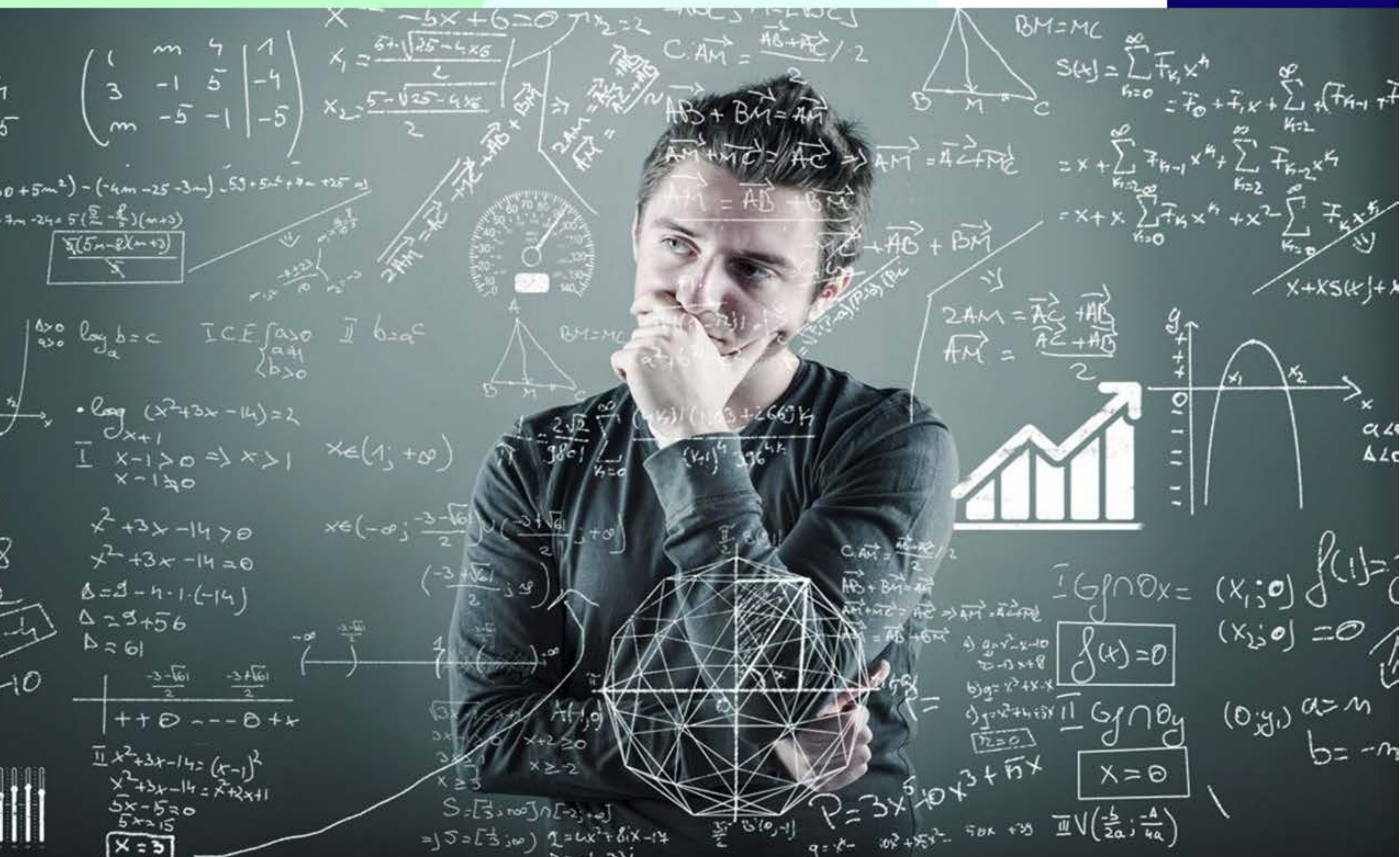
RAZONAMIENTO y lenguaje matemático



Rita Roldan Inguanzo

EDUNIV
Editorial Universitaria

Segunda edición

Razonamiento y lenguaje matemático

Segunda edición

Rita Roldan Inguanzo

Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, 2022

510-R744 2022
Roldan Inguanzo, Rita

Razonamiento y lenguaje matemático (Segunda edición) / Rita Roldan Inguanzo; Universidad de La Habana. Facultad de Matemática. – La Habana : Editorial Universitaria, 2022. – ISBN: 978-959-16-4726-9 (PDF interactivo). – (v, 159 páginas): ilustraciones. – 8,26 por 11,69 pulgadas.

1. Matemática; 2. Universidad de La Habana. Facultad de Matemática
I. Título.

Diseño de cubierta: AMTM, 2022, Imagen tomada de: Radio ZETA Puro Rock Nacional

EDUNIV Catálogo Editorial
Disponible en http://www.eduniv.cu

eLibro
Disponible en http://www.elibro.com

Rita Alejandra Roldán Inguanzo (La Habana, 1962).

Graduada de Licenciatura en Matemática en la Universidad Friedrich Schiller de Jena en Alemania. Con más de 30 años como profesora de MATCOM, UH; preside actualmente la Comisión Nacional de la carrera de Matemática y coordina la mención de *Análisis Matemático y Álgebra* de la Maestría en Ciencias Matemáticas de su facultad. Es profesora titular de MATCOM y metodóloga de la Dirección de Formación de Pregrado de la Universidad de La Habana (UH). Ha publicado varios libros y numerosos artículos científicos en Cuba y en el extranjero. Impartió junto a otro profesor el curso televisivo *Números y Figuras en la Historia* en Universidad para todos. Es la representante de Cuba en la Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria y coordina la Olimpiada Nacional Universitaria de Matemática. Es poseedora del Premio de tercera categoría de la **Universidad Friedrich Schiller de Jena**, de la Distinción por la Educación Cubana y obtuvo el premio Raimundo *Reguera* que otorga la Sociedad Cubana de Matemática y Computación

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Estimado estudiante

Este material ha sido elaborado como texto de apoyo al curso introductorio que se imparte en la especialidad de Matemática, pero puede ser útil a todo aquel que se interese por mejorar sus conocimientos básicos en los temas que aquí se tratan. En él se desarrollan, desde un punto de vista informal, temas que caen en los campos del razonamiento y el lenguaje matemático.

El objetivo de este texto es apoyar a los estudiantes de nuevo ingreso en el aprendizaje de una forma correcta de expresión y razonamiento que les sirva de base para la mejor comprensión de las materias de la Matemática y ... ¿por qué no? ... de otras materias de las Ciencias Naturales. El texto se estructura en cuatro capítulos dedicados a temas básicos de la Teoría de Conjuntos, relaciones y funciones, la Lógica Matemática (que incluye algunos métodos clásicos de demostración matemática) y la Teoría Combinatoria. Cada capítulo culmina con un listado de ejercicios interesantes que apoyarán el aprendizaje.

Se debe resaltar que éste no constituye un texto de Lógica Matemática o de Teoría Combinatoria, pues los temas que en él se presentan no se desarrollan con el rigor ni la formalidad que exige esa ciencia y solamente se pretende servir de puente en el tránsito de la enseñanza media al nivel superior, sobre todo en lo relativo a la forma correcta de pensar en la Matemática. Se recomienda al lector que desee ampliar sus conocimientos, no conformarse con estas breves notas y buscar lecturas especializadas y actualizadas. Para los interesados en la diversión que ofrecen estos temas, se propone al final un listado de problemas de pensamiento lógico, tomados de una revista de entretenimientos, esperando que los disfruten.

Se agradece cualquier comentario o señalamiento que nos ayude a mejorar este texto.

La autora (rroldan@matcom.uh.cu)

Capítulo 1

ELEMENTOS MUY ELEMENTALES SOBRE CONJUNTOS

1.1. La noción de conjunto

Si pedimos a un grupo de personas que expresen qué entienden por conjunto, nos encontraremos con que cada uno dará una definición distinta, es más, es muy posible que traten de explicar sus ideas con ejemplos como: "las personas que van en un autobus" o "los libros que están en mi mesa" o incluso conjuntos muy grandes como "los granos de arena de la playa de Guanabo". Esto se explica porque la noción de conjunto es una noción intuitiva que nos formamos todos ya en nuestra niñez y es, por tanto, algo que se sobreentiende.

Si observamos los ejemplos anteriores pudiéramos intentar definir:

> Un conjunto es una colección de objetos (elementos) que satisfacen una determinada propiedad.

Esta definición no es nueva y fue aceptada en el mundo durante largo tiempo, hasta que Bertrand Russel [1] descubrió a principios del Siglo XX la siguiente paradoja:

> Llamemos A al conjunto cuyos elementos son conjuntos que no son elementos de sí mismos. Es decir, la propiedad definitoria de los elementos

[1] Bertrand Russel (1872-1970) es considerado por muchos como el filósofo más influyente y uno de los lógicos más importantes del siglo XX. Escribió sobre una amplia gama de temas haciendo gala de un magnífico estilo literario plagado de sarcasmos y metáforas que le llevó a ganar en 1950 el Premio Nobel de Literatura. Russell tuvo una gran influencia en la lógica matemática moderna y defendió el logicismo, la visión de que la matemática es reducible a la lógica. Su obra matemática más importante es "Principia Mathematica". El último trabajo significativo de Russel en matemáticas y lógica, "Introducción a la filosofía matemática", fue escrito a mano mientras estaba en la cárcel por sus actividades antibélicas durante la Primera Guerra Mundial.

> del conjunto A es: "ser conjunto y no ser elemento de sí mismo" (un elemento de este conjunto es, por ejemplo, el conjunto de todas las sillas, ya que ese conjunto no es una silla). Entonces nos encontramos con la siguiente paradoja: A sería elemento de A si A no fuera elemento de sí mismo (esto suena como un trabalenguas!!!). Por otra parte, basta que A sea elemento de sí mismo para que A no sea elemento de A (y dale con los trabalenguas!!!). Este enunciado constituye una de las paradojas fundamentales de la Teoría de Conjuntos.

Otra paradoja de corte similar es la siguiente:

> En un pequeño pueblo de un país remoto existe un barbero que afeita exclusivamente a aquellas personas que no se afeitan a sí mismas ¿Quién afeita al barbero?
>
> Agrupemos en un conjunto a todas las personas que son afeitadas por el barbero. Si el barbero se afeitara a sí mismo, entonces sería un elemento del conjunto en cuestión. Pero él no se puede afeitar, pues afeita exclusivamente a los que no se afeitan a sí mismos, por tanto, no estaría en el conjunto. Pero entonces el barbero no se afeita a sí mismo por lo que estaría en el conjunto de las personas que son afeitadas por el barbero...

A pesar de no existir una definición exacta de conjunto, se han tratado de resolver estas contradicciones sin afectar la noción intuitiva. Las soluciones más conocidas se basan en la definición de conjunto en el sentido de la anteriormente planteada, aplicándole algún tipo de restricción, de manera que la definición por propiedades excluya la posibilidad de paradojas como la de Russell. Por su conveniencia para nuestros menesteres aceptaremos la restricción según Zermelo [2], que plantea:

> Dado un conjunto primario (universo), toda propiedad define en él un conjunto que está formado por los elementos del conjunto primario que satisfacen esa propiedad.

Se puede observar que esta definición tiene cierto carácter temporal, es decir, depende del tipo de objetos que nos interese estudiar en un momento dado. Por otra parte, al restringir los conjuntos sobre la base de un conjunto primario previamente determinado se evitan confusiones. Nótese también que la idea de partir del conjunto universo no se aleja de los mecanismos de nuestro pensamiento, pues si, por ejemplo,

[2] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1870-1956) fue un lógico y matemático alemán. Comenzó a trabajar en los problemas de teoría de conjuntos a prinicipios del Siglo XX y en 1902 publicó su primer trabajo sobre la adición de cardinales transfinitos. En 1904, dio con éxito el primer paso para la hipótesis del continuo, cuando probó el teorema del buen orden ("cada conjunto puede estar bien ordenado"), teorema que lo llevó a la fama. Su prueba del teorema del buen orden, que se basaba en el axioma de elección, no fue de inicio aceptada por todos los matemáticos, en parte porque la teoría de conjuntos carecía de una axiomatización en ese tiempo.

en un momento determinado nos interesa trabajar con números, no tendría ningún sentido pensar en flores o guayabas o si estamos haciendo un estudio sobre los pueblos latinoamericanos, resulta que los esquimales no jugarían ningún papel en nuestro estudio y sólo estarían creando confusiones.

Aceptemos entonces la idea subyacente en la definición de Zermelo de que, para trabajar con conjuntos se debe partir de la agrupación primaria de todos los posibles objetos de nuestro interés en un conjunto al que llamaremos **conjunto universo**. Entonces para nosotros un conjunto será "una colección de objetos del conjunto universo que cumplen determinada propiedad" y aceptaremos la posibilidad de que dicha colección conste de un solo objeto.

Ahora pasaremos a la construcción de un lenguaje apropiado, con alfabeto y expresiones propias, con el objetivo de facilitar el trabajo y eliminar las confusiones y contradicciones que sin duda provocaría el uso exclusivo del idioma español.

Para denotar conjuntos utilizaremos las letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B, C,..., Z) o, cuando sea conveniente, usaremos esas mismas letras con subíndice $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$. El conjunto universo se denota por la letra U. Para denotar los elementos de un conjunto utilizaremos las letras minúsculas $(a, b, c, \ldots)$ o las letras con subíndice $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. Existen conjuntos, que por su uso continuado reciben notaciones estándar, por ejemplo:

- $\mathbb{N}$ - Conjunto de los números naturales,
- $\mathbb{Z}$ - Conjunto de los números enteros,
- $\mathbb{Q}$ - Conjunto de los números racionales,
- $\mathbb{R}$ - Conjunto de los números reales,
- $\mathbb{C}$ - Conjunto de los números complejos.

Para representar abreviadamente el enunciado "x es elemento del conjunto A" o "x pertenece al conjunto A" utilizaremos el **símbolo de pertenencia** "$\in$" de modo que el enunciado anterior adopta la forma "$x \in A$". La negación de esta expresión se denota "$x \notin A$" y se lee "x no pertenece a A" o "x no es elemento de A'.

Ejemplos:

1. Sea A el conjunto de todos los mambises. Entonces se puede afirmar que "Antonio Maceo $\in A$". Sin embargo, "Ernesto Guevara $\notin A$", pues resulta obvio que Ernesto Guevara no fue un mambí por la época en que vivió.

2. Si partimos del ejemplo de los números naturales $\mathbb{N}$, podemos afirmar que $2 \in \mathbb{N}$, pero $2{,}5 \notin \mathbb{N}$. Así mismo, si denotamos por P al conjunto de todos los

números pares, se tiene que $P \notin \mathbb{N}$, pues P no es un número, sino un conjunto y $\mathbb{N}$ solo contiene números.

Partiendo de estos mismos ejemplos, se observa que los conjuntos dados se pueden escribir en la forma:

$$A = \{\text{Maceo, Gómez, Sanguily, } \ldots\},$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Este tipo de notación se conoce como **representación extensiva** de un conjunto y consiste en escribir separados por comas todos los elementos del conjunto encerrados entre llaves.

Existe también la **notación intensiva** de un conjunto, que brinda una información más compactada de sus elementos y consiste en describir los elementos del conjunto mediante la propiedad que los define, por ejemplo:

$$A = \{x;\ \text{tal que } x \text{ fue un mambí}\}.$$

1.2. Operaciones y relaciones con conjuntos

1.2.1. Subconjuntos

La relación de subconjunto constituye una manera de "comparar conjuntos".

Definición 1.2.1

*Si A y B son conjuntos, se dice que A **es subconjunto de** B o que A **está incluido en** B si todo elemento de A es también elemento de B. Esta relación se denota como $A \subseteq B$ y su negación (existe al menos un elemento de A que no es elemento de B) se denota $A \nsubseteq B$ y se lee "A no es subconjunto de B".*

*Si $A \subseteq B$, pero existe $x \in B$ tal que $x \notin A$, se dice que A **es subconjunto propio de** B y se denota $A \subset B$.*

Ejemplos:

1. Sean

$$A = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante de Matemática}\},$$

$$B = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante de primer año de Matemática}\},$$

$$C = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante o profesor de primer año de Matemática}\}.$$

Entonces $B \subseteq A$, incluso es $B \subset A$, pero $C \nsubseteq A$.

2. Igualmente se puede afirmar que si P es el conjunto de todos los números pares, entonces es $P \subset \mathbb{N}$. Sin embargo, $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$, pues los números enteros negativos no son naturales.

3. Sean
$$P = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número par}\},$$
$$M = \{x = 2k;\ \text{tal que } k \in \mathbb{Z}\}.$$
Si $x \in P$, entonces x es divisible por 2, por lo que se puede encontrar un número entero k tal que $x = 2k$, siendo así $x \in M$. Luego $P \subseteq M$.

   Por otra parte, si $x \in M$, entonces $x = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto x es un número par (divisible por 2), por lo que $x \in P$. Entonces $M \subseteq P$.

Este último ejemplo nos conduce a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.2.2

*Si A y B son conjuntos, se dice que A **es igual a** B ($A = B$) si y solo si se cumple simultáneamente que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

Ejemplos:

1. Sean
$$A = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante de Matemática en la Universidad de La Habana}\},$$
$$B = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante de Matemática en La Habana}\}.$$
Como la Universidad de La Habana está obviamente en La Habana, se cumple $A \subseteq B$. Por otra parte, en La Habana solo se puede estudiar Matemática en la Universidad de La Habana, por lo que $B \subseteq A$. Así, finalmente es $A = B$ (Y... parece que a la autora le gustan los trabalenguas...).

2. Sean los conjuntos definidos anteriormente
$$P = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número par}\},$$
$$M = \{x = 2k;\ \text{tal que } k \in \mathbb{Z}\}.$$
Ya vimos que se cumple $P \subseteq M$ y $M \subseteq P$, por lo que $P = M$.

La relación de inclusión que hemos definido anteriormente cumple las siguientes propiedades:

Antisimetría: Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

Reflexividad: Todo conjunto A cumple que $A \subseteq A$.

Transitividad: Si A, B y C son tres conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces se cumple que $A \subseteq C$.

Demostración: Las propiedades de antisimetría y reflexividad resultan obvias a partir de la definición de igualdad de conjuntos y de la definición de subconjunto respectivamente.

Transitividad: Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Asimismo, como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Luego, se tiene $A \subseteq C$. **Q.e.d.**

Se plantea al lector la pregunta ¿serán válidas estas tres propiedades para la relación de inclusión propia?

Existen conjuntos específicos, que por su importancia son llamados conjuntos notables. Uno de ellos es el ya conocido **conjunto universo** U. Otro conjunto notable de gran significación es el **conjunto nulo o vacío**, que se define como aquel que no contiene ningún elemento del conjunto universo y se denota por el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo: Sean

$$U = \{x;\ \text{tal que } x \text{ estudia o trabaja en la Universidad de la Habana}\},$$

$$D = \{x \in U;\ \text{tal que } x \text{ es un niño menor de dos años}\}.$$

Resulta evidente que ningún niño menor de dos años puede estudiar y mucho menos trabajar en la Universidad, por lo que en este caso es $D = \emptyset$.

Esta definición pudiera parecer algo inconsistente y sin sentido a los ojos del profano. Si embargo, el conjunto vacío mantiene la siguiente importante relación con cualquier conjunto:

Si A es un conjunto cualquiera, entonces es $\emptyset \subseteq A$.

Demostración: Sea A un conjunto cualquiera, entonces solamente hay dos opciones posibles, a saber: $\emptyset \subseteq A$ o $\emptyset \nsubseteq A$.

Veamos que la segunda opción es imposible. Para ello supongamos que ella es cierta, es decir, que $\emptyset \nsubseteq A$. Entonces existe al menos un elemento de $\emptyset$ que no está contenido en A. Pero eso es imposible, pues $\emptyset$ no contiene ningún elemento, por lo que no puede ser $\emptyset \nsubseteq A$. Luego, la única opción válida es $\emptyset \subseteq A$. **Q.e.d.**

Este tipo de prueba consistente en demostrar la imposibilidad de la negación del resultado que se quiere obtener a partir de considerarla válida, es muy utilizada en la Matemática y se conoce con el nombre de “reducción al absurdo”.

El lenguaje de la Teoría de Conjuntos permite expresar con símbolos ciertas frases del lenguaje ordinario. Así, por ejemplo, las propiedades de un objeto se describen a través de su pertenencia a un conjunto, al igual que la relación de subconjunto y el conjunto vacío permiten describir propiedades que cumplen todos o algún objeto.

Ejemplos: Sean

$$U = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante universitario}\},$$

$$A = \{x \in U;\ \text{tal que } x \text{ estudia Matemática y es alumno ayudante}\},$$

$$B = \{x \in U;\ \text{tal que } x \text{ es estudiante de la Universidad de La Habana}\}.$$

Entonces

- la frase “Roberto estudia Matemática en la Universidad de La Habana y es alumno ayudante” se traduce como Roberto$\in A$,
- la frase “todos los estudiantes de Matemática, que son alumnos ayudantes, estudian en la Universidad de La Habana” se traduciría, si fuera cierto, como $A \subseteq B$,
- la frase “existe al menos un alumno ayudante que estudia Matemática” se traduce como $A \neq \emptyset$

Finalmente definamos otro conjunto notable de gran importancia:

Definición 1.2.3

*Si A es un conjunto, se define como su **conjunto potencia** al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A y se denota ($\wp(A)$ (se lee “conjunto potencia de A”).*

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Entonces es

$$\wp(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Nótese que el conjunto potencia de un conjunto dado contiene siempre al conjunto vacío y al propio conjunto.

1.2.2. Operaciones con conjuntos

Se definen a continuación operaciones que permitirán obtener nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Definición 1.2.4

Si A y B son conjuntos, siendo U el conjunto universo, se define:

- ***Unión de** A **y** B es el conjunto cuyos elementos son todos los que pertenecen a A o a B o a ambos conjuntos y se denota $A \cup B$ (se lee “A unión B”). Es decir,*

$$A \cup B = \{x;\ \textit{tal que } x \in A \textit{ o } x \in B\}.$$

- **Intersección de** A **y** B es el conjunto cuyos elementos son al mismo tiempo elementos de A y de B y se denota $A \cap B$ (se lee "A intersección B"). Es decir,

$$A \cap B = \{x;\ \text{tal que } x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

  En el caso particular en que sea $A \cap B = \emptyset$ se dice que los conjuntos A y B son **disjuntos**.

- **Diferencia de** A **y** B es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de A que no están contenidos en B y se denota $A \setminus B$ (se lee "A menos B"). Es decir,

$$A \setminus B = \{x;\ \text{tal que } x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

- **Complemento de** A es el conjunto cuyos elementos son los elementos del universo que no están contenidos en A y se denota A^c (se lee "A complemento"). Es decir,

$$A^c = \{x;\ \text{tal que } x \notin A\} = U \setminus A.$$

Ejemplo: Sean $U = \mathbb{N}$, y

$$A = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo}\},$$

$$B = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número par}\},$$

$$C = \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número impar.}\}$$

(Recuerde que los números primos son los números naturales mayores que 1 cuyos únicos divisores positivos son la unidad y el propio número. Los números naturales que no son primos se llaman compuestos.)

En este caso se observa que

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo o } x \text{ es un número par}\} \\
&= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, \ldots\}, \\
A \cup C &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo o } x \text{ es un número impar}\} \\
&= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots\}, \\
B \cup C &= \mathbb{N}, \\
A \cap B &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo par}\} = \{2\}, \\
A \cap C &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo impar}\} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}, \\
B \cap C &= \emptyset,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A \setminus B &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo impar}\} = A \cap C,\\
A \setminus C &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número primo par}\} = A \cap B,\\
B \setminus C &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número par y } x \text{ no es un número impar}\} = B,\\
A^c &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número compuesto}\} = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \ldots\},\\
B^c &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número impar}\} = C,\\
C^c &= \{x;\ \text{tal que } x \text{ es un número par}\} = B.
\end{aligned}
$$

Los **diagramas de Venn**[3] constituyen una representación gráfica de las operaciones conjuntuales definidas en el epígrafe anterior y son de gran utilidad para su comprensión y para la demostración de leyes y propiedades de la Teoría de Conjuntos.

Para la realización de un diagrama de Venn se representa al conjunto universo U como un rectángulo en cuyo interior se dibujan en forma circular los conjuntos que se desea considerar, teniendo en cuenta si ellos se interceptan o no. Se representa sombreado al conjunto generado por las operaciones que se desean ilustrar a través del diagrama.

La figura 1.1 muestra los diagramas de Venn que representan las operaciones conjuntuales definidas en el epígrafe anterior.

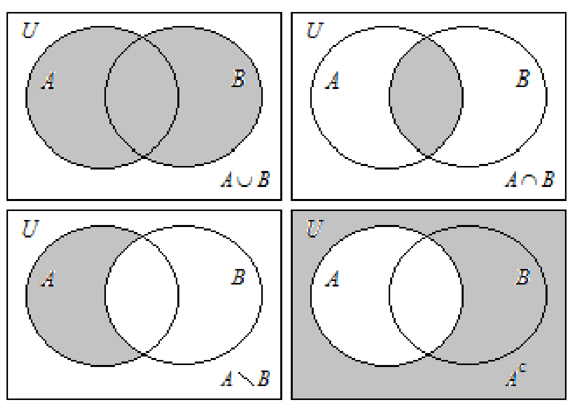


Figura 1.1: Diagramas de Venn

[3]John Venn (1834-1923), fue un matemático y lógico británico miembro de la Real Sociedad de Londres. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos conocido como los diagramas de Venn, que fueron utilizados posteriormente para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la Teoría de Conjuntos. El área de mayor interés para Venn era la lógica, y publicó tres textos sobre el tema "The Logic of Chance" (Lógica del Azar) en 1866, que introdujo la teoría de frecuencia de la probabilidad, "Symbolic Logic" (Lógica Simbólica) en 1881, que presentaba los diagramas de Venn y "The Principles of Empirical Logic" (Los Principios de la Lógica Empírica) en 1889.

Los diagramas de Venn son útiles como medio para el cálculo de cadenas de operaciones entre conjuntos.

Ejemplo: Dado el conjunto universo

$$U = \{\text{estudiantes de la Universidad de La Habana}\},$$

sean los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{estudiantes de la carrera de Matemática}\}, \\ B &= \{\text{estudiantes de primer año de Matemática o Computación}\}, \\ C &= \{\text{estudiantes de la Facultad de Matemática y Computación}\}. \end{aligned}$$

Evidentemente es $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Por otra parte, se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. De esa manera se obtiene el diagrama de la figura 1.2.

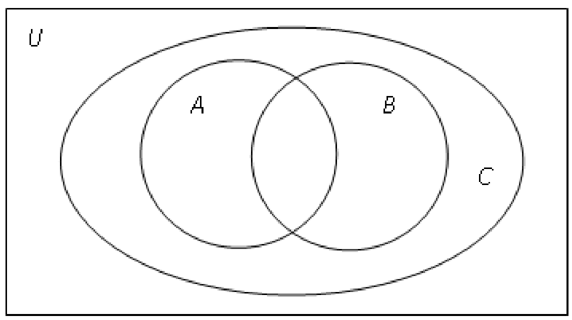


Figura 1.2: Ejemplo de diagrama de Venn

Se desea calcular $[C \setminus (A \cup B)] \cup (A \cap B)$. Como es conocido, se debe comenzar por el cálculo de las operaciones entre paréntesis y continuar hasta alcanzar el resultado final, como se muestra en las figuras 1.3 hasta 1.6.

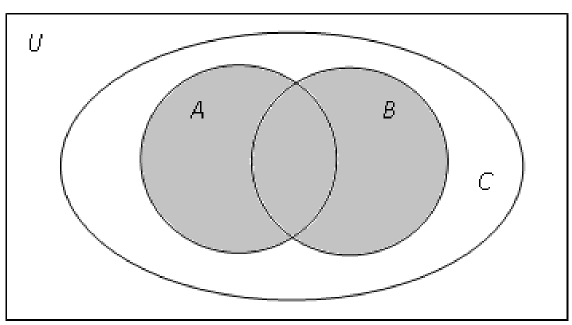


Figura 1.3: $A \cup B$

Entonces

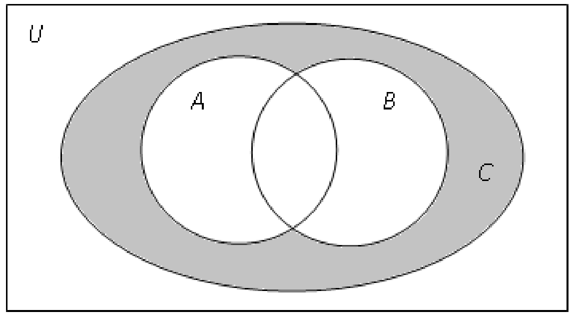


Figura 1.4: $C \setminus (A \cup B)$

Por otra parte

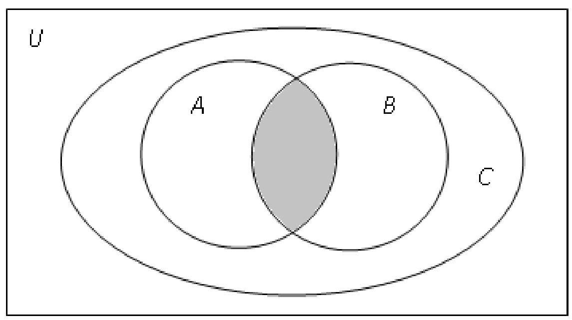


Figura 1.5: $A \cap B$

Así finalmente, de las figuras anteriores se obtiene $[C \setminus (A \cup B)] \cup (A \cap B)$.

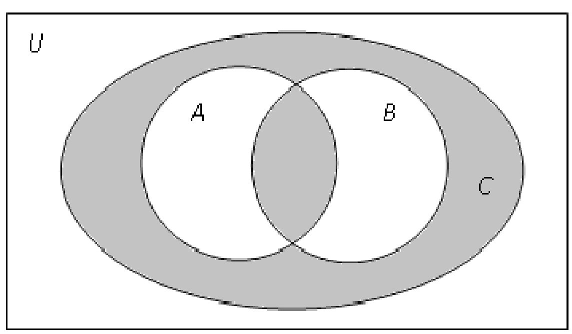


Figura 1.6: $[C \setminus (A \cup B)] \cup (A \cap B)$

Otra operación muy típica entre conjuntos es el producto cartesiano. Para definirlo recordemos primeramente los siguientes conceptos:

Dado un conjunto A,

- Se llama **par ordenado de elementos de** A al par (a, b) en ese orden y entre paréntesis, siendo a, b elementos de A.
- Se llama n**-úplo ordenado de elementos de** A a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en ese orden y entre paréntesis, siendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A.
- Dos pares ordenados (a, b) y (x, y) se dicen **iguales** (se denota $(a, b) = (x, y)$) si se cumple $a = x$, $b = y$.

Ejemplo: Sea $A = \{2, 4, 6\}$. Entonces todos los posibles pares ordenados de A son

$$(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6),$$

mientras que todos los posibles triplos ordenados son

$$\begin{gathered}(2,2,2),(2,2,4),(2,2,6),(2,4,2),(2,4,4),(2,4,6),(2,6,2),(2,6,4),(2,6,6),\\(4,2,2),(4,2,4),(4,2,6),(4,4,2),(4,4,4),(4,4,6),(4,6,2),(4,6,4),(4,6,6),\\(6,2,2),(6,2,4),(6,2,6),(6,4,2),(6,4,4),(6,4,6),(6,6,2),(6,6,4),(6,6,6).\end{gathered}$$

Definición 1.2.5

Si A y B son conjuntos, se define su ***producto cartesiano*** *como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$ y se denota $A \times B$. Es decir*

$$A \times B = \{(a, b);\ \textit{tales que } a \in A \textit{ y } b \in B\}.$$

De manera similar se define para n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su producto cartesiano como

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n);\ \textit{tales que } a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Ejemplos:

1. Sean los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Entonces es

   $$A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),(6,1),(6,2),(6,3)\}.$$

   Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, podemos representar gráficamente a este conjunto. Para ello representamos al conjunto A en el eje X y al conjunto B en el eje Y, de manera que el conjunto $A \times B$ queda representado como los puntos de coordenadas (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ (Ver Fig. 1.7).

2. Sea ahora $A = \{x \in \mathbb{R}; \text{tal que } 2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}; \text{tal que } 1 \leq y \leq 3\}$. Entonces es

   $$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{tal que } 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}.$$

   La figura 1.8 muestra su representación gráfica.

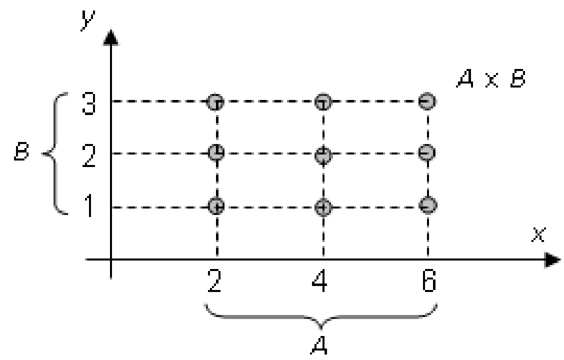


Figura 1.7: $A \times B$

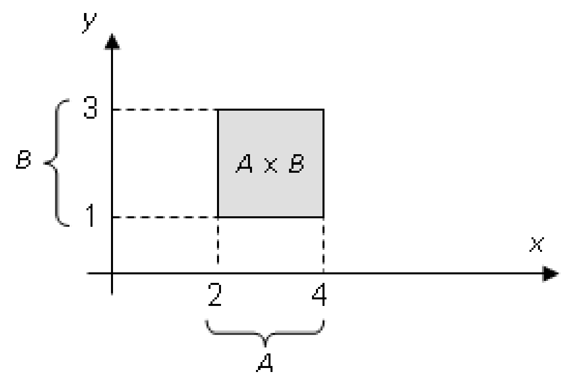


Figura 1.8: $A \times B$

De esta manera se ha definido una nueva operación entre conjuntos que cumple respectivamente las siguientes propiedades de distributividad respecto a la unión, intersección y diferencia de conjuntos:

Dados tres conjuntos A, B y C cualesquiera, se cumple

$$\begin{array}{ll} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), & (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), & (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C), \\ A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C), & (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C). \end{array}$$

Demostremos a manera de ejemplo la primera propiedad:

Demostración: Si $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, entonces $x \in A$ e $y \in B \cup C$, es decir $x \in A$ e ($y \in B$ o $y \in C$).
Ahora,
si $x \in A$ e $y \in B$, entonces $(x, y) \in A \times B$, mientras que
si $x \in A$ e $y \in C$, entonces $(x, y) \in A \times C$.

Resumiendo, se tiene que $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$, lo que implica que $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. De esta manera es

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C). \tag{1.1}$$

Por otra parte, si $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$, entonces $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$, es decir $x \in A$ e $(y \in B$ o $y \in C)$, lo que implica que $x \in A$ e $y \in B \cup C$ y por tanto $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Así es

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C). \tag{1.2}$$

De (3) y (4) se deduce finalmente que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Q.e.d.

Nótese que el producto de conjuntos no es conmutativo, lo cual se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$. Entonces es

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, 3), (2, 3)\}, \\ B \times A &= \{(3, 1), (3, 2)\}. \end{aligned}$$

1.2.3. Leyes del álgebra de conjuntos

A continuación se presentan las leyes fundamentales del Álgebra de Conjuntos, las cuales constituyen los medios básicos para la demostración de propiedades.

1. **Leyes de idempotencia**

   1.1. $A \cup A = A$,

   1.2. $A \cap A = A$.

2. **Leyes asociativas**

   2.1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

   2.2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. **Leyes conmutativas**

   3.1. $A \cup B = B \cup A$,

   3.2. $A \cap B = B \cap A$.

4. **Leyes distributivas**

4.1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
4.2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5. **Leyes de indentidad**

5.1. $A \cup \emptyset = A$,
5.2. $A \cap \emptyset = \emptyset$,
5.3. $A \cup U = U$,
5.4. $A \cap U = A$.

6. **Leyes de complemento**

6.1. $A \cup A^c = U$,
6.2. $A \cap A^c = \emptyset$,
6.3. $(A^c)^c = A$,
6.4. $U^c = \emptyset$,
6.4. $\emptyset^c = U$.

7. **Leyes de D'Morgan**

7.1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
7.2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Las leyes del Álgebra de conjuntos constituyen una gran ayuda en la demostración de propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Ejemplo: Demuestre que para cualesquiera dos conjuntos A y B se cumple la identidad $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$.

Demostración:

$$\begin{aligned} (A \cup B^c)^c &= A^c \cap (B^c)^c \quad \text{(por la propiedad 7.1.)} \\ &= A^c \cap B \quad \text{(por la propiedad 6.3.).} \end{aligned}$$

Q.e.d.

Como se puede observar, algunas de estas leyes son demasiado evidentes (como las leyes de idempotencia) en comparación con otras que no lo son. Los diagramas de Venn (que no constituyen una demostración formal) pueden ayudar en la comprensión de esas leyes y brindan a la vez la idea necesaria para el desarrollo de la demostración formal.Veamos esta afirmación a luz del ejemplo de la ley de D'Morgan 7.1.:

Para demostrar que se cumple $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, estudiemos primeramente los diagramas de Venn. Para ello vamos a dividir el papel con una línea vertical y calcularemos a la vez ambos miembros de la igualdad, como se observa en la figura 1.7.

