Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Conferencia 4

Generalización de la fórmula del binomio

“ *La grandeza de un hombre está en reconocer su propia pequeñez.* ”

Blaise Pascal

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

1. Introducción

Ya probamos que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

El desarrollo anterior tiene un número finito de términos, exactamente $n+1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Generalizaremos en esta clase esta fórmula. Comenzaremos para ello analizando 2 casos especiales de la potencia de un binomio.

2. Los casos especiales

2.1. Caso 1: cuando el exponente es -1

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{b}{a}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^k, \quad \text{si } \left|-\frac{b}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow |b| < |a|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{-1} &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^k \quad \text{si } |b| < |a| \\
&= \frac{1}{a}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^0 + \left(-\frac{b}{a}\right)^1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2 + \left(-\frac{b}{a}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{b}{a}\right)^n + \dots\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + -\frac{b^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{b^n}{a^n} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + -\frac{b^3}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{b^n}{a^{n+1}} + \dots
\end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior se obtiene que

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} + (-1)a^{-2}b + \frac{(-1)(-1-1)}{2}a^{-3}b^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}a^{-4}b^3 + \dots \quad (2.1)$$

con lo que se puede constatar fácilmente que tal expresión responde a la fórmula del binomio que ya habíamos visto antes pero:

1) aplicada al caso $n = -1$

2) ahora con una diferencia esencial pues para $n = -1$ la expresión del binomio asociado contiene **infinitos términos**.

Si multiplicamos ahora

$$(a+b)^{-1} \cdot a = \frac{1}{a+b} \cdot a = \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$$

entonces

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \dots \quad \text{con} \quad |b| < |a| \Leftrightarrow \left|\frac{b}{a}\right| < 1$$

De modo que si se hace $x = \frac{b}{a}$ tendremos que

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \ |x| < 1.$$

2.2. Caso 2: cuando el exponente es $\frac{1}{2}$.

Tenemos que

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}.$$

Comencemos con un método relacionado con la búsqueda de las raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos.

Se conjetura que este método de aproximación era ya conocido por los babilonios y puede tener más de 3000 años de antigüedad. Los hallazgos arqueológicos atestiguan que los babilonios obtuvieron algunas aproximaciones interesantes para las raíces cuadradas. Por ejemplo, en una tablilla aparece el número $\frac{17}{12}$ como una aproximación de $\sqrt{2}$ y, en otra, se encuentra una aproximación mucho más exacta.

***Ejemplo* 2.1.** $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{2}{9}} \approx \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Considerando entonces, en general, $a > 0$ de raíz conocida y $|b|$ pequeño respecto a a podemos con una aproximación bastante burda asumir que

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}, \quad a > 0, |b| \ll |a|.$$

Sea entonces δ el error cometido en la aproximación anterior

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \delta.$$

A partir de lo anterior se tiene que

$$(a+b) = a + 2\sqrt{a}\delta + \delta^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{a}\delta + \delta^2$$

Como hemos supuesto que $|b| \ll |a|$ entonces $|\delta| < 1$ y δ^2 será pequeño en relación a a y podemos despreciarlo pudiendo considerar entonces

$$b \approx 2\sqrt{a}\delta,$$

por tanto

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad |b| \ll a. \tag{2.2}$$

Note que la expresión encontrada para indicar que este error será mucho más pequeño en la medida de que b sea mucho menor que a.

Una vez encontrado un valor aproximado para $\sqrt{a+b}$ podemos obtener una mejor aproximación de la raíz buscada.

Ejemplo 2.2. *Usemos la fórmula (2.2) para encontrar un algoritmo eficiente que permita hallar $\sqrt{2}$.*

Sea $v > 0$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{(v^2) + (2 - v^2)}, \quad \textit{donde } a = v^2,\ b = 2 - v^2.$$

Entonces (2.2) se convierte en

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx \sqrt{v^2} + \frac{2-v^2}{2\sqrt{v^2}} \\ &= v + \frac{2-v^2}{2v} \\ &= \frac{2v^2 - v^2 + 2}{2v} = \frac{v^2+2}{2v} = \frac{v}{2} + \frac{1}{v}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\sqrt{2} \approx \frac{1}{2}\left(v + \frac{2}{v}\right) \tag{2.3}$$

y la aproximación será mejor mientras más cerca esté v de $\sqrt{2}$.

