INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Dr. José Fidel Hernández Advincula

Dra. Elina Miret Barroso

Índice

Prólogo

Este libro pretende servir de texto básico a un primer semestre de Álgebra para la licenciatura en Matemática. Con ese fin, hemos organizado su contenido en tres capítulos.

El capítulo inicial está dedicado a los números complejos, comenzando con una breve revisión de los conjuntos numéricos conocidos y su relación con la solubilidad de ecuaciones. A continuación, se presenta el problema de la insolubilidad de la ecuación $x^2 + 1$ en el conjunto de los números reales. Se introducen los números complejos como la solución a este problema. Seguidamente, se realiza un estudio profundo de las operaciones en este nuevo conjunto numérico.

En el segundo capítulo se estudian los polinomios con coeficientes en un cuerpo. Primeramente, se observa la analogía de este conjunto con el conjunto de los números enteros y a partir de esta analogía, se introducen el algoritmo de la división con resto, la divisibilidad y el máximo común divisor. Posteriormente, se define la irreducibilidad de polinomios y se analiza la existencia de las raíces de los polinomios así cómo calcularlas. Culmina el capítulo con la presentación del conjunto de las fracciones racionales construyéndolo de forma análoga al conjunto de los números racionales.

En el tercer capítulo se presentan el método de Gauss para la solución de los sistemas de ecuaciones lineales y la regla de Cramer para los sistemas de orden dos y tres. Además, el capítulo presenta las matrices y sus operaciones, incluyendo también la definición de determinante y sus propiedades. Finalmente, el capítulo concluye con el estudio del rango y su aplicación al análisis general de los sistemas de ecuaciones lineales con teorema de Kronecker – Capelli.

Este libro es el resultado del trabajo de varios años del colectivo de profesores de esta disciplina en la Universidad de La Habana, por esta razón, no podemos dejar de reconocer y dedicar esta modesta obra a los profesores y colegas que contribuyeron con sus conocimientos y su maestría pedagógica a nuestra formación como docentes de la disciplina de Álgebra y muy en especial, a los profesores Dr. Roberto Núñez, Dra. Teresita Noriega, Dr. Héctor de Arazoza y Dr. Baldomero Valiño.

Agradecemos sinceramente a la Dra. Rita Roldán Inguanzo por la minuciosa revisión de la primera versión del texto, así como por sus acertadas recomendaciones.

Capítulo 1 Números Complejos

Durante el siglo XVI, los algebristas italianos que estudiaban las soluciones de las ecuaciones de tercer grado, se encontraron con expresiones en las que aparecían raíces cuadradas de números reales negativos.

Niccolo Fontana (Tartaglia) (1512-1557) y Gerolamo Cardano (1501-1576) obtuvieron este tipo de expresiones, pero prefirieron no utilizarlas, sin embargo Rafael Bombelli (1526-1572) observó que de alguna manera las raíces de números negativos permitían obtener soluciones reales de ecuaciones de tercer grado y así introdujo reglas para trabajar con estas expresiones que llamó “números imaginarios”.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue el primero en dar una descripción coherente de los "números complejos", representándolos geométricamente como puntos de un plano.

1.1 Recuento de los conjuntos numéricos

Recordemos brevemente los distintos conjuntos numéricos conocidos por nosotros hasta ahora.

1.1.1 Los números naturales

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

Este conjunto es infinito pues dado $n \geq 1$, encontramos $n + 1$.

Dados dos elementos n y m siempre se tiene que $n < m, n > m$ o $n = m$, para este orden tenemos un primer elemento, el uno, todo elemento tiene un sucesor y todo elemento distinto de uno tiene antecesor.

En $\mathbb{N}$ tenemos dos operaciones, la suma y el producto.

La suma es conmutativa y asociativa.

El producto es conmutativo, asociativo, tiene un neutro (el uno) y distribuye respecto a la suma.

En este conjunto una ecuación tan simple como $x + 1 = 0$ no tiene solución.

Debemos notar que algunos autores consideran el cero dentro de los naturales y otros no, pero observemos que esto no aporta nada a la solubilidad de ecuaciones, además, el cero no es de los primeros números que los hombres utilizaron para contar.

1.1.2 Los números enteros

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Claramente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, así podemos ver que este conjunto también es infinito.

Dados dos elementos n y m siempre se tiene que $n < m, n > m$ ó $n = m$, para este orden, todo elemento tiene un sucesor y todo elemento tiene antecesor.

En $\mathbb{Z}$ tenemos también dos operaciones, la suma y el producto.

La suma es conmutativa y asociativa, tiene un neutro (el cero) y todo elemento tiene opuesto.

El producto es conmutativo, asociativo, tiene un neutro (el uno) y distribuye respecto a la suma.

Notemos que en $\mathbb{Z}$ solo tienen inverso para el producto los números 1 y -1.

Un conjunto con dos operaciones con las propiedades de $\mathbb{Z}$ se llama anillo. Como el producto es conmutativo en $\mathbb{Z}$ y esta operación posee un neutro (el uno), se nombra anillo conmutativo y unitario.

Aunque en este conjunto todas las ecuaciones de la forma $x + a = 0$ tienen solución para todo $a \in \mathbb{Z}$, una ecuación tan simple como $2x + 1 = 0$ no tiene solución.

Notemos que los números negativos son una abstracción que demoró mucho en ser aceptada y formalizada por los matemáticos.

1.1.3 Los números racionales

Consideremos el conjunto de todas las fracciones $\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$ con la relación de igualdad de fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$. Este es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Tomando las fracciones de la forma $\frac{n}{1},\ n \in \mathbb{Z}$, vemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y así podemos ver que este conjunto también es infinito.

En $\mathbb{Q}$ tenemos dos operaciones, la suma y el producto, definidas como sigue:

La suma de fracciones $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ y el producto de fracciones $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Notemos que el resultado de estas operaciones no depende de las fracciones representantes, por ejemplo, al sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{4} + \frac{3}{9}$, se obtiene la misma fracción $\frac{5}{6}$.

En los racionales las operaciones de suma y producto tienen las mismas propiedades que en los enteros, pero además todo elemento diferente de cero tiene inverso para el producto, pues para la fracción $\frac{a}{b}$, basta tomar como inverso la fracción $\frac{b}{a}$.

Un conjunto dotado de dos operaciones con las propiedades de $\mathbb{Q}$, se llama cuerpo.

En este conjunto todas las ecuaciones lineales tienen solución, pero $\mathbb{Q}$ resulta insuficiente para resolver otras necesidades prácticas, por ejemplo, la diagonal del cuadrado de longitud unidad y la longitud de la circunferencia de radio unidad no pueden ser expresadas mediante números racionales.

1.1.4 Los números reales

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es un conjunto más grande que $\mathbb{R}$, pues contiene, por ejemplo, a $\sqrt{2},\ \pi$, la base de los logaritmos neperianos e, que no son números racionales.

En los reales las operaciones de suma y producto tienen las mismas propiedades que en los racionales, así $\mathbb{R}$ también es un cuerpo.

Pero nuevamente, en este conjunto una ecuación tan simple como $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución.

Nos planteamos ahora el problema de encontrar un nuevo conjunto numérico que contenga a los números reales y en el cual la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tenga solución.

1.2 Los números complejos

Para construir este nuevo conjunto numérico nos apoyaremos en el conjunto de los puntos del plano, siguiendo la idea de que la representación gráfica de los números reales viene dada por los puntos de una recta y que no hacemos distinción entre un número real y el punto que le corresponde en dicha recta, por existir una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números reales y el conjunto de todos los puntos de la recta.

Se quiere que el nuevo conjunto contenga a $\mathbb{R}$, por lo que hace falta que contenga a la recta real, de ahí que elijamos un plano. Es decir, queremos definir un conjunto de números que se puedan representar por todos los puntos del plano.

Si se elige un sistema de coordenadas rectangulares, cada punto del plano resulta un par ordenado de números reales. Convengamos en asignar a los puntos del plano las notaciones $z, z_1, z_2, \ldots$, de modo que el punto z tenga coordenadas (a, b), siendo a la abscisa de z y b su ordenada. De esta forma $z = (a, b)$.

Ahora definamos en el plano las operaciones de suma y producto con propiedades similares a las de los reales y tales que permitan dar solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

1.2.1 Definición: Llamaremos conjunto de los números complejos y lo denotaremos por $\mathbb{C}$, al conjunto de los puntos del plano (o de los pares ordenados) dado por: $\mathbb{C} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definamos ahora en dicho conjunto una igualdad, una suma y posteriormente un producto.

1.2.2 Definición: Dados dos números complejos cualesquiera $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, la igualdad se define a partir de la igualdad de sus componentes homólogas, esto es:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solo si } a = c \text{ y } b = d.$$

1.2.3 Definición: La suma de dos números complejos será por componentes, esto es:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

1.2.4 Propiedades de la suma

La suma definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.
2) Asociativa.
3) Existe un elemento neutro (0,0).
4) Para todo elemento existe el opuesto.

Demostración

1) Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$. Probemos que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Como a nivel de componentes se está sumando números reales y la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa, entonces:

$(a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1$.

La segunda propiedad se demuestra de manera análoga a la primera.

3) Veamos que para todo $z = (a, b)$ en $\mathbb{C}$, existe un número $e = (e_1, e_2)$ en dicho conjunto tal que: $z + e = z$.

Es decir, $(a, b) + (e_1, e_2) = (a, b)$

De la definición de suma tenemos que: $(a + e_1, b + e_2) = (a, b)$.

De la igualdad de números complejos se obtienen las siguientes igualdades de números reales:

$a + e_1 = a$,

$b + e_2 = b$.

Resultando que: $e_1 = 0$ y $e_2 = 0$.

Luego, el elemento neutro para la suma de números complejos es el número complejo (0,0).

4) Veamos que para todo $z = (a, b)$ en $\mathbb{C}$, existe un número complejo $z' = (x, y)$ tal que $z + z' = (0,0)$.

Es decir,

$(a, b) + (x, y) = (0,0)$

$(a + x , b + y) = (0,0)$.

Obteniéndose las igualdades:

$a + x = 0$

$b + y = 0$.

De donde se tiene que: $x = -a$, $y = -b$.

Luego, el opuesto z' de z es $(-a, -b)$ y se denota por: $-z$.

Nótese que para cada $z = (a, b)$ en $\mathbb{C}$, puede probarse que $-z = (-a, -b)$ es el único número complejo tal que $z + (-z) = (0,0)$.

■

1.2.5 Interpretación geométrica de la suma en $\mathbb{C}$

Puede verse fácilmente que la suma de números complejos coincide con la suma geométrica de vectores del plano con origen en el (0,0), dado que cada número complejo se identifica con el punto extremo del vector orientado desde el origen de coordenadas, teniendo lugar la conocida "Regla del Paralelogramo" (Figura 1).

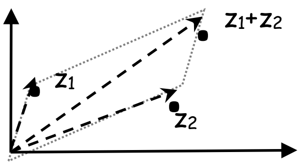


Figura 1

Notemos que el conjunto de los números complejos considerados como pares ordenados de números reales contiene el subconjunto $\{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$ que está en biyección con $\mathbb{R}$. Esto nos permite identificar a todo número real a como un número complejo $(a, 0)$.

1.3 Producto de números complejos

Queremos definir un producto que permita resolver la ecuación $z^2 + 1 = 0$, es decir, un producto que admita la existencia de un par ordenado (a, b) tal que $(a, b)^2 + 1 = 0$, lo que equivale a satisfacer que $(a, b)^2 = -1$ y teniendo en cuenta que -1 se corresponde con $(-1,0)$ por la biyección anterior, esto equivale a que tal par satisfaga que $(a, b)^2 = (-1,0)$.

Podríamos pensar en definir también el producto por componentes, pero de esta forma no existiría ningún par ordenado (a, b) tal que $(a, b)^2 = (-1,0)$.

1.3.1 Definición: Se define el producto de pares ordenados como

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

1.3.2 Propiedades del producto

El producto así definido satisface las siguientes propiedades:

1) Conmutativo.
2) Asociativo.
3) Existe un elemento neutro (1,0).
4) Para todo elemento no nulo existe inverso.
5) El producto distribuye respecto a la suma.

Demostración

1) Sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ dos números complejos cualesquiera.

   $z_1 . z_2 = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = z_2 . z_1$.

2) Se demuestra de manera análoga a la propiedad 1).

3) Veamos que para todo $z = (a, b)$ en $\mathbb{C}$ existe un número $e = (e_1, e_2)$ en dicho conjunto tal que se cumple que: $z.e = z$

   Es decir,

   $(a, b).(e_1, e_2) = (a, b)$. (1)

   Notemos que en la igualdad anterior, si $(a, b) = (0,0)$, se tiene una identidad para todo (e_1, e_2), es decir:

   $(0, 0) . (e_1, e_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (0, 0) = (0, 0)$,

   lo que nos impide deducir las características de (e_1, e_2) en la igualdad (1), cualquiera sea (a, b).

   Por tanto, supongamos que en el par (a, b), a y b no sean simultáneamente nulos.

   De la definición de producto:

   $(ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) = (a, b)$.

   De la igualdad de números complejos tenemos que:

   $ae_1 - be_2 = a$. (2)

$ae_2 + be1 = b.$ (3)

Multiplicando (2) por a y (3) por b y sumando se obtiene:

$(a^2 + b^2)\, e_1 = \ a^2 + b^2,$

de donde:

$(a^2 + b^2)(\, e_1 - 1) = 0.$

Como a y b no son cero simultáneamente, se tiene que $e_1 = 1$.

Si a≠0, sustituyendo $e_1 = 1$ en (2), tenemos que $e_2 = 0$.

(Igualmente, si b≠0, sustituyendo $e_1 = 1$ en (1), queda $e_2 = 0$)

Es decir, $(a, b).(1, 0) \ = \ (a, b)$.

Notemos que si $a = b = 0$, se tiene que $(0,0).(1,0) = (0, 0)$.

Luego, podemos concluir que:

El neutro para el producto es el número complejo $(1,0)$.

4) Veamos que para todo $z = (a, b)$ distinto de (0,0) en $\mathbb{C}$, existe un número $z^{-1} = (x, y)$ en dicho conjunto que cumple que: $z.z^{-1} = \ (1\ ,0)$.

(A este número z^{-1} le llamaremos inverso de z) ;

es decir,

$(a, b).(x, y) \ = \ (1{,}0)$.

De la definición de producto:

$(ay - bx, ax + by) = (1{,}0)$.

De la igualdad de números complejos:

$ay - bx = 1.$ (3)

$ax + by = 0\ .$ (4)

Multiplicando (3) por a y (4) por b y sumando queda:

$(a^2 \ + b^2)y = a.$

Como a y b no son nulos simultáneamente:

$y = \frac{a}{a^2 + b^2}.$

Sustituyendo en (4):

$ax = -\frac{ba}{a^2 + b^2}$,

de donde:

$x = -\frac{b}{a^2 + b^2}$.

O sea, el inverso de $z = (a, b)$ es $z^{-1} = \left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\ ,\ \frac{a}{a^2 + b^2}\right)$.

Nótese que para cada z no nulo, existe un único inverso.

5) Veamos que para todos $z_1 = (a, b),\ z_2 = (c, d)\ \ y\ \ z_3 = (e, f)$ en $\mathbb{C}$ se cumple que:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3.$$

En efecto

$$z_1(z_2 + z_3) = (a, b).[(c, d) + (e, f)]$$

$$= (a, b).(c + e, d + f)$$

$$= \big(a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)\big)$$

$$(ac + ae - bd - bf, \qquad ad + af + bc + be)$$

$$z_1.z_2 + z_1.z_3 = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$$

$$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)$$

$$= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)$$

Luego, $z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$.

■

1.3.3 Solución de la ecuación $\mathbf{z^2 + 1 = 0}$

Resolver la ecuación $z^2 + 1 = 0$, es equivalente a resolver $z^2 = -1$.

Veamos que existe un par ordenado $z = (a, b)$ tal que $(a, b)^2 = (-1,0)$.

$(a, b)^2 = (a^2 - b^2, 2ab) = (-1,0)$.

Como $a, b \in \mathbb{R}$, podemos descomponer en dos ecuaciones:

$a^2 - b^2 = -1$ y $2ab = 0$, de la segunda $a = 0$ o $b = 0$, si $b = 0$ no tenemos solución, si $a = 0$ entonces $-b^2 = -1$, o sea $b^2 = 1$, de donde $b = \pm 1$.

Luego las soluciones serían $(0,1)$ y $(0, -1)$.

1.4 Forma binómica de los números complejos

Las operaciones antes definidas nos permiten escribir:

$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1)$.

Si denotamos por i al número $(0,1)$. Como $(a,0)$ y $(b,0)$ se pueden identificar, respectivamente, con los reales a y b por la biyección, entonces podemos escribir el número complejo (a,b) en la forma: $a + bi$.

Así podemos definir el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como el conjunto de los puntos del plano $\{(a,b), a,b \in \mathbb{R}\}$, o de los números de la forma $\{a + bi, a,b \in \mathbb{R}\}$.

1.4.1 Definición: La expresión $a + bi$ recibe el nombre de forma binómica de los números complejos. El número i se llama la unidad imaginaria.

Una observación importante es que el nombre "imaginario" no implica para nada que dudamos de la existencia de este número, igualmente ocurre al nombrar números "complejos", se trata solo de un nombre, no implica para nada que sean más raros que los reales.

Las operaciones en forma binómica son consecuencias de las operaciones con pares ordenados:

La suma $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

El producto $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Estas fórmulas no tienen que memorizarse, pues basta multiplicar los números como binomios y luego tener en cuenta que $i^2 = -1$.

En la expresión de un número complejo z en forma binómica $z = a + bi$, a recibe el nombre de parte real de z y b parte imaginaria de z, denotándose respectivamente por Rez e Imz.

Ya vimos las propiedades de la suma y el producto.

Nótese que para encontrar el inverso de un número complejo en forma binómica

$z = a + bi$ basta solo con multiplicar y dividir por la expresión $z = a - bi$,

$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$.

Así, en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ las operaciones de suma y producto tienen las mismas propiedades que en los racionales y los reales, por lo tanto, $\mathbb{C}$ también es un cuerpo.

1.4.1 Potencias de i

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, pueden obtenerse todas las potencias de i para *n* entero no negativo. Así: $i^3 = -i,\ i^4 = 1, i^5 = i,\ i^6 = -1, \ldots$y, en general:

$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i,\ \ k \in \mathbb{Z}_+.$

Si empezamos en $k = 0$, las potencias de i se repiten a partir de la cuarta:

$\boxed{i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i}, \quad \boxed{i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \qquad i^6 = -1, \qquad i^7 = -i},$

Luego, para calcular cualquier potencia *s* de i superior a 4, basta efectuar la división del exponente *s* por 4, y como en la división, el dividendo *s* resulta igual al divisor 4 por el cociente q más el resto *r*, queda que: $i^s = i^{4q+r}$, siendo $r < 4$. Desarrollando el miembro derecho de la igualdad se obtiene una de las primeras cuatro potencias de i. Esto es:

$$i^s = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = i^r,\ \text{siendo } r < 4,\ \text{es decir } r = 0{,}1{,}2{,}3.$$

Por ejemplo, si se quiere calcular: i^{101}. Como $101 = 4\,.\,25 + 1$, entonces:

$i^{101} = i^{4\,.25+1} = i^{4\,.25}.i = i.$

Igualmente se tienen las potencias negativas de *i*, teniendo en cuenta que $i^{-1} = -i$.

Del producto de números complejos se infiere que para todo natural *n* la potencia *n*-ésima del número complejo $z = a + bi$ es el número complejo que resulta del producto:

$$\underset{n\ veces}{(a + bi) \cdots (a + bi)}$$

También, se puede desarrollar la potencia empleando la fórmula del binomio de Newton, teniendo en cuenta las potencias de *i*. Así,

$(a + bi)^n = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\, i^p$, donde $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$

Por ejemplo, para hallar la potencia cuadrada del número complejo 1+*i*, podemos efectuar el producto:

$$(1 + i)^2 \ = (1 + i)(1 + i) = 2i.$$

Pero también, podemos desarrollar el binomio al cuadrado:

$$(1 + i)^2 = 1^2 - 2(1)(i) + i^2 = 2i.$$

Cuando el exponente es elevado, este procedimiento resulta engorroso.

Más adelante, se encontrará otra forma de expresar un número complejo que facilitará la obtención de potencias elevadas.

1.5 Conjugado de un número complejo

Notemos que la expresión que hemos utilizado para calcular el inverso de un número complejo $z = a + bi$, es un número complejo asociado a z que consiste en cambiar el signo a la parte imaginaria de z.

1.5.1 Definición: El número complejo $a - bi$ se llama conjugado de $z = a + bi$ y se denota por $\bar{z}$.

El conjugado de un número complejo z es el simétrico del punto que representa a z respecto al eje real o de las abscisas, el opuesto de z es el simétrico del punto que representa a z respecto al origen de coordenadas.

1.5.2 Propiedades de la conjugación:

1) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Demostración

Demostraremos solo 1), las otras demostraciones son similares.

1) Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera, $\overline{z_1} = a - bi$ y $\overline{z_2} = c - di$, así $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$

   $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

   De aquí $\overline{(z_1 + z_2)} = (a + c) - (b + d)i.$

■

1.6 Interpretación geométrica de los números complejos

El plano cartesiano, cuyos puntos hemos identificado con los números complejos $z = (a, b)$, se conoce como *plano complejo* (Figura 2). Al eje de las abscisas de este plano se le llama *Eje real*, puesto que sus puntos representan a los números reales y al de las ordenadas se le llama *Eje* *imaginario*, pues sus puntos representan a los números complejos imaginarios puros que son los que tienen parte real nula. Si el número complejo $z = a + bi$ satisface que $a > 0,\ b > 0$, entonces pertenece al primer cuadrante del plano complejo, en tanto su opuesto resulta

$-z = -a - bi$, punto simétrico de z respecto al origen de coordenadas y ubicado en el tercer cuadrante. Igualmente, puede verse que el conjugado de z es el número $\bar{z} = a - bi$, simétrico de z respecto al eje real.

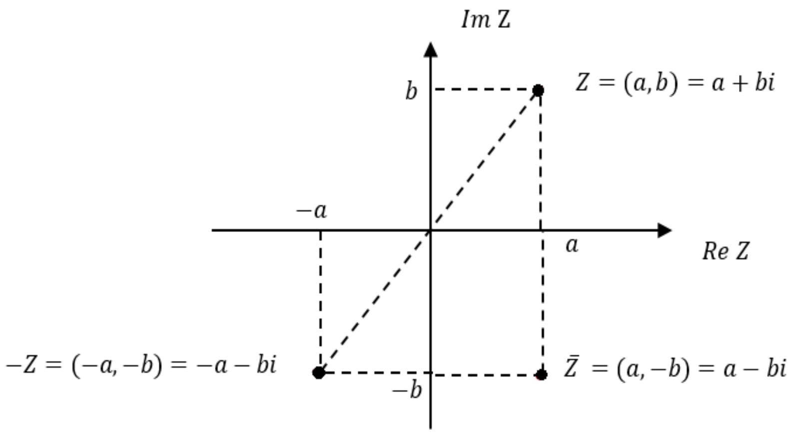


Figura 2

1.6.1 Forma trigonométrica

Todo punto del plano, además de por sus coordenadas rectangulares, puede ser determinado también a través de su distancia ρ con respecto al origen de coordenadas y el ángulo φ que se forma con el semieje positivo de las abscisas (o semieje real). Este ρ es mayor o igual que cero, pues es una distancia y se llama módulo del número complejo z, denotándose por $|z|$. El módulo de z es cero si y sólo si $z = 0$ y está unívocamente determinado para cada número complejo.

El ángulo φ que forma el radio vector con origen en $(0,0)$ y extremo en z con el semieje positivo de las abscisas (o semieje real), se llama el argumento de z. Es claro que φ no se determina unívocamente para cada z, debido a los ángulos coterminales con φ, salvo que restrinjamos los valores de φ al intervalo $[0,2\pi[$, en cuyo caso queda unívocamente determinado y se llama argumento principal de z.

Al origen de coordenadas no le asignamos argumento.

Sea $z = a + bi$ un número complejo con módulo ρ y argumento φ, respectivamente.

Aplicando las relaciones pitagóricas y trigonométricas tenemos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \;\; cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \;\; sen\varphi = \frac{b}{\rho}.$$

De aquí sustituyendo en la forma binómica de z, tenemos que $z = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$. (Ver Figura 3).

1.6.2 Definición: La expresión $z = \rho(cos\varphi + isen\varphi)$, que abreviadamente denotamos por $z = \rho(cis\varphi)$, se llama *forma trigonométrica* del número complejo z.

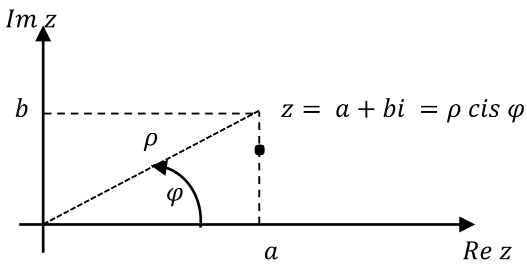


Figura 3

Dos números complejos expresados en forma trigonométrica son iguales si y solo si sus módulos son iguales y sus argumentos son coterminales.

1.6.3 Observación

Se debe tener cuidado con algunas expresiones que pueden parecerse a la forma trigonométrica de un número complejo, pero no lo son.

1.6.4 Ejemplos:

(1) $(-2)cis\frac{\pi}{5}$, no resulta la forma trigonométrica de un número complejo z, pues ρ tiene que ser positivo. Aprovechando las fórmulas trigonométricas:

$cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$ y $sen(\pi + \alpha) = -sen(\alpha)$,

puede fácilmente transformarse la expresión. Así:

$(-2)cis\frac{\pi}{5} = 2cis\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = 2\, cis\frac{6\pi}{5}$.

(2) $3\left(cos\frac{2\pi}{3} - isen\frac{2\pi}{3}\right)$, tampoco resulta la forma trigonométrica de un $z \in \mathbb{C}$, pues ambos sumandos deben ser positivos $[\rho(cos\varphi + isen\varphi)]$. Utilizando que

$cos(-\alpha) = cos\alpha$ y $sen(-\alpha) = -sen\alpha$, se transforma fácilmente a forma trigonométrica. Así:

$3\left(cos\frac{2\pi}{3} - isen\frac{2\pi}{3}\right) = 3cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

(3) $sen\frac{3\pi}{4} + icos\frac{3\pi}{4}$, NO resulta la forma trigonométrica, pues la unidad imaginaria debe acompañar al seno de φ y no al coseno. Utilizando que $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = sen\alpha$, se puede transformar la expresión a forma trigonométrica.

(4) $2sen\frac{\pi}{3} + icos\frac{3\pi}{4}$, NO puede ser la forma trigonométrica de un $z \in \mathbb{C}$ y no es posible encontrar una fórmula trigonométrica que relacione ambos ángulos, por tanto no tenemos cómo transformar la expresión para convertirla en forma trigonométrica, pero sí existen $\rho,\ \varphi$ tales que $2sen\frac{\pi}{3} + icos\frac{3\pi}{4} = \rho(cis\varphi)$.

1.6.5 Observación

Todo número complejo puede ser escrito en forma binómica y transformarse a forma trigonométrica y viceversa, aunque a veces puede ser algo complicado escribirlo de manera exacta en una de las dos formas, pues solo conocemos los valores exactos de las funciones trigonométricas en los ángulos notables.

1.6.6 Ejemplos:

(1) Obtener la forma trigonométrica de $z = 2 - 2i$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{array}{r} b = rsen\varphi \Leftrightarrow sen\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = rcos\varphi \Leftrightarrow cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \in IV Cuadrante \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Luego: $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4}$.

