Examen Extraordinario de Álgebra I. Ciencia de la Computación. Plan D. 2010 – 2011

Nombre:____ Grupo:___________ Subir Nota:_______

1: Diga Verdadero (V) o Falso (F). Demuestre o de un contraejemplo en cada caso.

a.___ Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces $Re(z) = {}^{(z+\bar{z})}/_{2}$ y $Im(z) = {}^{(z-\bar{z})}/_{2}$.

b.___ Sea $z \in \mathbb{C}$ y w_0 la primera raíz n – ésima de z, entonces $w_k = \xi_k w_0$ es una raíz n – ésima de z siendo ξ_k una raíz n – ésima de 1.

c.___ Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que $gr\big(p(x)\big) = n, gr\big(q(x)\big) = m, n > m$, entonces el resultado de la división de $p(x)$ entre $q(x)$ siempre es un polinomio.

d.___ Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que $gr\big(p(x)\big) = n, gr\big(q(x)\big) = m, n > m$. Si de $q(x)$ divide a $p(x)$ entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0,\ \ \alpha q(x)$ divide a $p(x)$.

e.___ Todo sistema con más ecuaciones que incógnitas es compatible determinado.

f.___ Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $rg(A) = n$ entonces $rg(A^T) = n$ (A^T es la transpuesta de A).

g.___ Sean (u, v, w) un sistema de vectores linealmente dependiente, entonces siempre el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros.

h.___ Sea E un espacio vectorial de dimensión n, entonces todo sistema de vectores de E con menos de n vectores es linealmente independiente.

2: Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + kt = 0 \\ x - 2y + kz + kt = 0 \\ kx - ky + (k+1)^2 z + (2k^2 - 1)t = 0 \\ y - kz = 0 \end{cases}$$

a. Seleccione $k \in \mathbb{R}$ de modo que el conjunto solución tenga 2 variables libres. ¿Es su selección la única posible? Justifique.

b. Seleccione $k \in \mathbb{R}$ de modo que el conjunto solución tenga una sola variable libre y hállelo.

3: En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio considere el siguiente conjunto:

$$V = \{(a + bi, c + di) \colon -c + 2d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

a. Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

b. Halle una base y la dimensión de V.

c. Sea $S = \big((2i, 0), (0, 2+i), (i, 2+i)\big)$
   1. Construya una base de V a partir de un subsistema linealmente independiente maximal de S.
   2. Complete una base de $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ a partir de la base hallada en el inciso anterior.

d. Sea A la base encontrada en el inciso b y B la base encontrada en el inciso c.1. Halle $P_{B\to A}$.

4*: Sean A, B, C bases de un espacio vectorial E de dimensión finita. Demuestre que:

$$(P_{A\to B})^{-1} = P_{C\to A} P_{B\to C}$$