ANÁLISIS MATEMÁTICO

TOMO I

TEORÍA DE LÍMITES

Dr. Carlos Sánchez Fernández
Profesor Titular

ÍNDICE

tieron la presentación al lector de un texto con mejor enfoque pedagógico y mayor calidad estilística.

No podemos dejar de reconocer el abnegado esfuerzo de la compañera Ana R. de la Torre quien descifró nuestro manuscrito y pudo mecanografiarlo en un corto plazo.

El autor está agradecido por el estímulo que ha recibido del Decano de la Facultad de Física-Matemática y del colectivo de profesores del Dpto. de Matemática para la culminación de esta obra.

Toda crítica constructiva acerca de errores, deficiencias e insuficiencias de este libro será recibida por el autor con verdadera satisfacción y sincero reconocimiento.

C. Sánchez Fernández

PRELIMINARES

El sabio empieza por el final, el necio termina en el principio

PROVERBIO ANTIGUO

§P.1 Nociones y notaciones de la teoría de conjuntos

Desde muy temprana edad surge en el niño la noción de pluralidad, colección, agrupación, reunión o variedad; surge lo que se acostumbra a llamar en Matemática, el concepto de conjunto. Este concepto lo consideramos primario, intuitivo, no definible mediante otros.

Los conjuntos se denotarán por letras mayúsculas del alfabeto latino: A, B, C, . . . , X, Y, Z, y sus elementos por letras minúsculas de los alfabetos latino o griego: a, b, c, . . . x, y, z, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi, \psi, \omega$.

Los enunciados "x es el elemento de A" y "x pertenece a A" tendrán una única representación simbólica: $x \in A$, que se lee indistintamente de alguna de las formas descritas. La negación de dicho enunciado se simboliza por: $x \notin A$, que se lee "x no es elemento de A" o "x no pertenece a A"

El símbolo $\in$ denota la relación de pertenencia, la cual, al igual que la noción de conjunto, se acepta aquí como una noción primaria o no definida.

Uno de los problemas de la teoría de conjuntos reside en la determinación de cuáles son precisamente los elementos de un conjunto, cuáles pertenecen y cuáles no pertenecen a él y, entre los que pertenecen, cómo se distinguen unos de otros.

La forma más elemental de determinar un conjunto es a través de una *representación extensiva* (de extensión; la representación extensiva nos evidencia "de dónde a dónde" se extiende el conjunto), la cual consiste en escribir linealmente, encerrados entre llaves y separados por comas, los símbolos que denotan los elementos del conjunto.

Ejemplos

1) $A = \{1,3\}$

2) $B = \{\{1,3\}, \{1\}, \{3\}\}$

Pero es evidente que tal definición no es satisfactoria para todos los conjuntos que se encuentran en matemática. De aquí que, siguiendo a G. Cantor y a R. Dedekind, para definir o determinar un conjunto pueda procederse también del modo siguiente: se establece una condición y se considera como perteneciente al conjunto a todo ente que cumpla esta condición y como no perteneciente a todo ente que no lo cumpla.

Este procedimiento se conoce como *definición intensiva* (de intención; la representación intensiva nos señala a "quienes pretendemos" incluir en el conjunto), la representación intensiva consiste en colocar entre paréntesis la condición que determina el conjunto.

Ejemplos

3) $C = \{x: x \text{ es un número primo}\}$

se lee : "C es el conjunto de las x tales que x es un número primo"

4) $D = \{x : x \in C \text{ y } x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0\}$

lo cual se lee: "D es el conjunto de las x tales que x pertenece a C y x satisface la ecuación $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$"

Observación:

Un conjunto dado en su representación intensiva puede también expresarse extensivamente; es fácil comprobar que el conjunto D en el ejemplo 4 es $D = \{1, 3, 5\}$. En el caso de C dado que la cantidad de números primos es ilimitada (como fuera demostrado ya en el siglo III a.n.e. por Euclides, ver $\oint$ P.3) la notación antes expuesta no es satisfactoria y necesitamos introducir la notación que por extensión signifique que este conjunto posee una cantidad ilimitada de elementos. Así, se conviene en utilizar entre paréntesis, en señal de extensión indefinida, los puntos suspensivos.

Ejemplos

5) $C = \{x : x \text{ es un número primo}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

6) El conjunto de los números naturales, que se denota por **N**, es $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

DEFINICIONES 1.1

Si A y B son conjuntos, entonces se dice que "A está incluido en B" o que "A es subconjunto de B" si cada elemento de A es también un elemento de B, y esto se representa por $A \subset B$. La negación de $A \subset B$ se escribe $A \not\subset B$ y se lee "A no está incluido en B" o "A no es subconjunto de B", lo cual significa que por lo menos algún elemento de A no pertenece a B". Se dice que dos conjuntos A y B son iguales y lo denotaremos $A = B$, si se tiene que $A \subset B$ y $B \subset A$. La negación de $A = B$ se denotará por $A \neq B$.

Ejemplo

7) Sean $A = \{2\}$, $B = \{x : x \text{ es un número primo}\}$, $C = \{x : x \text{ es un número par}\}$, $D = \{x : x \text{ es un número primo y } x \text{ es par}\}$. Entonces: $A \subset B, A \subset C, A \subset D, B \not\subset A, B \not\subset C, B \not\subset D, C \not\subset A, C \not\subset B, C \not\subset D, D \subset A, D \subset B, D \subset C$. Por tanto: $A \neq B$ y $A \neq C$, pero $A = D$; además, $B \neq C$.

Observación

No deben confundirse los conceptos elemento de un conjunto y subconjunto: el elemento es la unidad constitutiva del conjunto y un subconjunto está constituido por una parte de los elementos.

Ejemplo

8) Sean $A = \{1, 2\}$

$B = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$

Entonces, $A \in B$; pero $A \not\subset B$, pues $1 \in A$ y $1 \notin B$.

Al conjunto B pertence el conjunto $\{1\}$, es decir, $\{1\} \in B$.

En la práctica matemática resulta conveniente fijar un conjunto que incluya todos los objetos matemáticos de los cuales se ocupa el matemático en un momento dado. Tal conjunto se denomina *universo* y se denota por U. Una vez fijado el conjunto universo todos los conjuntos que se definen entonces son subconjuntos de él.

En este curso de Análisis Matemático I se considera como universo numérico el conjunto de los números reales **R**, aunque en otros cursos se considerarán otros universos numéricos más amplios.

Existen propiedades que en un cierto universo no se cumplen; así, por ejemplo, la ecuación $x + 1 = x$ no se satisface en el universo **N**. Se dice entonces que el conjunto $\{x \in \mathbf{N} : x + 1 = x\}$ es *vacío* y se denota por la letra griega ϕ (phi).

A partir de conjuntos dados es posible, mediante ciertas operaciones que definiremos a continuación, construir nuevos conjuntos.

DEFINICION 1.2

Dados dos conjuntos A y B se definen las operaciones siguientes:

a) *Unión:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

b) *Intersección:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

c) *Complemento:* $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

d) *Diferencia:* $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Observaciones

El complemento de A es realmente la diferencia del universo con A.

La diferencia $A \setminus B$ es precisamente $A \cap B^c$.

Si $A \cap B = \phi$, se dice que A y B son conjuntos *disjuntos* (quizás sería más adecuado en nuestro idioma decir "ajenos" o "separados", pero este es el término más usual como traducción literal de *disjoint).*

Ejemplo

9) Sea $U = \mathbf{N}$. Si $A = \{x \mid x \text{ es un número primo}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es un número par}\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, $A^c = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}$ y $B^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$.

PROPIEDADES 1.3: Leyes fundamentales de las operaciones conjuntuales

I. *Leyes de idempotencia*

I1. $A \cup A = A$

I2. $A \cap A = A$

II. *Leyes asociativas*

II1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

II2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

III. *Leyes conmutativas*

III1. $A \cup B = B \cup A$
III2. $A \cap B = B \cap A$

IV. *Leyes distributivas*

IV1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
IV2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

V. *Leyes de identidad*

V1. $A \cup \phi = A$
V2. $A \cap U = A$
V3. $A \cup U = U$
V4. $A \cap \phi = \phi$

VI. *Leyes de complemento*

VI1. $A \cup A^c = U$
VI2. $A \cap A^c = \phi$
VI3. $(A^c)^c = A$
VI4. $U^c = \phi$
VI5. $\phi^c = U$

VII. *Leyes de dualidad*

VII1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
VII2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Muchas de estas propiedades resultan ser evidentes, como son los casos de la idempotencia, la asociatividad y la conmutatividad; en cambio, para convencernos de la validez de otras de estas propiedades se necesita una "demostración lógica".

Demostremos por ejemplo que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De acuerdo con la definición de igualdad entre conjuntos bastará demostrar que:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (1)$$

y que

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \qquad (2)$$

Para demostrar (1), de acuerdo con la definición de la inclusión, basta demostrar que:

si $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sea por hipótesis $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces por la definición de la intersección, $x \in A$ y $x \in B \cup C$ y en este último caso $x \in B$ o $x \in C$ o a ambos. Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$ y si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C$; luego, en cualesquiera de los dos casos, por la definición de unión, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. La demostración de (2) se realiza análogamente y se deja al lector. En los ejercicios se plantea la demostración del resto de las leyes.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Represente los conjuntos siguientes en forma intensiva:

a) A es el conjunto de números naturales que son distintos de 6.

b) B es el conjunto de números pares que son múltiplos de 3.

c) $A \cap B$.

Resolución

a) $A = \{n \in \mathbf{N} : n \neq 6\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{N} : x = 2n \text{ y } x = 3m, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$
$= \{x \in \mathbf{N} : x = 6n,\ n \in \mathbf{N}\}$

c) $A \cap B = \{n \in \mathbf{N} : n = 6k, k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\}$

2. Dados los conjuntos siguientes:

$$A = \{1, \{1\}, \{2,3\}\}$$
$$B = \{1, 2, \{1,2\}\}$$

a) Halle $A \cup B$, $A \cap B$.

b) Dé todos los subconjuntos de A.

Resolución

a) $A \cup B = \{1, \{1\}, \{2,3\}, 2, \{1,2\}\}$
$A \cap B = \{1\}$

b) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{\{1\}\}$, $A_3 = \{1, \{1\}\}$,
$A_4 = \{\{2,3\}\}$, $A_5 = \{1, \{2,3\}\}$
$A_6 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$, $A = A_7 = \{1, \{1\}, \{2,3\}\}$, $A_8 = \phi$

3. Sea k un número natural fijo y definamos el conjunto

$$k\mathbf{N} = \{m \in \mathbf{N} : m = kn, n \in \mathbf{N}\}$$

a) Halle la representación extensiva de $3\mathbf{N}$ y $2\mathbf{N}$.

b) Determine $3\mathbf{N} \cap 2\mathbf{N}$ y represéntelo en forma extensiva.

c) Pruebe que si p y q son primos relativos, entonces
$p\mathbf{N} \cap q\mathbf{N} = pq\mathbf{N}$

Resolución

a) $3\mathbf{N} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
$2\mathbf{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

b) $3\,\mathbf{N} \cap 2\,\mathbf{N} = \{m \in \mathbf{N} : m = 3n \text{ y } m = 2k,\ n, k \in \mathbf{N}\}$

$$= \{m \in \mathbf{N} : m = 6n,\ n \in \mathbf{N}\}$$

$$= \{6, 12, 18, 24, \dots\}$$

c) $p\,\mathbf{N} \cap q\mathbf{N} = \{m \in \mathbf{N} : m = pn \text{ y } m = qk\}$, o sea, en $p\,\mathbf{N} \cap q\mathbf{N}$ están los múltiplos de p y los múltiplos de q, estos son los números divisibles por p y por q. Por propiedad conocida de la divisibilidad en **N**, dado que p y q son primos relativos, se deduce que los números divisibles por p y por q son los números de la forma $m = pqk,\ k \in \mathbf{N}$. De ahí que:

$$p\,\mathbf{N} \cap q\,\mathbf{N} = pq\,\mathbf{N}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Represente los conjuntos siguientes en forma intensiva y extensiva:
   a) A es el conjunto de números primos mayores que 10.
   b) B es el conjunto de números primos menores que 30.
   c) $A \cap B$.
   d) C es el conjunto de números naturales que son múltiplos de 3 y no son potencias de 3.
   e) D es el conjunto de números naturales que son primos o potencias de 2.
2. Dados los conjuntos siguientes:
   $A = \{3, 5, \{7\}\}$ $B = \{2, \{4, 6\}\}$
   a) Halle $A \cup B$, $A \cap B$
   b) Diga si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

1) $\{7\} \subset A$	6) $4 \in B$
2) $\{7\} \in A$	7) $\{4\} \subset B$
3) $2 \in B$	8) $\{4\} \in B$
4) $\{2\} \subset B$	9) $\{4, 6\} \subset B$
5) $7 \in A$	10) $\{\{4, 6\}\} \subset B$

   c) Dé todos los subconjuntos de B.
3. Demuestre las leyes fundamentales de las operaciones conjuntuales (propiedades 1.3).
4. Demuestre que $p\,\mathbf{N} \cap q\,\mathbf{N} = k\,\mathbf{N}$, donde k es el mínimo común múltiplo de los números p y q.
5. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$$

   donde A, B y C son conjuntos dados y $B \subseteq A$, $A \cap C = \phi$.

