Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Conferencia 5

Expresión mediante series de las funciones exponencial y logarítmica

“ Los grandes conocimientos engendran las grandes dudas. ”

Aristóteles

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

1. Introducción

Lo básico sobre las funciones exponencial y logarítmica (definición y propiedades fundamentales) se estudió profundamente en los cursos de la enseñanza preuniversitaria, así como en el curso propedéutico *TIMS* que se brindó en los meses de mayo a julio de 2021 (estos materiales los pueden encontrar acá https://evea.uh.cu/mod/folder/view.php?id=64232). También en [1] se estudian las funciones exponencial y logarítmica.

1.1. La función exponencial

La noción de potencia de un número y las notaciones actuales son resultado de muchos años de evolución de estas ideas. En el siglo $XVII$ se pueden encontrar las obras de Descartes, Leibniz, Newton y sus contemporáneos (ya en ellas se pueden encontrar formas muy parecidas a la actual).

Sin embargo, un estudio sistemático de la función $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ (es decir, de la relación que se establece entre las cantidades variables $x,\ y = a^x$) se debe fundamentalmente a la obra de Euler (siglo $XVIII$).

En principio, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot\ \ldots\ \cdot a}_{n\ veces},\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Nos proponemos extender la exponenciación para el caso en que el exponente es un número cualquiera ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Ahora, una generalización provechosa no debe hacerse de forma arbitraria sino de modo que el nuevo concepto general posea las propiedades básicas del caso particular si ello es posible.

Procedamos entonces por etapas. Emplearemos como guía la conservación de la propiedad fundamental

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1.1}$$

Caso 1: exponente negativo

Como

$$a^0 = 1 \Rightarrow a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1 = a^0, \quad a \neq 0$$

Por tanto, esta igualdad sugiere que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puede verificarse fácilmente que con esta definición la propiedad (1.1) se conservará para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Caso 2: exponente racional

Deseamos darle un sentido a expresiones de la forma

$$a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{donde} \;\; m, n \in \mathbb{Z},\; n \neq 0.$$

Consideremos, por ejemplo, la expresión $a^{\frac{1}{2}}$. Empleando la igualdad (1.1) se obtiene que

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^2.$$

Luego, resulta natural tomar como definición que

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ si y solo si } a \geq 0.$$

Como también consideraremos exponentes negativos, en lo que sigue tomaremos $a > 0$.

Un razonamiento análogo sugiere la notación

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},\; a > 0$$

(si n es impar entonces $a \in \mathbb{R}$.)

Finalmente la igualdad

$$\underbrace{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\left(a^{\frac{1}{n}}\right)}_{m\ veces} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad m, n \in \mathbb{N},\; n \neq 0.$$

explica que, para un exponente fraccionario $\frac{m}{n}$ arbitrario se define

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Caso 3: exponente irracional

Para evitar ambigüedades se considerarán únicamente las raíces positivas.

Ya Euler señaló el caso en que los exponentes irracionales son “los más difíciles de entender” y explica cómo:

si $2 < \sqrt{7} < 3$, con $a > 1$, entonces $a^2 < a^{\sqrt{7}} < a^3$;

las siguientes acotaciones son válidas también

$$\frac{26}{10} < \sqrt{7} < \frac{27}{10}, \quad \frac{266}{100} < \sqrt{7} < \frac{265}{100}, \ \ldots$$

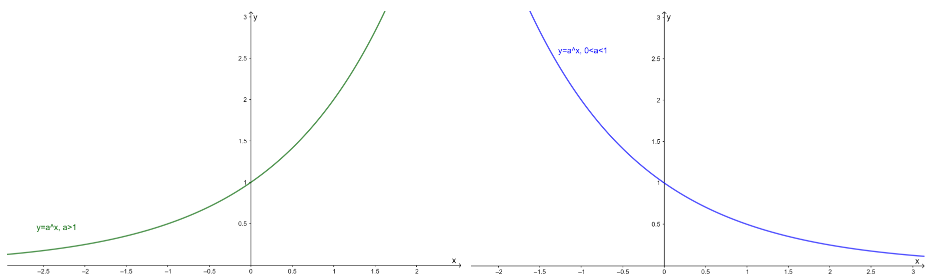
por lo que el valor de $a^{\sqrt{n}}$ puede ser precisado con el grado de exactitud que se desee.