(2) Obtener la forma binómica de $z = 3\ cis\frac{7\pi}{6}$.

$\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ (*III Cuadrante*).

$$z = 3\ cis\frac{7\pi}{6} = 3\left(cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(-cos\frac{\pi}{6} - isen\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Luego: $z = 3\, cis\frac{7\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$

1.6.7 Producto en forma trigonométrica

Sean $z_1 = \rho_1 cis\varphi_1$ y $z_2 = \rho_2 cis\varphi_2$, calculemos el producto $z_1 z_2$.

$$z_1 z_2 = (\rho_1 cis\varphi_1)(\rho_2 cis\varphi_2) = (\rho_1[cos\varphi_1 + isen\varphi_1])(\rho_2[cos\varphi_2 + isen\varphi_2]) =$$

$$= \rho_1\rho_2[(cos\varphi_1 cos\varphi_2 - sen\varphi_1 sen\varphi_2) + i(sen\varphi_1 cos\varphi_2 + cos\varphi_1 sen\varphi_2)] =$$

$$= \rho_1\rho_2\left[\left(cos(\varphi_1+\varphi_2) + isen(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right] = \rho_1\rho_2 cis(\varphi_1+\varphi_2).$$

De forma análoga se obtiene la fórmula del cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} cis(\varphi_1 - \varphi_2).$$

1.6.8 Interpretación geométrica del producto de números complejos

Con ayuda de la forma trigonométrica puede interpretarse el producto de números complejos como la realización consecutiva de dos transformaciones geométricas, una homotecia dada por el producto $\rho_1\rho_2$ y una rotación dada por la suma $\varphi_1+\varphi_2$ (Figura 4).

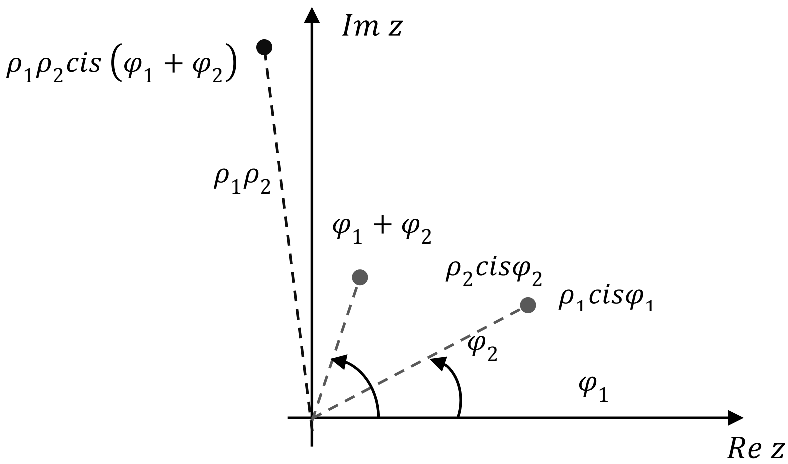


Figura 4.

1.6.9 Interpretación del inverso de un número complejo

Nótese que el inverso de un número complejo en forma trigonométrica de la forma:

$z = \rho cis\varphi$, queda como sigue:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho cis\varphi} = \frac{cis\, 0}{\rho cis\varphi} = \frac{1}{\rho} cis(-\varphi).$$

Si $\rho > 1$, el módulo de z^{-1} se contrae respecto al de z pues $1/\rho < 1$.

Si $0 < \rho < 1$, el módulo de z^{-1} se dilata respecto al de z pues $1/\rho > 1$.

Si $\rho = 1$, se trata del conjugado de z que es el simétrico de z respecto al eje real.(Ver Figura 5) .

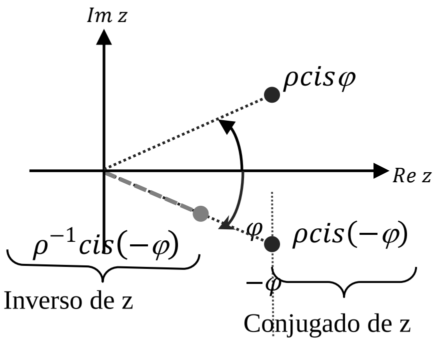


Figura 5.

1.6.10 Potenciación de números complejos

Utilizando la fórmula del producto, podemos encontrar la fórmula para la potencia n −ésima llamada fórmula de De Moivre:

Si $z = \rho cis\varphi$, entonces la potencia n −ésima está dada por: $z^n = \rho^n\big(cis(n\varphi)\big)$.

Esta fórmula puede mostrarse por inducción.

Claramente es cierta para $n = 2$:

$$z^2 = zz = (\rho cis\varphi)(\rho cis\varphi) = (\rho\rho)cis(\varphi + \varphi) = \rho^2 cis2\varphi.$$

Supongámosla válida para n y probémoslo para $n + 1$:

$$z^{n+1} = z^n z = (\rho^n cisn\varphi)(\rho cis\varphi) = (\rho^n\rho)cis(n\varphi + \varphi) = \rho^{n+1}cis(n + 1).$$

■

1.6.11 Observación

La fórmula de De Moivre también se cumple para cualquier entero negativo, pues:

$z^{-k} = (z^{-1})^k = \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{z^k}.$

1.7 Raíces de un número complejo

Ahora podemos tratar de encontrar la raíz (o las raíces) $n -$ ésimas de $z = \rho cis\varphi$, es decir, todos los números complejos $\omega = \sigma cis\theta$, tales que $\omega^n = z$.

Así, $\omega^n = \sigma^n cisn\theta = z = \rho cis\varphi$. Aplicando la igualdad entre números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos que $\sigma^n = \rho$ y $n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

De las respectivas igualdades anteriores se tiene que:

$\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ y $\theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$. Tomando $k = 0,1,2, \dots, n-1$, obtenemos todos los valores distintos para los argumentos de las raíces $n -$ésimas de $z = \rho cis\varphi$. Notemos que todas las raíces tienen el mismo módulo. Para cualquier otro entero se van a repetir los valores.

1.7.1 Definición: Las *n* raíces $n -$ésimas de $z = \rho cis\varphi$ están dadas por la fórmula:

$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ para $k = 0,1, \dots, n-1$.

Veamos cómo probar que no son infinitas las raíces diferentes en esta formulación, es decir, demostraremos que si $k = 0,1, \dots, n-1$, los *n* primeros valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ corresponden a raíces diferentes y que para los restantes valores enteros de k, los ω_k se repiten.

Probemos primero que si ω_k y ω_s son tales que $0 \le k < s \le n-1$, entonces $\omega_k \ne \omega_s$.

Las expresiones de ω_k y ω_s son:

$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} cis \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ y $\omega_s = \sqrt[n]{\rho} cis \frac{\varphi+2s\pi}{n}$.

Como $k < s$, equivale a $s > k$ y esto es si y solo si $s - k > 0$.

Para que $\omega_k \ne \omega_s$, hace falta que sus argumentos no sean coterminales dado que sus módulos coinciden.

Veamos qué ocurre con la diferencia de sus argumentos:

$\frac{\varphi+2s\pi}{n} - \left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2s\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{(s-k)}{n}\ (2).$

Como $k < s \le n-1$, entonces $s - k \le n-1$, lo que equivale $\frac{s-k}{n} < 1$.

Por tanto, los argumentos NO difieren en múltiplos enteros de 2π, luego los números complejos ω_ky $\omega_s$son diferentes.

Veamos que si $k=n$, se repite una raíz.

$$\omega_n = \sqrt[n]{\rho}cis\frac{\varphi+2n\pi}{n} = \sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) = \sqrt[n]{\rho}cis\frac{\varphi}{n} = \omega_0.$$

Análogamente, se podría probar que para todo entero k tal que $k > n$ o $k < 0$, se repiten las n raíces distintas encontradas para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Veamos que si $k > n$, también ocurre algo semejante.

Como $k > n$, podemos dividir k por n, resultando un cociente q y un resto r tales que:

$k = nq + r$, donde $r < n$.

Sustituyendo tal relación en la expresión de $\omega_k = \sqrt[n]{\rho}cis\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, queda:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}cis\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n} = \sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2nq\pi}{n}+\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2r\pi}{n}+2q\pi\right)$$

$$= \sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2r\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}cis\frac{\varphi+2r\pi}{n} = \omega_r, \text{ con } r < n.$$

De lo anterior, puede concluirse que:

Las raíces n-ésimas de un número complejo $z = \rho cis\varphi$ son exactamente n y vienen dadas por la expresión que aparece en la definición 1.7.1.

1.7.2 Observaciones

1) Las n raíces n-ésimas de un número complejo $z = rcis\varphi$ equidistan del origen del plano complejo en la longitud $\sqrt[n]{\rho}$, ubicándose sobre la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$.

2) Dadas dos raíces consecutivas cualesquiera ω_{k-1} y ω_k, se cumple que la diferencia de sus argumentos es $\frac{2\pi}{n}$, pues:

$$\theta_k - \theta_{k-1} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} - \frac{\varphi+2(k-1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}-\frac{\varphi}{n}-\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

   Luego, las n raíces n-ésimas de z están ubicadas sobre un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$, para n>2.

3) Si z es un número real, entre sus n raíces n-ésimas puede haber dos raíces reales, una o ninguna y esto va a estar determinado por el signo de z y la paridad o no de n.

1.7.3 Ejemplo

Hallar las raíces cúbicas de z = –8.

Como $z = -8 = 8\, cis\pi$, entonces:

$$\omega_k = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \text{ siendo } k = 0,1,2.$$

Si $k = 0$, $\omega_0 = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Si $k = 1$, $\omega_1 = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{\pi + 2\pi}{3} = 2(-1)$.

Si $k = 2$, $\omega_2 = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{\pi + 4\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Nótese que, como *z* posee una raíz real, entonces sus otras dos raíces son complejas conjugadas, dado que todas son vértices de un triángulo equilátero con uno de sus vértices sobre el eje real.

1.8 Raíces primitivas de la unidad

Las raíces n −ésimas de la unidad están dadas por $\varepsilon_k = cis\, \frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,2, \dots, n-1$.

1.8.1 Propiedades:

1) El producto de dos cualesquiera raíces n −ésimas de la unidad es también una raíz n −ésima de la unidad.

   Obviamente, si $\epsilon^n = 1$ y $\mu^n = 1$, entonces $\epsilon^n \mu^n = 1 \Leftrightarrow (\epsilon\mu)^n = 1$.

2) El inverso de una raíz n −ésima de la unidad es también una raíz n −ésima de la unidad.

   Si $\epsilon^n = 1 \Leftrightarrow (\epsilon^n)^{-1} = 1^{-1} \Leftrightarrow (\epsilon^{-1})^n = 1$.

3) El conjugado de una raíz n −ésima de la unidad es también una raíz n −ésima de la unidad.

   Si $\epsilon^n = 1 \Leftrightarrow \overline{(\epsilon^n)} = \overline{1} \Leftrightarrow (\bar{\epsilon})^n = 1$.

4) Todas las raíces *n*-ésimas de un número complejo pueden obtenerse multiplicando una cualquiera de sus raíces *n*-ésimas por todas las raíces *n*-ésimas de la unidad.

   Sea *w* una raíz *n*-ésima de *z*, entonces $w^n = z$.

   Sea ϵ raíz *n*-ésima de la unidad, entonces $\epsilon^n = 1$.

   Como $z = z.1 = w^n.\epsilon^n = (w\epsilon)^n$.

Luego, el producto $w\epsilon$ es una raíz n-ésima de z.

1.8.2 Ejemplo

Las raíces cuartas de la unidad son:

$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = cis\frac{\pi}{2} = i, \varepsilon_2 = cis\pi = -1, \varepsilon_3 = cis\frac{3\pi}{2} = -i.$

Forman el conjunto $\{1, i, -1, -i\}$.

Al hallar las potencias de i obtenemos todas las raíces.

1.8.3 Definición: Una raíz n-ésima de la unidad tal que todas sus potencias recorren el conjunto de todas las raíces n-ésimas de la unidad se llama raíz primitiva n-ésima de la unidad.

En el ejemplo anterior, $\varepsilon_1$es una raíz primitiva cuarta de la unidad, pues todos los elementos del conjunto solución de las raíces cuartas de la unidad $\{1, i, -1, -i\}$, se pueden expresar como potencias de i:

$$1 = i^0, \qquad i = i^1, \qquad -1 = i^2, \qquad -i = i^3.$$

Además, $\varepsilon_3 = -i$ también es una raíz primitiva cuarta de la unidad y $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_2 = -1$ no son raíces primitivas cuartas de la unidad.

1.8.4 Ejemplo

Las raíces cúbicas de la unidad son:

$$\epsilon_0 = cis\ 0 = 1, \epsilon_1 = cis\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \epsilon_2 = cis\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para hallar las raíces cúbicas de $z = -8$, sabemos que una de ellas es $w = -2$. Podemos comprobar que del producto de $w = -2$ por las raíces cúbicas de la unidad diferentes de 1, obtenemos las dos soluciones restantes.

$$w.\epsilon_1 = -2cis\frac{2\pi}{3} = (-2)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3},$$

$$w.\epsilon_2 = -2cis\frac{4\pi}{3} = (-2)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Veamos cuando ε es raíz primitiva n-ésima de la unidad.

1.8.5 Teorema

Sea ε una raíz primitiva n-ésima de la unidad, entonces ε^k es raíz primitiva n-ésima de la unidad si y solo si k y n son primos relativos.

Demostración

ε^k es raíz primitiva n-ésima de la unidad $\Rightarrow d = mcd(k,n) = 1$.

Para que ε^k sea raíz primitiva n-ésima tiene que suceder que todas las potencias de ε^k inferiores a n sean diferentes de uno, esto es: $(\varepsilon^k)^s \neq 1$, cuando $s = 0,1,2,\dots,n-1$, pues si $(\varepsilon^k)^s = 1$, entonces ε^k sería raíz s-ésima y n-ésima, luego se repetiría.

Si $d = mcd(k,n) > 1, k = dk', n = dn', (kn' = (k'd)n' = k'(dn') = k'n)$

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1.$$

Así, $(\varepsilon^k)^{n'} = 1$ para $n < n'$, luego ε^k no es raíz primitiva.

$d = mcd(k,n) = 1 \Rightarrow \varepsilon^k$ es raíz primitiva.

(Supongamos ε^kno es raíz primitiva n-ésima, entonces existe $m < n$ tal que$(\varepsilon^k)^m = 1 = \varepsilon^{km}$.

Como ε es raíz primitiva n-ésima $\Rightarrow km$ es múltiplo de n.

Ahora como $m < n \Rightarrow m$ y n no son primos relativos.

■

Se tiene inmediatamente:

1.8.6 Corolario

Las raíces $n-$ésimas de la unidad que son primitivas, son las ε_k con k primo relativo con n.

1.8.7 Observaciones:

1) El número de raíces primitivas n-ésimas de la unidad es igual a la cantidad de enteros entre 1 y $n-1$ que son primos relativos con n.
2) Si n es primo, entonces todas las raíces n-ésimas de la unidad son primitivas.

1.8.8 Ejemplos:

1) Para orden 4: $\epsilon_k = cis\frac{2k\pi}{4},\ \ k = 0,1,2,3.$

   Del corolario:

   1 y 4 son primos $\Rightarrow \epsilon_1$ primitiva cuarta de la unidad, $\epsilon_1 = cis\frac{\pi}{2} = i$.

3 y 4 son primos $\Rightarrow \epsilon_3$ primitiva cuarta de la unidad, $\epsilon_3 = cis\,\frac{3\pi}{2} = -i$.

Para orden 5: $\epsilon_k = cis\,\frac{2k\pi}{5},\;\; k = 0,1,2,3,4$.

De la segunda observación, como n=5 es un número primo, entonces todas las raíces quintas de la unidad distintas de uno son primitivas.

Ejercicios Capítulo 1

1) Hallar los números reales x, y tales que:

   $(1 + 2i)x\; + (3 - 5i)y\; =\; 1 - 3i$.

2) Resolver:

   a) $(1 + itg\alpha)/\,(1 - itg\alpha)$.

   b) $(a + bi)/(a - bi)$.

   c) $(1 + i)n\;/\;(1 - i)n - 2\;\; n \in \mathbb{N}$.

3) Resolver:

   $\begin{cases} (3 - i)x\; +\; (4 + 2i)y\; =\; 2 + 6i \\ (4 + 2i)x - \;(2 + 3i)y\; =\; 5\; +\; 4i \end{cases}$

4) Calcular todos los números que son conjugados:

   a. con su cuadrado.

   b. con su cubo.

5) Calcular:

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})(cos\alpha + isen\alpha)}{2(1 - i)(cos\alpha - isen\alpha)}.$$

6) Hallar los lugares geométricos de los puntos *z* que satisfacen las desigualdades:

   a. $|z| <\; 2$.

   b. $|z - i| \leq\; 1$.

   c. $|z - \;1 - i| <\; 1$.

7) Hallar los lugares geométricos de los puntos *z* que satisfacen las desigualdades:

   a) El argumento principal de z es menor que $\frac{\pi}{2}$.

b) Su argumento principal está entre $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{3\pi}{4}$ (ambos incluidos).

8) Calcula utilizando la forma trigonométrica:

$$\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

9) Encuentre las raíces cúbicas del número complejo $z = -1 + i$ expresando los resultados en forma binómica.

10) Resolver las ecuaciones:

a) $x^2 + ix + 2 = 0$.

b) $4ix^2 + 8x - (1 + 4i) = 0$.

11) Demostrar que el conjugado de toda raíz *n*-ésima de la unidad es también una raíz *n*-ésima de la unidad.

12) Utilizando la forma trigonométrica de los números complejos, obtenga una expresión de $cos5x$ en términos de $cosx$ y $senx$.

13) Demuestre que las raíces cúbicas del número complejo $z = \frac{1+5i}{i-5}$ se representan geométricamente en los vértices de un triángulo equilátero.

14) Analice si todo número complejo no nulo cuyo cuadrado coincide con su conjugado forma parte del conjunto de las raíces sextas de la unidad.

15) Para todo número complejo z se puede definir mediante la fórmula

$e^z = e^a(cosb + isenb)$ con $z = a + bi$

De acuerdo con lo anterior, si $z = \rho cis\varphi = \rho e^{i\varphi}$

a) Deduzca las fórmulas de Euler

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

b) Probar que $e^{\overline{\alpha}} = \overline{e^{\alpha}}$ si $\alpha = a + bi$.

17) Demostrar que todo número complejo z, distinto de -1 y cuyo módulo es igual a 1, puede expresarse en la forma $\frac{1+ti}{1-ti}$ donde t es un número real.

Capítulo 2 Polinomios

Ya sabemos que el estudio de las ecuaciones y su solubilidad permitieron ampliar sucesivamente los conjuntos numéricos.

La fórmula de la solución de la ecuación de segundo grado es conocida desde los babilonios, la de tercero se le atribuye a Cardano y la de cuarto a Tartaglia y Ferrari, a mediados del siglo XVI. No fue hasta el siglo XIX que Niels Henrik Abel (1802 - 1829) y Evariste Galois (1811 - 1832) demuestran que no existe una fórmula para ecuaciones de grado mayor o igual que cinco.

Recordemos que los conjuntos como $\mathbb{Z}$ con una suma y un producto con propiedades similares a las de $\mathbb{Z}$, son llamados anillos, si además todo elemento no nulo tiene inverso como en $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se nombran cuerpos.

Estudiaremos ahora polinomios con coeficientes en un cuerpo K.

2.1 Definición de polinomio

2.1.1 Definición: Llamaremos polinomio con coeficientes en un cuerpo K en una indeterminada x a una expresión del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots + a_nx^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K$$

Notemos que un polinomio está completamente definido por una sucesión de elementos de K, $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, que satisface que casi todos los a_i (todos excepto un número finito) son cero.

2.1.2 Ejemplos

$p(x) = -3 + x + 4x^2$, es un polinomio que está definido por la sucesión $\{-3, 1, 4, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

$p(x) = 5$, es un polinomio que está definido por la sucesión $\{5, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

$x^{-1} = \frac{1}{x}$, no es un polinomio.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, no es un polinomio.

2.1.3 Notaciones

x se nombra indeterminada.

Los a_i se llaman coeficientes.

a_0 es el término independiente.

Si todos los $a_i = 0$, el polinomio se llama nulo y se denota por $0(x) \equiv 0$. Utilizamos la notación $\equiv$ para indicar que esto no es una ecuación, sino que es el polinomio idénticamente nulo.

Si $p(x)$ no es el polinomio idénticamente nulo, al mayor *i* tal que $a_i \neq 0$, se llama grado de $p(x)$ y a tal a_i se le llama coeficiente principal.

Al polinomio nulo no le asignamos grado.

Los polinomios de coeficiente principal uno, se llaman mónicos.

Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en K lo denotamos por $K[x]$.

2.1.4 Definición de igualdad

Dos polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... + b_mx^m$, son iguales si sus coeficientes son iguales, esto es $a_i = b_i$, para todo *i*.

2.2 Operaciones con polinomios

2.2.1 Definición de suma

La suma de los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... + b_mx^m$ es el polinomio $p(x) + q(x)$ de coeficientes $a_i + b_i$.

Esta suma tiene las siguientes propiedades:

2.2.2 Propiedades:

1. Asociativa.
2. Conmutativa.
3. Existe un elemento neutro, el polinomio nulo.
4. Para todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$ existe el opuesto $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$.

2.2.3 Definición de producto

El producto de los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... + b_mx^m$ es el polinomio $p(x)q(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ ... + d_kx^k$ donde el coeficiente $d_i = \sum_{s+t=i} a_s + b_t$.

Notemos que esto nos dice que el coeficiente de grado i de $p(x)q(x)$ está dado por la suma de todos los productos de coeficientes de grado s de $p(x)$ por coeficientes de grado t de $q(x)$ siendo $s+t=i$.

El producto tiene las siguientes propiedades:

2.2.4 Propiedades:

1. Asociativo.
2. Conmutativo.
3. Distribuye respecto a la suma.
4. Existe un elemento neutro, el polinomio $p(x) \equiv 1$.

2.2.5 Observaciones:

1. Puede verse que $gr[p(x)q(x)] = gr[p(x)] + gr[q(x)]$.

   De aquí sale que un polinomio posee inverso para el producto si y sólo si es un polinomio constante.

2. Notemos que hay una gran analogía entre $\mathbb{Z}$ y $K[x]$.

Como no todos los elementos poseen inverso para el producto no podemos definir la división como la operación inversa del producto.

Recordemos que en $\mathbb{Z}$, es posible dividir con resto, esto es dados m y $n \neq 0$ de $\mathbb{Z}$ existen q y r únicos, con $0 \leq r < n$ tales que $m = nq + r$.

En $K[x]$, podemos hacer algo similar.

2.2.6 Algoritmo de la división con resto

Dados dos polinomios $a(x)$ y $b(x) \neq 0$ en $K[x]$, existen $q(x)$ y $r(x)$únicos, tales que $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$ con $r(x) \equiv 0$ ó $gr[r(x)] < gr[b(x)]$.

Idea de la Demostración:

Es fácil probar rápidamente la unicidad, suponemos que existen otros $q'(x)$ y $r'(x)$, tales que $a(x) = b(x)q'(x) + r'(x)$ con $r'(x) \equiv 0$ ´o $gr[r'(x)] < gr[b(x)]$.

Igualando $b(x)q(x) + r(x) = b(x)q'(x) + r'(x)$

$$b(x)\,(q(x) - q'(x)) = r(x) - r'(x)$$

Como

$gr[b(x)\,(q(x) - q'(x))] = gr[b(x)] + gr[(q(x) - q'(x))] = gr[(r(x) - r'(x))]$, de aquí $gr[(r(x) - r'(x))] \geq gr[b(x)]$.

Por otro lado $gr[r(x)] < gr[b(x)]$ y $gr[r'(x)] < gr[b(x)]$, luego

$gr[(r(x) - r'(x))] < gr[b(x)]$.

Aquí tenemos una contradicción, entonces $r(x) - r'(x) = 0$ y $q(x) - q'(x) = 0$.

La demostración de la existencia es esencialmente el proceso de dividir y se basa en el hecho de que al ser los coeficientes elementos de K, cualquiera no nulo posee inverso.

■

2.2.7 Ejemplo

Dividamos $a(x) = 9x^4 - 26x^2 + 5x - 6$ por $b(x) = 3x^2 + 5x - 6$:

$$
\begin{array}{r|l}
9x^4 - 26x^2 + 5x - 6 & 3x^2 + 5x - 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-9x^4 - 15x^3 + 18x^2} \qquad\qquad & 3x^2 - 5x + \dfrac{17}{3} \\
-15x^3 \; -8x^2 + 5x - 6 & \\
\underline{15x^3 + 25x^2 - 30x} \quad & \\
17x^2 - 25x - 6 & \\
\underline{-17x^2 - \frac{85}{3}x + \frac{102}{3}} & \\
\underbrace{-\frac{160}{3}x + 28} \quad &
\end{array}
$$

Entonces $q(x) = 3x^2 - 5x + \frac{17}{3}$ y $r(x) = -\frac{160}{3}x + 28$, de donde:

$$9x^4 - 26x^2 + 5x - 6 = (3x^2 + 5x - 6)\left(3x^2 - 5x + \frac{17}{3}\right) + \left(-\frac{160}{3}x + 28\right)$$

A partir de ahora explotaremos al máximo la analogía entre $\mathbb{Z}$ y $K[x]$.

2.3 Divisilidad

2.3.1 Definición: Sean $a(x)$y $b(x) \in K[x]$, se dice que $a(x)$ es divisible por $b(x)$ (o $a(x)$es múltiplo de $b(x)$, o $b(x)$es divisor de $a(x)$, o $b(x)$ divide a $a(x)$) si el resto de la división de $a(x)$ entre $b(x)$es el polinomio nulo.

$a(x)$ es divisible por $b(x) \Leftrightarrow \exists q(x)$ tal que $a(x) = b(x)q(x)$.

2.3.2 Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}[x]$, $x^5 - 5x + 1$ no es divisible por $x^4 + x - 1$.
2. En $\mathbb{C}[x]$, $x^2 + 1$ es divisible por $x + i$.
3. ¿Será $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de $\mathbb{R}[x]$ divisible por $b(x) = 4$? Claro, pues

   $a(x) = (4)\left(\frac{1}{4}\right)b(x)$.

2.3.3 Propiedades de la divisibilidad

1. Todo polinomio es divisible por cualquier constante no nula.
2. Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$ y $g(x)$ es divisible por $h(x)$, entonces $f(x)$ es divisible por $h(x)$.
3. Si $f(x)$ divide a $g(x)$ y a $h(x)$, entonces divide también a $\alpha(x)g(x) + \beta(x)h(x)$
4. Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$, entonces es divisible por $cg(x)$, para c constante no nula.
5. $f(x)$ y $g(x)$ se dividen mutuamente si y sólo si $f(x) = cg(x)$, con c constante no nula. Si esto pasa decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son asociados.

Demostración:

1. La demostración de este hecho es esencialmente la misma que en el último ejemplo anterior.
2. $f(x)$ es divisible por $g(x) \Rightarrow f(x) = q_1(x)g(x)$, $g(x)$ es divisible por

   $h(x) \Rightarrow g(x) = q_2(x)h(x)$, sustituyendo una en la otra

   $$f(x) = q_1(x)\Big(q_2(x)\big(h(x)\big)\Big) = \big(q_1(x)q_2(x)\big)h(x),$$

   así $f(x)$ es divisible por $h(x)$.
3. $f(x)$ divide a $g(x) \Rightarrow g(x) = q_1(x)f(x)$,$f(x)$ divide a $h(x) \Rightarrow h(x) = q_2(x)f(x)$, como $\alpha(x)g(x) + \beta(x)h(x)$, sustituyendo

   $\alpha(x)q_1(x)f(x) + \beta(x)q_2(x)f(x) = [\alpha(x)q_1(x) + \beta(x)q_2(x)]f(x)$, así es divisible por $f(x)$.