§ P.2 El método deductivo de la inducción matemática

En el Análisis Matemático, como en muchas otras ramas de la Matemática, se emplea frecuentemente el principio de inducción matemática.

Ejemplo

1) Sea .

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Es fácil ver que:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Sobre la base de los resultados obtenidos "inducimos" que para todo número natural n se tiene $S_n = \frac{n}{n+1}$. ¿Cómo "deducir" que esto es válido para todo $n \in \mathbf{N}$ sin tener que probarlo en todos los casos?

La respuesta se logra aplicando el razonamiento basado en el principio de inducción matemática, el cual consiste en lo siguiente:

Sea P una propiedad que depende de un número natural n. Designemos por P(1) la propiedad referida a $n = 1$; con P(2) la que se refiere a $n = 2$, y así sucesivamente.

Supongamos demostrada la propiedad para $n = 1$ y una vez hecho esto, supongamos que de la validez de P(1) deducimos la de P(2), después de la validez de P(2) somos capaces de probar la de P(3) y así sucesivamente. Si observamos que siempre para pasar de la validez de P(k) a la validez de P(k + 1) se puede utilizar un mismo procedimiento independiente del valor específico de k, entonces tal procedimiento serviría para llegar a demostrar, digamos, la validez de P(1982) y de cualquier otro P(n) con $n \in \mathbf{N}$. Es decir, adquirimos la convicción de que la propiedad P es válida para todo número natural.

Esta idea intuitiva queda precisada en el principio siguiente:

Principio de inducción matemática

Supuesto que:

1) P(1) es cierta.
2) Bajo la hipótesis de la validez de P(k) puede deducirse (por un determinado razonamiento matemático) la validez de la propiedad P(k + 1).

Entonces, la propiedad P es válida para todo número natural.

Una ilustración elemental del razonamiento que justifica la inducción matemática es la siguiente:

Supongamos que tenemos fichas de dominó colocadas en fila empezando por una determinada y continuando indefinidamente. ¿Cómo nos aseguraremos de que golpeando la primera todas las fichas caerán? El principio dice que basta para ello comprobar:

1ro.) Que la primera ficha cae al ser golpeada.

2do.) Que las fichas están situadas de manera que si una cualquiera de ellas cae, automáticamente golpea y hace caer a la ficha siguiente.

Entonces, aunque la fila se extienda indefinidamente, afirmamos que todas las fichas caerán en virtud del principio de inducción matemática.

Como un ejemplo más concreto, demostremos que la suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ es precisamente, como habíamos inducido anteriormente, igual a $\frac{n}{n+1}$.

Sabemos ya que $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$ y $S_4 = \frac{4}{5}$. Razonando por el método de inducción completa, supongamos que la hipótesis es válida para $n = k$, o sea, que:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Demostremos que, entonces, la propiedad es válida también para $n = k+1$; o sea, que

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

por consiguiente, utilizando la hipótesis de inducción,

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Ahora podemos afirmar, basándonos en el principio de inducción matemática, que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

para todo número natural n.

Observación

Es necesario subrayar que la demostración por inducción matemática exige tanto la demostración de $P(1)$ como la deducción de la validez de $P(k+1)$ a partir de la hipótesis de la validez de $P(k)$. La no realización de uno de estos dos pasos conduce a errores.

Ejemplos

2) Consideremos los números del tipo $2^{2^n} + 1$.
Para $n = 1, 2, 3$ y 4 los números $2^2 + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$ y $2^{2^4} + 1 = 65{,}537$ son primos. Pierre de Fermat, ilustre matemático francés del siglo XVII aceptaba que todos los números de este tipo son primos. Sin embargo, L. Euler encontró en el siglo XVIII que

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

es un número compuesto. (Aún se desconoce si hay otros números de Fermat: $2^{2^n} + 1$, que sean primos para $n > 5$.)

3) L. Euler consideró el trinomio $x^2 + x + 41$. Tomando el cero en lugar de x, obtenemos el número primo 41. Tomando ahora el uno en lugar de x, obtenemos de nuevo un número primo, el 43. Tomando sucesivamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en lugar de x, obtenemos cada vez un número primo: 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 y 151 respectivamente. De aquí se infirió que al sustituir x por un número natural cualquiera se obtiene siempre un número primo como resultado. Pero un análisis más profundo arroja que para todo $n \in \mathbf{N}$ y $n < 40$ esto es cierto, pero para $x = 40$ este trinomio vale 41^2, que obviamente es un número compuesto. Tenemos entonces que la propiedad es válida en 40 casos particulares, pero que no lo es en general.

4) "Demostremos" que todo número natural es igual al número natural siguiente aplicando el método de inducción matemática.

Supongamos que $P(k)$ es válida, o sea,

$$k = k+1 \qquad (1)$$

y demostremos que se cumple $P(k+1)$, es decir,

$$k+1 = k+2 \qquad (2)$$

En efecto, sumando 1 a ambos miembros de la igualdad (1) obtenemos la igualdad (2). Resulta, pues, que si la propiedad es válida para $n = k$, también lo es para $n = k+1$, y así queda demostrado que ¡todos los números naturales son iguales!

El error radica en la no aplicación del principio comprobando la validez de $P(1)$, la cual evidentemente es falsa: $1 \neq 2$.

Observaciones

1) El primer paso del método puede realizarse para cualquier otro número natural $m > 1$. Entonces al aplicar también el otro paso del método obtendremos que la propiedad se cumple para todo $n \geqslant m$. Por ejemplo, toda proposición relacionada con los polígonos de n lados tiene sentido sólo para $n \geqslant 3$.

2) A veces en el segundo paso se demuestra la propiedad para el valor $n = k+1$ suponiendo su validez para $n = k$ y $n = k-1$. En tal caso, la propiedad en el primer paso debe comprobarse para dos valores sucesivos de n. Por ejemplo, demostremos que si $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$ y si $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$, entonces, para todo número natural, se tiene: $a_n = 2^{n-1} + 1$. Para $n = 1$ y $n = 2$ la propiedad es válida por hipótesis. Supongamos que $a_{k-1} = 2^{k-2} + 1$ y $a_k = 2^{k-1} + 1$. Entonces, $a_{k+1} = 3(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) = 2^k + 1$ y queda probada la propiedad.

3) Las definiciones inductivas, también llamadas *definiciones por recurrencia*, guardan una estrecha relación con el método de demostración por inducción. Uno de los ejemplos más corrientes de *definición inductiva* es el que se encuentra al definir el factorial de un número natural. El factorial del número n, el cual se denota $n!$, es el número natural definido por:

a) $1! = 1$

b) $k! = (k-1)! \cdot k$, para $k \geq 2$.

Esta forma de definición hace ver fácilmente la relación entre $n!$ y $(n-1)!$, lo cual es muy adecuado para las demostraciones por inducción. Como se observa en el ejemplo, la definición por recurrencia consiste en definir el objeto para un (o varios) primer elemento y a partir de la expresión en el caso k, dar la definición en el caso $k+1$.

Ejemplo

5) *Sucesión de Fibonacci*. La sucesión de Fibonacci, $a_1, a_2, a_3, \ldots$, se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3 \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5 fue descubierta por Fibonacci (matemático italiano, 1175-1250) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es igual a $a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior y, además, cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombrosa la cantidad de resultados interesantes relacionados con esta sucesión hasta el punto de existir una "Asociación Fibonacci" que publica una revista: The Fibonacci Quarterly.

4) Otra variante de aplicación de la inducción matemática es la de suponer la validez para todo $k < n$ y probar la propiedad en cuestión para n. El lector puede

comprobar que aunque esta variante parece más fuerte que el método ordinario, en realidad no es sino una consecuencia de este último.

Ejemplo

6) Demostremos que el término general de la sucesión de Fibonacci puede expresarse de la forma siguiente:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

La fórmula se cumple para $n = 1$ y $n = 2$. En efecto,

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_2$$

Se supone válida para todo $k < n$, donde $n \geq 3$. En particular lo es para $n-1$ y $n-2$. Ahora se probará, mediante la fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, que la fórmula se cumple también para a_n.

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}{\sqrt{5}}$$

Analicemos el factor $1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

$$1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Lo mismo sucede con $1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Entonces, sustituyendo estos factores en el desarrollo anterior queda:

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}}{\sqrt{5}}$$

Con lo cual queda probada por inducción la validez de la fórmula.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Calcule la suma de los n primeros números impares.

Resolución

Indiquemos por S_n la suma buscada:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$$

Primero debemos "inducir" la respuesta empíricamente. Tomemos sucesivamente los valores $n = 1, 2, 3, \ldots$ hasta obtener material suficiente para poder enunciar una hipótesis más o menos acertada. Después quedará sólo demostrarla empleando el método de inducción matemática.

Tenemos:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 9,\ S_4 = 16,\ S_5 = 25$$

Ahora todo depende de la capacidad de observación y de intuición matemática para encontrar el resultado general a partir de los particulares.

En nuestro caso salta a la vista que

$$S_1 = 1^2,\ S_2 = 2^2,\ S_3 = 3^2,\ S_4 = 4^2,\ S_5 = 5^2$$

Sobre esta base podemos suponer que

$$S_n = n^2$$

Demostremos que esta hipótesis es válida.

1ro.) Para $n = 1$ obtenemos $S_1 = 1 = 1^2$

probemos la hipótesis para $n = k+1$

2do.) Supongamos que la hipótesis es válida para $n = k$, ~~es decir, es válida para~~ $n = k+1$; o sea, que

$$S_{k+1} = (k+1)^2$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + (2k+1)$$

Pero $S_k = k^2$, de modo que

$$S_{k+1} = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

como queríamos demostrar.

2. ¿Para qué valores naturales de n se cumple la desigualdad $2^n > 2n + 1$?

Resolución

Para $n = 1$ se obtiene $2 < 3$.

Para $n = 2$ también es falsa, pues $4 < 5$.

Para $n = 3$ la desigualdad es válida pues $8 > 7$.

Para $n = 4$ la desigualdad sigue siendo válida pues $16 > 9$.

Por lo visto la desigualdad es válida para todo $n \geqslant 3$.

Demostrémoslo:

1ro.) Para $n = 3$ la desigualdad se cumple, puesto que: $8 > 7$.

2do.) Supongamos $2^k > 2k + 1$ para $k \geqslant 3$ (1)

y demostremos que $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.

En efecto, 2^k es no menor que 2 cualquiera que sea el número natural k. Agreguemos 2^k al primer miembro de la desigualdad (1) y 2 al segundo. Obtendremos la desiguladad justa

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2$$

o sea, $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.

Así, la desigualdad se cumple para todo $n \geqslant 3$.

3. a) Pruebe que el término n-ésimo de una *progresión aritmética* se determina según la fórmula:

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad (1)$$

donde a_1 es el primer término de la progresión y d es la razón de ésta.

b) Pruebe que el término n-ésimo de una *progresión geométrica* se determina según la fórmula:

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \qquad (2)$$

donde a_1 es el primer término de la progresión y q es la razón de ella.

Resolución

a) 1ro.) La fórmula (1) es válida para $n = 1$.

2do.) Supongamos la fórmula (1) válida para $n = k$; o sea, que

$$a_k = a_1 + d(k-1)$$

Entonces,

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk$$

de modo que la fórmula (1) también se cumple para $n = k + 1$.

b) 1ro.) La fórmula (2) es válida para $n = 1$.

2do.) Supongamos $a_k = a_1 q^{k-1}$.

Entonces: $a_{k+1} = a_k q = (a_1 q^{k-1})\, q = a_1 q^k$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuestre utilizando el principio de inducción:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

e) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Encuentre una fórmula válida para todo $n \in \mathbf{N}$, para las sumas

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n$

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

e) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

3. Demuestre la identidad

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

4. Demuestre que con billetes de 5 y 3 pesos es posible pagar cualquier cantidad mayor o igual que 8 pesos.

5. Explique el error en la siguiente "demostración" por inducción.

Proposición: Dado un conjunto de *n* niñas rubias, si por lo menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las *n* niñas tienen ojos azules.

Demostración

La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$. El paso de k a $k + 1$ se puede ilustrar pasando de $n = 3$ a $n = 4$. Supóngase para ello que la proposición es cierta para $n = 3$ y sean G_1, G_2, G_3 y G_4 cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga ojos azules, por ejemplo, la G_1. Tomando G_1, G_2, G_3 conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que también G_2 y G_3 tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con G_1, G_2 y G_4, se encuentra igualmente que G_4 tiene ojos azules; es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de k a $k + 1$ en general.