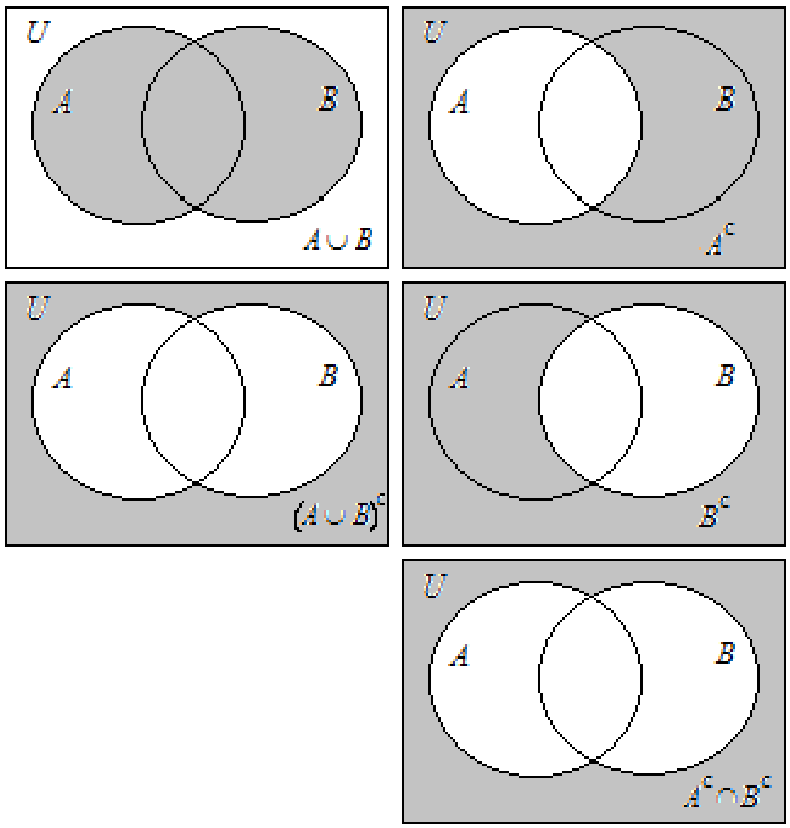


Figura 1.9: Comprobación de la Ley de D'Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

El diagrama muestra la validez de la ley 7.1. Veamos su demostración formal:

Demostración:

(1) Demostremos que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

Sea $x \in (A \cup B)^c$. Entonces $x \notin (A \cup B)$. Luego $x \notin A$ y $x \notin B$, lo cual implica que $x \in A^c$ y $x \in B^c$ y por ello $x \in A^c \cap B^c$. Entonces se cumple que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

(2) Demostremos ahora que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Sea $x \in A^c \cap B^c$. Entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$, por lo que $x \notin A$ y $x \notin B$. Pero ello implica que $x \notin (A \cup B)$, es decir $x \in (A \cup B)^c$. Entonces se cumple que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Finalmente de (1) y (2) se deduce que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. **Q.e.d.**

1.2.4. Un breve paseo por los conjuntos numéricos

Desarrollaremos aquí un breve paseo por los conjuntos numéricos y sus propiedades, como recordatorio de lo que se conoce de la enseñanza precedente. Estos temas se trabajarán con profundidad en las asignaturas básicas de la carrera.

El concepto de número se desarrolló en la antiguedad como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos. En un inicio, el número no existia como objeto abstracto.

Al principio, en el proceso de cálculo surgen los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$. Número natural es la primera idea de número que tuvo el hombre y se relaciona con algo tan primitivo como es el contar. Se trata de un conjunto infinito, en el cual están definidas las operaciones de adición y multiplicación, obteniéndose en cada caso a partir de ellas un nuevo número natural. Estas operaciones son conmutativas y asociativas y la multiplicación es distributiva respecto a la suma. La sustracción y la división no siempre son posibles en este conjunto. El conjunto de todos los **números naturales** se denota por $\mathbb{N}$. Así es

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Este es un conjunto ordenado, lo que se puede interpretar por ahora como que cualesquiera dos números naturales n y m se encontrarán siempre en una de las tres relaciones $n < m$, $n = m$ o $n > m$.

Para que la resta sea posible, se introducen el cero y los números negativos enteros. El conjunto de los **números enteros** es una extensión del conjunto de los números naturales, en la que se incluyen los números con signo negativo y se denota por $\mathbb{Z}$. Así es

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Nótese que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y que en $\mathbb{Z}$ se mantienen las propiedades de la suma y el producto conocidas de los naturales, coincidiendo estos últimos con los enteros no negativos. El cero se conoce como elemento **neutro de la suma**, porque para todo número entero z se cumple que $z + 0 = 0 + z = z$. Como aquí la resta es posible, se cumple que todo número entero $z \neq 0$ tiene un elemento **opuesto** $(-z)$, que al sumárselo produce el neutro; es decir, $z + (-z) = -z + z = 0$. El conjunto de los números enteros es también un conjunto ordenado. Es así que los números enteros (y por tanto también los naturales) se representan geométricamente en la conocida recta numérica.

Una importante propiedad de los números enteros positivos (naturales) de gran utilidad para la técnica de demostración por inducción completa que se estudiará más adelante es la conocida como **propiedad del buen orden**.

Todo conjunto no vacío de enteros positivos tiene un menor elemento

De manera paralela al desarrollo del concepto número natural se desarrolló el concepto número fraccionario. El estudio de las fracciones se remonta mas allá del año 2000 a.n.e. al antiguo Egipto y Babilonia. Los primeros números fraccionarios aparecieron por las necesidades en la repartición de herencias, en los cálculos para las construcciones, en las mediciones del tiempo, etc. Comenzaron utilizándose las fracciones del tipo $\frac{1}{n}$, llamadas fracciones alícuotas y otras pocas fracciones como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Luego, en situación similar a la de los números naturales y enteros, se hace necesario extender el conjunto numérico manteniendo sus propiedades, permitiendo las operaciones de resta y división, definiéndose así el conjunto de los números racionales.

Un **número racional** es un número de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros, tal que $q \neq 0$. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$; es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q}; \text{tales que } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Nótese que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

y que en $\mathbb{Q}$ se mantienen las propiedades de la suma y el producto conocidas de los enteros, coincidiendo estos últimos con los racionales de la forma $\frac{p}{q}$ tal que q divide a p. En el conjunto de los números racionales, el uno se conoce como elemento **neutro de la multiplicación**, porque para todo número racional r se cumple que $r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$. Como aquí la división es posible, se cumple que todo número racional $r \neq 0$ tiene un elemento **inverso** $(\frac{1}{r})$, que al multiplicárselo produce el neutro; es decir, $r \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot r = 1$. El conjunto de los números racionales es igualmente un conjunto ordenado.

Sean ahora dados dos números racionales $a < c$. Es obvio que el punto medio entre a y c, dado por $r = \frac{a+c}{2}$ es un número racional, que cumple que $a < r < c$. Esto resultado tan sencillo de comprobar es de gran importancia y se conoce como "**Propiedad de densidad de los racionales**".

Para cualesquiera dos números racionales $a < c$, siempre existe un número racional r tal que $a < r < c$.

Al ser un conjunto ordenado, los números racionales también se pueden representar en la conocida recta numérica. Sin embargo, a pesar de la propiedad de densidad anteriormente demostrada, los números racionales "no llenan" la recta numérica. Por ejemplo, por el Teorema de Pitágoras se concluye que la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2}$ no es un número racional (demuéstrelo!!!).

Esos números que no son racionales se conocen con el nombre de **números irracionales** y su conjunto se denota con la letra $\mathbb{I}$. A partir de la unión de ambos conjuntos se define el conjunto de los **números reales**, denotado por $\mathbb{R}$; es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

El conjunto de los números reales es una extensión de todos los conjuntos anteriores; es decir,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

y hereda todas las propiedades conocidas de los racionales, incluso el orden. La propiedad de densidad de los números racionales se extiende de manera natural a los números reales garantizando la desaparición de los "huecos" en la recta numérica:

Para cualesquiera dos números racionales $a < c$, siempre existe un número racional r y un número irracional t, tales que $a < r < c$ y $a < t < c$.

Los números reales serán ampliamente estudiados en el curso de Análisis Matemático.

Por mucho tiempo los matemáticos rechazaron la posibilidad de introducir entes nuevos más allá de los números reales. Pero llegó el momento que la idea tuvo que admitirse para poder continuar ampliando el campo de aplicaciones de la matemática. En el trabajo de los algebristas italianos del Siglo XVI apareció esta necesidad.

El primer libro donde se trató este asunto fue el "Ars Magna" ("Arte Superior" o "Álgebra') del médico, filósofo y astrólogo Girolamo Cardano[4]. En uno de los problemas planteaba

[4]Girolamo Cardano (1501-1576) fue un hombre de una vida turbulenta y bohemia. En la década del 40 del Siglo XVI desplegó una amplia actividad en el campo de las Matemáticas. Así en 1545 aparece su Ars Magna, donde plantea el algoritmo para resolver la cúbica que luego será conocido como fórmula de Cardano. En el año 1570, viejo y sin fortuna, fue encarcelado por una deuda de juego que no estaba en condiciones de cancelar. Después tuvo que responder ante el Tribunal de la Inquisición por una acusación de herejía, pues se decía que sus escritos filosóficos y sus trabajos particulares como "astrólogo" estaban imbuidos de panteísmo y superchería (Había hecho el horóscopo de Jesucristo y escrito un libro en alabanza a Nerón, torturador de los mártires). Cardano es también conocido por un método criptográfico de cifrado llamado Rejilla de Cardano y una articulación mecánica lleva su nombre. Pasó sus últimos años en Roma escribiendo la segunda edición corregida y ampliada de su autobiografía, donde "pronosticó" la fecha de su muerte, el 21 de septiembre de 1576.

> Alguien te dice que dividas 10 en dos partes, que multiplicadas entre sí te den 40.

Este problema se modela matemáticamente mediante la ecuaciones $x + y = 10$ y $xy = 40$. Cardano comenzaba diciendo que la solución del problema era imposible, sin embargo, existe la solución $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $y = 5 - \sqrt{-15}$, lo cual se puede comprobar fácilmente ¿Pero eran números sus soluciones? ¿Qué eran exactamente?. Cardano llamó a esta solución "intrigante" y que era "tan sutil como inútil", lo que no le hacía parecer muy entusiasta respecto al tema...

En esa época no existía consenso entre los matemáticos respecto a la aceptación del concepto de número negativo. Si veian al número negativo como algo ajeno a la matemática pura, es comprensible que sintieran aversión por sus raices cuadradas. La raíz cuadrada de un número negativo era sencillamente algo monstruoso ¿cómo definirla?, ¿qué son los números complejos?, ¿de dónde proceden? y ¿por qué juegan un papel dominante en la matemática moderna? Esas son algunas de las interrogantes que quedarán pendientes para un curso avanzado de Álgebra.

En fin, es así como surge el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos (que no desarrollaremos aquí), como extensión del conjunto de los números reales, que hereda de ellos casi todas sus propiedaes excepto el ser un conjunto ordenado y cumple

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Este conjunto se puede interpretar de cierto modo como el producto cartesiano $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y su definición rigurosa se logra a partir de la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, definida por Leonard Euler[5], el maestro de todos los matemáticos.

La historia de los números complejos ha sido muy accidentada y ha necesitado saltar muchos prejuicios ampliamente compartidos por muchos acerca del significado del concepto número. Si no se hubiera mostrado que manipulando convenientemente estas "raíces sofisticadas" se podían resolver todas las ecuaciones de tercer grado, pues se hubieran desechado como tantas otras cosas que no hemos sabido apreciar. Por cierto, que este tema está muy relacionado con cierta famosa disputa de Cardano

[5]Leonhard Euler (1708-1783) es el más prolífico de todos los matemáticos. Sus trabajos ocupan alrededor de 87 gruesos volúmenes y se considera que escribió anualmente un promedio de 800 páginas en su vida. Tiene resultados importantes en muchas áreas de la ciencia tan disímiles como la teoría de números, la hidromecánica, el álgebra, la teoría de la elasticidad, el cálculo diferencial, la teoría de la navegación y la cartografía. En una encuesta realizada por una importante revista se determinó que 5 de los 10 resultados matemáticos más importantes de la historia pertenecen a Euler. A pesar de quedar ciego a los sesenta años de edad, en esa etapa final de su vida produjo gran parte de su monumental obra. Tuvo 13 hijos, de los que solo cinco sobrevivieron la infancia, y 26 nietos, para quienes siempre encontró tiempo. En todos sus textos, la exposición es muy clara y su notación matemática se dirigía a trasmitir mejor las ideas en las que se apoyaba. Lagrange lo llamó "el maestro de todos los matemáticos"

con otro grande de la Matemática, el calculista público y maestro de Matemática Niccolo Fontana, conocido como Tartaglia[6].

1.3. Ejercicios propuestos

1. Represente en forme extensiva e intensiva los siguientes conjuntos:

   a) A es el conjunto de los números enteros no negativos,

   b) B es el conjunto de los números pares múltiplos de 5,

   c) C es el conjunto de los números primos mayores que 10,

   d) D es el conjunto de los números primos menores que 30,

   e) E es el conjunto de los números naturales pares que no son potencia de 2,

   f) F es el conjunto de los números naturales que son primos o potencia de 2,

   g) $C \cap D$,

   h) $D \cap F$,

   i) $B \cup E$,

   j) $A \setminus B$.

2. Dados dos conjuntos A y B se define su **diferencia simétrica** como el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B pero no a ambos conjuntos a la vez y se denota $A\Delta B$ (se lee "diferencia simétrica de A y B"). Es decir,

   $$A\Delta B = \{x \text{ tal que } x \in A \text{ o } \ x \in B, \text{ pero } x \notin A \cap B\}.$$

   Demuestre que
   $$A\Delta B = (A \setminus B)(B \setminus \cup A).$$

3. Dados los conjuntos $A = \{3, 5, \{7\}\}$, $B = \{2, 3, \{4, 7\}\}$.

   a) Halle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$.

[6]Niccolo Fontana (1512-1557) Fue autodidacta en las disciplinas matemáticas y gracias a su empeño y tenacidad en los estudios llegó a ser nombrado calculista público y reconocido como talentoso maestro ambulante de matemáticas. En su calidad de computista efectuaba cálculos para arquitectos, ingenieros, artilleros, comerciantes, astrólogos y todo aquel que pagara sus servicios. Debido a su baja extracción social se privó a Tartaglia de unos estudios académicos y de un título universitario que le dieran autoridad ante sus rivales intelectuales. Participó en una famosa disputa con Cardano sobre la fórmula para resolver las ecuaciones de tercer grado y actualmente parece ser indiscutible que puede reivindicar para sí el mérito de haberla encontrado. Sobresalió también como eminente traductor al italiano de los clásicos griegos y latinos, como la gran obra de Euclides "Elementos".

b) Diga si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Justifique su respuesta.

$$\text{i) } \{7\} \in A, \qquad \text{ii) } \{7\} \subseteq A, \qquad \text{iii) } 2 \in B,$$
$$\text{iv) } \{4,5\} \subseteq B, \qquad \text{v) } \{\{4,5\}\} \subseteq B.$$

4. Diga si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Justifique su respuesta.

$$\text{a) } \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \qquad \text{b) } \emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset, \qquad \text{c) } \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \emptyset, \qquad \text{d) } \{\emptyset\} \setminus \emptyset = \emptyset.$$

5. Demuestre que para cualesquiera dos conjuntos A y B se cumple

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B.$$

6. Para un número natural fijo k se define el conjunto

$$k\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = km \text{ con } m \in \mathbb{N}\}.$$

   a) Represente los conjuntos $2\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ de forma intensiva y extensiva.

   b) Demuestre que $p\mathbb{N} \cap q\mathbb{N} = k\mathbb{N}$, siendo $k = mcm(p,q)$.

7. Analice si la relación de inclusión propia cumple las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad. Demuestre su afirmación.

8. Considérense los siguientes conjuntos:

   - U es el conjunto de todos los deportistas en Olimpiadas,
   - A es el conjunto de todos los deportistas que tienen medalla de oro en Olimpiadas,
   - B es el conjunto de todos los deportistas de atletismo en Olimpiadas,
   - C el conjunto de los medallistas de atletismo en Olimpiadas.

   a) Determine las relaciones de inclusión e intersección entre esos conjuntos y represéntelos en un diagrama de Venn.

   b) Transcriba al lenguaje de la teoría de conjuntos las siguientes expresiones:

      i) El conjunto de los medallistas de oro en atletismo.

      ii) El conjunto de los deportistas de atletismo que no tienen medalla en Olimpiadas.

      iii) El conjunto de los medallistas de oro que no practican atletismo.

      iv) El conjunto de los deportistas con medalla de oro olímpico o con alguna medalla en el atletismo olímpico.

   c) Describa con palabras los siguientes conjuntos:

$$\text{i) } A \cap B, \qquad \text{ii) } B^c, \qquad \text{iii) } A\Delta C, \qquad \text{iv } A \cap (B \cup C).$$

9. Consideremos los conjuntos U, A, B y C del ejercicio anterior

   a) Transcriba al lenguaje de la Teoría de Conjuntos las siguientes expresiones:

   - Todos los medallistas de oro que compiten en atletismo tiene medalla en atletismo.
   - Hay deportistas de atletismo que no tiene medallas.
   - No todos los medallistas de atletismo tienen medalla de oro.
   - Hay deportistas que no compiten en atletismo y tienen medalla de oro.

   b) Transcriba al lenguaje ordinario las siguientes expresiones de la teoría de Conjuntos:

   $$\text{i) } B \cap C \neq \emptyset, \qquad \text{ii) } B \cap C = C, \qquad \text{iii) } B^c \subseteq C^c.$$

10. Compruebe las leyes del Álgebra de Conjuntos a través de los diagramas de Venn.

11. Demuestre analíticamente las leyes del Álgebra de Conjuntos.

12. Sean A y B dos conjuntos. Demuestre que para cada uno de los grupos de expresiones a continuación, si es verdadera una de las del grupo, entonces también son verdaderas las restantes.

    a) $A \subseteq B$, $B^c \subseteq A^c$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

    b) $A \cup B = U$, $A^c \subseteq B$, $B^c \subseteq A$.

    c) $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq B^c$, $B \subseteq A^c$.

13. Demuestre mediante las leyes del Álgebra de Conjuntos los siguientes enunciados.

    a) $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$.

    b) $[(A \cup B)^c \cup C]^c = (A \cup B) \cap C^c$.

    c) $[(A \cup B)^c \cup A]^c = B \cap A^c$.

    d) $A \cup B \cup (A^c \cup B^c) = U$.

14. Demuestre que si $a, b, , d$ son números enteros con $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

15. Pruebe que $a \cdot 0 = 0$ para todo número racional a.

16. Demuestre que la suma de un número irracional y uno racional es irracional.

17. Demuestre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ no son números racionales.

18. Demuestre que entre dos números racionales, siempre hay uno irracional.

19. Responda verdadero o falso según corresponda. Justifique su respuesta

    a) La suma de dos números irracionales es irracional.

    b) El producto de un número irracional y uno racional es irracional.

    c) El producto de dos números irracionales es irracional.

Capítulo 2

RECORDANDO LO BÁSICO DE RELACIONES Y FUNCIONES

Las funciones son objetos matemáticos bien conocidos de la enseñanza secundaria y preuniversitaria. Sin embargo, es bastante común que los estudiantes que se inician en la universidad no recuerden algunos detalles importantes relativos a las relaciones y funciones. Es por ello que hemos decidido dedicar este capítulo a recordar aquello de las relaciones y funciones que resulta básico para el estudio universitario. Este será entonces un capítulo con pocos ejercicios, cuyo objetivo central es el recordatorio de las propiedades mas importantes de las funciones elementales.

2.1. Relaciones

En el capítulo anterior se mencionó repetidamente la palabra "relación" sin definir formalmente su significado. Y es que al igual que sucede con la noción de conjunto, desde que comenzamos a utilizar y dominar nuestro lenguaje nos vamos formando una idea de lo que esa palabra significa, así, por ejemplo, si Juan y María son amigos, decimos que entre ellos existe una relación de amistad.

En la Matemática el concepto de relación está muy vinculado a la Teoría de Conjuntos. De hecho, cuando decimos que un número es menor que otro, estamos hablando de una relación entre los elementos de un conjunto numérico; cuando decimos que José es tan fuerte como Mario, nos referimos a una relación entre elementos de un conjunto de personas, etc.. . .

Para definir formalmente el concepto pensemos, por ejemplo, en la frase "2 es menor que 3". Si tratáramos de expresarla matemáticamente, podríamos decir que se trata de la relación "ser menor que", expresada en el conjunto de los números reales. Para poder estudiarla mejor, pensemos en conjuntos "más pequeños" y diferentes:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4\}$. Si comparamos los elementos del conjunto A con los del conjunto B mediante la relación "ser menor que", tenemos que $1 < 2$, $1 < 4$, $2 < 4$, $3 < 4$. Esto lo podemos expresar en forma de pares ordenados

$$(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4).$$

De esa manera hemos expresado la relación "ser menor que" entre los conjuntos A y B como pares ordenados de $A \times B$ (ver Fig. 2.1).

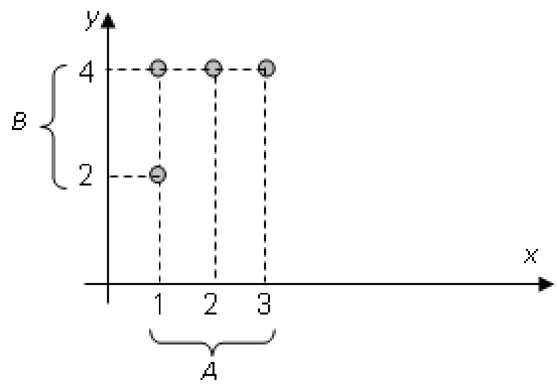


Figura 2.1: La relación "ser menor que" entre A y B

Nótese que es importante el orden en que hemos tomado los conjuntos.

Definición 2.1.1

Dados dos conjuntos A y B (no necesariamente diferentes) se llama ***relación de** A **en** B* *a un subconjunto de $A \times B$ y se denota por $R : A \to B$. Es decir*

$$R \subseteq A \times B.$$

Si $(a, b) \in R$, se denota aRb. De ese modo se dice que R es una relación en A si $R \subseteq A \times A$.

Ejemplos:

1. En el ejemplo anterior se ha obtenido la relación

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}.$$

2. Supongamos ahora que en una merienda con plátanos, piña, guayaba y melón, sabemos que Juan no come fruta, María come plátano, Pedro come guayaba y melón y Sofía come plátano, guayaba y melón. Para expresar matemáticamente esta relación sean

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Juan, María, Pedro, Sofía}\} \\ B &= \{\text{plátano, piña, guayaba, melón}\}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene la relación $R : A \to B$ tal que

$$\begin{aligned} R = \quad & \{(\text{María, plátano}), (\text{Pedro, guayaba}), (\text{Pedro, melón}), \\ & (\text{Sofía, plátano}), (\text{Sofía, guayaba}), (\text{Sofía, melón})\}. \end{aligned}$$

Nótese que en este último ejemplo Juan no aparece en la relación. Lo mismo sucede con la piña. Ello indica que no todos elementos de A tienen que estar relacionados con todos los elementos de B. Por eso conviene definir:

DEFINICIÓN 2.1.2

Dados dos conjuntos A y B y una relación $R : A \to B$, se define:

- ***Dominio de** R **(**$Dom(R)$**)** es el subconjunto de A, cuyos elementos están relacionados con al menos un elemento de B. Es decir*

  $$Dom(R) = \{x \in A;\ \textit{tales que existe } y \in B \textit{ con } (x, y) \in R\}.$$

- ***Imagen o codominio de** R ($Im(R)$) es el subconjunto de B cuyos elementos están relacionados con al menos un elemento de A. Es decir*

  $$Im(R) = \{y \in B;\ \textit{tales que existe } x \in A \textit{ con } (x, y) \in R\}.$$

- *Los conjuntos A y B se llaman **conjunto de partida** y **conjunto de llegada** de R respectivamente.*

Ejemplo: En el ejemplo anterior se tiene

$$\begin{aligned} Dom(R) &= \{\text{María, Pedro, Sofía}\} \\ Im(R) &= \{\text{plátano, guayaba, melón}\}. \end{aligned}$$

Dos tipos particulares de relaciones, muy utilizadas en la práctica, son las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden.

DEFINICIÓN 2.1.3

*Se dice que una relación $R : A \to A$ definida en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si es*

- ***reflexiva** (Para toda $x \in A$ se cumple xRx);*
- ***simétrica** (Si se cumple xRy, entonces se cumple yRx);*
- ***transitiva** (Si se cumple xRy e yRz, entonces se cumple xRz).*

*La relación $R : A \to A$ es una **relación de orden** si es*

- ***reflexiva**;*
- ***antisimétrica** (Si se cumple xRy e yRx, entonces se cumple $x = y$);*
- ***transitiva**.*

Ejemplo: En el conjunto $A = \mathbb{R}$ de los números reales, la igualdad ("$=$") es una relación de equivalencia, mientras que la relación ser menor o igual que ("$\leq$") es una relación de orden (compruébelo).

Si A es un conjunto de conjuntos, la igualdad entre conjuntos es una relación de equivalencia, mientras que la relación ser subconjunto de ("$\subseteq$") es una relación de orden (compruébelo).

Las funciones constituyen un tipo especial de relaciones.

2.2. Funciones

En el nivel de enseñanza precedente se ha trabajado muchísimo con funciones y se ha hablado de funciones lineales, cuadráticas, logarítmicas, trigonométricas, etc. Por ejemplo, la función (lineal) $f(x) = \frac{x}{2}$ hace corresponder a cada número real x el número real $\frac{x}{2}$.

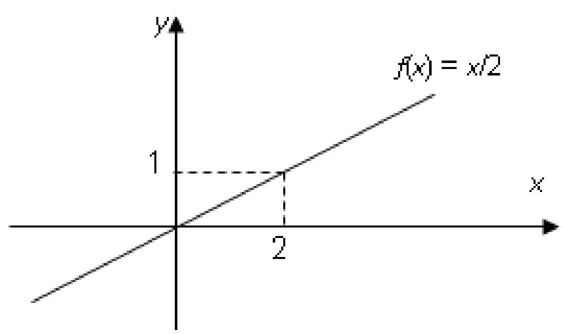


Figura 2.2: La función lineal

Entonces el conjunto formado por todos los pares de números reales de la forma $\left(x, \frac{x}{2}\right)$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Luego, la función $f(x) = \frac{x}{2}$ no es más que una relación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual podemos representar gráficamente por una recta (ver figura 2.2).

Nótese que esta función está definida para todos los números reales y, de igual modo, su imagen recorre todos los números reales, por lo que la relación que la define cumple $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

Este mismo análisis podemos repetirlo con todas las funciones que conocemos y obtendremos en todos los casos relaciones ¿será entonces que todas la relaciones entre dos conjunto producen funciones entre esos conjuntos?

Si estudiamos a fondo las funciones conocidas, observamos que la respuesta a esta pregunta es negativa, pues las funciones tienen la característica especial de que cada elemento del conjunto partida solo puede relacionarse a lo sumo con un único elemento del conjunto de llegada. Veamos entonces de manera formal el concepto de función.

DEFINICIÓN 2.2.1

Dados dos conjuntos A y B, se dice que una relación $R : A \to B$ es ***unívoca*** *si para todo $x \in A$ existe a lo sumo un $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$. Es decir,*

$$(x, y) \in R \text{ y } (x, z) \in R \text{ implica que } y = z.$$

Una relación unívoca $f : A \to B$ se llama ***función de A en B****.*
(Las funciones se denotan con letras minúsculas: $f, g, h, \ldots$).
Los conjuntos A y B se denominan conjunto de partida y de llegada de f respectivamente. Igualmente se define ***dominio e imagen de f*** *como*

- *$Dom(f) = \{x \in A;$ tales que existe $y \in B$ con $(x, y) \in f\}$.*
- *$Im(f) = \{y \in B;$ tales que existe $x \in A$ con $(x, y) \in f\}$.*

Ejemplos:

1. Sean los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{corredores de la final de 100 metros planos de la Olimpiada}\} \\ B &= \{\text{carriles de la pista de atletismo del estadio olímpico}\}. \end{aligned}$$

Entonces la relación de A en B que a cada corredor le hace corresponder un carril es una función, pues es conocido que en las carreras cortas los corredores no se pueden salir de su carril y por tanto, a cada corredor le corresponde un único carril.

Esta función la podemos representar a través de una tabla en la forma

A (Conjunto de partida)	B (Conjunto de llegada)
Corredor Nr.	Carril Nr.
101	1
98	2
203	3
53	4
22	5
105	6
34	7
62	8

2. Sean ahora $A = B = \mathbb{N}$. Entonces la relación
$$f = \left\{ \left(x, \frac{x}{2} \right); \text{ tal que } x \in \mathbb{N} \right\}$$
es una función. (compruébelo)

Observemos detenidamente este último ejemplo. Nótese que a un número natural x se le hace corresponder el número natural $\frac{x}{2}$, pues la relación ha sido definida tomando a $\mathbb{N}$ como conjunto de partida y de llegada. Evidentemente, no todo número natural es divisible por 2, por lo que la relación no está definida para todo número natural, sino sólo para los números pares. Sin embargo, todo número natural se puede obtener como la división por 2 de su duplo. Por tanto, se tiene

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{N}; \text{ tal que } x \text{ es un número par}\}, \quad Im(f) = \mathbb{N}.$$

Al observar el gráfico de esta función (figura 2.3) y compararlo con el gráfico de la misma función tomándola como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se observa la importancia de definir previamente los conjuntos de partida y de llegada.

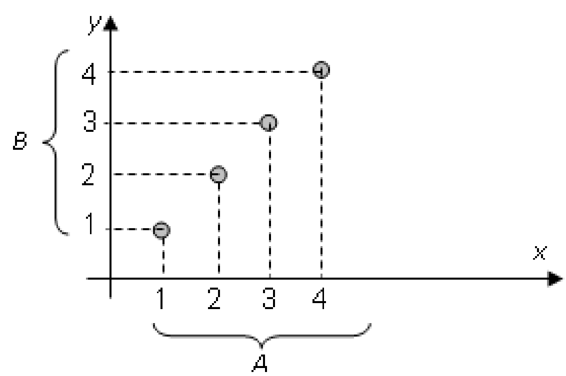


Figura 2.3: La función lineal en $\mathbb{N}$

Utilizando el lenguaje que conocemos de la enseñanza precedente, esta relación se escribe en la forma $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = \frac{x}{2}$.

En general, si f es una función de A en B, esta se escribe en la forma $f(x) = y$, siendo $x \in A$, $y \in B$. Las letras x, y se llaman **variable independiente** y **variable dependiente** de la función respectivamente. Los conjuntos A y B mantienen las denominaciones que ya conocemos de las relaciones.

En la figura 2.4 se observa gráficamente la diferencia entre relación y función. Los tres recuadros representan relaciones. Sin embargo el recuadro a) no representa una función, pues existe un elemento de A al que corresponden 2 elementos de B.

De manera general, las funciones reales de una variable real, es decir $A = B = \mathbb{R}$, pueden ser representadas geométricamente en el plano, donde el eje X representa

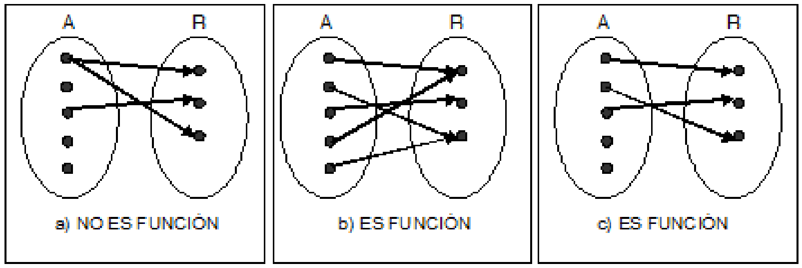


Figura 2.4: Relación vs. función

el conjunto de partida A y el eje Y el conjunto de llegada B. La frase de que "a cada valor de x corresponde a lo sumo un valor de y" significa que cualquier recta perpendicular al eje X corta el gráfico de la función en un punto único a lo sumo. Por tanto un gráfico del plano representa una función si y sólo si ninguna recta perpendicular el eje X lo corta en más de un punto. Así, la figura 2.5 a) representa el gráfico de una función, mientras que la figura 2.5 b) no lo hace.

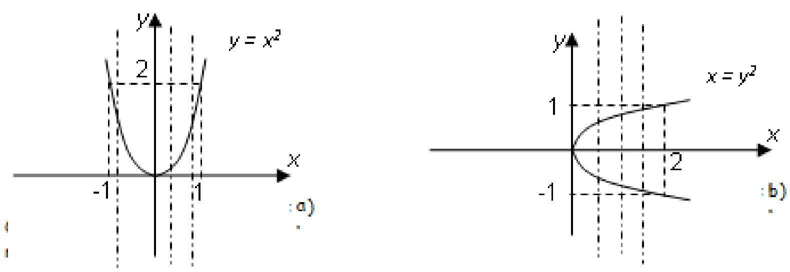


Figura 2.5: Parábolas

Las funciones $f : A \to B$ se pueden representar de forma explícita ($y = f(x)$), implícita ($F(x, y) = 0$), paramétrica ($x = x(t)$; $y = y(t)$) o tabular, como en el ejemplo desarrollado anteriormente, considerando siempre $x \in A$ e $y \in B$. Los siguientes ejemplos muestran la importancia de tener bien determinado los conjuntos de partida y de llegada de una función.

Ejemplos:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta función se representa gráficamente a través de la parábola de la figura 2.5 a) y cumple que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Esta función se representa gráficamente a través del paraboloide circular. Para ella se cumple que $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = [0, +\infty)$ (ver figura 2.6).

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, \pi]$ y $a > 0$, $b > 0$. Esta función puede expresarse por $\overrightarrow{r}(t) = a \cos t \overrightarrow{i} + a \operatorname{sen} t \overrightarrow{j}$ en forma

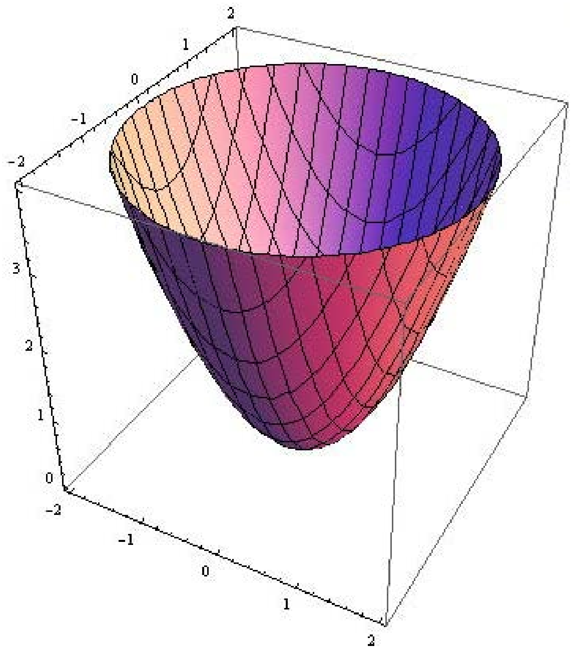


Figura 2.6: Paraboloide circular

vectorial y en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi],$$

y se representa por la semicircunferencia superior, que es una curva plana, considerando a t como el ángulo del punto (x, y) con la parte positiva del eje X. Para esta función se cumple que $Dom(f) = [0, \pi]$ e $Im(f) = [-a, a] \times [0, a]$ (ver figura 2.7).

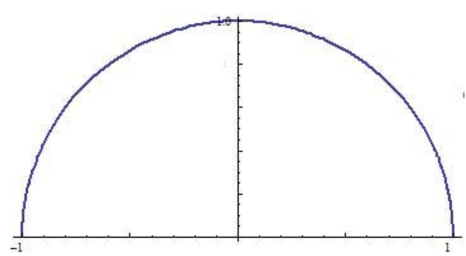


Figura 2.7: Semicircunferencia

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ para $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$, $b > 0$, la cual también admite la representación vectorial

$$\overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a \operatorname{sen} t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k},$$

y la paramétrica

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = bt \end{cases}$$

Para esta función se cumple que $Dom(f) = [0, 2\pi]$ e $Im(f) = [-a, a]^2 \times [0, 2\pi]$. Ella se representa a través de una curva en el espacio llamada hélice (ver figura 2.8).

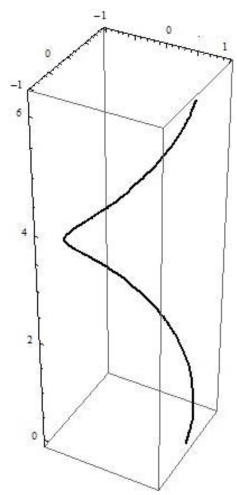


Figura 2.8: Hélice

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(u, v) = (u, v, u^2+v^2)$, la cual puede representarse en forma vectorial por $\overrightarrow{r}(u, v) = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + (u^2+v^2)\,\overrightarrow{k}$, y en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

Para esta función se cumple que $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Se representa por el paraboloide (ver figura 2.6).

Comparando ahora los recuadros b) y c) de la figura 2.4 notamos diferencias en ellos: en el recuadro b) observamos que existen elementos de B que son imagen del mismo elemento de A, lo cual no ocurre en el recuadro c). Esto nos indica una vía de clasificación de las funciones.

Definición 2.2.2

Dados dos conjuntos A y B, se dice que una función $f : A \to B$ es

- ***inyectiva*** *si para cualquier $y \in Im(f)$ existe un único $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.*
- ***sobreyectiva*** *o* ***epiyectiva*** *si $Im(f) = B$. Es decir si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*
- ***biyectiva*** *si f es inyectiva y sobreyectiva.*

Nótese que una función $f : A \to B$ es inyectiva cuando para cualesquiera elementos $y_1, y_2 \in Im(f)$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, si $y_1 = y_2$, entonces $x_1 = x_2$. Esta forma de caracterizar la inyectividad de una función es muy útil en las demostraciones.

Gráficamente la frase de que "a cada valor de y corresponde un único valor de x" significa, en el caso de funciones entre conjuntos numéricos, que cualquier recta perpendicular al eje Y corta el gráfico de la función en un punto único a lo sumo. Por tanto un gráfico del plano representa una función inyectiva si y sólo si ninguna recta perpendicular el eje X lo corta en más de un punto (por ser función) y si ninguna recta perpendicular el eje Y lo corta en más de un punto (por ser inyectiva).

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, la recta $y = \frac{x}{2}$ es una función inyectiva (figura 2.1), mientras que la parábola $y = x^2$ no es inyectiva (figura 2.5).

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 5$ es biyectiva.

Demostración: (Inyectividad) Supongamos que existen $y_1, y_2 \in Im(f)$ tales que $y_1 = y_2$. Sean

$$y_1 = f(x_1) = x_1 + 5, \quad y_2 = f(x_2) = x_2 + 5.$$

Entonces es $x_1 + 5 = x_2 + 5$, por lo que $x_1 = x_2$. Eso implica que dos elementos de $\mathbb{R}$ no pueden tener la misma preimagen por lo que f es inyectiva. (Esta demostración muestra una técnica muy generalizada para probar la inyectividad).

(Sobreyectividad) Para demostrar que $Im(f) = \mathbb{R}$, comprobemos que todo elemento de $\mathbb{R}$ tiene una preimagen por f. Para ello sea $y \in \mathbb{R}$. Entonces $x = y - 5 \in \mathbb{R}$ y se cumple

$$f(x) = f(y - 5) = (y - 5) + 5 = y.$$

Con ello hemos encontrado una preimagen para cualquier $y \in \mathbb{R}$, por lo que $Im(f) = \mathbb{R}$, y por tanto f es sobreyectiva.

Finalmente se obtiene que f es biyectiva por ser inyectiva y sobreyectiva. **Q.e.d.**

Otra manera de clasificar funciones es a partir de su monotonía.