4. $f(x)$ es divisible por $g(x) \Rightarrow f(x) = q(x)g(x) = \left(\frac{1}{c}q(x)\right)\left(cg(x)\right)$, luego es divisible por $cg(x)$.

5. $f(x)$ y $g(x)$ se dividen mutuamente $\Rightarrow f(x) = cg(x)$.

   $f(x)$ es divisible por $g(x) \Rightarrow f(x) = q_1(x)g(x)$, $g(x)$ es divisible por $f(x) \Rightarrow g(x) = q_2(x)f(x)$. Sustituyendo una en la otra $f(x) = q_1(x)q_2(x)f(x) \Rightarrow gr q_1(x)q_2(x) = 0 \Rightarrow q_1(x)$ y $q_2(x)$ son constantes no nulas.

   $f(x) = cg(x) \Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ se dividen mutuamente $f(x) = cg(x) \Rightarrow g(x)$ divide a $f(x)$ y de $f(x) = cg(x)$, tenemos $\frac{1}{c}f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)$ divide a $g(x)$.

■

2.3.4 Teorema (del Resto): El resto de la división de $p(x)$ por $(x - a)$ es igual al polinomio evaluado en a.

Demostración:

$p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$, con $gr\,[r(x)] < gr\,[(x - a)] \Rightarrow r(x) = r$ constante, luego $p(x) = (x - a)q(x) + r$, evaluando para $x = a$, tenemos $p(a) = r$.

■

2.3.5 División sintética

Veamos ahora un caso particular de división, en la cual el divisor es de la forma $(x - a)$.

Este método es conocido como División Sintética, Regla de Horner o Regla de Ruffini.

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, si hacemos la división por $(x - a)$, queda:

$f(x) = (x - a)q(x) + r$ con $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$.

De aquí, igualando coeficientes:

$$\begin{gathered} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2} \\ \cdots \\ a_1 = b_2 - ab_1 \\ a_0 = r - ab_0 \end{gathered}$$

Escribiendo esto en galera:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
a		ab_{n-1}	$\cdots$	ab_1	ab_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_2	r

Notemos que esto junto con el Teorema del Resto nos permiten evaluar fácilmente cualquier polinomio.

2.3.6 Ejemplo

Dividamos $p(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^3 + x - 3$ entre $x - 3$ (o evaluemos $p(x)$ para $x = 3$).

	2	−1	3	0	1	3
3		6	15	54	162	489
	2	5	18	54	163	492

De aquí, el cociente es $q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 18x^2 + 54x + 163$ y el resto $r = 489 = p(3)$.

2.4 Máximo Común Divisor

Nuevamente nos apoyaremos en la analogía entre $\mathbb{Z}$ y $K[x]$.

Recordemos que en $\mathbb{Z}$ existe el Máximo Común Divisor, esto es, dados dos números enteros n y m, existe $d = mcd(m, n)$, que, por definición, es el mayor de los divisores comunes, o equivalentemente el divisor común que es divisible por cualquier otro divisor común de n y m.

Definiremos de manera análoga el Máximo Común Divisor de dos polinomios.

2.4.1 Definición de Máximo Común Divisor

Dados dos polinomios $a(x)$ y $b(x)$, llamamos Máximo Común Divisor de ellos y lo denotamos por $d(x) = mcd(a(x), b(x))$, a un polinomio $d(x)$ tal que:

i. $d(x)$ es divisor común de $a(x)$ y $b(x)$, esto es, $d(x)$ divide a $a(x)$ y $d(x)$ divide a $b(x)$.
ii. $d(x)$ es divisible por cualquier otro divisor común de $a(x)$ y $b(x)$, esto es, si $d_1(x)$ es otro divisor común de $a(x)$ y $b(x)$, $d_1(x)$ divide a $d(x)$.
iii. $d(x)$ es mónico.

2.4.2 Observaciones

1. Para garantizar la unicidad del Máximo Común Divisor, se toma $d(x)$ mónico, pues tenemos infinitos polinomios que satisfacen las dos primeras condiciones de la definición, debido a los asociados.
2. Notemos que si los polinomios están descompuestos en factores resulta muy fácil encontrar el Máximo Común Divisor, como muestra el ejemplo siguiente.

2.4.3 Ejemplo: Sean los polinomios $a(x) = (x-1)^2(x+2)^3(x+1)^4$ y $b(x) = 2(x-1)^3(x+2)(x+3)^2$, entonces el $mcd(a(x), b(x)) = (x-1)^2(x+2)$, para esto se toma cada factor común a la menor potencia que aparece en cada descomposición.

Busquemos una vía de cálculo del mcd que nos sirva, aún en el caso de que no conozcamos una descomposición en factores. Para ello veamos el siguiente ejemplo en $\mathbb{Z}$.

2.4.4 Ejemplo

Sean los enteros 8307 y 1287.

Dividiendo, tenemos: $8307 = 6(1287) + 585$(I)

Volviendo a dividir: $1287 = 2(585) + 117$(II)

Dividiendo nuevamente: $585 = 5(117)$ (III)

Sustituyendo (III) en (II), tenemos:

$1287 = 2(5(117)) + 117 = 10(117) + 117 = 11(117)$ (IV)

Sustituyendo (III) y (IV) en (I), obtenemos:

$8307 = 6(11(117)) + 585 = 66(117) + 5(117) = 71(117)$.

Luego, 117 es divisor común y como los restantes divisores comunes son ± 1 y -117, entonces 117 es el mcd(8307,1287).

El procedimiento anterior se debe a Euclides y puede aplicarse también a polinomios. La demostración de dicho algoritmo es análoga a la que sigue para los polinomios

2.4.5 Algoritmo de Euclides o de las divisiones sucesivas

Sean dados los polinomios $f(x)$ y $g(x)$.

Dividimos $f(x)$ entre $g(x)$, de manera que existen $q_1(x)$ y $r_1(x)$ tales que:

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x), \qquad gr\big(r_1(x)\big) < gr\big(g(x)\big).$$

Si $r_1(x) \neq 0$, dividimos $g(x)$ entre $r_1(x)$, de manera que existen $q_2(x)$ y $r_2(x)$ tales que:

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \qquad gr\big(r_2(x)\big) < gr\big(r_1(x)\big).$$

Si $r_2(x) \neq 0$, dividimos $r_1(x)$ entre $r_2(x)$, de manera que existen $q_3(x)$ y $r_3(x)$ tales que:

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x), \qquad gr\big(r_3(x)\big) < gr\big(r_2(x)\big).$$

Así continuamos sucesivamente, hasta que algún $r_i(x) = 0$,

...

$$r_{k-3}(x) = q_{k-1}(x)r_{k-2}(x) + r_{k-1}(x), \qquad gr\big(r_{k-1}(x)\big) < gr\big(r_{k-2}(x)\big)$$

$$r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x), \qquad gr\big(r_k(x)\big) < gr\big(r_{k-1}(x)\big)$$

$$r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x).$$

De la última igualdad se deduce que $r_k(x)$ divide a $r_{k-1}(x)$, sustituyendo en la penúltima se obtiene que $r_k(x)$ divide a $r_{k-2}(x)$ y así sucesivamente, hasta llegar a las dos primeras igualdades, de modo que $r_k(x)$ divide a $f(x)$ y a $g(x)$, o sea es divisor común.

Si $d(x)$ es otro divisor común de $f(x)$ y $g(x)$, yendo ahora en sentido contrario, se obtiene que $d(x)$ divide a $r_k(x)$.

Luego $r_k(x)$ es un asociado del $mcd(f(x), g(x))$.

2.4.6 Observación: Este algoritmo termina en un número finito de pasos, pues en cada paso dividimos entre el resto de la división anterior, por lo tanto, los grados van disminuyendo y tenemos que llegar a un paso en que el resto es cero.

2.4.7 Ejemplo

Encontrar el mcd de los polinomios $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

y $g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Primeramente, dividamos $f(x)$ entre $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 & x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1} & \qquad 1 \\ \underbrace{2x^3 + 2x} & \end{array}$$

De dividir $f(x)$ entre $g(x)$, hemos obtenido por cociente al polinomio $q_1(x) = 1$ y por resto a $r_1(x) = 2x^3 + 2x = 2(x^3 + x)$. Como nuestro objetivo es buscar el mayor de los divisores comunes de $f(x)$ y $g(x)$, podemos siempre multiplicar por constantes no nulas, lo que evita el trabajo con coeficientes fraccionarios, por lo que en la próxima división trabajaremos con un polinomio asociado del resto anterior: $\frac{1}{2}r_1(x) = x^3 + x$.

La segunda división a realizar consiste en dividir $g(x)$ por $\frac{1}{2}r_1(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^3 + x \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 \qquad - x^2 \qquad\qquad} & x - 1 \\
\quad -x^3 + x^2 - x + 1 & \\
\quad \underline{x^3 \qquad + x \quad} & \\
\qquad \underbrace{x^2 + 1} &
\end{array}
$$

De dividir $g(x)$ entre $\frac{1}{2}r_1(x)$, obtuvimos $q_2(x) = x - 1$ y $r_2(x) = x^2 + 1$.

En la tercera división el dividendo es $\frac{1}{2}r_1(x) = x^3 + x$ y el divisor $r_2(x) = x^2 + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 - x} & x \\
\quad \underbrace{0} &
\end{array}
$$

Así, de dividir $\frac{1}{2}r_1(x)$ entre $r_2(x)$, obtuvimos $q_3(x) = x$ y $r_3(x) = 0$.

Luego, $mcd(f(x), g(x)) = x^2 + 1$.

Este método no solo es una vía de cálculo del mcd, sino que demuestra su existencia.

En el ejemplo anterior:

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$$

$$\frac{1}{2}r_1(x) = q_3(x)r_2(x).$$

Sustituyendo unas igualdades en otras:

$$r_2(x) = -\frac{1}{2}q_2(x)f(x) + \left[1 + \frac{1}{2}q_1(x)q_2(x)\right]g(x).$$

O sea, si llamamos $u(x) = -\frac{1}{2}q_2(x)$ y $v(x) = 1 + \frac{1}{2}q_1(x)q_2(x)$ podemos escribir el mcd como una combinación de los polinomios dados. Este es un hecho general.

2.4.8 Teorema de Bezout

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de $K[x]$, entonces existen $u(x)$ y $v(x)$, tales que $mcd(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$. Siempre pueden elegirse $u(x)$ y $v(x)$, tales que el grado de $u(x)$ es menor que el grado de $g(x)$ y el grado de $v(x)$ es menor que el grado de $f(x)$.

Demostración:

La demostración de la existencia se basa en el Algoritmo de Euclides, según el cual sabemos que el último resto no nulo $r_k(x)$ es un asociado del $mcd\big(f(x), g(x)\big) = d(x)$. Ahora sustituyendo $r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x)$ en $r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x)$, tomando $u_1(x) = 1$ y $v_1(x) = -q_k(x)$, obtenemos que $d(x) = r_{k-2}(x)u_1(x) + r_{k-1}(x)v_1(x)$, continuando este procedimiento con las demás igualdades del Algoritmo de Euclides, obtenemos la identidad.

Para demostrar que pueden elegirse $u(x)$ y $v(x)$, tales que el grado de $u(x)$ es menor que el grado de $g(x)$ y el grado de $v(x)$ es menor que el grado de $f(x)$, supongamos que tenemos la identidad y que por ejemplo, el grado de $u(x)$ es mayor o igual que el grado de $g(x)$. Dividiendo $u(x)$ entre $g(x)$, tenemos que $u(x) = g(x)q(x) + r(x)$, con el grado de $r(x)$ menor que el grado de $g(x)$. Sustituyendo esta igualdad en la identidad, obtenemos:

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

$$d(x) = [g(x)q(x) + r(x)]f(x) + v(x)g(x)$$

$$d(x) = r(x)f(x) + [v(x) + q(x)f(x)]g(x)$$

Ahora ya el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $g(x)$.

Si $gr[v(x) + q(x)f(x)] > grf(x)$, entonces $gr[v(x) + q(x)f(x)]g(x) \geq grf(x)g(x)$.

Además, como $gr\big(r(x)\big) < grg(x)$, tenemos que $gr\big(r(x)\big)f(x) \geq grf(x)g(x)$.

Luego $grd(x) = gr\{r(x)f(x) + [v(x) + q(x)f(x)]g(x)\} \geq grf(x)g(x)$, lo que no puede ser porque $mcd\big(f(x), g(x)\big) = d(x)$.

■

La fórmula dada en el Teorema anterior es llamada Identidad de Bezout.

2.4.9 Definición: Dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se llaman primos relativos si $mcd(f(x);\ g(x)) = 1$.

2.4.10 Ejemplo

Los polinomios $x^5 - 5x + 1$ y $x^4 - x - 1$ son primos relativos.

2.4.11 Propiedades de los polinomios primos relativos

1. Los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos si y sólo si existen polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que $u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1$.
2. Si el polinomio $p(x)$ es primo relativo con los polinomios $g(x)$ y $h(x)$, lo es también con el producto $g(x)h(x)$.
3. Si el polinomio $p(x)$ divide al producto $a(x)b(x)$ y $p(x)$ es primo relativo con $a(x)$, entonces divide a $b(x)$.
4. Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos y ambos dividen al polinomio $a(x)$, entonces $p(x)q(x)$ es también divisor de $a(x)$.

Demostración:

1. Si $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos, entonces $mcd\big(p(x), q(x)\big) = 1$, por el Teorema de Bezout existen $u(x)$ y $v(x)$, tales que $u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1$. Recíprocamente, si existen $u(x)$ y $v(x)$, tales que $u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1$, y $d(x) = mcd\big(p(x), q(x)\big)$, entonces $d(x)$ divide a 1, luego $d(x) \equiv 1$.
2. Si $p(x)$ es primo relativo con $g(x)$, entonces existen $u_1(x)$ y $v_1(x)$, tales que $u_1(x)p(x) + v_1(x)g(x) = 1$, análogamente si $p(x)$ es primo relativo con $h(x)$, existen $u_2(x)$ y $v_2(x)$, tales que $u_2(x)p(x) + v_2(x)h(x) = 1$, multiplicando ambas igualdades se obtiene que

$$\big(u_1(x)p(x) + v_1(x)g(x)\big)\big(u_2(x)p(x) + v_2(x)h(x)\big) = 1$$

$$u_1(x)u_2(x)p(x)p(x) + u_1(x)v_2(x)p(x)h(x) + u_2(x)v_1(x)g(x)p(x) +$$

$$+v_1(x)v_2(x)g(x)h(x) = 1$$

$$\big(u_1(x)u_2(x)p(x) + u_1(x)v_2(x)h(x) + u_2(x)v_1(x)g(x)\big)p(x) +$$

$$v_1(x)v_2(x)g(x)h(x) = 1.$$

De aquí $p(x)$ es primo relativo con $g(x)h(x)$.

3. Si $p(x)$ divide al producto $a(x)b(x)$, entonces $a(x)b(x) = p(x)q(x)$. Como $p(x)$ es primo relativo con $a(x)$, se tiene que $u(x)p(x) + v(x)a(x) = 1$. Multiplicando esta identidad por $b(x)$, se tiene que $u(x)p(x)b(x) + v(x)a(x)b(x) = b(x)$ y sustituyendo aquí $a(x)b(x) = p(x)q(x)$, nos queda

$$u(x)p(x)b(x) + v(x)p(x)q(x) = b(x)$$

$$(u(x)b(x) + v(x)q(x))p(x) = b(x).$$

De donde $p(x)$divide a $b(x)$.

4. Si $p(x)$ divide a $a(x)$, entonces $a(x) = p(x)h(x)$. Como $q(x)$ es primo relativo con $p(x)$, por el inciso anterior $q(x)$ divide a $h(x)$, o sea $h(x) = q(x)g(x)$. Sustituyendo en $a(x)$, se tiene $a(x) = p(x)q(x)g(x)$ y así $p(x)q(x)$ es divisor de $a(x)$.

■

2.5 Raíz de un polinomio

2.5.1 Definición: Diremos que α es raíz del polinomio $p(x)$ si $p(x)$ es divisible por $x - \alpha$.

2.5.2 Ejemplo

$\sqrt{2}$ es raíz de $x^2 - 2$.

2.5.3 Observación: Notemos que:

$x^2 - 2$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}[x]$.

$x^2 - 2$ tiene raíces en $\mathbb{R}[x]$.

Esto es, la existencia o no de raíces depende del conjunto que se esté considerando.

Por el Teorema del Resto, $p(\alpha)$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - \alpha$.

Un procedimiento sencillo para obtener el resto de dividir $p(x)$ por $x - \alpha$ (o para conocer el valor $p(\alpha)$) es el empleo de la Regla de Ruffini.

2.5.4 Ejemplo:

¿1 es raíz de $p(x) = x^3 + 6x - 7$?

	1	0	6	-7
1		1	1	7
	1	1	7	0

Como $r = p(1) = 0$, entonces 1 es raíz de $p(x)$.

En este caso, también es fácil evaluar $p(1) = 1^3 + 6(1) - 7 = 0$.

¿-7 es raíz de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 13x - 6$?

	1	5	-12	13	-6
-7		-7	14	-14	7
	1	-2	2	-1	1

Como $r = p(-7) = 1 \neq 0$, entonces -7 NO es raíz de $p(x)$.

2.6 Raíces múltiples

Recordemos que en la ecuación de segundo grado, la existencia o no de raíces determinaba en qué casos la parábola cortaba o no al eje x y en el caso de cortarlo teníamos dos posibilidades: lo cortaba dos veces o era tangente al mismo, donde la tangencia estaba dada por el hecho de que la raíz fuera doble.

2.6.1 Definición

Diremos que α es raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$ si $p(x)$ es divisible por $(x-\alpha)^k$ y no por $(x-\alpha)^{k+1}$; es decir, si y solo si $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ y $q(x)$ no es divisible por $x - \alpha$.

En otras palabras, α es raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$ si y solo si

$p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ y $q(\alpha) \neq 0$.

El entero positivo k se llama orden de multiplicidad de la raíz.

Si $k = 1$ la raíz se llama simple.

2.6.2 Ejemplos

1. $p(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ luego -2 y -3 son raíces simples de $p(x)$.
2. $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$, comprobemos que 3 es raíz doble:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -5 & 3 & 9 \\
3 & & 3 & -6 & -9 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0 \\
3 & & 3 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Luego $p(x) = (x-3)^2(x+1)$, así 3 es raíz doble de $p(x)$.

2.6.3 Definición: Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, definimos su derivada como $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

Esta derivada definida de manera formal, teniendo solo en cuenta la estructura de los polinomios, coincide con la derivada de funciones que se estudia en el Análisis Matemático.

2.6.4 Ejemplo

$$f(x) = x^5 - 4x + 1$$

$$f'^{(x)} = 5x^4 - 4.$$

2.6.5 Propiedades de la derivada

a. $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$

b. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

c. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

d. $[kf(x)]' = kf'(x)$

Si α es raíz de multiplicidad k del polinomio $f(x)$, $f(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ y $q(\alpha) \neq 0$.

Derivando:

$$f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) = (x-\alpha)^{k-1}[kq(x) + (x-\alpha)q'(x)]$$

Llamando $h(x) = kq(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $h(x)$ no es divisible por $(x-\alpha)$, así hemos demostrado el resultado siguiente.

2.6.7 Teorema:

Si α es raíz de multiplicidad k del polinomio $f(x)$, entonces α es raíz de multiplicidad $k-1$ del polinomio $f'(x)$.

Aplicando el teorema reiteradas veces:

$$f(x) = (x-\alpha)^k q(x), q(\alpha) \neq 0$$

$$f'(x) = (x-\alpha)^{k-1} q_1(x), q_1(\alpha) \neq 0$$

$$\dots$$

$$f^{(k-1)}(x) = (x-\alpha)^{k-(k-1)} q_{k-1}(x) = (x-\alpha) q_{k-1}(x), q_{k-1}(\alpha) \neq 0$$

$$f^{(k)}(x) = (x-\alpha)^{k-k} q_k(x) = q_k(x), q_k(\alpha) \neq 0.$$

De aquí tenemos el siguiente resultado:

2.6.8 Teorema:

Si α es raíz de multiplicidad k del polinomio $f(x)$ si y solo si

$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, f^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

La demostración se sigue del resultado anterior.

2.6.9 Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x.$$

Así,1 es raíz doble de $f(x)$, pues $f(1) = f'(1) = 0, f''(1) \neq 0$.

2.6.10 Teorema:

Si $mcd\big(f(x), f'(x)\big) = 1$, entonces $f(x)$ no posee raíces múltiples.

2.7 El Teorema Fundamental del Álgebra

Ya sabemos cómo determinar si un número dado es raíz o no de un polinomio.

Se conoce que las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos han sido motivadas porque determinados polinomios no poseen raíces en esos conjuntos.

¿Qué pasara con $\mathbb{C}$?

La respuesta a esta pregunta está dada por el Teorema Fundamental del Álgebra.

2.7.1 Teorema:

Todo polinomio de grado mayor o igual que uno con coeficientes en $\mathbb{C}$, posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

No veremos la demostración de este teorema, pues para ello se requieren otras técnicas que están fuera del alcance de este libro.

Existen muchísimas demostraciones diferentes de este Teorema, pero todas (incluso la primera que se debe a Gauss) se basan en las propiedades topológicas de los números reales y complejos y utilizan técnicas del análisis matemático

2.7.2 Consecuencias del Teorema Fundamental del Álgebra

Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$,$gr\,[f(x)] = n \geq 1$,$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, por el Teorema Fundamental del Álgebra $f(x)$ posee una raíz en $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, así:

$f(x) = (x - \alpha_1)q_1(x)$.

Aplicando el teorema a $q_1(x)$, existe $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ raíz de $q_1(x)$, o sea:

$q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x)$, luego $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x)$.

Aplicando sucesivas veces el teorema:

$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$.

Esta descomposición es única salvo el orden de los factores.

Así tenemos los siguientes corolarios del Teorema Fundamental del Álgebra:

2.7.3 Corolario: Todo polinomio de $\mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ posee exactamente n raíces (contada cada una tantas veces como indique su multiplicidad).

2.7.4 Corolario: Todo polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$, de $\mathbb{C}[x]$ se descompone totalmente en factores lineales de $\mathbb{C}[x]$.

2.7.5 Proposición:

Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ de $gr\,[f(x)] = n \geq 1$, entonces $f(x)$ posee a lo sumo n raíces.

Demostración

Supongamos que $f(x)$ posee más de n raíces, digamos $n + 1$, sean $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ las raíces, entonces $f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{n+1})$.

Luego $gr\,[f(x)] = gr[(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{n+1})] = n + 1$

¡CONTRADICCIÓN!, pues $gr\,[f(x)] = n$.

■

Así podemos demostrar el siguiente resultado:

2.7.6 Proposición: Principio de Identidad: Sean $p(x), q(x)$ dos polinomios de $\mathbb{C}[x]$ de grados menores que n, tales que para más de n valores $\alpha_i$se cumple que $p(\alpha_i) = q(\alpha_i)$, entonces $p(x) \equiv q(x)$.

Demostración.

Consideremos $h(x) = p(x) - q(x)$, así $gr\ [h(x)] \leq n$ y $h(\alpha_i) = 0$, luego $h(x)$ tiene más de *n* raíces, por la proposición anterior, entonces $h(x) \equiv 0$, así p$(x) \equiv q(x)$.

■

2.8 Polinomios con coeficientes reales

2.8 1. Teorema

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz de $f(x)$.

Demostración

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in R$, evaluando en α, tenemos

$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$, pues α es raíz.

Si conjugamos, $\overline{(a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0)} = \bar{0} = 0$, aplicando las propiedades de la conjugación tenemos $\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = 0$

$$\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\bar{\alpha} + \overline{a_0} = 0$$

Como $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i = \overline{a_\imath}$, así nos queda

$$a_n\bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = f(\bar{\alpha}) = 0$$

Luego, α es raíz de $f(x)$.

■

Del Teorema anterior, como α y $\bar{\alpha}$ son raíces de $f(x)$.

Sean $\alpha = a + bi$ y $\bar{\alpha} = a - bi$, efectuemos el producto:

$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = (x - [a + bi])(x - [a - bi]) = ([x - a] - bi)([x - a] + bi) =$

$= ([x - a]^2 - (bi)^2) = ([x - a]^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.

2.8.2 Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C}$, no real, es raíz del polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $f(x)$ es divisible por $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$.

2.8.3 Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C}$, no real, es raíz de multiplicidad k del polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\bar{\alpha}$ es raíz de multiplicidad k de $f(x)$.

2.8.4 Lema: Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales posee al menos una raíz real.

Demostración.

Es consecuencia del hecho de que las raíces complejas no reales vienen por parejas, cada una con su conjugada.

■

De la descomposición en factores de $\mathbb{C}[x]$ y los resultados anteriores, nos queda que para los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ también tenemos una descomposición en factores, solo que no son todos lineales, los hay de segundo grado con discriminante negativo que resultan del producto

$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$, para cada raíz α compleja, no real.

2.8.5 Ejemplo: Sea $f(x) = x^4 + x^2 - 6$, como $x^4 + x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

De aquí:

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 3)$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$$

La primera es la descomposición de $f(x)$ en factores de $\mathbb{R}[x]$ y la segunda es la descomposición de $f(x)$ en factores de $\mathbb{C}[x]$.

2.9 Polinomios irreducibles

Recordando la analogía entre $\mathbb{Z}$ y $K[x]$.

En $\mathbb{Z}$ todo elemento se puede expresar de forma única, salvo el orden y el signo, como el producto de sus factores primos.

Acabamos de ver que en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ se tienen descomposiciones en factores.

En $K[x]$, en general, podemos preguntarnos si tendremos similarmente una descomposición en factores.

Tenemos que ver si existen polinomios que pueden desempeñar el papel que juegan los números primos en $\mathbb{Z}$.

Recordemos que un entero positivo mayor que 1 es primo si es divisible sólo por él mismo, la unidad y sus opuestos, o equivalentemente si no puede ser expresado como el producto de dos enteros positivos menores que él.

Generalizando a $K[x]$, tenemos la siguiente definición.

2.9.1 Definición: Decimos que $p(x) \in K[x]$, de grado ≥ 1, es irreducible en $K[x]$ si no puede expresarse como el producto de dos polinomios de grado estrictamente menor.

Decimos que es reducible en caso contrario.

2.9.2 Observación: Notemos que $p(x)$ irreducible en $K[x]$ equivale a que es divisible solo por $\alpha p(x)$ y α, con $\alpha \in K$.

El concepto de polinomio irreducible depende del cuerpo K.

2.9.3 Ejemplo:

$x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$.

$x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$.

2.9.4 Observaciones:

1. Todo polinomio de grado 1 es irreducible en $K[x]$.
2. Los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ son los de primer grado.
3. En $\mathbb{R}[x]$ los polinomios irreducibles son los de primer grado y los de segundo grado $x^2 + px + q$ con discriminante negativo, o sea $p^2 - 4q < 0$.

Como sabemos que si α es raíz de $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible por $x - \alpha$, se tiene la siguiente propiedad.

2.9.5 Proposición: Si $p(x)$ es irreducible en $K[x]$, entonces $p(x)$ no posee raíces en K.

2.9.6 Observación: En general, el recíproco no es cierto, por ejemplo:

$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ y no posee raíces en $\mathbb{Q}$.