Corolario: Todas las niñas rubias tienen ojos azules.

Demostración

Puesto que, efectivamente, existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto de todas las niñas rubias.

Nota: Este ejemplo se debe a G. Pólya, quien sugiere que el lector compruebe experimentalmente la validez de la proposición.

6. Sea b un entero positivo. Demostrar por inducción la proposición siguiente: para cada entero $n \geqslant 0$, existen enteros no negativos *q* y *r* tales que:

$$n = qb + r \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r < b$$

7. Demuestre las desigualdades siguientes:

a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para $n > 1$

b) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ para $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ y $n > 1$

c) $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, para todo $n \in \mathbf{N}$

8. ¿Para qué valores naturales de n se cumple la desigualdad $2^n > n^2$?

9. Demuestre que:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

10. Demuestre que:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n,$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

(Fórmula del binomio de Newton)

§ P.3 Exposición informal de elementos de lógica formal

El método de inducción matemática estudiado en el epígrafe anterior es sólo un caso particular entre los distintos métodos de demostración matemática que utilizamos en el análisis matemático. Realmente el principio de inducción matemática, clave en la Aritmética, realiza una función secundaria en el análisis matemático, lo cual se debe precisamente a que los números reales, a diferencia de los naturales, no son el resultado de una construcción inductiva (la forma más corriente de definir el conjunto de los números naturales es mediante los axiomas de Peano, uno de los cuales es precisamente el principio de inducción matemática).

La inducción (sugerencia de una idea o una hipótesis general a partir del conocimiento de situaciones particulares) sin duda, desempeña en las Matemáticas un papel importante, pero puramente heurístico: permite "adivinar" cuál debe ser, según todas las apariencias, la solución. Pero, las proposiciones matemáticas se demuestran siempre deductivamente. Ningún resultado matemático puede considerarse justo, válido, si no ha sido deducido de las proposiciones de partida.

Pero, ¿y el método de inducción matemática? Lo que sucede es que la "inducción matemática" es un método deductivo.

Es fácil persuadirse de que la llamada inducción matemática no es, de hecho, inducción. El principio de inducción matemática nos da un método preciso que permite obtener, a partir de la base y del paso inductivo, una demostración puramente deductiva de la proposición, para todos los números naturales n.

En otras palabras, el nombre de "inducción matemática" se debe simplemente a que se asocia en nuestra conciencia con los razonamientos inductivos tradicionales, porque el primer paso consiste, efectivamente, en hacer la demostración sólo para un caso particular, y muchas veces se induce la fórmula a demostrar (como en el ejercicio resuelto 1 del epígrafe § 2), pero el paso inductivo, es una proposición general que no necesita de ninguna hipótesis particular y se demuestra según los rigurosos cánones de los razonamientos deductivos. Es por eso que la inducción matemática se denomina también *inducción completa* pues, a diferencia de la inducción corriente, es un método deductivo de demostración.

En matemáticas, como en las ciencias físicas, podemos emplear la observación y la inducción para descubrir leyes generales; pero, después de dedicar más o menos tiempo al trabajo puramente experimental, es ventajoso cambiar de punto de vista.

Precisemos: después de descubierto un resultado interesante, con un razonamiento experimental, particular, heurístico, debemos confirmar dicho resultado de un modo definitivo mediante una demostración rigurosa, con un método puramente deductivo.

Se cuenta de Newton una anécdota clásica: Joven estudiante, comenzó el estudio de la geometría, como era costumbre en su tiempo, por la lectura de los *Elementos* de Euclides. Leyó los teoremas, constató su exactitud y omitió las demostraciones, preguntándose por qué se tomaban tantas molestias en demostrar verdades tan evidentes. Años más tarde, sin embargo, cambió de parecer y fue un admirador apasionado de Euclides.

No hay la menor duda de que una familiarización con los mecanismos de demostración utilizados en la matemática constituye un aspecto básico para comprender una demostración matemática. Éste es el objetivo del presente epígrafe.

Los procesos de deducción son procesos del pensamiento, de una gran importancia en la matemática: dos situaciones deductivas corrientes en la actividad matemática lo constituyen la búsqueda y el análisis de la demostración de una proposición.

En ambos casos nos encontramos con el siguiente problema: el establecimiento de la verdad de una proposición matemática partiendo de la verdad de otras proposiciones, algunas quizás, previamente demostradas. Las proposiciones aceptadas como verdaderas en la demostración son las *hipótesis* o *premisas* de la demostración. Las proposiciones previamente demostradas que se utilizan en la demostración al igual que la proposición que se demuestra se denominan *teoremas*. La demostración en sí está constituida por una sucesión ordenada de proposiciones cada una de las cuales constituye lo que denominaremos un *paso* en la demostración. La última proposición de la sucesión es precisamente la proposición que se quiere demostrar. Cada paso, es decir, la inserción de cada proposición en la cadena, debe de estar *lógicamente justificado*.

Para poder ejemplificar algunos de los métodos más usuales de demostración matemática, necesitamos exponer, aunque sea simplificada e informalmente, los elementos de la estructura del lenguaje matemático.

Comencemos por precisar qué es una proposición matemática.

Se trata de cierto tipo de estructura donde expresamos bien la afirmación o la negación de propiedades de entes matemáticos y relaciones (interacciones, nexos, dependencias, etcétera) entre estos entes. Todas las proposiciones que estudiaremos tendrán un valor *veritativo bivalente,* que quiere decir que la misma puede ser *verdadera* o *falsa* y no existe ninguna otra posible valoración, como es el considerarla al mismo tiempo verdadera y falsa. Aristóteles utilizaba el nombre de principio del tercero excluido *tertium nom datur* para designar esta premisa.

Ejemplos

1) 2 es número primo.
2) 2 no es número par.
3) 2 es número par o impar.
4) 2 es número par y primo.
5) Si a es un número primo entonces a es impar.
6) El número a es primo si y sólo si es impar.

Son ejemplos de distintos tipos de proposiciones matemáticas.

La proposición 1) es un ejemplo de *proposición elemental,* es decir, es una proposición en la cual no interviene ninguna operación lógica y su valor se infiere directamente del conocimiento de los conceptos que en ella intervienen y las relaciones ya establecidas entre ellos. En este caso, de la definición de número primo como aquel que es sólo divisible por la unidad y por sí mismo y el conocimiento primario sobre el número 2 se infiere directamente que su valor es verdadero.

La proposición 2) es un ejemplo de *negación* lógica, es decir, es una proposición que resulta de aplicar a otra proposición P la operación lógica que se denomina "negación" y que se representa en el lenguaje común por la partícula "no" antecediendo a P(no-P). Es el contrario al valor de la proposición elemental P, de la cual proviene. En este ejemplo, el valor de la proposición es falso pues la proposición "2 es número par" es verdadera.

La proposición 3) es un ejemplo de *disyunción lógica,* la cual viene representada por la partícula "o". Su valor es verdadero si es verdadera, al menos, una de las dos proposiciones que la componen. Así, 3) es verdadera, puesto que 2 es un número par.

La proposición 4) es un ejemplo de *conjunción lógica,* la cual se representa por la partícula "y". Su valor es verdadero si las dos proposiciones que la componen son verdaderas. Nuestro ejemplo es una proposición verdadera, pues el número 2 es par y también es primo (condición que cumple *sólo* el número 2).

En la proposición 5) ejemplificamos la *condicional* lógica y en la proposición 6) la *bicondicional* o equivalencia lógica. Se acostumbra a representar la condicional lógica por el signo " $\Rightarrow$ ", que se llama también *signo de implicación,* y la operación bicondicional por el signo " $\Longleftrightarrow$ ", que se suele llamar *signo de equivalencia.* Así, nuestros ejemplos 5) y 6) se pueden representar por:

5') a primo $\Rightarrow$ a impar, 6') a primo $\Longleftrightarrow$ a impar.

Una implicación "P $\Rightarrow$ Q" es verdadera si siempre que P es verdadera se cumple que Q es también verdadera y es falsa cuando siendo P verdadera se tiene que Q es falsa. La consideración del caso en que P sea falsa provoca una valoración que difiere del uso ordinario que se hace de la condicional y, por tanto, la soslayaremos. En el ejemplo 5) estamos en presencia de una implicación falsa, puesto que para a = 2, P es verdadera, mientras que Q es falsa (este es el único valor de a para el cual no se cumple la implicación, pero basta para concluir que la implicación es falsa).

La equivalencia P $\Longleftrightarrow$ Q es verdadera si lo son ambas implicaciones: P $\Rightarrow$ Q y Q $\Rightarrow$ P y será falsa si lo es al menos una de las dos implicaciones anteriores. Luego, en el ejemplo 6) estamos ilustrando una equivalencia falsa, pues no se cumple, que si a es primo entonces a es impar (realmente tampoco se cumple que si a es impar entonces es primo, pero *basta* con mostrar que una de las dos implicaciones es falsa).

La mayor parte de los teoremas que aparecen en el texto se reducen a expresiones del tipo "P $\Rightarrow$ Q" o "P $\Longleftrightarrow$ Q". Dado el teorema "P $\Rightarrow$ Q" hay varios teoremas relacionados con él.

Dos teoremas se llaman *recíprocos* cuando cada uno tiene como hipótesis la tesis del otro.

Si P $\Rightarrow$ Q es el teorema *directo,* entonces Q $\Rightarrow$ P es el teorema *recíproco.*

Ejemplos

7) El recíproco del ejemplo 5) expresa que:
"Si a es impar, entonces a es un número primo".

En este caso, el teorema recíproco es falso, pues existen números impares que no son primos. Por ejemplo, 9 es impar y no es primo, pues 9 = 3 • 3.

Se llaman teoremas contrarios los que tienen como hipótesis y tesis proposiciones respectivamente contrarias. Si "P $\Rightarrow$ Q" es el teorema directo, entonces "no P $\Rightarrow$ no Q" es el teorema contrario.

8) El contrario del teorema 5 expresa que:

"Si a no es primo, entonces a es par".

En este caso, el teorema contrario es falso, puesto que a = 9 no es primo y, sin embargo, no es par.

El teorema recíproco del contrario se denomina *contrarrecíproco.*

Si "P $\Rightarrow$ Q" es el directo, entonces "no Q $\Rightarrow$ no P" es el teorema contrarrecíproco.

9) El contrarrecíproco de nuestro ejemplo 5) expresa que: "Si a es par, entonces a no es un número primo".

Uno de los métodos de prueba más usado se basa en el hecho de que un teorema y su contrarrecíproco son equivalentes, es decir, la validez de uno de ellos implica la del otro. Este resultado puede demostrarse con razonamientos lógicos pero nos contentaremos con postularlo y utilizarlo como método de prueba (ver ejemplo 11).

El teorema "P $\Rightarrow$ Q" expresa que P es una *condición suficiente* para que se cumpla Q, y que Q es una *condición necesaria* para que se cumpla P. Si son válidos el teorema directo y su recíproco, entonces estamos en presencia de una equivalencia: P $\Longleftrightarrow$ Q, y se dice que P es una condición necesaria y suficiente para que se cumpla Q. También se dice que P se cumple si, y sólo si, se cumple Q.

10) En la geometría plana se estudia cómo dividir el círculo en cierto número n de partes iguales por medio de la regla y el compás. Si n es un número par, esto es fácil de hacer; pero no siempre es posible hacerlo cuando n es impar, como ya se dieron cuenta los antiguos griegos antes de nuestra era. Entonces ¿bajo qué condiciones es posible si n es un número impar? Muchos años pasaron y este problema continuó abierto. Finalmente, en 1796, un joven de 19 años llamado Gauss demostró el teorema siguiente:

"Una condición necesaria y suficiente para poder dividir el círculo en un número n impar de partes iguales es que n sea un número primo de Fermat, es decir, un número primo de la forma $2^{2^k} + 1$ (ver ∮ 2 ejemplo 2) o una combinación de esos números". Esto quiere decir que si el círculo se puede dividir en un número n impar de partes iguales, entonces, n es una combinación de número de la forma $2^{2^k} + 1$ y, además, es primo (condición necesaria) y que si n es la combinación de números de la forma $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbf{N}$, y también es primo, entonces el círculo se puede dividir con regla y compás, en un número n de partes iguales (condición suficiente).

Veamos ahora algunos ejemplos de utilización de los métodos de prueba más comunes.

Ejemplos

11) (De prueba por el contrarrecíproco)

Teorema: Sea $n \in \mathbf{N}$. Si 2 divide a n^2, entonces 2 divide a n.

Demostración

El contrarrecíproco expresa que si 2 no divide a n, entonces 2 no divide a n^2. Probémoslo.

Si 2 no divide a n, entonces n es impar; o sea, $n = 2k+1$ para algún $k \in \mathbf{N}$.

$$\text{Luego } n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

y como $2k^2 + 2k$ es un número natural, se obtiene que n^2 es impar, o sea, que n^2 no es divisible por 2.

Un método muy similar al de prueba por el contrarrecíproco es el conocido como método de prueba por reducción al absurdo.