Definición 2.2.3

Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es

- ***(estrictamente) monótona creciente*** *si para cualquier par de elementos $x_1 < x_2 \in Dom(f)$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).*
- ***(estrictamente) monótona decreciente*** *si para cualquier par de elementos $x_1 < x_2 \in Dom(f)$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).*

Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ es estrictamente monótona decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente monótona creciente en $[0, +\infty)$.

Definición 2.2.4

Dado un conjunto A, se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

- ***acotada superiormente*** *si existe un número real M, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$.*
- ***(acotada inferiormente*** *si existe un número real m, tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$.*
- ***(acotada*** *si es acotada superior e inferiormente; es decir, si existe un número real K, tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.*

Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ es acotada inferiormente, pero no es acotada superiormente, por lo que no es acotada.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de manera natural. Así para las funciones $f : A \to B$ y $g : A \to B$ es

- Suma (y resta) de funciones

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x); \qquad Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g).$$

- Multiplicación de funciones

$$(fg)(x) = f(x)g(x); \qquad Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g).$$

- División de funciones

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \qquad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) \setminus \{x \in A;\ g(x) = 0\}.$$

Nótese que la operaciones de suma, resta y multiplicación de funciones son conmutativas. No así la división.

Ejemplo: Para $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, con $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Dom(g) = \mathbb{R}$, se cumple

$$\begin{aligned}
(f \pm g)(x) &= \frac{1}{x} \pm \operatorname{sen} x, \quad Dom(f \pm g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\
(fg)(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad Dom(f \pm g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\
\frac{f}{g}(x) &= \frac{1}{x \operatorname{sen} x}, \quad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}; \\
\frac{g}{f}(x) &= x \operatorname{sen} x, \quad Dom\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Un poco más compleja resulta la operación de la composición de funciones. Consideremos las funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ con la condición de que $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$, entonces se define la composición de f con g como

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

.

Ejemplo: Para $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ con $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Dom(g) = \mathbb{R}$, se cumple

$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) = \operatorname{sen}^2 x, \quad Dom(f \circ g) = \mathbb{R}; \\
g \circ f(x) &= \operatorname{sen} x^2, \quad Dom(g \circ f) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

La composición de funciones permite definir la **función inversa** de una función $f : A \to B$ como la función $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ g(y) = y$ para toda $y \in B$ y $g \circ f(x) = x$ para toda $x \in A$.

Por ejemplo, si la función f relaciona a los corredores de la final olímpica de los 100 metros planos con los carriles 1 al 8 de la pista, la función inversa f^{-1} sería la que permite determinar el corredor conociendo el carril por el que debe correr.

Naturalmente, no siempre es posible determinar la función inversa. Para entender esto basta retomar el ejemplo de la parábola $y = x^2$. A partir del valor de x siempre está bien claro cuál es el valor de x^2, pues la función es unívoca. Pero a partir del valor de $y = x^2$ se obtiene dos valores diferentes para la preimagen, a saber, x y $-x$. Surgen entonces las preguntas ¿cuándo es invertible una función?; es decir ¿bajo que ondiciones se garantiza la existencia de la función inversa? y ¿cómo se define y determina matemáticamente la función inversa de una función invertible?

Este mismo ejemplo nos brinda la respuesta a la primera pregunta. Una función es invertible si y solo si la función es inyectiva y en ese caso es $Dom(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = Dom(f)$.

Para determinar la función inversa de una función inyectiva, se desarrollan tres pasos, saber :

1. Se escribe la función en la forma $y = f(x)$.
2. Se despeja la variable x.
3. Se intercambian las denominaciones de las variables, siendo la función así obtenida la inversa de la función original.

Conociendo el gráfico de la función directa se puede obtener fácilmente el gráfico de la función inversa. Para ello basta tener presente que las funciones directa e inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo: Determine si la función $f(x) = 2 + e^x$ es invertible y en caso positivo calcule su función inversa.

Solución:

- Análisis de inyectividad. Evidentemente es $Dom(f) = \mathbb{R}$. Sean x_1 y x_2 números reales tales que $f(x_1) = f(x_2)$. De acuerdo a la definición de la función f se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 2 + e^{x_1} &= 2 + e^{x_2} \\ e^{x_1} &= e^{x_2} \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

  de donde por contraposición se obtiene la inyectividad de la función f.

- Cálculo de la función inversa. Como la función f es inyectiva, se puede calcular la función inversa. Ello se realiza en tres pasos:

  1. Se escribe la función en la forma $y = f(x)$.
  $$y = 2 + e^x.$$
  2. Se despeja la variable x.
  $$x = \ln(y - 2).$$
  3. Se intercambian las denominaciones de las variables, siendo la función así obtenida la inversa de la función original.
  $$y = \ln(x - 2).$$

  Así es finalmente $f^{-1}(x) = \ln(x - 2)$, cuyo dominio es el intervalo abierto $(2, +\infty)$, que es a su vez el conjunto imagen de la función f.

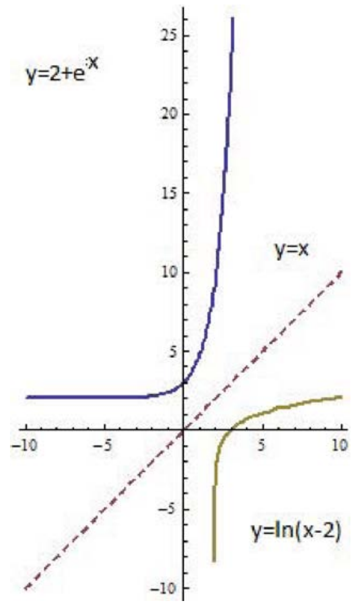


Figura 2.9: Función directa e inversa

2.3. Funciones elementales

Finalmente dediquemos un espacio en este epígrafe a hacer un recordatorio de las funciones elementales básicas y sus propiedades, algunas de las cuales ya fueron estudiadas en el nivel precedente de enseñanza. Recomendamos recordar los gráficos de las funciones que aquí se presentan.

Las **funciones elementales básicas** se descomponen en **funciones algebraicas** y **funciones trascendentes**. Las funciones algebraicas son las **polinómicas**, las **racionales** y las **irracionales**. Funciones trascendentes son la **exponencial**, la **logarítmica** y las **trigonométricas directas e inversas**.

FUNCIONES ALGEBRAICAS

La función polinómica

Una función polinómica o **polinomio de grado** n es una función de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales.

Los polinomios cumplen las siguientes propiedades

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $Dom(p) = \mathbb{R}$

Casos particulares de funciones polinómicas son:

La función lineal o recta $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

- a se llama **pendiente** y b se llama **intercepto** de la recta;
- Si $a \neq 0$ la función lineal es inyectiva y se cumple $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$;
- Si $a = 0$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$, pero $Im(f) = \{b\}$;
- Si $a > 0$ la función lineal es estrictamente monótona creciente en todo $\mathbb{R}$ y si $a < 0$ la función lineal es estrictamente monótona decreciente en todo $\mathbb{R}$.
- $Dom(p) = \mathbb{R}$

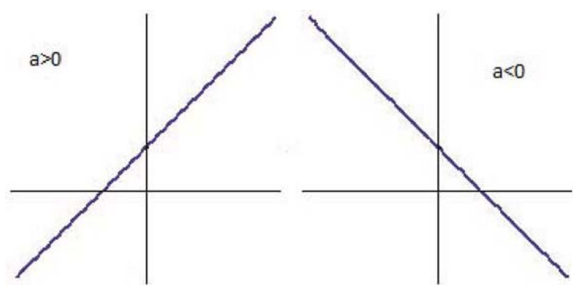


Figura 2.10: Función lineal o recta

La función cuadrática o parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$.

- El punto $\left(-\frac{b}{2a}, ac - \frac{b^2}{4a}\right)$ se llama **vértice de la parábola**;
- Si $a > 0$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$, e $Im(f) = \left[ac - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$;
- Si $a < 0$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$, e $Im(f) = \left(\infty, ac - \frac{b^2}{4a}\right]$;
- Si $ac - \frac{b^2}{4a} < 0$; es decir, si el discriminante $D = b^2 - 4ac > 0$, los ceros de la parábola son los puntos $\left(\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, 0\right)$;
- Si el discriminante $D = b^2 - 4ac = 0$, la parábola solo tiene el cero $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$;
- Si el discriminante $D = b^2 - 4ac < 0$, la parábola no tiene ceros; es decir, su gráfica no corta el eje X;
- f es monótona a trozos y no es inyectiva

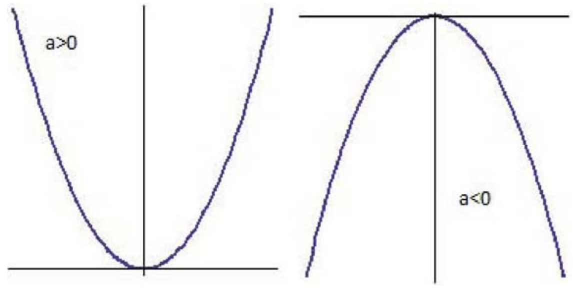


Figura 2.11: La parábola

La función cúbica o parábola cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

- Se cumple siempre $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$;
- f es monótona (en cuyo caso es inyectiva) o monótona a trozos.

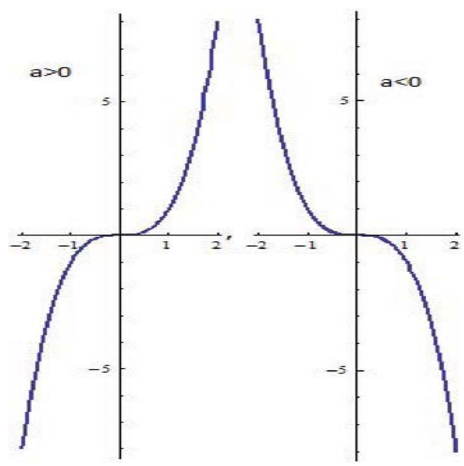


Figura 2.12: La parábola cúbica

La función valor absoluto o módulo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

- Se cumple siempre $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$;
- $f(0) = 0$;
- f es monótona a trozos y no es inyectiva;

La función parte entera

$$f(x) = [x] = n \qquad \text{si } n \leq x < n + 1.$$

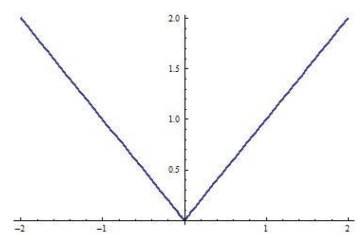


Figura 2.13: La función valor absoluto

- Se cumple siempre $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{Z}$;
- f es monótona creciente, pero no es inyectiva.

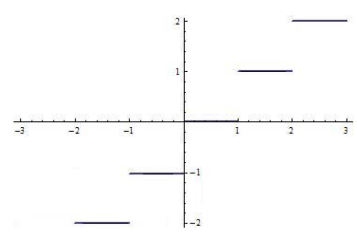


Figura 2.14: La función parte entera

La función signo

$$f(x) = sg(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

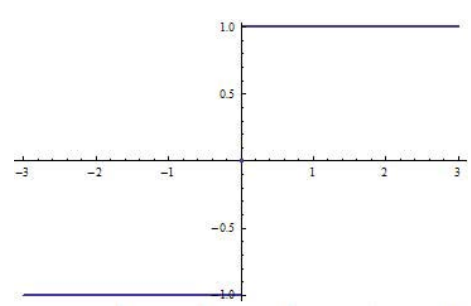


Figura 2.15: La función signo

- Se cumple siempre $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{-1, 0, 1\}$;
- f es monótona creciente, pero no es inyectiva.

La función racional

Una **función racional** es un cociente de polinomios de la forma

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ números reales y n, m números naturales.

Las funciones racionales cumplen que

$$Dom(R) = \mathbb{R} \setminus \{x;\ q_m(x) = 0\}.$$

Casos particulares de funciones racionales son:

La hipérbola $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$.

- Se cumple $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Si $a > 0$ la hipérbola es estrictamente monótona decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$;
- si $a < 0$ la hipérbola es estrictamente monótona creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$;
- la hipérbola es inyectiva.

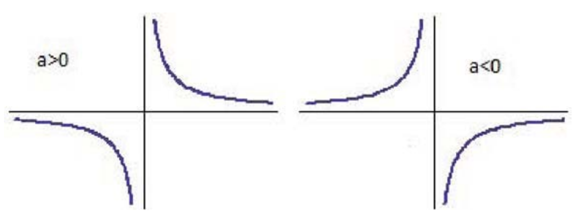


Figura 2.16: La hipérbola

La función $f(x) = \frac{a}{x^2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

- Se cumple $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Si $a > 0$ se cumple $Im(f) = (0, +\infty)$ y la función es estrictamente monótona creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$;
- si $a < 0$ se cumple $Im(f) = (-\infty, 0)$ y la función es estrictamente monótona decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$;
- la función no es inyectiva.

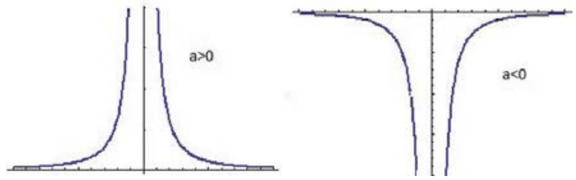


Figura 2.17: La función $f(x) = \frac{a}{x^2}$

La campana de Gauss[1] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Se cumple $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, +\infty)$;
- La campana de Gauss es estrictamente monótona creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$ y no es inyectiva.

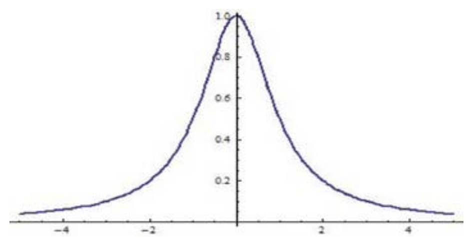


Figura 2.18: La campana de Gauss

La función irracional

Una **función irracional** es aquella en la que al menos una parte de la expresión funcional está afectada por un exponente fraccionario o radical. Un caso particular de función irracional es la función **raíz cuadrada** $f(x) = a\sqrt{x}$ $(a \in \mathbb{R})$.

- Se cumple $Dom(f) = Im(f) = [0, +\infty)$;
- Si $a > 0$ la función es estrictamente monótona creciente;

[1]Carl Friedrich Gauss (1777-1855), fue uno de los más geniales matemáticos, astrónomos, físicos y geodestas de la historia. Entre otros resultados matemáticos realizó estudios sobre la frecuencia de los números primos; descubrió el método de los mínimos cuadrados; demostró la ley de reciprocidad de los restos cuadráticos y reconoció a los números complejos tan propios como los reales. Presentó varias demostraciones del teorema fundamental del álgebra. Con solo veintitrés años, Gauss se convirtió, además, en el astrónomo más popular de Europa, al calcular la órbita de Ceres. Tiene más de 70 obras sobre geodesia, en particular, la aplicación del método de mínimos cuadrados a medidas terrestres. Conocido como el príncipe de la Matemática, dijo de él su amigo Sartorius von Waltershausen: "Gauss fue sencillo y sin afectación desde su juventud hasta el día de su muerte. Un pequeño estudio, una mesita de trabajo con un tapete verde, un pupitre pintado de blanco, un estrecho sofá, y, después de cumplir los 70 años, un sillón, una lámpara con pantalla, una alcoba fresca, alimentos sencillos, una bata y un gorro de terciopelo, eran todas sus necesidades."

- si $a < 0$ la función es estrictamente monótona creciente ;
- la función es inyectiva.

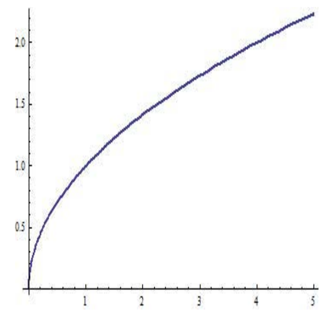


Figura 2.19: La raíz cuadrada

FUNCIONES TRASCENDENTES

La función exponencial $f(x) = ca^{bx}$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$

Un caso particular es la función $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$.

- Se cumple $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (0, +\infty)$;
- Si $a > 1$ la función exponencial es estrictamente monótona creciente en todo $\mathbb{R}$ y si $a < 1$ la función exponencial es estrictamente monótona decreciente en todo $\mathbb{R}$.
- La función exponencial es inyectiva;
- $a^0 = 1,\ a^1 = a$;
- $a^{x+y} = a^x a^y,\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^x b^x = (ab)^x$.

La función exponencial que más se trabaja es $y = e^x$.

La función logaritmo $f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$, se define a partir de la expresión $x = a^y$.

- Se cumple $Dom(f) = (0, +\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$;
- Si $a > 1$ la función logaritmo es estrictamente monótona creciente y si $a < 1$ la función logaritmo es estrictamente monótona decreciente.

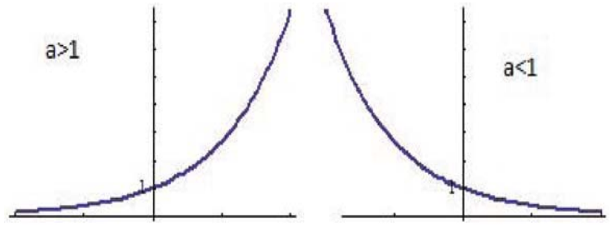


Figura 2.20: La función exponencial

- La función logaritmo es inyectiva;
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$;
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^y = y \log_a x$;
- $\log_a b = \frac{\log_b x}{\log_a x}$.

La función logaritmo que más se trabaja es $y = \ln x = \log_e x$.

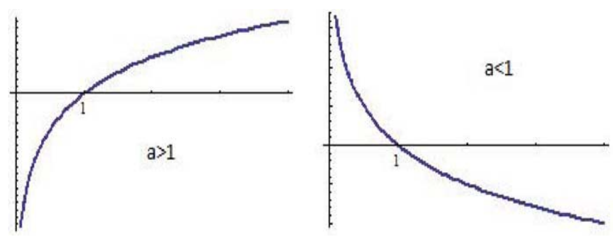


Figura 2.21: La función logaritmo

Las funciones trigonométricas directas

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$.

- Se cumple $\cos x = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;
- Se cumple $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$;
- Ambas son funciones periódicas de período 2π, son monótonas a trozos y no son inyectivas.
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$, $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$;
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$;

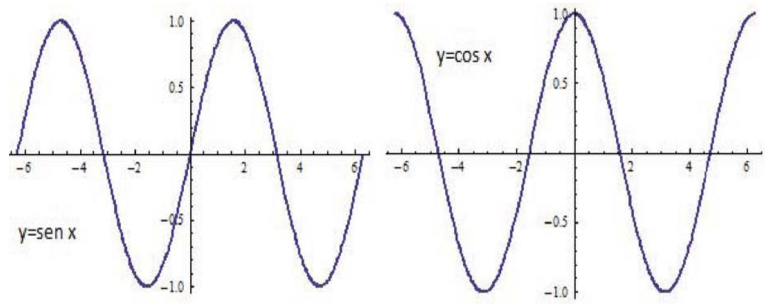


Figura 2.22: Las funciones seno y coseno

Las funciones $f(x) = \tan x$ y $f(x) = \cot x$.

- Se cumple $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\tan x}$
- Se cumple $Dom(\tan x) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$;
- Se cumple $Dom(\cot x) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$;
- Ambas son funciones periódicas de período π, son monótonas a trozos y no son inyectivas.

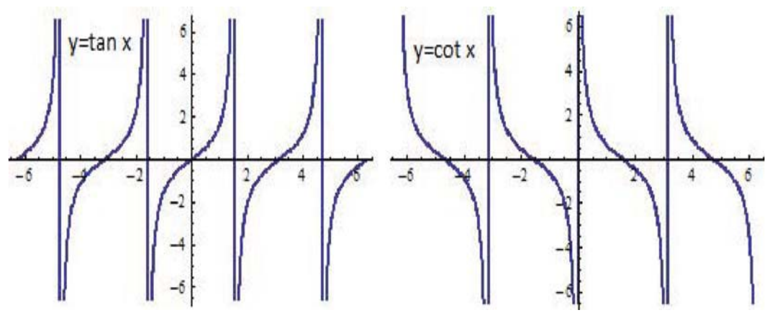


Figura 2.23: Las funciones tangente y cotangente

Las funciones $f(x) = \sec x$ y $f(x) = \csc x$.

- Se cumple $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $f(x) = \cot x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
- Se cumple $Dom(\sec x) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$;
- Se cumple $Dom(\csc x) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im(f) = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$;
- Ambas son funciones periódicas de período 2π, son monótonas a trozos y no son inyectivas;
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

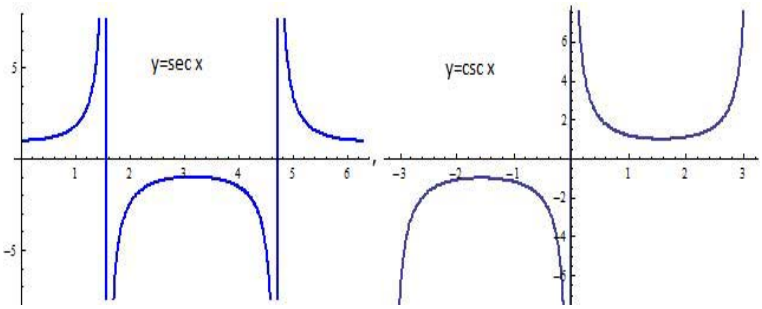


Figura 2.24: Las funciones secante y cosecante

Las funciones trigonométricas inversas

La función arco seno $y = \operatorname{arc\,sen} x$, se define a partir de la expresión $x = \operatorname{sen} y$ para $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Se cumple $Dom(f) = [-1, 1]$ e $Im(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- La función arco seno es estrictamente monótona creciente e inyectiva.

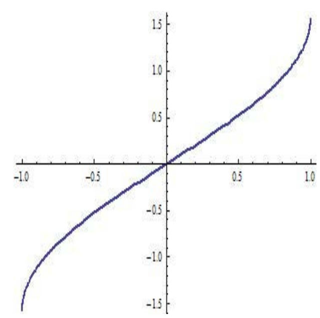


Figura 2.25: Las función arco seno

La función arco coseno $y = \arccos x$, se define a partir de la expresión $x = \cos y$ para $y \in [0, \pi]$.

- Se cumple $Dom(f) = [-1, 1]$ e $Im(f) = [0, \pi]$;
- La función arco coseno es estrictamente monótona decreciente e inyectiva.

La función arco tangente $y = \arctan x$, se define a partir de la expresión $x = \tan y$ para $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Se cumple $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- La función arco tangente es estrictamente monótona creciente e inyectiva.

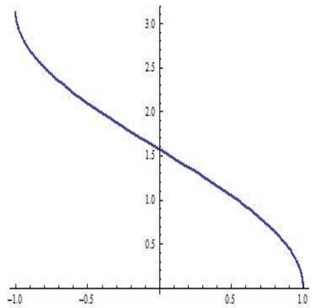


Figura 2.26: Las función arco coseno

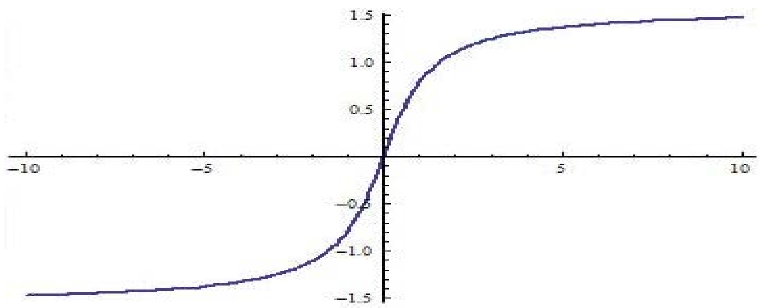


Figura 2.27: Las función arco tangente

2.4. Ejercicios propuestos

1. Determine los conjuntos de partida (A) y de llegada (B) de las siguientes relaciones, diga si son funciones o no y justifique su respuesta

$$\text{a) } y = 2\cos x; \quad \text{b) } x^2 + 4y^2 - z = 5; \text{c) } z^2 = x^2 + y^2;$$

$$\text{d) } x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad \text{e) } \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \; 0 \leq t \leq 2\pi \; ; \quad \text{f) } \begin{cases} x = \cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \; 0 \leq t \leq \pi$$

2. Determine dominio e imagen de las siguientes funciones

$$\text{a) } y = x^4 + 1; \quad \text{b) } z = 4x^2 + y^2; \text{c) } y = \ln(4x + 5); \quad \text{d) } z = x + 3y + 6;$$

$$\text{e) } z = -2(x^2 + y^2); \quad \text{f) } y = 4 + e^x; \text{g) } y = 4\,\mathrm{sen}\, x; \quad \text{h) } y = \frac{1}{2}\cos 2x;$$

$$\text{i) } \begin{cases} x & -\infty < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \\ 5 - x & 4 < x < \infty \end{cases} ; \quad \text{j) } \begin{cases} e^x & -\infty < x \leq 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 3x - 3 & 1 \leq x \leq 8 \end{cases} .$$

3. Determine, si es posible, as composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y halle su dominio de definición

a) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \operatorname{sen} x;$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \cos x;$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{x};$

d) $f(x) = |x| + 2, \quad g(x) = |x-3|;$

e) $f(x) = x^3, \quad g(x) = \cos x.$

4. ¿De qué fuciones son compuestas las siguientes funciones?

a) $f \circ g(x) = (3x-1)^2;$

b) $f \circ g(x) = 3^{\operatorname{sen} x};$

c) $f \circ g(x) = \ln\left(\cos \frac{x}{3}\right);$

d) $f \circ g(x) = \cos\left(x^{-x^2}\right);$

e) $f \circ g(x) = \tan^2 \frac{x}{2}.$

5. Analice la monotonía de las siguientes funciones

$$\text{a) } y = 2x - 1; \quad \text{b) } y = -3x + 2; \text{c) } y = e^x + 1; \quad \text{d) } y = 2 - e^{-x};$$

$$\text{e) } y = 2x^2; \quad \text{f) } y = -x^4; \text{g) } y = x^5 - 2; \quad \text{h) } y = 4 - x^3;$$

$$\text{i) } y = \ln(x-1); \quad \text{j) } y = \operatorname{sen} 2x; \text{k) } y = \tan \frac{x}{2}; \quad \text{l) } y = \cot 3x;$$

$$\text{m) } \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}; \quad \text{n) } \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}.$$

6. Analice si la función dada es inyectiva o no, estudie su monotonía y acotación y determine la función inversa si existe.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 7x - 3 & \text{b) } y = x^2 + 2 & \text{c) } y = \sqrt{x^2+1} \\ \text{d) } y = \ln\left(\frac{x}{4}\right) & \text{e) } y = 2^{3x} & \text{f) } y = \frac{x^2-1}{x+1} \end{array}$$

Capítulo 3

ELEMENTOS "INFORMALES" DE LA LÓGICA FORMAL

La palabra "lógica" viene del griego "logos", que se traduce como "palabra, concepto, idea".

Para definir la "Lógica Formal'" no bastaría con decir "ciencia del pensamiento", pues ya existen otras ciencias que se ocupan del estudio del pensamiento humano. A menudo, al escuchar cierta conclusión, usamos la frase "¡eso es lógico!" y la aceptamos como válida, aunque nunca hayamos hojeado un texto de Lógica Formal. Digamos entonces que la Lógica Formal estudia las estructuras generales del pensamiento correcto e investiga las reglas para la construcción de conceptos, predicados y deducciones.

Nuestro objetivo con este curso es la preparación del estudiantado en una forma correcta de pensamiento matemático. Es por ello que desarrollaremos aquí de manera algo informal algunos aspectos de la Lógica Formal que son esenciales para el pensamiento matemático. A aquellos que deseen realizar un estudio serio de la Lógica Formal les recomendamos la lectura de textos que traten el tema con mayor profundidad y rigor.

3.1. El cálculo proposicional

En la vida diaria y durante el proceso de comunicación, constantemente escuchamos expresiones del lenguaje que poseen un sentido determinado. Entre ellas se señalan en primer lugar las **proposiciones** (oraciones), examinadas en relación con su veracidad (verdadera, falsa, etc.) o su modalidad (probable, imposible, necesaria, etc.).

Toda proposición expresa cierto pensamiento que es su contenido y sentido. Debido a la diversidad de expresiones de nuestro lenguaje, se distinguen algunos tipos determinados como son: proposiciones narrativas, exclamatorias, interrogativas, etc.

Estudiaremos aquí solamente las proposiciones narrativas, que son forma de expresión de los juicios, llamándolas de aquí en lo adelante simplemente **proposición**.

A continuación mostramos algunos ejemplos de estas proposiciones.

Ejemplos:

1. “El jugo de naranja es rico en vitamina C”
2. “Tomar jugo de naranja es bueno para la salud”
3. “Fumar daña su salud”
4. “En mayo siempre llueve”
5. “El número 1 es mayor o igual que 0”
6. “Napoleón conquistó Remanganagua”

Estos ejemplos constituyen **proposiciones simples** y a partir de ellas se pueden obtener nuevas **proposiciones compuestas** a través del uso de **conectivos o enlaces lógicos**.

Ejemplos: A partir de las proposiciones del ejemplo anterior se pueden obtener las siguientes proposiciones compuestas:

1. “En mayo siempre llueve y fumar daña su salud”
2. “El jugo de naranja es rico en vitamina C o Napoleón conquistó Remanganagua”
3. “Si el jugo de naranja es rico en vitamina C, entonces tomar jugo de naranja es bueno para la salud”
4. “Napoleón no conquistó Remanganagua”
5. “El número 1 no es mayor o igual que 0 si y sólo si Napoleón conquistó Remanganagua’

Aquí hemos utilizado los conectivos lógicos dados por las palabras o frases “no...”, “... y ...”, “... o...”, “si ..., entonces ...”, “... si y sólo si...”.

La estructura de una teoría dada se expresa en las relaciones que tienen lugar entre sus proposicion. Esto sucede especialmente en la Matemática. Tales relaciones pueden ser operaciones construidas a través de la aplicación de los conectivos lógicos anteriormente mencionados a proposiciones que pueden ser demostradas a partir de otras consideradas de validez universal (**axiomas**) mediante determinadas reglas de inferencia. En el cálculo proposicional se estudian fundamentalmente las propiedades y estructuras de las proposiciones compuestas.

3.1.1. Proposiciones compuestas

Como hicimos en el caso de la Teoría de Conjuntos, presentamos ahora un lenguaje, que nos permitirá el estudio de la estructura de las proposiciones. Las proposiciones simples se denotan a través de letras minúsculas del alfabeto $(a, b, \ldots, z)$.

Los conectivos lógicos se simbolizan de la siguiente manera:

- $\neg$ denota la **negación** “no”,
- $\wedge$ denota la **conjunción** “y”,
- $\vee$ denota la **disyunción o alternativa** “o”,
- $\Longrightarrow$ denota la **implicación** “si,... entonces...”,
- $\Longleftrightarrow$ denota la **equivalencia** “... si y sólo si...”.

En la matemática son de especial interés las proposiciones que son verdaderas o falsas. Es por ello que esas características se suelen denotar con las letras “V o F” o con los números “1 o 0” a los cuales se denomina **valor veritativo**.

Estudiemos ahora más de cerca cada uno de los conectivos lógicos.

La negación

Si p es una proposición, su negación se denota $\neg p$ (se lee “no p”).

Ejemplo: Neguemos las proposiciones simples del inicio del capítulo.

1. Si p es “El jugo de naranja es rico en vitamina C”, entonces $\neg p$ es “El jugo de naranja no es rico en vitamina C”;
2. Si p es “Tomar jugo de naranja es bueno para la salud”, entonces $\neg p$ es “Tomar jugo de naranja no es bueno para la salud”;
3. Si p es “Fumar daña su salud”, entonces $\neg p$ es “Fumar no daña su salud”;
4. Si p es “En mayo siempre llueve”, entonces $\neg p$ es “No siempre llueve en mayo”;
5. Si p es “El número 1 es mayor o igual que 0”, entonces $\neg p$ es “El número 1 no es mayor o igual que 0”;
6. Si p es “Napoleón conquistó Remanganagua”, entonces $\neg p$ es “Napoleón no conquistó Remanganagua”.

En cuanto al valor veritativo se cumple:

Si la proposición p es verdadera, entonces su negación $\neg p$ es falsa. Viceversa, si p es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera.

Expresando este resultado mediante una tabla se tiene

p	$\neg p$
V	F
F	V

Al realizar una comparación con la Teoría de Conjuntos resulta que si expresamos la proposición p en la forma $x \in A$, entonces la proposición $\neg p$ quedaría expresada de la forma $x \notin A$, o lo que es lo mismo, $x \in A^c$. De este modo se obtiene una equivalencia entre la operación lógica de negación de una proposición y la operación de complemento de un conjunto.

La conjunción

Si p, q son proposiciones, su conjunción se denota $p \wedge q$ (se lee "p y q") e indica la validez simultánea de ambas proposiciones.

Ejemplo: Sean las proposiciones simples

p:"Juan va a Coppelia", q: "Juan va al cine".

Entonces su conjunción es

$p \wedge q$:"Juan va a Coppelia y al cine".

Note que esta última proposición sólo es verdadera cuando Juan va a ambos lugares y es falsa siempre que vaya a un solo lugar o a ninguno. En general se cumple:

La proposición compuesta $p \wedge q$ sólo es verdadera cuando ambas proposiciones simples p y q lo son simultáneamente.

Expresando este resultado mediante una tabla se tiene

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Al realizar una comparación con la Teoría de Conjuntos resulta que si expresamos la proposición p en la forma $x \in A$ y la proposición q en la forma $x \in B$, entonces la proposición $p \wedge q$ quedaría expresada de la forma $x \in A$ y $x \in B$, o lo que es lo mismo, $x \in A \cap B$. De este modo se obtiene una equivalencia entre la operación lógica de conjunción de dos proposiciones y la operación de intersección de dos conjuntos (note el parecido entre los símbolos "$\wedge$" y "$\cap$").

La disyunción o alternativa

Si p, q son proposiciones, su disyunción se denota $p \vee q$ (se lee "p o q") e indica la validez de al menos una de las proposiciones.

Ejemplo: Sean las proposiciones simples

p:"Juan va a Coppelia", q: "Juan va al cine".

Entonces su disyunción es

$p \vee q$:"Juan va a Coppelia o al cine".

Note que esta última proposición es verdadera siempre que Juan vaya a alguno de los dos lugares o a ambos y solo es falsa si Juan no va ni a Coppelia ni al cine. En general se cumple:

La proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera cuando al menos una de las proposiciones simples p o q lo es (o ambas lo son) y solo es falsa cuando ambas (p y q) son falsas.

Expresando este resultado mediante una tabla se tiene:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Al realizar una comparación con la Teoría de Conjuntos resulta que si expresamos la proposición p en la forma $x \in A$ y la proposición q en la forma $x \in B$, entonces la proposición $p \vee q$ quedaría expresada de la forma $x \in A$ o $x \in B$, o lo que es lo mismo, $x \in A \cup B$. De este modo se obtiene una equivalencia entre la operación lógica de conjunción de dos proposiciones y la operación de unión de dos conjuntos (note el parecido entre los símbolos "$\vee$" y "$\cup$").

La implicación

Innumerables expresiones de la Matemática se plantean como implicación, es decir, en la forma "si ..., entonces ...".

Si p, q son proposiciones, su implicación se denota $p \Longrightarrow q$ (se lee "p implica q" o "si p, entonces q" e indica que de la validez de p se deduce la validez de q.

En este caso se dice que q es una **condición necesaria** para que se cumpla p, pero p es una **condición suficiente** para que se cumpla q.

Ejemplo: Sean las proposiciones simples

p:"Juan va a Coppelia", q: "Juan va al cine".

Entonces su implicación es

$p \Longrightarrow q$:"Si Juan va a Coppelia, entonces va al cine".

Para comprender cuándo este tipo de proposición es verdadera o falsa, estudiemos todos los casos posibles en este ejemplo:

Caso 1: p es verdadera y q es verdadera:

En este caso se cumple Juan va a Coppelia y al cine, lo cual es cierto a partir de la proposición $p \Longrightarrow q$. Luego, la proposición es cierta.

Caso 2: p es verdadera y q es falsa:

En este caso se cumple Juan va a Coppelia pero no al cine, lo cual niega la proposición $p \Longrightarrow q$, que dice que siempre que Juan va a Coppelia, va al cine. Entonces la proposición es falsa.

Caso 3: p es falsa y q es verdadera:

En este caso se cumple Juan no va a Coppelia pero va al cine. Ello no niega la proposición $p \Longrightarrow q$, pues esta sólo indica lo que sucede si Juan va a Coppelia y por tanto, la proposición es cierta.

Caso 4: p es falsa y q es falsa:

En este caso se cumple Juan no va a Coppelia y no va al cine. Al igual que en el caso 3, ello no niega la proposición $p \Longrightarrow q$, que sólo indica lo que sucede si Juan va a Coppelia y por tanto, la proposición es cierta.

Resumiendo: La proposición dada es verdadera si los son las proposiciones p y q o si p es falsa.

En general se cumple:

La proposición compuesta $p \Longrightarrow q$ es verdadera cuando lo es $p \wedge q$ o cuando lo es $\neg p$. Esta proposición es falsa únicamente cuando se cumplen simultáneamente p y $\neg q$.

Expresando este resultado mediante una tabla se tiene:

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La equivalencia

Si p, q son proposiciones, su equivalencia se denota $p \Longleftrightarrow q$ (se lee "p es equivalente a q" o "p si y solo si q") indica que de la validez de cada una de las proposiciones se deduce la validez de q. Es decir, $p \Longleftrightarrow q$ indica que se cumplen simultáneamente las proposiciones $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$.

Ejemplo: Sean las proposiciones simples

p:"Juan va a Coppelia", q: "Juan va al cine".

Entonces la equivalencia es

$p \Longleftrightarrow q$:'Juan va a Coppelia si y solo si va al cine".

Note que, partiendo de los valores veritativos de la implicación, se obtiene que este tipo de proposición es verdadera sólo cuando ambas proposiciones tienen igual valor veritativo.

En general se cumple:

La proposición compuesta $p \Longleftrightarrow q$ es verdadera cuando $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$ tienen igual valor veritativo.

Expresando este resultado mediante una tabla se tiene:

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La implicación y la equivalencia son las formas fundamentales en que se presentan los teoremas en la Matemática. De ahí la importancia de su estudio más profundo, que realizaremos más adelante.

Aunque no es objetivo de este curso, observemos que las tablas veritativas resultan de gran utilidad para determinar cuándo es válida una proposición compuesta.

Ejemplos:

1. Estudiemos los valores veritativos de la proposición compuesta $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Así, la proposición $\neg(p \wedge q)$ es verdadera cuando solo una de las proposiciones p o q lo es o cuando ambas son falsas, y es falsa cuando ambas proposiciones son verdaderas.