Si $p(x)$es de grado 2 ó 3, sí vale el recíproco.

2.10 Irreducibilidad en $\mathbb{Q}$

Veremos que la irreducibilidad en $\mathbb{Q}[x]$ de un polinomio puede reducirse a la irreducibilidad de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$, con el mcd de sus coeficientes igual a 1.

2.10.1 Definición: Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$, con el mcd de sus coeficientes igual a 1 se llama primitivo.

Puede verificarse el siguiente resultado, apoyándonos en el hecho de que si a y b, son números enteros y $d = mcd(a, b)$, entonces $1 = mcd(a/d, b/d)$.

2.10.2 Proposición: Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$ es igual a un número racional por un polinomio primitivo.

2.10.3 Ejemplo:

Sea $p(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}(9x^4 + x)$.

2.10.4 Lema de Gauss: El producto de polinomios primitivos es un polinomio primitivo.

Demostración.

Sean $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots + a_kx^k$ y $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ \ldots + b_lx^l$ polinomios primitivos. Supongamos que $f(x)g(x)$ no es primitivo, entonces existe un número primo *p* que es divisor común de todos sus coeficientes. Como $f(x)$ es primitivo, no todos sus coeficientes se dividen por *p*, sea a_i el primer coeficiente de $f(x)$ que no se divide por *p*. Análogamente, sea b_j el primer coeficiente de $g(x)$, que no se divide por *p*.

Sea ahora el coeficiente c_{ij} del término x^{i+j} de $f(x)g(x)$:

$$c_{ij} = a_ib_j + a_{i-1}b_{j+1} + a_{i-2}b_{j+2} + \cdots + a_{i+1}b_{j-1} + a_{i+2}b_{j-2} + \cdots$$

El primer miembro de la igualdad se divide por *p*. Por la elección de i, j todos $a_{i-1}, a_{i-2}, \cdots$ y los $b_{j-1}, b_{j-2} \cdots$ se dividen por *p*. De aquí, todos los sumandos del miembro derecho de la igualdad, excepto a_ib_j se dividen por *p*.

Luego, a_ib_j tiene que dividirse por *p*, de donde, por ser *p* primo, uno de los dos a_i o b_j tiene que dividirse por *p*. Así, uno de los dos, $f(x)$ o $g(x)$ no es primitivo.

∎

Ahora podemos probar el siguiente resultado:

2.10.5 Teorema: Todo polinomio con coeficientes enteros irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Demostración.

Supongamos $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$, o sea $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ con $p_1(x)p_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$, pero $p_1(x) = \frac{a_1}{b_1}q_1(x)$ y $p_2(x) = \frac{a_2}{b_2}q_2(x)$ con $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ y $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ son primitivos.

Luego $p(x) = \left(\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\right) q_1(x)q_2(x)$, pero $q_1(x)q_2(x)$ es primitivo y $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces b_1b_2 tiene que dividir a a_1a_2, pues si no lo hiciera, $\frac{a_1a_2}{b_1b_2}$ sería racional no entero.

■

2.10.6 Corolario: La irreducibidad en $\mathbb{Z}[x]$ es equivalente a la irreducibidad en $\mathbb{Q}[x]$.

Tenemos una condición suficiente de irreducibilidad en $\mathbb{Z}$ [x].

2.10.7 Proposición: (Criterio de Einsenstein):

Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, si existe un número primo p tal que:

p no divide a a_n.

p divide a $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

p^2 divide a a_0.

Entonces es $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

Demostración.

Supongamos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es reducible en $Z[x]$, entonces se descompone en dos factores de menor grado con coeficientes enteros:

$f(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_lx^l)$, con

$$b_i, c_j \in Z, k < n, l < n, k + l = n$$

Igualando coeficientes:

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_1c_0 + c_1b_0$$

$$a_2 = b_1c_1 + b_2c_0 + c_2b_0$$

$$\dots$$

$$a_n = b_k c_l$$

De la primera igualdad, como p es primo y divide a a_0, entonces p divide a uno de los dos b_0 o c_0. Ahora, como a_0 no es divisible por p^2, ambos no pueden ser divisibles por p. Supongamos que b_0 es divisible por *p* y c_0 es primo relativo con *p*.

A continuación, veamos la segunda igualdad. Como b_0 es divisible por *p*, también lo es $c_1 b_0$ y como por hipótesis a_1 es divisible por p, entonces $b_1 c_0$ es divisible por *p*, pero como c_0 es primo relativo con *p*, se tiene que b_1 es divisible por *p*.

De manera análoga, en la tercera igualdad b_2 es divisible por *p*.

Similarmente, de las restantes igualdades, se obtiene que b_n es divisible por *p*. Pero esto es una contradicción, pues por hipótesis a_n no es divisible por *p*.

■

2.10.8 Ejemplos:

$3x^3 + 4x + 2$ con $p = 2$.

$x^n + 2$ con $p = 2$. Notemos que este es un polinomio irreducible para todo n.

2.10.9 Observación:

En $\mathbb{Z}[x]$ (y por tanto en $\mathbb{Q}[x]$) tenemos polinomios irreducibles de cualquier grado.

El Criterio de Einsenstein es una condición suficiente, pero no necesaria, por ejemplo:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x + 2)$ es reducible en $\mathbb{Z}[x]$ y no existe p primo que satisfaga las condiciones.

$x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y no existe p primo que satisfaga las condiciones.

2.11 Raíces enteras y racionales

Como la irreducibilidad está ligada a la existencia o no de raíces, ahora nos ocuparemos de las raíces enteras y racionales de los polinomios con coeficientes enteros.

Veremos condiciones necesarias para la existencia de raíces enteras.

2.11.1 Teorema:

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ es raíz del polinomio $p(x) \in Z[x]$, entonces α divide al término independiente de $p(x)$.

Demostración.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ es raíz del polinomio

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in Z$, entonces $x - \alpha$ divide a $p(x)$, o sea $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, con $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0, b_i \in Z$, de aquí, $a_0 = \alpha b_0$, o sea α divide a a_0.

■

Esta es la conocida regla de buscar las posibles raíces enteras a partir de los divisores del término independiente.

2.11.2 Ejemplo: Si $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ las posibles raíces enteras son los divisores de 2, o sea $\{\pm 1, \pm 2\}$.

2.11.3 Observación: Este criterio es una condición necesaria, esto es, nos dice cuáles son las posibles raíces. Para determinar si un determinado α es raíz tenemos que evaluar el polinomio en ese α.

En el ejemplo anterior solo -2 es raíz, pues $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$.

Para el polinomio $x^2 + x + 1$, las posibles raíces enteras son ± 1 y ninguna es raíz.

Si el término independiente es muy grande y tiene muchos divisores conviene eliminar algunos de ellos como posibles raíces, para esto tenemos otra condición suficiente.

2.11.4 Teorema:

Si $\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq \pm 1$, es raíz del polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $\alpha - 1$ divide a $p(1)$ y $\alpha + 1$ divide a $p(-1)$.

Demostración.

Este teorema se deriva del hecho de que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ y de evaluar en 1 y -1, respectivamente.

■

2.11.5 Ejemplo: Si $p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 54$ las posibles raíces enteras son los divisores de 54, o sea $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54\}$

Como $p(1) = 70$ y $p(-1) = 50$

	α	-2	2	-3	3	-6	6	-9	9	-18	18	-27	27	-54	54
$p(1) = 70$	$\alpha - 1$	-3	1	-4	2	-7	5	-10	8	-19	17	-28	26	-55	53
$p(-1) = 50$	$\alpha + 1$		3		4	5	7	8							
	Posible raíz	No	No	No	No	Sí	No	No	No	No	No	No	No	No	No

De la tabla anterior la única posible raíz entera es -6.

Reiteramos que es posible, pues trabajamos con una condición necesaria, luego para determinar si es raíz, tenemos que evaluar, usando Ruffini, por ejemplo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ -6 & & -6 & 0 & -54 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

Así, en este caso, -6 es raíz de $p(x)$.

Veremos ahora un criterio para la existencia de raíces racionales de los polinomios con coeficientes enteros, del cual los criterios anteriores para las raíces enteras son un caso particular.

2.11.6 Teorema:

Si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, con m y n primos relativos, es una raíz del polinomio

$p(x) = a_k k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$, entonces:

m divide a a_0,

n divide a a_k,

$m - n$ divide a $p(1)$,

$m + n$ divide a $p(-1)$.

Demostración.

Si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n$ primos relativos, es raíz del polinomio $p(x)$, entonces $x - \frac{m}{n}$ divide a $p(x)$ y también $nx - m$ divide a $p(x)$, porque es un asociado de $x - \frac{m}{n}$.

Luego, $p(x) = (nx - m)q(x)$, con $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, pero $q(x) = \frac{a}{b}q_1(x)$, con $q_1(x)$ primitivo.

De aquí, $p(x) = \left(\frac{a}{b}\right)(nx - m)q_1$, como $(nx - m)q_1(x)$ es primitivo, por lo tanto $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

Luego $p(x) = (nx - m)q(x)$, con $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Si $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$ y

$q(x) = b_{k-1}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + \cdots + b_1 x + b_0, b_i \in \mathbb{Z}$.

Tenemos que: $-mb_0 = a_0$, de donde: m divide a a_0 y $nb_{k-1} = a_k$, por lo que n divide a a_k.

Evaluando en 1, $p(1) = (m-n)q(1)$, entonces $m - n$ divide a $p(1)$.

Análogamente, evaluando en -1, $p(-1) = (-m - n)q(-1) = (m+n)[-q(-1)]$, entonces $m + n$ divide a $p(-1)$.

■

2.11.7 Observación: Notemos que este criterio contiene como caso particular el criterio de las raíces enteras, pues los enteros son fracciones de denominador 1, que divide claramente al coeficiente principal.

Nuevamente, se trata de una condición necesaria y esto nos dice cuáles son las posibles raíces, pero, para determinar si son o no raíces, tenemos que evaluar el polinomio.

2.11.8 Ejemplo:

Si $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2$

Posibles raíces enteras: Divisores de -2, $\{\pm 1, \pm 2\}$

Posibles raíces fraccionarias: Las fracciones formadas por divisores de $-2, \{\pm 1, \pm 2\}$ sobre divisores de $3, \{\pm 1, \pm 3\}$, esto es $\left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right\}$.

Si $p(x) = 3x^7 + 2x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 14x + 4$ las posibles raíces racionales salen de formar todas las posibles fracciones con numerador divisor de $4, \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ y denominador divisor de $3, \{\pm 1, \pm 3\}$.

Así las posibles raíces racionales son:

$$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right\}$$

Para excluir, utilizamos la condición de $p(1) = 7$ y $p(-1) = 35$.

	α	-2	2	-4	4	$\frac{m}{n}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
$p(1) = 7$	$\alpha - 1$	-3	1	-5	3	$m - n$	-4	-2	-5	-1	-7	1
$p(-1) = 35$	$\alpha + 1$	-1	3	-3	5	$m + n$	2	4	1	5	1	7
	Posible raíz	No	No	No	No		No	No	No	Si	Si	Si

De la tabla anterior, las posibles raíces racionales son $\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$.

Repetimos, posibles, pues es una condición necesaria, para determinar si alguna de ellas es raíz, tenemos que evaluar, usando Ruffini.

2.12 Introducción al cálculo aproximado de las raíces reales

Ya sabemos cómo calcular las raíces enteras y racionales.

Necesitamos métodos aproximados de cálculo de las raíces reales de los polinomios.

Sólo nos ocuparemos de las raíces reales.

Queremos buscar cotas para las raíces, para esto nos apoyaremos en cómo escribir un polinomio $p(x)$ en términos de las potencias de $x - c$.

2.12.1 Fórmula de Taylor

Sea $p(x)$ un polinomio de grado n, tratemos de escribir $p(x)$ como combinación de las potencias de $x - c$, para un número real c.

$$p(x) = b_0 + b_1(x - c)^1 + \cdots + b_{n-1}(x - c)^{n-1} + b_n(x - c)^n$$

Evaluando en $x = c$, nos queda $p(c) = b_0$.

Derivando:

$$p'(x) = b_1 + 2b_2(x - c) + \cdots + nb_n(x - c)^{n-1}$$

Evaluando en $x = c$, nos queda: $p'(c) = b_1$, o lo que es igual, $b_1 = \frac{p'(c)}{1!}$.

Derivando otra vez:

$$p''(x) = 2b_2 + \cdots + n(n - 1)b_n(x - c)^{n-2}$$

Evaluando en $x = c$, nos queda: $p''(c) = 2b_2$, o lo que es igual, $b_2 = \frac{p''(c)}{2!}$.

Así sucesivamente se obtiene: $b_n = \frac{p^{(n)}(c)}{n!}$.

Sustituyendo en $p(x)$ nos queda la Fórmula de Taylor.

2.12.2 Definición: Fórmula de Taylor: Para un polinomio $p(x)$ un polinomio de grado n, tenemos la siguiente igualdad:

$$p(x) = p(c) + \frac{p'(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{p''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Esta fórmula para polinomios resulta un caso particular de la serie de Taylor par funciones que se se estudia en el Análisis Matemático.

Con ayuda de la Fórmula de Taylor podemos demostrar el siguiente resultado:

2.12.3 Teorema: Si para un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de coeficientes reales, con $a_n > 0$, existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$p(c) > 0, p'(c) > 0, p''(c) > 0, \ldots, p^{(n)}(c) > 0$, entonces c es una cota superior de las raíces reales de $p(x)$.

Demostración.

Si α es raíz de $p(x)$, α no puede ser mayor que c, pues sino $\alpha - c$ y todas sus potencias serían mayores estrictas que cero.

Luego, por la Fórmula de Taylor: $p(\alpha) > 0$.

■

Esta forma de acotar las raíces se llama Método de Newton.

2.12.4 Ejemplo:

Si $p(x) = x^5 - 4x - 2$, calculemos todas las derivadas de $p(x)$.

$$p'(x) = 5x^4 - 4$$

$$p''(x) = 20x^3$$

$$p'''(x) = 60x^2$$

$$p^{(IV)}(x) = 120x$$

$$p^{(V)}(x) = 120$$

Podemos ver que para $x = 2$ todas son positivas, así 2 es una cota superior de las raíces reales de $p(x)$.

2.12.5 Observación:

La condición $a_n > 0$ no es restrictiva, pues bastaría multiplicar por -1, ya que un polinomio y todos sus asociados tienen las mismas raíces.

Una cota superior de las raíces reales de $p(x)$, es también una cota superior de las raíces positivas de $p(x)$.

Esto NO quiere decir que existan raíces menores que c, sino que si existen son menores que c.

Veremos ahora que esto nos permite calcular no solo una cota superior de las raíces, sino también una cota inferior de las raíces, que es una cota inferior de las raíces negativas, así como una cota superior de las negativas y una cota inferior de las positivas.

Sea un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de coeficientes reales, consideremos los polinomios

$$\varphi_1(x) = p(-x)$$

$$\varphi_2(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\varphi_3(x) = x^n p\left(-\frac{1}{x}\right)$$

se tiene el siguiente resultado:

2.12.6 Teorema:

1. Si N_1 es una cota superior de las raíces de $\varphi_1(x)$, entonces $-N_1$ es una cota inferior de las raíces (negativas) de $p(x)$.
2. Si N_2 es una cota superior de las raíces de $\varphi_2(x)$, entonces $\frac{1}{N_2}$ es una cota inferior de las raíces positivas de $p(x)$.
3. Si N_3 es una cota superior de las raíces de $\varphi_3(x)$, entonces $-\frac{1}{N_3}$ es una cota superior de las raíces negativas de $p(x)$.

Demostración.

1. Si α es raíz de $p(x) \Rightarrow -\alpha$ es raíz de $\varphi_1(x) \Rightarrow -\alpha < N_1$, luego $\alpha > -N_1$.
2. Si α es raíz de $\varphi_2(x) \Rightarrow \alpha < N_2$, pero $\varphi_2(\alpha) = \alpha^n p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$, así $p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$, o sea $\frac{1}{\alpha}$ es raíz de $p(x)$ y $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{N_2}$.

3. Análogo al ítem anterior.

■

2.12.7 Observación: Puntualicemos que éstas son cotas, pero esto no significa que existen raíces.

2.12.8 Ejemplo:

Busquemos todas las cotas de las raíces de $p(x) = x^5 - 4x - 2$:

$\varphi_1(x) = p(-x) = (-x)^5 - 4(-x) - 2 = -x^5 + 4x - 2$, como el coeficiente principal es negativo, tomamos $\psi_1(x) = -\varphi_1(x) = x^5 - 4x + 2$.

$$\psi_1{}'(x) = 5x^4 - 4$$

$$\psi_1{}''(x) = 20x^3$$

$$\psi_1{}'''(x) = 60x^2$$

$$\psi_1^{(IV)}(x) = 120x$$

$$\psi_1^{(V)}(x) = 120.$$

Podemos ver que 2 es una cota superior de las raíces reales de $\psi_1(x) = -\varphi_1(x)$, luego -2 es una cota inferior de las raíces (negativas) de $p(x)$.

$$\varphi_2(x) = x^5 p\left(\frac{1}{x}\right) = x^5\left(\left(\frac{1}{x}\right)^5 - 4\left(\frac{1}{x}\right) - 2\right) = 1 - 4x^4 - 2x^5.$$

Como el coeficiente principal de $\varphi_2(x)$ es negativo, tomamos:

$$\psi_2(x) = -\varphi_2(x) = 2x^5 + 4x^4 - 1$$

$$\psi_2'(x) = 10x^4 + 16x^3$$

$$\psi_2''(x) = 40x^3 + 48x^2$$

$$\psi_2'''(x) = 120x^2 + 96x$$

$$\psi_2^{(IV)}(x) = 240x + 96$$

$$\psi_2^{(V)}(x) = 240.$$

Podemos ver que 1 es una cota superior de las raíces reales de $\psi_2(x)$, luego $\frac{1}{1} = 1$ es una cota inferior de las raíces positivas de $p(x)$.

$$\varphi_3(x) = x^5 p\left(-\frac{1}{x}\right) = x^5\left(\left(-\frac{1}{x}\right)^5 - 4\left(-\frac{1}{x}\right) - 2\right) = -1 + 4x^4 - 2x^5.$$

Como el coeficiente principal de $\varphi_3(x)$ es negativo, tomamos:

$$\psi_3(x) = -\varphi_3(x) = 2x^5 - 4x^4 + 1$$

$$\psi_3'(x) = 10x^4 - 16x^3$$

$$\psi_3''(x) = 40x^3 - 48x^2$$

$$\psi_3'''(x) = 120x^2 - 96x$$

$$\psi_3^{(IV)}(x) = 240x - 96$$

$$\psi_3^{(V)}(x) = 240.$$

Podemos ver 2 es una cota superior de las raíces reales de $\psi_3(x)$, luego $-\frac{1}{2}$ es una cota superior de las raíces negativas de $p(x)$.

Así todas las raíces de $p(x) = x^5 - 4x + 2$, si existen, están en los intervalos $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ (las negativas) y $[1,2]$ (las positivas).

2.12.9 Observación: Este proceso de acotación NO quiere decir que existan raíces, solo nos dice dónde están en caso de existir.

2.13 Método de Sturm

Ya sabemos que el Método de Newton de acotación de las raíces, nos dice dónde pueden estar las raíces, pero no nos dice si existen y si existen cuántas hay.

Responderemos ahora la pregunta de cuántas raíces tiene un polinomio.

Sea ahora un polinomio sin raíces múltiples, esta hipótesis no es muy restrictiva, pues si $p(x)$ tiene raíces múltiples, el cociente de $p(x)$ por el $mcd(p(x), p'(x))$ tiene las mismas raíces que $p(x)$ pero simples, esto se sigue fácilmente del Teorema 2.6.7.

2.13.1 Definición de Sistema de Sturm:

Un sistema de polinomios $p_0(x) = p(x), p_1(x), \dots, p_s(x)$, se llama Sistema de Sturm para $p(x)$ si:

1. Los polinomios consecutivos no tienen raíces comunes.

2. $p_s(x)$ no tiene raíces.

3. Si α es raíz de $p_k(x)$, entonces $p_{k-1}(\alpha)$ y $p_{k+1}(\alpha)$ tienen signos contrarios.

4. Si α es raíz de $p(x)$ el producto $p(x)p_1(x)$ cambia de signo de menos a más cuando x creciendo pasa por α.

Veamos como determinar un Sistema de Sturm para un polinomio $p(x)$, tomemos:

$p_0(x) = p(x), p_1(x) = p'(x)$ y cada $p_i(x)$ como el resto de dividir $p_{i-2}(x)$ entre $p_{i-1}(x)$ cambiado de signo.

2.13.2 Observación: El cálculo del Sistema de Sturm es similar al cálculo del mcd, sólo tenemos que tener cuidado que aquí vamos a tomar el opuesto del resto, así solo podemos multiplicar por constantes positivas.

2.13.3 Ejemplo: Determinemos un Sistema de Sturm para el polinomio $p(x) = x^5 - 4x - 2$:

$$p_0(x) = p(x) = x^5 - 4x - 2$$

$$p_1(x) = p'(x) = 5x^4 - 4$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x - 2 & 5x^4 - 4 \\ \hline -x^5 + \frac{4}{5}x & \frac{1}{5}x \\ \hline \underbrace{-\frac{16}{5}x - 2} & \end{array}$$

El resto $r_1(x) = -\frac{16}{5}x - 2 = \frac{-16x-10}{5} = \frac{2(-8x-5)}{5}$ puede afectarse por constantes que no cambien el signo de sus coeficientes, por ejemplo, si multiplicamos por $\frac{5}{2}$, queda el asociado del resto $-8x - 5$. De esta forma, tomando el opuesto de este asociado de $r_1(x)$, se construye $p_2(x)$.

$$p_2(x) = 8x + 5$$

Construyamos $p_3(x)$ dividiendo $p_1(x)$ por $p_2(x)$:

$$
\begin{array}{c|c}
5x^4 - 4 & 8x + 5 \\ \cline{2-2}
-5x^4 - \dfrac{5^2}{8}x^3 & \dfrac{5}{8}x^3 - \dfrac{5^2}{8^2}x^2 + \dfrac{5^3}{8^3}x - \dfrac{5^4}{8^4} \\ \cline{1-1}
-\dfrac{5^2}{8}x^3 - 4 & \\
\dfrac{5^2}{8}x^3 + \dfrac{5^3}{8^2}x^2 & \\ \cline{1-1}
\dfrac{5^3}{8^2}x^2 - 4 & \\
-\dfrac{5^3}{8^2}x^2 - \dfrac{5^4}{8^3}x & \\ \cline{1-1}
-\dfrac{5^4}{8^3}x - 4 & \\
\dfrac{5^4}{8^3}x + \dfrac{5^5}{8^4} & \\ \cline{1-1}
\underbrace{\dfrac{5^5}{8^4} - 4} &
\end{array}
$$

Como el polinomio $r_2(x)$ resulta la constante $\underbrace{\frac{5^5}{8^4} - 4} < 0$, entonces podemos tomar el polinomio asociado -1 para, con su opuesto, construir $p_3(x)$. Así:

$$p_3(x) = 1.$$

2.13.4 Teorema de Sturm:

Si tenemos un Sistema de Sturm para el polinomio $f(x)$, la cantidad de raíces reales de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual a la diferencia de las variaciones de signo $\omega(a) - \omega(b)$, en los extremos del intervalo.

Demostración.

En esta demostración se hace uso de un resultado del Análisis Matemático para funciones continuas, pues los polinomios pueden considerarse como estas.

Veamos cómo cambia $\omega(x)$ al crecer x.

Mientras x no pase por alguna raíz de los polinomios $f_i(x)$, los signos no cambian.

Basta ver dos casos:

x pasa por una raíz de $f_k(x), 0 < k \leq s - 1$.

x pasa por una raíz de $f_0(x) = f(x)$.

Si α es raíz de $f_k(x), 0 < k \leq s - 1$, entonces $f_{k-1}(\alpha)$ y $f_{k+1}(\alpha)$ son diferentes de cero, como son funciones continuas por ser polinomios, existe $\varepsilon > 0$ tal que en el intervalo

$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), f_{k-1}(x)$ y $f_{k+1}(x)$ no tienen raíces y conservan signos contrarios.

De esto se deduce que los sistemas de números:

$$f_{k-1}(\alpha - \varepsilon), f_k(\alpha - \varepsilon), f_{k+1}(\alpha - \varepsilon)$$

$$f_{k-1}(\alpha + \varepsilon), f_k(\alpha + \varepsilon), f_{k-1}(\alpha + \varepsilon)$$

presentan solo una variación de signo independientemente del signo de $f_k(\alpha - \varepsilon)$ y $f_k(\alpha + \varepsilon)$. Luego, al pasar por $\alpha, \omega(x)$ no cambia.

Si α es raíz de $f(x) \Rightarrow \alpha$ no es raíz de $f_1(x)$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que en el intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), f_1(x)$ es diferente de cero y de signo constante.

Si $f(x)$ cambia de signo al pasar por α de menos a más y $f_1(\alpha - \varepsilon) > 0$ y $f_1(\alpha + \varepsilon) > 0$, entonces $f(x)f_1(x)$ cambia de signo al pasar por α de menos a más.

De manera análoga se demuestran los otros casos.

Luego, el sistema de Sturm pierde una variación de signo al pasar por α.

■

2.13.5 Ejemplo: Apliquemos el Teorema de Sturm al polinomio:

$$p(x) = x^5 - 4x - 2$$

Del ejemplo 2.13.3 conocemos un sistema de Sturm asociado a $p(x)$:

$$S = \{p_0(x) = x^5 - 4x - 2, p_1(x) = 5x^4 - 4, p_2(x) = 8x + 5, p_3(x) = 1\}$$

Igualmente, del ejemplo 2.12.8 se tienen las cotas correspondientes a las raíces reales de $p(x)$.

Evaluando el sistema S en dichas cotas y añadiendo evaluaciones en un valor intermedio (-1) para obtener intervalos con una sola variación de signo de S, se tienen los siguientes resultados:

	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
$p_0(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$p_2(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$p_3(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\omega(x)$	3	2	1	1	0

De la tabla, $p(x)$ tiene tres raíces reales, dos negativas en $[-2,-1]$ y $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ y una positiva en $[1,2]$.

El Teorema de Sturm permite conocer el número de raíces reales en todo R, para ello basta tomar como extremos del intervalo a $-\infty$ e ∞, desde luego tomar límites.

2.13.6 Ejemplo: Determinemos la cantidad de raíces reales de $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, empleando un sistema de Sturm, y lo aplicándolo a $(-\infty, \infty)$:

$p_0(x) = p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$

$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

El polinomio $p_2(x)$ resulta el opuesto del resto de la división de $p_0(x)$ por $p_1(x)$. Como de esta operación sólo nos interesa el resto, vamos a afectar por constantes multiplicativas positivas los dividendos parciales para operar con coeficientes enteros, dado que el resto que se obtiene de estas modificaciones es un polinomio asociado al resto de la división de $p_0(x)$ por $p_1(x)$ sin variar su signo e igualmente su opuesto puede tomarse como $p_2(x)$ por poseer las mismas propiedades del opuesto del resto de la división sin afectar la operación por ciertas constantes. Vale destacar que este procedimiento NO es válido cuando se pretende encontrar cociente y resto de la división de dos polinomios por lo que ya conocemos según el Algoritmo de la División con Resto.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & x^3+x^2-2x-1 & 3x^2+2x-2 \\ \cline{3-3}
(3) & 3x^3+3x^2-6x-3 & x+1 \\
 & \underline{-3x^3-2x^2+2x} & \\
 & x^2-4x-3 & \\
(3) & 3x^2-12x-12 & \\
 & \underline{-3x^2-2x+2} & \\
 & -14x-10 & \\
(1/2) & \underbrace{-7x-5} &
\end{array}
$$

De lo anterior, $p_2(x) = 7x + 5$.