En el método de prueba por reducción al absurdo se demuestra la falsedad de una afirmación deduciendo de ella una manifiesta contradicción. Algunos matemáticos comparan el método de *reductio ad absurdum* con el método de la sátira, donde se adopta un cierto punto de vista y se lleva a sus conclusiones extremas, hasta el punto en que se llega a una contradicción manifiesta.

Se cree que fue Zenón de Elea, alrededor del año 500 a.n.e., quien primero utilizó este método de reducción al absurdo en sus célebres paradojas del infinito, tres de las cuales presentamos en las introducciones de los Capítulos I, III y V respectivamente. La clásica demostración de Euclides de la infinitud del conjunto de los números primos, es uno de los primeros ejemplos de demostración por reducción al absurdo.

12) (De prueba por reducción al absurdo)

Teorema: El conjunto de los números primos no tiene un último elemento.

Demostración

Supongamos, por el contrario, que el conjunto de los números primos tiene un último elemento p. Consideremos el número

$$q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p) + 1$$

Este número q, al ser mayor que p, no puede ser por hipótesis un número primo; q debe ser, pues, divisible por un número primo. Ahora bien, todos los números primos de que disponemos son, por hipótesis, los números 2, 3, 5, 7, . . . , p y dividido entre uno cualquiera de dichos números q tiene como residuo 1; q no es, pues, divisibles entre ninguno de los números primos mencionados, los cuales constituyen por hipótesis la totalidad de los números primos. Se nos manifiesta ahí una contradicción. Por tanto, nuestra hipótesis es errónea: *no existe un número p que sea el último número primo.*

Una de las formas de demostrar que $P \Rightarrow Q$ por el método de prueba de reducción al absurdo consiste en considerar válidos al unísono P y no-Q y llegar a una contradicción.

13) Probemos por reducción al absurdo el teorema planteado en el ejemplo 11; de prueba por el contrarrecíproco:

Sea $n \in \mathbf{N}$.

Supongamos que 2 divide a n^2 y que 2 no divide a n. Luego, $n^2 = 2k$ y $n = 2m+1$, donde k y m son números naturales. Pero, de $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2k$ se obtiene $4m^2 + 4m = 2k - 1$, lo cual es contradictorio, pues $2k - 1$ no es divisible por 4 mientras que el miembro de la izquierda sí lo es. Esta contradicción obtenida prueba la falsedad de nuestra hipótesis y de ahí que a sea divisible por 2.

Observaciones

1) Existen otras formas de demostrar "$P \Rightarrow Q$" utilizando el método de prueba por reducción al absurdo, por ejemplo, de P y no-Q llegar a que al unísono deben cumplirse las proposiciones P y no-P, lo cual es absurdo. También de la suposición de P y no-Q se puede llegar a no-P, lo cual también es una manifiesta contradicción. En fin, el método de prueba consiste en suponer P y no-Q y llegar a una contradicción evidente.

2) En la demostración de una misma proposición son utilizables varios métodos de prueba. Así, se puede comenzar directamente la demostración, probar un paso por el contrarrecíproco, otro paso por reducción al absurdo y culminar de manera directa. También en la demostración de una condición necesaria y suficiente se puede demostrar que la condición es necesaria por un método y que la condición es suficiente por otro. En este texto se encontrará el lector multitud de formas combinadas de demostración.

El principiante muchas veces comete el error de querer demostrar una proposición general exhibiendo ejemplos que cumplen la condición expresada en ella. Como pudimos apreciar en el epígrafe § P.2, existen propiedades que se cumplen para un número grande de casos, pero que, en general, no son válidas. Esto no contradice el hecho de que si se quiere probar la *falsedad* de una proposición de carácter universal, es decir, que se propone válida para todo elemento del universo en cuestión, sea suficiente exhibir un ejemplo que no posea dicha propiedad para demostrarlo. Esto se llama método de prueba por un contraejemplo.

Ejemplo

14) (De prueba por un contraejemplo.) En el ejemplo 2, § P.2 se relata un caso histórico de prueba por un contraejemplo. Se trata de la demostración dada por Euler a la proposición de Fermat de que todo número de la forma $2^{2^n} + 1$ es un número primo. Le bastó a Euler comprobar que $2^{2^5} + 1$ era divisible por $5 \cdot 2^7 + 1$ para demostrar la falsedad de esta conjetura, vigente durante 100 años.

En el proceso de demostración de una proposición determinada, el matemático pasa por diferentes etapas. Primero trata de demostrarlo directamente, después ensaya en la prueba del contrarrecíproco o utilizando el método de reducción al absurdo. Al cabo de varios intentos infructíferos comienza a buscar ejemplos que prueben la falsedad de la proposición. Si encuentra sólo ejemplos que cumplen las condiciones del teorema, siente de nuevo el interés por encontrar la demostración, y así sucesivamente... Un buen matemático no es aquel que llega rápidamente a la solución de todo problema matemático, sino aquel que se siente motivado por resolver el problema y no ceja en su empeño hasta hacerlo, utilizando todos los medios a su alcance. Por supuesto, mientras más "herramientas" y métodos sabe utilizar más eficiente será su trabajo, pero su principal arma de combate es su interés y su voluntad de afrontar las dificultades, cualquiera sea su índole matemática.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

Sea el teorema T: "Si $A \subset B$ y $A \subset C$, entonces $A \subset B \cap C$".

1. Enuncie los teoremas recíproco, contrarrecíproco y contrario del teorema T.
2. Demuestre el teorema directamente, por el método de prueba del contrarrecíproco y por el método de reducción al absurdo.
3. ¿Se cumplen los teoremas recíproco y contrario?
4. Exprese el teorema en el lenguaje de las condiciones necesarias y las condiciones suficientes.

Resolución

1. a) Teorema recíproco de T: "Si $A \subset B \cap C$, entonces $A \subset B$ y $A \subset C$".
   b) Teorema contrarrecíproco de T: "Si $A \not\subset B \cap C$, entonces o $A \not\subset B$ o $A \not\subset C$".
   c) Teorema contrario de T: "Si $A \not\subset B$ o $A \not\subset C$, entonces $A \not\subset B \cap C$".

2. a) Demostración de T *directamente:*
   Supongamos $A \subset B$ y $A \subset C$.
   Sea $x \in A$. De $A \subset B$ obtenemos $x \in B$ y de $A \subset C$ se obtiene que $x \in C$. Luego $x \in B$ y $x \in C$, o sea, $x \in B \cap C$.
   Hemos probado que si $x \in A$ entonces $x \in B \cap C$, es decir, que $A \subset B \cap C$.
   b) Demostración de T *por el contrarrecíproco.*
   Supongamos que $A \not\subset B \cap C$; es decir, que existe $x \in A$ tal que $x \notin B \cap C$. Si $x \notin B \cap C$, esto quiere decir que $x \notin B$ o $x \notin C$, de donde se deduce que: o A no es subconjunto de B o A no es subconjunto de C.

   c) Demostración de T *por reducción al absurdo:*
   Supongamos que i) $A \not\subset B \cap C$ y que ii) $A \subset B$ y $A \subset C$.
   Sea $x \in A$. De i) se deduce que o $x \notin B$ o $x \notin C$, mientras que de (ii) se infiere que $x \in B$ y $x \in C$. Esto es una evidente contradicción y, por tanto, es falso que $A \not\subset B \cap C$ o sea, $A \subset B \cap C$.

3. a) Probemos que el recíproco se cumple también.
   Supongamos que $A \subset B \cap C$.
   Sea $x \in A$. Entonces $x \in B \cap C$, o sea, $x \in B$ y $x \in C$, como se quería probar.
   b) El contrario se cumple, pues es el contrarrecíproco del recíproco, el cual acabamos de probar.

4. a) "Una condición necesaria para que A sea subconjunto de B y de C es que A sea subconjunto de $B \cap C$."
   b) "Una condición suficiente para que $A \subset B \cap C$ es que A sea subconjunto de B y de C."
   c) Dado que T y su recíproco son válidos se cumple que:
   "Una condición necesaria y suficiente para que A sea subconjutno de B y de C es que A sea subconjutno de $B \cap C$."

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Dado el teorema T: "El número $z = 2^m + 1$ puede ser un número primo sólo si m no contiene ningún divisor impar".
   a) Enuncie los teoremas recíproco, contrarrecíproco y contrario de T.
   b) Exprese, en términos de condiciones necesarias o suficientes, el teorema T.
   c) ¿Se cumple el teorema recíproco de T?
2. Dado el teorema T: "Si $A \cap B \subseteq C^c$ y $A \cup C \subseteq B$, entonces $A \cap C = \phi$".
   a) Enuncie los teoremas recíproco, contrarrecíproco y el contrario del teorema T.
   b) Demuestre el teorema directamente y por reducción al absurdo.
   c) ¿Se cumplen los teoremas recíproco y contrario?
   d) Exprese el teorema en el lenguaje de las condiciones necesarias y suficientes.
3. Sea el teorema T: "Si a es un divisor de b o un divisor de c, entonces a es también divisor del producto $b \cdot c$".
   a) Enuncie los teoremas recíproco, contrarrecíproco y contrario del teorema T.
   b) Demuestre el teorema directamente y por el contrarrecíproco.

c) ¿Se cumplen los teoremas recíproco y contrario?

d) Exprese el teorema en el lenguaje de las condiciones necesarias y suficientes.

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. Defina los conceptos subconjunto, unión, intersección complemento y diferencia.
2. Exponga las leyes de dualidad y demuestre una de ellas.
3. ¿En qué consiste el principio de inducción matemática?
4. ¿Qué es una definición por recurrencia? Dé un ejemplo.
5. ¿Por qué el método de prueba por inducción matemática es un método deductivo?
6. Discuta la veracidad de la deducción siguiente:
   a) existen paralelogramos que no son rectángulos y
   b) existen paralelogramos cuyas diagonales no tienen la misma longitud, se deduce:
   c) los paralelogramos cuyas diagonales no tienen la misma longitud no son rectángulos.
7. Dé ejemplos de proposiciones de disjunción, conjunción, condicional y bicondicional lógica.
8. Entre los teoremas directo, recíproco, contrario y contrarrecíproco ¿cuáles tienen valor lógico equivalente?
9. Describa tres métodos de prueba y ejemplifique su respuesta.
10. ¿Qué tipos de proposiciones se pueden probar por el contraejemplo?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. ¿Existen o no conjuntos A, B y C tales que:
   $A \cap B \neq \phi$, $A \cap C = \phi$ y $(A \cap B) \setminus C = \phi$?
2. Encuentre todos los subconjuntos del conjunto
   $\{\phi, \{\phi\}, \{x\}, \{1, 2\}\}$
3. a) Demuestre que todo conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.
   b) ¿Cuántos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto de n elementos ($k \leqslant n$)?
4. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas para toda terna de conjuntos A, B y C?
   a) Si $A \in B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$
   b) Si $A \subset B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$
   c) Si $A \neq B$ y $B \neq C$, entonces $A \neq C$
5. Resuelva el sistema de ecuaciones
   $A \setminus X = B$
   $A \cup X = C$
   donde A, B y C son conjuntos dados y $B \subseteq A \subseteq C$.
6. *Diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B se llama al conjunto $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   Demuestre:

   a) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$
   b) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$
   c) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$
   d) $A \dot{-} \phi = A$
   e) $A \dot{-} A = \phi$
   f) $A \dot{-} U = A^c$
   g) $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$
   h) $A \setminus B = A \dot{-} (A \cap B)$
   i) $A \dot{-} B = \phi \Leftrightarrow A = B$
   j) $A \dot{-} B = C \Leftrightarrow B \dot{-} C = A \Leftrightarrow C \dot{-} A = B$
7. Demuestre que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por 9.
8. Encuentre una fórmula para
   $$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \ldots (1 - \frac{1}{n^2})$$
   que sea válida para $n \geqslant 2$ y demuéstrela por inducción matemática.
9. Encuentre una fórmula para
   $$(1 - \frac{4}{1})(1 - \frac{4}{9})(1 - \frac{4}{25}) \ldots (1 - \frac{4}{(2n-1)^2})$$
   válida para todo $n \in N$ y demuéstrela con ayuda del principio de inducción matemática.
10. Demuestre que para todo n natural se cumple que $3^{2n} - 1$ es divisible por 2^{n+2}, pero no es divisible por 2^{n+3}.