Aplicando reiteradamente el valor obtenido en la expresión (2.3) *colocando como valor de v el resultado del cálculo precedente (iniciando con $v_0 = 1$) se obtiene:*

$$v_0 = 1 \to v_1 = 1{,}5 \to v_2 = 1{,}41666 \to v_3 = 1{,}414215686\ldots$$

y así sucesivamente. Es interesante notar el rápido crecimiento de la cantidad de cifras correctas que brinda este método.

¿Cree usted que el método del ejemplo anterior se pueda generalizar para el hallazgo de la raíz cuadrada de cualquier número no negativo?

Retomemos ahora la fórmula (2.2)

Como

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

entonces

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \delta.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene que

$$\begin{aligned} a+b &= a + \frac{b^2}{4a} + \delta^2 + \frac{2\sqrt{a}b}{2\sqrt{a}} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{2b\delta}{2\sqrt{a}} \\ a+b &= a + b + \frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene

$$\frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2 = 0 \tag{2.4}$$

Como δ es pequeño y $|b| < a$ por hipótesis podemos despreciar los dos últimos sumandos con lo cual tenemos

$$\frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta \approx 0 \Rightarrow \delta \approx -\frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}.$$

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}, \quad |b| < a. \tag{2.5}$$

La fórmula anterior también permite elaborar un algoritmo de obtención de la raíz cuadrada de un número.

Por supuesto, con tal algoritmo se obtienen más rápido cifras exactas de $\sqrt{a+b}$.

***Ejemplo* 2.3.** *Con $v_0 = 1{,}5$ ya se obtiene en la cuarta iteración ¡68 cifras decimales exactas!*

Transformando ahora las expresiones (2.2) y (2.5) con el fin de obtener una expresión más cómoda de recordar y emplear en la práctica. Para ello dividimos ambos miembros por $\sqrt{a}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{a}} &\approx 1 + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2}, \quad |b| < a \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right| < 1 \\ \sqrt{1+\frac{b}{a}} &\approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

y hagamos, como en el caso anterior, $x = \frac{b}{a}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \ldots, \quad |x| < 1 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \end{aligned}$$

Para obtener aproximaciones más precisas podría repetirse el procedimiento que hemos venido haciendo hasta aquí tanto como se desee pero esto resultaría demasiado tedioso.

Sería más interesante seguir un método que propuso Newton y lo empleó con frecuencia así como muchos otros científicos tras él.

Newton consideró la siguiente igualdad

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

donde los coeficientes $c, d, \ldots$ están indeterminados. Para el cálculo de estos coeficientes empleó la relación:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)$$

de donde

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots\right) \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(2c - \frac{2}{16}\right)x^3 + \left(2d + c + \frac{1}{64}\right)x^4 + \ldots \end{aligned}$$

Como los coeficientes correspondientes a las potencias de x mayores que 2 son nulos entonces se obtienen las relaciones siguientes:

- $2c - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{16}$
- $2d + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 0 \Rightarrow d = -\frac{5}{128}$

De modo que

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Debemos notar que, para $n = \frac{1}{2}$:

- $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8}$
- $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-2}\right)}{2\cdot 3} = \frac{-\frac{1}{4}(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3} = \frac{1}{16}$
- $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4} = \frac{\frac{1}{2}-3}{64} = -\frac{5}{128}$

lo cual nos hace conjeturar que el desarrollo del binomio también es válido para $n = \frac{1}{2}$.

3. La generalización

Newton inspirado en ideas expresadas previamente por John Wallis aplicó un razonamiento algo dudoso (pero eficaz) de interpolación para obtener el desarrollo de $(1+x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y $|x| < 1$.

Como ya conocía los resultados para $n = 1, 2, 3, \ldots$ entonces para un valor arbitrario de a era preciso solo "interpolar"los coeficientes de estos polinomios pero estos coeficientes eran polinomios en n por lo cual lo que restaba era sustituir n por a.

Aunque tal razonamiento no satisfacía plenamente incluso al propio Newton, durante todo el siglo $XVIII$ fue usado profesamente con mucho éxito y fue denominado por todos *fórmula del binomio de Newton*.

No fue hasta inicios del siglo XIX que el joven matemático noruego Niels Abel probó rigurosamente que

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} :\ |x| < 1$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.