La idea de que todo irracional puede ser aproximado "por una sucesión de racionales" tanto como se desee y el hecho de

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \ \ \forall m, n \in \mathbb{Q}$$

sugiere que tales propiedades también se tendrán cuando los exponentes son irracionales.

1.1.1. Propiedades fundamentales de la función exponencial



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Figura 1: Función exponencial $y = a^x$

- $a^0 = 1$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$

- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $a^x > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2},\ a > 1$ (Monótona creciente si $a > 1$)
- $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2},\ 0 < a < 1$ (Monótona decreciente si $0 < a < 1$)
- $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ ($y = a^x$, con $a > 0,\ a \neq 1$, es inyectiva)

1.2. La función logarítmica

Íntimamente ligada a la función exponencial está la función logarítmica (definida rigurosamente por Euler en el siglo $XVIII$).

La noción de logaritmo surge mucho antes que la definición dada por Euler como medio imprescindible para efectuar los cálculos astronómicos necesarios.

El objetivo fundamental de la introducción de esta herramienta es reducir la tediosa operación de multiplicación a la operación suma gracias a las propiedades de los logaritmos.

Ahora, ¿cómo se llega a a la idea de asociar a un número su logaritmo con vista a simplificar las operaciones aritméticas? Todo parece indicar que fue la confrontación del comportamiento de una progresión aritmética (Cuadro 1) con una progresión geométrica (Cuadro 2)

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	1	2	3	4	5	6	7

Cuadro 1: Progresión aritmética

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
1	2	4	8	16	32	64	128

Cuadro 2: Progresión geométrica

Tal confrontación permitió advertir que a una adición de elementos de la primera progresión corresponde una multiplicación de los correspondientes elementos de la segunda progresión; por ejemplo:

$a_2 + a_4 = a_6$ $\qquad$ $g_2 \cdot g_4 = g_6$

$2 + 4 = 6$ $\qquad\qquad$ $4 \cdot 16 = 64$

$a_3 + a_5 = a_8$ $\qquad\qquad$ $g_3 \cdot g_5 = g_8$
$3 + 5 = 8$ $\qquad\qquad$ $8 \cdot 32 = 256$

idea que es buena pero no muy útil en la práctica pues en la segunda sucesión faltan demasiados números, situación que se acentúa al considerar números más grandes.

Por tanto, para que la correspondencia entre estas dos progresiones resulte práctica la razón de la progresión geométrica debería ser cercana a 1, con lo cual la diferencia entre dos elementos consecutivos sería pequeña.

La primera tabla de logaritmos se le debe a John Napier, quien consideró como razón $0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$ y calculó los 100 primeros términos de la progresión

geométrica con esta razón y primer término $10000000 = 10^7$, es decir, los números de la forma

$$10^7(1 - 10^{-7})^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, 100.$$

Entonces llamó *logaritmos* de dichos números a los números $n = 0{,}1, \ldots, 100$.

Para profundizar un poco más en estas cuestiones recomendamos leer las páginas 38-42 de [1]. También se recomienda el estudio de los ejercicios 1 y 2 de la página 41 de [1].

2. El método heurístico y el rigor matemático

Emplearemos la forma de razonamiento heurístico expuesto por Euler en su libro "Introducción al Análisis de los infinitos" para estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas con el fin de encontrar para ellas desarrollos en series.

Euler manipuló profesamente cantidades llamadas *infinitamente pequeñas* o *infinitesimales* así como las *infinitamente grandes*. Estos tipos de entes matemáticos ya habían sido ampliamente empleados durante más de un siglo siempre sin un basamento adecuado, por lo que recibió fuertes críticas por parte de filósofos y matemáticos.

Euler no pretende dar una definición precisa del significado de estas nociones, no se detiene a explicar su significado: las concibe únicamente como una herramienta extraordinariamente útil para descubrir las propiedades de las funciones, propiedades que eran imposibles de imaginar siquiera con el estilo de razonamiento matemático ortodoxo.

La falta de precisión matemática en el manejo de estas nociones al estilo del siglo $XVIII$ provoca que el uso que haremos de esta herramienta sea totalmente heurístico, con un gran parecido a la forma de trabajar de la Física o de las otras ciencias naturales.