11. Demuestre el "pequeño teorema de Fermat": "Si p es un número primo, entonces, para todo número natural n, el número $n^p - n$ es divisible por p".
12. ¿Cuál es el número máximo de las proposiciones siguientes que pueden ser simultáneamente verdaderas para algún número natural n?
    a) $n^2 + 1$ es primo.
    b) $n^2 + 1$ no es un número de Fermat.
    c) $n^2 + 1$ es un número de Fermat, pero no es primo.
    d) Si $n^2 + 1$ es primo, entonces $n^2 + 1$ no es un número de Fermat.
    e) $n^2 + 1$ es primo si y sólo si $n^2 + 1$ es un número de Fermat.
    f) O $n^2 + 1$ es primo, o $n^2 + 1$ es un número de Fermat, pero no ambas cosas a la vez.
13. Sea el teorema T: "Toda progresión geométrica con los dos primeros términos primos entre sí contiene infinitos números primos".
    a) Enuncie la negación de este teorema.
    b) Supongamos válido T, ¿qué valor veritativo tiene la proposición siguiente: "Si una progresión contiene sólo un número finito de números primos, entonces no es geométrica."
    c) Enuncie el teorema como una proposición del tipo "P ⇒ Q" y asóciele los teoremas recíprocos, contrarrecíproco y contrario.

CAPÍTULO I. NÚMEROS REALES

Inclusión distinción: entre números algebraicos y trascendentes

Para contar no sólo hacen falta objetos contables, sino también la capacidad de prescindir, a la vista de esos objetos, de todas las otras cualidades menos la de su número, capacidad que es el fruto de un largo desarrollo histórico, empírico.

FEDERICO ENGELS[1]

Introducción

El concepto de número se desarrolló en la antigüedad como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos.

Al principio el número no existía como concepto abstracto. "Contar" representaba la comparación de un conjunto dado de objetos con otro conjunto conocido como los dedos de las manos, las marcas en un palo, los nudos en una soga, un determinado montón de piedrecitas o semillas. Una huella de esta práctica tan remota se observa en la denominación del "Calculus", que traducido literalmente del latín significa "contar con piedras".

En la sociedad primitiva el hombre sólo necesitó los primeros números naturales, pero a medida que se desarrollaron sus actividades productivas aparecieron, cada vez, números mayores. No obstante, operar con grandes números sólo es posible si se posee un sistema de numeración adecuado y en aquel entonces se disponía de muchos sistemas diferentes pero ninguno apropiado. Poco a poco se perfeccionaron y se unificaron los distintos sistemas de cálculo. Arquímedes, en el siglo III a.n.e., basándose en el principio de numeración decimal, fue el primero en dar un método para expresar cualquier número por grande que fuera. En su célebre obra "Contador de arena" se construye un sistema numérico que sirve para contar cualquier conjunto finito de objetos. En particular el "contador de arena" podía determinar la cantidad de arena encerrada en todo el Universo (Arquímedes se representaba el Universo en forma de esfera gigantesca pero de radio finito con centro en el Sol y en cuya superficie se distribuían todas las estrellas. El diámetro del Universo lo consideraba tantas veces mayor que el diámetro del Sistema Solar como tantas veces este último era mayor que el diámetro de la Tierra).

Después de adaptarse a los grandes números, los griegos no tardaron en saltar al infinito. La sucesión de los números naturales 1, 2, 3, 4, . . . , n, . . . se extiende indefinidamente, pues cuando llegamos al número n se puede escribir el número siguiente como n + 1. La audaz idea del infinito abrió a los matemáticos grandes posibilidades, pero a su vez los enfrentó a contradicciones que todavía hoy son objeto de discusiones.

[1] ENGELS, F.: *Anti-Dühring.* p.51, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1979.

Paralelamente al desarrollo del concepto número natural se desarrolló el concepto número fraccionario. Según los documentos que se conservan, el estudio de las fracciones se remonta más allá del año 2 000 a.n.e. al Antiguo Egipto y a los estados de la desaparecida Babilonia. Los primeros números fraccionarios aparecieron por las necesidades en la repartición de herencias, en los cálculos para las construcciones, en las mediciones del tiempo y otros problemas similares. Comenzaron utilizándose las fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ y otros pocos números como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Tanto en Egipto como en Babilonia se llegaron a dar las reglas aritméticas de las operaciones con números naturales y fraccionarios, aunque siempre en forma de recetas, o sea, sin fundamentación teórica. *Calculad como yo hago* dice en esencia el matemático de los pueblos antiguos: nos presenta ejemplos y ningún razonamiento deductivo.

Los primeros razonamientos hipotético-deductivos relacionados con el concepto número se encuentran en la Grecia Antigua, alrededor del siglo V a.n.e. La escuela pitagórica hace del número el principio de todas las cosas. Para los pitagóricos "todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número, puesto que sin él no podemos comprender ni conocer nada". El hallazgo de sorprendentes propiedades de los números, asociados a la música y a las teorías del *derecho* y la *moral* los condujeron a concepciones místico-filosóficas que leídas hoy nos resultan absurdas. Vemos, por ejemplo, una definición de número muy difundida en sus obras: "El número es la cadena omnipotente y autógena que constituye la estabilidad de las cosas del mundo, la prisión en que la unidad ha encerrado el Universo".

Pero nuestra referencia a los pitagóricos no tiene como objetivo subrayar sus errores filosóficos, sino situar el encuentro inicial con un tipo de números que no pueden ser catalogados ni como naturales ni como fraccionarios.

Tomando como unidad de medida la longitud del cateto de un triángulo rectángulo, entonces no existe número natural o fraccionario que nos sirva para representar la longitud de la hipotenusa (ver § I.2). Los griegos se espantaron porque pensaban que todo segmento de recta debía poseer una longitud numérica. ¿Cómo resolver esta contradicción? Dado que hay más segmentos que números fraccionarios, consideraron más adecuado utilizar los segmentos de recta como elementos primarios para calcular: así surgió la primera teoría algebraico-geométrica. Con los segmentos de recta, los griegos definieron todas las operaciones algebraicas.

Por ejemplo, la suma se interpretaba como la unión consecutiva de los intervalos sumados y la multiplicación de dos segmentos como el área del rectángulo con lados cada uno de los factores. Debemos señalar que en el álgebra geométrica se introdujeron ingeniosos razonamientos geométricos en la interpretación de las identidades algebraicas.

Por ejemplo, en la figura I.1 ilustramos la interpretación geométrica de la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Una de las escuelas que se opuso a la concepción pitagórica del número como principio de todas las cosas fue la escuela de los eléatas y en particular Zenón de Elea.

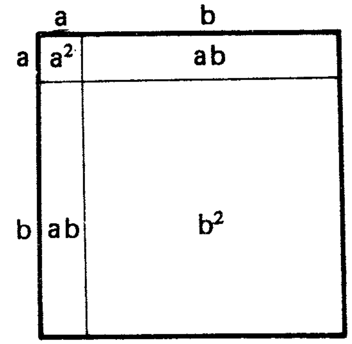


Fig. I.1

Zenón, utilizando el método de prueba por reducción al absurdo (quizás por primera vez en la historia), muestra que los argumentos pitagóricos acerca de que todo segmento de recta tiene una longitud numérica determinada, contradicen a nuestro sentido común. El argumento más popular esgrimido por Zenón se expresa en la célebre "Paradoja de Aquiles y la tortuga". Supongamos que en la persecución de la tortuga por Aquiles, la primera aventaja al último en una longitud $\overline{AB}$. Mientras que Aquiles recorre esta distancia, la tortuga ha llegado a C. Mientras Aquiles recorre la distancia $\overline{BC}$ la tortuga llega a D y así sucesivamente; por pequeña que sea la distancia que separa a Aquiles de la tortuga, es al menos igual, en la teoría pitagórica, a la longitud de un cierto segmento. Mientras Aquiles recorre ese segmento la tortuga se ha desplazado otro segmento que siempre tiene una longitud determinada. Por tanto; Aquiles ¡no alcanzará jamás a la tortuga! Pero nosotros sabemos, por experiencia, que Aquiles atrapará a la tortuga. ¿Cómo salvar esta contradicción? Evidentemente, la concepción metafísica del número de la escuela pitagórica no permite dar respuesta positiva a esta cuestión que exige una consideración dialéctica del concepto número.

Con posterioridad a la edad de oro griega, el conocimiento de los números no recibe ningún impulso significativo, salvo en la introducción de los números negativos. Los números negativos se encuentran ya, aunque sólo sea de un modo práctico, en los matemáticos hindúes. Brahmagupta en el siglo VI de nuestra era da reglas como esta: "la suma de dos créditos es un crédito mientras que la de un crédito y una deuda es su diferencia o cero si son iguales".

En Europa, los números negativos se introdujeron con la utilización del cálculo literal en la época del Renacimiento, pues hasta entonces todos los matemáticos trataban de evitar, por todos los medios, el empleo de estos números, los cuales calificaban de falsos, ficticios, imaginarios, etc. Se cree que fue Descartes en el siglo XVII quien empleó por primera vez los signos + y − para distinguir los números positivos de los negativos, como hacemos actualmente, y desarrolló por completo las reglas de cálculo con números negativos, aunque a pesar de esto, no tiene un concepto perfectamente claro de tales números.

Algo después que Descartes, el genio de Isaac Newton, da en su *Aritmética Universal* una definición general de número, que comprende al entero positivo y al negativo, así como al racional y al irracional. Para Newton, el número relativo es la representación analítica de las magnitudes dotadas de dos sentidos y, en general, "número es el resultado de la comparación con la unidad; se obtiene el número entero cuando la unidad cabe exactamente en la cantidad, el fraccionario cuando esta contiene exactamente una parte alícuota de la unidad y el irracional cuando la cantidad y la unidad son inconmensurables entre sí".

Por supuesto que esta definición, aunque puede satisfacer intenciones "pragmáticas", no es rigurosa ya que utiliza el concepto de "comparación de la cantidad con la unidad", el cual necesita de una definición en la cual no intervenga el concepto de número, cuestión nada fácil y que motivó la creación de una teoría general de las magnitudes en el siglo XIX elaborada con métodos de la lógica matemática.

Otra teoría de los números surgida en el siglo XVII es la de J. Wallis, quien observó que todo número fraccionario se podía representar por un número decimal con un número finito de cifras o con un número infinito de cifras periódicas (ver § I.3). De manera, entonces natural, Wallis consideró aquellos números, decimales con infinitas cifras no periódicas y demostró que todos los números hallados por los griegos como "irracionales" (sea $\sqrt{2}$ por ejemplo) se podían representar de esta forma, considerando los valores de las aproximaciones sucesivas en la medición del segmento correspondiente (la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos unitarios).

Hoy día, al apretar el botón de la raíz cuadrada en una calculadora manual obtenemos la respuesta a la representación decimal de $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$ Las computadoras electrónicas han calculado las cifras hasta más de 2 000 lugares decimales. Ciertamente, para el físico y el ingeniero estas aproximaciones son más que suficientes si sus objetivos son experimentales. Pero cuando los intereses están en la búsqueda de la esencia de los fenómenos tiene que recurrir a teorías cada vez más precisas y exactas que utilizan las propiedades de continuidad de la materia y las correspondientes relaciones cuantitativas de carácter continuo.

Una teoría precisa, rigurosa de los números reales no puede basarse en magnitudes de segmentos ni de ningún otro ente físico, ni tampoco puede recurrir a intuición geométrica alguna. En este sentido a mediados del siglo pasado surgen diversas teorías del número que pretenden "aritmetizar" el Análisis, es decir, basar la teoría de los números reales en la utilización de los números naturales.

En los intentos de aritmetizar el Análisis, los matemáticos se plantearon innumerables problemas: ¿Son las leyes de la aritmética independientes o pueden ser derivadas lógicamente unas de otras? ¿Son realmente fundamentales o pueden ser reducidas a un conjunto más primitivo, más simple y más elegante de reglas? Uno de los mayores éxitos obtenidos en los años 1870 fue el de lograr establecer un conjunto de axiomas para los números, es decir, un grupo de reglas que definen el comportamiento de los números. Hay que decir que son varios los grupos de axiomas que sirven para fundamentar la teoría de los números. Entre sí, todos los grupos de axiomas son equivalentes, unos son más útiles que otros en dependencia de los objetivos que se persiguen.

En nuestro curso hemos optado por utilizar uno de los grupos de axiomas más "prácticos", el cual consideramos más apropiado por su sencilla interpretación física.

Subrayemos que no se debe exagerar en la utilización del método axiomático. Con este método lograremos rápidamente establecer las reglas de juego necesarias para intentar construir coherente y lógicamente todo el análisis matemático.

Para nosotros este es un medio y no un fin. No nos permitiremos extremismos como el señalado por un cierto maestro de primaria, el cual decía que con los métodos modernos se le enseñaba a los niños que $2 + 3$ era igual a $3 + 2$ sin conocer que la suma era 5. En este capítulo no pretendemos perdernos en disquisiciones acerca de la naturaleza de los números y la compatibilidad y consistencia lógica de los mínimos axiomas que los determinan. Partiendo del conocimiento supuesto de la operatoria con los números sistematizamos de la forma más resumida las reglas fundamentales (no precisamente mínimas) que lo rigen.