$p_3(x)$ resulta el opuesto del resto de dividir $p_1(x)$ por $p_2(x)$.

Procediendo análogamente, se tiene que:

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 3x^2+2x-2 & 7x+5 \\ \cline{3-3}
(7) & 21x^2+14x-14 & 3x+1 \\
 & \underline{-21x^2-15x-5} & \\
 & -x-19 & \\
(7) & -7x-133 & \\
 & \underline{7x-5} & \\
 & -138 & \\
(1/138) & \underbrace{-1} &
\end{array}
$$

Entonces, , $p_2(x) = 1$.

El Sistema de Sturm asociado a $p(x)$ es:

$S = \{p_0(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1, p_1(x) = 3x^2 + 2x - 2,\ \ p_2(x) = 1\}$.

A continuación, resumamos en una tabla como varían los signos de S para valores que tienden a los extremos del intervalo $(-\infty, \infty)$.

Recordemos que el comportamiento de un polinomio cuando $x \to \infty$, depende básicamente del signo de su coeficiente principal, sin importar el resto de los términos que lo forman. Sin embargo, en su comportamiento cuando $x \to -\infty$, debe tenerse en cuenta además, si el grado del polinomio es par o impar.

Así, $p_0(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, se comporta similarmente a $f(x) = x^3$ cuando $x \to \infty$ y como sabemos que el polinomio $f(x) = x^3$ siempre es positivo para todo $x > 0$, en particular lo es para un real positivo suficientemente grande, luego $p_0(x)$ evaluado en tal real, tiene signo positivo, por lo que $p_0(x)$ tiene signo positivo cuando $x \to \infty$. Análogamente, se puede concluir que $p_1(x)$ tiene signo positivo cuando $x \to \infty$, y por supuesto, el polinomio $p_2(x)$ es una constante positiva para todo x, en particular cuando $x \to \infty$. Todo esto nos permite concluir que todos los polinomios del sistema de Sturm toman valores positivos cuando $x \to \infty$, de ahí que en la columna extrema derecha de la tabla aparecen los tres signos positivos.

Nuevamente, para determinar el comportamiento del sistema cuando $x \to -\infty$, ténganse en cuenta la relación de los polinomios de Sturm con los polinomios cuyo único término es el de mayor grado en cada polinomio de S. Así, como $f(x) = x^3$ toma valores negativos cuando $x < 0$ y en particular, si $x < 0$ y es suficientemente pequeña, entonces $p_0(x)$ tiene signo negativo cuando $x \to -\infty$. Igualmente, como $g(x) = 3x^2$ toma valores positivos para todas las $x < 0$ suficientemente pequeñas, entonces $p_1(x) = 3x^2 + 2x - 2$ tiene signo positivo cuando $x \to -\infty$. Como $p_2(x)$ es la constante positiva 1 para toda x, entonces tiene signo positivo cuando $x \to -\infty$.. De esta forma, en la columna que resume el comportamiento del sistema de Sturm cuando $x \to -\infty$ aparece un signo negativo relativo a $p_0(x)$ y dos signos positivos relativos a $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

En la última fila de la tabla aparece $\omega(x)$ que es el número de variaciones de signo del sistema S para cada valor de x. En la columna "$-\infty$" el sistema S cambia de menos a más sólo una vez, por eso $\omega(-\infty) = 1$. Asimismo, en la columna "∞" el sistema S no tiene cambios de signo por lo que $\omega(\infty) = 0$. Como la cantidad de raíces reales de $p(x)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ resulta $\omega(-\infty) - \omega(\infty) = 1$, entonces $p(x)$ posee una única raíz real.

	$-\infty$	∞
$p_0(x)$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$+$	$+$
$p_2(x)$	$+$	$+$
$\omega(x)$	1	0

Podría interesarnos saber si la raíz de $p(x)$ es positiva o negativa, en cuyo caso podemos evaluar el sistema de Sturm en $x = 0$.

Agreguemos a la tabla anterior una columna intermedia que evalúa el sistema S en $x = 0$, queda:

	$-\infty$	0	∞
$p_0(x)$	$-$	$-$	$+$
$p_1(x)$	$+$	$-$	$+$
$p_2(x)$	$+$	$+$	$+$
$\omega(x)$	1	1	0

Como $\omega(-\infty) - \omega(0) = 1 - 1 = 0$, entonces $p(x)$ no posee ninguna raíz real negativa, en tanto que, como $\omega(0) - \omega(\infty) = 1 - 0 = 1$, la única raíz real de $p(x)$ es positiva.

2.14 Cálculo aproximado de las raíces reales

Ya sabemos cómo acotar las raíces, determinar la cantidad de las mismas y separarlas en intervalos en cada uno de los cuales haya una sola raíz, sólo nos falta como calcularlas aproximadamente.

Aquí, como en las secciones anteriores supondremos que el polinomio $p(x)$ no posee raíces múltiples.

Sea α una raíz de $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

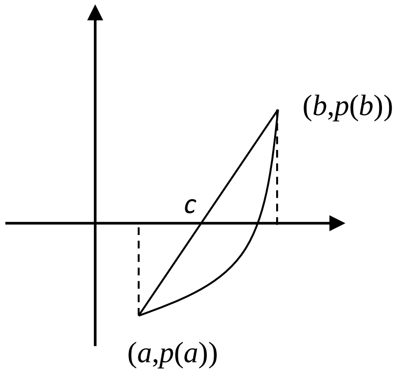
Como la raíz α es simple y el polinomio $p(x)$ es una función continua, entonces $p(a)$ y $p(b)$ tienen signo diferente, o sea $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, donde $q(x)$ mantiene el signo en el intervalo $[a, b]$.

Nos aproximaremos a las raíces mediante rectas.

2.14.1 Método de interpolación

Este método es también llamado de Falsa Posición o Regula Falsi.

Tomaremos como valor aproximado de la raíz el intercepto de la recta secante a la curva que representa a $p(x)$, que pasa por los puntos $(a, p(a))$ y $(b, p(b))$.



Recordemos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$(y - y_1) = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

Aplicando dicha fórmula a nuestro caso queda:

$$(y - p(a)) = \left(\frac{p(a) - p(b)}{a - b}\right)(x - a)$$

Si buscamos el intercepto c con el eje x , tenemos que hacer $y = 0$.

$$-p(a) = \left(\frac{p(a) - p(b)}{a - b}\right)(p(a) - p(b)a - b)(c - a)$$

$$-p(a)\left(\frac{a - b}{p(a) - p(b)}\right) = (c - a)$$

$$c = a - p(a)\left(\frac{a - b}{p(a) - p(b)}\right)$$

$$c = \frac{a(p(a) - p(b)) - p(a)(a - b)}{p(a) - p(b)}.$$

Finalmente:

$$c = \frac{p(a)b - ap(b)}{p(a) - p(b)}.$$

2.14.2 Ejemplo: Calculemos aproximadamente la raíz de $p(x) = x^5 - 4x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

$$c = \frac{p(1)2 - 1p(2)}{p(1) - p(2)}$$

$$c = \frac{(-5)2 - 1(22)}{-5 - 22} = \frac{-10 - 22}{-27} = \frac{-32}{-27}.$$

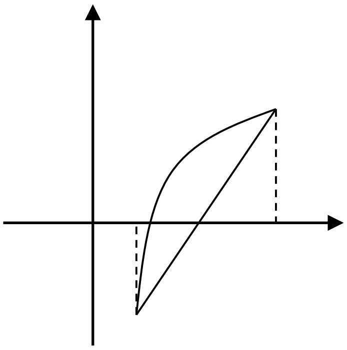
Así $c \approx 1{,}18511851$.

Nos falta saber todavía si la aproximación hallada es por exceso o por defecto, esto depende de los signos de $p(a)$ y $p(b)$ y del signo de $p''(x)$ (la concavidad de $p(x)$).

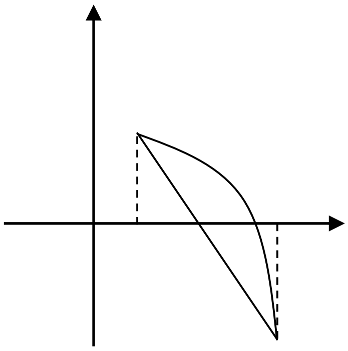
Tenemos cuatro casos:

1. $p(a)\ < 0, p(b)\ > 0\ y\ p''(x)\ > 0$, en este caso la aproximación es por defecto y el gráfico coincide con el inicial del epígrafe.

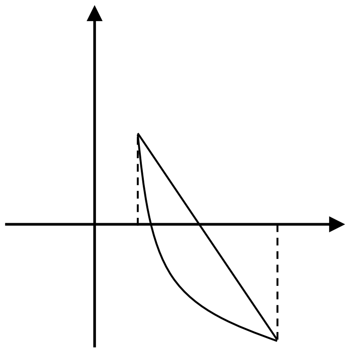
2. $p(a)\ < 0, p(b)\ > 0\ y\ p''(x)\ < 0$, en este caso la aproximación es por exceso.



3. $p(a)\ > 0, p(b)\ < 0\ y\ p''(x)\ < 0$, en este caso la aproximación es por defecto.



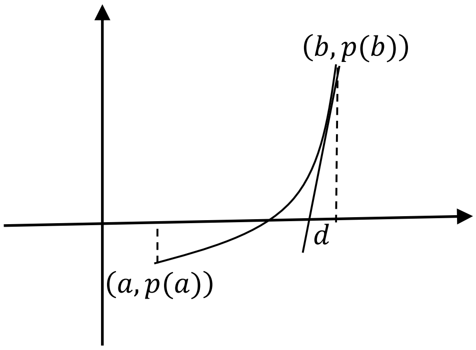
4. $p(a)\ > 0, p(b)\ < 0\ y\ p''(x)\ > 0$, en este caso la aproximación es por exceso.



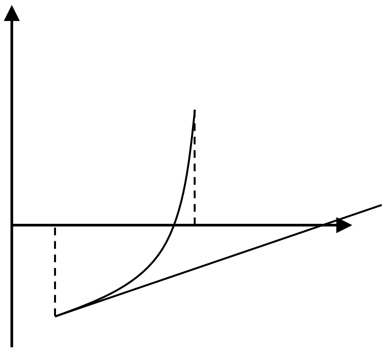
En el ejemplo anterior $p(1) = -5 < 0, p(2) = 22 > 0$ y $p''(x) = 20x^3 > 0$ en el intervalo $[1, 2]$, luego la aproximación es por defecto.

2.15 Método de Newton

En este caso también nos aproximamos por una recta, pero por la recta tangente a uno de los extremos.



Tenemos que tener cuidado pues no puede ser por un extremo cualquiera ya que en uno nos acercamos y en el otro nos alejamos de la raíz.



Nos acercaremos por el extremo del intervalo en el cual el signo de $p(x)$ y $p''(x)$ coincidan.

Utilizaremos el hecho de que el valor de la derivada de la función $p(x)$ en el punto x_0 es numéricamente igual al de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, p(x_0))$.

Recordemos la ecuación de la recta que pasa un punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m:

$$(y - y_0) = m(x - x_0).$$

Aplicando esto a nuestro caso, sea a_0 el extremo del intervalo en el cual el signo de $p(x)$ y $p''(x)$ coinciden:

$$(y - p(a_0)) = p'(a_0)(x - a_0).$$

Si buscamos el intercepto d con el eje x, tenemos que hacer $y = 0$.

$$-p(a_0) = p'(a_0)(d - a_0)$$

$$-\frac{p(a_0)}{p'(a_0)} = d - a_0.$$

Finalmente:

$$d = a_0 - \frac{p(a_0)}{p'(a_0)}.$$

2.15.1 Ejemplo: Calculemos aproximadamente la raíz de $p(x) = x^5 - 4x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

Primeramente, determinemos a_0, como $p(1) = -5 < 0, p(2) = 22 > 0$ y $p''(x) = 20x^3 > 0$ en el intervalo $[1, 2]$, entonces $a_0 = 2$.

$$d = 2 - \frac{p(2)}{p'(2)}$$

$$d = 2 - \frac{22}{76}$$

$$d = 2 - 0,2894736.$$

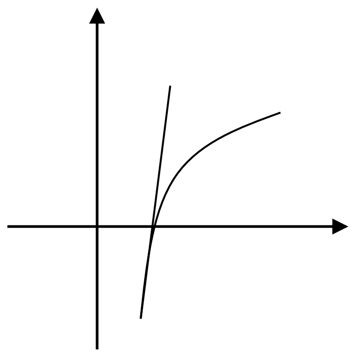
Así $d \approx 1{,}7105264$.

Nos falta saber todavía si la aproximación hallada es por exceso o por defecto, esto depende de si a_0 es a ó b y del signo de $p(a_0)$ y $p''(a_0)$.

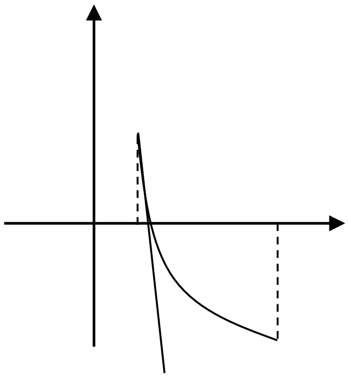
Tenemos cuatro casos:

1. $p(b) > 0$ y $p''(b) > 0$, en este caso la aproximación es por exceso y el gráfico coincide con el inicial del epígrafe.

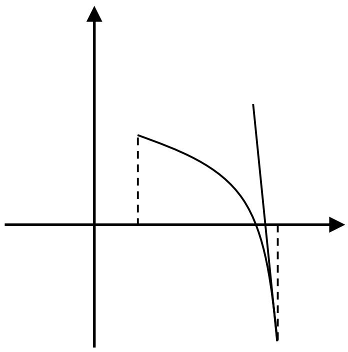
2. $p(a) < 0$ y $p''(a) < 0$, en este caso la aproximación es por defecto.



3. $p(a) > 0$ y $p''(a) > 0$, en este caso la aproximación es por defecto.



4. $p(b) < 0$ y $p''(b) < 0$, en este caso la aproximación es por exceso.



En el ejemplo anterior $p(2) = 22 > 0$ y $p''(x) = 20x^3 > 0$ en el intervalo $[1, 2]$, luego la aproximación es por exceso.

2.15.2 Observación: Aplicar los dos métodos simultáneamente es muy ventajoso, pues cuando un método aproxima por exceso, el otro lo hace por defecto y viceversa. Esto garantiza la convergencia hacia la raíz, pues en cada paso obtenemos un intervalo cada vez más pequeño y por el Principio de los Intervalos Cerrados Encajados del Análisis Matemático.

con longitud tendiente a cero hay un único punto que pertenece a todos los intervalos.

2.15.3 Ejemplo: Calculemos aproximadamente la raíz de $p(x) = x^5 - 4x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

Ya sabemos que al aplicar los métodos de Interpolación y de Newton, por primera vez habíamos obtenido:

$c = c_0 \approx 1{,}18511851$ y $d = d_0 \approx 1{,}7105264$.

Así, tenemos un nuevo intervalo $[1{,}18511851, 1{,}7105264]$.

Aplicando los métodos nuevamente, obtenemos: $c_1 = 1{,}4118355$ y $d_1 = 1{,}5610197$, quedando otro intervalo $[1{,}4118355, 1{,}5610197]$.

Reiterando el proceso:

$c_2 = 1{,}5110912$ y $d_2 = 1{,}5211158$,

$c_3 = 1{,}5184843$ y $d_3 = 1{,}5185266$.

Así, la única raíz de $p(x) = x^5 - 4x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$ es aproximadamente $1{,}518$ con un error menor que 10^{-3}.

2.16 Fracciones racionales

Nuevamente tendremos en cuenta la analogía entre $\mathbb{Z}$ y $K[x]$.

En $K[x]$ al igual que en $\mathbb{Z}$ no puede definirse la división como operación inversa de la multiplicación.

¿Cómo resolvemos este problema en $\mathbb{Z}$?

Construyendo $\mathbb{Q}$.

Recordemos que $\mathbb{Q}$ es el conjunto de todas las fracciones $\left\{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$ con la relación de igualdad de fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$.

Definimos la suma de fracciones como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ y el producto como $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Así $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pues $n = \frac{n}{1}, n \in \mathbb{Z}$.

De forma análoga construiremos el conjunto de las fracciones racionales con coeficientes en K.

2.16.1 Definición: Llamaremos fracción racional con coeficientes en K a toda expresión del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x), q(x)$ polinomios en $K[x]$, al conjunto de todas las fracciones racionales con coeficientes en K, lo denotaremos por $K(x)$.

En $K(x)$ se definen la igualdad, la suma y el producto de fracciones racionales de forma análoga a como se definen en $\mathbb{Q}$.

Recordemos que en $\mathbb{Q}$ una fracción $\frac{n}{m}$ es irreducible si $mcd(m, n) = 1$ y es propia si $m < n$.

Análogamente, tenemos las siguientes definiciones.

2.16.2 Definición: Una fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ de $K(x)$ se llama irreducible si $mcd(f(x), g(x)) =$ 1.

2.16.3 Definición: Una fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ de $K(x)$ se llama propia si

$gr[f(x)] < gr[g(x)]$.

Observemos que en $\mathbb{Q}$ toda fracción impropia es la suma de un entero más una fracción propia, por ejemplo $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, de forma análoga tenemos la siguiente:

2.16.4 Proposición: Una fracción racional impropia se puede escribir como la suma de un polinomio más una fracción propia.

Demostración.

Sea $\frac{f(x)}{g(x)}$ una fracción racional impropia.

Por el Algoritmo de la División con Resto existen $q(x)$ y $r(x)$, tales que

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ con $r(x) \equiv 0$ ó $gr\ [r(x)] < gr\ [b(x)]$.

Así $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.

■

2.16.5 Ejemplo: $\frac{x^3 3+2x+1}{x-1} = x^2 - x + 3 + \frac{-2}{x-1}$.

2.16.6 Definición: Diremos que fracción racional propia $\frac{p(x)}{q(x)}$ es simple si su denominador es una potencia de un polinomio irreducible, esto es $q(x) = [g(x)]^k$, con $g(x)$ irreducible y su numerador tiene grado menor que $g(x)$.

2.16.7 Observaciones:

En $\mathbb{R}(x)$ tenemos dos tipos de fracciones simples:

De Tipo I, su denominador es una potencia de un factor lineal $\frac{A}{(x-a)^k}$.

De Tipo II, su denominador es una potencia de un polinomio de segundo grado de discriminante negativo $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, con $p^2 - 4q < 0$.

En $\mathbb{C}(x)$ sólo tenemos fracciones simples del tipo $\frac{A}{(x-a)^k}$.

Veamos ahora algunos lemas, que nos permitirán demostrar la descomposición de las fracciones racionales.

2.16.8 Lema:

Si tenemos una fracción propia $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $g(x) = g_1(x)g_2(x)$ con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ primos relativos, entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{g_2(x)} + \frac{v(x)}{g_1(x)}$, es la suma de dos fracciones propias.

Demostración.

Sea una fracción propia $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $g(x) = g_1(x)g_2(x)$ con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ primos relativos, por el Teorema de Bezout es $u_1(x)g_1(x) + v_2(x)g_2(x) = 1$. Multiplicando por $f(x)$, tenemos:

$$f(x)u_1(x)g_1(x) + f(x)v_2(x)g_2(x) = f(x)$$

Dividamos $f(x)u_1(x)$ entre $g_2(x)$, esto es $f(x)u_1(x) = q(x)g_2(x) + u(x)$, con $gr\ u(x) < gr\ g_2(x)$.

Sustituyendo en la identidad de Bezout multiplicada por $f(x)$, tenemos:

$$[q(x)g_2(x) + u(x)]g_1(x) + f(x)v_2(x)g_2(x) = f(x)$$

$$g_1(x)\ q(x)g_2(x) + u(x)g_1(x) + f(x)v_2(x)g_2(x) = f(x)$$

$$u(x)g_1(x) + [g_1(x)\ q(x) + f(x)v_2(x)]g_2(x) = f(x).$$

Si se denota $v(x) = g_1(x)\ q(x) + f(x)v_2(x)$, tenemos:

$$u(x)g_1(x) + v(x)g_2(x) = f(x)$$

Ahora, como $gr\ u(x) < gr\ g_2(x)$, se tiene que $gr\ g_1(x)u(x) < gr\ g_1(x)g_2(x)$.

También por ser la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ propia, $gr\ f(x) < gr\ g(x) = gr\ g_1(x)g_2(x)$, pero como $u(x)g_1(x) + v(x)g_2(x) = f(x)$, entonces $gr\ v(x)g_2(x) < gr\ g_1(x)g_2(x)$. Así también $gr\ v(x) < gr\ g_1(x)$.

Sustituyendo $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)g_1(x) + v(x)g_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{u(x)}{g_2(x)} + \frac{v(x)}{g_1(x)}$, es la suma de dos fracciones propias.

■

2.16.9 Lema:

Si tenemos una fracción propia $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$, con $g(x)$ irreducible, entonces

$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{u_k(x)}{[g(x)]^k} + \frac{u_{k-1}(x)}{[g(x)]^{k-1}} + \cdots + \frac{u_2(x)}{[g(x)]^2} + \frac{u_1(x)}{g(x)}$ con $gr\ u_i(x) < grg(x)$, para todo $i = 1,,2,\cdots,n$.

Demostración.

Dividamos $f(x)$ entre $[g(x)]^{k-1}$, tenemos $f(x) = [g(x)]^{k-1}u_1(x) + r_1(x)$, ahora dividamos $r_1(x)$ entre $[g(x)]^{k-2}$, así $r_1(x) = [g(x)]^{k-2}u_2(x) + r_2(x)$, repitiendo el proceso hasta dividir $r_{k-2}(x)$ entre $g(x)$, se tiene que $r_{k-2}(x) = g(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x)$.

Como $gr\ f(x) < gr[g(x)]^k$ y el grado de cada resto es menor que el grado del divisor, todos los grados de los cocientes $u_i(x)$ son menores que el grado de $g(x)$.

Sustituyendo cada igualdad en la anterior, obtenemos:

$$f(x) = [g(x)]^{k-1}u_1(x) + [g(x)]^{k-2}u_2(x) + \cdots g(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Denotamos $r_{k-1}(x) = u_k(x)$ y sustituimos en la fracción:

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{[g(x)]^{k-1}u_1(x) + [g(x)]^{k-2}u_2(x) + \cdots g(x)u_{k-1}(x) + u_k(x)}{[g(x)]^k}$$

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{u_k(x)}{[g(x)]^k} + \frac{u_{k-1}(x)}{[g(x)]^{k-1}} + \cdots + \frac{u_2(x)}{[g(x)]^2} + \frac{u_1(x)}{g(x)}.$$

■

2.16.10 Teorema: Toda fracción racional propia se descompone de forma única como suma de fracciones simples.

Demostración.

El teorema es consecuencia de los lemas anteriores, por el primero, basta solo analizar las fracciones propias de la forma $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$, con $g(x)$ irreducible, las cuales están descompuestas en fracciones simples por el segundo lema.

■

2.16.11 Teorema: La descomposición de una fracción racional propia en suma de fracciones simples es única.

Demostración.

Supongamos que tenemos dos descomposiciones de una fracción racional propia en suma de fracciones simples, igualando y pasando todo a un miembro tendríamos una suma de fracciones simples idénticamente igual a cero. Sean $p_1(x), \cdots, p_n(x)$, todos los factores irreducibles de los denominadores y sea k_i la potencia superior del polinomio $p_k(x)$ en los denominadores. Multipliquemos esta fracción por ${p_1}^{k_1-1}(x){p_2}^{k_2}(x)\cdots{p_n}^{k_n}(x)$, como resultado obtenemos un polinomio más una fracción propia distinta de cero igual a cero, lo cual no puede ser.

■

2.16.12 Ejemplo: Descomponer en fracciones simples de $\mathbb{R}(x)$ y de $\mathbb{C}(x)$ la fracción racional:

$$\frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2}.$$

Primero, observemos que:

$x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2(x^2+1)$ en $\mathbb{R}[x]$ y

$$= (x+2)(x-1)^2(x+i)(x-i) \text{ en } \mathbb{C}[x].$$

Así, la descomposición de la fracción en $\mathbb{R}(x)$ es:

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Para determinar A, B, C, D, E, hallamos un denominador común y después al igualar las fracciones con el mismo denominador, los numeradores deben ser iguales.

De aquí, la fracción original queda:

$$\frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \frac{A(x-1)^2(x^2+1) + B(x+2)(x-1)(x^2+1) + C(x+2)(x^2+1) + (Dx+E)(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}.$$

De aquí:

$$2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3 = A(x-1)^2(x^2+1) + B(x+2)(x-1)(x^2+1) +$$

$$+C(x+2)(x^2+1) + (Dx+E)(x+2)(x-1)$$

Para $x = -2$ tenemos $A = 3$.

Para $x = 1$ tenemos $C = 1$.

Los demás se obtienen evaluando para $x = i, 0, 1, 2$.

Así:

$$= \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

Para descomponer en $\mathbb{C}(x)$, notemos que las fracciones $\frac{3}{x+2}, \frac{2}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2}$ son fracciones simples de $\mathbb{C}(x)$, como la descomposición es única, nos basta descomponer:

$$\frac{x-3}{x^2+1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}.$$

De lo anterior, efectuando la suma e igualando fracciones se tiene:

$$x - 3 = A(x-i) + B(x+i)$$

Luego: $$x - 3 = (A+B)x + (B-A)i$$

Resultando el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A + B = 1 & (1) \\ iA - iB = -3 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1): $B = 1 - A$. Sustituyendo en (2):

$$iA - i(1-A) = -3 \iff 2iA - i = -3 \iff 2iA = -3 + i \iff A = \frac{-3+i}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ i$$

Sustituyendo A en (1):

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ i + B = 1 \iff B = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ i\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ i$$

Sustituyendo en la descomposición inicial, queda: $\frac{x-3}{x^2+1} = \frac{1+3i}{2(x+i)} + \frac{1-3i}{2(x-i)}.$

Ejercicios Capítulo 2

1) Encontrar el cociente y el resto de la división del polinomio $a(x)$ entre el polinomio $b(x)$ cuando:

   a) $a(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$; $b(x) = 3x^2 - 2x + 1$

   b) $a(x) = x^n sen\psi - x\, senn\psi + sen(n-1)\psi$; $b(x) = x^2 - 2x\cos\psi + 1$

2) Determine cómo se alteran el cociente y el resto de la división de un polinomio $a(x)$ entre un polinomio $b(x)$ si:

   a) El dividendo se multiplica por una constante no nula.

   b) El divisor se multiplica por una constante no nula.

c) Uno de los restos parciales se multiplica por una constante no nula.

3) Obtenga una expresión para el resto de la división de un polinomio $p(x)$ entre $(x - a)(x - b)$ (a y b son números diferentes) en función de $p(a)$ y $p(b)$.

4) Determine bajo qué condiciones el polinomio $x^3 + px + q$ es divisible por:

a) $x + 1$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $x^2 + mx + 1$

5) Encuentre el cociente y el resto de la división de $x^n - a^n$ entre $x - a$ y de $x^n + a^n$ entre $x + a$ (a constante no nula) y escriba la relación existente entre los polinomios encontrados y los dados.

6) a) Demuestre que si a y b son números diferentes, la condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por $(x - a)(x - b)$ es que lo sea simultáneamente por $(x - a)$ y por $(x - b)$.

b) Demuestre que el polinomio $(x-2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ es divisible por $(x - 1)(x - 2)$ y encuentre el cociente de la división de entre ambos polinomios.