Sin embargo, todas las propiedades así obtenidas serán totalmente válidas y serán demostradas más adelante en este curso con todo el rigor matemático contemporáneo.

Es salvable advertir que la forma de trabajo heurístico como método de descubrimiento no ha perdido actualidad en la Matemática; al contrario, son muchas las ramas de esa ciencia que realizan conjeturas y descubren resultados fundamentales apoyándose en este método. Lo que ha cambiado en la actualidad es la existencia de medios de cómputo electrónicos que facilitan la experimentación matemática.

¿Cómo tenían entonces en aquellos tiempos la certeza de que estaban trabajando correctamente? Veían por distintas vías la obtención de un mismo resultado constatando así su veracidad.

3. Representación en serie de la función exponencial

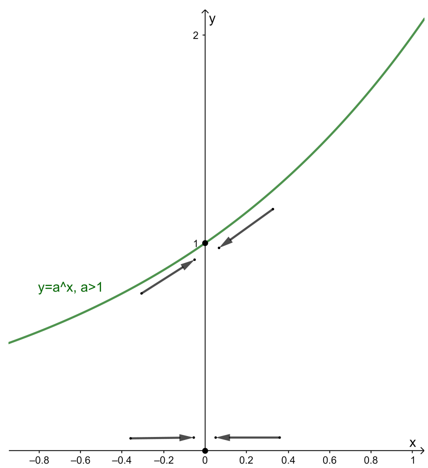


Figura 2: Comportamiento de la función $y = a^x$ con $a > 1$ alrededor de $x = 0$

Sea $y = a^x,\ a > 1$ (el caso $0 < a < 1$ se reduce a este haciendo $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$)

$$\Downarrow$$

$$y = a^x \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\Downarrow$$

al crecer el exponente x crece el valor de la potencia $a^x = y$.

Como $a^0 = 1$:

Si elevamos a a un exponente muy pequeño (positivo) entonces la potencia será mayor que 1, pero superará a 1 en una cantidad infinitamente pequeña

$$a^x \longrightarrow 1 \text{ cuando } x \to 0^+$$

En el caso de un exponente negativo

$$a^x \longrightarrow 1 \text{ cuando } x \to 0^-$$

se obtendrá una potencia menor que 1 pero muy cercana a 1, de modo que si h es una cantidad infinitesimal ($h > 0$ o $h < 0$) entonces

$$a^h = 1 + kh,$$

donde k depende del valor de a.

Lo anterior obedece al resultado que se verá en el segundo semenstre

$$x_n \xrightarrow{n} l \Longrightarrow x_n = l + \alpha_n, \ \alpha_n \xrightarrow{n} 0$$

$$\Downarrow$$

$$(a^h)^N = (1 + kh)^N$$

Por propiedades de las potencias (miembro izquierdo) y el desarrollo del binomio (miembro derecho) se tiene que

$$a^{Nh} = 1 + \frac{N}{1}kh + \frac{N(N-1)}{1 \cdot 2}(kh)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(kh)^3 + \ldots$$

Haciendo el cambio de variables $\left(x = Nh \Leftrightarrow h = \frac{x}{N}\right)$ se tiene lo siguiente

$$a^x = 1 + Nk\frac{x}{N} + \frac{N(N-1)}{2}k^2\frac{x^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\frac{x^3}{N^3} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$a^x = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N = 1 + kx + \left(1 - \frac{1}{N}\right)k^2\frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)k^3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Ahora bien, en la medida que h se hace más pequeño ($h \to 0$), como $h = \frac{x}{N}$, N será cada vez más grande, esto es, que puede considerarse mayor que cualquier cantidad prefijada.

$$\Downarrow$$

$\frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N},\ (i = 1, 2, \dots)$ se aproxima tanto a 1 como se desee.

$\Downarrow$ (Para N suficientemente grande)

$1 - \frac{1}{N},\ 1 - \frac{2}{N},\ 1 - \frac{3}{N},\ \dots$ pueden ser sustituidos por la unidad, obteniéndose así:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^nx^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}x^n \tag{3.1}$$

La expresión anterior contiene infinitos términos y constituye la representación en serie para la función exponencial $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

Por otra parte, (3.1) permite encontrar una relación entre la base a y el número k. En efecto, para $x = 1$ se tiene que

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots + \frac{k^n}{n!} \dots$$

4. Representación en serie de la función logarítmica

Obtengamos ahora en representación en forma de serie de la función logarítmica qu ees un poco más complicada.