§ I.1 Propiedades de los números racionales

Dado que el conjunto de los números naturales $\mathbf{N} = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ presenta deficiencias evidentes para representar todas las operaciones usuales en nuestras relaciones productivas, se introducen los números enteros y los números racionales. El conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros contiene los números $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ y el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales contiene los números que se representan como cociente de dos números enteros $\frac{p}{q}$, donde $q \neq 0$. De la enseñanza primaria son conocidas las operaciones y propiedades de estos números. Aquí vamos a enumerar aquellas que son fundamentales para nuestros objetivos.

Al formular estas propiedades, en lugar de utilizar el término "número racional" utilizaremos el término más genérico de "número". Esto nos permitirá más adelante referirnos a estas propiedades no sólo como propiedades de los números racionales, sino de otros conjuntos numéricos más amplios.

Las propiedades más importantes de los números racionales son las siguientes:

P1. *Existencia de un orden:* Cualesquiera sean los números a y b se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes:

"$a < b$" : a es menor que b

"$a > b$" : a es mayor que b

"$a = b$" : a es igual a b

La relación de orden posee la propiedad siguiente:

P2. *Transitividad:* Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Además, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

P3. *Existencia de una suma:* Para todo par de números a y b está definido de manera única el número llamado *suma* y se representa por $a + b$.

La operación de suma posee las propiedades siguientes, que se cumplen para toda terna de números a, b y c :

P4. *Conmutatividad:* $a + b = b + a$.

P5. *Asociatividad:* $(a+b)+c=a+(b+c)$.

P6. *Existencia* y *unicidad del elemento nulo 0:* Existe un único número llamado cero "0" tal que $a+0=a$ para todo número a.

P7. *Existencia y unicidad del opuesto:* Para todo número a existe un único número, que denotaremos por $-a$, tal que:

$$a+(-a)=0$$

Notación: Para sumar a con el opuesto de b se utiliza la notación $a+(-b) = a-b$, y a este número se le llama diferencia de a menos b.

P8. *Existencia de una multiplicación:* Existe una regla por medio de la cual al par a y b se le hace corresponder un tercer número c llamado *producto,* el cual se representa por $c=ab$.

Análogamente a la suma, la operación de multiplicación posee las propiedades siguientes cualesquiera sean los números a, b y c:

P9. *Conmutatividad:* $ab=ba$.

P10. *Asociatividad:* $(ab)c=a(bc)$.

P11. *Existencia y unicidad del elemento unidad (1):* Existe un número llamado *uno* "1", tal que para todo número a se cumple $1\,a=a$.

P12. *Existencia y unicidad del recíproco:* Para todo número $a \neq 0$ existe un número, que denotamos $\frac{1}{a}$, tal que

$$a\frac{1}{a}=1$$

Notación: Para multiplicar a por el recíproco de $b \neq 0$ se utiliza la notación $a\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ y a este número se le llama cociente de dividir a por b.

Las operaciones de suma y multiplicación están relacionadas por la propiedad siguiente.

P13. *Distributividad de la multiplicación respecto a la suma:* Cualesquiera sean los números a, b y c se cumple que

$$(a+b)c=ac+bc$$

Las dos propiedades siguientes relacionan el orden con la suma y la multiplicación:

P14. Si $a>b$, entonces, para todo número c se cumple

$$a+c>b+c$$

P15. Si $a>b$ y $c>0$, entonces $ac>bc$, y si $a>b$ y $c<0$, entonces $ac<bc$.

La propiedad siguiente desempeña un papel muy importante en este curso. Se sabe que fue introducida por Eudoxio de Cnido en el siglo IV a.n.e., pero por vieja costumbre se le denomina "de Arquímedes".

P16. *Propiedad arquimedeana:* Cualquiera sea el número a existe un número natural n tal que

$$n>a$$

Estas son las propiedades que consideramos más importantes en el conjunto de los números racionales **Q.**

Es conveniente recordar las reglas mediante las cuales se comparan, suman y multiplican los números racionales:

Sean $a=\frac{m}{n}$ y $b=\frac{p}{q}$. Si $a,b \geqslant 0$, entonces $a<b$, cuando $mq<np$, $a=b$, cuando $mq=np$ y $a>b$, cuando $mq>np$. Si $a,b \leqslant 0$, entonces $-a,-b \geqslant 0$ y se dice que $a<b$ cuando $-a>-b$ y $a>b$ cuando $-a<-b$.

Se define la suma de $a+b$ como

$$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$$

y el producto como:

$$a\cdot b=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

Observación

El hecho de que esta forma de definir el orden y las operaciones entre números racionales haga que se cumplan las propiedades P1 - P16 es consecuencia de la definición y las propiedades análogas que para los números naturales van conociéndose por el estudiante desde sus primeros pasos en la escuela primaria y ya deben ser consideradas por éste como "verdades evidentes".

Las 16 propiedades referidas anteriormente se llaman fundamentales, puesto que todas las otras propiedades algebraicas relacionadas con las operaciones de suma y multiplicación y con la relación de orden pueden ser obtenidas como consecuencia lógica de éstas 16. Así, por ejemplo, se deduce la propiedad siguiente, que utilizaremos frecuentemente:

TEOREMA 1.1

Si $a>b$ y $c>d$, entonces $a+c>b+d$.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, de las desigualdades $a>b$ y $c>d$ y de las propiedades P14 y P4 se deduce que

$$a+c>b+c \text{ y } b+c>b+d$$

y de estas dos desigualdades, junto con P2, obtenemos que

$$a+c>b+d$$

Asimismo se pueden introducir todas las definiciones utilizadas desde la enseñanza secundaria, como, por ejemplo, las siguientes:

DEFINICIONES 1.2

a) Un número $a \geqslant 0$ se llama *positivo* y un número $a \leqslant 0$ *negativo.*

b) Para todo número dado a y todo número natural n, al producto de a, n-veces por sí mismo, se le llama *potencia n-esima* de a y se denota por a^n.

c) Al número $b > 0$ tal que $b^n = a$ (si existe) se le llama *raíz n-ésima* del número a y se representa por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$

d) Para todo número a denotamos por $|a|$ y llamamos *valor absoluto* o *módulo* de a al número tal que:

$$|a| = \begin{cases} a \ , & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a \ , & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Con estas definiciones se pueden expresar otras propiedades de los números racionales. Veamos una propiedad sumamente importante:

TEOREMA 1.3 (Desigualdad triangular)

Para todo par de números a y b se cumple:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

DEMOSTRACIÓN

Por las definiciones de módulo y de relación de orden se cumplen las desigualdades:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \ , \ -|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Del teorema 1.1 se deduce que:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Utilizando, en el caso $a + b > 0$ la desigualdad a la derecha y en el caso $a + b \leqslant 0$ la de la izquierda, obtenemos la desigualdad triangular.

EJERCICIOS

.Ejercicios resueltos

1. Pruebe que $a \cdot 0 = 0$ para todo número a.

Resolución

Por P11 y P7, $a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0)$, entonces, por P13 y P11: $a = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$, de donde por P7 $a \cdot 0 = 0$.

2. Pruebe que $|a| \leqslant b$ si y sólo si $-b \leqslant a \leqslant b$.

Resolución

Si $|a| \leqslant b$, entonces por P15 $-|a| \geqslant -b$ luego

$$-b \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant |a| \leqslant b$$

de donde se obtiene por P4, $-b \leqslant a \leqslant b$.

Recíprocamente, supongamos que $-b \leqslant a \leqslant b$. Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$ y, por tanto, $|a| \leqslant b$. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

De $a \geqslant -b$ se obtiene que $-a \leqslant b$. Por tanto, $|a| = -a \leqslant b$, lo que demuestra que $|a| \leqslant b$ en cualquier caso.

3. ¿Tienen solución las ecuaciones siguientes:

a) $|x| = x + 1$ b) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$?

Resolución

a) Si $x \geqslant 0$ se obtiene $|x| = x$, luego la ecuación se convierte en $x = x + 1$, que no tiene solución.

Si $x < 0$ se tiene $|x| = -x$ y la ecuación se convierte en

$$-x = x + 1$$

de donde:

$$-2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

que es la solución buscada.

b) Si $x \geqslant 0$, tenemos que la ecuación se convierte en

$x^2 + 4x + 3 = 0$ o

$(x + 3)(x + 1) = 0$

cuyas raíces serán -3 y -1. Como $x \geqslant 0$, estos valores no son admisibles.

Si $x < 0$, tenemos la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

cuyas raíces serán 3 y 1; pero como $x < 0$, no son admisibles. Luego esta ecuación no tiene solución.

Ejercicios para el trabajo independiente

1) Pruebe que:

a) $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

b) Si $a \leqslant b$ y $c \geqslant d$, entonces $a - c \leqslant b - d$

c) Si $a \leqslant b$ y $c \geqslant d > 0$, entonces $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{d}$

d) $a(b-c) = ab - ac$, cualesquiera sean los números a, b y c.

e) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para dos números cualesquiera a y b.

f) $|a - b| \geqslant \big|\, |a| - |b| \,\big| \geqslant |a| - |b|$, para a y b números cualesquiera.

2. Resuelva las inecuaciones:

a) $|5x - 4| < 1$

b) $|2x + 3| > 5$

c) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

d) $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$

3. Determine para qué valores de x serán ciertas las ecuaciones siguientes:

a) $\left|\frac{x-3}{x+3}\right| = \frac{x-3}{x+3}$

b) $|x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3)$

c) $|(x^4 - 8) - (x^2 + 4)| = |x^4 - 8| - |x^2 + 4|$

d) $x^2 - 3|x| \pm 2 = 0$

§ I.2 Ampliación del campo de los números racionales

Los números racionales surgieron para medir, esto es, para representar las cantidades de las diversas magnitudes: longitudes, áreas, volúmenes, tiempo, pesos, . . . y de aquí que, recíprocamente, puedan tomarse las cantidades de una cualquiera de esas magnitudes como representación objetiva de dichos números. De ellas, las más cómodas son las magnitudes geométricas longitud, área y volumen y de éstas la más sencilla es la longitud, razón por la cual se le ha preferido.

Convengamos en llamar *eje numérico* a una recta sobre la cual se han elegido uñ punto determinado O (origen) y un segmento $\overline{OE}$ cuya longitud tomamos como unidad y con sentido positivo al situar E a la derecha de O. Evidentemente, a cada número racional le corresponde sobre el eje numérico un punto determinado. En efecto, desde la enseñanza media sabemos cómo construir un segmento cuya longitud es la n-ésima parte de la longitud del segmento $\overline{OE}$ (n, y un número natural arbitrario). Asimismo, podemos construir un segmento cuya longitud es $\frac{m}{n}$ la longitud OE. Colocando tal segmento a la derecha (a la izquierda) del origen O obtenemos el punto M_1 (M_2) correspondiente al número racional $\frac{m}{n}$ ($-\frac{m}{n}$) (figura I.2).

Observemos ahora que no le corresponde a cada punto M del eje numérico un elemento de **Q**. Así, por ejemplo, si el punto M es elegido de tal forma que la lon-

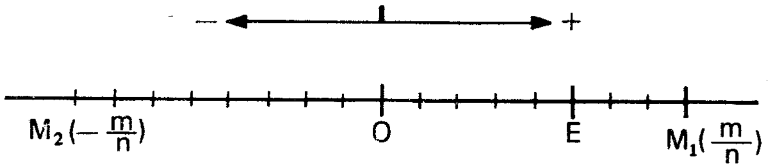


Fig. I.2

gitud del segmento $\overline{OM}$ sea igual a la diagonal del cuadrado cuyo lado es el segmento unidad $\overline{OE}$, entonces por el teorema de Pitágoras, la longitud x del segmento $\overline{OM}$ es igual al valor de la única raíz positiva de la ecuación $x^2 = 2$ (figura I.3). Supongamos que $x \in \mathbf{Q}$, o sea, $x = \frac{m}{n}$ (con m y n enteros primos entre sí, lo que siempre resulta después de simplificar la fracción).

Entonces, $m^2 = 2n^2$. De esta igualdad se deduce que m debe ser par, es decir, $m = 2m'$. Sustituyendo tenemos $n^2 = 2m'^2$. Luego, n debe ser también par. Resulta pues, que n y m no son primos entre sí, contra lo supuesto. Por consiguiente, x no es un número racional y queda probado que al punto M no le corresponde un número racional.

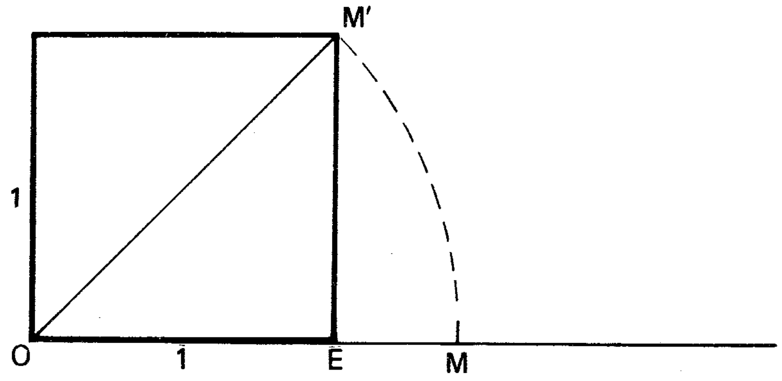


Fig. I.3

Así surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales a un conjunto numérico mayor con ayuda del cual se pueda expresar la longitud de cualquier segmento $\overline{OM}$ del eje numérico. Este nuevo conjunto debe poseer todas las propiedades fundamentales de los números racionales (P1-P16).