Esto se observa por ejemplo en el caso siguiente:

Sean

$$p : \text{“En la cafetería hay pan con pasta”}$$
$$q : \text{“En la cafetería hay helado”}$$

. Entonces es

$$p \wedge q : \text{“En la cafetería hay pan con pasta y helado”}.$$

Y por tanto se tiene

$$\neg(p \wedge q) : \text{“En la cafetería no hay pan con pasta y helado”}.$$

Nótese la diferencia de esa expresión con la expresión "En la cafetería no hay ni pan con pasta ni helado". En esta última se afirma que no hay ninguna de las dos cosas (es decir, $\neg p \wedge \neg q$), mientras que $\neg(p \wedge q)$ indica que falta alguna de las dos cosas.

2. Estudiemos los valores veritativos de la proposición compuesta $p \wedge \neg p$.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Así, la proposición $p \wedge \neg p$ es falsa siempre, independientemente del valor veritativo de la proposición p.

Esto se observa por ejemplo en el caso siguiente:

Sea

$$p : \text{“Debemos proteger nuestro entorno”}.$$

Entonces es

$$\neg p : \text{“No debemos proteger nuestro entorno”}.$$

Y por tanto se tiene

$$p \wedge \neg p : \text{“Debemos proteger nuestro entorno y no debemos protegerlo”}.$$

Es obvio que esa frase es absurda!!!

3. Estudiemos finalmente los valores veritativos de la proposición compuesta $\neg(p \vee \neg q) \Longrightarrow q$.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q)$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg(p \wedge \neg q) \Longrightarrow q$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V

Así, la proposición $\neg(p \vee \neg q) \Longrightarrow q$ es verdadera siempre, independientemente del valor veritativo de las proposiciones p y q.

Esto se observa por ejemplo en el caso siguiente:

Sea

$$p : \text{“El primero de mayo hubo concentración en la plaza”},$$
$$q : \text{“El 17 de mayo hubo marcha en el malecón”}.$$

Entonces la negación de q es

$$\neg q : \text{“El 17 de mayo no hubo marcha en el malecón”}.$$

Y por tanto se tiene

$$p \vee \neg q \quad : \quad \text{“El primero de mayo hubo concentración en la plaza o el 17 de mayo no hubo marcha en el malecón”},$$

siendo así

$$\neg[p \vee \neg q] \quad : \quad \text{“El primero de mayo no hubo concentración en la plaza y el 17 de mayo hubo marcha en el malecón”},$$

lo cual implica que

$$q : \text{“El 17 de mayo hubo marcha en el malecón”}$$

es cierta.

3.1.2. Leyes fundamentales del cálculo proposicional

Los tres ejemplos anteriores muestran proposiciones que se cumplen de manera diferente: el primero se cumple algunas veces, el segundo no se cumple nunca y el tercero se cumple siempre. La siguiente definición permite clasificar este tipo de proposiciones:

DEFINICIÓN 3.1.1

Una proposición que es en ocasiones verdadera y en ocasiones falsa, en dependencia del valor veritativo de las proposiciones simples que la componen, se denomina ***proposición o fórmula cumplible****.*
Una proposición que es siempre verdadera, independientemente del valor veritativo de las proposiciones simples que la componen, se denomina ***ley lógica o tautología****.*
Una proposición que es siempre falsa, independientemente del valor veritativo de las proposiciones simples que la componen, se denomina ***contradicción o fórmula universalmente falsa****.*

Así, en los ejemplos observados anteriormente se tiene que:

1. representa una fórmula cumplible,
2. representa una contradicción,
3. representa una ley lógica.

Con el objetivo de poder simplificar expresiones más complejas, para poder llegar a deducciones correctas, estudiaremos a continuación las leyes fundamentales del cálculo proposicional. Utilizaremos la notación “$p \equiv q$” para indicar que las proposiciones p y q son idénticas (tienen igual valor veritativo).

1. **Ley de la doble negación**

   $\neg\neg p \equiv p.$

2. **Leyes de idempotencia**

   2.1. $p \wedge p \equiv p,$

   2.2. $p \vee p \equiv p.$

3. **Leyes asociativas**

   3.1. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$

   3.2. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$

4. **Leyes conmutativas**

    4.1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$,

    4.2. $p \vee q \equiv q \vee p$.

5. **Leyes distributivas**

    5.1. $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

    5.2. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

6. **Leyes de D'Morgan**

    6.1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$,

    6.2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

Compárense estas leyes con las del Álgebra de Conjuntos.

Otras leyes importantes son:

7. **Ley del tercero excluído**

    $p \vee \neg p$ es una tautología.

    Esta ley indica que una proposición tiene que ser verdadera o falsa, no existe una tercera opción.

8. **Ley de identidad de la implicación**

   $\boxed{p \Longrightarrow p \text{ es una tautología.}}$

9. **Ley de identidad de la equivalencia**

   $\boxed{p \Longleftrightarrow p \text{ es una tautología.}}$

Resultan además de gran utilidad las leyes:

10. **Reducción de la implicación**

    $\boxed{p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q.}$

11. **Reducción de la equivalencia**

    $\boxed{p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p).}$

Las leyes anteriormente presentadas se pueden demostrar fácilmente con la ayuda de las tablas veritativas.

Ejemplo: Demostración de la ley de D'Morgan 6.1.:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Como se observa en las columnas en rojo, las expresiones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ coinciden en sus valores veritativos, por lo que son equivalentes. **Q.e.d.**

Veamos a continuación ejemplos de la utilidad de las leyes del cálculo proposicional para simplificar expresiones e incluso llegar a determinar si se trata de una ley lógica.

Para ello resulta útil tratar de llevar la expresión dada a una forma que sólo contenga conjunciones, disyunciones o negaciones de proposiciones simples.

Ejemplos:

1. Simplificar la expresión $\neg(p \vee q) \Longrightarrow p$ y determinar si ella constituye una tautología, contradicción o proposición cumplible.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee q) \Longrightarrow p \quad &\equiv \quad \neg\neg(p \vee q) \vee p \quad \text{(por la ley 8)} \\
&\equiv \quad (p \vee q) \vee p \quad \text{(por la ley 1)} \\
&\equiv \quad p \vee (p \vee q) \quad \text{(por la ley 4.2.)} \\
&\equiv \quad (p \vee q) \vee p \quad \text{(por la ley 3.2.)} \\
&\equiv \quad p \vee q \quad \text{(por la ley 2.2.).}
\end{aligned}$$

Para determinar si la proposición dada constituye una tautología, contradicción o proposición cumplible, podemos apoyarnos en este caso en la tabla veritativa de la proposición final:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Aquí se observa que la proposición final toma valores veritativos diferentes, por lo que $\neg(p \vee q) \Longrightarrow p$ es una proposición cumplible.

2. Simplificar la expresión $\neg(p \Longrightarrow p)$ y determinar si ella constituye una tautología, contradicción o proposición cumplible.

$$\neg(p \Longrightarrow p) \equiv \neg(\neg p \vee p) \quad \text{(por la ley 8).}$$

Pero por la ley del tercero excluido se tiene que $\neg p \vee p$ es una tautología, por lo que $\neg(p \Longrightarrow p)$ es una contradicción.

3.1.3. La deducción de proposiciones

Una de las características fundamentales de un matemático es su capacidad de deducir nuevas propiedades (proposiciones) matemáticas a partir de proposiciones conocidas. En ello juega un papel esencial el hecho de que en la Matemática no puede existir ambivalencia en las proposiciones, es decir, ellas son verdaderas o falsas y nunca ambas cosas a la vez.

La deducción lógica de proposiciones es la obtención de una proposición (**tesis**) a partir de un conjunto de proposiciones consideradas ciertas (**hipótesis**) con la utilización de reglas deductivas. El resultado final de la deducción lógica de proposiciones matemáticas es un **teorema** que resulta escrito en la forma "$p \Longrightarrow q$", siendo en general p, q proposiciones compuestas, de manera que p es la hipótesis y q es la tesis del teorema. Esto no quiere decir que todos los teoremas deban estar escritos en forma de implicación, pues ello pudiera convertirlos en algo artificial, "feo" y difícil de entender. Ese es el caso, por ejemplo, del clásico teorema fundamental de la aritmética que asegura que “existen infinitos números primos”, el cual, expresado de esa forma, nos da una idea del tamaño del conjunto de todos los números primos y que evidentemente no produciría la misma imagen si se expresara en la forma “si p es un número primo cualquiera, entonces existe un número primo q que es mayor que p”.

Algunas reglas deductivas se infieren directamente de las definiciones de los conectivos lógicos. Así se tiene:

De la conjunción de dos proposiciones p, q se deduce la validez de ambas proposiciones y, por tanto, se puede afirmar la validez de cualquiera de ellas.

De la disyunción de dos proposiciones p, q se deduce la validez de al menos una de ellas y, por tanto, si se cumple $p \vee q$ y no se cumple p (es decir, se cumple $\neg p$), entonces se tiene que cumplir q.

De la equivalencia de dos proposiciones p, q se deduce la implicación en ambos sentidos. Es decir, si $p \Longleftrightarrow q$ es cierta, entonces lo son simultáneamente $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$. Así, si se cumple $p \Longleftrightarrow q$ y se cumple p, se deduce que se cumple q.

Estudiemos más a fondo el caso de la implicación y la equivalencia.

La implicación es transitiva. Es decir, si se cumplen $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow r$, entonces se cumple $p \Longrightarrow r$.

Demostración: Veamos todos los casos:
Si p es cierta, entonces q es cierta (pues $p \Longrightarrow q$) y por tanto, r es cierta (pues $q \Longrightarrow r$). Luego, se cumple $p \Longrightarrow r$.
Por otra parte, como se cumple $p \Longrightarrow q$, entonces q puede ser cierta o falsa. Veamos ambos casos:
Si q es cierta, entonces r es cierta (pues $q \Longrightarrow r$). Luego, se cumple $p \Longrightarrow r$.
Si q es falsa, como se cumple $q \Longrightarrow r$, entonces r puede ser cierta o falsa y en ambos casos se cumple $p \Longrightarrow r$, pues p es falsa. **Q.e.d.**

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

Asumamos como cierta la siguiente proposición:

“Si nieva, entonces hay frío”.

Esa proposición está compuesta por las proposiciones simples

$$p : \text{“nieva”}, \qquad q : \text{“hay frío”},$$

y tiene la forma $p \Longrightarrow q$.

Guiándonos por el lenguaje popular, tendríamos dos posibles tesis, a saber:

1. "Si no nieva, entonces no hay frío" ($p \Longrightarrow q$),
2. "Si no hay frío, entonces no nieva" ($q \Longrightarrow p$).

Aunque la primera deducción sería un estímulo para salir a la calle sin abrigo cuando no esté nevando, ella no es cierta, ni se deduce de nuestra premisa. De hecho, en Cuba no nieva y en ocasiones hace frío. Lamentablemente, tales erróneas conclusiones se realizan muy a menudo.

Por el contrario, la segunda deducción es cierta, pues no es posible que nieve si no hay frío.

Como se puede observar en este ejemplo, se ha logrado cambiar el orden de la implicación, convirtiendo la proposición cierta $p \Longrightarrow q$ en la nueva proposición $\neg q \Longrightarrow \neg p$, que también es cierta. En general se define:

Definición 3.1.2

*Si se considera válida la proposición $p \Longrightarrow q$ (**teorema directo**), entonces:*

- *la proposición $q \Longrightarrow p$ se llama **recíproco**,*
- *la proposición $p \Longrightarrow \neg q$ se llama **contrario**,*
- *la proposición $\neg q \Longrightarrow \neg p$ se llama **contrarrecíproco**.*

El ejemplo anterior nos muestra que el recíproco de un teorema no siempre es válido. Es por ello que su validez constituye una de las preguntas más frecuentes en la Matemática.

Sin embargo, se cumple:

Si $p \Longrightarrow q$ es un teorema (proposición cierta), entonces también es válido su contrarrecíproco $\neg q \Longrightarrow \neg p$.

Demostración: (a través de la tabla veritativa)

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Longrightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Como se puede observar, los valores veritativos de las columnas en rojo coinciden, quedando así finalizada la demostración. **Q.e.d.**

Veamos otros **ejemplos**:

1. Si se conoce que Juan aprobó el examen con nota de 4 o 5 y se conoce además que Juan no sacó 5 puntos en el examen, de ello se deduce que Juan sacó 4 puntos.

   Expresando esto en el lenguaje de la lógica, sean las proposiciones

   $$p: \text{“Juan tiene 4 puntos”}, \qquad q: \text{“Juan sacó 5 puntos”}.$$

   Entonces se tienen las hipótesis

   $$1\text{: “Juan tiene 4 o 5 puntos” } (p \vee q),$$

   $$2\text{: “Juan no tiene 5 puntos” } (\neg q).$$

   De ello se deduce

   $$\text{Tesis: “Juan tiene 4 puntos” } (p).$$

   Es decir, en nuestro caso se tiene $(p \vee q) \wedge \neg q \Longrightarrow p$.

2. Sean A, B y C tres conjuntos de números reales y f una función de A en B ($f: A \to B$). Si

   $$f(C) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que existe un } x \in C \text{ con } f(x) = y\}$$

   y $C \subset A$, entonces $f(C) \subset B$.

   Expresando esto en el lenguaje de la lógica, sean las proposiciones

   $$p: C \subset A, \quad q: f(C) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que existe un } x \in C \text{ con } f(x) = y\},$$

   $$r: f(C) \subset B.$$

   Entonces se tiene la

   Hipótesis: $C \subset A$, y $f(C) = \{y \in \mathbb{R}$ tal que existe un $x \in C$ con $f(x) = y\} (p \wedge q)$.

   De ello se deduce

   $$\text{Tesis: } f(C) \subset B(r);$$

   Es decir, en nuestro caso se tiene $p \wedge q \Longrightarrow r$.

3. Se conoce que si hay luz en todo el municipio Plaza de la Revolución, entonces funciona el semáforo de Coppelia. Entonces, si en un momento determinado no está funcionando el semáforo de Coppelia, de ello se deduce que no hay luz en algún lugar del municipio Plaza de la Revolución.

Expresando esto en el lenguaje de la lógica, sean las proposiciones

$$p: \text{“Hay luz en todo el municipio Plaza de la Revolución”},$$

$$q: \text{“El semáforo de Coppelia funciona”}.$$

Entonces se tienen las hipótesis

Hipótesis 1	:	Si hay luz en todo el municipio Plaza de la Revolución, entonces funciona el semáforo de Coppelia ($p \Longrightarrow q$),
Hipótesis 2	:	El semáforo de Coppelia no funciona ($\neg q$).

De ello se deduce

Tesis: No hay luz en algún lugar del municipio Plaza de la Revolución ($\neg p$).

Es decir, en nuestro caso se tiene $(p \Longrightarrow q) \wedge \neg q \Longrightarrow \neg p$.

Observe bien este último ejemplo. En primer lugar, es importante tener presente que se ha asumido como punto de partida que “si hay luz en todo el municipio Plaza de la Revolución, entonces funciona el semáforo de Coppelia” y esto se cosidera cierto. Por otra parte, si usted plantea a un grupo de personas la hipótesis de que “no está funcionando el semáforo de Coppelia”, es muy probable que algunas de ellas respondan que “no hay luz en el municipio Plaza”. Sin embargo, eso es un error, pues en la hipótesis p se habla de “todo el municipio”, por lo que su negación solo puede ser dada para “algún lugar del municipio”. En el siguiente epígrafe estudiaremos esto con más detalle.

3.2. El cálculo de predicados

Las proposiciones que hemos estudiado constan (como oraciones de nuestro lenguaje ordinario) de un sujeto (objeto) y predicado. En el lenguaje de la lógica se define:

Definición 3.2.1

Dado un conjunto (objetos o sujetos), las relaciones o propiedades que se definen entre los elementos del conjunto se conocen como ***predicados****.*

Ejemplos:

1. Sean en el conjunto de los estudiantes que participan en los juegos Caribe, las proposiciones:

   p : “Roberto practica ajedrez”, q : “Juan le ganó a Roberto en el ajedrez”.

   En este caso Juan y Roberto constituyen objetos del conjunto dado, mientras que “practicar ajedrez” y “ganarle a . . . en el ajedrez” son predicados.

2. Sean ahora en el conjunto de los números naturales, las proposiciones

$$p: \text{“5 es un número primo”}, \quad q: \text{“9 divide a 639”}.$$

En este caso se tienen los predicados "ser un número primo" y "dividir a …".

Nótese que los predicados pueden referirse a uno o varios objetos del conjunto.

También de estos ejemplos y de la definición 3.2.1 se puede inferir que es imprescindible partir de un conjunto inicial de objetos o individuos y que los predicados no tienen valor veritativo.

3.2.1. Los cuantificadores lógicos

Como pudimos observar al final del epígrafe anterior, resulta de gran importancia la comprensión de los predicados que se refieren a todos los elementos o a al menos un elemento del conjunto de individuos. Este tipo de predicados se denota de manera abreviada a través de los cuantificadores lógicos que definimos a continuación:

- El símbolo $\forall$, se lee "para todo" y significa "para todo elemento del conjunto de individuos se cumple…"
- El símbolo $\exists$, se lee "existe" y significa "existe al menos un elemento del conjunto de individuos que cumple…"
- El símbolo $\exists!$, se lee "existe un único" y significa "existe un único elemento del conjunto de individuos que cumple…".

Ejemplos:

1. Sea
$$A = \{\text{Roberto, Juan, Sandra, Walkiria}\}$$
y sean las proposiciones:

$$\begin{aligned} p &: \text{“Roberto, Juan, Sandra y Walkiria practican ajedrez,} \\ q &: \text{“De Roberto, Juan, Sandra y Walkiria, al menos uno practica ajedrez”,} \\ r &: \text{“De Roberto, Juan, Sandra y Valkiria, sólo uno practica ajedrez”.} \end{aligned}$$

Utilizando los cuantificadores lógicos se escribe:

$$\begin{aligned} p &: \forall x \in A \text{ se cumple que } x \text{ practica ajedrez,} \\ q &: \exists x \in A \text{ tal que } x \text{ practica ajedrez,} \\ r &: \exists! x \in A \text{ tal que } x \text{ practica ajedrez.} \end{aligned}$$

2. Sean ahora en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, las proposiciones

$$\begin{aligned} p &: \text{“todo número de la forma } 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ es par”},\\ q &: \text{“existe al menos un número natural que es primo”},\\ r &: \text{“existe un único número natural que sólo tiene un divisor natural”}. \end{aligned}$$

   Utilizando los cuantificadores lógicos se escribe:

$$\begin{aligned} p &: \forall x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ se cumple que } x \text{ es un número par},\\ q &: \exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es primo},\\ r &: \exists! x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ sólo tiene un divisor natural}. \end{aligned}$$

Agreguemos ahora a las ya conocidas leyes del cálculo proposicional algunas en las intervienen los cuantificadores lógicos y que serán también de gran utilidad en la deducción lógica de proposiciones. Para escribirlas de manera compacta denotemos los predicados con letras mayúsculas del alfabeto latino de la siguiente manera

- $P(x)$: denota la proposición formada por el predicado P y el individuo x,
- $Q(x, y)$: denota la proposición formada por el predicado Q y los individuos x, y.

De ese modo, la proposición

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \text{ es primo},$$

se escribe

$$\exists x \in \mathbb{N};\ P(x),$$

siendo P el predicado “ser un número primo” (note que usamos el símbolo de puntuación “;” para sustituir la frase “tal que”.

Existen muchas leyes del cálculo de predicados. Sin embargo, estudiaremos aquí solo algunas pocas que son muy utilizadas en la demostración de teoremas.

1. $$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in A \text{ se cumplen } P(x) \text{ y } Q(x) \implies\ & [\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)]\\ & \text{y } [\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x)]. \end{aligned}}$$

   Es decir, si para todo objeto x del conjunto A se cumplen los predicados P y Q, entonces para todo objeto x del conjunto A se cumple P y para todo objeto x del conjunto A se cumple Q.

2. $$\boxed{\exists x \in A;\ P(x) \text{ y } Q(x) \implies [\exists x \in A; P(x)] \text{ y } [\exists x \in A; Q(x)].}$$

Es decir, si existe un objeto x del conjunto A que cumple los predicados P y Q, entonces se puede asegurar que existe un objeto x del conjunto A que cumple P y existe un objeto x del conjunto A (el mismo) que cumple Q.

Nótese que el recíproco de esta expresión no es válido. Es decir, de la existencia de un objeto en A que cumpla P y uno que cumpla Q, no se puede deducir que exista un objeto que cumpla ambos predicados simultáneamente.

Ejemplo: Sea A el conjunto de los estudiantes Roberto, Juan, Sandra y Valkiria. De ellos se conoce que

Roberto practica ajedrez, futbol y baloncesto,

Juan practica natación,

Sandra practica gimnasia,

Valkiria no practica deportes.

Entonces se puede afirmar que

$$\exists x \in A;\ x \text{ practica natación y } \exists x \in A;\ \text{practica ajedrez,}$$

Sin embargo, ningún estudiante del conjunto A practica natación y ajedrez.

3. $$\boxed{\begin{array}{c}[\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)] \vee [\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x)] \\ \Longrightarrow \forall x \in A \text{ se cumple } [P(x) \vee Q(x)].\end{array}}$$

Es decir, si para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado P o para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado Q, entonces para todo objeto x del conjunto A se cumple P o Q.

4. $$\boxed{\exists x \in A;\ [P(x) \vee Q(x)] \Longrightarrow [\exists x \in A;\ P(x)] \vee [\exists x \in A;\ Q(x)].}$$

Es decir, si existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple el predicado P o el predicado Q, entonces existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple P o existe al menos un objeto x del conjunto A que cumple Q.

5. $$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in A \text{ se cumple que } P(x) \Longrightarrow Q(x)] \\ \Longrightarrow [(\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)) \Longrightarrow (\forall x \in A \text{ se cumple } Q(x))].\end{array}}$$

Es decir, si para todo objeto x del conjunto A que cumple el predicado P se cumple el predicado Q, entonces si para todo objeto x del conjunto A se cumple P, ello implica que para todo x del conjunto A se cumple Q.

Las siguientes leyes son de gran utilidad en la decisión del valor veritativo de proposiciones con cuantificadores y expresan la forma de negar estos últimos.

6. $$\boxed{\neg(\exists x \in A;\ P(x)) \Longrightarrow \forall x \in A \text{ se cumple } \neg P(x).}$$

   Es decir, no existe ningún objeto x del conjunto A que cumpla el predicado P, si y sólo si para todo objeto x del conjunto A no se cumple P.

7. $$\boxed{\neg(\forall x \in A \text{ se cumple } P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in A;\ \neg P(x).}$$

   Es decir, no para todo objeto x del conjunto A se cumple el predicado P, si y sólo si si existe al menos un objeto x del conjunto A que no cumple P.

Ejemplos:

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Entonces la proposición "$\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \in \mathbb{Q}$" es falsa, pues por ejemplo, $\pi \notin \mathbb{Q}$, es decir, se cumple $\exists x \in \mathbb{R};\ x \notin \mathbb{Q}$.

2. La proposición "Existe al menos un número natural n que es divisible por 4 y no es divisible por 2" (que por supuesto, es falsa) quedaría negada en la forma "Para todo número natural n se cumple que si n es divisible por 4, entonces n es divisible por 2".

3.3. Algunas formas de la demostración de teoremas

En los epígrafes anteriores hemos hablado de los teoremas en la Matemática en relación con las leyes del cálculo proposicional, de predicados y la deducción lógica. Precisamente nos dedicaremos aquí a estudiar a través de ejemplos algunas formas de la demostración de teoremas que se derivan de dichas leyes.

La demostración directa

Este método de demostración consiste en deducir directamente la tesis del teorema a partir de las hipótesis a través del uso de las leyes de la deducción lógica. Por ejemplo, demostremos directamente el siguiente teorema:

TEOREMA 3.3.1

Sea n un número natural. Si 2 divide a n^2, entonces 2 divide a n.

Demostración: Supongamos que 2 divide al número natural n^2. Entonces se cumple que

$$\exists k \in \mathbb{N};\ n^2 = 2k.$$

Pero conocemos que todo número natural se puede escribir de manera única como producto de potencias de números primos. Luego, si

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

representa la descomposición (en orden creciente) en factores primos del número n, se tiene

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_m^{2\alpha_m} = 2k.$$

De aquí se deduce que tiene que ser

$$p_1 = 2,$$

pues el menor número primo es 2 y los factores de la descomposición de n^2 son primos. Entonces se tiene que

$$n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m},$$

y por tanto 2 divide a n. **Q.e.d.**

Veamos otro ejemplo:

TEOREMA 3.3.2

Si m, n son dos números naturales cualesquiera, entonces el triángulo de lados a, b, c con $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ es rectángulo de hipotenusa c.

Demostración: Sean m, n números naturales y sean

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2.$$

Por el conocido Teorema de Pitágoras, debemos comprobar que se cumple

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sustituyendo en el miembro izquierdo de esta igualdad se tiene

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Q.e.d.

La demostración por contrarrecíproco

Este método de demostración parte de que, en ocasiones resulta más fácil demostrar el contrarrecíproco de un teorema, que demostrarlo directamente, y se basa en el hecho de que un teorema y su contrarrecíproco son siempre equivalentes. Por ejemplo, veamos la demostración del teorema 3.3.1 aplicando el método del contrarrecíproco.

Demostración: Supongamos que 2 no divide al número natural n. Entonces se cumple que

$$\exists k \in \mathbb{N};\ n = 2k + 1.$$

Elevando al cuadrado se tiene

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

lo cual implica que (haciendo $m = 2k^2 + 2k$) se cumple

$$n^2 = 2m + 1,$$

de donde se deduce que 2 no divide a n^2. Aplicando el contrarrecíproco se obtiene entonces la validez del teorema. **Q.e.d.**

Como se puede observar, resultó mucho más sencillo demostrar el teorema por el contrarrecíproco que por la vía directa. Pero,... atención !!! esto no siempre es así. No son pocas las ocasiones en que resulta mucho más fácil y elegante demostrar un teorema por la vía directa que por el contrarrecíproco.

La demostración por reducción al absurdo

Este método de demostración es algo parecido al método del contrarrecíproco, y se basa en el hecho de que si $p \Rightarrow q$ es un teorema, entonces $p \wedge \neg q$ es una contradicción. Su esencia consiste en partir de que no se cumple la tesis del teorema suponiendo válida su hipótesis y llegar a una contradicción. Por ejemplo, veamos la demostración del teorema 3.3.1 aplicando el método de reducción al absurdo.

Demostración: Supongamos que 2 no divide al número natural n, pero 2 divide a n^2. Entonces se cumple que

$$\exists k \in \mathbb{N};\ n = 2k + 1.$$

Elevando al cuadrado se tiene

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

lo cual implica que (haciendo $m = 2k^2 + 2k$) se cumple

$$n^2 = 2m + 1,$$

de donde se deduce que 2 no divide a n^2. Pero esto contradice la hipótesis de que 2 divide a n^2. Por lo que nuestra suposición es errónea y se cumple el teorema. **Q.e.d.**

Como se puede observar, en este caso la demostración por reducción al absurdo resultó muy similar a la demostración por el contrarrecíproco.

Veamos el ejemplo clásico de la demostración euclidiana de la infinitud de los números primos, llamada así por ser la que se presenta en la clásica obra de Euclides “Elementos”.

TEOREMA 3.3.3 *Existen infinitos números primos.*

Demostración: Supongamos que existen solo n números primos. Sean estos p_1, p_2, $\ldots$, p_n. Construyamos el número

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots p_n + 1.$$

Este número es obviamente mayor que todos los números primos que lo componen.

Por otra parte, ninguno de esos números primos divide a p dada la forma en que éste fue construido. Entonces p es un número primo nuevo mayor que los anteriores, lo cual constituye una contradicción a la suposición de que sólo existen n números primos. De ello se deduce que existen infinitos números primos. **Q.e.d.**

La demostración por contraejemplo

Este método de demostración consiste en dar un ejemplo que muestre que una propiedad determinada no se cumple para todos los elementos de un conjunto dado.

Por ejemplo, Pierre de Fermat[1] pensaba que todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$ eran números primos. Sin embargo, años más tarde Leonard Euler demostró que dicha suposición era falsa a través de un contraejemplo.

En este caso, Euler demostró que el número $2^{2^5} + 1$ es divisible por $5 \cdot 2^7 + 1$ y por tanto no es un número primo.

Veamos otros ejemplos:

[1]Pierre de Fermat (1601-1665) abogado y consejero en la cámara baja del parlamento de Toulouse sentía gran interés por la Matemática y mantuvo una fructífera relación con matemáticos de su época. Sin embargo, nunca mostró interés en publicar su obra. Le interesó particularmente la Teoría de Números; donde es autor de importantes resultados y conjeturas. En esta área se destaca su resultado más famoso, conocido como el último o gran teorema de Fermat, que demoró mas de 300 años en ser demostrado. Fermat escribió el teorema en el margen de la Arithmetica de Diofanto, traducida por Bachet, y comentó “He descubierto una prueba verdaderamente maravillosa, pero este margen es demasiado pequeño para contenerla.” Fermat fue contemporáneo de Rene Descartes, el filosofo de la duda, y se considera junto a él, fundador de la Geometría Cartesiana.

1. La afirmación "En todo conjunto de números reales existe al menos un número irracional" es falsa, como muestra el ejemplo del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ compuesto únicamente por números naturales (por tanto, racionales).

2. La afirmación "Todas las funciones reales de variable real son inyectivas" es falsa, pues, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

La demostración por inducción

Seguramente muchas veces has jugado a colocar las fichas del dominó paradas en fila, dejando entre una y otra sólo el espacio suficiente para que al hacer caer la primera, caigan todas las restantes. Y también es muy posible que nunca hayas pensado que existe una justificación matemática para la validez de ese juego.

Es muy fácil. En primer lugar sabemos que al empujar la primera ficha, cae la segunda. Así mismo, sabemos que al caer una ficha cualquiera, ella hace caer a la siguiente en la fila. Eso basta para darse cuenta de que basta que caiga la primera ficha para que caigan todas. Esa idea constituye la esencia del principio de la inducción matemática, que se basa en la propiedad del buen orden de los números enteros positivos (todo conjunto de números enteros positivo tiene un menor elemento) y es una herramienta de gran utilidad en la demostración de propiedades de los números enteros.

El primer principio de la inducción matemática
Si en el conjunto de los números naturales un predicado P es válido para $n = 1$ ($P(1)$) y para cada número natural n se cumple $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, entonces el predicado P se cumple para todo número natural n ($\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple $P(n)$).

Para demostrar una propiedad mediante el principio de la inducción matemática se necesitan seguir tres pasos, a saber:

(1) Demostrar que la propiedad se cumple para $n = 1$ (o para el primer elemento del conjunto en cuestión) (PASO BÁSICO.)

(2) Suponer que la propiedad se cumple para un número natural n cualquiera (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN.)

(3) Demostrar que entonces la propiedad se cumple para $n + 1$ (PASO INDUCTIVO.)

Ejemplo: Demostrar que $n! \leq n^n$.

(1) PASO BÁSICO: $1! = 1 \leq 1^1 = 1$.

(2) HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Sea $n! \leq n^n$.

(3) PASO INDUCTIVO: Queremos demostrar que $(n+1)! \leq (n+1)^{(n+1)}$.

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq n^n(n+1) \leq (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{(n+1)}.$$

Q.e.d.

Ejemplo: Calcular $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
Para conjeturar una fórmula probemos con los primeros valores de n.

$$\begin{aligned}
1 = 1 &= 1^2 \\
1+3 = 4 &= 2^2 \\
1+3+5 = 9 &= 3^2 \\
1+3+5+7 = 16 &= 4^2 \\
1+3+5+7+9 = 25 &= 5^2 \\
1+3+5+7+110 = 36 &= 6^2
\end{aligned}$$

Conjetura: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Demostración:

(1) PASO BÁSICO: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$.

(2) HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Sea $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

(3) PASO INDUCTIVO: Queremos demostrar que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Q.e.d.

Un ejemplo importante lo constituyen las progresiones geométricas, cuya suma cumple (demuéstrelo)

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Esta fórmula resulta muy útil para calcular sumas interesantes. Por ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{r-1} = 2^{n+1}-1.$$

A partir de la propiedad del buen orden de los números enteros, se puede generalizar el principio de inducción como sigue:

Generalización del primer principio de la inducción matemática
Si en un conjunto ordenado $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ de números naturales es válido un predicado P para n_1 ($P(n_1)$) y para cada índice k se cumple la proposición $P(n_k) \Rightarrow P(n_{k+1})$, entonces el predicado $P(n_k)$ se cumple para todo número del conjunto $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$.

Es importante llamar la atención sobre la importancia del paso básico del principio de inducción, pues olvidarlo puede conducir a demostrar grandes absurdos. El ejemplo más sencillo lo ofrecen las clásicas fichas del dominó. Sabemos que si cada ficha que cae hace caer a la siguiente, pero... si no cae la primera ficha... no se puede garantizar que caigan las demás.

Otro ejemplo del mal uso del paso básico de inducción se presenta en la demostración de la siguiente proposición (totalmente absurda).

Proposición: "Todos los cubanos tiene los ojos del mismo color"

Demostración:

(1) PASO BÁSICO: La proposición es evidente en cualquier conjunto formado por un solo cubano.

(2) HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Supongamos que para un número natural n se conoce que en todo conjunto de n cubanos todos tienen los ojos del mismo color.

(3) PASO INDUCTIVO: Sea $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$ un conjunto cualquiera de $n+1$ cubanos. Para cualquier valor del índice $k = 1, 2, \ldots, n+1$, el conjunto $A_k = A \setminus \{c_k\}$ consta de n cubanos, que (por la hipótesis de inducción) tienen todos los ojos del mismo color. Como esto sucede en todos los conjuntos A_k, resta solo comparar dos cualesquiera de ellos para concluir que todos los cubanos del conjunto A tienen los ojos del mismo color. **Q.e.d.**

Es obvio que la demostración es incorrecta, pues la proposición es evidentemente falsa. El culpable del error es la aplicación errónea del paso básico de inducción. En este caso se trata de una propiedad que deben cumplir conjuntos de al menos dos elementos, por lo que el paso básico de inducción tendría que aplicarse a un conjunto de dos elementos para que tuviera sentido.

A continuación ofrecemos una variante del principio de inducción matemática de gran utilidad. Recomendamos al lector generalizarlo de manera análoga al primer principio de inducción.

El segundo principio de la inducción matemática Si en el conjunto de los números naturales un predicado P es válido para $n = 1$ ($P(1)$) y que se cumpla $P(k)$ para todo $k \leq n$ implica que se cumple $P(n+1)$, entonces el predicado P se cumple para todo número natural n ($\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple $P(n)$).

Ejemplo: Demostremos que todo franqueo postal de valor mayor que 1 centavo, puede ser formado utilizando solamente sellos de 2 y 3 centavos.

(1) PASO BÁSICO: Es obvio que la afirmación es válida para los franqueos de 2 y de 3 centavos.

(2) HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Sea válida la afirmación para franqueos de hasta n centavos.

(3) PASO INDUCTIVO: El franqueo de $n+1$ centavos se puede conformar con el franqueo de $n-1$ centavos (el cual contiene por la hipótesis de inducción solamente sellos de 2 y 3 centavos) y un sello de 2 centavos. Quedando así demostrada la afirmación. **Q.e.d**

El principio de inducción matemática sugiere un método para definir funciones en los enteros positivos. En lugar de definir explícitamente el valor de la función se define el valor de $f(1)$ y se ofrece un regla para calcular $f(n+1)$ a partir del valor de $f(n)$.

Definición 3.3.1

Se dice que la función f está definida recursivamente en un conjunto ordenado de números $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ si se especifica el valor de f en los primeros k valores del conjunto $(f(n_1), f(n_2), \ldots, f(n_k))$ y una regla para determinar $f(n_{m+1})$ a partir de los k valores que anteceden a n_{m+1}; es decir, a partir de $f(n_m), f(n_{m-1}), \ldots, f(n_{m-k+1})$.

Ejemplo: La función factorial

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

se define recursivamente como

$$f(1) = 1, \qquad f(n+1) = (n+1)f(n).$$

Un ejemplo interesante de funciones definidas recursivamente lo constituyen los números de Fibonacci[2]. La sucesión de Fibonacci se define recursivamente como

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f(n+1) = f(n) + f(n-1)\ \forall n \leq 2.$$

Es fácil obtener los primeros miembros de la sucesión Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

La sucesión cumple algunas identidades interesantes, que se puede demostrar por inducción. Por ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1.$$

$$f_n > \alpha^{n+1},\ \text{si } n \geq 3,\ \text{siemdo } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La demostración de estas propiedades queda como ejercicio al lector.

3.4. Ejercicios propuestos

1. Si los símbolos a, b, c, d, e designan las proposiciones

   a: "Juan llegó antes que Pedro",

   b: "Juan llegó al mismo tiempo que Pedro",

   c: "Pedro llegó antes que José",

   d: "Juan llegó al mismo tiempo que José",

   e: "Juan llegó antes que José".

   Transfiera al lenguaje natural las siguientes proposiciones:

$$\text{a) } (a \wedge c) \Longrightarrow e, \qquad \text{b) } \neg a \wedge b \wedge c \Longrightarrow e,$$

$$\text{c) } (b \wedge c) \Longrightarrow e, \qquad \text{d) } (e \vee d) \Longrightarrow [(c \wedge a) \Longrightarrow e],$$

$$\text{e) } a \wedge c \wedge d \Longrightarrow [(\neg a \wedge d \wedge c) \vee (\neg d \wedge e)].$$

[2]Leonardo de Pisa (1180-1250), conocido como Fibonacci, fue el primer gran maestro matemático europeo del medioevo. Tuvo ocasión de conocer el sistema de numeración indoarábigo y se dice que no solo contribuyó a su introducción en Europa, sino que fue un defensor acérrimo de su uso contra el sistema romano. Su libro más conocido, por el que se le considera el primero de los matemáticos europeos medievales, es Liber Abaci, publicado en 1202, donde demuestra las ventajas de las cifras indoarábigas. Los números de Fibonacci surgen a partir de un problema sobre la población de conejos.

2. Sean las proposiciones p: "hace frío" y q: "está lloviendo". Transfiera al lenguaje natural las siguientes proposiciones:

$$\text{a) } \neg p, \qquad \text{b) } q \Longleftrightarrow p, \qquad \text{c) } \neg p \wedge \neg q,$$
$$\text{d) } p \wedge q, \qquad \text{e) } p \Longleftrightarrow \neg q, \qquad \text{f) } p \Longleftrightarrow \neg q,$$
$$\text{g) } p \vee q, \qquad \text{h) } p \vee \neg q, \qquad \text{i) } (p \wedge \neg q) \Longrightarrow p.$$

3. Sean las proposiciones p: "es sábado" y q: "hay fiesta". Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica:
   - *a*) Es sábado y hay fiesta;
   - *b*) Es sábado, pero no hay fiesta;
   - *c*) No es cierto que no es sábado y no hay fiesta;
   - *d*) No es sábado, ni hay fiesta;
   - *e*) Es sábado, o no es sábado y hay fiesta;
   - *f*) Es falso que es sábado o no hay fiesta.