Ya vimos que cuando $h \to 0$

$$a^h = 1 + kh$$

$$\Downarrow$$

$$a^{Nh} = (1 + kh)^N$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a a^{Nh} = \log_a (1 + kh)^N$$

$$\Downarrow$$

$$Nh = \log_a (1 + kh)^N \tag{4.1}$$

Es claro que cuanto mayor sea N, tanto mayor que 1, será $(1+kh)^N$ si $h > 0$ (o menor que 1 si $h < 0$).

Podemos entonces escribir

$$(1 + kh)^N = 1 + x \tag{4.2}$$

donde $sg(x) = sg(h)$.

De (4.1) y (4.2) se tiene que

$$Nh \overset{(4.1)}{=} \log_a(1+kh)^N \overset{(4.2)}{=} \log_a(1+x)$$

luego

$$Nh = \log_a(1+x).$$

Por otro lado, despejando en (4.2) se tiene que

$$\begin{aligned}(1+kh)^N &= 1+x\\ 1+kh &= (1+x)^{\frac{1}{N}}\\ kh &= (1+x)^{\frac{1}{N}}-1\\ h &= \frac{1}{k}\left[(1+x)^{\frac{1}{N}}-1\right]\end{aligned}$$

Aplicando ahora nuevamente la fórmula del binomio (teniendo en cuenta que cuando dedujimos

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots$$

fue preciso pedir que $|x|<1$) se tiene que

$$\begin{aligned}Nh &= \frac{N}{k}\left[(1+x)^{\frac{1}{N}}-1\right]\\ &= \frac{N}{k}\left[\frac{1}{N}x + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)\left(\frac{1}{N}-2\right)\frac{x^3}{3!}+\dots\right]\\ &= \frac{1}{k}\left[x + \left(\frac{1}{N}-1\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{N}-1\right)\left(\frac{1}{N}-2\right)\frac{x^3}{3!}+\dots\right]\\ &= \frac{1}{k}\left[x - \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(2-\frac{1}{N}\right)\frac{x^3}{3!}+\dots\right]\\ &= \frac{1}{k}\left[x - \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{N}\right)2\left(1-\frac{1}{2N}\right)\frac{x^3}{3!} + \left(1-\frac{1}{N}\right)2\left(1-\frac{1}{2N}\right)3\left(1-\frac{1}{3N}\right)\frac{x^4}{4!}+\dots\right]\\ &= \frac{1}{k}\left[x - \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{x^2}{2} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{2N}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3N}\right)\frac{x^4}{4}+\dots\right]\end{aligned}$$

Cuando N es suficientemente grande entonces

$$1-\frac{1}{iN} \xrightarrow{N} 1, \quad i=1,2,\dots$$

De modo que la representación de la función logarítmica a partir de una serie es la siguiente:

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right] = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

***Observación* 4.1.** *Note que el razonamiento euleriano de sustituir expresiones del tipo $\frac{N-i}{N}$ por 1 (en una cantidad INFINITA de sumandos es ALTAMENTE RIESGOSO y puede dar lugar a absurdos.)*

Veamos un ejemplo en este sentido:

***Ejemplo* 4.1.** *Con un razonamiento similar se puede "probar" que $1 = 0$, ¡lo que sabemos que es falso! Notemos que*

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{N \text{ veces}}$$

Puesto que

$$\frac{1}{N} \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad N \longrightarrow +\infty$$

podría pensarse que (¡¡¡CUIDADO!!!!!)

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad N \longrightarrow +\infty,$$

por lo que se tendría que $1 = 0$, ¡lo cual es imposible!

En estas expresiones que contienen una suma infinita de infinitesimales hay que ser muy cuidadosos pues llevan a indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$.

Notemos, además, que la base a del logaritmo puede ser escogida de modo arbitrario.

Entre los valores posibles de a, el que proporciona una expresión más simple para

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right), \quad |x| < 1$$

es aquel para el cual $k = 1$. A tal valor Euler lo denotó con la letra e, posiblemente por ser la inicial de la palabra "exponencial". El número e es de gran valor, tanto para el Cálculo Diferencial como el Integral, así como en sus aplicaciones debido a los muchos atributos que Euler descubrió alrededor de esta constante.