La idea que utilizaremos para la ampliación de **Q** es muy simple y procede de la experiencia histórica en la acción de medir magnitudes concretas. Tanto el físico como el químico, el ingeniero, el agrimensor y, en general, todos los que aplican la matemática para medir, se encuentran con mediciones que, conforme avanza la tecnología es posible mejorar y utilizarlas para tareas que requieran un mayor grado de precisión, como en el caso de la microcirugía.

Al aproximarnos con mayor exactitud a la apreciación de una propiedad de la materia, como puede ser la longitud, muchas veces lo hacemos por exceso y otras por defecto. Este proceso de lograr cada vez más y mayor precisión conforma nuestra noción de "medición exacta".

Precisemos en términos matemáticos esta idea empírica.

DEFINICIÓN 2.1

Sean a y b dos números tales que $a \leqslant b$. Se llama *intervalo cerrado* con extremos a y b al conjunto de todos los números x tales que $a \leqslant x \leqslant b$, el cual se denota por $[a, b]$. Al conjunto de todos los números x tales que $a < x < b$ se le llama *intervalo abierto* y se denota por (a, b). Al número $b - a = d$ se le llama *longitud* del intervalo (cerrado o abierto). Si uno de los extremos del intervalo a o b no se incluye en el conjunto, entonces, se le llama intervalo semiabierto o semicerrado indistintamente y se denotan $[a, b)$ o $(a, b]$ según el caso. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_3 = [a_3, b_3], \ldots, I_n = [a_n, b_n], \ldots$ un sistema de intervalos numéricos.

Se dice que los intervalos $\{I_k\}_{k \in N}$ están encajados uno en los otros, que forman un sistema de intervalos encajados si $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ (figura I.4).

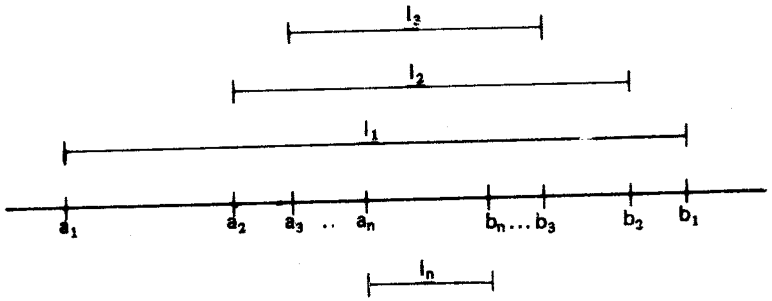


Fig. I.4

Volvamos a nuestra idea empírica. El concepto sistema de intervalos encajados nos permite precisar esta idea.

Los valores de las mediciones por defecto a_n y por exceso b_n nos determinan un sistema de intervalos encajados, en este caso, cerrados, y la convicción de que estos valores aproximados se acercan o "tienden" a la medición exacta se traduce en la postulación de la existencia de un número que pertenezca a todos los intervalos del sistema.

P17. *Propiedad de continuidad:* Para cada sistema de intervalos cerrados encajados existe al menos un elemento, el cual pertenece a todos los intervalos de este sistema.

Observación

Es necesario subrayar que a diferencia de las propiedades P1-P16, la propiedad P17 no está presente en Q. Por ejemplo, tomemos el siguiente sistema de intervalos cerrados encajados con extremos racionales:

$$[1, 2] \supset [1 + \frac{4}{10}, 1 + \frac{5}{10}] \supset [1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}, 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2}] \supset \ldots$$

cuyos extremos a_n y b_n cumplen:

$$a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2 \ , \ b_n - a_n = \frac{1}{10^n} \ , \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los valores a_n y b_n son racionales y aproximan el valor $\sqrt{2}$ con exactitud del orden $\frac{1}{10^n}$. Pero, no existe ningún número racional que pertenezca a todos estos intervalos. En efecto, como probaremos posteriormente, tal número puede ser solamente $\sqrt{2}$, el cual no es racional.

Aunque intuitivamente "está claro" que tal sistema de intervalos cerrados encajados determina *solamente* el número $\sqrt{2}$, para que sea rigurosa esta demostración es necesario probar la unicidad del elemento que pertenece a todos los intervalos del sistema. Por supuesto, esto no es válido en todos los casos. Basta considerar un sistema de intervalos cerrados encajados que se "estacione", es decir, un sistema tal que a partir de cierto n todos los intervalos correspondientes son iguales entre sí y no triviales:

$$a_n \neq b_n, [a_n, b_n] = [a_{n+p}, b_{n+p}], \text{ para todo } p \geqslant 1.$$

En el caso que nos ocupa, el sistema no es "estacionario", pues hemos considerado $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$, o sea, la longitud de todos los intervalos es distinta y cada vez más pequeña. Esto, además, es el comportamiento del proceso de medición práctico. Las condiciones del problema nos fijan un cierto margen de error $\epsilon > 0$. Procedemos a medir buscando valores por defecto y por exceso, tales que su diferencia sea cada vez menor e inferiores a ϵ. Como el valor exacto está situado entre los valores de estas mediciones, queda claro que las últimas diferirán del valor buscado en una cantidad menor que el error prefijado ϵ.

Por supuesto, no todos los problemas de medición son susceptibles de resolverse para un error arbitrario $\epsilon > 0$, esto depende de muchos factores que en esencia no nos permiten continuar mejorando las mediciones aproximadas. A nosotros nos interesan, por supuesto, aquellos sistemas que permiten mejorar la aproximación tanto como queramos.

DEFINICIÓN 2.2

Sea dado un sistema de intervalos cerrados $\{[a_n, b_n]\}_{n \geqslant 1}$. Decimos que este sistema es *infinitesimal* si para cada número $\epsilon > 0$ dado, se encuentra un número natural N_ϵ (que depende de ϵ) tal que, cuando n se toma mayor o igual a N_ϵ, el intervalo correspondiente $[a_n, b_n]$ tiene longitud $d_n = b_n - a_n$, menor que ϵ. Sintéticamente: Para todo $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que: $[n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow b_n - a_n < \epsilon]$.

Los sistemas infinitesimales de intervalos cerrados encajados son los que se adaptan a nuestras consideraciones, como prueba el resultado siguiente.

TEOREMA 2.3 (Principio de los intervalos encajados)

En cada sistema infinitesimal de intervalos cerrados encajados existe un *único* elemento que pertenece a todos los intervalos del sistema.

Nota: Evidentemente este único elemento no tiene el "apellido" racional, sino que pertenece a una nueva "familia" más amplia, la cual nominaremos más adelante.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{[a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots\}$ un sistema infinitesimal de intervalos cerrados encajados. Por P17, existe al menos un elemento que pertenece a todos los intervalos del sistema.

Supongamos que existen dos elementos distintos x, y, que pertenecen a todos los intervalos $[a_n, b_n]$, es decir:

$$x \neq y, \ a_n \leqslant x \leqslant b_n, \ a_n \leqslant y \leqslant b_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sin perder generalidad tenemos $x < y$. Restando de la desigualdad $y \leqslant b_n$ la desigualdad $x \geqslant a_n$ se obtiene $y - x \leqslant b_n - a_n$.

Según la definición de sistema infinitesimal de intervalos, para cada $\epsilon > 0$ existe un N_ϵ tal que siendo $n \geqslant N_\epsilon$ se cumple $b_n - a_n < \epsilon$, y por consiguiente $y - x < \epsilon$. Tomando $\epsilon = y - x$ (lo cual es posible pues $y - x > 0$) obtenemos $y - x < y - x$, obviamente contradictorio. Por tanto, la suposición sobre la existencia de dos números distintos x, y, pertenecientes a todos los intervalos $[a_n, b_n]$ no es correcta.

El teorema queda demostrado.

En el caso planteado en la observación a la propiedad P17, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ y para cualquier $\epsilon > 0$, $\dfrac{1}{10^n} < \epsilon$ si tomamos n suficientemente grande. En efecto, $\dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$ (lo cual puede demostrar el lector utilizando el principio de inducción matemática), y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, por la propiedad arquimedeana P16, siempre puede hallarse un número natural N_ϵ tal que $N_\epsilon > \dfrac{1}{\epsilon}$, o sea, $\dfrac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$. De ahí que si $n \geqslant N_\epsilon$, entonces $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$.

Luego, por el principio de los intervalos encajados 2.3 el elemento $\sqrt{2}$ es el *único* que pertenece a todos los intervalos señalados y con esto ya queda demostrado en forma rigurosa que el conjunto de los números racionales no cumple P17.

DEFINICIÓN 2.4

El conjunto que cumple todas las propiedades P1-P16 de los números racionales y además cumple P17 se denomina *conjunto de los números reales* y se denota por **R**. Cada elemento $x \in \mathbf{R}$ se denomina *número real*. Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, entonces al número x se le llama *número irracional*. A las propiedades P1-P17 las llamaremos *axiomas de los números reales*.

Ejemplo

1) El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Observación

Desde el punto de vista lógico sería necesario ahora "justificar" nuestra definición demostrando que no existe una contradicción en nuestro sistema de axiomas, es decir, que a partir de ellos no podemos llegar a un absurdo y que realmente tiene sentido postular la existencia de tal conjunto de entes abstractos. Como apuntáramos anteriormente, no son nuestras pretensiones lograr la consistencia y completitud de nuestro sistema de axiomas. Nos basta acudir al sentido común y la experiencia práctica que nos permite creer en la realización concreta de este conjunto, el cual hemos construido basándonos en nuestras relaciones con el mundo físico. Y si no satisfacen al lector nuestras evidencias, en el próximo epígrafe daremos una de las posibles realizaciones concretas en el conjunto de los números con infinitas cifras decimales.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Encuentre un sistema infinitesimal de intervalos *abiertos* encajados cuya intersección sea vacía.

Resolución

Sean $I_n = (0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$

y $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbf{N}$.

El sistema $\{A_n\}$ es infinitesimal, ya que $b_n - a_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces por el principio de los intervalos encajados existe un *único* punto que pertenece a todos los A_n. Evidentemente $0 \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, luego este único punto es 0. Como $I_n \subset A_n$ para todo n, un punto que esté en todos los I_n estará en todos los A_n. Dado que 0 es el único que está en todos los A_n, no puede haber otro número que esté en todos los I_n. Pero 0 no pertenece a ningún I_n. Luego la intersección de los I_n es vacía.

2. Demuestre que la suma y diferencia de un número irracional y otro racional es un número irracional.

Resolución

Sean $a \in \mathbf{Q}$ y $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, entonces si $a + b$ fuera racional se tendría que $b = (a + b) + (-a)$ sería la suma de los dos números racionales $(a + b)$ y $(-a)$.

Por la propiedad P3 de los números racionales este número sería racional, lo cual es absurdo.

Por tanto, $a + b$ es irracional.

Análogamente puede probarse para la diferencia $a - b$.

3. Encuentre los valores racionales de x tales que el número $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ es racional.

Resolución

Si x e y son racionales, entonces la diferencia $d = y - x$ es racional,

$$y - x = \sqrt{x^2 + x + 3} - x = d$$

de donde

$$\sqrt{x^2 + x + 3} = d + x$$

$$x^2 + x + 3 = (d + x)^2$$

$$x = \frac{d^2 - 3}{1 - 2d}, \text{ si } d \neq \frac{1}{2}$$

Si $d = \frac{1}{2}$, se tendría

$$\sqrt{x^2 + x + 3} - x = \frac{1}{2}$$

o sea $\sqrt{x^2 + x + 3} = \frac{1}{4} + x + x^2$,

que no se satisface para ningún valor de x, luego d no puede valer $\frac{1}{2}$.

