Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Ejercicios Resueltos 4

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Compara los números:
a) $\log_2 3$ y $\log_3 2$ b) $\log_9 80$ y $\log_7 50$

Respuesta

a) $\log_3 2 < \log_3 3 = 1 = \log_2 2 < \log_2 3$

por propiedades de la función logarítmica ($\log_a a = 1$ para todo $a > 0$ y $f(x) = log_a x$ es creciente si $a > 1$).

b) $\log_9 80 < \log_9 81 = 2 = \log_7 549 < \log_7 50$

por propiedades de la función logarítmica (definición de logaritmo y $f(x) = log_a x$ es creciente si $a > 1$).

Ejercicio 2

¿Cuál debe ser el incremento anual de la población para que en un siglo esta se duplique?

Respuesta

Si la población es p, entonces en estamos buscando el x tal que $p \cdot (1+x)^{100} = 2p$, esto se debe al razonamiento siguiente:
Al iniciar el año 1 se tiene una población de p individuos; a lo largo de este año esa población será p_1, pero si suponemos que en cada año varía de manera lineal entonces se puede expresar

$$p_1 = p(1+x), \ x \in \mathbb{R},$$

de modo que, si $x = 0$, entonces la población no varía, si $x < 0$ la población decrece y, si $x > 0$, la población aumenta. Repitiendo el procedimiento se obtiene que, al finalizar el segundo año la población es

$$p_2 = p_1(1 + x) = p(1 + x)^2.$$

De este modo, al culminar el año n la población es

$$p_n = p(1 + x)^n.$$

Resolvamos entonces la ecuación planteada al inicio, que involucra la población p_{100} en el miembro izquierdo, con la incógnita x que representa el incremento anual de la población bajo las suposicione descritas anteriormente y el hecho de que esta se haya duplicado para ese entonces:

$$p \cdot (1 + x)^{100} = 2p \Leftrightarrow (1 + x)^{100} = 2 \Leftrightarrow \log_2(1 + x) = \frac{1}{100} \Leftrightarrow x = \sqrt[100]{2} - 1.$$

Es decir, el incremento debe ser del $(\sqrt[100]{2} - 1)\,\% \approx 0{,}6955550\,\%$.

Ejercicio 3

Si el número de individuos se incrementa cada año en la centésima parte, ¿tras cuántos años será 10 veces mayor la población?

Respuesta

En este caso se realiza un análisis similar al del ejercicio anterior, con la diferencia de que en este caso debemos hallar el tiempo que debe transcurrir para que la población alcance cierta cantidad de individuos si tiene una variación dada. Si el número de individuos es p, entonces buscamos n tal que $p \cdot (1{,}01)^n = 10p$.

$$p \cdot (1{,}01)^n = 10p \Leftrightarrow (1{,}01)^n = 10 \Leftrightarrow n = \frac{1}{\log 1{,}01} \approx 231{,}40789 \text{ años}.$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.