La relación

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

nos lleva a que, para $k = 1$,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Se obtiene así un caso particular de

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots$$

de importancia capital en todo el Análisis Matemático:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{4.3}$$

De este modo, para $y = e^x$ se obtienen dos expresiones que permiten aproximarla:

- La primera:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

- La segunda, que se obtiene de

$$a^x = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N = 1 + kx + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{k^2x^2}{2!} + \ldots,$$

  es

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \tag{4.4}$$

  pues

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \longrightarrow e^x \;\text{ cuando }\; N \longrightarrow \infty,$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \approx e \;\text{ cuando } N \longrightarrow \infty.$$

En conclusión, el número e se puede aproximar mediante las expresiones

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} \;\text{ cuando }\; N \longrightarrow \infty \qquad \text{y} \qquad e \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \;\text{ cuando }\; N \longrightarrow \infty$$

Los dos estimados anteriores mejoran con el aumento de N, sin embargo, el primero

$$e \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

permite lograr una buena aproximación mucho más rápidamente. Sugerimos el estudio del ejemplo ilustrativo que aparece en [1], en el cual se muestra que con $e \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$ se obtienen 49 cifras decimales correctas para $N = 41$, mientras que con $e \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$ se obtienen solo 4 cifras decimales correctas con $N = 1000000$. Elocuente, ¿no?

Sin embargo, a pesar de que en la práctica la seguna aproximación no es muy buena para la aproximación de e, desde el punto de vista teórico-conceptual, ambas expresiones son muy buenas.

Tanto la función exponencial como la logarítmica pueden ser expresadas (aproximadas) mediante polinomios considerando solo un número finito de términos de sus correspondientes desarrollos en serie

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}$$
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{N+1}\frac{x^N}{N}, \quad |x| < 1.$$

La calidad de los estimados de la función $y = e^x$ puede verse en la figura 3 (tomada de [1]), notándose, en el caso de la función logarítmica de la figura 4 (tomada de [1]) que si $|x| > 1$ los gráficos de las funciones aproximantes (polinómicas) se separan rápidamente de la función logarítmica.

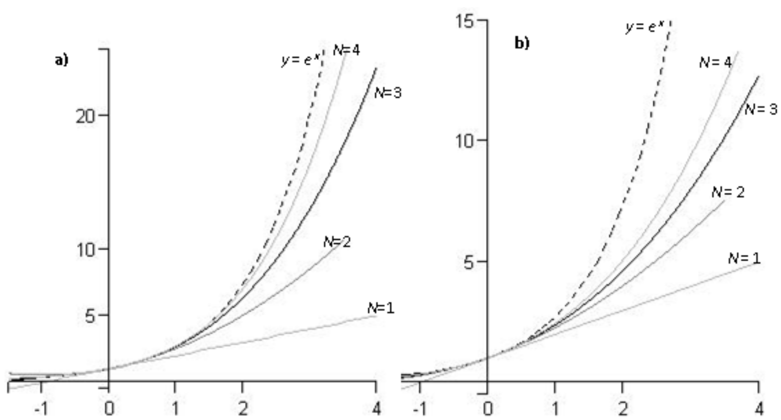


Figura 3: Aproximaciones de la función exponencial por polinomios

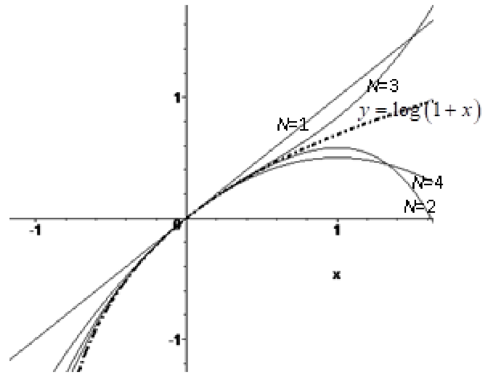


Figura 4: Aproximaciones de la función logarítmica por polinomios

4.1. Relación entre el logaritmo natural y el logaritmo neperiano

Se define el *logaritmo natural* de x como

$$y = \ln x = \log_e x.$$

Si $x = 10^7(1 - 10^{-7})^y$ se dice que $y = Nlog(x)$ [1] (*logaritmo según Napier* de x), de donde