7) Encuentre el máximo común divisor de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ que se indican a continuación:

a) $p(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1$; $q(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

b) $p(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 2x + 1)$; $q(x) = (x^2 - 1)^2$

8) Demuestre que el máximo común divisor de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es el mismo que el de los polinomios $p(x) - q(x)$ y $p(x)$. ¿Puede generalizarse este hecho a cualquier combinación de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ (es decir, sustituyendo $p(x) - q(x)$ por un polinomio de la forma $m(x)p(x) + n(x)q(x)$ con $m(x)$ y $n(x)$ polinomios)?

9) Demuestre las siguientes propiedades de los polinomios primos relativos:

- Los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos si y sólo si existen polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que $u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1$.

- Si el polinomio $p(x)$ es primo relativo con los polinomios $g(x)$ y $h(x)$, lo es también con el producto $g(x)h(x)$.
- Si el polinomio $p(x)$ divide al producto $a(x)b(x)$ y $p(x)$ es primo relativo con $a(x)$, entonces divide a $b(x)$.
- Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son divisores del polinomio $a(x)$ y $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos, entonces $p(x)q(x)$ es también divisor de $a(x)$.

10) Verifique en cada caso que el número α que se indica es raíz del polinomio p(x) y determine su correspondiente orden de multiplicidad:

a) $p(x) = x^6 + 17x^4 + 63x^2 - 81$ $\qquad \alpha = - 3i$

b) $p(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ $\qquad \alpha = 1$

11) Demuestre o dé un contraejemplo:

a) "Si un número complejo z es raíz de un polinomio con coeficientes complejos $p(x)$, entonces el conjugado de z es también raíz de $p(x)$"

b) Si la proposición resultó en general falsa, ¿Bajo qué condición (necesaria y suficiente) sobre $p(x)$ resulta verdadera?

12) Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado mínimo que posea al número (– 2) como raíz simple y al número $(-1 - i)$ como raíz doble tal que:

a) $p(x)$ tenga coeficientes complejos.

b) $p(x)$ tenga coeficientes reales.

13) Demuestre que el polinomio $p(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ no posee raíces múltiples.

14) Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado mínimo tal que $p(x) + 1$ sea divisible por $(x - 1)^3$ y al mismo tiempo, $p(x) + 2$ sea divisible por x^4.

15)

a) Determine valores de los parámetros A y B para que el polinomio $p(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ posea al número $a = 1$ como raíz de multiplicidad no inferior a 2.

b) Para los valores de A y B encontrados en a) encuentre la descomposición total de $p(x)$ en factores irreducibles de $R[x]$ y en factores irreducibles de $C[x]$.

16) Muestre que el número complejo $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es raíz doble del polinomio

$$p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

y obtenga la descomposición total de p(x) en factores irreducibles de $C[x]$ y en factores irreducibles de $R[x]$.

17) Seleccione valores de a, b y c para que el máximo común divisor entre los polinomios

$$p(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$$

$$q(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 1$$

sea un asociado de $q(x)$ y en tal caso, obtenga la descomposición total de $p(x)$ en factores irreducibles de $R[x]$.

18) Descomponga totalmente en factores irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ y de $\mathbb{C}[x]$ los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 6x^4 + x^2 - 2$

b) $p(x) = x^4 - ax^2 + 1$ $(a \in R;\ |a| < 2)$

c) $p(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

d) Un polinomio $p(x)$ de grado *n* que posea al número real *c* como raíz y que es divisible por su derivada.

19) Sea $p(x)$ un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$. ¿Bajo qué condición (necesaria y suficiente) sobre $p(x)$ la ireducibilidad de $p(x)$ puede caracterizarse mediante la no existencia de raíces de $p(x)$ en $\mathbb{Q}$?

20) Determine si los siguientes polinomios enteros son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$. Si no lo fueran, descompóngalos en factores irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$:

a) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 9$

b) $q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

c) $r(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

21) Demuestre que el polinomio

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$$

donde los a_i son números enteros distintos dos a dos, es siempre irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

22) Demuestre las siguientes propiedades de los polinomios irreducibles en $K[x]$:

a) Si un polinomio irreducible divide a un producto de dos polinomios, divide necesariamente a algunos de los polinomios factores.

b) Si un polinomio posee la propiedad de que, siempre que divida al producto de dos polinomios cualesquiera debe dividir a uno de los dos factores, entonces dicho polinomio es irreducible.

c) Si un polinomio $p(x)$ es tal que, que para todo polinomio $a(x)$ se cumple que $p(x)$ divide a $a(x)$ o bien $p(x)$ es primo relativo con $a(x)$, entonces $p(x)$ es obligatoriamente irreducible.

23) Demuestre que si un polinomio con coeficientes enteros $p(x)$ es tal que $p(0)$ y $p(1)$ son ambos impares, $p(x)$ no posee raíces enteras. ¿Persiste el resultado en el caso de que $p(0)$ y $p(1)$ sean ambos pares?

24) Dado el polinomio $p(x) = x^5 - 45x + 15$

a) Acote superior e inferiormente sus raíces reales.

b) Determine el número de raíces reales de $p(x)$, separándolas en intervalos en cada uno de los cuales aparezca una sola raíz.

c) Encuentre un valor aproximado de la menor de las raíces positivas de $p(x)$ con error menor que 10^{-6}.

25) Determine si en las descomposiciones en factores irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ de los siguientes polinomios aparece algún polinomio de segundo grado:

a) $p(x) = x^4 - x - 1$

b) $q(x) = x^3 + px + q \; (p, q \in \mathbb{R})$

26) Descomponga en fracciones simples de $\mathbb{R}(x)$ y en fracciones simples de $\mathbb{C}(x)$ las fracciones racionales:

a) $r(x) = \frac{x^2}{x^4-16}$

b) $r(x) = \frac{5x^2+6x-23}{x^6-3x^5+6x^3-3x^2-3x+2}$

27) Determine para qué valores del parámetro real a la fracción racional $\frac{1}{x^4+ax^2+1}$ se descompone en fracciones simples del tipo I (todas) de $\mathbb{R}(x)$.

28) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n números complejos distintos dos a dos. Considerando una fracción racional propia con denominador $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ demuestre que si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números complejos arbitrarios, es siempre posible encontrar un polinomio $p(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, de grado no superior a $(n - 1)$, tal que, para todo i entre 1 y n se cumple $p(a_i) = b_i$. ¿Es único dicho polinomio? Justifique su respuesta.

Capítulo 3 Sistemas de Ecuaciones Lineales. Matrices y Determinantes

Recordemos el problema geométrico de determinar las posiciones relativas de dos rectas r_1y r_2 en el plano. Como cada recta r_i tiene por ecuación $a_i x + b_i y + c_i = 0$, este problema conduce a resolver un sistema de dos ecuaciones "lineales".

Si el sistema no tiene solución, las rectas son paralelas, si tiene solución única, se cortan y si tiene infinitas soluciones son coincidentes.

3.1 Método de Gauss

Sea ahora un sistema de m ecuaciones y n incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (1)$$

En el caso $n = 2$ las ecuaciones representan líneas rectas y en el caso de $n = 3$ representan planos.

Se llama sistema de ecuaciones lineales porque todas las variables que aparecen en el sistema son de primer grado, así las ecuaciones son lineales.

3.1.1 Notaciones:

- a_{ij} denota el coeficiente de la incógnita x_j en la ecuación i y se lee a sub i, j.
- x_j son las incógnitas del sistema.
- b_i son los términos independientes del sistema.

3.1.2 Observación: n no es necesariamente igual a m. Si $n = m$ el sistema se llama cuadrado.

3.1.3 Ejemplos:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 3x - y + z = -1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}.$$

3.1.3 Definición: Diremos que el n – uplo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es solución del sistema, si al sustituirlo en todas las ecuaciones del sistema se obtienen identidades.

3.1.4 Ejemplo: $(1, 1)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

y $(2, 2)$ NO es solución de dicho sistema.

Es obvio que si sustituimos una ecuación del sistema por esa misma ecuación multiplicada por $\lambda \neq 0$, el sistema original y el resultante tienen las mismas soluciones.

Esto es:

3.1.5 Proposición: Si la ecuación i es $a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \cdots + a_{i1}x_n = b_i$ y la sustituimos por $\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i1}x_2 + \cdots + \lambda a_{i1}x_n = \lambda b_i$, con $\lambda \neq 0$, entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es solución del sistema inicial si y sólo si lo es del transformado.

Lo mismo ocurre si sustituimos una ecuación de un sistema por ella misma más otra multiplicada por una constante, también el sistema original y el resultante tienen las mismas soluciones.

Esto es:

3.1.6 Proposición: Si la ecuación i es $a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \cdots + a_{i1}x_n = b_i$ y la ecuación j es $a_{j1}x_1 + a_{j1}x_2 + \cdots + a_{j1}x_n = b_j$ y sustituimos la ecuación *i* por la suma de la ecuación *i* más la ecuación *j* multiplicada por λ, entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es solución del sistema inicial si y sólo si lo es del transformado.

3.1.7 Definición: A las transformaciones que satisfacen las proposiciones **3.1.5** y **3.1.6** se les llama transformaciones elementales.

3.1.8 Observación:

Toda transformación elemental tiene inversa.

Notemos que si hacemos la transformación de la Proposición **3.1.5,** multiplicando la ecuación *i* por λ y después multiplicamos la nueva ecuación *i* por $\frac{1}{\lambda}$ obtenemos la ecuación *i* inicial. De la misma manera, si hacemos la transformación de la Proposición **3.1.6,** agregando a la ecuación *i* la ecuación j multiplicada por λ y después a la nueva ecuación *i* le agregamos la j ecuación multiplicada por $-\lambda$ obtenemos la ecuación *i* inicial.

3.1.9 Proposición: El intercambio de ecuaciones es consecuencia de un número finito de transformaciones elementales.

Demostración.

Primero, sustituimos la ecuación k por la ecuación k más la ecuación j.

Luego, sustituimos la ecuación j por la ecuación j más la nueva ecuación k multiplicada por -1, esto es por $-k$.

A continuación, sustituimos la ecuación k por la ecuación k más la nueva ecuación j.

Como resultado final se han intercambiado las ecuaciones k y j.

■

3.1.10 Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen equivalentes si uno puede obtenerse del otro mediante transformaciones elementales. Notación: $(1)\sim(2)$.

3.1.11 Proposición: Dos sistemas son equivalentes si y sólo si tienen las mismas soluciones.

Esta proposición es consecuencia de las proposiciones **3.1.5** y **3.1.6.**

Un procedimiento para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en eliminar una de las variables.

Trataremos de hacer lo mismo para el sistema general (1).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_{11} \neq 0$, en caso contrario bastaría intercambiar la primera ecuación con otra ecuación k con $a_{k1} \neq 0$.

Ahora construyamos un sistema equivalente donde la primera ecuación permanece igual y todas las restantes ecuaciones son resultado de transformar cada ecuación i por la suma de la ecuación i más la ecuación 1 multiplicada por $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, para $i = 2,3,\cdots,m$, eliminando x_1 en dichas ecuaciones. Notemos que en este sistema equivalente al inicial la incognita x_1 sólo aparece en la primera ecuación.

A continuación, si $a_{22} \neq 0$, construyamos un nuevo sistema equivalente donde la primera y la segunda ecuación permanecen iguales. Entonces se procede a eliminar x_2 en todas las ecuaciones desde la tercera hasta la última transformando cada ecuación i por la suma de la ecuación i más la ecuación 2 multiplicada por $-\frac{a_{i2}}{a_{22}}$, para $i = 3,\cdots,m$. Si $a_{22} = 0$, buscamos si existe algún

$a_{k2} \neq 0$, en cuyo caso, intercambiamos la ecuación 2 con la ecuación k y similarmente anulamos por transformaciones elementales todos los coeficientes de x_2 en las $m-2$ ecuaciones desde la tercera hasta la última. Si todos los $a_{k2} = 0$, pasamos el análisis al primer coeficiente no nulo de las incógnitas x_j , desde $j = 3, \dots n$ de la segunda ecuación. Reiteramos el proceso hasta recorrer todas las ecuaciones y obtener al final un sistema cuya matriz esta escalonada. Si en algún paso encontramos una ecuación con todos los coeficientes de las incógnitas nulos, observamos si el término independiente es cero, en este caso podemos prescindir de esta ecuación y continuar el análisis en la siguiente, si el término independiente es distinto de cero, se obtiene una igualdad imposible y el sistema no tiene solución.

3.1.12 Definición: El proceso anterior recibe el nombre de Método de Gauss o de Eliminación Consecutiva de las Incógnitas.

Notemos que no es necesario trabajar con las ecuaciones totales, basta trabajar con los coeficientes del sistema, dispuestos en un arreglo rectangular.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Este arreglo se llama Matriz Ampliada del Sistema y si no incluimos los b_j se nombra Matriz de del Sistema.

Las líneas horizontales se llaman filas y las verticales columnas.

3.2 Clasificación de los sistemas

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en cuanto a la existencia y unicidad de las soluciones y el Método de Gauss permite clasificar cualquier sistema.

3.2.1 Definición: Un sistema de ecuaciones lineales se dice:

Compatible si tiene solución o Incompatible si no tiene ninguna. Un sistema Compatible puede ser: Compatible Determinado si tiene solución única o Compatible Indeterminado si posee más de una solución.

Veamos ahora algunos ejemplos:

3.2.2 Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right)\left(-\frac{3}{2}F_1 + F_2, -2F_1 + F_3\right),$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)(-6F_2 + F_3),$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

Expliquemos el esquema anterior que servirá para entender los restantes ejemplos:

Puede apreciarse que la primera de las matrices equivalentes anteriores es la matriz ampliada del sistema dado. Como el coeficiente $a_{11} = 2$ de la variable x_1 en la primera ecuación es distinto de cero, se construye un sistema equivalente cuya matriz ampliada resulta la segunda matriz del esquema.

En la segunda matriz permanece igual la primera fila. La segunda fila es resultado de una transformación elemental del primer sistema que convierte en nulo el coeficiente de x_1, esto es, la nueva segunda fila resulta de adicionar a la segunda fila (F_2) de la matriz inicial, la primera fila (F_1) multiplicada por la constante $-\frac{3}{2}$. Esta operación se identifica con la primera expresión que aparece en el paréntesis a la derecha de la primera matriz del esquema, es decir: $-\frac{3}{2}F_1 + F_2$. Igualmente, la tercera fila también es resultado de una transformación elemental del primer sistema que convierte en nulo el coeficiente de x_1, luego, la nueva tercera fila resulta de adicionar a la tercera fila (F_3) de la matriz inicial, la primera fila (F_1) multiplicada por la constante -2. Esta otra operación se identifica con la segunda expresión que aparece en el paréntesis a la derecha de la primera matriz del esquema, esto es: $-2F_1 + F_3$. En esta matriz del esquema se evidencia la culminación correcta del primer paso del método de Gauss a partir de la observación de los ceros correspondientes a los coeficientes de la variable x_1 en las dos últimas filas. Como el coeficiente

$a_{22} = -\frac{1}{2}$ de la variable x_2 en la segunda ecuación (fila) es distinto de cero, se construye un nuevo sistema equivalente cuya matriz ampliada resulta la tercera matriz del esquema.

En la tercera matriz permanecen iguales las dos primeras filas. La tercera fila es resultado de una transformación elemental del segundo sistema (segunda matriz del esquema) que convierte en nulo el coeficiente de x_2. Así, la nueva tercera fila resulta de adicionar a la tercera fila (F_3) de la matriz inicial, la segunda fila (F_2) multiplicada por la constante -6. Esta operación se identifica con la expresión que aparece dentro del paréntesis a la derecha de la segunda matriz del esquema, esto es: $-6F_2 + F_3$. En esta última matriz del esquema se ha culminado el segundo y último paso del método de Gauss del sistema trabajado, identificado con la nulidad del coeficiente de la variable x_2 en la tercera fila.

Como el sistema equivalente final está representado por una matriz escalonada, se construye la solución de forma ascendente, es decir, en primer lugar, se despeja la variable x_3 en la ecuación que resulta del último escalón, sustituyendo ese valor en la segunda ecuación para despejar la variable x_2 y finalmente, se sustituyen los dos despejes anteriores en la primera ecuación y se despeja x_1.

Veamos el resultado de tal estrategia. De la tercera fila de la última de las matrices equivalentes, se tiene que: $5x_3 = -2 \iff x_3 = -\frac{2}{5}$.

De la segunda columna de esta última matriz, se tiene que: $-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}$

Sustituyendo en la ecuación anterior, el valor de x_3 obtenido anteriormente, se tiene que:

$$-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{10}.$$

De manera análoga, al sustituir los valores obtenidos de x_2 y x_3 en la ecuación correspondiente a la primera fila de la última matriz equivalente, se obtiene que: $x_1 = \frac{13}{20}$.

Así, el sistema tiene una única solución:

$$S = \left\{\left(\frac{13}{20}, \frac{1}{10}, -\frac{2}{5}\right)\right\}.$$

Este sistema es Compatible Determinado.

3.2.3 Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)(-2F_1 + F_2, -3F_1 + F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)(-F_2 + F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Usualmente, cuando se aprecia que una fila se va convertir totalmente en una fila nula, en el siguiente paso prescindimos de dicha fila porque no aporta información a la solución. Así, podemos escribir que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

De la segunda fila, se tiene que: $-x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$.

De la primera fila, se tiene que: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Sustituyendo $x_2 = -x_3$, se obtiene que: $x_1 = 1$.

Si hacemos $x_3 = k$, el sistema tiene como solución:

$$S = \{(1, -k, k) \colon k \in K\}$$

Luego, como para cada $k \in K$ tenemos una solución diferente, el sistema tiene más de una solución (infinitas, pues k toma todos los valores del conjunto K), por lo tanto, es Compatible Indeterminado.

3.2.4 Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)\left(-\frac{3}{2}F_1 + F_2, -\frac{5}{2}F_1 + F_3\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)(-F_2 + F_3)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)(-F_2 + F_3)$$

La última fila de la matriz final del proceso se identifica con la ecuación:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$. Lo que equivale a la igualdad: $0 = -2$, la cual es Imposible. Así, el sistema NO tiene solución.

Luego, el sistema es Incompatible.

3.2.5 Observaciones:

Del análisis de los ejemplos anteriores podemos deducir cómo queda la matriz final del sistema en cada uno de los casos, luego de aplicar el Método de Gauss:

- Compatible Determinado:

  La matriz resulta triangular, lo que permite poder calcular de forma ascendente en cada escalón el valor de una variable.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right), a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

- Compatible Indeterminado

  Se obtiene un esquema trapezoidal, así en algún momento tendremos que despejar una variable en función de otras, que pueden tomar valores arbitrarios.

  Las variables que pueden tomar valores arbitrarios se llaman Variables Libres.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \dots a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \dots a_{rn} & b_n \end{array}\right)$$

- Incompatible

En este caso tenemos un esquema caracterizado por al menos una fila con todos los elementos cero excepto el término independiente y así arribamos a una igualdad imposible.

Veamos ahora algunos ejemplos de clasificación de sistemas en los cuales aparecen parámetros en sus coeficientes:

3.2.6 Ejemplo:

Analicemos para qué valores de los parámetros $a, b, c \in K$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

Para dar respuesta a esta interrogante apliquemos el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array}\right) (-3F_1 + F_2, -F_1 + F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b - 3a \\ 0 & -7 & 11 & c - a \end{array}\right) (-F_2 + F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & b - 3a \\ 0 & 0 & 0 & 2a - b + c \end{array}\right) (-F_2 + F_3).$$

Al observar la última matriz del proceso de Gauss puede apreciarse que se tiene un esquema de incompatibilidad si $2a - b + c \neq 0$, luego para todos los $a, b, c \in K$ que satisfacen que: $2a - b + c \neq 0$, el sistema es Incompatible y por tanto, no posee ninguna solución.

Notemos ahora que para los $a, b, c \in K$ tales que $2a - b + c = 0$, la matriz final del proceso de Gauss tiene la forma trapezoidal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & b - 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, para esos valores el sistema es Compatible Indeterminado.

3.2.7 Ejemplo:

Veamos ahora cómo se clasifica el sistema de ecuaciones lineales que aparece a continuación, para los diferentes valores del parámetro $k \in K$:

Apliquemos el método de Gauss:

$$\begin{cases} x \; + 2y \; + kz \; = \; 1 \\ 2x \; + ky \; + 8z \; = \; 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & 3 \end{array}\right) (-2F_1 + \; F_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & 8-2k & 1 \end{array}\right).$$

Notemos que el miembro izquierdo de la ecuación que resulta de la segunda fila de la matriz final del proceso se anula totalmente cuando $k \; = \; 4$ y su miembro derecho es una constante no nula, por tanto, para ese valor se tiene que el sistema es Incompatible. Para todos los $k \in K$ tales que $k \neq \; 4$ el sistema es Compatible Indeterminado ya que la matriz final tiene la forma trapezoidal. Queda clasificado el sistema para todo k.

3.2.8 Ejemplo:

Clasifiquemos el sistema de ecuaciones lineales dado atendiendo a los diferentes valores de los parámetros $k \in K$ y $b \; \in K$:

$$\begin{cases} 2x \; + y + 4z \; = \; 1 \\ 5x + k\,y - 2z = \; b \\ 3x + y \; + 2z \; = \; 0 \end{cases}$$

Apliquemos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & k & -2 & b \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \left(-\frac{5}{2}F_1 + F_2, -\frac{3}{2}F_1 + F_3\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & k-\frac{5}{2} & -12 & -\frac{5}{2}+b \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) (F_2 \leftrightarrow F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{2k-5}{2} & -12 & \frac{2b-5}{2} \end{array}\right) ((2k-5)F_2 + F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -8k+8 & b-3k+5 \end{array}\right).$$

Analicemos cuándo esta última matriz del esquema tiene la forma triangular, la forma trapezoidal o el esquema de incompatibilidad.

Si $k \neq 1$, la matriz final tiene la forma triangular, luego el sistema es Compatible Determinado.

Si $k = 1$ y $b = -2$, se anula completamente la tercera fila de la matriz final quedando de forma trapezoidal, luego el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $k = 1$ y $b \neq -2$, el miembro izquierdo de la última ecuación es nulo y el término independiente no nulo, por tanto, el sistema es Incompatible.

3.3 Sistemas homogéneos

3.3.1 Definición: Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo si todos los términos independientes son cero, o sea $b_j = 0, j = 1, \dots, m$.

Esto es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

3.3.2 Observación: Los sistemas homogéneos siempre son compatibles, pues siempre tienen la solución $(0, 0, \dots, 0)$.

Para trabajar con un sistema homogéneo no hace falta trabajar con los términos independientes, pues las transformaciones elementales no modifican los mismos.

3.3.3 Ejemplo:

Resolvamos el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 5x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

Apliquemos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left(-\frac{3}{2}F_1 + F_2, -2F_1 + F_3\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} (-2F_2 + F_3)$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(-F_2+F_3).$$

La segunda fila de la matriz final del proceso se corresponde con la ecuación:

$$-\frac{1}{2}y+\frac{9}{2}z=0 \Leftrightarrow 9z-y=0 \Leftrightarrow y=9z.$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación $2x+4y-z=0$ correspondiente a la primera fila queda: $2x+4(9z)-z=0 \Leftrightarrow 2x=-35z \Leftrightarrow x=-\frac{35}{2}z$

De aquí, el sistema tiene como solución:

$$S=\{\left(-\frac{35}{2}z,9z,z\right),z\in K\}$$

3.4 Regla de Cramer para sistemas de orden dos y tres

Nos dedicaremos ahora a estudiar sistemas cuadrados con dos y tres incógnitas.

Veamos primero el sistema:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

Multipliquemos la primera ecuación por a_{22} y la segunda por $-a_{12}$ y sumémoslas.

$$a_{11}a_{22}x_1+\ a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}$$

$$-a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2=\ -b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22}-\ a_{12}a_{21})x_1=\ b_1a_{22}-\ b_2a_{12}$$

Si $a_{11}a_{22}-\ a_{12}a_{21}\neq 0$, entonces $x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ y análogamente $x_2=\frac{a_{11}b_1-a_{21}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

Introduciremos un recurso que nos permita recordar fácilmente estas fórmulas.

3.4.1 Definición: Llamamos Determinante de orden dos a la expresión:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

Así, nos quedan las fórmulas: $x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$ y $x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$.

3.4.2 Definición: El determinante $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ se llama determinante del sistema. Para cada variable x_i llamamos Δ_{x_i} al determinante que se obtiene sustituyendo en Δ los coeficientes de x_i

por los términos independientes, así $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$. Este método se nombra Regla de Cramer para los sistemas de orden dos.

3.4.3 Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x \ - y \ = \ 0 \\ x \ + 5y \ = \ 11 \end{cases}.$$

$$\Delta \ = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 11 = 11,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 22 + 0 = 22.$$

Así, $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1$ e $y \ = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2$.

Luego, la solución del sistema es $S \ = \ \{(1, 2)\}$.

Para orden tres puede hacerse algo “similar”.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Multipliquemos la primera ecuación por $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, la segunda por $a_{13}a_{32} - \ a_{12}a_{33}$, la tercera por $a_{12}a_{23} - \ a_{13}a_{22}$ y sumémoslas.

Así tenemos:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 =$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + \ a_{12}a_{23}b_3 + \ a_{13}b_2a_{32} - \ a_{13}a_{22}b_3 - \ a_{12}b_2a_{33} - \ b_1a_{23}a_{32}$$

Si $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$ tenemos $x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$.

Análogamente obtenemos fórmulas para x_2 y x_3.

Estas expresiones parecen complicadas, pero si introducimos un recurso “análogo” al de orden dos, obtenemos para las x_i la misma fórmula de la Regla de Cramer para orden dos, esto es: $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, siendo Δ_{x_i} el determinante que se obtiene al sustituir en el determinante de la matriz del sistema los coeficientes de x_i por los términos independientes.

3.4.4 Definición: Llamamos determinante de orden tres a la expresión:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

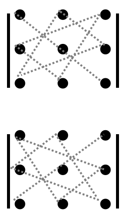
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Una forma de calcular este determinante es agregar las dos primeras filas o las dos primeras columnas y formar seis productos de tres elementos, asignándoles signo más a los que van hacia abajo y menos a los que van hacia arriba (como indican las figuras).

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Otra forma de obtener los seis productos, tenemos los tres positivos dibujando la diagonal principal y dos triángulos con bases paralelas a la diagonal principal y los tres negativos en forma similar tomando la diagonal opuesta a la diagonal principal como muestran las figuras



Ests formas de calcular el determinante de orden tres se denomina Regla de Sarrus.

Notemos que el desarrollo del determinante de tercer orden no es más que la expresión antes obtenida en el denominador que aparece en el cálculo de la variable x_1 del sistema de ecuaciones lineales de orden 3 y que se requiere que sea diferente de cero para lograr este resultado. Igualmente, podemos identificar la expresión del numerador del cálculo de x_1 con el determinante que resulta de sustituir la primera columna del determinante de la matriz del sistema por la columna de los términos independientes y que podemos denotar similarmente al caso de orden 2 por Δ_{x_1}. De esta forma:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Similarmente, podría verificarse que las expresiones de x_2 y x_3 son, respectivamente:

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \text{ y } x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

3.4.5 Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2\,x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 9 - 2 + 30 - 6 = 28$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 20 + 3 - 8 - 0 - 2 = 13$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 12 - 1 + 40 - 0 = 47$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 + 0 - 0 - 6 + 12 = 21$$

Así $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{13}{28}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{47}{28} y\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{21}{28}$.

