Lógica Matemática-Examen Extraordinario-Curso 2024

Nombre y apellidos: ____________________ Grupo: ________

1. Dados el conjunto C finito, $B = 2^C$, $A \subseteq B$ y $R \subseteq B \times B$ tal que $R = \{< a, b > \mid a \subseteq b, a \in B, b \in B\}$, se define $R_A = R \cap (A \times A)$.
   (a) Pruebe que cualquiera sea A se tiene que R_A es un orden parcial.
   (b) Demuestre que si para cualquier par x, y de elementos de A se tiene que o bien $|x \cap y| = |x|$ o bien $|x \cup y| = |x|$ podemos afirmar que R_A será un orden total.
   (c) Cumpliéndose todas la hipótesis de los incisos anteriores y, además, que todos los elementos de A tienen la misma cardinalidad, determine la cardinalidad de R_A.

2. Has llegado a la Isla de los Truhanes y Caballeros para desentrañar un antiguo caso que ha mantenido al mundo en vilo durante años. Este caso está vinculado a exactamente una de las tres familias más influyentes de la región: los Salazar, los Tarancón y los Murcia. Los habitantes de la isla, decididos a proteger los secretos de las prominentes familias, han tejido una red de engaños para confundir a cualquiera que se atreva a investigar el caso. Para eso 5 habitantes de la Isla (A, B, C, D y E) comienzan una conversación estratégica frente a ti, planteando lo siguiente:

   A: El caso está relacionado con la familia Salazar.
   B: El caso está relacionado con la familia Tarancón.
   C: Al menos uno entre A y B, dice la verdad.
   D: Si A es un caballero, entonces B también lo es.
   E: Yo soy un truhán o C y D son del mismo tipo.

   Estos habitantes no sospechan que tus habilidades deductivas son formidables y que, en lugar de confundirte, han allanado el camino hacia la resolución del caso. Es hora de demostrarles a todos que eres el investigador más brillante que ha pisado la Isla.
   (a) Escriba en el lenguaje de la Lógica Proposicional todas las proposiciones expresadas en el texto. En cada caso identifique qué representa cada variable proposicional utilizada.
   (b) Determine qué es cada habitante (caballero o truhán) y con cuál de las familias está relacionado el caso. Dedúzcalo formalmente utilizando las Leyes y Reglas de la Lógica Proposicional.

3. En un grupo de 25 estudiantes, 18 estudiantes se van a presentar al *extra* y de ellos 15 tienen alguna pregunta convalidada, por lo que tienen que hablar con el profesor antes del examen. Defina una codificación con la menor cantidad de bits posible para identificar unívocamente a cada uno de los 25 estudiantes y diseñe un circuito que permita determinar si un código, según se definió, está asignado a algún estudiante, si el estudiante va al *extra* y si tiene que hablar con el profesor. Su circuito debe dar esta información usando la menor cantidad de entradas y salidas posible.

4. Considere el conjunto S de todas las posibles cadenas que pueden formarse con los caracteres de un determinado conjunto, incluyendo la cadena vacía denotada como ϵ. Sobre S se define la función de concatenación (+) de dos cadenas y el reverso (R) de una. Por ejemplo, si $x = $ '*aab*' y $y = $ '*bab*' entonces $x + y = $ '*aabbab*' y $R($'*rap*'$) = $ '*par*'.

   Si se sabe que dicha funciones cumplen las siguientes propiedades:

   G_0 : La igualdad de cadenas es una relación de equivalencia.
   C_0 : La concatenación es una función de $SxS \to S$.
   C_1 : La concatenación es asociativa.
   C_2 : Para todo par de cadenas $x, y \in S$ la concatenación de x con y es igual a x si y solo si y es vacía.
   C_3 : La concatenación de dos cadenas es vacía si y solo si ambas son vacías.
   R_0 : El reverso es una función de $S \to S$.
   R_1 : El reverso de la cadena vacía y de las cadenas de un solo caracter es la propia cadena.
   R_2 : El reverso del reverso de una cadena es la propia cadena.
   R_3 : El reverso de la concatenación de a con b es la concatenación del reverso de b con el reverso de a.

   Además, se conocen las siguientes definiciones de una cadena palíndromo

   $P_1(x)$: Existen a y b donde b es la cadena vacía o un caracter y x es la concatenación de a con la concatenación de b con el reverso de a
   $P_2(x)$: x es su propio reverso.
   (a) Escriba en el lenguaje de la lógica de predicados $C_1, C_2, C_3, R_1, R_2, R_3, P_1(x), P_2(x)$.
   (b) Demuestre por deducción que para toda cadena cuando $P_1(x)$ se cumple $P_2(x)$ también.
   (c) Pruebe por interpretación que la palabra 'aibofobia' es palíndromo bajo P_1. Utilice las propiedades de R para obtener el reverso de una cadena.