4. Partiendo de la veracidad o falsedad de las proposiciones simples, determine si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:
   - *a*) $2 + 2 = 5$ si y sólo si $4 + 4 = 10$;
   - *b*) París está en Inglaterra o Londres está en Francia
   - *c*) $1 + 1 = 3$ o $2 + 1 = 3$.

5. Determine, mediante el uso de tablas veritativas, si las proposiciones siguientes son proposiciones cumplibles, tautologías o contradicciones:

$$\text{a) } p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p), \qquad \text{b) } \neg\neg p \Longrightarrow p,$$
$$\text{c) } \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg\neg(q \vee p), \qquad \text{d) } (\neg p \Longrightarrow p) \Longrightarrow (p \vee q \vee r).$$

6. Demuestre las leyes del cálculo proposicional a través de tablas veritativas.

7. Mediante las leyes del cálculo proposicional, simplifique las siguientes proposiciones:

$$\text{a) } \neg(p \vee \neg q), \qquad \text{b) } \neg(\neg p \Longrightarrow q), \qquad \text{c) } \neg(p \vee \neg q),$$
$$\text{d) } \neg(\neg p \wedge \neg q), \qquad \text{e) } \neg(\neg p \Longleftrightarrow q), \qquad \text{f) } \neg(\neg p \Longrightarrow \neg q).$$

8. Mediante las leyes del cálculo proposicional, simplifique las siguientes proposiciones y determine así si son proposiciones cumplibles, tautologías o contradicciones:

$$\text{a) } \neg(p \vee q) \Longrightarrow p, \qquad \text{b) } [p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow q),$$
$$\text{c) } \neg(p \vee q \vee r) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge q), \qquad \text{d) } (p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow q,$$
$$\text{e) } (p \Longrightarrow \neg q) \Longleftrightarrow (\neg\neg\neg p \vee \neg q), \qquad \text{f) } [(p \Longrightarrow q) \vee (q \Longleftrightarrow p)] \Longrightarrow q.$$

9. Dadas las proposiciones

   - El metro viaja a 100 km/h,
   - En La Habana no hay ningún medio de transporte que desarrolle una velocidad mayor de 30 km/h;
   - El metro es un medio de transporte;
   - En La Habana hay bicitaxis;
   - Los bicitaxis desarrollan una velocidad media de 5 km/h y son medios de transporte;
   - Del Vedado a San Agustín hay 30 km;
   - Tanto el Vedado como San Agustín se encuentran en La Habana;

   Suponga que son verdaderas y analice cuáles de las proposiciones siguientes se pueden deducir como verdaderas, cuáles como falsas y cuáles no se pueden deducir. Justifique su respuesta en cada caso

   a) En La Habana hay metro;

   b) Utilizando un medio de transporte se llega en menos de una hora del Vedado a San Agustín;

   c) En un camello caben más de 500 personas;

   d) Se necesitan al menos 24 horas para llegar del Vedado a San Agustín.

10. Encuentra en cada caso una deducción correcta:

    a) $\neg(p \vee q) \wedge p \Longrightarrow \ldots$;

    b) $(p \vee q) \wedge p \Longrightarrow \ldots$;

    c) Si Juan nunca va a la Universidad en camisa roja y Juan siempre usa camisa roja, entonces . . . ;

    d) Si Todos los alumnos de primer año de Matemática tiene menos de 22 años y Pedro tiene 23 años y estudia Matemática, entonces . . . ;

    e) Se conoce que si un triángulo es rectángulo, entonces la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si el triángulo ABC es rectángulo y sus catetos miden 3cm y 4cm respectivamente, entonces . . . ;

    f) Se conoce que un número natural mayor que 1 es primo si y solo si solamente es divisible por él mismo y por la unidad. Si 24 es divisible por 2, entonces . . . ;

11. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de individuos. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) $\exists x \in \mathbb{R};\ |x| = x;$

b) $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 = x;$

c) $\exists x \in \mathbb{R};\ 2x = x;$

d) $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 + 3x - 2 = 0;$

e) $\forall x \in \mathbb{R};\ x + 1 > x;$

f) $\forall x \in \mathbb{R};\ 2x + 3x = 5x.$

12. Niegue las proposiciones del ejercicio anterior.

13. Dado el conjunto A de todos los estudiantes de primer año de Matemática, escriba las siguientes proposiciones en el lenguaje de la lógica de predicados:

    a) Todos los estudiantes de primer año de Matemática practican deportes;

    b) Juan estudia primer año de Matemática y no practica deportes;

    c) Si algún estudiante de primer año de Matemática no asiste regularmente a clases, entonces tendrá dificultades en el curso regular;

    d) Si ningún estudiante de primer año de Matemática está enfermo, entonces todos los estudiantes de primer año de Matemática asisten regularmente a clases.

14. El 20 de septiembre de 1519 zarparon 239 tripulantes en 5 barcos al mando de Magallanes y sólo regresaron 18. Deduzca, a partir de las siguientes informaciones, quién era el capitán de cada barco, cuál su tonelaje y qué consecuencia tuvo cada uno de ellos.

    (1) Tras llegar al río Santa Cruz, en la Patagonia argentina, el navío capitaneado por Serrăo naufragó. El que estaba al mando de Elcano, el “Concepción”, el “San Antonio” y el “Trinidad” continuaron viaje. (Estos tres últimos eran los más pesados).

    (2) Tras una rebelión del capitán del "San Antonio", Magallanes lo reemplazó por Esteban Gómez. Este barco fue el primero en ingresar al “Estrecho de Todos los Santos”, pero el de 90 toneladas (que no era el “Trinidad”) fue quien exploró sus aguas.

    (3) El más pesado sufrió una avería y debió ser abandonado. Su tripulación pasó al “Concepción”, al “Trinidad” y al “Victoria”.

    (4) Un incendio destruyó el navío de Quesada, por lo que sólo quedaron el de 110 toneladas y el “Victoria”.

    (5) Al llegar a las Malucas, los indígenas capturaron el navío capitaneado por Magallanes, a quien dieron muerte.

    (6) Tres años después de la partida, sólo el “Victoria”, que no era el más liviano, regresó a España.

Los datos a determinar son:

- Barcos son: “Concepción”, “San Antonio”, “Santiago”, “Trinidad”, “Victoria”.
- Capitanes son: Cartagena, Elcano, Magallanes, Quesada, Serrão.
- Tonelajes son: 75, 80, 90, 110, 120.
- Consecuencias: abandonado, capturado, incendio, naufragio, regresó.

15. Estos benefactores consagraron sus vidas a mejorar la de su prójimo ¿Qué buena obra dejó cada uno, en qué año la plasmó y cuál era su actividad?

    (1) El fundador de la Cruz Roja era suizo, el del Ejército de Salvación inglés, Hahnemann, Röntgen y Schweitzer alemanes.

    (2) En 1901 el filántropo y el físico obtuvieron un premio Nobel; el de la Paz y el de Física, en ese orden. El organista logró también el de la Paz en 1952. Booth y Hahnemann no conquistaron el Nobel.

    (3) El pastor metodista (que no era alemán) plasmó su idea años después que el cerrador de la Cruz Roja ideara esta a raíz de los horrores de la Guerra de Crimen (1854-1856).

    (4) El nombre de Schweitzer era Albert; el del homeópata Samuel; el del filántropo Juan; y el de los que hicieron sus obras en 1878 y 1895, Guillermo.

    (5) El organista (que también era médico) daba conciertos para recaudar fondos que destinaba a su hospital en Africa.

    (6) Todos fueron longevos. El creador d elos rayos X (que no era médico), murió a los 78 años; Schweitzer a los 90; y los que concretaron sus obras en 1811, 1859 y 1878 superaron los 80 años.

    Los datos a determinar son:

    - Obra: Cruz Roja, Ejército de Salvación, Hospital, Homeopatía, Rayos X.
    - Autor: Booth, Dunant, Hahnemann, Röntgen, Schweitzer.
    - Año: 1811, 1859, 1878, 1895, 1913.
    - Actividad: Filántropo, Físico, Médico, Organista, Pastor.

16. ENIGMA POLICIAL. LA COLECCIÓN INCOMPLETA.

    Cansado de tantos viajes Nadine decidió pasar una temporada en su casa en las afueras de París. Durante varias semanas disfrutó de su soledad paseando por los bosques, leyendo, escuchando música…

    Una mañana, mientras desayunaba, sintió la necesidad de reunirse con algunos amigos. Hizo varias llamadas telefónicas y fue hacia el pueblo, donde compró los ingredientes necesarios para preparar una de aquellas cenas que todos elogiaban… y devoraban.

Al anochecer llegaron sus invitados. La primera en descender del coche fue la verborrágica (y últimamente algo amargada, a decir verdad) Claire Duprés. Tras ella, cuchicheando como de costumbre, venían Ivonne Chardon y Jeanne Brie (a quien Claire mortificaba llamándola "fromage" por su apellido que recordaba al queso).

- ¡Nadine, encanto! - exclamó Claire - ¿Dónde te habías metido, ermitaña, que nos tenías tan abandonados?

- No empieces a mortificarla, Claire - Le advirtió Jeanne.

- ¡Tengamos la velada en paz, muchachas! - suplicó Jacques Lafleur, que venía conversando animadamente con Pierre Blondelle.

Nadine los abrazó y los llevó al interior. Allí la mesa resplandecía de cristales y porcelanas, pero ninguno de los invitados reparó en esos detalles; todos estaban como hipnotizados, mirando las fuentes repletas de canapés y "hors-d'oeuvres".

- Bueno. . . - invitó Nadine - Sospecho que no querrán que mi coq au vin se eche a perder, así que. . . ¡a la mesa!

Todo estuvo perfecto, los entremeses, el coq au vin, las crepes Suzette, los vinos. . . Cuando entró a la sala con el café, Nadine halló a sus amigos conversando en voz baja. . .

- Sospecho que ha llegado la hora de los chismes - dijo - ¡Qué nuevo "affaire" parisino es el que los tiene tan entretenidos, amigos?

- Pues. . . Se comenta que a cierto caballero que todos conocemos le han ido robando, una a una, las más valiosas piezas de su colección de obras de arte - aclaró Jacques.

- ¡Y lo tiene merecido! - intervino Claire maliciosa - No es ningún secreto que la mayor parte de esos tesoros ha sido conseguida de un modo bastante deshonesto. Me he enterado de que una vez. . .

- Puras habladurías, Claire - interrumpió Jacques - Es algo excéntrico y ermitaño. pero no permitiré que dudes de su honestidad.

- Ya sé de quién estamos hablando - dijo Nadine - Tu eres su mejor amigo, Jacques, cuéntame. . .

- El pobre está realmente triste. No sólo ha perdido sus piezas más bellas, sino que, además, se ve forzado a desconfiar de la gente que vive en su propia casa: la vieja cocinera que trajo desde hace poco de Nantes, el mayordomo que le sirve desde que tengo memoria, el chofer, la mucama, su secretaria,. . .

- Cinco personas muy afortunadas, por cierto - murmuró Claire - De la noche a la mañana, todos ellos parecen nadar en la abundancia. . .

- Es verdad - intervino Ivonne - Ayer mismo vino a mi boutique esa mujer de Angulema y, con todo descaro, eligió tres o cuatro de mis modelos más caros. . .

- No seas mal pensada, Ivonne. Sucede que nuestro amigo le regaló un billete de lotería. . . ¡Y yo estaba presente cuando la pobre mujer se enteró de que había ganado el primer premio! Estaba tan emocionada y agradecida que, entre llantos, prometió ayudarle a recuperar lo robado, especialmente la pieza de alabastro que a ella tanto le gustaba. . . - explicó Jacques.

- Y. . . ¿qué me cuentan del chofer? - terció Pierre - Ese tipo, tan tosco y pobretón, acaba de inaugurar una relojería muy lujosa. . .

- Muy simple Pierre - dijo Jeanne - Fue un regalo de nuestro amigo cuando el chico se casó con la jovencita que admiraba el trabajo de orfebrería de la serpiente de oro. . . Ella sí que era honesta.

- Entonces, pensemos en el mayordomo - siguió Pierre - ¡Siempre resultan ser culpables! Más de una vez lo ví mirando con codicia justamente la pieza de ébano que desapareció.

- ¿El mandarín? - preguntó Claire.

- No. . . el dragón - aclaró Jacques - El mandarín que falta era el preferido por alguien que siempre decía que en su Lyon natal jamás había visto una cosa tan bella. . .

- A mí nunca me cayó bien esa chica de Tours, tan provinciana. . . - comentó Ivonne.

- Esto se pone interesante - dijo Nadine - ¿Qué más sabemos de esa gente?

- Alguien de Limoges recibió una herencia. Nuestro amigo se ocupó personalmente de todos los trámites, y bromeaba diciendo que ahora es más rico que él mismo. Dudo que esa persona tenga algo que ver con los robos, pues acaba de regalar a su patrón un cuadro que vale mucho más que el águila y el elefante robados - contó Jacques.

- ¿Cuál elefante? ¿Aquél enorme, de marfil? - preguntó Ivonne.

- No, el de jade. . . también falta un marfil, pero es otra pieza. . .

- ¡El águila! - suspiró Pierre - ¡Yo adoraba a esa águila tanto como la mucama!

- Pierre - dijo Nadine, con expresión pícara - ¿Cómo sabes tú lo que gustaba a la mucama?

- Bien detective. . . ¡Me has descubierto! Creo que estoy enamorado como un colegial de esa mujer. . . ¡Tal vez pronto les dé una sorpresa casándome con ella!

Fue como si una bomba hubiese estallado en medio de la sala. Claire, Ivonne y Jeanne, escandalizadas, trataban de convencerlo de que eso sería la peor equivocación de su vida. Nadine hizo un guiño cómplice a Pierre y salió. Jacques quiso hacerlas callar, pero abandonó el intento y decidió seguir a su anfitriona.

La halló en el escritorio, consultando su agenda telefónica.

- A veces esas mujeres se ponen insoportables…- dijo - Oye Nadine…¿A quién vas a llamar?

- A nuestro pobre coleccionista, Jacques. Creo que tengo buenas noticias para él…

- ¿Acaso sacaste algo en limpio?

- Si te animas a volver a la sala a buscarme un cognac, te daré la primicia…

¿QUIÉN ES EL LADRÓN?

17. Calcule $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

18. Demuestre que:

    a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \geq 1$.

    b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para todo $n \geq 1$.

    c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ para todo $n \geq 1$.

    d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ para todo $n \geq 1$.

19. Use el segundo principio de inducción matemática para demostrar que para todo $n \geq 1$ se cumple

$$a^n - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1).$$

(Sugerencia: $a^{n+1} - 1 = (a+1)(a^n - 1) - a(a^{n-1} - 1)$.)

20. Demuestre que el cubo de todo entero puede ser escrito como diferencia de cuadrados. (Sugerencia: note que

$$n^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3).)$$

21. Demuestre que $n! > n^2$ para todo entero $n \geq 4$, mientras que $n! > n^3$ para todo entero $n \geq 6$.

22. Use la inducción matemática para comprobar la fórmula

$$1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

para todo $n \geq 1$.

23. Para $n \geq 1$ demuestre que

    a) $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ si y sólo si $0 \leq k < \frac{n+1}{2}$.

    b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ si y sólo si n es impar y $k = \frac{n+1}{2}$.

24. Para $2 \leq k \leq n-2$ demuestre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}, \qquad (n \geq 4).$$

25. Para $n \geq 1$ demuestre las siguientes identidades:

    a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$. (Sugerencia: aplique el teorema binomial con con $a = b = 1$.)

    b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

    c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$. (Sugerencia: desarrolle $n(1+b)^{n-1}$ según el teorema binomial y haga $b = 1$, note que $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.)

    d) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$.

    e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$. (Sugerencia: Use a) y b).)

Capítulo 4

CONTANDO CON LA TEORÍA COMBINATORIA

Hasta ahora, al trabajar con conjuntos no hemos tenido en cuenta el orden ni la naturaleza de sus elementos. Sin embargo, el estudio de este tipo de detalles tiene gran interés en la Matemática (y por tanto en la vida real) y se conoce con el nombre de Teoría Combinatoria.

La Teoría Combinatoria nos provee de métodos de conteo para determinar, por ejemplo, de cuántas maneras diferentes se puede ordenar un conjunto, o extraer subconjuntos ordenados o no.

Estudiaremos aquí algunos resultados básicos de la Teoría Combinatoria.

4.1. El principio fundamental de conteo

Supongamos que disponemos de m objetos y queremos formar con ellos todos los n-úplos ordenados posibles. Surgen naturalmente las preguntas ¿cómo proceder para obtenerlos todos? ¿cuántos n-úplos se obtienen?

Veamos el caso particular de un ejemplo: Deseamos formar todas las palabras de cuatro letras en un alfabeto que solo contiene las letras A, B y C.

La forma lógica de proceder es la siguiente:
Formamos primero todas las palabras que comienzan con la letra A, es decir, $A\ \_\ \_\ \_$.
Hemos reducido el problema ahora a determinar las palabras de tres letras de ese alfabeto.
Para ese nuevo problema, procedemos del mismo modo, o sea, fijamos en el primer lugar una letra, por ejemplo, la misma A ($A\ \_\ \_$). Nuevamente reducimos así el problema. Se trata ahora de hallar todas las palabras de dos letras.

Repitiendo el procedimiento, obtenemos todas las palabras que comienzan con la letra A:

$$\begin{aligned}
&AAAA, AAAB, AAAC,\\
&AABA, AABB, AABC, AACA, AACB, AACC,\\
&ABAA, ABAB, ABAC, ABBA, ABBB, ABBC, ABCA, ABCB, ABCC,\\
&ACAA, ACAB, ACAC, ACBA, ACBB, ACBC, ACCA, ACCB, ACCC.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora la letra A inicial por las letras B y C, obtenemos finalmente todas las palabras buscadas:

$$\begin{aligned}
&BAAA, BAAB, BAAC,\\
&BABA, BABB, BABC, BACA, BACB, BACC,\\
&BBAA, BBAB, BBAC, BBBA, BBBB, BBBC, BBCA, BBCB, BBCC,\\
&BCAA, BCAB, BCAC, BCBA, BCBB, BCBC, BCCA, BCCB, BCCC,\\
&CAAA, CAAB, CAAC,\\
&CABA, CABB, CABC, CACA, CACB, CACC,\\
&CBAA, CBAB, CBAC, CBBA, CBBB, CBBC, CBCA, CBCB, CBCC,\\
&CCAA, CCAB, CCAC, CCBA, CCBB, CCBC, CCCA, CCCB, CCCC.
\end{aligned}$$

Conociendo explícitamente todas las palabras, podemos sencillamente contarlas y concluir que existen 81 palabras de cuatro letras en un alfabeto de tres letras. Pero... ya en este alfabeto tan pequeño, se nota la dificultad de esa manera de contar, pues necesitamos obtener primeramente todas las palabras posibles. Sin embargo, el mismo ejemplo, nos puede dar una idea más simple de contar. Para ello observemos el siguiente esquema de la figura 4.1:

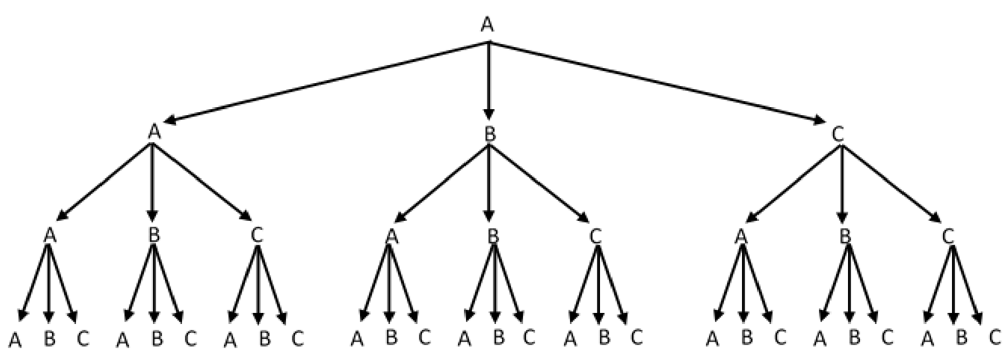


Figura 4.1: Formando palabras de cuatro letras con la primera letra fija.

Al fijar la primera letra de la palabra, ellas se pueden clasificar en tres tipos. Ahora, para cada uno de esos tipos, en el segundo lugar de la palabra puede aparecer nuevamente cualquiera de las tres letras. De esa manera se obtiene una nueva clasificación de las palabras teniendo en cuenta ahora las dos primeras letras. En ella por cada tipo original se obtienen tres nuevos tipos, por lo que tendríamos en total $3 \cdot 3 = 9$ tipos de palabras con las dos primeras letras fijas.

Repetimos el procedimiento para la tercera letra, logrando una nueva clasificación en $9 \cdot 3 = 27$ tipos diferentes de palabras con las tres primeras letras fijas. Restan así finalmente 3 posibilidades de completar la cuarta letra en cada uno de esos tipos, obteniendo finalmente $27 \cdot 3 = 81 = 3^4$ palabras diferentes.

Podemos ahora generalizar para obtener respuesta al problema original.

Con m objetos se pueden formar exactamente m^n n-úplos ordenados.

Esta forma de contar se expresa de manera más general a través del

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO
Si cierta tarea puede realizarse de m maneras diferentes y para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse de $m \cdot n$ formas diferentes.

Veamos un nuevo ejemplo: Deseamos formar todas las palabras de 4 letras *diferentes* en un alfabeto de 5 letras.

Para ello notemos que para la primera letra de cada palabra disponemos de todas las letras del alfabeto dado, es decir, las palabras se clasifican en 5 según su primera letra. Sin embargo, ahora en cada caso disponemos sólo de 4 letras para la segunda posición, por lo que existen $5 \cdot 4 = 20$ variantes de palabras con las dos primeras letras fijas. Del mismo modo, notamos que en cada una de ellas existen sólo 3 letras disponibles para la tercera posición, es decir, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ palabras con las tres primeras letras fijas. Finalmente restan dos letras disponibles en cada uno de esos casos para completar la palabra de cuatro letras, obteniendo así en total $5 \cdot 4 \cdot 3\dot{2} = 120$ palabras de 4 letras en un alfabeto de 5 letras.

¿Puedes generalizar ese resultado al caso de formar palabras de m letras en un alfabeto de n letras?

En los siguientes capítulos estudiaremos las permutaciones, variaciones y combinaciones como formas particulares de conteo.

4.2. Permutaciones

4.2.1. Definición y conteo de permutaciones

Definición 4.2.1

Se llama ***permutación de orden*** *n a todo conjunto ordenado de n elementos diferentes.*

Ejemplo: Si consideramos un conjunto de cuatro personas $\{A, B, C, D\}$ que se deben sentar en cuatro sillas numeradas, podemos seguir el mismo procedimiento que utilizamos en el epígrafe anterior. Así, si representamos la distribución de las personas en los asientos a través del esquema

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix},$$

donde k_1 $(i = 1, 2, 3, 4)$ representa el número de la silla correspondiente a la persona de la fila superior, obtenemos las distribuciones

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Intentemos calcular cuántas permutaciones de orden n se pueden obtener. Denotemos por P_n al número buscado. El principio fundamental de conteo nos será de gran utilidad para ello.

Si escribimos cada uno de los ordenamientos como vectores de n elementos diferentes, representando a estos (para simplificar) como los números naturales desde 1 hasta n, se observa que existen n formas posibles de cubrir la primera posición de los vectores. Para cada una de ellas existen $n - 1$ formas posibles de cubrir la segunda posición, es decir, hay $n(n - 1)$ formas de cubrir las posiciones 1 y 2. Nuevamente, para cada una de ellas existen $n - 2$ maneras posibles de cubrir la tercera posición.

Repitiendo el proceso y aplicando el principio fundamental de conteo, se obtiene:

Si denotamos por P_n al número de permutaciones de orden n, entonces se cumple

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

La expresión $n!$ se lee "n factorial" y se adopta el acuerdo $0! = 1$.

Definición 4.2.2

Si en una permutación dada se intercambian los lugares de dos elementos, se obtiene una nueva permutación. Ese proceso se llama ***transposición****. (Nótese que todas las permutaciones de orden n se pueden ordenar de manera que cada nueva permutación sea una transposición de la anterior, partiendo de cualquier permutación inicial.)*

Si definimos un orden original de los n elementos

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

*como permutación inicial (****ordenamiento natural****), entonces se dice que un reordenamiento*

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n})$$

de esos elementos es una permutación ***par (impar)*** *del ordenamiento natural si se obtiene a partir de ésta por un número par (impar) de transposiciones.*

Ejemplo: En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, el ordenamiento original $(1, 2, 3, 4)$ es una permutación par, pues se obtiene con 0 transposiciones.

Veamos la permutación $(4, 2, 1, 3)$: En ese caso, el siguiente esquema muestra las transposiciones realizadas:

$$(1, 2, 3, 4) \to (4, 2, 3, 1) \to (4, 2, 1, 3).$$

Es decir, primeramente se intercambian los elementos 1 y 4 y luego se intercambian los elementos 1 y 3. Así, se observa que se han realizado 2 transposiciones, por lo que estamos en presencia de una permutación par. Asimismo, el siguiente esquema muestra que la permutación $(4, 1, 2, 3)$ es impar, pues para obtenerla se realizan 3 transposiciones:

$$(1, 2, 3, 4) \to (2, 1, 3, 4) \to (4, 1, 3, 2) \to (4, 1, 2, 3).$$

Con el objetivo de facilitar el trabajo se acostumbra a indexar los elementos del conjunto dado $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y denotar las permutaciones de sus elementos a través de los índices de los mismos. El ordenamiento natural $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se denota $(1, 2, \ldots, n)$. Cada nueva permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ con $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se relaciona con esta a través del esquema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, como todas las permutaciones se pueden ordenar partiendo del ordenamiento natural de manera que cada nueva permutación sea una transposición de la anterior, entonces cada transposición cambia la paridad de una permutación. Por lo tanto, existe la misma cantidad $\left(\frac{n!}{2}\right)$ de permutaciones pares e impares de orden n.

Así queda también garantizado que dos permutaciones de igual paridad sólo se pueden obtener una a partir de la otra a través de un número de transposiciones con la misma paridad.

El conocido juego del 15 o taken, surgido en la década del 1870, es una muestra de la importancia de esta última afirmación. Se trata de la conocida cajita cuadrada con 15 fichas numeradas (del 1 al 15) en desorden, que deben ser ordenadas moviéndolas en la cajita. En el juego original las fichas se encuentran dispuestas en el orden correcto, excepto las 14 y 15 y se trataba de corregir y restablecer el orden consecutivo de estas últimas.

Veamos su historia extraída de la novela “El pretendiente norteamericano” de Mark Twain:

> “En 1880, la fiebre del juego alcanzó, por lo visto, el punto culminante. Pero poco después, el tirano fue derribado y reducido por las armas de las matemáticas. Las investigaciones matemáticas acerca de este juego descubrieron que de los numerosos problemas que en él pueden plantearse, sólo la mitad tiene solución y los restantes no hay modo de resolverlos.”
>
> “Quedó claro por qué algunos problemas no se rendían ni aún a los esfuerzos más tenaces, y por qué los organizadores de torneos se decidían a establecer premios exorbitantes para la solución de esos problemas. El inventor dio ciento y raya a todos, proponiendo al editor de un rotativo de Nueva York, para el suplemento dominical, un problema insoluble, y ofreciendo un premio de 1000 dólares [1] al que lo resolviera. Al ver que el editor vacilaba, el inventor manifestó estar dispuesto a facilitar la cantidad indicada de su propio bolsillo. El inventor se llamaba Samuel Lloyd, y los ingeniosos problemas y numerosos rompecabezas de que es autor le habían dado gran popularidad. Es curioso que no pudiera adquirir en Norteamérica la patente del juego inventado por él. De acuerdo con las disposiciones vigentes, debía presentar un modelo de su juego, para que se pudiera verificar una partida de prueba. Propuso al empleado de patentes un problema, y al preguntarle éste si el problema tenía solución, el inventor hubo de contestar:
>
> - No, de acuerdo con las matemáticas, es imposible de resolver.

[1] 1000 dólares era una cantidad exorbitante para la época

- En ese caso -replicó el funcionario-, no puedo admitir este modelo, y, por consiguiente, no puede haber patente.

Lloyd conformóse con la resolución, pero seguramente hubiera insistido más, de haber previsto el inaudito éxito que había de alcanzar su invención."

Veamos por qué el inventor plantea que, de acuerdo con las matemáticas, es imposible resolver el problema original.

Nótese que se puede reconocer fácilmente a cualquier distribución de las fichas en la cajita como una permutación del conjunto numérico $\{1, 2, \ldots, 14, 15\}$. (Aquí surge automáticamente la pregunta de si es posible obtener tantas distribuciones de fichas como permutaciones, pero su respuesta exige mayores conocimientos del Álgebra Superior y no es nuestro interés actual el responderla.)

De ese modo la distribución inicial que se propone en el juego corresponde a la permutación $(1, 2, 3, \ldots, 15, 14)$, que es obviamente una permutación impar (obtenida a partir del ordenamiento natural por una única transposición al intercambiar los números 14 y 15), mientras que la distribución final corresponde al ordenamiento natural, que es una permutación par. Esto justifica la afirmación de Lloyd sobre la insolubilidad del problema, dado que es imposible obtener una permutación par a partir de una impar.

4.2.2. Permutaciones circulares

Hasta ahora hemos ordenado los elementos de un conjunto en una permutación imaginándolos colocados sobre una línea recta. Pero, ¿qué sucede si los imaginamos colocados sobre una circunferencia (es decir, sobre una curva cerrada, sin principio ni fin)? (ver figura 3.2)

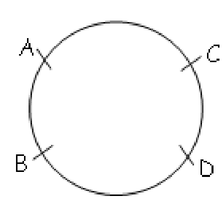


Figura 4.2: Ordenamiento circular.

Aquí las circunstancias cambian de manera radical, pues el orden relativo de los elementos no varía si se realiza una traslación.

Ejemplo: Si consideramos nuevamente el conjunto de cuatro personas que se deben sentar en cuatro sillas numeradas, sin importar ahora la silla particular en que se siente la primera persona, sino solamente el orden relativo entre ellos, entonces se reduciría significativamente el número de permutaciones. En ese caso, por ejemplo, no se diferencian entre sí las permutaciones

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eliminando las permutaciones iguales, observamos que las cuatro personas se pueden sentar en las 6 formas

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como se puede observar, para calcular el número P'_n de las permutaciones circulares de orden n, basta fijar un elemento sobre la circunferencia y elegir uno de los dos sentidos posibles de movimiento, permutando entonces de todas las maneras posibles a los n elementos restantes (como permutaciones lineales). De ese modo se obtiene

Si denotamos por P'_n al número de permutaciones circulares de orden n, entonces se cumple

$$P'_n = (n-1)!.$$

Nótese que, conociendo todas las permutaciones circulares de orden $n-1$, se pueden obtener todas las de orden n, insertando en cada una de ellas al nuevo elemento en todas las posiciones posibles ($n-1$ posiciones), por lo que se obtiene la relación de recurrencia

$$\boxed{P'_n = (n-1)P'_{n-1},}$$

que también demuestra la afirmación anterior.

4.3. Variaciones sin repetición

DEFINICIÓN 4.3.1

Se llama ***variación (sin repeticiones) de orden*** m ***de*** n ***elementos*** *(para* $m \leq n$*) a todo conjunto ordenado de* m *elementos diferentes seleccionados entre los* n *elementos originales.*

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Los subconjuntos de 3 elementos de A son

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

y sus posibles ordenamientos son

$$\begin{array}{c}
\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{3,2,1\},\\
\{1,2,4\},\{1,4,2\},\{2,1,4\},\{2,4,1\},\{4,1,2\},\{4,2,1\},\\
\{1,3,4\},\{1,4,3\},\{3,1,4\},\{3,4,1\},\{4,1,3\},\{4,3,1\},\\
\{2,3,4\},\{2,4,3\},\{3,2,4\},\{3,4,2\},\{4,2,3\},\{4,3,2\},
\end{array}$$

los cuales constituyen todas las variaciones de clase 3 de 4 elementos. Nótese que son 24 variaciones.

Al igual que en el caso de las permutaciones, calculemos cuántas variaciones de orden m de n elementos existen. Sea para ello V_m^n el valor buscado.

Es fácil comprobar que $V_1^n = n$, pues sólo existen n formas de extraer 1 elemento del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Para obtener una relación recursiva, intentemos expresar a V_{m+1}^n partir de V_m^n.

Si se desean extraer $m + 1$ elementos $(m < n)$ del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, se procede seleccionando primero m elementos, para los cuales existen variaciones V_m^n. Pero para cada una de esas variaciones restan $n - m$ elementos en A, que pueden completar la posición $m + 1$. Expresando esto matemáticamente se tiene

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
V_1^n & = & n \\
V_{m+1}^n & = & (n-m)V_m^n.
\end{array}}$$

Nótese que entonces es

$$\begin{array}{rcl}
V_1^n & = & n \\
V_2^n & = & (n-1)V_1^n = (n-1)n \\
V_3^n & = & (n-2)V_2^n = (n-2)(n-1)n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
V_m^n & = & (n-m+1)V_{m-1}^n = (n-m+1)(n-m+2)\cdots(n-1)n,
\end{array}$$

por lo que, utilizando la notación factorial ya conocida, se obtiene

$$\boxed{V_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

Ejemplo: En un salón con 8 asientos entran 5 personas ¿de cuántas maneras pueden sentarse?

Evidentemente se trata en este caso de determinar el número de conjuntos ordenados de 5 sillas diferentes, el cual es

$$V_5^8 = \frac{8!}{(8+5)!} = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720.$$

En particular se observa que si $m = n$, entonces las variaciones de clase m de n elementos coinciden con las permutaciones de n elementos. Así, se obtiene la relación

$$\boxed{V_n^n = P_n = n!.}$$

4.4. Combinaciones sin repetición

Definición 4.4.1

Se llama ***combinación (sin repeticiones) de orden*** m ***de*** n ***elementos*** *($m \leq n$) a cualquier subconjunto de m elementos diferentes seleccionados entre los n elementos originales. (En este caso dos conjuntos con los mismos elementos en orden diferente se consideran iguales). El número de estas combinaciones se denota por C_m^n.*

Ejemplo: Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Entonces (observe el ejemplo del epígrafe anterior), todos las combinaciones de clase 3 de 4 elementos son

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}.$$

Para calcular el valor de C_m^n, observemos que si de un conjunto de n elementos se pueden extraer C_m^n subconjuntos de m elementos (sin atender al orden), entonces cada uno de ellos se puede ordenar de maneras diferentes, obteniendo así todos los subconjuntos ordenados de m elementos. Así se obtiene $V_m^n = C_m^n P_m$, es decir

$$\boxed{C_m^n = \frac{V_m^n}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}.}$$

Obviamente es $C_0^n = V_0^n = 1$. Recordemos que los números $\binom{n}{m}$ se conocen como coeficientes binomiales, por constituir los coeficientes de la representación del cuadrado de la suma de dos números (teorema del binomio)

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}.}$$

Los coeficientes binomiales cumplen las siguientes propiedades

(i)	$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m};$
(ii)	$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1};$
(iii)	$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$

Nótese que la última propiedad indica que de un conjunto de n elementos, se pueden extraer en total 2^n subconjuntos.

Demostración:

(i)

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} \\
&= \frac{n!}{(m+1)!(n-m)!}((m+1)+(n-m)) \\
&= \frac{n!}{(m+1)!(n-m)!}(n+1) \\
&= \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(+1)m)!} = \binom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

(iii) Por inducción:

Paso 1: ($n = 1$) Es obvio que

$$\sum_{m=0}^{1} \binom{1}{m} = \binom{1}{0} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2 = 2^2.$$

Paso 2: (Hipótesis de inducción) Sea

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

Paso 3: (Tesis de inducción) Queremos demostrar que .

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} = 2^{n+1}.$$

Se cumple

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} + 2 = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m+1} + 2.
\end{aligned}$$

Pero por la propiedad (ii) se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m+1} &= \sum_{m=0}^{n-1} \left[\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} + \binom{n}{n} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} - \binom{n}{0} \\
&= 2\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} - 2
\end{aligned}$$

Aplicando entonces la hipótesis de inducción, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m+1} + 2 \\
&= \left(2\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} - 2 \right) + 2 \\
&= 2\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},
\end{aligned}$$

que es lo que se deseaba demostrar. **Q.e.d.**

4.5. Permutaciones con repeticiones

Sea ahora $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n elementos, que son solamente de m tipos diferentes, de manera que no se desea diferenciar a los elementos de un mismo tipo. Se conoce que existen k_i elementos del tipo i ($i = 1, \ldots, m$), por lo que $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Por ejemplo, en el conjunto decimos $A = \{p, p, q, r, p, r\}$ que

- p es elemento del tipo 1 ($\Longrightarrow k_1 = 3$),
- q es elemento del tipo 2 ($\Longrightarrow k_2 = 1$),
- r es elemento del tipo 3 ($\Longrightarrow k_3 = 2$).

Definición 4.5.1

Llamamos ***permutación con repeticiones de la especificación*** *$(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ de n elementos a cualquier ordenamiento de un conjunto del tipo antes mencionado.*

Ejemplo: Si $A = \{p, p, q, r, p, r\}$, cualquier palabra formada con esas 6 letras es una permutación con repeticiones de la especificación $(3, 1, 2)$ del conjunto A.

Surge naturalmente entonces la pregunta sobre cuántas palabras de 6 letras se pueden formar exactamente con los elementos de ese conjunto. O más general,
¿Cuántas permutaciones con repeticiones de la especificación $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ de n elementos existen?

Para responder a esa pregunta denotemos por $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ al número buscado.

Veamos qué sucede en el caso del ejemplo anterior, es decir, calculemos $C_6(3, 1, 2)$ en $A = \{p, p, q, r, p, r\}$. Para ello nos apoyaremos en lo ya conocido sobre permutaciones. Construimos un nuevo conjunto B a partir de A seleccionando en éste un elemento de cada tipo y completando con elementos nuevos diferentes a los anteriores y diferentes entre sí. Por ejemplo,

$$B = \{p, q, r, x, y, z\}.$$

Entonces el total de ordenamientos posibles de B es $P_6 = 6!$.