Luego, la solución del sistema es $S = \left\{\left(\frac{13}{28}, \frac{47}{28}, \frac{21}{28}\right)\right\}$.

3.4.6 Observación: Notemos que tanto para orden dos, como para orden tres encontramos una fórmula que nos permite encontrar la solución si $\Delta \neq 0$, pero si $\Delta = 0$, no podemos asegurar nada respecto a la solución o no del sistema, solo que, si la tuviera, no va a ser solución única.

3.4.7 Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Empleando el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)(-2F1\ +\ F2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De donde, el sistema tiene como solución $S = \{(1\ -\ y, y): y \in K\}$, por lo que es Compatible Indeterminado.

3.4.8 Ejemplo:

$$\begin{cases} x\ +3y\ =\ 1 \\ 2x\ +6y\ =\ 0 \end{cases}.$$

$$\Delta\ = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Empleando el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right)(-2F1\ +\ F2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

De donde, el sistema NO tiene solución, o sea es incompatible.

3.4.9 Observación: La Regla de Cramer nos permite hallar la solución única de los sistemas cuadrados cuando estos son Compatibles Determinados en los casos de orden dos y tres. Nos convendría poder generalizar esta regla para sistemas de cualquier orden, para ello necesitamos estudiar las matrices y definir el concepto de determinante en general.

3.5 Matrices

En 1850, James Joseph Sylvester (1814-1897) introduce las matrices. William Hamilton (1788-1856) y Arthur Cayley (1821-1895) entre los años 1853 y 1858, hacen aportes a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales empleando matrices.

Las matrices tienen aplicaciones en muchos campos, por ejemplo: la Computación, la Estadística y la Programación Lineal.

Cuando estudiamos los sistemas de ecuaciones lineales vimos que para el Método de Gauss no era necesario trabajar con todo el sistema, sino con los coeficientes dispuestos en un arreglo rectangular.

3.5.1 Definición: Llamamos matriz de m filas y n columnas a un arreglo rectangular de elementos en la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.5.2 Notaciones:

Las líneas horizontales se llaman filas y las verticales columnas.

a_{ij} denota el elemento que se encuentra en la fila i y la columna j.

El producto indicado $m \times n$ es llamado el orden o tamaño de la matriz.

Si $m = n$, la matriz se dice cuadrada de tamaño n.

Denotaremos por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ una matriz de tamaño $m \times n$ con coeficientes a_{ij}.

El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en K se denota por $M_{m\times n}(K)$.

Si $n = m$, escribiremos $M_n(K)$.

La matriz que tiene todos sus coeficientes ceros la llamamos matriz nula y escribimos $0_{m\times n}$.

La matriz cuadrada $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ se llama matriz identidad.

La matriz cuadrada $aI_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ se llama matriz escalar.

Las matrices tales que $a_{ij} > 0 (< 0)$ se llaman matrices triangulares superiores (inferiores).

3.5.3 Definición: Igualdad: Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales, esto es $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

3.5.4 Definición: Para una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ de tamaño $m \times n$, definimos su transpuesta como la matriz ${}^tA = (a_{ji})_{n\times m}$ de tamaño $n \times m$. Esta es la matriz que se forma a partir de A tomando las filas de A como columnas.

3.5.6 Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5.5 Definición: Si para una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se tiene que $A = \ {}^{t}A \quad (A = - \ {}^{t}A)$, se llama simétrica (antisimétrica).

A simétrica (antisimétrica) si y sólo si $a_{ij} = a_{ji} \quad (a_{ij} = -a_{ji})$.

3.6 Operaciones con Matrices

Ahora estudiaremos las operaciones que pueden definirse para las matrices.

3.6.1 Definición: Suma: Sean dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo tamaño, se define la suma $A + B$ como la matriz cuyos coeficientes son la suma de los elementos correspondientes de A y B. Esto es $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Esta suma de matrices tiene las siguientes propiedades:

3.6.2 Propiedades:

1. Asociativa.
2. Conmutativa.
3. Existe un elemento neutro, la matriz nula.
4. Para toda matriz A, existe la matriz opuesta $-A$.

Estas propiedades se deducen fácilmente del hecho de que la suma de matrices se reduce a la suma de las componentes que son elementos de K.

3.6.3 Observación: Notemos que $2A = A + A = (a_{ij} + a_{ij}) = (2a_{ij})$.

Así, en general $nA = (na_{ij}), n \in \mathbb{Z}$.

De aquí, generalizando, podemos definir otra operación.

3.6.4 Definición: Producto de una matriz por un escalar: Sean $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$ y α un escalar, se define el producto de A por α como la matriz αA cuyos coeficientes son los de A multiplicados por α. Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

3.6.5 Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\left(\frac{1}{2}\right) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.6.6 Propiedades:

1. $(\alpha + \alpha')A = \alpha A + \alpha' A$

2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

3. $\alpha(\alpha' A) = (\alpha\alpha')A$

4. $1A = A$

Ahora, introduciremos otra operación entre matrices que nos ayudará a expresar de forma matricial los sistemas de ecuaciones lineales.

3.6.7 Ejemplo:

Fijémonos en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que en cada fila de A tenemos la misma cantidad de elementos que en cada columna de B, así podemos construir una matriz, cuyos elementos (i, j) se forman como suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila *i* de *A* por los de la columna *j* de *B*:

$$AB = \begin{pmatrix} (-1)2 + 3(1) & (-1)1 + 3(-1) & (-1)0 + 3(1) & (-1)1 + 3(0) \\ (1)2 + 1(1) & (1)1 + 1(-1) & (1)0 + 1(1) & (1)1 + 1(0) \\ (2)2 + 4(1) & (2)1 + 4(-1) & (2)0 + 4(1) & (2)1 + 4(0) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, en general, puede definirse el producto de matrices.

3.6.8 Definición: Producto de Matrices: Sean $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times k$ y $B = (b_{ij})$ de tamaño $k \times n$, el producto AB es una matriz de tamaño $m \times n$, definida por $AB = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$.

La condición necesaria y suficiente para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es que el número de columnas de A sea igual al de filas de B.

Dicho de otra forma, el número de columnas de la que premultiplica tiene que ser igual al de filas de la que postmultiplica.

De otra forma más, el número de columnas de la primera tiene que ser igual al de filas de la segunda.

3.6.9 Observación: Queda claro de la condición, que a veces puede efectuarse AB y NO BA. Como se observa en el ejemplo **3.6.7**.

3.6.10 Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pueden efectuarse AB y BA, pero no son iguales pues en este caso son de diferentes tamaños.

3.6.11 Ejemplo:

Nótese que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.12 Observaciones:

- En general, no podemos asegurar que puedan efectuarse AB y BA.
- En el caso en que puedan efectuarse, pueden resultar de diferente tamaño.
- Ni siquiera en el caso de matrices cuadradas se tiene, en general, que $AB = BA$.

3.6.13 Conclusión: El producto de matrices, en general, NO es conmutativo.

Conocemos que los números satisfacen que si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, además cumplen la propiedad cancelativa, esto es: si $ab = ac, a \neq 0$ entonces $b = c$. Eso no sucede necesariamente en el caso de las matrices, como muestra el siguiente ejemplo.

3.6.14 Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.6.15 Conclusión:

El producto de matrices puede ser cero sin que sean cero ninguno de los factores.

No vale, en general, la propiedad cancelativa para el producto.

Este producto de matrices satisface las siguientes propiedades:

3.6.16 Propiedades:

1. Asociativo $A(BC) = (AB)C$.
2. Distribuye respecto a la suma a ambos lados:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

3. Existe un elemento neutro, la matriz identidad.

$$I_n A_{n\times m} = A,$$

$$B_{n\times m} I_m = B.$$

Consideremos nuevamente el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

y las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Con ayuda del producto de matrices antes definido se puede escribir el sistema en notación matricial en la forma: $AX = b$.

3.6.17 Ejemplo: Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

En notación matricial, nos queda:

$AX = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.7 Determinantes

Los determinantes de segundo y tercer orden nos ayudaron al cálculo de las soluciones de un sistema cuadrado Compatible mediante la Regla de Cramer.

Sería bueno disponer, en general, de determinantes de orden superior al tercero.

Fijémonos en los determinantes de segundo y tercer orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Veremos ahora la definición de permutación, que nos permitirá generalizar la definición de determinante para una matriz de orden *n*.

3.7.1 Definición: Se llama una permutación del conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$ a una aplicación biyectiva de este conjunto en sí mismo.

Así una permutación puede escribirse $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

3.7.2 Observación: Como una permutación es una biyección, todas las imágenes son diferentes. Luego para $\sigma(1)$ tenemos *n* posibilidades, una vez fijado $\sigma(1)$ tenemos $n-1$ posibilidades para $\sigma(2)$, de modo similar fijados $\sigma(1)$ y $\sigma(2)$ tenemos $n-2$ posibilidades para $\sigma(3)$ y así sucesivamente hasta llegar a $\sigma(n)$, para este tenemos una posibilidad. Así tenemos

$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$ permutaciones de *n* elementos.

Llamaremos S_n al conjunto de las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$.

Notemos que una permutación está determinada por un sistema de índices diferentes $\big(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\big)$ dado por las *n* imágenes diferentes de la aplicación σ.

3.7.1 Definición: Sea $S = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ el sistema de índices diferentes dado por la permutación σ. Se dice que *S* tiene una inversión respecto al orden natural si para algún *i* se cumple que: $j_i > j_{i+s}$ siendo $s = i+1, i+2, \dots, n$.

Es decir, hay una inversión en *S* cuando j_i es mayor que alguno de sus sucesores.

El número de inversiones de $S = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ resulta del conteo de cuántas veces cada índice del sistema satisface ser estrictamente mayor que todos sus sucesores en *S*.

3.7.2 Definición: Si la cantidad de inversiones del sistema $\big(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\big)$ de índices diferentes dado por la permutación σ, es par la permutación se llama par e impar en caso contrario.

3.7.3 Ejemplos:

En el producto del determinante de orden tres: $a_{12}a_{23}a_{31}$, los subíndices de las filas están ordenados de forma natural, pero los de las columnas no lo están. Para el sistema de subíndices de las columnas (2,3,1), tenemos que: $2 > 1$, $3 > 1$.

Luego, el número de inversiones del sistema $(2,3,1)$ es dos.

Igualmente, en el determinante de orden tres, para el producto $-a_{13}a_{22}a_{31}$, se tiene que los subíndices de las filas están ordenados de forma natural, pero los de las columnas no lo están. Para el sistema de subíndices de las columnas $(3,2,1)$, tenemos que: $3 > 2, 3 > 1, 2 > 1$.

Luego, el número de inversiones del sistema $(3,2,1)$ es tres.

Si en cada sumando de las expresiones de los determinantes de orden dos y tres, ordenamos las filas en el orden natural y tomamos el sistema de índices dado por las columnas tenemos una permutación, si ponemos $\alpha = 1$, cuando la permutación es par y $\alpha = -1$ en caso contrario, podemos reescribir las expresiones anteriores de la siguiente forma:

El determinante de orden dos es igual a $\sum_{\sigma \in S_2} \alpha a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$ y el de orden tres a $\sum_{\sigma \in S_3} \alpha a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$.

3.7.4 Observaciones:

1. El número de factores en cada producto coincide con el orden de la matriz.

2. En cada producto están representadas todas las filas y todas las columnas sin repeticiones.

3. El signo de cada factor se determina por el número de inversiones en las columnas con respecto al orden natural una vez ordenadas las filas.

4. Cada determinante posee tantos sumandos como indique el factorial del orden de la matriz, pues cada sumando está determinado por una permutación σ de S_n.

Generalizando estas ideas podemos definir el determinante de una matriz de orden n en general.

3.7.5 Definición: Sea una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño n. El determinante de A, que denotaremos por $|A|$ es la suma algebraica de $n!$ productos de n elementos de la matriz tomados con el siguiente criterio:

- Cada producto tiene n factores.

- En cada producto aparecen representadas todas las filas y todas las columnas una vez y solo una.
- Cada producto va precedido de un signo que se obtiene a partir del número de inversiones en las columnas con respecto al orden natural una vez dispuestas las filas en el orden natural.

3.7.6 Observación: La Regla de Sarrus NO puede aplicarse a determinantes de orden mayor que tres, pues por ejemplo si fuera de orden cuatro, al agregar tres filas nos daría sólo 8 productos y no $4! = 24$.

3.7.7 Ejemplo: En el de orden cuatro aparecen $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ y $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ que cumplen los requisitos de la definición y no se obtienen agregando tres filas.

Por la definición podemos calcular algunos determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

La definición, en general, podría escribirse como:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Con α igual 1 si la permutación es par, o sea los subíndices de las columnas tienen un número par de inversiones con respecto al orden natural y -1 en caso contrario.

Esta definición así escrita resulta poco práctica para el cálculo.

A continuación, deduciremos algunas propiedades de los determinantes, directamente de la definición u observando algún ejemplo ilustrativo.

3.7.8 Propiedad: Si una de las columnas está constituida por ceros, el determinante es cero.

Demostración.

Como en cada producto del determinante están representadas todas las columnas, en cada producto hay un cero.

■

3.7.9 Ejemplo: Sabemos que $|I_3| = 1$, si calculamos $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$, pero éste es el determinante de la matriz que resulta de intercambiar las columnas 1 y 3 de I_3.

3.7.10 Propiedad: Si se intercambian dos columnas, el determinante cambia de signo.

Demostración.

Este intercambio produce una inversión adicional en las columnas.

■

3.7.11 Propiedad: Si posee dos columnas iguales, el determinante es cero.

Demostración.

Basta intercambiar las dos columnas iguales, así el determinante es igual a su opuesto y por tanto, es cero.

■

3.7.12 Ejemplo: Calculemos $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3.7.13 Propiedad: Si todos los elementos de una de las columnas tienen un factor común k, este puede extraerse multiplicando el determinante.

Demostración.

Como en cada producto del determinante están representadas todas las columnas, en cada producto hay un factor k.

■

3.7.14 Propiedad: Si posee dos columnas proporcionales, el determinante es cero.

Demostración.

Resulta de extraer el factor de proporcionalidad por la propiedad anterior y así, se tienen dos columnas iguales y por tanto, el determinante es cero.

■

3.7.15 Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a+b & c \\ d+e & f \end{vmatrix} = (a + b)f - (d + e)c = af + bf - dc - ec =$$

$$= (af - dc) + (bf - ec) = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

3.7.16 Propiedad: Si una columna se descompone como la suma de dos columnas, el determinante se descompone como la suma de dos determinantes, cuyas columnas, excepto la desdoblada en sumandos se mantienen iguales y la desdoblada para cada determinante tiene una de las columnas sumando.

Demostración.

Como en cada producto del determinante están representadas todas las columnas, en particular está representada la columna que se descompone como la suma de dos columnas y así se descompone el determinante a partir de la distributividad del producto respecto a la suma.

■

3.7.17 Observación: Nótese que debido a esta propiedad $|A + B|$ no es necesariamente igual a

$$|A| + |B|.$$

3.7.18 Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, así $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, pero $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$

3.7.18 Propiedad: El determinante del producto es el producto de los determinantes, o sea $|AB| = |A||B|$.

3.7.19 Observación: La demostración de esta propiedad se basa en el desarrollo por menores que se definirá posteriormente y la forma que tienen las filas y columnas de *AB*.

3.7.20 Ejemplo: Si en $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le sumamos a la segunda columna la primera multiplicada por dos, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Como el segundo determinante es cero, observamos que el nuevo determinante es igual al inicial.

3.7.21 Propiedad: El determinante no se altera si a los elementos de una columna le agregamos los de otra multiplicados por una constante.

Demostración.

Es consecuencia de las propiedades anteriores.

■

3.7.22 Observación: Esta propiedad permite "simplificar" el determinante en el sentido de lograr más ceros.

3.7.22 Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -14 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} (2C_1 + C_2 \to C_2, -3C_1 + C_3 \to C_3)$$

Si consideramos ${}^tA$, todo elemento de $|{}^tA|$ es un elemento de $|A|$ y viceversa, así:

3.7.23 Propiedad: El determinante de toda matriz es igual al de su transpuesta, o sea:

$|{}^tA| = |A|$.

3.7.24 Corolario: Todas las propiedades valen también por filas.

3.7.25 Observación: Notemos que, aunque estas propiedades son buenas en general, no resuelven el problema práctico de calcular el determinante.

3.8 Desarrollo por menores

Para tratar de encontrar una forma práctica de calcular un determinante en general, observemos nuevamente los conocidos casos de orden dos o tres.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3.8.1 Observación: Notemos que podemos expresar en cada caso, tanto para orden dos como para orden tres, el determinante como una combinación de determinantes de orden menor.

3.8.2 Definición: Llamamos menor del elemento a_{ij} al determinante M_{ij} de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A. El producto $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denomina cofactor o adjunto del elemento a_{ij}.

Puede demostrarse el siguiente resultado:

3.8.3 Teorema: Desarrollo por menores: Para una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño n, el determinante de A es igual a $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$, para j fijo o $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$, para i fijo.

Idea de la demostración.

Analicemos el término $(-1)^{i+j}M_{ij}$, el menor M_{ij} es un determinante de orden $n-1$, en el que aparecen $(n-1)!$ productos de $n-1$ elementos de la matriz A en los cuales están representadas todas las filas excepto la i y todas las columnas excepto la j. Al multiplicar cada uno de estos productos por todos los a_{ij} correspondientes a la fila i (o a la columna j), se convierten en términos de $|A|$ y su signo viene dado por $(-1)^{i+j}$, ya que al ordenar estos productos por subíndices de filas, el correspondiente a la columna j aparece en el lugar i.

■

3.8.4 Observación: Este desarrollo puede hacerse por cualquier fila o columna.

3.8.5 Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila, el determinante anterior es igual a:

$$= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (2)(3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= [2 + 1] + (6)[2 + 1] - [6 - 1 + 0 - 0 - 0 - 4] = 3 - 18 - 1 = -16.$$

Análogamente, el desarrollo por la segunda fila es:

$$= (3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 1 & -1\\0 & 1 & 2\end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 1 & -1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} +$$

$$+(0)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (-3)[4+0+0-0+2+2] + [2+1+0-0+1+4] + 0 + 0 = (-3)8 + 8 = -16.$$

3.8.6 Observación: En el ejemplo se observa que es siempre más conveniente desarrollar por aquella fila o columna que tenga más ceros.

Con ayuda de las propiedades de los determinantes podemos hacer aparecer ceros en el determinante.

3.8.7 Ejemplo: Si en el ejemplo anterior le agregamos a la primera columna la segunda multiplicada por -3.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\3 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-5 & 2 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Ahora, desarrollando por la segunda fila:

$$= (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-5 & -1 & 0\\-1 & 1 & -1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = -16.$$

Sólo tenemos que calcular un determinante de orden tres.

3.9 Matriz inversa

Veamos una propiedad interesante que resulta de multiplicar los cofactores de una misma fila (o columna) por los coeficientes de otra fila (o columna) y que emplearemos más adelante para obtener otro resultado.

Notemos qué pasa si multiplicamos los elementos de una fila por los cofactores de otra.

3.9.1 Ejemplo: Sea una matriz de orden 3, multipliquemos los elementos de la fila uno por los cofactores de los elementos de la fila dos, entonces:

$$a_{11}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{12}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{13}(-1)^{2+3}M_{23} =$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{32} & a_{23}\end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Si nos fijamos, esta expresión resulta el desarrollo por la segunda fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

3.9.2 Observación: Siempre que multipliquemos los elementos de una fila (columna) por los cofactores de otra fila (columna) da como resultado cero.

Retornemos a las operaciones con matrices, particularmente, el producto de matrices cuadradas. Nos preguntamos por la existencia de inverso para este producto.

Si existe el inverso, debe satisfacer $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Como sabemos que el determinante del producto es el producto de los determinantes, entonces $|A||A^{-1}| = |A^{-1}||A| = |I| = 1 \neq 0$, luego $|A| \neq 0$ y viceversa.

O sea, tenemos el siguiente resultado:

3.9.3 Propiedad: A es inversible si y sólo si $|A| \neq 0$.

3.9.4 Observación: Aunque en español la terminología correcta es invertible, usualmente se utiliza el termino inversible tomado directamente del inglés.

Veamos cómo calcular A^{-1}.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden n con $|A| \neq 0$, formemos la matriz:

$Cof(A) = ((-1)^{i+j}M_{ij})$, esto es, la matriz cuyos elementos son los cofactores de los elementos de A.

Si hacemos el producto de A por la transpuesta de $Cof(A)$ en los dos sentidos, esto es $A \quad {}^tCof(A)$ y $\quad {}^tCof(A)A$, debido a que vimos antes que siempre que multiplicamos los elementos de una fila (columna) por los cofactores de otra da como resultado cero, tenemos que:

$A \quad {}^tCof(A) = \quad {}^tCof(A)A = |A|Id.$

Si $|A| \neq 0$, podemos dividir por este número en la igualdad anterior y se tiene que

$\frac{1}{|A|}\left(A \quad {}^tCof(A)\right) = \frac{1}{|A|}(\quad {}^tCof(A)A) = Id.$

Como $\frac{1}{|A|}$ es un escalar por las propiedades del producto por escalares podemos escribir:

$$A\left(\frac{1}{|A|} \quad {}^tCof(A)\right) = \left(\frac{1}{|A|} \quad {}^tCof(A)\right)A = Id$$

De aquí tenemos la siguiente definición.

3.9.5 Definición: La fórmula para calcular la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad {}^{t}Cof(A).$$

3.9.6 Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, luego existe A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad {}^{t}Cof(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} (-1)^2 4 & (-1)^3 2 \\ (-1)^3 3 & (-1)^4 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = -1 \neq 0$, luego existe A^{-1}.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Retornemos a los sistemas de ecuaciones lineales.

Sea ahora un sistema cuadrado $AX = b$. Si A tiene inversa, podemos resolver el sistema multiplicando por la inversa A^{-1}.

$$AX = b$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$IX = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b.$$

3.9.7 Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Aquí, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ya sabemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, así:

$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Luego, $S = \left\{ \left(-2, \frac{3}{2} \right) \right\}$.

Veamos cómo de la expresión de la solución en términos de la inversa de la matriz de un sistema de ecuaciones lineales con determinante no nulo, se deduce la Regla de Cramer en general.

Sea $AX = b$ el sistema de ecuaciones lineales de orden n cuya solución viene dada por:

$$X = A^{-1}b,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1j}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nj}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

De aquí, $x_j = \frac{A_{1j}b_1 + \cdots + A_{nj}b_n}{|A|}$.

Notemos que la expresión $A_{1j}b_1 + \cdots + A_{nj}b_n$ es el desarrollo de:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

que es el determinante de la matriz que resulta de sustituir en A los coeficientes de x_j por los términos independientes b_i, o sea, es la expresión de Δx_j, siendo $\Delta = |A|$.

Así, la fórmula $X = A^{-1}b$ nos da la Regla de Cramer.

3.10 Rango

De lo visto en sistemas de ecuaciones lineales, sabemos que no siempre todas las ecuaciones de un sistema aportan significativamente a la solución y podemos prescindir de algunas de ellas.

Veamos un ejemplo:

3.10.1 Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right).$$

Como $F_3 = F_1 - 2F_2$, haciendo transformaciones elementales:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, podemos prescindir de la última ecuación.

Trataremos ahora de precisar esto.

Si nos fijamos, las filas de una matriz no son más que conjuntos ordenados de tantos elementos como la cantidad de columnas, lo mismo sucede con las columnas. De aquí en lo adelante trabajaremos con filas, pero podríamos hacerlo de modo similar con las columnas.

3.10.2 Definición: Llamamos a un conjunto ordenado de n elementos vector fila o vector columna según el caso.

3.10.3 Observación: Notemos que un vector fila es una matriz de tamaño $1 \times n$ y un vector columna es una matriz de tamaño $m \times 1$. Luego podemos considerar para ellos la suma y el producto por escalares.

3.10.4 Definición: La realización simultánea de sumas y productos por escalares se llama combinación lineal.

3.10.5 Ejemplo: Si $v = (2,3,0)$ y $w = (1,1,0)$, entonces $(4,3,0) = v + 2w$ es combinación lineal de v y w, pero $(0,0,1)$ no es combinación lineal de v y w porque no existen α y β tales que $(0,0,1) = \alpha v + \beta w$.

3.10.6 Definición: El sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente si existe algún vector que se puede expresar como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, se dice linealmente independiente.

3.10.7 Observación: Un sistema de dos vectores u, v es linealmente dependiente si y solo si son proporcionales, o sea $u = \alpha v$ para $\alpha \in K$.

3.10.8 Observación: Todo sistema que contenga al vector nulo (el que tiene todas componentes cero) es linealmente dependiente, basta multiplicar los restantes vectores del sistema por cero y obtenemos el vector nulo.

3.10.9 Ejemplo: Los vectores $v = (2,3)$ y $w = (1,1)$ son linealmente independientes, pues no son proporcionales.

Como $u = v + 2w, u = (4,5), v = (2,3)$ y $w = (1,1)$ son linealmente dependientes.

3.10.10 Ejemplo: Si tenemos el sistema

$$u_1 = (1,0,0,0,0), u_2 = (0,1,0,0,0), u_3 = (0,0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,0,0)$$

Claramente u_i no es combinación lineal de los demás, para $i = 1,2,3$, pero

$u_4 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$.

3.10.11 Observación: Si tratamos de determinar por la definición si un sistema es linealmente dependiente, podría ser engorroso, pues pudiera pasar como en el ejemplo precedente.

3.10.12 Proposición: El sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal que da por resultado el vector nulo es la trivial, esto es:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$

Demostración.

Veamos que linealmente independiente implica que la única combinación lineal que da como resultado el vector nulo es la trivial.

Supongamos que existe una combinación lineal que da el nulo que no es la trivial, esto es, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Si, por ejemplo, $\alpha_i \neq 0$, entonces v_i se puede expresar como combinación lineal de los restantes, luego el sistema es dependiente.

Veamos (por contrarrecíproco) que si la única combinación lineal que da el nulo es la trivial, entonces se tiene que el sistema es linealmente independiente.

Si el sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es dependiente, entonces algún v_i se puede expresar como combinación lineal de los restantes, o sea $v_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j v_j$, pasando v_i al otro miembro tenemos una combinación lineal que da el nulo que no es la trivial, pues v_i tendría coeficiente -1.

■

3.10.13 Corolario: Un sistema formado por un único vector es linealmente independiente si y solo si el vector es diferente de cero.

Demostración

Si tenemos el sistema $\{x\}$. Si $x = 0$, para cualquier $\alpha \in K$, la combinación $\alpha x = 0$, en particular para $\alpha = 1$, así el sistema es linealmente dependiente. Si el sistema es linealmente dependiente, existe algún $\alpha \neq 0$, tal que $\alpha x = 0$, multiplicando esta igualdad por α^{-1}, nos queda $x = 0$.

■

3.10.14 Proposición: Si tenemos un sistema de más de *n* vectores de *n* componentes, es linealmente dependiente.

Demostración

Sea $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ un sistema con $k > n$ vectores de *n* componentes, o sea $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in})$, al formar la combinación lineal nula:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

Tenemos

$$\lambda_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n}) + \lambda_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n}) + \cdots + \lambda_k(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kn}) = (0,0, \cdots,0)$$

Nos conduce a un sistema homogéneo de *n* ecuaciones con *k* incógnitas.

$$\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{k1}\lambda_k = 0$$

$$\alpha_{12}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{k2}\lambda_k = 0$$

$$\cdots$$

$$\alpha_{1n}\lambda_1 + \alpha_{2n}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{kn}\lambda_k = 0$$

Como hay más incógnitas que ecuaciones este sistema es indeterminado, por lo que existen infinidad de escalares que satisfacen la combinación lineal nula, en particular, pueden encontrarse escalares no todos nulos que la satisfacen, por tanto, el sistema de vectores es linealmente dependiente.

