EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

MATEMÁTICA, CURSO 2011 - 2012

Nombre y apellidos: ____

Grupo: ____

I- Halla

a) la longitud de arco de la curva $y = \ln x$ para $0 < \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

b) la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n}{8^{n+2}}$$

II- Prueba las siguientes desigualdades:

a)

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \qquad x > 0$$

b)

$$\frac{1}{4} < \int_0^1 e^{x^2} \ln(1 + x)\, dx < 1$$

III- Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso su respuesta:

a) ____ Si f y g son dos funciones reales de variable real, dos veces diferenciables en $[0, a]$ y tales que $f(0) = g(0) = 0$, entonces se cumple

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx$$

b) ____ Si f y g son dos funciones tales que $f(a) = g(a) = 0$, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$, $k = 1,2, \dots n - 1$ y $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ para $x > a$ entonces se cumple $f(x) < g(x)$ para $x > a$

c) _____ $|cos y - cos x| \leq |y - x|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

RESPUESTAS:

I- a) Para hallar la longitud de arco L de la curva $y = \ln x$ para $0 < \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ tengamos en cuenta que

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + ([lnx]')^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + (x)^2}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + (x)^2}}{x}\, dx$$

Hagamos entonces el cambio de variable

$$u = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow u^2 = 1 + x^2 \rightarrow x = \mp\sqrt{u^2 - 1}$$

Como $x \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, $x = \sqrt{u^2 - 1} \rightarrow dx = \frac{udu}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}$ A su vez, de $x \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$ se tiene que $u \in [2, 3]$, de modo que la integral

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + (x)^2}}{x}\, dx$$

se transforma, a partir del cambio hecho, en la nueva integral

$$\int_2^3 \int \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du = \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1}\, du = \int_2^3 \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1}\, du$$

$$= \int_2^3 \left[1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right] du = \int_2^3 \left[1 + \frac{1}{(u - 1)(u + 1)}\right] du = u + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{u + 1 - (u - 1)}{(u - 1)(u + 1)}\, du$$

$$= u + \frac{1}{2} \int_2^3 \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right] du = u + \frac{1}{2} ln \left|\frac{u-1}{u+1}\right| \Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2} ln\frac{1}{2} - 2 - ln\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2}$$

De no hacer cambio en los límites de integración y regresar a la variable original se tendría

$$u + \frac{1}{2} ln \left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| = \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} ln \left|\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}\right| \Bigg|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{1 + 8} + \frac{1}{2} ln \left|\frac{\sqrt{1 + 8} - 1}{\sqrt{1 + 8} + 1}\right| - \sqrt{1 + 3} + \frac{1}{2} ln \left|\frac{\sqrt{1 + 3} - 1}{\sqrt{1 + 3} + 1}\right|$$

$$= 3 + \frac{1}{2} ln\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} ln\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2}$$

I- b) Para hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5+5^2+\cdots+5^n}{8^{n+2}}$$

es preciso tener en cuenta inicialmente que

$$1+5+5^2+\cdots+5^n = \frac{5^{n+1}-1}{5-1} = \frac{5^{n+1}-1}{4}$$

con lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5+5^2+\cdots+5^n}{8^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5*5^n-1}{4*64*8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5*5^n-1}{4*64*8^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4*64}\left[5*\left(\frac{5}{8}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right]$$

de donde, dado que tanto $\frac{5}{8}<1$ como $\frac{1}{8}<1$, se puede garantizar la convergencia de la serie anterior por ser la suma de dos series geométricas de razón menor que 1, cuyo valor es, por tanto,

$$\frac{1}{4*64}\left[5*\frac{1}{1-\frac{5}{8}} - \frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right] = \frac{1}{256}\left[\frac{40}{3}-\frac{8}{7}\right] = \frac{1}{256}\left[\frac{280-24}{21}\right] = \frac{1}{21}$$

II- a) Probemos ahora las desigualdades

$$x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \qquad x>0$$

Para ello basta definir las funciones auxiliares

$$h_1(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, \qquad h_2(x) = \ln(1+x) - x$$

diferenciables en todo su dominio y en particular en $(0,\ +\infty)$. Se tiene además que para $x \in (0,+\infty)$,

$$h'_1(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0,$$

$$h'_2(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$$

que indica la monotonía estrictamente creciente (decreciente) de $h_1(x)$, $\left(h_2(x)\right)$ en $(0,\ +\infty)$.

