Examen Extraordinario | Algebra I | 2016-2017

Ciencia de la Computación

Nombre: Grupo:

1. Dados los polinomios $p(x)=2x^4+ax^3-2ix-ia,\ a\in\mathbb{R}$ y $q(x)=2x^3+(a-2)x^2-(a-2)x+a$.

1.1 Pruebe que $mcd(p(x),q(x))$ es de primer grado independientemente del valor del parámetro a.

1.2 Plantee la descomposición de $\frac{1}{q(x)}$ en fracciones simples sobre $\mathbb{R}(x)$ y $\mathbb{C}(x)$.

1.4 Demuestre que si $a,b\in\mathbb{N}$ son primos entre si entonces, todas las raíces de 1 de grado ab se obtienen multiplicando las raíces de 1 de grado a por las raíces de 1 de grado b.

2. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & a & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & a-1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2.1 Analice el rango de A según los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$.

2.2 Considere la matrices A y X, y elija una matriz B de términos independientes y valores de los parámetros a,b de modo que el sistema $AX=B$ resulte. Justifique el porqué de su selección empleando el teorema de Kronecker-Capelli y luego resuelva dicho sistema.

3. Sea $E=\mathbb{R}_6[x]$, $S=\{x^5+x^3+2x-1,\ x^3+x^2+x-1,\ x^5+x^2+x-2,\ 2x^3+2x,\ x^5+x^3+2x^2+2x-3\}$

3.1 Halle un subsistema linealmente independiente maximal de S.

3.2 Halle $L[S]$.

3.3 Sea $W=\{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f : a+d-f=0\}$, obtenga, de ser posible, una base de W a partir de una base de $L[S]$.

4. Sea el espacio vectorial $E=M_2(\mathbb{R})$, $V\subseteq_S E$ $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} 2a+b-c=0 \\ 4a+b+2c=0 \end{matrix}\right\}$, encuentre, si es posible:

4.1 un subespacio de E suplementario con V sobre E.

4.2 un subespacio de E cuya suma con V sea el subespacio de los vectores de $M_2(\mathbb{R})$ tales que $2a+b-3c=0$, pero que no sea suplementario con V sobre E.

4.3 un subespacio de E suplementario con $L\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]$ sobre V y el subespacio generado por.

5. Responda verdadero o falso y justifique cada respuesta.

5.1 __Los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos si $\exists u(x),v(x)\in\mathbb{R}[x]/u(x)p(x)+v(x)q(x)=1$.

5.2 __Toda matriz no nula puede representar una matriz de cambio coordenadas de E e.v., $\dim E=n$.

5.3 __Sean $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ nilpotentes $(\exists r\in\mathbb{N}: A^r=B^r=0)$ si $AB=BA$ entonces $A+B$ es nilpotente.

5.4 __Sea T el espacio de las matrices de traza nula de orden 3 y An_3 el conjunto de las matrices antisimétricas de orden 3 entonces $An_3\subset_S T$.

<u>Nota</u>: En todos los ejercicios debe justificar rigurosamente su respuesta, apoyándose en la teoría vista a lo largo del curso.

<u>Nota</u>: Al entregar el examen, cada ejercicio debe estar en hojas independientes.

¡¡¡Éxito!!!