiene también que una solución es $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} t_1^{x-1} - t_2^{x-1} &= 0 \\ t_1^{x-1} &= t_2^{x-1} \\ \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1$$

pues $t_1 \neq t_2$ ya que $t_1 \in [4,5]$, $t_2 \in [2,3]$ y $[2,3] \cap [4,5] = \emptyset$.

Se concluye entonces que las únicas soluciones son las triviales: $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 3

Demuestre que

$$(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x},\ \forall x \in (0,e).$$

Respuesta

Tranformemos la inecuación que se debe probar en la equivalente

$$(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x),\ \forall x \in (0,e)$$

y consideremos la función auxiliar

$$h(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x) \in D[0,e]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\ln(e+x) + \frac{e-x}{e+x} - \ln(e-x) + \frac{e+x}{e-x} \\
&= -\ln[(e+x)(e-x)] + \frac{(e-x)^2 + (e+x)^2}{e^2 - x^2} \\
&= \frac{2(x^2+e^2)}{e^2-x^2} - \ln(e^2 - x^2)
\end{aligned}$$

de la cual a simple vista no puede afirmarse nada. Analicemos h'':

$$\begin{aligned}
h''(x) &= 2\left[\frac{2x(e^2-x^2) - (x^2+e^2)(-2x)}{(e^2-x^2)^2}\right] + \frac{2x}{e^2-x^2} \\
&= 4\left[\frac{xe^2 - x^3 + x^3 + xe^2}{(e^2-x^2)^2}\right] + \frac{2x}{e^2-x^2} \\
&= \frac{8xe^2}{(e^2-x^2)^2} + \frac{2x}{e^2-x^2} \\
&= \frac{8xe^2 + 2x(e^2-x^2)}{e^2-x^2} \\
&= \frac{2x(5e^2-x^2)}{(e^2-x^2)^2}
\end{aligned}$$

de modo que

$$h''(x) > 0\ \ \forall x \in (0,e)$$

$$\Downarrow$$

$h'(x)$ es estrictamente creciente en $(0,e)$ y como $h'(0) = 0$ entonces

$$\Downarrow$$

$$h'(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,e)$$

$$\Downarrow$$

$h(x)$ es estrictamente creciente en $(0,e)$ y como $h(0) = 0$ entonces

$$\Downarrow$$

$$h(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,e)$$

con lo cual queda finalmente que

$$(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x), \ \forall x \in (0,e)$$

$$\Updownarrow$$

$$(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}, \ \forall x \in (0,e).$$

Ejercicio 4

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y tal que no existe x para el que se cumpla que $f(x) = f'(x)$. Pruebe entonces que el conjunto $E = \{x \in [0,1] : \ f(x) = 0\}$ es finito.

Respuesta

Consideremos la función auxiliar

$$f(x) = e^{-x} f(x) \in D[0,1]$$

por ser $f \in D[0,1]$ y $y = e^{-x} \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow y = e^{-x} \in D[0,1]$

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \neq 0$$

pues no existe x tal que $f(x) = f'(x)$ por hipótesis y $y = e^{-x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que el conjunto

$$E = \{x \in [0,1] : \ f(x) = 0\}$$

es infinito. Entonces posee al menos dos elementos $x_1, \ x_2 \in [0,1]$ tal que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Sin perder generalidad supongamos que $x_1 < x_2$. Se tendría entonces que $h \in D[0,1] \Longrightarrow h \in D[x_1, x_2]$ y $h(x_1) = h(x_2) = 0$, luego, por el corolario de Rolle se tiene que

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \ h'(c) = 0 = e^{-c}(f'(c) - f(c))$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in (0,1) : \; f'(c) = f(c),$$

lo cual constituye una **contradicción**.

Por tanto, el conjunto E es finito. De hecho, se ha probado que E tiene, a lo más, un elemento.

Ejercicio 5

Demuestre que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable que cumple $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es inyectiva.

Respuesta

Comencemos por notar que si para todo $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$ o $f'(x) > 0$ entonces f sería estrictamente monótona y, por tanto, inyectiva pero, en principio, nada garantiza que f mantenga el signo en $[a,b]$.

Razonemos entonces por *reducción al absurdo*. Supongamos que f no sea inyectiva en $[a,b]$ y satisfaga

$$f \in D[a,b] : \; f'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a,b].$$

Sean

$$x_1 < x_2, \; x_1, \; x_2 \in [a,b] : \; f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f \in D[x_1, x_2], \; f(x_1) = f(x_2)$$

entonces por el teorema de Rolle se tiene que

$$\exists c \in (x_1, x_2) \subset (a,b) : \; f'(c) = 0,$$

lo cual constituye una **contradicción**. Por tanto, f es inyectiva.

Ejercicio 6

Demuestre que

$$2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} = \arctan(arcsenh(x)) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Respuesta

Basta ver que la función

$$h(x) = 2\arctan(e^x) - \arctan(arcsenh(x)) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para ello notemos que si hacemos

$$h_1(x) = 2\arctan(e^x),\ \ h_2(x) = \arctan(arcsenh(x))$$

se tiene que

$$h_1'(x) = h_2'(x) = \frac{2e^x}{1+(e^x)^2},$$

de modo que

$$h'(x) = h_1'(x) - h_2'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de modo que h es constante en $\mathbb{R}$. Notemos que

$$h(0) = 2\arctan(0) - \arctan(arcsenh(0)) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

con lo que queda demostrado lo que se quería.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introducción al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.