De todo lo anterior se tiene que $h_1(x) > h(0) = 0$; $h_2(x) < h(0) = 0$ para $x \in (0,+\infty)$, lo que nos lleva a las desigualdades que se desea demostrar.

b) A partir de las desigualdades probadas en el inciso anterior demostraremos que

$$\frac{1}{4} < \int_0^1 e^{x^2} \ln(1+x)\, dx < 1$$

Para ello basta tener en cuenta que si

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \qquad x > 0$$

entonces, por un lado, tenemos la desigualdad evidente

$$\int_0^1 e^{x^2} \ln(1+x)\, dx \leq \int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx = \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{e-1}{2} < \frac{3-1}{2} = 1$$

y, por el otro, que

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}\, dx \leq \int_0^1 e^{x^2} \ln(1+x)\, dx$$

Se debe ahora reescribir

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right) x\ e^{x^2}\, dx$$

y tomar entonces $\quad u = \left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad dv = x\, e^{x^2} dx \quad$ con lo cual

$$du = \frac{-dx}{2}, \qquad v = \frac{e^{x^2}}{2}$$

de modo que

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right) x\ e^{x^2}\, dx = \left.\left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{4} dx = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{4} dx$$

Puesto que $x \in (0,1)$, $1 < e^{x^2} < e$, de donde se tiene entonces que

$$\int_0^1 e^{x^2} \ln(1+x)\, dx \geq \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}\, dx \geq \frac{e}{4} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{4} dx \geq \frac{e}{4} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1}{4} dx$$
$$= \frac{e}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{e-1}{4} > \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

Queda así demostrado que

$$\frac{1}{4} < \int_0^1 e^{x^2} \ln(1+x)\, dx < 1$$

III-

a) ___V___ Si f y g son dos funciones reales de variable real, dos veces diferenciables en $[0, a]$ y tales que $f(0) = g(0) = 0$, entonces se cumple

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx$$

Basta usar integración por partes dos veces teniendo en cuenta la condición de dos veces diferenciables que satisfacen estas dos funciones. Si en $\int_0^a f(x)g''(x)dx$ tomamos

$$u = f(x), \quad dv = g''(x)dx$$

$$du = f'(x)\ , \quad v = g'(x)$$

se tiene entonces que

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(x)g'(x)\Big|_0^a - \int_0^a f'(x)g'(x)dx$$

Tomando ahora

$$u = f'(x), \quad dv = g'(x)dx$$

$$du = f''(x)\ , \quad v = g(x)$$

se obtiene finalmente

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(x)g'(x)\Big|_0^a - \left[f'(x)g(x)\Big|_0^a - \int_0^a f''(x)g(x)dx\right]$$

Usando ahora la condición $f(0) = g(0) = 0$ se llega a la igualdad deseada

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx$$

b) __V__ Si f y g son dos funciones tales que $f(a) = g(a) = 0$, $f^{(k)}(a) = \quad g^{(k)}(a) = 0,\ \ k = 1,2, \dots n-1$ y $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ para $x > a$ entonces se cumple $f(x) < g(x)$ para $x > a$

Aquí basta usar la fórmula de Taylor con resto en la forma integral para la función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$.

Se tendría que

$f(x) - g(x) =$

$f(a) - g(a) + \left(f'(a) - g'(a)\right)(x-a) + \cdots . + \left(f^{(n-1)}(a) - g^{(n-1)}(a)\right)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} +$

$\int_a^x \left(f^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)\right)\frac{(x-a)^n}{n!}dx$

c) que, atendiendo a las condiciones $f(a) = g(a) = 0$,

$f^{(k)}(a) = \quad g^{(k)}(a) = 0, \; k = 1,2, \ldots n-1$ y $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ para $x > a$ conducen a

$$f(x) - g(x) = \int_a^x \left(f^{(n)}(a) - g^{(n)}(a)\right)\frac{(x-a)^n}{n!}dx < 0$$

de donde se obtiene el resultado deseado.

d) ___V___ $|cosy - cosx| \leq |y - x|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Basta aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[x, y]$.

Puesto que la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, también lo es en $[x, y]$. Se tiene así que existe un c en $[x, y]$ tal que

$$f'(c) = -sen\, c = \frac{cosy - cosx}{y - x},$$

de donde

$$\left|\frac{cosy - cosx}{y - x}\right| = |-sen\, c| \leq 1,$$

equivalente a

$$|cosy - cosx| \leq |y - x| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$