Por otra parte, existen $k_i!$ formas posibles de sustituir en A un elemento del tipo k_i ($i = 1, 2, 3$) por elementos diferentes entre sí. Por ejemplo, para p (tipo 1, $k_1 = 3$) se tienen los tríos

$$(p, x, y), (p, y, x), (x, p, y), (x, y, p), (y, p, x), (y, x, p).$$

Por lo anteriormente planteado se obtiene entonces

$$C_6(3, 1, 2) \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! = 6!,$$

por lo que

$$C_6(3, 1, 2) = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}.$$

De manera general se cumple

$$\boxed{C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}.}$$

Esta relación también permite resolver el problema de representar un conjunto de n elementos como unión de m conjuntos disjuntos.

Sea un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos diferentes. Deseamos particionar a este conjunto en la forma

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m,$$

tal que $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $card(B_i) = k_1$, siendo $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Para ello trabajamos de la siguiente forma:

Construimos B_1 seleccionando k_1 elementos de A, para lo cual existen $C^n_{k_1}$ variantes. De los $n - k_1$ elementos restantes construimos el conjunto B_2 seleccionando k_2 elementos de A, para lo cual existen $C^{n-k_1}_{k_2}$ variantes. Repitiendo el proceso obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} C^n_{k_1} C^{n-k_1}_{k_2} \cdots C^{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}_{k_m} &= \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}{k_m} \\ &= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!} = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m). \end{aligned}$$

Los números $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ se conocen como **coeficientes polinomiales**, por constituir los coeficientes para el cálculo de la potencia n-ésima de la suma de m números

$$\boxed{(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}.}$$

En el caso particular $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ se deduce de aquí

$$\boxed{\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = m^n,}$$

y, por tanto, para $m = 2$ se obtiene el ya conocido resultado

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.}$$

4.6. Variaciones con repeticiones

DEFINICIÓN 4.6.1

Se llama **variación con repeticiones de orden** m **de** n **elementos** *a todo conjunto ordenado de* m *elementos no necesariamente diferentes seleccionados de un conjunto de* n *elementos diferentes originales.*

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2\}$. Los conjuntos ordenados de 3 elementos (aceptando la repetición) de A formados a partir de A son

$$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,2,1\}, \{1,2,2\},$$
$$\{2,1,1\}, \{2,1,2\}$$

los cuales constituyen todas las variaciones con repeticiones de orden 3 de 2 elementos. Nótese que son 8 variaciones.

Para determinar el total de variaciones con repeticiones de orden m de n elementos, sea VR_m^n el valor buscado.

Al trabajar de manera ordenada, observamos que ya hemos desarrollado un análisis similar en el epígrafe dedicado al principio fundamental del conteo. Como el conjunto original tiene n elementos diferentes, existen n posibilidades de ocupar la primera posición de cada conjunto a formar. Para la segunda posición disponemos nuevamente de n elementos pues "se vale" la repetición. Esto se repite en la tercera posición y en todas las posiciones siguientes hasta la número m. Entonces es

$$\boxed{VR_m^n = n^m.}$$

Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar en un alfabeto de 6 letras?

En este caso se acepta la repetición de letras en las palabras, de modo que calculamos el número de variaciones con repeticiones de clase 4 de 6 elementos, el cual es

$$VR_4^6 = 6^4 = 1296.$$

4.7. Combinaciones con repeticiones

DEFINICIÓN 4.7.1

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *de* n *elementos y un número natural , se llama* **combinación con repeticiones de orden** m **de** n *elementos a cualquier subconjunto de* A *(sin atender al orden), siendo válida la repetición de al menos uno de sus elementos.*

Ejemplo: Del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se tienen las combinaciones con repeticiones de orden 2

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}.$$

Si denotamos por f_m^n al número total de combinaciones con repeticiones de clase m de n elementos, se cumple

$$\boxed{f_m^n = \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}.}$$

Demostración: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n elementos. Como en este caso no interesa el orden, ordenamos los elementos de cada combinación de manera que los repetidos queden juntos. Ahora, asignamos a cada combinación con repetición de clase $m \leq n$ una sucesión de ceros y unos de la siguiente manera:

Colocamos un número 1 por cada elemento y rellenamos con ceros como "fronteras" entre los bloques de elementos iguales. Por ejemplo, en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\{1, 1\} &\longrightarrow 1100,\\
\{1, 2\} &\longrightarrow 1010,\\
\{1, 3\} &\longrightarrow 1001,\\
\{2, 2\} &\longrightarrow 0110,\\
\{2, 3\} &\longrightarrow 0101,\\
\{3, 3\} &\longrightarrow 0011.
\end{aligned}$$

Como se puede observar, a cada combinación corresponde una combinación de m unos y $n-1$ ceros.

Por otro lado, esa correspondencia es biunívoca, es decir, a cada bloque compuesto por m unos y $n-1$ ceros corresponde una combinación con repeticiones de clase m de n elementos.

Entonces se trata de contar cuántos bloques de m unos y $n-1$ ceros se pueden formar. Para ello basta contar las posibilidades de ordenar n unos en $n+m-1$ posiciones, las cuales son las combinaciones de clase m (o de clase $n-1$) de $n+m-1$ elementos. Así es

$$f_m^n = C_m^{n+m-1} = \binom{n+m-1}{m} = C_{n-1}^{n+m-1} = \binom{n+m-1}{n-1}.$$

Q.e.d.

Para el número de permutaciones con repeticiones se deduce de la propiedad (ii) de los coeficientes binomiales la siguiente relación de recurrencia

$$\boxed{f_m^n = f_{m-1}^n + f_m^{n-1}.}$$

4.8. Ejercicios propuestos

1. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si se dispone de un alfabeto con dos letras?

2. ¿Cuántas chapas de auto diferentes existen hay con dos letras a la izquierda y tres números a la derecha?

3. ¿Cuántas banderas bicolores se pueden formar si se dispone de cuatro colores distintos y un asta? ¿y si no se tiene en cuenta el asta?

4. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en cinco sillas numeradas?

5. Determine todas las permutaciones de las cinco letras A, B, C, D, E.

6. Calcule P_8 y P_{12}.

7. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los jugadores de un equipo de béisbol? ¿Cuántas posibilidades existen si el lanzador y el receptor son fijos?

8. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 8 llaves en un llavero?

9. ¿Cuántas parejas (de diferente sexo) se pueden formar con 10 mujeres y 10 hombres?

10. ¿Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de la palabra PERMUTACION?

11. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 9 personas alrededor de una mesa?

12. En las 6 permutaciones de las letras A, B, C, señale las pares y las impares, siendo ABC el ordenamiento natural.

13. En las 24 permutaciones de los números 1, 2, 3, 4, señale las pares y las impares, siendo 1234 el ordenamiento natural.

14. Demuestre que la suma de los números formados por todas las permutaciones de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 es igual a 279999720. Generalice el resultado.

15. Demuestre que $P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \ldots P_1 + 1$.

16. Forme todas las variaciones de orden 2 de 6 elementos.

17. Forme todas las variaciones de orden 3 de 4 elementos.

18. Calcule V_5^7, V_4^{10}, V_6^{13}.

19. Si de La Habana a Santiago de Cuba corren seis ómnibus ¿de cuántas maneras se puede hacer el viaje de regreso tomando al regreso un ómnibus distinto al de ida?

20. ¿De cuántas maneras se pueden depositar cuatro cartas en siete buzones, no depositando más de una carta en cada buzón?

21. Halle el número de señales que se pueden hacer con 5 banderas pudiendo izar cada vez una, dos o tres banderas.

22. Con cierto número de objeto se han formado variaciones de orden 3 y se sabe que el número de variaciones es 42 veces el número de objetos ¿cuántos objetos son?

23. Halle el valor de n conociendo que $V_5^n = 56V_3^n$.

24. Demuestre que $V_2^{15} = V_4^8$.

25. Demuestre que $V_6^8 = 4P_7$.

26. Una habitación tiene cinco puertas ¿de cuántas maneras puede una persona entrar y salir por puertas diferentes?

27. Un ramal de ferrocarril tiene 30 estaciones, cada una de las cuales expide boletos a las demás estaciones ¿Cuántas clases de boletos se deben imprimir?

28. ¿Cuántos números menores que 1000 que no tengan cifras repetidas pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

29. Forme las combinaciones de orden 2, 3 y 4 de las letras A, B, C, D, E.

30. Forme las combinaciones de orden 3 y 4 de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6.

31. Calcule C_5^8, C_6^{10}, C_{12}^{15}.

32. Calcule el número de rectas de unión de 7 puntos de un plano, tres de los cuales nunca están en línea recta.

33. Calcule el número de rectas de unión de n puntos de un plano, tres de los cuales nunca están en línea recta.

34. En un plano hay 12 puntos, pero 4 de ellos están en línea recta. Determine el número de las rectas de la unión.

35. ¿Cuántos planos determinan 20 puntos, si nunca 4 de ellos están en el mismo plano ni 3 en línea recta? ¿Y n puntos en las mismas condiciones?

36. Calcule n sabiendo que $C_{10}^n = C_9^n$.

37. Halle el valor de n conociendo que $5C_5^n = C_n^n$.

38. Si hay 10 personas elegibles ¿de cuántas maneras puede formarse un comité de 4? ¿Y si una de las personas debe formar siempre parte del comité? ¿Y si una de las personas se excluye siempre?

39. ¿Cuántas manos de 6 cartas pueden darse con una baraja de 52 cartas?

40. Se desea formar un equipo mixto de 3 mujeres y 3 hombres y hay elegibles 8 mujeres y 6 hombres ¿de cuántas maneras puede formarse?

41. ¿Cuántos saludos de manos se realizan en una reunión de 18 personas, si se supone que dos personas estrechan sus manos exactamente una vez?

42. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con n puntos de un plano, tres de los cuales nunca están en línea recta?

43. Demuestre que
$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{p}\binom{n}{0} + \binom{m}{p-1}\binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{0}\binom{n}{p}.$$

44. Demuestre que si n es un número primo y $0 < p < n$, entonces $\binom{n}{p}$ es divisible por n.

45. Demuestre que
$$\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n} = \frac{P_n^{n-1}}{(P_1P_2\cdots P_{n-1})^2}.$$

PARA PROFUNDIZAR ...SUGERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bueno;E; García,L.: *Introducción a la Lógica Matemática.* IPN, México. 1997.
- Ferrater Mora,J.; Leblanc,H.: *Lógica Matemática.* Fodo de Cultura Económica. México. 1971
- González,M.O.; Mancill,J.D.: *Álgebra Elemental Moderna.* Vol I. Editorial Pueblo y Educación. 1968
- Graham,r.l., Grötschel,M, Lovász, L.: *Handbooks of Combinatorics.* Vol I. Elsevieer Science. Netherlands. 1995
- Graham,r.l., Grötschel,M, Lovász, L.: *Handbooks of Combinatorics.* Vol II. Elsevieer Science. Netherlands. 1995
- Kneebone,G.T.: *Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics. An Introductory Survey.* D Van Nostrand Company LTD, Canafá. 1963
- Lipschutz,S.: *Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos Temas Afines.* McGrau Hill, Chile. 1990
- Merris,R.: *Combinatorics.* Segunda edición. Wiley Interscience, EU. 2003
- Steen, S.W.P.: *Mathematical Logic with Special Reference to the Natural Numbers.* Cambridge University Press. London. 1962.

RESPUESTAS Y SUGERENCIAS A LOS EJERCICIOS

Elementos muy elementales sobre conjuntos

1. *a*) $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\}$
   b) $B = \{10, 20, 30, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N};\ n = 10k,\ k \in \mathbb{N}\}$
   c) $C = \{11, 13, 17, 19, 23, \ldots\} = \{xN;\ x \text{ es primo y } x > 10\}$
   d) $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ es primo y } x < 30\}$
   e) $E = \{6, 10, 12, 14, 18, 20, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N};\ x = 2k \text{ y } x \neq 2^m,\ k, m \in \mathbb{N}\}$
   f) $F = \{2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ es primo o } x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$
   g) $C \cap D = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ es primo y } 10 < x < 30\}$
   h) $D \cap F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} = D$
   i) $B \cup E = \{6, 10, 12, 14, 318, 20, \ldots\} = E$
   j) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 11, \ldots, 19, 21, \ldots\}$
   $= \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 0yx \neq 10m,\ m \in \mathbb{N}\}$

2. Demostrar que $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y $A\Delta B \supseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. *a*) $A \cup B = \{2, 3, 5, \{7\}, \{4, 5\}\},\ \ A \cap B = \{3\},\ \ A \setminus B = \{5, \{7\}\}$,
   $\wp(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{\{7\}\}, \{3, 5\}, \{3, \{7\}\}, \{5, \{7\}\}, A\}$,

   $\wp(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{2, 3\}, \{2, \{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}, B\}$.
   b) i) V, ii) F, iii) V, iv) F, v) V.

4. a) V, b) V, c) F, d) V.

5. Aplicar la definición de subconjunto.

6. *a*) $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N};\ n = 2m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
   $3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N};\ n = 3m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$,
   $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N};\ n = 6m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

b) Aplicar la definición de subconjunto y de mínimo común múltiplo.

7. La relación de inclusión propia no cumple las propiedades de reflexividad, ni antisimetría, pero es transitiva.

8. *a*) $C \subset B$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$.

   b) i) $A \cap C$, ii) $B \setminus C$, iii) $A \setminus B$, iv) $A \cup C$.

   c) (i) Conjunto de todos los deportistas de atletismo que tienen medalla de oro en Olimpiadas,

   (ii) Conjunto de todos los deportistas en Olimpiadas, que no compiten en atletismo,

   (iii) Conjunto de los medallistas de oro olímpico que no tienen medalla en atletismo y de los medallistas de atletismo olímpico que no tiene medalla de oro,

   (iv) Conjunto de todos los deportistas que no son de atletismo y tienen medalla de oro en Olimpiadas.

9. *a*) i) $(A \cap B) \subseteq C$, ii) $B \setminus C \neq \emptyset$, iii) $C \setminus A \neq \emptyset$, iv) $A \setminus B \neq \emptyset$.

   b) (i) Hay deportistas de atletismo que no tienen medalla en Olimpiadas,

   (ii) Todos los medallistas de atletismo en Olimpiadas compiten en el atletismo olímpico,

   (iii) Todos los deportistas que no compiten en atletismo no son medallistas de atletismo en Olimpiadas.

10. Utilizar los diagramas de Venn.

11. Ejemplo: Ley de D'Morgan 7.1 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

    Demostración: Si $x \in (A \cup B)^c$, entonces $x \notin A \cup B$. Ello implica que $x \notin A$ y $x \notin B$; es decir $x \in A^c$ y $x \in B^c$, por lo que $x \in A^c \cap B^c$. Con esto se comprueba que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. La inclusión inversa se obtiene desarrollando el mismo análisis en sentido inverso y de ambas inclusiones se deduce que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Q.e.d.

12. Considere verdadera una de las afirmaciones y demuestre las restantes, apóyese en los diagramas de Venn.

13. *a*) Aplicar la ley de D'Morgan 7.1 y la ley de complemento 6.3.

    b) Aplicar la ley de D'Morgan 7.1 y la ley de complemento 6.3.

    c) Aplicar la ley de D'Morgan 7.1 y la ley de complemento 6.3.

    d) Aplicar la ley asociativa 2.1, la ley conmutativa 3.1. la ley de complemento 6,1 y la ley de idempotencia 1.1.

14. Utilizar que $a - b > 0$ y $c - d > 0$ y sumar ambas desigualdades.

15. $a \cdot 0 = a(1-1) = a \cdot 1 - a \cdot 1 = 0.$ Q.e.d.

16. Sea r racional y s irracional. Si fuera $r+s$ racional, sería r racional por ser diferencia de dos números racionales, lo que niega la hipótesis. Q.e.d.

17. Asumir que $\sqrt{2}$ es racional y expresarlo como cociente de enteros primos relativos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $mcd(p,q) = 1$. Cocluir que, contradictoriamente, p y q son números pares.

18. Asumir que no se cumple para cierto intervalo entre dos números racionales y concluir que entonces no se cumple en $\mathbb{R}$, por lo que no existirían los números irracionales.

19.
    a) FALSO. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ es racional.
    b) VERDADERO. Asumir que el producto es racional y obtener una contradicción.
    c) FALSO. $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ es racional.

Recordando lo básico de relaciones y funciones

1.
    a) Es función, $A = \mathbb{R}, \quad B = [-2,2];$
    b) Es función, $A = \mathbb{R}^2, \quad B = \mathbb{R}_+ \cup \{0\};$
    c) No es función, $A = \mathbb{R}^2, \quad B = \mathbb{R};$
    d) No es función, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 3\}, \quad B = [-3,3];$
    e) No es función, $A = \mathbb{R}, \quad B = [-a,a]^2;$
    f) Es función, $A = \mathbb{R}^2, \quad B = [-1,1] \times [-4,4].$

2.
    a) $Dom = \mathbb{R}, \quad Im = [1,+\infty);$
    b) $Dom = \mathbb{R}^2, \quad Im = [0,+\infty);$
    c) $Dom = \left(-\frac{5}{4},+\infty\right), \quad Im = \mathbb{R};$
    d) $Dom = \mathbb{R}^2, \quad Im = \mathbb{R};$
    e) $Dom = \mathbb{R}^2, \quad Im = (-\infty,0];$
    f) $Dom = \mathbb{R}, \quad Im = (4,+\infty);$
    g) $Dom = \mathbb{R}, \quad Im = (-4,4);$
    h) $Dom = \mathbb{R}, \quad Im = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right];$
    i) $Dom = \mathbb{R}, \quad Im = (-\infty,1];$
    j) $Dom = (-\infty,8], \quad Im = [0,21].$

3. *a*) $(f\circ g)(x) = \operatorname{sen}^2 x+1$, $(g\circ f)(x) = \operatorname{sen}(x^2-1)$, $Dom(f\circ g) = Dom(g\circ f) = \mathbb{R}$;

   b) $(f\circ g)(x) = \sqrt{\cos x - 1}$, $(g\circ f)(x) = \cos\sqrt{x-1}$, $Dom(f\circ g) = \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $Dom(f\circ g) = [1, +\infty)$;

   c) $(f\circ g)(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x} + 1$, $(g\circ f)(x) = \frac{1}{3x^3-2x+1}$, $Dom(f\circ g) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $Dom(f\circ g) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

   d) $(f\circ g)(x) = |x-3|+2$, $(g\circ f)(x) = ||x|-1|$, $Dom(f\circ g) = Dom(f\circ g) = \mathbb{R}$;

   e) $(f\circ g)(x) = \cos^3 x$, $(g\circ f)(x) = \cos x^3$, $Dom(f\circ g) = Dom(f\circ g) = \mathbb{R}$.

4. *a*) $f = x^2$, $g(x) = 3x-1$;

   b) $f = 3^x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$;

   c) $f = \ln x$, $g(x) = \cos\frac{x}{3}$;

   d) $f = \cos x$, $g(x) = x^{-x^2}$;

   e) $f = x^2$, $g(x) = \tan\frac{x}{2}$.

5. a) crece, b) decrece, c) crece, d) crece; e) decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$, f) crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$, g) crece, h) decrece, i) crece en $(1, +\infty)$, j) crece en $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

6. *a*) Inyectiva, estrictamente creciente, no acotada ni inferior ni superiormente, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{7}$;

   b) No es inyectiva, por lo que no es invertible, estrictamente decreciente en $(-\infty, o0)$ y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, acotada inferiormente, no superiormente;

   c) No es inyectiva, por lo que no es invertible, estrictamente creciente, acotada inferiormente, no superiormente;

   d) Inyectiva, estrictamente creciente, no acotada ni inferior ni superiormente, $f^{-1}(x) = 4e^x$;

   e) Inyectiva, estrictamente creciente, acotada inferiormente, no superiormente; no acotada ni inferior ni superiormente, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\log_2 x$;

   f) Inyectiva, estrictamente creciente, no acotada ni inferior ni superiormente, $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Elementos “informales” de la Lógica Formal

1. *a*) Si Juan llegó antes que Pedro y Pedro llegó antes que José, entonces Juan llegó antes que José,

b) Si Juan no llegó antes que Pedro, Juan llegó al mismo tiempo que Pedro y Pedro llegó antes que José, entonces Juan llegó antes que José,

c) Si Juan llegó al mismo tiempo que Pedro y Pedro llegó antes que José, entonces Juan llegó antes que José,

d) Si Juan llegó antes que José o Juan llegó al mismo tiempo que José, entonces de que Pedro llegara antes que José y Juan llegara antes que Pedro se deduce que Juan llegó antes que José,

e) Si Juan llegó antes que Pedro, Juan llegó al mismo tiempo que Pedro y Pedro llegó antes que José, entonces se cumple que Juan no llegó antes que Pedro, Juan llegó al mismo tiempo que José y Pedro llegó antes que José, o que Juan no llegó al mismo tiempo que José y Juan llegó antes que José.

2. *a*) No hace frío,

   b) Está lloviendo si y sólo si hace frío,

   c) No hace frío y no está lloviendo,

   d) Hace frío y está lloviendo,

   e) Si hace frío, entonces no está lloviendo,

   f) Hace frío si y sólo si no está lloviendo,

   g) Hace frío o está lloviendo,

   h) Hace frío o no está lloviendo,

   i) Si Hace frío y no está lloviendo, entonces hace frío.

3. a) $p \wedge q$, b) $p \wedge \neg q$, c) $\neg(\neg p \vee \neg q)$, d) $\neg p \wedge \neg q$, e) $p \vee (\neg p \wedge q)$, f) $\neg(p \vee \neg q)$.

4. a) V, c) F, d) V.

5. a) tautología, b) cumplible, c) contradicción, d) tautología.

6. Utilice las tablas veritativas.

7. a) $\neg p \wedge q$, b) $\neg p \wedge \neg q$, c) $\neg p \vee q$, d) $p \vee q$, e) $(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$, f) $\neg p \wedge q$.

8. a) tautología, b) tautología, c) cumplible, d) tautología, e) cumplible, f) cumplible, g) cumplible.

9. a) Falsa, b) No se puede deducir, c) No se puede deducir, d) Verdadera.

10. *a*) p,

    b) p,

    c) Juan nunca va a la Universidad,

d) Pedro no está en primer año,

e) Su hipotenusa mide 5cm,

f) 24 no es un número primo

11. a) Verdadera, b) Verdadera, c) Verdadera, d) Verdadera, e) Verdadera, f) Verdadera.

12. *a*) $\forall x \in \mathbb{R};\ |x| \neq x$,

    b) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq x$,

    c) $\forall x \in \mathbb{R}; 2x \neq x$,

    d) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x - 2 \neq 0$,

    e) $\exists x \in \mathbb{R}; x + 1 \leq x$,

    f) $\exists x \in \mathbb{R}; 2x + 3x \neq 5x$.

13. *a*) $\forall x \in A$, x practica deportes,

    b) $\exists x \in A$; x no practica deportes,

    c) [$\exists x \in A$; x no asiste regularmente a clases] $\Rightarrow$ x tendrá dificultades en el curso regular,

    d) [$\forall x \in A$; x no está enfermo] $\Rightarrow$ [$\forall x \in A$; x asiste regularmente a clases]

14.

BARCO	CAPITÁN	TONELAJE	CONSECUENCIA
Concepción	Quesada	90	Incendió
San Antonio	Cartagena	120	Abandonado
Santiago	Serrào	75	Naufragó
Trinidad	Magallanes	110	Capturado
Victoria	Elcano	85	Regresó

15.

OBRA	AUTOR	AÑO	ACTIVIDAD
Cruz Roja	Dunant	1859	Filántropo
Ejército de Salvación	Booth	1878	Pastor
Hospital	Schweitzer	1913	Organista
Homeopatía	Hahnemann	1811	Médico
Rayos X	Röntgen	1895	Físico

16.

EMPLEADO	ORIGEN	ADMIRABA	DE	LADRÓN
Cocinera	Nantes	Elefante	Jade	SI
Mayordomo	Limoges	Dragón	Ebano	NO
Chofer	Lyon	Mandarín	Marfil	NO
Mucama	Angulema	Aguila	Alabastro	NO
Secretaria	Tours	Serpiente	Oro	NO

17. 1.

18. Usar el primer principio de inducción.

19. Usar el segundo principio de inducción matemática y $a^{n+1} - 1 = (a+1)(a^n - 1) - a(a^{n-1} - 1)$.

20. Usar la sugerencia $n^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$.

21. Demuestre que $n! > n^2$ para todo entero $n \geq 4$, mientras que $n! > n^3$ para todo entero $n \geq 6$.

22. Usar el principio de inducción.

23. Usar el principio de inducción.

24. Usar el principio de inducción.

25. Usar el principio de inducción.

Contando con la Teoría Combinatoria

1. 8 palabras.

2. Considerando que nuestro alfabeto tiene 27 letras se concluye que existen

$$27 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 729000$$

chapas diferentes.

3. Si consideramos el asta, el orden en que se toman los colores es importante, por lo que 12 banderas. Si no consideramos el asta, no interesa el orden de los colores, por lo que la cantidad de banderas se reduce a la mitad, es decir 6 banderas.

4. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas.

5. ABCDE, ABCED, ABDCE, ABDEC, ABECD, ABEDC, ABCDE, ABCED, ABDCE, ABDEC, ABECD, ABEDC, ACBDE, ACBED, ACDBE, ACDEB, ACEBD, ACEDB, ADBCE, ADBEC, ADCBE, ADCEB, ADEBC, ADECB, AEBCD, AEBDC, AECBD, AECDB, AEDBC, AEDCB, ACDE, BACED, BADCE, BADEC, BAECD, BAEDC, BCADE, BCAED, BCDAE, BCDEA, BCEAD, BCEDA, BDACE, BDAEC, BDCAE, BDCEA, BDEAC, BDECA, BEACD, BEADC, BECAD, BECDA, BEDAC, BEDCA, CABDE, CABED, CADBE, CADEB, CAEBD, CAEDB, CBADE, CBAED, CBDAE, CBDAE,

CBEAD, CBEDA, CDABE, CDAEB, CDBAE, CDBEA, CDEAB, CDEBA, CEABD, CEADB, CEBAD, CEBDA, CEDAB, CEDBA, DABCE, DABEC, DACBE, DACEB, DAEBC, DAECB, DBACE, DBAEC, DBCAE, DBCEA, DBEAC, DBECA, DCABE, DCAEB, DCBAE, DCBEA, DCEAB, DCEBA, DEABC, DEACB, DEBAC, DEBCA, DECAB, DECBA, EABCD, EABDC, EACBD, EACDB, EADBC, EADCB, EBACD, EBADC, EBCAD, EBCDA, EBDAC, EBDCA, ECABD, ECADB, ECBAD, ECBDA, ECDAB, ECDBA, EDABC, EDACB, EDBAC, EDBCA, EDCBA, EDCBA.

6. $P_8 = 8! = 25920$, $P_{12} = 12! = 282298800$.

7. De $P_9 = 9! = 233280$ formas. Si el lanzador y el receptor son fijos de $P_7 = 7! = 5040$ formas.

8. De $P_8' = 7! = 5040$ formas.

9. Se obtienen $P_{10} = 10! = 2332800$ formas, mediante el arreglo

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_{10} \\ H_1 & H_2 & \dots & H_{10} \end{pmatrix}.$$

10. $P_{11} = 11! = 259601100$ permutaciones.

11. Si sólo importa la relación entre ellos, de $P_{10}' = 9! = 233280$ formas. Si es importante la silla que ocupa cada cual, de $P_{10} = 10! = 2332800$ formas.

12. PARES: ABC, BCA, CBA;

    IMPARES: ACB, BAC, CAB

13. PARES: 1234, 1342, 1423, 2143, 2314, 2413, 3124, 3241, 3421, 4132, 4231, 4312;

    IMPARES: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2431, 3142, 3214, 3412, 4123, 4213, 4321

14. Demostración: Al colocar las 720 permutaciones una sobre otra para sumarlas, se observa que en cada columna aparecen los seis números la misma cantidad de veces, es decir, $\frac{720}{6} = 120$ veces. Por tanto, cada columna por sí sola suma

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)120 = 2520.$$

Para hallar la suma de todas de toas las permutaciones, la escribimos en forma decimal

$$S = \sum_{k=0}^{5} C_k 10^k, \quad C_k \in \{0, 1 \dots, 9\},\ k = 1, 2, 3, 4,\ C_5 \in \mathbb{N}.$$

Entonces, al sumar la última columna se obtiene $C_0 = 0$ y queda un resto $R_0 = 252$. Para calcular C_1 adicionamos a la suma de la columna correspondiente el resto R_0, es decir $2520+252 = 2772$, obteniendo así $C_1 = 2$ y el resto $R_1 = 277$. De manera análoga se obtiene

$$\begin{aligned}
2520 + 277 = 2797 &\Rightarrow C_2 = 7, \quad R_2 = 279,\\
2520 + 279 = 2799 &\Rightarrow C_3 = 9, \quad R_3 = 279,\\
2520 + 279 = 2799 &\Rightarrow C_4 = 9, \quad R_4 = 279,\\
2520 + 279 = 2799 &\Rightarrow C_5 = 2799.
\end{aligned}$$

Entonces el valor total de la suma es 279999720. Q.e.d.

Generalizando en el caso de las permutaciones de $1, 2, \ldots, n$: En cada columna aparece el número k ($k = 1, \ldots, n$) $\frac{P_n}{n}$ veces, por lo que la columna sola suma $(1 + 2 + \ldots + n)\frac{P_n}{n} = \frac{(n+1)!}{2}$. Entonces la suma de todas las permutaciones es

$$S = \frac{(n+1)!}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \frac{(n+1)!}{2}(\underbrace{11\ldots11}_{n\text{veces}}).$$

15. Demostración por inducción:

    Paso 1 ($n = 2$): $P_2 = 2! = 2 = 1 + 1 = 1P_1 + 1$.

    Paso 2 (hipótesis de inducción): Sea $P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \ldots P_1 + 1$.

    Paso 3 (tesis de inducción): Queremos demostrar que

$$P_{n+1} = nP_n + (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \ldots P_1 + 1.$$

    Desarrollando es

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (n+1)! = (n+1)P_n = nP_n + P_n\\
&= nP_n + (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \ldots P_1 + 1.
\end{aligned}$$

    Q.e.d.

16. $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$, $(6,1)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,2)$, $(4,2)$, (5,2), (6,2), $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,3)$, $(5,3)$, $(6,3)$, (4,5), (4,6), (5,4), $(6,4)$, $(5,6)$, $(6,5)$.

17. $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$,(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2), $(4,2,1)$, $(2,3,4)$, (2,4,3), $(3,2,4)$, $(3,4,2)$, $(4,2,3)$, $(4,3,2)$.

18. $V_5^7 = 2520$, $V_4^{10} = 5040$, $V_6^{15} = 3603600$.

19. $V_2^6 = 30$.

20. $V_4^7 = 840$.

21. $V_1^5 + V_2^5 + V_3^5 = 85$.

22. $n = 8$.

23. $n = 11$.

24. Demostración:

$$\begin{aligned} V_2^{15} &= \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = 14 \cdot 15 \\ V_4^8 &= \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 14 \cdot 15. \end{aligned}$$

Q.e.d.

25. Demostración:

$$\begin{aligned} V_6^8 &= \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 4(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \\ 4P_7 &= 4 \cdot 7! = 4(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7). \end{aligned}$$

Q.e.d.

26. 20.

27. $V_3^{30} = 870$.

28. $V_1^6 + V_2^6 + V_3^6 = 156$.

29. ORDEN 2: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

    ORDEN3: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

    ORDEN 4: ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE.

30. ORDEN 3: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

    ORDEN 4: 1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456.

31. $C_5^8 = 56$, $C_6^{10} = 210$, $C_{12}^{15} = 405$.

32. $C_2^7 = 21$.

33. $C_2^n = \frac{(n-1)n}{2}$.

34. $C_2^{12} - C_2^4 + 1 = 61$.

35. $C_3^{20} = 1140$, $C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

36. $n = 19$.

37. $n = 5$.

38. En general de $C_4^{10} = 210$ maneras. Si una de las personas forma siempre parte del comité, de $C_3^9 = 84$ maneras. Si una de las personas se excluye siempre, de $C_4^9 = 126$ maneras.

39. $C_6^{52} = 20358520$ manos.

40. De $C_3^8 C_3^8 = 1120$ maneras.

41. $C_2^{18} = 153$ saludos.

42. $C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triángulos.

43. El miembro izquierdo representa el número de combinaciones de orden p de $m+n$ objetos. Considerando que existen m objetos de tipo 1 y n objetos de tipo 2, determinamos dichas combinaciones separándolas de la siguiente manera

Combinaciones con	Total
p objetos de tipo 1 y 0 objetos de tipo 2	$\binom{m}{p}\binom{n}{0}$
$p-1$ objetos de tipo 1 y 1 objeto de tipo 2	$\binom{m}{p-1}\binom{n}{1}$
...	...
0 objetos de tipo 1 y p objetos de tipo 2	$\binom{m}{0}\binom{n}{p}$

Sumando todos estos casos se obtiene la igualdad deseada. Q.e.d.

44. Multiplicando $\binom{n}{p}$ por $p!$ se tiene

$$p!\binom{n}{p} = (n-p+1)(n-p+2)\cdots(n-1)n.$$

Evidentemente n divide al miembro derecho de esta igualdad, por lo que n divide a $p!\binom{n}{p}$. Pero n es un número primo y $0 < p < n$, entonces n no divide a $p!$. De aquí se deduce finalmente que $\binom{n}{p}$ es divisible por n. Q.e.d.

45. Note que

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n} = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n-1},$$

pues $\binom{n}{n} = 1$. Desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{n!}{(n-1)!1!} \\
&= \frac{P_n}{P_1 P_{n-1}}\frac{P_n}{P_2 P_{n-2}}\cdots\frac{P_n}{P_{n-1}P_1} \\
&= \frac{(P_n)^{n-1}}{(P_1 P_2 \cdots P_{n-1})^2},
\end{aligned}$$

quedando así demostrado que

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n} = \frac{P_n^{n-1}}{(P_1 P_2 \cdots P_{n-1})^2}.$$

Q.e.d.

ANEXO (PROBLEMAS PARA REFRESCAR)

Para la diversión, agregamos este anexo con un listado de problemas eextraidos de la conocida revisat de entretenimientos "Logic", que retan el pensamiento lógico.

Juegos de Lógica

1. DELIRIUM TREMENS: Estos tres caballeros son tan, pero tan borrachines, que ya han superado la etapa de los elefantes rosados. Deduzca qué vio cada uno después de beber cuántas copas de qué... ¡Hip!

   a) Arias (que no bebió vino) vio animales rojos volando.

   b) El adicto a la cerveza (que bebió más que Carlés) vio leones.

   c) Carlés (que vio animales azules) bebió dos copas menos que Arias

   d) Quien bebió 15 copas de gin no vio a los cocodrilos, ni a los otros animales que jugaban póker.

   e) Los que iban bailando no eran lagartos.

   f) Farías es el tercer borrachín.

   g) Entre los tres se bebieron 45 copas y el más borrachín bebió 4 copas más que el menos borrachín.

2. NUEVOS VALORES: Uno de nuestros cronistas asistió a un certamen para jóvenes compositores e intérpretes de música clásica y consiguió una cantidad de datos como para que usted, melómano empedernido, descubra en qué obra se lució cada participante.

   a) Las chicas tocaron "Invierno" (que no es de Cevasco) y el tema de Alberti. Los chicos, el de

   b) Flórez y el compuesto para flauta.

   c) Verónica (que no tocó el tema de Montero) es pianista.

d) "Verano" no es una obra para piano, y no fue tocada por Esteban.

e) "Primavera" es para guitarra.

f) Las obras se llaman como las estaciones del año.

g) Una de las obras es para violín.

h) Tomás y Gabriela son dos de los intérpretes.

3. DESPERTARES: Festejando sus bodas de plata, varias parejas se alojaron en cierto hotel. Para agasajar a su esposa, cada caballero pidió que, en el día del aniversario, la dama fuera despertada de un modo especial con su canción predilecta, algo rico y una flor. Deduzca las relaciones correctas.

    a) La Sra. Durañona (que no bebió té) no recibió la rosa.

    b) Las canciones de Barbra Streisand y Sinatra no fueron pedidas por el Sr. Boschi, ni por quién ordenó frutas.

    c) Cierta dama halló una camelia junto a la taza de café.

    d) Las mujeres que bebieron té y leche tibia recibieron flores rojas. La Sra. Calvo y quien despertó con la canción de Mina recibieron flores blancas.

    e) El Sr. Alves y quién pidió un níveo jazmín solicitaron las canciones de Aznavour y Sinatra (aunque no necesariamente en ese orden).

    f) Una señora recibió un clavel.

4. UN PASO AL MÁS ALLÁ: Durante los próximos meses serán lanzadas cinco naves espaciales no tripuladas, a fin de recabar información que contribuya a determinar el rigen del universo. Establezca en qué mes será lanzada cada nave, qué planeta visitará y qué estudiará en ese desconocido lugar.

    a) La nave FGHIJ será lanzada con destino a Urano, no en abril.

    b) No es LMNOP (que partirá después que la FGHIJ) ni VWXYZ la astronave que estudiará la atmósfera de Saturno.

    c) En enero será lanzada una nave hacia Neptuno, donde examinará los minerales.

    d) No se estudiará la vida animal ni la vegetal de Júpiter.

    e) En mayo será lanzada la nave QRSTU. No examinará la vida animal.

    f) La nave QRSTU puede ser la que visitará Plutón o la que estudiará los minerales.

    g) No es VWXYZ la cosmonave que será lanzada en marzo hacia Júpiter.

    h) Las naves serán lanzadas en los 5 primeros meses del año.

    i) Una de las naves estudiará el plegamiento de un planeta.

    j) La nave ABCDE participará en estos estudios.

5. DECORACIÓN DE INTERIORES: El oficio de decorador no es fácil. Y más se dificulta si uno tiene una memoria frágil como la mía. A veces tengo miedo de confundirme y llevar a mis exquisitos clientes artículos que desentonen con el estilo pedido. Esta semana por ejemplo, agendé mal los datos. Ayúdeme a salvar el empleo resolviendo este enigma.

    a) En el dúplex tengo que hacer una decoración que imite el interior de un buque, es decir, un

    b) estilo "marinero". Echagüe (cuya vivienda no es la 60 m2) me pidió que usara un estilo pos moderno.

    c) Los Colombres tiene una casa quinta.

    d) La vivienda de Araóz es 10 m2 menor que la de Echagüe, pero 20 m2 mayor que el chalet.

    e) La reforma en estilo antiguo no es para la vivienda de 40 m2.

    f) La superficie del departamento no es ni de 70 m2 ni de 50 m2.

    g) El señor Dalmaso, que no es propietario del chalet, me pidió la decoración hindú.

    h) Una de las familias se llama Biondi.

    i) Una de las viviendas mide 30 m2.

    j) Una de las familias tiene una casa.

    k) Una de las familias me solicitó un estilo "indígena".