$$\frac{x}{10^7} = \left[(1 - 10^{-7})^{10^7}\right]^{\frac{y}{10^7}}$$

y, por tanto, haciendo uso de (4.3) podemos escribir

$$\frac{x}{10^7} \approx \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{y}{10^7}}$$

de donde

$$\frac{y}{10^7} \approx \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right) \Longleftrightarrow y \approx 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right);$$

es decir:

$$Nlog(x) \approx 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right) = -10^7 \log_e\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

lo que significa que el logaritmo definido por Napier está cercano, salvo un cambio de escala, al logaritmo en base $\frac{1}{e}$, que es el opuesto del logaritmo natural.

En la actualidad, se le suele llamar *logaritmo neperiano* al *logaritmo natural*, pero es por un tema de notación.

5. Representación en series como objetos de cálculo

La representación en series del logaritmo natural de un número puede pensarse como un instrumento para el cálculo de logaritmos. Por ejemplo, para $x = 1$ se tiene que

$$\ln(1+1) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Sin embargo, esta serie, aunque sencilla y elegante, es de poca utilidad para el cálculo del logaritmo de 2, ya que se aproxima a este número de forma extremadamente lenta. Por otro lado, no podemos dar a x valores superiores a 1 pues, en tal caso, la serie no converge. Por tanto, existe la necesidad de desarrollar métodos alternativos para el cálculo de logaritmos (fundamentalmente desarrollados en los siglos $XVII$ y $XVIII$). Veamos algunos métodos:

- Newton observó que la serie

  $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad |x| < 1$$

  proporciona una buena aproximación cuando x es muy próximo a 0. Por tanto, tomó $x = \pm 0{,}1$, $x = \pm 0{,}2$ para obtener

  $$\ln(0{,}8), \ \ln(0{,}9), \ \ln(1{,}1), \ \ln(1{,}2)$$

  y, a continuación, escribió

  $$2 = \frac{1{,}2 \times 1{,}2}{0{,}8 \times 0{,}9}, \quad 3 = \frac{1{,}2 \times 2}{0{,}8}, \quad 5 = \frac{2 \times 2}{0{,}8}$$

  y, haciendo uso de las propiedades de los logaritmos, calculó $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\dots$

- En su libro "Introducción al Análisis de los infinitos", Euler cambia x por $-x$ en la serie

  $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1$$

  obteniendo entonces

  $$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad |x| < 1.$$

  Restando ambas series se obtiene

  $$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x| < 1. \tag{5.1}$$

Esta última serie es mucho mejor para la aproximación de los logaritmos. Es, por tanto, la que se usa en muchos asistentes computacionales para el cálculo de logaritmos.

***Ejemplo* 5.1.** *Para $x = \frac{1}{3}$ se tiene que*

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \dots\right]$$

En la tabla (Fig 13) de [1] se puede comparar la velocidad con la que la serie de $\ln(1+x)$ y $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ aproximan $\ln 2$ para $N = 1, 2, \dots, 10$. Con $N = 10$ la segunda apeoxima $\ln 2$ con 13 cifras decimales exactas, por lo que constituye una muy buena aproximación.

***Observación* 5.1.** *De manera general se tiene que si se desea calcular el logaritmo de algún número $M > 1$ se puede utilizar la expresión* (5.1) *con*

$$x = \frac{M-1}{M+1} \Longrightarrow x = \frac{M-1}{M+1},\ M \neq -1.$$

De modo que, para todo $M > 0$. $M \neq 1$, se puede calcular $\ln M$ tomando

$$x = \frac{M-1}{M+1} \ \textit{en} \ \ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

6. Conclusión

Se obtuvieron en la clase los siguientes desarrollos en serie:

1)
$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!},$$

2)
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \longrightarrow e \ \text{ cuando } \ N \longrightarrow \infty$$

3) Se obtuvo, además, la siguiente relación entre a y k (de 1)):

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots = e^k$$

Por tanto:

$$k = \ln a.$$

4)
$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \quad |x| < 1$$

Si $k = 1 = \ln a \iff a = e$ entonces

$$\log_e(1+x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \quad |x| < 1$$

5)
$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x| < 1$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.