EXAMEN EXTRAORDINARIO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

MATEMÁTICA, CURSO 2011 - 2012

Nombre y apellidos: ____

Grupo: ____

I- Halla

a) el área de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = (1-x^2)^3$

b) la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$$

c) el valor de la integral $\int_0^{\pi} e^{3x} \cos 2x \, dx$

II- Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso su respuesta:

a) _____ La ecuación $x^2 = x\operatorname{sen}x + \cos x$ posee un número par de soluciones reales que, a lo sumo, son dos.

b) _____ $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

III- Un hombre sobre un bote de remos está situado en un punto P a una distancia de 5 km de la costa (rectilínea) y desea llegar a un punto B de la costa, a 6km de A, en el menor tiempo posible. Determinar el camino que debe seguir, sabiendo que puede remar a una velocidad de 2 km/h y andar a una velocidad de 4 km/h.

RESPUESTAS

I a) Nótese que la curva $y^2 = (1-x^2)^3$ es simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas, esto es, se cumple que $f(-x,-y) = f(x,y)$. De lo anterior se deduce que el área buscada será la correspondiente a 4 veces el área que la curva delimita en el primer cuadrante.

De $y^2 = (1-x^2)^3$ se tiene que $y = \mp\sqrt{(1-x^2)^3}$ donde $x \in (-1,1)$. Se tiene así que el área buscada es $A = 4\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx = 4\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

Para calcular la integral anterior pueden valerse del cambio de variables

$$x = sen\, t$$

válido para $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y del cual se deduce que

$$dx = cost\, dt$$

$$x = 0 \to t = 0; \quad x = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$$

con lo cual

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sen^2 t)^{\frac{3}{2}} cost\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 t)^{\frac{3}{2}} cost\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 t\, dt$$

Debe tener en cuenta ahora que

$$cos^4 t = (cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + cos2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{cos2t}{2} + \frac{cos^2 2t}{4}$$

y

$$cos^2 2t = \frac{1 + cos4t}{2}$$

con lo cual el área buscada es

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{cos2t}{2}+\frac{1}{8}+\frac{cos4t}{8}\right)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{cos2t}{2}+\frac{cos4t}{8}\right)dt$$

$$= 4\left(\frac{3}{8}t+\frac{sen2t}{4}+\frac{sen4t}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\frac{3}{8}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}u^2$$

I b) Aquí basta usar los conocimientos adquiridos este semestre acerca de las series de tipo telescópicas y encontrar entonces la sucesión $\{b_n\}$ que permite escribir la serie en la forma $\sum_{n=n_0}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ que sabemos converge al valor $b_{n_0} - \lim \mathrm{b_n}$. En este caso se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{1}{4}$$

I c) Se debe calcular el valor de la integral $\int_0^{\pi} e^{3x}\cos 2x\,dx$. Debe usarse para ello el método de integración por partes estudiado en clases.

II a) VERDADERO Considérese la función auxiliar

$$h(x) = x^2 - xsenx - cosx = h(-x)$$

la cual, como se observa, es una función par que satisface $h(0) \neq 0$, con lo que se puede afirmar que, de poseer raíces reales, el número de ellas tiene que ser par.
Probemos ahora que no puede tener más de dos.
Supongamos que las tenga, usando entonces el corolario del teorema de Rolle, su derivada tendría que tener al menos dos raíces reales y nótese que

$$f'(x) = 2x - senx - xcosx + senx = 2x - xcosx = x\,(2 - cosx)$$

posee una única raíz en $x = 0$, en contradicción con lo supuesto.
De todo lo anterior queda claro que la ecuación $x^2 = xsenx + cosx$ posee a lo sumo dos soluciones reales.

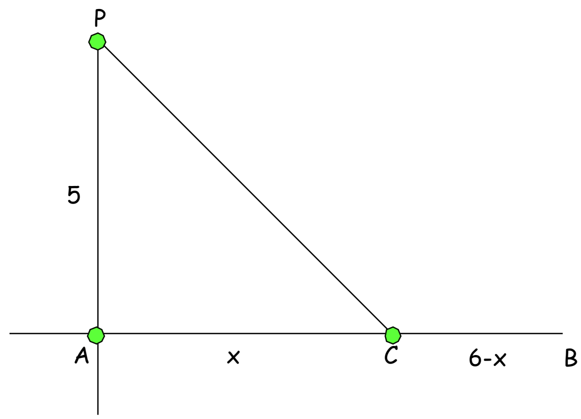
III- Sean P, el punto donde está situado el hombre sobre el bote de remos,

A, el punto a 5 Km de P

B, el punto a 6 km de A al que el hombre debe llegar

C, el punto al cual el hombre se dirigirá remando desde P para, de allí, seguir caminando hasta B.

Representemos gráficamente la situación:



Nótese que el triángulo PAC es rectángulo en A (dado que PA es la distancia de P a A y, por tanto, es perpendicular a la recta AB que representa parte de la costa), con lo que la longitud del segmento PC es, por Pitágoras, $\sqrt{25+x^2}$.
Se desea que el hombre llegue del punto P a B en el menor tiempo posible. Se debe determinar por tanto la posición del punto C al que el hombre deberá llegar remando para de allí seguir a pie hasta B.
Ahora, el tiempo que empleará el hombre en recorrer el camino es la suma del tiempo que empleará remando de P a C (entendido por espacio recorrido entre velocidad a la que recorre este espacio, esto es, $\frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$) más el tiempo que empleará caminando de C a B, que está dado por $\frac{6-x}{4}$). Se tiene entonces que la función a minimizar es

$$T(x) = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}, \qquad x \in [0;6]$$

Nótese que

$$T'(x) = \frac{2x - \sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$$

y que

$$2x - \sqrt{25+x^2} = 0 \rightarrow \ x = \mp\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Queda claro que $x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ resulta imposible, en tanto para $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ se tiene que

$$T'(x) < 0, \quad x < \frac{5\sqrt{3}}{3}, \qquad T'(x) > 0, \quad x > \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

de donde se puede afirmar que $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ es un mínimo local que, más que local, es absoluto dado que se tiene que $T''^{(x)} = \frac{25}{2\sqrt{(25+x^2)^3}} > 0$ para todo valor real de x.

Se concluye entonces, teniendo en cuenta además que

$$T(0)=\frac{\sqrt{25+0^2}}{2}+\frac{6-0}{4}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$$

$$T(6)=\frac{\sqrt{25+6^2}}{2}+\frac{6-6}{4}=\frac{\sqrt{61}}{2}=3.9$$

$$T\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{25+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}+\frac{6-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{\sqrt{25+\frac{75}{9}}}{2}+\frac{6-\frac{5\sqrt{3}}{3}}{4}=3.7$$

que, para lograr que el recorrido que ha de hacer el hombre de P a B pasando por C sea en el menor tiempo posible, el punto C deberá estar situado a $\frac{5\sqrt{3}}{3}\cong 2.9$ Km de A.