6. LA MÚSICA NO TIENE IDIOMAS: El lenguaje de la música es universal, sólo se requiere sensibilidad para comprenderlo. Estos maestros de distintas nacionalidades supieron expresarlo así. Deduzca de dónde eran, en qué año nacieron y cuál fue su obra.

    a) Los músicos cuyos apellidos comienzan con "S" nacieron en 1824, 1865 y 1874. Los otros dos compusieron "Isabel de Austria" y "Jerusalem".

    b) Sus nombres eran: del austriaco, Arnold; del checo, Federica; del flamenco, Francisco; del autor de "Jerusalem", Edmund; y el de "Vals triste", Juan. Dos de ellos se apellidaban Sibelius y Turpin.

    c) El flamenco falleció joven, a los treinta y seis años, y el checo a los sesenta; los otros fueron más longevos: el de 1835 a los setenta y dos; el de 1865 a los noventa y dos; y el de 1874 a los setenta y siete.

    d) "La novia vendida" se estrenó en 1866.

    e) Pourbis nació antes que el inglés, y el otro de 1865 antes que el austriaco. Uno de los músicos nació en 1545.

    f) Smetana murió en Praga, capital de su patria (Checoslovaquia), internado en un manicomio.

g) Schönberg falleció en 1951, y el autor de "Vals triste" en 1957.

h) Uno de los músicos era finlandés y una de las obras fue "La mano feliz".

7. LOS INFILTRADOS: Hartos de ser ahuyentados por el portero del edificio, varios vendedores ambulantes esperaron pacientemente y lograron entrar junto con otros visitantes "autorizados". Deduzca con quién y qué ofreció a cada vecino.

   a) Moreno vende aspiradoras.

   b) Don Valentín atendió a Núñez.

   c) Luis no atendió al vendedor de perfumes, ni al otro que entró con el médico.

   d) El que llamó a la puerta de Pedro (pero no para venderle discos) entró con la contadora.

   e) Carola reprendió a su mucama por dejar entrar al extrañó que intentó venderle libros (que no era Paunero).

   f) Oviedo y el que ofreció corbatas a una señora entraron junto con hombres.

   g) Una decoradora y un pintor ayudaron a entrar a dos de los vendedores.

   h) Una de las vecinas se llama Graciela y uno de los vendedores es López

8. ESPERANDO AL CLIENTE: En una empresa de fletes los conductores esperaban su turno para realizar un viaje ¿qué carga le había tocado en suerte a cada chofer, qué turno tenía en la espera y qué familia era dueña del mobiliario que debía transportar?

   a) El que tenía el primer turno fue a casa de los Vedia, y el segundo transportó el espejo.

   b) El que llevó la cama tenía su turno después que Porfirio y Victorino, y antes que los que fueron a las casa de Lozano y de Roldán.

   c) Modestino se llevó lo más pesado (el piano), pero a los que estaban tercero y cuarto y al que fue a la casa de Drago les correspondió una carga más liviana.

   d) Crisólogo (que cargó lo de Roldán) tenía un turno posterior a los que llevaron la cama, el espejo y las sillas.

   e) Porfirio y quien llevó el espejo eran los empleados más antiguos.

   f) Uno de los conductores se llama Saturnino. Y uno de los muebles era una mesa.

   g) La familia Mujica esperaba impacientemente la llegada de su mueble.

9. VAMOS AL GRANO: Estas plantas, cuyos granos se emplean en la alimentación, también tienen otros usos. Deduzca cuáles son los otros usos, de dónde son originarias y en qué clima se desarrollan mejor.

    a) La planta más alta es aquella de donde se obtiene el almidón: 4 metros. La de clima diverso mide 1,50 metros; la avena: 1,30 metros; el arroz: 1 metro; y la de Oriente: 60 centímetros.

    b) Las que además se emplean en cerveza y forraje resisten la poca humedad; las de clima caluroso y tropical necesitan agua; y la avena, riego moderado.

    c) El maíz requiere clima tropical. Es originario de México y fue introducido en Europa por Colón.

    d) El trigo es originario de Asia, el arroz de la India y una tercera planta de Abisinia. De la cebada se obtiene cerveza. La otra planta que también se emplea en bebidas es de clima variado.

    e) Una de las plantas tiene además empleo en la Química.

    f) Una de las plantas se desarrolla en clima templado.

10. VESTIDOS CODICIADOS: Son los que tienen “puestos” estos animalitos y por los cuales son ávidamente perseguidos. Entérese, resolviendo este enigma, de cuál es el color de cada valioso pelaje, de qué se alimenta y dónde vive cada uno de ellos en estado salvaje.

    a) Las tres variedades de pelaje pardo pertenecen a la marta, la nutria y el zorro; las otras dos especies habitan en lagos y montañas.

    b) Los que viven en ambientes acuáticos (lagos y ríos) se alimentan, uno con cangrejos y el otro con peces. Uno de ellos es la nutria.

    c) La marta y la nutria son de origen europeo; el de pelaje pardo rojizo y los que se alimentan de cangrejos y raíces son americanos.

    d) La chinchilla y la marta son las más pequeñas. De ambas, la de pelaje gris es de menor tamaño que la otra y se alimenta con huevos.

    e) La piel de nutria es más abrigada que la de color pardo negruzco.

    f) El zorro es astuto, y el que vive en bosques es agresivo.

    g) El visón tiene hasta ocho crías, y el que habita en montañas hasta tres.

    h) De los animales uno tiene pelaje castaño, uno se alimenta de aves y uno habita en las praderas (pueden coincidir o no)

11. INFALIBLES: Cuando de pronosticar el clima se trata, nuestro abuelo desconfía de globos, satélites y demás artefactos meteorológicos y se dedica, simplemente, a observar el comportamiento de algunas de las aves de su granja. Deduzca qué indica cada bípedo.

a) La urraca hace su indicación a medianoche, pero no revoloteando.

b) Según lo que cierta ave haga por la madrugada, 24 horas más tarde hay niebla. Cuando otra canta insistentemente, soplará el viento.

c) La lechuza aletea con rapidez.

d) El ave que da su señal al atardecer no es el cuervo ni la otra que camina de un lado a otro, ni una tercera cuya actitud presagia que hará mucho calor.

e) El palomo (que no grazna) anuncia lluvias, pero no por la mañana, ni al mediodía.

f) El ave que grazna no anuncia heladas.

g) Las siguientes pistas se refieren al valor veritativo de ciertas combinaciones: Cuervo-Grazna=Mañana-Canta, Calor-Aletea=Mirlo-Viento, Palomo-Atardecer=Helada-Medianoche, Lechuza-Madrugada Lluvia-Atardecer

12. EN TODOS LOS FRENTES: Tras el ataque de los japoneses a Pearl Harbor, EE.UU. entró en la Segunda Guerra Mundial. Lucharon en todos los frentes, África, Europa y en los océanos. Deduzca en qué frente combatieron estos militares, en qué año nacieron y en qué año murieron.

    a) Eisenhower, Mac Arthur y Patton fueron generales; los otros dos almirantes. Estos últimos combatieron, uno en el Atlántico y otro en el Pacífico. Uno de ellos fue King.

    b) De los dos que naciero en 1885, uno fue Nimitz y el otro falleció en 1945.

    c) Los que fallecieron en la década del 60 estuvieron en Filipinas, en el Pacífico y en Sicilia. Los otros dos fueron Patton y quien nació e 1878. Uno de ellos combatió en Marruecos.

    d) Eisenhower recibió la capitulación de Alemania, y el que estuvo en Filipinas, la del Japón. Este último fue asistido por quien falleció en 1966.

    e) Mac Arthur fue comandante en jefe de las fuerzas aliadas, y el que murió en 1969 lo fue del desembarco en Normandía. De estos dos, el primero falleció a los ochenta y cuatro años y el segundo a los setenta y nueve.

    f) Dos de los militares nacieron en 1880 y 1890 y dos (no tienen que coincidir) fallecieron en 1956 y 1964.

13. LA RUTA DE LAS ESPECIAS: La búsqueda de un paso marítimo a Las Indias fue durante décadas el desvelo de los europeos, en pos de las especias. Estas variedades son algunas de ellas ¿conoce usted el color de las flores, la altura que alcanzan y qué otro usos tiene además de exquisito condimento?

    a) La canela y la pimienta son más altas que las que tiene uso en farmacia, medicina y tintorería.

b) Una de ellas es la mostaza.

c) Las de flor amarilla y la purpúrea tiene solamente un uso adicional; la de flor verdosa no tiene otro uso; pero el azafrán también se emplea en confitería, y la canela para preparar esencias.

d) La de flor blanca (que alcanza los 8 metros) es originaria de Ceilán.

e) La que se emplea en farmacia es más alta que las de flor amarillenta y la purpúrea.

f) Las dos plantas más pequeñas (40 cm y 50 cm) son el jengibre y la usada en tintorería. De ambas, la de flor purpúrea es algo más alta.

g) Una de las flores alcanza 1 metro de altura y la mayor llega a los 10 metros.

h) En el sahumerio tiene aplicación la canela o la pimienta.

14. PARA TODOS LOS GUSTOS: Toda vez que las luces de un cien se apagan, los espectadores se acomodan en sus butacas y la fantasía comienza. Unos prefieren la acción, otros la música, aquellos divertirse, pero todos emocionarse ¿De qué género eran estas películas y quiénes formaron pareja en ellas?

a) Jacqueline Bisset, Jane Fonda y Julie Adams actuaron en la de acción, en la musical y en la de suspenso. Las otras dos hicieron pareja con Franco Nero y Robert Mitchum. Una de ellas fue Sandra Miles.

b) Richard Crenna, Robert Mitchum y Robert Redford interpretaron la de acción, la musical y el drama. Los otro dos hicieron "Apuesta Fatal" y "Colmillo Blanco". Uno de ellos fue John Voight.

c) "Apuesta Fatal" fue dirigida por Maximilian Schell; "La estrella" por Robert Wise; "La Hija de Ryan" por David Lean; la de Jane Fonda por Sidney Polack; la de Virna Lisi por Lucio Fulci.

d) "Colmillo Blanco", en base a la novela de Jack London, fue una producción italiana en la que trabajó Franco Nero.

e) En "La estrella" (que era musical), no actuaron Robert Redford ni Jacqueline Bisset. Una de las películas fue "El Jinete Eléctrico" y una (no necesariamente la misma) fue del género de aventuras.

15. FUTBOL: Parafraseando a Woody Allen, podríamos decir que en la vida hay dos cosas importantes. Una es el fútbol. Y la otra. . . no tiene importancia Si usted es un lector que sabe gambetear enigmas lógicos, no siga leyendo hasta no resolver este Quién es Quién. O quedará en off side con su conciencia de buen resolverdor. Cada pista consta de dos afirmaciones separadas por una "o". En este caso la disyunción es exclusiva, es decir, exactamente una de las afirmaciones es verdadera y la otra es falsa

a) Mogol hizo una venta por $40 00 o un trato con EE.UU.
b) Patitiesos vendió al portero o al líbero.
c) Manosanta transfirió al defensor o ganó el doble que Tarjeta de Crédito.
d) Tarjeta de Crédito vendió a su defensor o ganó la mitad que Manosanta.
e) Shonofui vendió a su portero o cobró $ 20 00.
f) Patitiesos vendió a su portero o cobró $ 40 000.
g) El precio del centro delantero era de $ 30 000 o Japón compró un jugador por $50 000.
h) EE.UU. pagó $ 20 000 o Inglaterra pagó $ 40 000.
i) Manosanta vendió al centro delantero o hizo su negocio con Francia.
j) Francia adquirió al ala o pagó $10 000.
k) Uno de los equipos hizo un trato con Alemania o con Francia.

16. MI GRAN VENGANZA: Caminando por la Avenida del Olvido vi una empresa de sepelios que se llamaba “Amalia”. Al instante me di cuenta de que, dada la actividad de la empresa, sólo podría tratarse de una cruel venganza con una ex esposa, una suegra o un odioso texto de la secundaria. Inspirado por esta feliz idea dejé mi nuevo trabajo en una prestigiosa revista de juegos y me dediqué a instalar mis propios negocios de venganza. Descubra cuáles y contra quiénes.

a) Los nombres de la armería y de la carnicería no están puestos en “homenaje” a mi ex jefa “Diana”. Otro de mis negocios es una fiambrería.
b) En la carnicería invertí doscientos pesos más que en “Amelia”.
c) Los féretros de mi empresa de sepelios tiene grabados en oro el nombre de una profesora de Geografía.
d) Los 1300 pesos no los puse ni en “Eugenia” ni en “Diana”.
e) Para la suegra, que era un caso importante, destiné más de 1200 pesos.
f) Los 1100 pesos no están en “Beatriz Antigüedades”. Tampoco en la armería.
g) Tanto para mi ex novia como para mi ex jefa invertí más de 1100 pesos.
h) En mi venganza contra Cristina gasté mis últimos 1200 pesos.
i) Dediqué uno de mis negocios a una molesta vecina.
j) Mi menor inversión fue de 1000 pesos y la mayor de 1400 pesos.

17. VIAJE A LAS ESTRELLAS: En una misión tan secreta que ni siquiera los mismos que la planearon se enteraron de sus existencia, se decidió mandar cinco naves exploradoras al espacio. Descubra sus destinos, objetivos y años de retorno a partir de las pistas de la computadora

a) La nave que va a Beta traerá energía. Otra nave se dedicará al estudio del espacio.

b) Sólo dos naves irán a un planeta con la misma inicial que su nombre. La que buscará seres extraterrestres y la que regresará en el 3300.

c) La cantidad de siglos a esperar entre la llegada de "Clarke" hasta la nave que transportará agua es menor que la de Lambda hasta la que trasportará agua.

d) "Asimov" no irá a Alfa. Otras naves son "Bradbury" y " Le Guin".

e) La nave "Dick" tiene por destino el planeta Omega. El objetivo de la nave que regresará 100 años más tarde serán los minerales.

f) Una de las naves visitará el planeta Delta.

g) Las naves retornarán con 100 años de diferencia entre ellas entre el 3000 y el 3400.

18. ESPERANDO LA CARROZA: Para "Esperando la Carroza II" se debían conseguir cinco vehículos antiguos. El director, Gregorio Laca Rosa, disponía sólo de 15 000 pesos y de una terquedad y una insistencia sin límites. Ahora usted, con su perspectiva y su astucia sin límites, averigüe cómo Gregorio consiguió los vehículos que necesitaba.

    a) La carroza (que no es la llamada "Alada" ni el otro vehículo que cuesta $ 4000) es más cara que "Einstein" pero más barata que el de cedro.

    b) La cuadriga no se llama "Vanguardia" ni "Felisberta". El vehículo que es $ 1000 más caro que la cuadriga es de ébano, y el que es $ 1000 más barato, de algarrobo.

    c) Ni la carroza ni la carreta valen $ 2000.

    d) La diligencia no es de ébano ni de cedro.

    e) El carro de ruedas doradas vale $ 3000 más que "Vanguardia".

    f) "Come-rutas" no vale $ 4000.

    g) Hay dos vehículos con ruedas doradas: "Einstein" (que no es de algarrobo) y el de roble (cuyo nombre no es "Alada").

    h) Uno de los vehículos es de quiebracha, y uno (no necesariamente el mismo) es un carro.

    i) Los precios de los vehículos varían entre $ 1000 y $ 5000 con $ 1000 de diferencia entre ellos.

19. CUADROS DE UNA EXPOSICIÓN: Pierre Labroché tiene 35 años y es pintor. Sus cuadros sólo convencieron a sus amigos, lo que explica que actualmente sean tan pocos. Su famoso "Cosmos desde lejos", por ejemplo, es un punto

negro sobre todo un lienzo blanco. Sabiendo que de sus amigos, el más alto era pelado, y que dos de los tres restantes hablan latín, pero sólo uno de ellos acostumbra jugar billar (aunque no los sábados) ¿qué es lo que puede usted deducir?

a) "Manchas", que no está pintado en acrílico, es una obra abstracta. Otra obra se llama "Paraguas".

b) "El Cosmos" de acuarela es o bien el cuadro más grande (de 90x100), o bien el más pequeño (de 20x60).

c) El ancho de "Billetes" es igual al largo del pintado al pastel (primero se indica el ancho y después el largo de cada cuadro).

d) La superficie de "Monos" (que no está pintado al pastel) es menor que la superficie del de acrílico (que no mide 60 x 90).

e) Ningún lado del óleo, en estilo impresionista, mide 60 cm. Otra obra es estilo naif.

f) La obra hecha a tinta es surrealista y no mide 30 x 60.

g) El cuadro expresionista no es el más pequeño.

h) Una de las obras mide 40x50.

20. LOS BLUES DE CANAL STREET: Por la ancha Canal Street, la más famosa de New Orleáns, andan siempre algunos atildados yuppies que van oyendo temas de Muddy Waters en sus walk-men. Lo curioso es que, mientras dura su blues favorito, cada caballero pierde la compostura. Deduzca qué hacen.

    a) Ni "Rock Me Baby" ni el tema más largo (que no es "19 Years Old") ponen en trance al "tarareador" Davis, aunque uno de ellos (que no es "19 Years Old") si afecta a Stillson

    b) Kleiner sigue el ritmo de "County Jail". Otro silba "Rosalie" (que es más corto).

    c) El trance de Burton dura algunos segundos menos de 5 minutos, que es exactamente el tiempo que otro pasa chasqueando los dedos.

    d) Hornett baila, y su danza dura exactamente un minuto más que el trance de quien enloquece con "Country Boy".

    e) Los trances duran 3'55", 4'40", 4'55", 5'00", 6'10". Uno de los caballeros chista mientras está en trance.

21. COLAS CULTURALES: Uno de los centros culturales más importantes de nuestro tiempo son las colas. Horas y horas sin tener nada mejor que hacer que escuchar música o leer un libro. Y no es de extrañar que la mayoría de los cadetes y jubilados sean licenciados en historia antigua o doctotes en lenguas muertas. En el caso del aficionado que relata este enigma, su vicio es la literatura. Descubra sus investigaciones del día de ayer.

a) En el Banco Francés hice una hora más de cola que en el que leí a Eluard (que no fue en el Alemán).

b) En el Citibank pagué impuestos.

c) El libro de Rimbaud me llevó un número par de horas, pero no lo tenía encima cuando estuve en el Banco Francés.

d) Para comprar dólares tardé 5 horas, pero no en el Banco Francés.

e) Demoré tanto en la cola del Banco Alemán y en la que leí Balzac (juntas) como en la del Banco Francés y en la que leí a Dostoievski (también juntas).

f) En el Banco Shaw cobré un cheque. Ahí no leí a Eluard ni hice una cola de una hora.

g) Cuando me fui del Banco donde deposité plata, todavía no había leído nada de Stendhal.

h) En el Banco Italia no leí a Balzac.

i) Las colas duraron entre 1 y 5 horas (con una hora de diferencia entre ellas).

j) En uno de los bancos recibí mi tarjeta de crédito.

22. ¡ INVASIÓN !: Durante la última semana han sido vistas numerosas flotillas de OVNIS alrededor del planeta. . . No se deje llevar por el pánico y descubra qué naves sobrevolaron cada continente y qué regiones fueron las elegidas.

    a) En Africa los invasores siguieron el curso de los ríos.

    b) El martes fueron vistos en Asia y el jueves sobrevolaron zonas desérticas.

    c) Los anillos aparecieron sobre los bosques (que no están en Asia) un día después que las naves vistas en América.

    d) Las naves en forma de cigarro sobrevolaron Oceanía un día antes que las que pasaron sobre volcanes.

    e) Las flechas se vieron un día más tarde que los otros OVNIS que recorrieron las praderas.

    f) Las siguientes pistas se refieren al valor veritativo de ciertas combinaciones: Miércoles-Plato=Bosques-Europa, Martes-Volcanes=América-Huevo, Viernes-Anillo=Praderas-Cigarro, Lunes-Oceanía Africa-Flecha

23. NEGOCIOS EN ORIENTE: Cierre los ojos, olvide sus preocupaciones y trepe a nuestra alfombra mágica para espiar lo que sucede en cierto oasis del Oriente Medio, donde se congregan los mercaderes y las caravanas. Asómese, y vea cómo gastan fortunas en regalos para sus favoritas los emires que pasan por allí.

a) Mientras el emir Hassan admira las joyas (que no vende Saladino), en una tienda vecina el sirviente de otro emir regatea con Omar por un regalo para Zaida.

b) No es el emir Zayed (que ama a Amina) quien está comprando el periquito en jaula de oro y perlas.

c) Uno de los príncipes elige personalmente perfumes que llevará a Leila.

d) El emir Alí muestra su adquisición al cliente de Yusuf (que no es el emir Naguib sino el primo del emir Hassan). Ambos ríen imaginando lo halagadas que se sentirán Zaida y Nadia.

e) Mohamed vende bellísimas vasijas de bronce cincelado.

f) Las siguientes pistas se refieren al valor veritativo de ciertas combinaciones: Aladino-Fátima=Saladino-Perfumes, Leila-Emir Naguib= Emir Khalib-Sedas, Alí-Aves Nadia-Joyas

24. DEMASIADOS PRESIDENTES: Tratando de ahuyentar a la prensa de las inmediaciones de la Casa Blanca, donde se realizaban unas reuniones ultra-secretas, los servicios de seguridad simularon -sin demasiado éxito- diversos viajes del presidente Busch, utilizando cada vez a un doble diferente. Descubra usted lo mismo que centenares de periodistas.

    a) Daniel (nombre) partió hacia Boston y Brookes (apellido) (que no vestía de azul) hacia Chicago.

    b) Ni Earl Moore ni el de negro viajaron a Phoenix.

    c) Anderson (nombre) lucía un traje castaño; quien fue a Nueva York uno gris y Daly (apellido), uno beige.

    d) Burton (nombre) fue a Houston.

    e) Las siguientes pistas se refieren al valor veritativo de ciertas combinaciones: Burton Daly=Earl-Chicago, Carson(nombre)-Negro=Houston-Twiny(apellido), Anderson Smith Nueva York-Beige

25. “EL CANDADO” S.R.L: No deje que cualquiera le robe en su negocio. Nosotros lo protegemos de un modo muy eficaz y seguro. Contrate nuestros expertos servicios anti-robos y duérmase tranquilo. Jamás, nadie podrá robarle un centavo o más.

    a) La librería está en la misma manzana que el negocio de Horacio.

    b) La cuenta por la instalación de rejas fue de \$ 50. En otro negocio se instalaron persianas.

    c) Federico, el librero, contrató a un sereno. Iván tiene otro negocio.

    d) Para ir de la joyería al negocio que instaló la alarma hay que cruzar una y sólo una calle.

e) El importador de audio invirtió $ 30 en un amuleto africano.

f) Juana es la dueña del comercio de TV. Otra persona posee una relojería.

g) Graciela gasto $ 40.

h) El dueño de la joyería invirtió el doble de dinero que Horacio.

i) Los servicios más baratos costaron $ 10 y $ 20.

26. Y . . . ¡DÓNDE ESTÁ EL PILOTO?: Son las 12:55 y el personal de aeropuerto se encuentra al borde del colapso, pues aún no se han presentado los pilotos de los próximos vuelos. Descubra usted el paradero de estos irresponsables.

    a) El que estaba duchándose en las instalaciones del aeropuerto no es González (que debe partir hacia Europa en 15 minutos) ni el otro que pilotea el vuelo de la 13:10.

    b) El vuelo de Mariani debe salir antes que el destinado a Japón, pero después que el que va a Suiza. Uno de los vuelos debe ir a Canadá.

    c) Bárcena (que no va a España) aún está en su casa. Uno de los pilotos está en la autopista camino del aeropuerto.

    d) Herrero debe partir 10 minutos después que quien estaba bebiendo en el bar (que no debe salir a las 13:05), pero no hacia España.

    e) Los vuelos deben salir con una diferencia de 5 minutos y el primero debe salir a las 13:00 horas.

27. LA DAMA MELANCÓLICA: Al ver a la pensativa y desconocida mujer que ocupa la mesa vecina, varios caballeros habituales parroquianos de la elegante confitería empiezan a tejer conjeturas sobre los motivos de su melancolía. Descubra qué historia supone cada uno.

    a) Para Monsieur Quenelle, ella piensa en su marido, que ha quedado en Marsella. Monsieur Lavigne, en cambio, sospecha que está preocupada por la enfermedad de alguien.

    b) Otro caballero, mas mundano, cree que añora a alguien que baila en un club cercano al Casino de Montecarlo.

    c) Más romántico, el joven Mouscat supone que ella piensa en su novio mientras otro, de más edad, afirma que se la ve preocupada por pagar los estudios de un hijo.

    d) Orbigny no cree que ella se preocupe por alguna mujer (aunque fuera una amiga), y Rousseau no es el que opina que tiene un conocido trabajando en Lyon.

    e) A uno de los caballeros le parece haberla visto enviando una carta a Niza, destinada a su madre. Alguien la observó telefoneando a Nantes.

f) Uno de los señores cree que alguno de sus familiares masculinos está preso.

28. ¡DISPAREN A MATAR!: Tras perseguir a peligrosos delincuentes, sendos jefes de policía dieron la orden de disparo, ya que los reos no se rindieron ante la policía. Averigüe el alias de cada malhechor, quién fue el policía que disparó y quién el jefe que dio la orden.

    a) Herrera recibió disparos de Nelly. No lo apodan “el maestro”.

    b) Ni Power ni Goldman (jefes de policía) fueron los que le ordenaron a Smith que le disparase a “el tigre”.

    c) Pirker es el jefe de Starker. Fletcher tiene otro jefe.

    d) Garrison no dio la orden de disparo contra Salvati.

    e) Power ordenó a su subordinado (que no es Lee) que le disparase a Fionda.

    f) A Coronda lo llaman “el manco”. Ritz es otro malhechor.

    g) Anderson dio la orden de realizar disparos contra “el bebé”. No los realizó Nelly.

    h) Uno de los malhechores se apoda “el tirador”

29. CONJUGANDO JUGANDO: Gerundio Verboso es un profesor de Español muy estricto, pero simpatiza con aquellos alumnos cuyos nombres y apellidos sugieran una conjugación verbal, aunque cambien los acentos y la ortografía, y los hace sentar juntos. Si usted sabe conjugar, entérese de con quién se sienta cada alumno, y un buen conjugador será.

    a) Las niñas de apellidos Calzada y Porta se sientan más adelante que los niños de apellidos Basile, Freire y Paso.

    b) Los compañeros de banco de Ida, Lidia y Rhonda son más inquietos que Armando y Eligio. Uno de ellos se sienta con Lucía.

    c) Rhonda Parada y la que se sienta con Custodio (nombre) son las más aplicadas.

    d) Alejo Baibiene se sienta delante de Ida y detrás de Porta.

    e) Armando Basile está enamorado de Zubiría (apellido), que se sienta delante suyo.

    f) Lía (nombre) y Porta son las más bonitas.

    g) Ida y la compañera de banco de Paso viven en el mismo edificio.

    h) Una de las niñas se apellida Posadas.

    i) Zacarías es uno de los nombres y Obligado uno de los apellidos de los muchachos.

30. MONEDAS SURTIDAS: Varios turistas hicieron compras en un pequeño negocio de Buenos Aires. Deduzca que sucedió, sabiendo que este "quién es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición. Vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no es la solución. En ese caso, revise lo andado y comience de nuevo.

    a) Si el marinero no gastó \$6, entonces quien compró galletas no pagó con marcos.

    b) Si quien compró galletas no pagó con marcos, entonces los dulces costaron \$6.

    c) Si los dulces costaron \$6, entonces el marinero compró dulces.

    d) Si el cowboy no gastó \$6, entonces quien gastó \$5 pagó con liras.

    e) Si quien gastó \$5 pagó con liras, entonces las revistas fueron pagadas con liras.

    f) Si las revistas fueron pagadas con liras, entonces la anciana pagó con marcos

    g) Si los \$6 no fueron pagados con marcos, entonces el marinero compró dulces.

    h) Si la anciana no gastó \$5, entonces los \$3 fueron pagados con dólares.

    i) Si el niño no gastó \$4, entonces los diarios costaron \$3.

    j) Si el cowboy no pagó con liras, entonces las galletas no fueron pagadas con marcos.

    k) Si algo no fue pagado con dólares, marcos o liras, entonces se pagó con francos.

31. BAULERAS: Las bauleras del sótano están invadidas por plagas y los distintos dueños se acusan incesantemente unos a otros en lugar de solucionar cada uno su problema ¿Puede usted solucionar el problema de estos vecinos? El esquema te ayudará.

    a) La baulera negra tiene pulgas. Otra baulera es de color marrón.

    b) Justo enfrente de la baulera azul del cuarto piso está la del señor Domínguez. Estévez tiene ratas.

    c) Entre la baulera blanca y la del tercer piso, está la del señor Alvarez.

    d) Benítez vive dos pisos más arriba que quien tiene la baulera con cucarachas (que no es Carlez).

    e) Las hormigas están en la baulera del segundo piso. Otra baulera tiene moscas.

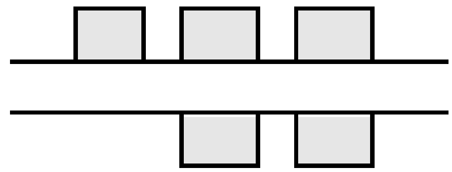


Figura 4.3: Bauleras

f) La baulera gris del quinto piso, que no pertenece a Alvarez, está justo al lado de la Domínguez. Otra baulera es del primer piso.

32. APROXIMACIÓN GALÁCTICA: Estamos en el año 2046 y la órbita de la Tierra acaba de alcanzar una distancia mínima con respecto a otra galaxia, desde la cual arriban a nuestro planeta distintos seres de extraña apariencia ¿De qué planeta llega cada civilización, y cuáles son las características físicas de sus integrantes?

    a) Los que proceden de Oxa y Uxa son pacíficos, mientras que los que tienen cabeza de águila, de león y de toro son temibles guerreros. Unos de ellos proceden de Ixa.

    b) Quienes provienen de Axa, Exa y Oxa tienen patas de mamíferos (Caballo, Gato y Oso); los de cabeza de león tienen patas de rana; y los de tronco de oveja, patas de gallo.

    c) De los que lucen rayas en sus troncos, como la cabra y el tigre, unos tiene cabeza de toro y los otros, patas de gallo. Otros tiene troncos de monos.

    d) Los de Axa son sanguinarios; los de tronco de cebra, astutos; y los de patas de osos, prudentes.

    e) Quienes tienen troncos de cebra y de dragón desprecian a los de Oxa.

    f) Los de Axa, los de cabeza de águila y los de tronco de dragón lucha entre sí intentando la supremacía.

    g) En cambio los de Oxa y los de cabeza de foca conviven pacíficamente con los terráqueos.

    h) Hay seres con cabeza de serpiente.

33. PERSONAJES INOLVIDABLES: Antes de que apareciera la televisión, los héroes emocionaban a la gente a través de las páginas de los libros ¿Qué escritores crearon a estos inolvidables personajes, en qué año nacieron aquellos y cuál fue su longevidad?

    a) Los autores de “Arsenio Lupín” y “Sandokan” fallecieron jóvenes (vivieron 49 o 55 años); Burroughs, Conan Doyle y De Foe vivieron más de 70 años (71, 72 o 75 años).

b) Leblanc era francés; el autor de “Sandokan”, italiano; los nacidos en 1659 y 1859, británicos; y el de 1875, de EE.UU.

c) Quien nació en 1659 falleció en 1731 los 72 años; Burroughs, el otro escritor, autor de “Sherlock Holmes” y los nacidos en 1862 y 1886 fallecieron en nuestro siglo.

d) El creador de “Tarzán” vio publicada su obra en 1914, cuando tenía 39 años.

e) “Robinson Crusoe”, “Tarzán” y el personaje de Conan Doyle fueron traducidos a todos los idiomas.

f) Salgari se suicidó en 1911, a los 49 años, y el más longevo nació en 1875.

34. LOS NOCTÁMBULOS: Cada día, cerca de la medianoche, llegan al café cinco curiosos personajes. Deduzca de qué color viste cada uno y qué hace mientras bebe.

    a) El solitario suele sentarse detrás del que viste de negro (que bebe cognac mientras cabecea vencido por el sueño). Uno de los personajes bebe Whisky.

    b) Quien bebe pernod (que no es el galán de telenovelas ni el otro que viste de marrón) siempre saca una libreta y comienza a escribir.

    c) El poeta (que trata secretamente de descifrar lo que murmura el vagabundo) viste de blanco.

    d) Quien usa el sobretodo beige observa disimuladamente a las damas que pasan por la calle.

    e) Las siguientes pistas se refieren al valor veritativo de ciertas combinaciones: Galán-Cognac=Observa-Azul, Solitario-Escribe=Murmura-Anís, Estudiante-Negro=Gin-Blanco, Poeta-Lee Solitario-Marrón

35. PIN BALL: Ayer batí mi propio record en mi “flipper” preferido, después de perder fortunas en partidas infructuosas. Ordene los datos y descubra dónde fue a para primero cada una de las cinco bolas, haciendo qué ruido y cuántos puntos sumó en ese momento al total.

    a) El ruidito que producen las bandas (en la que no pegó la primera bola) es “puu-puuu”. Los postes producen otro ruido.

    b) Los pistones otorgan más puntaje que cualquier otro “obstáculo”.

    c) Después de la bola que pegó primero en las bandas hubo otra bola más y la siguiente a ésta pegó primero en el blanco.

    d) La bola 4 hizo “¡fuuiiiii!”

    e) La bola que provocó el “rruuiiiu” no marcó 200 puntos en ningún momento.

f) La primera bola empezó marcando más puntaje que la que hizo "tu-tu-tu", pero menos que la que entró en el agujero.

g) Al sonar el "clonch" se acreditaron 400 puntos.

h) La última bola empezó agregando 100 puntos al score.

i) Hubo también puntajes de 300 y de 500.

36. ÚLTIMA FUNCIÓN: El presentador del circo estaba borracho y se equivocó tanto en los elementos con que presentaba a cada profesional como en el orden en que debían actuar. Así, cada uno de ellos se vio obligado a arreglárselas con un objeto que nunca antes había usado. Por otra parte, el enigma sobre qué pasó con el presentador no ha sido resuelto todavía.

    a) Todos los artistas salieron a escena en orden equivocado y actuaron con elementos incorrectos. El equilibrista debía haber actuado con la cuerda floja, el mago con conejos, el payaso con una nariz roja, el fakir con clavos y el tragasables,.. ya se pueden imaginar con qué.

    b) El fakir debía hacer su número después que el payaso.

    c) El tragasables actuó antes que quien se las tuvo que arreglar con la cuerda floja.

    d) El equilibrista tendría que haber sido presentado en segundo lugar.

    e) Quien debía salir en primer lugar y en cambio salió en tercero pudo hacer un buen show con sables.

    f) El payaso fue el primer número de la función.

    g) El que actuó con clavos debía haber sido el último en salir.

37. UNA SEMANA AGITADA: El acalde, juez de paz y jefe de policía de cierto distrito perdido en las montañas ha pasado una semana de aquellas, pues en cada una de las cinco aldeas más apartadas se produjo el secuestro de un animalito entre lunes y viernes. El abnegado funcionario logró atrapar a los culpables cuando se disponían a cobrar el rescate pedido. Descúbralos usted también. Para saber quién desapareció cada día, use los datos de la primera parte ("SECUESTRADOS"). Para enterarse del resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte ("ATRAPADOS"). Anote lo que vaya descubriendo.

    PRIMERA PARTE - SECUESTRADOS

    a) El caso de Monteblanco fue posterior al de Olinda; el de Carboneros posterior al del cerdo.

    b) Samuel desapareció antes que la oveja.

    c) Un día después de la desaparición de la mejor vaca lechera de Manantial, le avisaron que alguien se había llevado a Archibaldo.

d) El miércoles tuvo que resolver el caso de Valleverde.

e) Rebeca vivía en Fuentefría.

f) El burro desapareció el jueves.

g) Clarisa es una cabra muy dócil.

h) Cada nombre se corresponde con el sexo del animal que lo lleva

SEGUNDA PARTE - ATRAPADOS

a) El hijo enojado con su padre fue atrapado bajo el puente.

b) Alguien que no era sobrino del damnificado quería que le entregaran 20 patos cerca del alcornoque de Monteblanco.

c) Un día antes de apresar al secuestrador de Carboneros tras la ermita, el funcionario atrapó a un suegro que pretendía 100 kilos de chorizos.

d) A cambio de Rebeca, alguien pidió que dejaran 15 gallinas en el cementerio.

e) El caso del sobrino fue posterior al del cuñado y al otro en que se exigían quesos.

f) Lo del vecino fue inmediatamente posterior al caso resuelto en la cascada, y este, posterior al caso de los melones.

38. FANTASMAS INVENTADOS: Cinco sinvergüenzas andan por el pueblo contando escalofriantes historias acerca de los fantasmas que pueblan la vieja casona abandonada, pero no les crea: cada uno tiene motivos para ahuyentar de allí a los curiosos. Deduzca qué contó cada uno, dónde y qué oculta. Para asustarse con los fantasmas, use los datos de la primera parte ("¡QUÉ MIEDO!"). Para enterarse del resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte ("¡QUÉ VIVOS!"). Anote lo que vaya descubriendo.

PRIMERA PARTE - ¡QUÉ MIEDO!

a) En la biblioteca tiemblan los cuadros pero no se oyen lamentos.

b) La condesa jamás ha pisado la cocina.

c) Un hombre aparece en el baño y sacude los espejos, pero no es el conde ni el que ríe a carcajadas.

d) El pastor aúlla de un modo horrible.

e) A veces, las sillas del salón comienzan a bailar.

f) Justo a medianoche, se oyen campanas mientras tiemblan las lámparas.

g) La cocinera aparece acompañada por música de violines.

h) Al amanecer, la sombra del cochero recorre el dormitorio.

i) En algún lugar de la casa se mueven las cortinas.

SEGUNDA PARTE - ¡QUÉ VIVOS!

a) Pearson contó lo de los aullidos en la Iglesia.

b) El que oculta whisky de contrabando (que no es MIllford) contó lo de la cocinera en el mercado y Walton inventó lo de la condesa (pero no lo contó en la taberna).

c) Los clientes del barbero temblaron al oír lo de las cortinas, que no fue inventado por quien oculta los disfraces que usa para sus estafas ni por Larkin (que esconde oro).

d) El que oculta armas habló en el Banco, pero no sobre el Conde.

e) Uno de los sinvergüenzas se llama Smith y uno oculta caballos (no necesariamente son los mismos)

39. SALUDARÁN EN EL ATRIO: "Fulana y Mengano participan a usted que el enlace de sus hijos Zutanita y Perenganito. . . ", etcétera. Deduzca quién se casará con quién quiénes serán los padrinos (madre del novio y padre de la novia), quién es el sacerdote, en qué iglesia y en qué salón se hará la fiesta de bodas. Para el tema de las parejas use los datos de la primera parte ("DEL BRAZO"). Para enterarse del resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte ("¡FELICES!"). Anote lo que vaya descubriendo.

