UNIVERSIDAD DE LA HABANA
matcom
FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Examen Final de Algebra I 2015-2016
Ciencia de la Computación
Nombre: Grupo:

1. Resuelva:

1.1. Dado $p(x)=2x^5-3x^4-2x^3+16x^2-24x-16$

1.1.1 Pruebe que las raíces cubicas de -8 son raíces de $p(x)$.

1.1.2 Descomponga $p(x)$ en factores irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

1.1.3 Plantee la descomposición en fraciones simples sobre $\mathbb{R}(x)$ de $\dfrac{1}{p(x)}$

1.2. Probar que $q(x)=nx^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x-n,\ n\in\mathbb{N}$ es divisible por $(x-1)^3$.

1.3. Sean $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero. Demuestre que $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3$.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+by+z=1\\ x+aby+z=b\\ x+by+az=1\\ (ab-b)y+(1-a)z=b-1\end{cases}$$

2.1. Clasifíquelo en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible de acuerdo a los valores de los parámetros reales a,b.

2.2. Considere el sistema anterior para los valores de $a=0, b=1$ y resuelva utilizando el Método de Cramer.

2.3. Sea A una matriz cuadrada. Compruebe que si el sistema lineal $AX=C$ es incompatible, entonces el sistema $AX=B$ es incompatible o compatible indeterminado y que si el sistema $AX=C$ es compatible determinado entonces el sistema $AX=B$ es compatible determinado cualquiera sea B.

3. En el espacio vectorial $E=MS_2(\mathbb{R})$ sea y sea $B=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ una base de E

3.1. Demuestre que $F=\{M\in E: Tr(M)=0\}$ es un subespacio vectorial de E.

3.2. Considere $A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ otra base de E y sea $[v]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

3.2.1 Halle el vector $v\in E$.

3.2.2 Halle $M_{A\to B}$

3.2.3 Muestre y compruebe la relación $[v]_B=M_{A\to B}[v]_A$.

4. En $E=\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}-espacio$ se tienen los subespacios:

$$V=L\left[(1,0),(1,i),(1,-i)\right],\ W=\{(a+bi,c+di)/\,a+b-d=0\wedge b=c.\}.$$

4.1. Caracterice y halle la dimensión de $V+W$ y $V\cap W$.

4.2. ¿Existirá un subespacio U de tal que para algún $k\in\mathbb{R}$ se cumpla que $(1,k)\in U$ y $W\oplus U=E$?

4.3. Encuentre, de ser posible, $F\subseteq_s\mathbb{C}^2$ que cumpla $W\subset F, F\oplus L[(1,0)]=H, H\subset_s E$

4.4. Sea G e.v. $\dim G=n$ y S un sistema finito de vectores, demuestre que $L[S]$ es el menor s.e.v. de G que contiene a S.

Nota: En todos los ejercicios debe justificar rigurosamente su respuesta, apoyándose en la teoría vista a lo largo del curso.

Nota: Al entregar el examen, cada ejercicio debe estar en hojas independientes.

¡¡¡Éxito!!!