■

3.10.15 Proposición: Si tenemos dos sistemas de vectores $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ y $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$ linealmente independientes de *n* componentes tales que todo vector del primero se expresa como combinación lineal del segundo, entonces $k \leq l$.

Demostración

Supongamos lo contrario, o sea que $k > l$.

Cada a_i es combinación lineal $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$, esto es:

$$a_1 = \beta_{11}b_1 + \beta_{12}b_2 + \cdots + \beta_{1l}b_l$$

$$a_2 = \beta_{21}b_1 + \beta_{22}b_2 + \cdots + \beta_{2l}b_l$$

$$\cdots$$

$$a_k = \beta_{k1}b_1 + \beta_{k2}b_2 + \cdots + \beta_{kl}b_l$$

Los coeficientes de estas ecuaciones forman un sistema de *k* vectores de *l* componentes, llamémosles c_i, esto es:

$$c_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots \beta_{1l})$$

$$c_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \cdots \beta_{2l})$$

$$\cdots$$

$$c_k = (\beta_{k1}, \beta_{k2}, \cdots \beta_{kl})$$

Como $k > l$, por la proposición **3.10 14**, el sistema $\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ es linealmente dependiente, esto es, existen escalares $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ no todos nulos tales que:

$$\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + \cdots + \rho_k c_k = 0$$

De aquí, $\sum_{i=1}^{k} \rho_i \, \beta_{ij} = 0, j = 1,2, \cdots, l$

Si hacemos la combinación $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_k a_k$

Esto es $\sum_{i=1}^{k} \rho_i \, a_i = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \left(\sum_{j=1}^{l} \beta_{ij} b_j\right) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_i \, \beta_{ij}\right) b_j = 0$

Esto contradice la independencia lineal de los $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$, pues los escalares $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ no son todos nulos.

■

3.10.16 Definición: Un sistema es linealmente independiente maximal si al añadirle un vector se vuelve dependiente.

3.10.17 Propiedades:

1. De todo sistema linealmente dependiente, no unitario, puede extraerse un subsistema linealmente independiente maximal.
2. Todo vector de un sistema se expresa como combinación lineal de un subsistema linealmente independiente maximal.

3. Todos los subsistemas linealmente independiente maximales tienen la misma cantidad de elementos.

Demostración:

1. Sea un sistema $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ tal que el vector a_i es combinación lineal de los restantes. Al suprimir ese vector y reiterar el proceso hasta llegar a que ninguno se exprese como combinación lineal de los restantes, se obtiene un subsistema linealmente independiente maximal.
2. Si de un sistema, se extrae un subsistema linealmente independiente maximal, cualquier vector del sistema resulta combinación lineal del subsistema, pues si hubiera un vector que no lo fuera, el subsistema que resulta de unir al subsistema inicial con dicho vector sería linealmente independiente y contendría al subsistema inicial, contradiciendo su maximalidad.
3. Supongamos que tenemos dos subsistemas linealmente independientes maximales $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ y $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$. Por ser linealmente independiente maximal el sistema $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$, se tiene que todo vector del sistema que contenga al subsistema $\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$ se expresa como combinación lineal de los b_i, en particular, los vectores del subsistema $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ son combinación lineal de los b_i. Por la proposición **3.10.15**, $k \leq l$. De un análisis similar intercambiando los subsistemas, resulta que $l \leq k$, de donde $k = l$.

■

3.10.18 Definición: Llamamos rango de un sistema de vectores al número máximo de vectores linealmente independientes. El rango de una matriz es el rango del sistema formado por sus filas.

3.10.19 Observación: Nótese que hemos definido el rango por filas. Más adelante veremos que es igual definirlo por columnas

3.10.20 Ejemplos:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $rgA = 2$, Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $rgB = 2$,

Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $rgC = 2$,

Si $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $rgD = 1$.

Si queremos averiguar el rango de $E = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \\ 6 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, claramente se observa que:

$F_1 + F_2 = F_3$, pero no sabemos si F_1, F_2, F_4 son linealmente independientes o no. Tendríamos que analizar si F_1 es combinación lineal de F_2, F_4 o si F_2 es combinación lineal de F_1, F_4 o si F_4 es combinación lineal de F_1, F_2.

Veremos otra vía para determinar el rango de una matriz.

3.10.21 Definición: Sea una matriz$A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, llamamos menor de orden $k \leq min(m, n)$, al determinante de la matriz que se forma al intersectar k filas y k columnas de *A*.

3.10.22 Teorema: El rango de una matriz es igual al orden máximo de los menores diferentes de cero de la matriz.

Demostración.

Sea $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$.

Observemos que el rango de *A* es el rango del sistema formado por sus filas, o sea, es el rango de un sistema de m vectores de n componentes.

Supongamos que el orden mayor de los menores diferentes de cero de *A* es r.

Podemos suponer que el menor formado por la intersección de las r primeras filas y las r primeras columnas es diferente de cero, si éste no fuera cero, mediante cambios de filas y columnas podría ubicarse en tal posición.

Luego, las r primeras filas de A son linealmente independientes, pues sino entre ellas habría alguna dependencia lineal que traducida a transformaciones elementales, implicaría la nulidad del menor.

Cualquier otra fila F_k se expresa como combinación lineal de las r primeras, pues de la combinación lineal de las r primeras filas con cualquier fila F_k, siendo $k > r$, igualada al vector nulo, se obtienen infinitas soluciones de estos escalares y en particular, no todos son nulos que satisfacen tal combinación, lo que implica que todo sistema formado por $r + 1$ filas que incluya las r primeras es linealmente dependiente. Sea tal combinación lineal:

$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i F_i + \alpha_{r+1} F_k = 0$

De sustituir cada una de las filas en la expresión anterior, resulta un sistema homogéneo de n ecuaciones y $r + 1$ incógnitas α_i:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_r a_{r1} + \alpha_{r+1} a_{k1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1r} + +\alpha_2 a_{2r} + \cdots + \alpha_r a_{rr} + \alpha_{r+1} a_{kr} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1n} + +\alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_r a_{rn} + \alpha_{r+1} a_{kn} = 0 \end{cases}$$

Si expresamos matricialmente el sistema, queda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} & a_{k1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} & a_{kr} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema de ecuaciones contiene el transpuesto del menor de orden r de A que es no nulo y que por propiedad de los determinantes es también no nulo para esta otra matriz. Igualmente, el determinante de la matriz del sistema es cero, pues es el transpuesto de uno cualquiera de los menores de orden $r + 1$ de A que contienen al menor de orden r no nulo y sabemos, por hipótesis que son todos nulos. Así el sistema homogéneo anterior es Compatible Indeterminado. Luego, los escalares que verifican la combinación lineal nula de las r+1 filas tienen infinitas soluciones y en particular, soluciones no triviales. Por tanto, el sistema de dichas filas es linealmente dependiente. De esta forma se tiene que cualquier fila diferente de las r primeras se expresa como combinación lineal de éstas, luego el sistema formado por las r primeras filas es linealmente independiente maximal.

■

3.10.23 Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Un menor de orden uno distinto de cero es, por ejemplo 1.

Un menor de orden dos distinto de cero es, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Todos los menores de orden tres son cero,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

3.10.24 Observación: Notemos que no es necesario analizar todos menores, basta analizar los que contienen a un menor diferente de cero.

3.10.25 Conclusión: Si en una matriz tenemos un menor de orden k diferente de cero y todos los menores de orden $k + 1$ que lo contienen son cero, el rango de la matriz es k.

3.10.26 Corolario: El rango de una matriz es invariante por transformaciones elementales.

Demostración.

El rango lo hemos caracterizado mediante la nulidad de los menores. Como los menores son determinantes y estos no alteran su nulidad mediante transformaciones elementales, el rango no se altera por ellas.

■

3.10.27 Corolario: El rango de una matriz es igual al de su transpuesta, esto es, es similar su análisis por filas que por columnas.

Demostración.

Como el rango está caracterizado por menores y los menores son determinantes, cada menor de la transpuesta de A, es el determinante del transpuesto de un menor de A.

■

3.10.28 Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} (-2F_1 + F_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego, el rango de A es dos.

3.11 Análisis general de sistemas de ecuaciones lineales

Veamos ahora una aplicación del concepto de rango a los sistemas de ecuaciones lineales.

Sea un sistema $AX = b$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Recordemos que llamamos matriz del sistema a la matriz formada por los coeficientes:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

y a la matriz obtenida de ésta al añadir la columna de los términos independientes $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

la llamamos matriz ampliada del sistema y la denotamos por $\bar{A}$, esto es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Reescribamos el sistema $AX = b$, con ayuda de las operaciones con matrices.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o bien, abreviadamente:

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n = b$$

Donde C_i denota la columna i de la matriz del sistema.

Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una solución del sistema, esto implica que b es combinación lineal de las columnas de A y así $rgA = rg\bar{A}$. O sea, hemos mostrado que si el sistema $AX = b$ es compatible, entonces $rgA = rg\bar{A}$.

Recíprocamente si suponemos que $rgA = rg\bar{A}$, esto implica que todo sistema linealmente independiente maximal de columnas de A es un sistema linealmente independiente maximal de columnas de $\bar{A}$, porque A es una submatriz de $\bar{A}$. Luego, al agregar la columna b, ésta debe ser combinación lineal de las restantes, pero esto implica que existe una solución del sistema $AX = b$.

Así, hemos demostrado el siguiente resultado:

3.11.1 Teorema de Kronecker – Capelli: El sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ es compatible si y sólo si $rgA = rg\bar{A}$.

Veamos que, para el análisis general de los sistemas de ecuaciones lineales, el Teorema de Kronecker – Capelli permite determinar también cuando un sistema es compatible determinado o indeterminado y en este último caso, la cantidad de variables libres que aparecen en su solución.

Supongamos que $rgA = rg\bar{A} = r$, esto implica que podemos suprimir $n - r$ ecuaciones, aquellas que son combinación lineal de r ecuaciones que corresponden a las filas linealmente independientes de $\bar{A}$.

Ahora como $\bar{A}$ tiene rango r, esto implica que existe un menor de orden r no nulo. Como $rgA = rg\bar{A} = r$, existe un menor de orden *r* en *A* distinto de cero, éste viene dado por la intersección de las filas linealmente independientes de A con algunas r columnas de A. Así podemos despejar r variables, las correspondientes a esas r columnas en términos de las

$n - r$ restantes.

Luego, llegamos a que, en general, el sistema es Compatible Indeterminado y el número de variables libres es $n - r$. Notemos que si $r = n$ no hay variables libres, o sea, el sistema es Compatible Determinado.

Así, tenemos:

3.11.2 Corolario:

- El sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ es Compatible Determinado si y sólo si $rgA = rg\bar{A} = n$.
- El sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ es Compatible Indeterminado si y sólo si

$rgA = rg\bar{A} = r < n$, con $n - r$ variables libres. Siendo n el número de incógnitas del sistema.

3.11.3 Ejemplo: Clasifiquemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

en dependencia de los posibles valores del parámetro k.

Primero, mediante determinantes, podemos ver que:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - k = k(k^2 - 1) = k(k + 1)(k - 1)$$

Luego, si $k \neq 0,1,-1$ tenemos que $rgA = 3$ y como $\bar{A}$ sólo tiene tres filas $rg\bar{A} = 3$, porque es maximal y así, $rgA = rg\bar{A} = 3$, luego en esos casos el sistema es compatible determinado.

Analicemos ahora por separado los casos $k = 0, k = 1$ y $k = -1$. En estos tres casos $rgA = 2$. Esto no es necesario chequearlo en la matriz A evaluada en esos valores, pues en A aparecen dos menores de orden 2 que se anulan para valores diferentes de k, luego siempre existe un menor de orden 2 no nulo, así para cualquier k el $rgA \geq 2$.

Si $k = 0$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F_1 \to F_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-F_1 + F_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-F_1 + F_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $rg\bar{A} = 3 \neq rgA = 2$, luego el sistema es incompatible.

Si $k = 1$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-F_1 + F_2 \rightarrow F_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $rgA = rg\bar{A} = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ variable libre.

Si $k = -1$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (F_1 + F_2, F_1 + F_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así, $rg\bar{A} = 3 \neq rgA = 2$, luego el sistema es incompatible.

3.11.4 Ejemplos:

1. Clasificar el sistema:

$$\begin{cases} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b. \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{cases}$$

La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$.

Veamos el rango de *A:*

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} (F_3 \leftrightarrow F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 1 & ab & 1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} (-F_1 + F_2 \rightarrow F_2, -aF_1 + F_3 \rightarrow F_2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & -b(1-a) & 1-a \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 \end{pmatrix} (F_2 + F_3 \rightarrow F_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & -b(1-a) & 1-a \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) \end{pmatrix}.$$

Notemos que el determinante de la última matriz equivalente es: $b(1-a)^2(a+2)$, por tanto el $rgA = 3$ si $b \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2$.

Al evaluar en $b = 0$, la última matriz equivalente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) \end{pmatrix}$$

Notemos que si $b = 0 \wedge a \neq 1$, $rgA = 2$, pues podemos hacer la transformación elemental:$(-(a+2)F_2 \; + \; F_3)$, resultando:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que si $b = 0 \wedge a = 1$, nos queda la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, en este caso $rgA = 1$.

De aquí:

$$rgA = \begin{cases} 3 & b \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2 \\ 2 & b = 0 \wedge a \neq 1 \\ 1 & b = 0 \wedge a = 1 \end{cases}.$$

Veamos ahora el rango de $\bar{A}$:

Primero si $b \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2$, $rg\bar{A} = rgA = 3$, porque es maximal por ser el número de filas.

Veamos $\bar{A}$, notemos que como hicimos las transformaciones por filas solo resta analizar la nueva columna, así:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & -b(1-a) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & -a+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & -b(1-a) & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & b-a \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que si $b = a \; \wedge (a = 1 \vee a = -2)$, la última fila de $\bar{A}$ se anula.

Notemos también que si $b = a = 1$, también se anula completamente la segunda fila de $\bar{A}$.

Asimismo, puede apreciarse que si $b = a = -2$, se anula la última fila de $\bar{A}$, pero no la segunda.

Luego, $rg\bar{A} = \begin{cases} 3 \;\; si \;\; b \neq a \; \vee (a \neq 1 \wedge a \neq -2) \\ 2 \qquad si \qquad b = a = -2 \\ 1 \qquad si \qquad b = a = 1 \end{cases}$

Así, si $b = a = 1$, $rg\bar{A} = rgA = 1$ y si $b = a = -2$, $rg\bar{A} = rgA = 2$.

En todos los demás casos $rg\bar{A} \neq rgA$.

Luego resumiendo

Si $b \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2$, $rg\bar{A} = rgA = 3$, el sistema es compatible determinado.

Si $b = a = -2$, $rg\bar{A} = rgA = 2$, el sistema es compatible indeterminado con una variable libre.

Si $b = a = 1$, $rg\bar{A} = rgA = 1$, el sistema es compatible indeterminado con dos variables libres.

En cualquier otro caso, el sistema es incompatible.

2. Clasificar el sistema el sistema

$$\begin{cases} x & + & y & + & az & = & a-1 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2a-2 \\ -2x & + & y & - & 5z & = & -2a+2 \\ -ax & & & + & 2z & = & -2 \end{cases}.$$

La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a-1 \\ 2 & 0 & 2 & 2a-2 \\ -2 & 1 & -5 & -2a+2 \\ -a & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Veamos el rango de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \\ -a & 0 & 2 \end{pmatrix} (-C_1 + C_2 \to C_2, -aC_1 + C_3 \to C_3) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2-2a \\ -2 & 3 & -5+2a \\ -a & a & 2+a^2 \end{pmatrix} \big((1-a)C_1 + C_3 \to C_3\big) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2-a \\ -a & a & a+2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la tercera columna de A se anula cuando $a = -2$.

De aquí:

$$rgA = \begin{cases} 3 & a \neq -2 \\ 2 & a = -2 \end{cases}.$$

Veamos ahora el rango de $\bar{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a-1 \\ 2 & 0 & 2 & 2a-2 \\ -2 & 1 & -5 & -2a+a \\ -a & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & a-1\\ 2 & -2 & 0 & 2a-2\\ -2 & 3 & -2-a & -2a+2\\ -a & a & a+2 & 6\end{pmatrix}\big((1-a)C_1+C_4\to C_4\big)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -2-a & 0\\ -a & a & a+2 & -a^2+a-6\end{pmatrix}.$$

El determinante de la última matriz equivalente es:

$$2(2+a)(-a^2+a-6)=-2(2+a)^2(a-3)$$

De aquí:

$$rg\bar{A}=\begin{cases}4 & a\neq 3\wedge a\neq -2\\ 3 & a=3\wedge a\neq -2.\\ 2 & \quad a=-2\end{cases}$$

Luego, si $a=-2$, $rg\bar{A}=rgA=2$, el sistema es compatible indeterminado con una variable libre.

Si $a\neq -2\wedge a=3, rg\bar{A}=rgA=3$, sistema es compatible determinado.

Si $a\neq -2\wedge a\neq 3, rg\bar{A}=4\neq rgA=3$, sistema es incompatible.

3. Clasificar el sistema el sistema

$$\begin{cases}x & + & ay & + & a^2z & = & a^3\\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3.\\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3\end{cases}$$

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\end{pmatrix}$.

Veamos el rango de *A:*

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}(-aC_1+C_2\to C_2,-a^2C_1+C_3\to C_3)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & b-a & b^2-a^2\\ 1 & c-a & c^2-a^2\end{pmatrix}(-(b+a)C_2+C_3\to C_3)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & b-a & 0\\ 1 & c-a & (c-a)(b-a)\end{pmatrix}.$$

De aquí:

$$rgA = \begin{cases} 3 & b \neq a \wedge c \neq a \wedge c \neq b \\ 2 & \text{dos iguales y uno diferente.} \\ 1 & a = b = c \end{cases}$$

Veamos ahora el rango de $\bar{A}$.

Primero, si $b \neq a \wedge c \neq a \wedge c \neq b$, $rg\bar{A} = rgA = 3$, porque es maximal por ser el número de filas

Veamos $\bar{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{pmatrix}.$$

Si $a = b = c$, $rg\bar{A} = 1$, si dos son iguales y dos son distintos, $rg\bar{A} = 2$.

Luego:

Si $b \neq a \wedge c \neq a \wedge c \neq b$, el sistema es compatible determinado.

Si hay dos iguales y uno diferente el sistema es compatible indeterminado con una variable libre.

Si $a = b = c$ el sistema es compatible indeterminado con dos variables libres.

Ejercicios Capítulo 3

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 5z & = & -7 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 14 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 17x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} & & x & + & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 23 \\ 3w & + & 2x & + & y & + & z & - & 3t & = & -2 \\ w & + & x & + & y & + & z & + & t & = & 7 \\ 5w & + & 4x & + & 3y & + & 3z & - & t & = & 12 \end{cases}$$

2. Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x & + & iy & - & 2z & = & 10 \\ x & - & y & + & 2iz & = & 20 \end{cases}$$

En a) $\mathbb{C}^3$, b) $\mathbb{R}^3$.

3. Seleccione valores de *a*, *b*, y *c* para que el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 11x_3 & = & b \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & c \end{cases}$$

posea solución y encuéntrela en tal caso.

4. Sea *j* una de las raíces cúbicas no reales de la unidad. Determine entonces cómo deben ser tomados los números complejos a, b, y c para que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2z & = & b \\ x & + & j^2y & + & jz & = & c \end{cases}$$

posea soluciones en $\mathbb{R}^3$.

5. Encuentre las soluciones en $\mathbb{Z}^4$ del sistema lineal

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & 9y & + & 8z & + & 3t & = & 7 \\ 3x & + & 7y & + & 7z & + & 2t & = & 12 \\ 5x & + & 7y & + & 9z & + & 2t & = & 20 \end{cases}$$

6. ¿Bajo qué condiciones sobre los números enteros *a*, *b*, y *c* el sistema lineal

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & b \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & c \end{cases}$$

posee soluciones a) en $\mathbb{Q}^4$, b) en $\mathbb{Z}^4$?

7. Clasifique de acuerdo con los valores del parámetro *k*, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & kx_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & kx_3 & = & 1 \end{cases}$$

según la existencia y unicidad de sus soluciones y encuentre una solución particular del mismo en el caso $k = 2$.

8. Determinar para qué valores de los parámetros *a* y *k* el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x & + & ky & + & z & + & 3w & = & 0 \\ -4x & - & 2ky & + & (k-2)z & + & (k-8)w & = & 3 \\ & & & - & kz & + & (1-k)w & = & a \end{cases}$$

posee más de una solución.

9. Demuestre que todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales pueden obtenerse sumando a una solución particular del mismo todas las soluciones del sistema homogéneo que resulta de sustituir por ceros todos los términos independientes del sistema inicial.

10. Determine bajo qué condición el sistema lineal

$$\begin{cases} bx & - & cy & = & 1 \\ cx & - & az & = & m \\ ay & - & bx & = & n \end{cases}$$

posee solución. Muestre que si dicha condición se verifica, toda solución de dicho sistema puede expresarse en la forma $(x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda)$ donde (x_0, y_0, z_0) es una solución particular del sistema y λ una constante arbitraria.

11. En cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales que se dan a continuación:

    a) Determine de acuerdo con los valores de los parámetros correspondientes, cuándo dichos sistemas son resolubles por la Regla de Cramer.

    b) Seleccione valores de los parámetros de modo que el sistema sea resoluble por la Regla de Cramer y resuélvalo aplicando ésta.

    c) Clasifique el sistema para los valores de los parámetros en que no pueda ser resuelto mediante la Regla de Cramer.

$$1)\begin{cases} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ & & (b-1)y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 2kx & + & 3y & + & (k-1)z & = & k+3 \\ (4k-5)x & + & ky & + & (2k-3)z & = & 2k \\ (5k-9)x & + & ky & + & (3k-7)z & = & k-2 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & by & + & z & = & 3 \\ x & + & 2by & + & z & = & 4 \end{cases}$$

12. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible:

$$a)\frac{3A-4C}{5}, b)C-2B, c)AC, d)AB, e)CE, f)DE, g)ED$$

13. Dos matrices A y B se dicen conmutables si $AB = BA$. Encuentre todas las matrices B conmutables con la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k-1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

Determine, cuándo es posible encontrar una matriz *C* tal que $AC - CA = B$. En tal caso ¿Cuántas matrices *C* pueden encontrarse? Encuentre una de estas matrices para $k = 1$.

15. Demuestre que para toda matriz cuadrada *A*, de segundo orden y con coeficientes en *K* es siempre posible encontrar escalares *t* y *d* en *K* tales que $A^2 - tA + dI_2 = 0$, donde $A^2 = AA$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Dada la una matriz cuadrada *A*, se define para todo número natural *n*: $A^n = A \cdots A$ (*n* veces)

Calcule:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad b)\begin{pmatrix} cos\emptyset & -sen\emptyset \\ sen\emptyset & cos\emptyset \end{pmatrix}^n$$

17. Dada la matriz de orden 5 $A = (a_{ij})$. ¿Cómo deben escogerse *i* y *k* para que el producto $a_{32}a_{1i}a_{4k}a_{53}a_{25}$ aparezca en el desarrollo del determinante de *A* con signo negativo?

18. A partir de la definición de determinante encuentre los coeficientes de x^4 y x^3 en el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

19. Los números 204, 527, y 255 son divisibles por 17. Demostrar que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es divisible por 17. (Sin calcular el determinante

20. Determine el grado, el coeficiente principal y el coeficiente de la potencia de *x* de exponente inferior en una unidad al grado de *p*(*x*) y el término independiente del polinomio que resulta del desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

21. Sea M una matriz cuadrada subdividida en bloques en la forma $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ donde A y B son también cuadradas de órdenes p y q respectivamente. Demuestre que entonces $detM = (detA)(detB)$.

22. Demuestre que el determinante de Van Der Monde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

23. Demuestre que un determinante de orden impar es igual a 0, si todos sus elementos satisfacen la condición $a_{ij} + a_{ji} = 0$

24. Determine cómo puede alterarse el rango de una matriz si se le adiciona:

    a) Una fila.

    b) Una columna.

    c) Dos filas.

    d) Dos columnas.

25. Analice el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 2 \\ 3 & 4 & 2 & t \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -k \end{pmatrix}$$

26. Determine en qué casos la matriz:

$$\begin{pmatrix} b-1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 2 & 1 & 0 \\ b & b+3 & 2b-1 & -3b+5 \\ 2b-1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    a) es invertible.

    b) posee rango 2.

27. Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

28. Encuentre la matriz inversa (si existe) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

29. Muestre que una matriz cuadrada triangular superior (inferior) es invertible si y solo si todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero.

30. Utilizando el Teorema de Kronecker- Capelli, clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en base a la existencia y unicidad de sus soluciones:

$$a)\begin{cases}(k+1)x & + & y & + & z & = & \mathrm{a}\\ x & + & (\mathrm{k}+1)y & + & z & = & \mathrm{b}\\ \mathrm{x} & + & y & + & (k+1)z & = & \mathrm{c}\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}\lambda x & + & \mu y & + & z & = & 1\\ x & + & \lambda\mu y & + & z & = & \mu\\ x & + & \mu y & + & \lambda z & = & 1\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}ax & + & by & + & z & + & t & = & 1\\ x & + & by & + & z & + & t & = & b\\ x & + & by & + & z & + & at & = & 1\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}ax & + & by & + & z & + & t & = & 1\\ x & + & aby & + & z & + & t & = & b\\ x & + & by & + & az & + & t & = & 1\end{cases}$$

31. a) Seleccione valores de los parámetros a y b, ambos no nulos, de modo que el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 2 & 4-a & -2\\ a & 1 & 3 & 5-a & -3\\ 2b-1 & b & a & a+1 & 1\\ b & 0 & a & a-b & -a\end{pmatrix}$$

sea 3. ¿Es su selección la única posible? Justifique su respuesta.

b) Para la selección de a y b del inciso anterior, considere que A es la matriz de un sistema de ecuaciones lineales y elija usted la columna de los términos independientes de modo que dicho sistema sea compatible.

32. Determine para qué valores del parámetro k el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases}x & + & 2y & - & kz & + & 2kt & = & 6\\ 2x & + & 3y & + & kz & + & t & = & 3\\ x & + & ky & - & 2z & + & 4t & = & 3k\end{cases}$$

resulte compatible indeterminado con dos variables libres.

33. a) Determine para qué valores del parámetro a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & a & a+1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & a \\ -3 & 1 & 3 & a & 1-a \end{pmatrix}$$

tiene rango2.

b) Para uno de los valores de a, determinados en el inciso anterior, considere que A es la matriz de un sistema de ecuaciones lineales y elija usted la columna de los términos independientes de modo que dicho sistema sea compatible determinado y resuélvalo en tal caso.

Bibliografía

- Bravo, A; Rincón, H; Rincón, C, *Álgebra Superior*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, D. F., 2013.
- Cardenas, H; Lluis, E; Raggi, F; Tomas, F., *Álgebra Superior*, Editorial Trillas, México, 1995.
- Faddieev, D; Sominski, I, *Problemas de Álgebra Superior*, Editorial Mir, Moscú, 1971.
- Kostrikin, A. I., *Introducción al Álgebra*, Editorial Mir, Moscú, 1983.
- Kurosch, A. G; *Álgebra Superior*, Editorial Mir, Moscú, 1968.
- Spiegel, M. R.; Moyer, R. E., *Álgebra Superior*, McGraw – Hill Interamericana, México, 2006.