Examen Intrasemestral Algebra I. Ciencia de la Computación. Plan D.
Batería A

Nombre:____**Grupo:**________

1: Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales se clasifica en Compatible Determinado, Compatible Indeterminado e Incompatible. Justifique.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay = 0 \\ x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 0 \end{cases}$$

2: Sean $x^1 = (a_1, b_1), x^2 = (a_2, b_2)$ dos soluciones diferentes del sistema homogéneo $A_2X = 0$ demuestre que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha x^1 + \beta x^2$ también es solución de $A_2X = 0$

Examen Intrasemestral Algebra I. Ciencia de la Computación. Plan D.
Batería B

Nombre:____**Grupo:**________

1: Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales se clasifica en Compatible Determinado, Compatible Indeterminado e Incompatible. Justifique.

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x + y + z = 1 \\ ax + y - z = 0 \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

2: Demuestre que si A es una matriz cuadrada inversible entonces su inversa es única.

Examen Intrasemestral Algebra I. Ciencia de la Computación. Plan D.
Batería C

Nombre:____**Grupo:**________

1: Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales se clasifica en Compatible Determinado, Compatible Indeterminado e Incompatible. Justifique.

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

2: Demuestre que si A, B son matrices cuadradas inversibles entonces AB es inversible y su inversa es $B^{-}A^{-}$

Batería A.

1. Apliquemos el Teorema de Kronecker - Capelli. Para ello encontremos primero una matriz equivalente a la matriz ampliada del sistema $AX = B$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & -1-a & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 1-a & -1-a & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-3a & -a \end{array}\right) = \tilde{A}'$$

Por el método de bordeo, el segundo menor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nos permite asegurar que $\operatorname{rg} A \geq 2$. Adjuntando la tercera columna con la tercera o la cuarta fila:

$\Delta_1 = -a^2+2a-2 = -(a^2-2a+2) \quad D<0$

$\Delta_2 = a^2-3a = a(a-3)$

Luego $\forall a \in \mathbb{R}$, $\Delta_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$

$\operatorname{rg} \tilde{A} \geq 3$, pero $\operatorname{rg} \hat{A} = 4 \Leftrightarrow \det \tilde{A} \neq 0$ en cuyo caso $AX = B$ será incompatible

$$\det \tilde{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -a^2+2a-2 & -1 \\ a^2-3a & -a \end{vmatrix} = a^3-2a^2+2a+a^2-3a = a^3-a^2-a = a(a^2-a-1)$$

$$= a\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Entonces:

- Si $a \in \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es compatible determinado pues $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \hat{A} = 3$
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es incompatible pues $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg} \tilde{A}$

2. $$\left.\begin{array}{l} A_2 x^1 = 0 \Rightarrow \alpha A_2 x^1 = 0 \Rightarrow A_2(\alpha x^1) = 0 \\ A_2 x^2 = 0 \Rightarrow \beta A_2 x^2 = 0 \Rightarrow A_2(\beta x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2(\alpha x^1 + \beta x^2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Luego $\alpha x^1 + \beta x^2$ también será solución

Batería B

1. Apliquemos el Teorema de Kronecker - Capelli. Para ello encontremos primero una matriz equivalente a la matriz ampliada del sistema $AX = B$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 2+a & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-2 & -a-1 \\ 0 & 2-a & a & 1 \end{array}\right) = \tilde{A}'$$

Por el método de bordeo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nos permite asegurar que $\operatorname{rg} A \geq 2$. Adjuntando la segunda columna con la tercera o la cuarta fila:

$\Delta_1 = (1-a)(-a-2) = (a-1)(a+2)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 2-a & a \end{vmatrix} = a-a^2-2+a = -a^2+2a-2 = -(a^2-2a+2) \quad D<0$

Luego $\forall a \in \mathbb{R}, \Delta_2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$

$\operatorname{rg} \tilde{A} \geq 3$, pero $\operatorname{rg} \tilde{A} = 4 \Leftrightarrow \det \tilde{A}' \neq 0$ en cuyo caso $AX = B$ sería incompatible

$$\det \tilde{A}' = \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 0 & -a-2 & -a-1 \\ 2-a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(-a-2) + (2-a)(-a-1) - (-a-2)(2-a) - a(-a-1)(1-a)$$

$$= a^2+a-2+a^2-a-2-a^2+4-a^3+a = -(a^3-a^2-a) = -a\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Entonces:

- Si $a \in \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es compatible determinado pues $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = 3$
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es incompatible pues $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg} \tilde{A}$

2. Supongamos que existen dos inversas A_1^{-1} y A_2^{-1}

$A \cdot A_1^{-1} = A \cdot A_2^{-1} \Rightarrow A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0 \Rightarrow A_1^{-1} A (A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0 \Rightarrow I_n(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1^{-1} - A_2^{-1} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$, luego es única.

Batería C

1. Apliquemos el Teorema de Kronecker - Capelli. Para ello encontremos primero una matriz equivalente a la matriz ampliada del sistema $AX = B$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-a & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2-a & -1-a \\ 0 & 2-a & a & a \end{array}\right) = \tilde{A}'$$

Por el método de bordeo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ nos permite asegurar que $\operatorname{rg} A \geq 2$.

Adjuntando la segunda columna con la tercera o la cuarta fila:

$\Delta_1 = (1-a)(-a-2) = (a-1)(a+2)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 2-a & a \end{vmatrix} = a - a^2 - 2 + a = -a^2 + 2a - 2 = -(a^2 - 2a + 2) \quad D < 0$

Luego $\forall a \in \mathbb{R}$, $\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$

$\operatorname{rg} \tilde{A} \geq 3$, pero $\operatorname{rg} \tilde{A} = 4 \Leftrightarrow \det \tilde{A}' \neq 0$ en cuyo caso $AX = B$ sería incompatible

$$\det \tilde{A}' = \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 0 & -a-2 & -a-1 \\ 2-a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(-a-2) + (2-a)(-a-1) - (-a-2)(2-a) - a(-a-1)(1-a)$$

$$= a^2 + a - 2 + a^2 - a - 2 - a^2 + 4 - a^3 + a = -(a^3 - a^2 - a) = -a\left(a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Entonces:

- Si $a \in \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es compatible determinado pues $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = 3$
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ el sistema es incompatible pues $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg} \tilde{A}$

2. AB será cuadrada y del mismo orden que A y B.

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(B \cdot B^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$ q.e.d.