Tarea Evaluativa de *Introducción al Análisis Matemático*
(1^{er} Trabajo de Control)

1^{er} año de Licenciatura en Matemática. Curso 2022

Ejercicio 1

El tercer término en la expansión de $(x+k)^8$ es $63x^6$. Halle los posibles valores de k.

Ejercicio 2

Encuentre n tal que el coeficiente de x^4 en la expansión de $(1+x)^{n+1}$ es igual al coeficiente de x^3 en la expansión de $(1+2x)^n$.

Ejercicio 3

Encuentre el coeficiente de x^3y^2 en la expansión de $(2x+y)\left(x+\frac{y}{x}\right)^5$.

Ejercicio 4

Exprese $(1+\sqrt{5})^7-(1-\sqrt{5})^7$ en la forma $a\sqrt{5},\ a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 5

Determine el polinomio de interpolación (de menor grado) que interpola los puntos

$$\{(0;5),\ (1;4),\ \left(2;\frac{16}{5}\right),\ \left(3;\frac{64}{25}\right)\}.$$

Ejercicio 6

Se tomó sobre el polinomio $p(x)$ una muestra de 5 puntos $\{(n,y_n),\ n=1,2,\ldots,5\}$ tal que $y_n=p(n)$. Los puntos son

$$\{(1;-4),\ (2;-3),\ (3;2),\ (4;5),\ (5;0)\}.$$

Demuestre o refute las proposiciones siguientes:

a) El polinomio (de grado mínimo) que interpola los puntos $\{(n,y_n),\ n=1,2,\ldots,5\}$ es de grado 4.

b) El polinomio $p(x)$ tiene grado menor o igual que 4.

Ejercicio 7

(Ej 2/92 LT) **Polinomio de interpolación de Lagrange**. Cuando las abscisas de los puntos $\{(x_k, y_k),\ n = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ no son (necesariamente) equidistantes, Lagrange dio una forma de encontrar un polinomio que pasa por estos puntos:

a) Compruebe que las expresiones

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

son polinomios de grado n que satisfacen que $l_k(x_i) = 0$ para $k \neq i$ y que $l_i(x_i) = 1$.

b) Pruebe que el polinomio

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

resuelve el problema de interpolación para los puntos dados.

Ejercicio 8

Analice la convergencia de las siguientes series y, en caso de ser convergente, calcule la suma:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n!}$

Ejercicio 8.1

Considere la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$$

a) Halle el error en la siguiente "demostración":

Si trabajamos con las sumas parciales de la serie se tiene que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right)$$
$$\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

En $(\star)$ se utilizó que estamos en presencia de una suma telescópica. Por tanto, si n se hace lo suficientemente grande entonces se puede decir que la suma de la serie es $\frac{3}{4}$.

b) Halle el verdadero valor de la suma.

Ejercicio 9

Sabiendo que

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \dots, \quad |x| < 1:$$

a) Halla la expansión de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ y de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ (hasta grado 3).

b) Escriba el desarrollo en serie (hasta grado 3) de las funciones $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ y $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ con $|x| < 1$.