PRIMERA PARTE - DEL BRAZO

a) Ninguna novia tiene la misma inicial que su novio o que su madrina. María es una de las madrinas y José uno de los padrinos.

b) Marcela se casará con Gerardo (que no es hijo de Gladis).

c) Carlos entrará del brazo de su hija Carla.

d) Armando (padrino) saldrá del brazo de Gladis.

e) Luisa confeccionó el tocado de Alba, su futura nuera (que no se casará con Cosme).

f) Juan (padrino) y Alberto (novio) (que no es hijo de Alcira) se llevan bien.

g) Tomás es el único hijo de Lidia.

h) Héctor no será el padrino de Pedro.

i) Graciela e Hilda son dos de las novias.

SEGUNDA PARTE - ¡FELICES!

a) Los que se casen en los Santos Oleos recibirán en el salón "Oro". Otro de los salones se llama "Plata".

b) El padre Jorge, de Nuestra Señora del Huerto, casará a Carla.

c) Cosme es devoto de Santa Clara.

d) Héctor invitó al padre Aníbal a compartir la fiesta en el salón "Victoria".

e) Cuando el padre César dé por terminada la ceremonia en San Marcos, los novios partirán hacia el salón "Sueño".

f) El padre Damián (que no es párroco de Cristo Rey) es el confesor de Luisa y está complacido de casar a su hijo.

g) La pareja casada por el padre Blas no hará la fiesta en el salón "Flores".

40. HABÍA UNA VEZ: . . . cinco tiranos que raptaron a otras tantas princesitas y las llevaron a sus horribles reinos. Allí sufrían las niñas hasta que un día, llegaron los príncipes montando raros y mágicos dragones. Derrotaron a los tiranos, las salvaron y fueron felices y comieron perdices. Deduzca quiénes son los protagonistas de cada cuento. Para identificar a tiranos y princesas use los datos de la primera parte ("LOS MALOS"). Para el resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte ("LOS BUENOS"). Anote lo que vaya descubriendo.

PRIMERA PARTE - LOS MALOS

a) Igor, que se hacía llamar "Señor de los Desiertos", era hermano del tirano del Reino Lejano (Que raptó a Zoe) y primo de Fender (el tirano del Reino Olvidado).

b) El "Amo de los Picachos" pretendía casarse con Melinda, y Murdock, con la dulce Fiamma.

c) En el Reino Olvidado sólo hay pantanos.

d) Morgana fue encerrada en la torre más alta de Reino Mortífero.

e) Ni en Reino Perdido, ni en aquel otro en que estaba confinada Tatiana predominaban los hielos.

f) El "Señor de los Bosques" no era Groovek ni Fender.

g) Heston es el tirano de Reino Sombrío.

SEGUNDA PARTE - LOS BUENOS

a) El príncipe Bernardo, montando un dragón plateado que no fue creado por el mago Zanter, venció a Groovek. Había también un dragón negro.

b) El mago Mergon ayudó a rescatar a Tatiana; el mago Bardak socorrió al príncipe Iván y el mago Timbor (que creó un dragón invisible), ayudó a quien venció a Heston. También ayudó a alguien el mago Kandur.

c) El príncipe Víctor cruzó velozmente los desiertos.

d) El dragón rosado devastó los bosques impenetrables.

e) El príncipe Fausto no tuvo la ayuda de Zanter ni del otro mago que creó el dragón azul.

f) El príncipe Stepan rescató a una de las princesas.

41. HOMBRES ENTRE REJAS: En cierta cárcel de máxima seguridad están aplicando un programa de rehabilitación de criminales que, apadrinados por “tutores”, dedican su tiempo a tejer para calmar los malos instintos. Deduzca a quién mató cada uno de estos cinco hombres, a cuántos años fue condenado, quién lo guía y qué es lo que teje. El asunto de los crímenes se dilucida con los datos de la primera parte (ANTECEDENTES) y el plano de las celdas. Para enterarse del resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte (REHABILITADOS). Anote lo que vaya descubriendo. PRIMERA PARTE - ANTECEDENTES

   a) El de Houston (que está en una celda impar, pero no es Walter) mató a su amante.

   b) Bulwer ocupa una celda entre la de Smith y la de quien asesinó a un peatón.

   c) Manson fue condenado por matar a un policía.

   d) La celda de Walter está justo bajo la del hombre de Las Vegas.

   e) El de Seattle (en celda impar) y quien mató al comerciante están en el 5to. piso, Kelvin y el de Boston en el 6to.

   f) Quien asesinó a un mendigo no está en la 609.

   g) Uno de los criminales es de Miami.

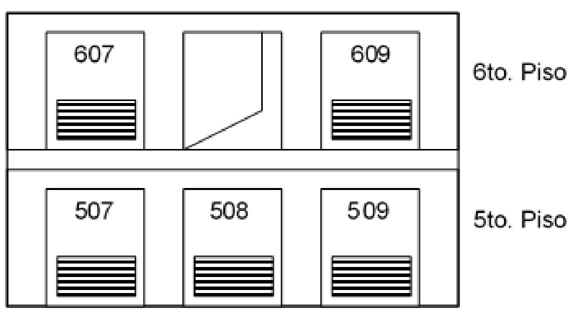


Figura 4.4: Entre rejas

SEGUNDA PARTE - REHABILITADOS

   a) La estudiante de Psicología guía la rehabilitación de quien tiene la condena más corta.

   b) La enfermera enseño a Kelvin a tejer tapices.

   c) Quien está condenado a 15 años teje alfombras en su celda del 5to. piso.

d) Smith estará encerrado 5 años más que el de la celda vecina a la suya, pero menos que Manson (que se dedica a tejer juguetes con ganchillo, aunque no guiado por la monja).

e) El de Miami, cuyo tutor es el pastor, cumple una condena tres años más larga que la de quien teje bufandas.

f) Uno de los tutores es abogado y uno (no necesariamente el mismo) teje calcetines.

g) Las condenas son de 7, 10, 12, 15 y 20 años.

42. ¡QUISIERA SER JURADO!: Eso fue lo que exclamaron nuestros enviados al XXXVIII Certamen de Cocina al ver a los jueces degustando las exquisiteces preparadas por los concursantes. Relámase usted también, deduciendo cómo es cada uno de los patos premiados y qué mereció su autor. Para el asunto de las comidas use los datos de la primera parte (DELICIAS). Para el resto, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte (GALARDONES). Anote lo que vaya descubriendo. PRIMERA PARTE - DELICIAS

a) "Argent" lleva salmón pero no perifollo, ya que esto acompaña al soufflé.

b) Las tiernas arvejas acompañan a los ostiones, pero no en la mouse "Soleil".

c) "Royal" no es el gratín ni el timbal rodeado de tomates torneados en forma de flor.

d) El plato de caviar lleva estragón y "Bastille", camarones pero no tomates.

e) La cazuela "Grand Bourg" no es el plato de centolla ni el otro que lleva arroz como guarnición de un dorado gratín.

f) Uno de los platos es un delicado mousse.

SEGUNDA PARTE - GALARDONES

a) Fargas (que no preparó la cazuela) se lleva el primer premio: un viaje de perfeccionamiento a París.

b) Scotto, con su Mousse, logró el tercer puesto. El autor de "Argent", el segundo.

c) El creador de "Bastille" se lleva las copas de cristal y Dupont, cuyo plato quedó mejor ubicado, el horno de microondas.

d) La creación de Hunt (que no usó arroz) se ubicó justo delante de la de Espín, pero justo detrás del plato que mereció el juego de cuchillos de cocina.

e) Uno de los premios fue una vajilla de plata.

43. LOS HEREDEROS: Gracias al testamento de cierto ricachón, cinco mendigos se volvieron millonarios de la noche a la mañana, ya que el excéntrico caballero les legó sus dinerillos y un predio (señalado con negro en el plano) donde ellos decidieron levantar un edificio de cinco pisos en el que instalaron diversos servicios para ayudar a otros desposeídos. Deduzca en qué esquina solía ver el millonario a cada mendigo, cuanto dinero le dejó y en qué lo invirtió. Para identificar a cada heredero, use los datos de la primera parte (¡ALBRICIAS!) y el plano. Para saber cómo empelaron el dinero, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte (NOBLES FINES). Anote lo que vaya descubriendo.

PRIMERA PARTE - ¡ALBRICIAS!

a) Darren y Earl estaban siempre en las esquinas frente el predio que heredaron. El que recibió 4 millones, siempre más al sur que ellos.

b) El de Benson Av. Y Misty St. Recibió un millón más que Alvin, que siempre estaba más al norte.

c) Yendo hacia el sur, Bolton Av. Es la siguiente a Gardner Av.

d) Chick heredó la mitad que el mendigo de Spencer St. (que no es Earl).

e) El de Vance St, recibió un millón menos que el de Lime Av.

f) Búster era uno de los mendigos.

g) Los mendigos recibieron entre 2 y 6 millones (con uno de diferencia entre ellos)

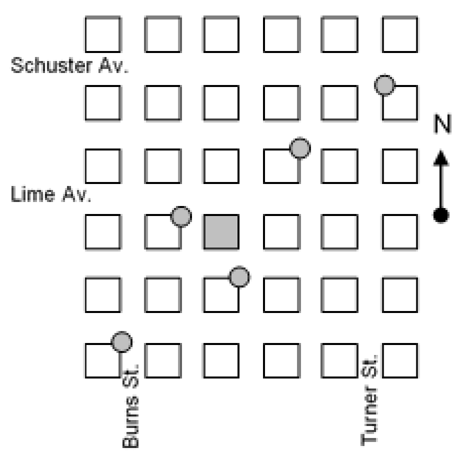


Figura 4.5: Los herederos

SEGUNDA PARTE - NOBLES FINES

a) Alvin y quien instaló dormitorios en el segundo piso invirtieron el 50

b) El que abrió un agencia de empleos (justo sobre la oficina de Búster y debajo del servicio médico) invirtió en ella una tercera parte de la fortuna que cobró.

c) Uno de ellos instaló una oficina de servicio legal.

d) Las inversiones fueron de 1, 1.5, 2, 3 y 4 millones.

44. PIRATAS DEL ROCK: Varias compañías grabadoras ilegales contrataron "profesionales" para robar las grabaciones originales de los últimos discos de grupos famosos. Al conocerse las noticias, los clubes de fans pusieron manos a la obra y lograron desbaratar el sucio negocio mediante mensajes en clave. Deduzca las relaciones correctas. Para descubrir cada robo, use los datos de la primera parte (ILÍCITOS). Para saber cómo se comunicaron los fans, use lo ya averiguado más las pistas de la segunda parte (¡AL RESCATE!). Anote lo que vaya descubriendo.

    PRIMERA PARTE - ILÍCITOS

    a) La esposa de un ladrón fue a Topeka, donde cobró 100 000 dólares más que Sledge.

    b) Por las cintas de "Dire Straits" alguien recibió el doble de lo que cobró Monkey.

    c) Una compañía de Chicago "arregló" el negocio con las grabaciones de "Metallica".

    d) Rocky tuvo que dar una parte de lo cobrado por las grabaciones de "Marillion" a su ex esposa, que amenazó con delatarlo. Otro de los ladrones de llama Punky.

    e) Nuke viajó a Seattle y cobró la mitad que quien robó las cintas de "Van Halen".

    f) El empresario de Anápolis (que compró las cinta de "Vanilla Ice") no fue quien menos pagó.

    g) Los precios fueron de 150 000, 250 000, 300 000, 500 000 y 600 000 dólares.

    h) Uno de los negocios se realizó en Phoenix.

    SEGUNDA PARTE - ¡AL RESCATE!

    a) "Guerrero", el líder del club "Two Peaks", no utilizó revistas. Su hermano, que se hace llamar "Aguila", publicó mensajes en los diarios.

    b) Introduciendo claves en cientos de computadoras, los chicos del club "Highest" lograron atrapar a Sledge. Otro negocio fue desbarato gracias a losmensajes aparecidos en la TV.

    c) Los del club "Marvelous" desbarataron el negocio de Topeka.

    d) Monkey fue atrapado gracias a los mensajes del club "77" (cuyo líder no es "Defensor"), transmitidos por radio. Otro de los clubes se llama "2001".

    e) "Vengador" descubrió lo de "Marillion". "Varón Rojo" descubrió otra grabación ilegal.

Enigma policial

1. LA REINA PERDIDA

   Tras completar algunos trámites, Nadine Bourdieu tomó un taxi y abandonó el aeropuerto de Heathrow rumbo a Londres. El conductor, al notar su acento francés, se convirtió en un improvisado guía de turismo y comenzó a describir cada uno de los sitios por donde pasaban.

   - Quien venga a Londres, Miss, no debe dejar de ver la Torre, Trafalgar Square, Piccadilly, Mayfair... Por unas pocas libras, Miss, puedo llevarla yo mismo! - ofreció.

   - Se lo agradezco, pero sólo he venido a descansar y ya conozco de sobra esos lugares. Lléveme directamente al Claridge, por favor - pidió la muchacha.

   Bajo una persistente llovizna llegaron al hotel, en ña esquina de Brook y Davies Street. Nadine entró. De inmediato, Mr. Ronald F. Jones, director y gerente general del Claridge le dio la bienvenida.

   - ¡Miss Bourdieu! ¡Qué placer tenerla nuevamente aquí! Pero... pase a mi oficina, por favor - Una vez allí, Mr. Jones la tomó de las manos.

   - ¡Pequeña Nadine! ¿Me permites besar tu vrenet, como cuando eras niña y venías con tu padre?

   - ¡Sería un honor, querido Jones, recibir el beso de un Oficial de la Orden del Imperio Británico!

   - Dime niña... ¿a qué has venido? ¿estas trabajando en alguno de tus famosos casos?

   - ¡Oh no! Quiero descansar unos días. Últimamente ni siquiera he tenido tiempo para ocuparme de mi negocio. Ya sabes que dejé el restaurante a cargo de mi socio...

   - Pues aquí hay alguien que se alegrará de verte ¿Conoces a Marjan Lesnik, nuestro “maitre chef des cuisines”, verdad?

   - ¡Por supuesto! Y debo confesarte algo... ¡Tengo la intención de robarle la receta del foie gras!

   Mientras reían se encendió una luz verde cerca del escritorio. De inmediato, en la pantalla de la computadora apareció el nombre e un conocido magnate.

   - Nadine, discúlpame, pero debo recibir al nuevo huésped - Dijo Jones, incorporándose y señalando la pantalla. - Ya puedes instalarte. He ordenado para ti una de nuestras suites más bellas ¡Te veo luego!

   Un valet de chambre, vestido con el tradicional uniforme (pantalones de terciopelo colorado hasta la rodilla, medias blancas, casaca azul con alamares de oro) la acompañó hasta la suite. Ya era tare y estaba agotada. Ni siquiera podría cenar. Nadine se recostó. Unos minutos después, estaba profundamente dormida.

A la mañana siguiente, la despertó un suave golpeteo en la puerta. Al abrir, entró Mr. Jones. Su gesto preocupado la alarmó.

- Nadine... Lo lamento. Sé que quieres descansar, pero ha sucedido algo que...

- Adelante Jones. Cuéntame...

- Exactamente a las 7:25 de esta mañana recibí una llamada anunciando que Su Alteza el Príncipe de Gales desea almorzar hoy en la suite royal con unos empresarios extranjeros. En ese momento, como se hace diariamente, una mucama estaba aseándola. La llamé de inmediato para darle algunas instrucciones. A las 7:45 la mucama volvió a la suite y notó que algo había cambiado. ¡El costosísimo retrato de la Reina Victoria ya no estaba allí! Nadine, confío en esa mujer como en mí mismo. Salvo algunos huéspedes, nadie estaba en el piso a esa hora... Te ruego que me ayudes... temo que, de dar aviso a Scotland Yard, se produzca un escándalo...

- Tranquilízate por favor. Di a la mucama que venga. Y averigua si el portero vio algún movimiento extraño...

Mr. Jones salió. Volvió unos minutos después acompañado por una llorosa mujer y el portero. Nadine comenzó a interrogarlos

- ¡El cuadro estaba allí cuando limpié la suite! - dijo la mucama. - Al salir para ir a la oficina de Mr. Jones vi a dos caballeros que están alojados en ese mismo piso desde la semana pasada...- sollozó.

- Bien - Dijo Nadine - ¿Usted vio que alguien saliera del hotel? - preguntó al portero.

- Si, Miss Bourdieu. Alas 7:20, Sr. Puttington ascendió a un Rolls Royce aquí mismo, en Brook St. Cinco minutos después, una joven fue hasta Oxford St. Luego, no sé exactamente la hora, salió un hombre, cuyo hijo, según me comentó, lo esperaba a bordo de un Bentley. Tras él, otro caballero, cuyo nombre prefiero mantener en reserva, pues se que iba a ver a su amante. Por último, a las 7:40 salió una dama que, por o que lancé a ver, se encontró con un joven que manejaba una motocicleta Harley Davison.

- Esa no era Miss Goldfiel - afirmó la mucama. - Alcancé a verla mientras limpiaba la ventana, justo cuando Mr. Jones me llamó. Su novio la esperaba en una de esas pequeñas motos japonesas... un scooter. Seguramente la última en salir fue Lady Lovencraft, para verse con ese músico de rock que siempre la aguarda en Grosvenor... No quiero ser indiscreta, pero mi hermana, que también trabaja aquí, me contó que desde las 7 hasta que salió, la tuvo yendo y viniendo por su suite, pues no sabía cómo vestirse para ir la cita...

- Recuerdo algo más, Miss - exclamó el portero. - En un automóvil, que no era el Jaguar ni el otro que recogió a Mr. Nashton en Davies, iba un diplomático extranjero y no vi ningún paquete...

- ¡Oh, yo también recuerdo algo! - exclamó la mucama - Los dos hombres que vi al salir de la suite Royal llevaban paquetes en sus manos...

En ese momento, Mr. Jones llamó aparte a Nedine.

- Debo confesarte algo pequeña - dijo en voz baja - Uno de esos caballeros es Lord Kirwood. Y en el paquete llevaba un obsequio, que yo miso me encargué de comprar, para alguien "muy especial" que lo aguardaba en "New Bond" ¡Y te aseguro que no era el retrato!

- Eso lo aclara todo, pícaro Ronald - respondió Nadine - Agradezco su colaboración, señores - dijo a los empleados.

Una vez que se hubieron retirado, Nadine se acercó al secreter. Tomó un papel, escribió un nombre y lo entregó a Mr. Jones.

- Me gustaría conocer a este caballero, Jones. Vamos a tu oficina.

Allí, Mr. Jones llamó personalmente al hombre. Cando entró, en el rostro de Nadine se dibujó una amplia sonrisa.

- Buenos días André - dijo la detective - Creo que tienes que contarnos cosas muy interesantes sobre cierto retrato ¿verdad?

Mr. Jones, azorado, miró a la joven.

- No te alarmes, querido Ronald. Este no es otro que André Gardois, un archiconocido traficante de obras de arte. Ya me he tenido que ocupar de sus andanzas en París, Roma, Nueva Cork... Tu problema está resuelto, Mr. Jones. Llama a Scotland Yard, que yo vuelvo a mi suite... ¡Y no me despiertes, a menos que hayan robado las joyas de la corona!

¿QUIÉN ROBÓ EL RETRATO?

Para responder esa pregunta te servirá de ayuda descubrir a quién vió cada huésped y en qué calle y vehículo.

2. CIERRE DE TEMPORADA

Para Helmut Walz había sido una año excepcional; tras invertir varios millones de dólares en la formación de una escudería de Fórmula 1, tenía la satisfacción de ver a Jack Berliner, su primer piloto, encabezando el campeonato mundial... Si Jack triunfaba en Buenos Aires, donde se correría la última prueba del año, se batiría un record: los debutantes del año, escudería y piloto, alcanzarían la cima...

Con la seguridad de que así sucedería, Helmut había invitado a muchos amigos y Nadine Bourdieu estaba entre ellos...

En la víspera del Grand Prix, durante las pruebas de clasificación, todo parecía ir sobre ruedas. Tras varias vueltas, en la primera tanda, Berliner había logrado el segundo puesto en la grilla de largada. Luca Da Vinci, el segundo piloto, había marcado el cuarto. Sin embargo, algo no andaba bien en su coche, y pidió que prepararan el "muleto" para salir en la segunda tanda. Berliner, a pesar de su buena marca, quería lograr la "pole position". Sugirió algunos ajustes en la máquina, volvió a salir, pero no quedó conforme. Fue entonces cuando Da Vinmci le cedió el "muleto". Berliner salió a probarlo. Comprobó que todo andaba perfectamente y regresó a boxes, donde descansó mientras los mecánicos hacían los últimos arreglos, antes de la tercera serie de clasificación.

Durante estos preparativos, Helmut llevó a sus amigos a recorrer la pista. Nadine, algo aturdida por el ensordecedor ruido de los motores, prefirió quedarse en la confitería del autódromo. Desde allí podía observar las tribunas, tan concurridas como si fuese el día de la carrera. Los altoparlantes anunciaron la reanudación de las pruebas… El público aplaudió la salida de Jack Berliner, el jovencito que estaba a punto de ser campeón… De repente, cuando Jack aún no había completado una vuelta al circuito, en curva anterior a la recta principal, su coche se desvió inexplicablemente y fue a dar contra un "guard-rail", destrozándose. Tras el primer momento de angustia, y después de comprobar que las lesiones de Jack no eran muy graves, pero, de todos modos, lo dejaban fuera de carrera, hemut llevó a Nadine hacia los boxes. Allí, los mecánicos mostraron a Helmut algunas partes del coche destrozado…

-¡Diablos! - exclamó el alemán - De modo que no fue una falla… He estado en el negocio de la excavaciones el tiempo suficiente como para poder reconocer esto… Mira, Nadine… Es un trozo de la barra de suspensión trasera… Y, por el tipo de rotura, no tengo dudas: explotó. Es muy probable que haya sido a causa de una pequeñísima cantidad de explosivo plástico… ¡que alguien tuvo que haber introducido en la barra!

- ¿Sospechas de alguien? - preguntó Nadine mirando de reojo a Mike y Chuck, el ingeniero y el mecánico que construyeron todos los coches de la escudería…

- De mis muchachos, no… Pero especialmente hoy, este box estuvo muy concurrido… Parecía que todos querían ver al futuro campeón…

- Es verdad - interrumpió Nadine - Poco antes de comenzar las pruebas, un muchacho vestido con un "mono" de Ferrari se acercó a pedir azúcar para su café, y dejó aquí un amuleto para Jack…

- Si, pero el "muleto" todavía estaba en el camión, ya que Jack y Luca iban a usar los coches titulares - aclaró Helmut. Cuando estaban probando, se acercó Boison, el de Benetton. Por lo que puede ver, ni siquiera entró al box, Pidió algo y dio un sobre a Mike…

- Si, jefe… Son viejas fotos autografiadas por Fangio y Moss… Boison se las prometió a mi hijo - dijo el ingeniero - Después de dármelas, se fue al hotel, pues nos e sentía bien. Hubiera querido acompañarlo, pero justo ene se momento llegó Da Vinci y pidió el "muleto"... Cuando lo tuvimos listo, salió tan apurado que casi atropella al mecánico de otra escudería, que venía a pedir una llave...

- ¡Quién, el muchacho de Williams? - preguntó Nadine....

- No... - intervino Helmut - ése y el japonesito Sakura estuvieron después... pero no recuerdo exactamente cuando...

- Yo si recuerdo algo, jefe - dijo Chuck, el mecánico - Cuando llegó el de Lotus a pedir agua fresca, quise convidarle unas galletas que había dejado Carlini. Al hacerlo, se me cayó el cronómetro que después presté al que trajo esta botella de vino...

- ¡Seguro que fue Archer! - bromeó Helmut. - No, jefe... Archer estuvo antes que el que vino a pedir una tuerca - respondió Chuck.

Nadine, pensativa, miró en derredor. Dentro del "cockpit" de uno de los coches había un voluminoso libro sobre la historia de la Fórmula 1...

- Chuck - dijo, tomando el libro - cuando Da Vinci regresó con el "muleto" me pareció ver a alguien de Tyrrell con este libro...

- No, señorita, el de Tyrrell estab atendiendo a sus pilotos - aclaró Mike.

- Exactamente... - intervino Chuck - ¡Y qué suerte que encontró el libro! Yo lo estaba leyendo cuando Berliner dejó el "muleto" y me pidió que revisara los neumáticos mientras el iba a descansar un rato. Con el apuro y la charla que me daba Scanlon, que vino desde su box para contarme sobre las apuestas que acababa de hacer, me aturdí tanto que ya no recordaba dónde lo había tirado...

- ¡Demonios! - estalló Walz - ¡Nos dejaron fuera, y cualquiera puede haberlo hecho!...

- Cálmate Helmut... - pidió Nadine- Estás demasiado alterado... Te recomiendo que recuerdes tu proverbial dipomacia, porque tendrás que utlizarla...

- ¿De qué hablas Nadine?

- Pues... supongo que a nadie le conviene que todo esto se convierta en un escándalo, ¡verdad? - continuó Nadine - Mike, tu y Chuck, encárguense del periodismo. Inventen algo, cualquier cosa... Fatiga del material, o recalentamiento del motor... Ustedes son los especialistas...

- Por cierto, Nadine, que no quiero escándalos, pero... ¡qué crees? ¡Piensas que pudo ser un acto de sabotaje de alguna otra escudería?

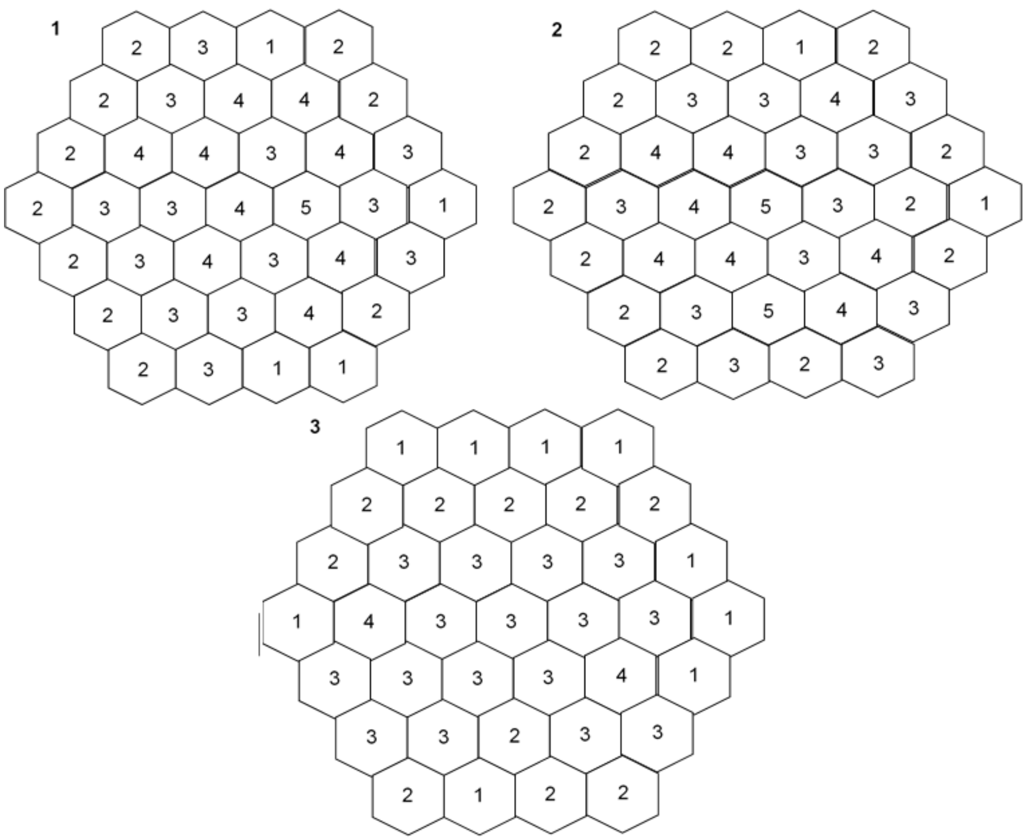
- No, amigo, sé quién es el culpable y, si estoy en lo cierto, lo hizo por razones personales... Ahora, si me disculpas, quisiera ir a ver al pobre Jack. Acompáñenme, y les contaré el fin de esta historia.

¿QUIÉN COLOCÓ EL EXPLOSIVO?

Para responder esa pregunta te servirá de ayuda descubrir a qué escudería pertenece cada mecánico, qué pidió y qué dejó.

Claro obscuro

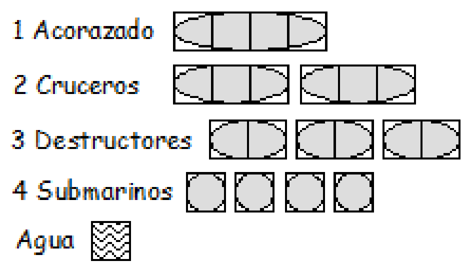
1. En cada figura hay que sombrear algunas casillas, guiándose por los números que contienen. Cada número indica cuántas casillas sombreadas debe quedar en el conjunto formado pro la propia casilla que lleva ese número y las que le son vecinas (dos casillas son vecinas si tienen un lado en común).

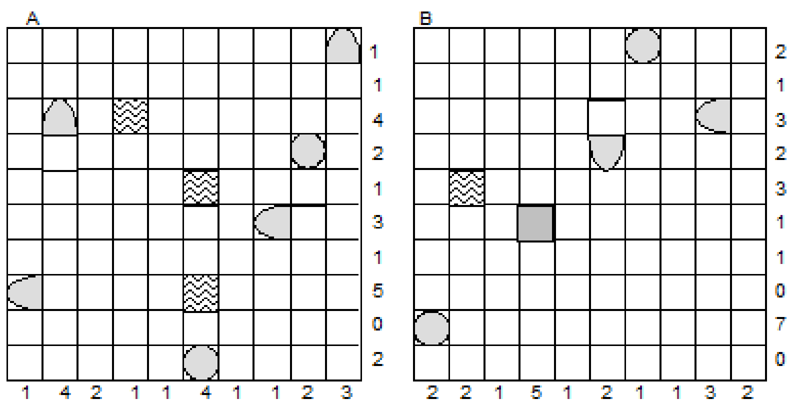


Batalla Naval

1. En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a la que se muestra en la figura. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.) Además, al pié de cada columna y al costado derecho de cada fila se indican con números cuántos cuadros ocupa la

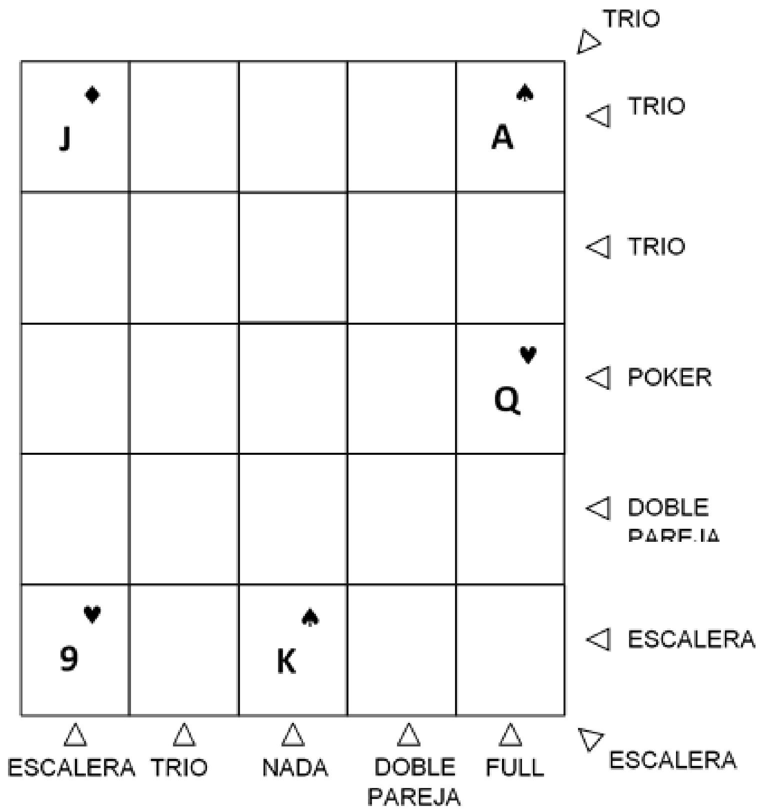
flota en esa columna o fila. Deduzca para cada tablero la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor del barco hay agua.





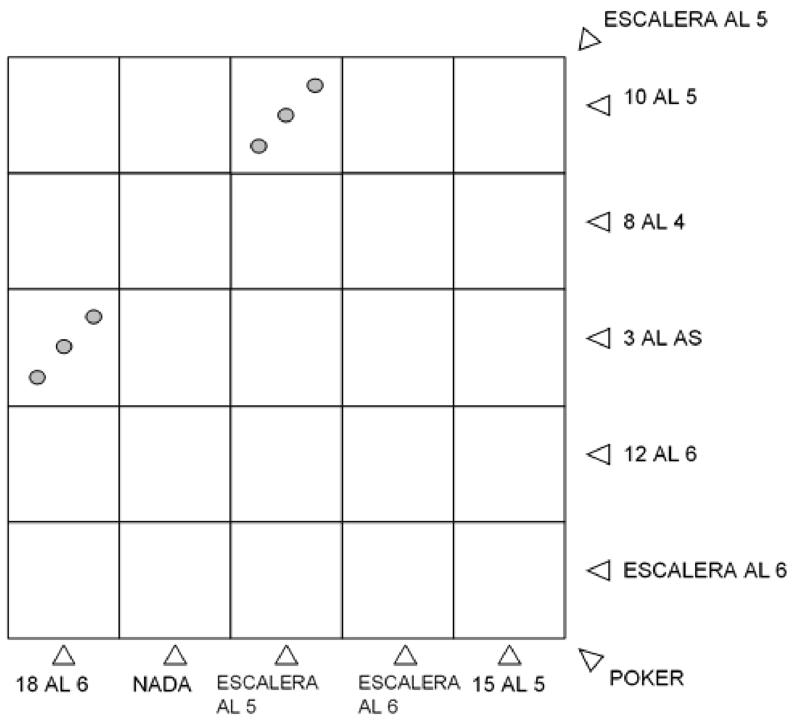
Poker cruzado

1. De un mazo de 28 cartas de poker (con 8, 9 10, J, Q, K, A) seleccionamos y armamos un cuadro de 5x5 cartas. Nos quedan 12 “manos” de 5 cartas horizontales, 5 verticales y 2 diagonales. Junto a cada mano indicamos la combinación que contiene. PAREJA: dos cartas de igual valor. DOBLE PAREJA: dos parejas diferentes. TRIO: tres cartas de igual valor. FULL: un trío y una pareja. POKER: cuatro cartas de igual valor. ESCALERA: cuatro cartas de valores consecutivos. Las escaleras posibles son: A, 8, 9 ,10, J - 8, 9, 10, J, Q - 9, 10, J, Q, K - 10, J, Q, K, A. Cuando no se da ninguna de esas combinaciones se indica NADA. No es forzoso que las cartas estén ordenadas en cada “mano”. Por ejemplo, una escalera puede ser 9, 8, A, J, 10. Deduzca los valores de todas las cartas. Recuerde que sólo hay cuatro cartas de cada valor.



Cubilete

1. En este cuadro hay 25 dados, a los cuales, en su mayoría, les faltan los puntos. Usted sabrá proveerlos a partir de las combinaciones que se indica en cada fila, columnas o diagonal, más las pistas dadas. Los juegos son: REPOKER: 5 dados iguales; POKER: 4 iguales y uno distinto; FUL: 3 de un valor y 2 de otro; ESCALERAS: “al cinco” (1, 2, 3, 4, 5), “al seis” (2, 3, 4, 5, 6) y “al as” (3, 4, 5, 6, 1). En los demás casos se indica el dado que más se repite y su suma. Por ejemplo (5, 1, 3, 1, 2) es “dos al as” y (2, 4, 5, 2, 5) es “cuatro al dos”, porque habiendo dos pares se anuncia el más bajo. Los juegos pueden aparecer desordenados y no hay límite para la repetición de los valores.



Palabra oculta

1. Deduzca la palabra de cinco letras que debe encabezar cada diagrama, a partir de las palabras pistas que aparecen debajo. Los números indican cuántas letras en común y en la misma posición tiene cada pista con la palabra buscada (si hay letras en común pero en lugar incorrecto, no se tienen en cuenta). En cada caso, la palabra buscada está formada únicamente por letras que aparecen en su correspondiente diagrama. Una vez resueltos los cinco primeros casos, pase las palabras al diagrama F, situándolas en las líneas respectivas y deduzca finalmente la palabra que debe encabezar este último diagrama. newpage

   a)

A							**B**						
	J	A	P	O	N	1		A	L	G	U	N	1
	C	I	F	R	A	2		O	R	U	G	A	2
	L	E	Y	E	S	2		P	O	D	E	R	2
	L	A	C	R	E	2		O	R	F	E	O	3
	S	E	P	I	A	3		A	N	D	E	N	3
C							**D**						
	H	E	R	I	R	1		C	H	I	C	O	1
	A	C	A	S	O	2		S	O	L	E	S	2
	R	A	T	O	N	2		T	R	A	E	R	2
	A	C	U	D	E	2		A	R	D	I	D	2
	T	U	T	O	R	3		A	D	I	O	S	3
E							**F**						
	T	I	G	R	E	1							
	C	O	P	A	S	1							
	T	O	R	N	O	1							
	J	A	M	O	N	3							
	V	A	P	O	R	3							

b)

A							**B**						
	G	R	A	V	E	1		B	O	N	G	O	1
	G	U	I	A	R	1		N	E	G	A	R	1
	C	L	A	V	O	2		T	A	L	C	O	2
	C	R	E	M	A	3		N	U	N	C	A	2
	Q	U	E	N	A	3		S	A	L	S	A	3
C							**D**						
	M	E	L	O	N	1		C	I	E	G	A	1
	T	R	I	G	O	1		C	E	N	I	T	2
	S	O	R	G	O	2		A	S	T	R	O	2
	T	U	R	B	A	3		B	U	R	R	O	3
	M	U	E	L	A	3		T	E	R	C	O	3
E							**F**						
	G	R	A	V	A	1							
	C	H	I	L	E	1							
	S	E	L	V	A	2							
	C	A	R	D	O	3							
	P	A	L	C	O	3							