Demostremos ahora que si $x = \frac{d^2 - 3}{1 - 2d}$, donde $d \in \mathbf{Q}$, $d \neq \frac{1}{2}$,

entonces $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ es racional. En efecto:

$$x^2 + x + 3 = \left(\frac{d^2 - 3}{1 - 2d}\right)^2 + \frac{d^2 - 3}{1 - 2d} + 3 = \frac{d^4 - 2d^3 + 7d^2 - 6d + 9}{(1 - 2d)^2}$$

$$= \frac{(d^2 - d + 3)^2}{(1 - 2d)^2}$$

luego $y = \frac{d^2 - d + 3}{1 - 2d} \in \mathbf{Q} \quad (d \neq \frac{1}{2})$

Esto prueba que para todo número de la forma $\frac{d^2 - 3}{1 - 2d}$ donde $d \in \mathbf{Q}$, $d \neq \frac{1}{2}$,

el número $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ es racional.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuestre que no existe ningún número racional x tal que $x^2 = 5$. Construya un segmento en la recta real cuya longitud sea exactamente $\sqrt{5}$.
2. Diga si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:
   a) Todo sistema de intervalos cerrados encajados posee un único número real común a todos los intervalos.
   b) Todo sistema de intervalos encajados posee al menos un número real común a todos los intervalos.
   c) Existen sistemas de intervalos encajados que poseen un número racional común a todos los intervalos.
   d) Todo sistema de intervalos cerrados encajados posee al menos un número racional común a todos los intervalos.
   e) La suma y diferencia de dos números irracionales es un número irracional.
   f) El producto y el cociente de dos números irracionales es un número irracional.
   g) El producto y el cociente de un número racional por uno irracional es un número irracional.
3. Demuestre que $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es un número irracional.
4. Halle todos los valores racionales de x tales que

$$y = \sqrt{x^2 + |x| + 1} \text{ sea racional}$$

5. Diga si los números siguientes son racionales o irracionales y explique por qué:

   a) $\sqrt{8}$, b) $\sqrt{36 + 64}$, c) $\sqrt{3 - 2}$, d) $\sqrt{\frac{5}{4}}$, e) $\sqrt{6}$

   f) $\sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}$, donde p_i, $i = 1, \ldots, n$ son números primos y desiguales dos a dos.

§ I.3 Representación decimal de los números reales

Consideremos dado un número $a \geqslant 0$ cualquiera. Por la propiedad arquimedeana existe un número natural $n_0 > a$. Entre los números $n = 1, 2, \ldots, n_0$ tomemos el más pequeño que cumpla $n > a$ y denotémoslo por $\alpha_0 + 1$. Entonces $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

Dividamos el intervalo $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ en diez partes iguales, esto es, consideremos los intervalos

$$[\alpha_0, \alpha_1 \; ; \; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$$

donde $\alpha_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Son posibles dos casos: o el número a no coincide con ningún punto de la partición (figura I.5), o el número a coincide con uno de los puntos (figuras I.6 y I.7).

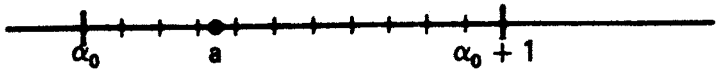


Fig. I.5

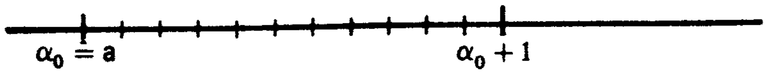


Fig. I.6

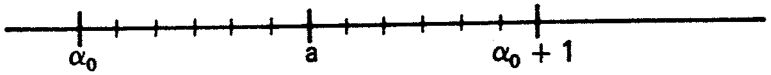


Fig. I.7

En el primer caso, el punto a pertenece sólo a uno de estos intervalos. Denotémoslo por $I_1 = [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$, donde α_1 representa una de las cifras 0,1,.

En el segundo caso, el punto a puede pertenecer a dos intervalos vecinos. Entonc por I_1 denotemos aquel para el cual el punto a es el extremo izquierdo. Dividamos el tervalo I_1 a su vez en diez partes iguales y por $I_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}]$ de temos aquel intervalo que contiene a a y para el cual a no es el extremo derecho. Rep tiendo este proceso obtenemos un sistema de intervalos cerrados encajados

$$\{I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}],\ n = 1, 2, \dots\}$$

donde

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$\overline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

y α_n es una de las cifras 0, 1, 2, ..., 9. Cada uno de los intervalos I_n contiene a a y, más, a no es su extremo derecho.

$$a \in I_n,\ a \neq \overline{a_n},\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Los números decimales $\underline{a_n}$ y $\overline{a_n}$ se llaman, respectivamente, ***representación decimal inferior y superior de orden n admisible*** para el número a. Ellos cumplen las propiedades siguientes, las cuales son consecuencia directa de su definición:

i) $\underline{a_n} \leq a \leq \overline{a_n}$

ii) $\underline{a_n} \leq \underline{a_{n+1}}$, $\overline{a_{n+1}} \leq \overline{a_n}$

iii) $\overline{a_n} - \underline{a_n} = \dfrac{1}{10^n}$

Si $a < 0$, tomando $b = -a$ se define $\underline{a_n} = -\overline{b_n}$, $\overline{a_n} = -\underline{b_n}$ y las propiedades se conservan, sólo que en (i) las desigualdades cambian de sentido. La longitud de los intervalos $I_n\ |\ \underline{a_n}, \overline{a_n}\ |$ es igual a $\frac{1}{10^n}$ (iii) y, por tanto, el sistema es infinitesimal. Así, el número a es el único que pertenece a todos estos intervalos. Dado que el número de intervalos es infinito y a cada uno le corresponde una representación decimal de a por defecto y por exceso, tiene sentido asignarle al número a la ***representación decimal infinita*** $\alpha_0, \alpha_1\alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, la cual, dado a, será única. Por otra parte, si b es distinto de a, la representación decimal infinita que le corresponde difiere de la de a en, al menos, un α_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$

Observemos, además, que en nuestra construcción no se puede obtener un decimal con período constituido por la sola cifra 9. En efecto, supongamos que al número a le corresponde el decimal $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n_0} 99 \dots 9 \dots$, donde $\alpha_{n_0} \neq 0$, entonces, por construcción,

$$a \in [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} 9 \dots 9; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}]$$

para todo $n \geq n_0$. De ahí que a es extremo derecho de todos los intervalos I_n, $n \geq n_0$, lo cual contradice la elección de estos intervalos.

De esta forma, a cada número real $a \geq 0$ le corresponde una cierta expresión decimal infinita cuyo período no está constituido de la sola cifra 9. Tales expresiones decimales se llaman *admisibles*.

Por otra parte, podemos hacer corresponder a cada expresión decimal infinita admisible el único número a que pertenece a todos los intervalos encajados:

$$[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}],\ n = 1, 2 \dots$$

Esta correspondencia se puede ampliar para todos los números negativos: si al número $a > 0$ le corresponde la expresión decimal $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, entonces al número $-a$ se le hace corresponder el número $-\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$

Así, la representación decimal nos da una forma más concreta de referencia a los números reales. Utilizando esta representación se pueden obtener reglas para la comparación de los números reales así como para las operaciones aritméticas con ellos. Tanto una cosa como la otra se realizan análogamente a como se trabaja con los números decimales finitos.

Observaciones

1) Si una expresión decimal infinita tiene período constituido por ceros: $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\ 0\ 0 \ldots 0 \ldots$, donce $\alpha_n \neq 0$, entonces convenimos en no escribir los ceros, obteniendo así las conocidas fracciones decimales finitas.

2) Notemos que en la construcción de la representación de los números reales por una sucesión de cifras, hemos tomado como base el número 10 (de ahí el nombre de representación decimal) pero bien podría tomarse cualquier otro número natural n. ¿Por qué desempeña un papel tan privilegiado precisamente el número 10? Las razones por las cuales precisamente el sistema decimal ha sido universalmente aceptado no son, ni mucho menos, de índole matemática: los diez dedos de las manos han constituido el aparato primario de cálculo que empleó el hombre desde los tiempos prehistóricos. Con la aparición del aparato más moderno de cálculo: las computadoras electrónicas, se necesitó otro modo de fijar los números con los que se opera.

   El sistema decimal no sirve para la computadora electrónica que da preferencia rotunda al sistema binario, el sistema en que se toma como base $n = 2$. Los elementos radioelectrónicos (lámparas, semiconductores) empleados en las computadoras se caracterizan por la existencia de dos posiciones estables. Por ejemplo, la lámpara electrónica puede estar "abierta" (deja pasar la corriente) o "cerrada" (la corriente no pasa). Según este mismo principio de "sí" o "no" funcionan los semiconductores. A estas propiedades de los elementos radioelectrónicos se debe esencialmente que el sistema binario haya sido el más adecuado para las computadoras.

3) Es conveniente señalar que los números racionales corresponden a los números decimales con una cantidad finita de cifras o con infinitas cifras en las cuales a partir de un cierto lugar se repiten determinados números de forma periódica.

   Para obtener la representación decimal de un número racional $\frac{p}{q}$, se divide p entre q según el algoritmo usual. Así, por ejemplo, se puede comprobar que $\frac{1}{8} = 0{,}125$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$, donde la barra encima de un conjunto de cifras representa la repetición periódica de dicho conjunto.

   Utilizando esta idea podemos demostrar la afirmación inicial.

   En efecto, si se tiene el número $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ y efectuamos la división en la forma acostumbrada puede suceder:

a) Que alguno de los restos sea nulo. Entonces a $\frac{p}{q}$ corresponde una representación decimal con un número finito de cifras.

b) Que ninguno de los restos sea nulo. Entonces, como no puede haber más de $q-1$ valores diferentes de esos restos, alguno deberá repetirse. Así los demás se irán repitiendo también en el mismo orden. Esto provoca que en el cociente se repitan las cifras formando un período.

   Recíprocamente, puede demostrarse (y lo haremos en el Capítulo III § III.2) que toda expresión decimal periódica representa un número racional.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Se define la suma de dos expresiones decimales infinitas como sigue:

   Supongamos $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$
   y $b = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$

   Sea $I_n = [c_n, c_n + \frac{1}{10^n}]$,

   donde $c_n = (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n) + (\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n)$

   Entonces, se define $a + b$ como el único número común a todos los intervalos I_n. Demuestre que la suma así definida cumple la propiedad P5.

   Resolución

   Denotemos $a + b = c$ y $b + a = c'$.

   Entonces, c es el único punto común a los intervalos $I_n = [c_n, c_n + \frac{1}{10^n}]$, donde $c_n = (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n) + (\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n)$ y c' es el único punto común a los intervalos $I'_n = [c'_n, c'_n + \frac{1}{10^n}]$,

   donde $c'_n = (\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n) + (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Como la propiedad conmutativa se cumple para los números racionales, $c_n = c'_n$. Luego, $I_n = I'_n$ para todo n, y por consiguiente, $c = c'$.

2. Demuestre que entre dos números reales siempre hay un número racional.

   Resolución

   Sean $a, b \in \mathbf{R}$ y supongamos que $a < b$, entonces debemos demostrar que existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $a < r < b$.

   Sean $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \ldots$; $b = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ representaciones decimales admisibles de los números a y b.

   Como $a < b$ existe un valor $k \geqslant 0$ de los índices tal que $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \alpha_k < \beta_k$.

   Si $\alpha_{k+1} \neq 9$, entonces, $r = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k (\alpha_{k+1} + 1)$ es el número racional buscado. En efecto, $a < r$ ya que todas las cifras coinciden, salvo la de lugar $k + 1$ que es una unidad superior en la representación de r: $r < b$ ya que $\alpha_k < \beta_k$ y las cifras anteriores a la de orden k coinciden.

Si $\alpha_{k+1} = 9$ elegimos la primera cifra que sea diferente de 9 (esto puede hacerse, pues suponemos que la representación es admisible). Sea esta cifra α_m, donde $m > k + 1$. Entonces el número racional buscado es $r = \alpha_0, \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{m-1}$ $\alpha_m + 1$, que evidentemente cumple $a < r < b$.

Nota: Esta propiedad se conoce también con el nombre de ***propiedad de densidad*** de los números racionales en **R**.

Equivalente a que en todo intervalo hay al menos un nº racional

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Se define el producto de dos expresiones decimales infinitas como sigue:

   Supongamos $a = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$

   y $\qquad b = \beta_0, \beta_1 \dots \beta_n \dots$

   Sea $J_n = [d_n, d_n + \frac{1}{10^n}]$ donde

   Sea $d_n = (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot (\beta_0, \beta_1 \dots \beta_n)$, entonces se define ab como el único número común a todos los intervalos J_n.

   Demuestre que la suma definida en el ejercicio resuelto 1 y el producto así definido cumplen las propiedades P4-P15 correspondientes a la suma y al producto de los números reales.
2. Demuestre que entre dos números reales distintos siempre hay un número irracional.
3. Demuestre que en cualquier intervalo en **R** hay puntos racionales e irracionales.
4. Demuestre que el número

   $$3{,}2002000020000002\dots$$

   es irracional.

§ I.4 ACERCA DE LA "CANTIDAD" DE NÚMEROS RACIONALES Y REALES

Al introducir los números reales basándonos en la insuficiente "cantidad" de números racionales para la medición de ciertas longitudes hemos tocado un tema interesante, el cual se refiere a la "cantidad" de elementos en los conjuntos infinitos. Es cierto que todos los elementos de **Q** lo son también de **R**, mientras que hay muchos elementos en **R** que no están en **Q**. Podríamos, por tanto, pensar que, a pesar de que ambos conjuntos tienen un número infinito de elementos, la infinidad del primero es, de un modo u otro, "mayor" que la del segundo. El problema de la comparación de los infinitos intrigó a los más geniales matemáticos y filósofos desde los tiempos más remotos. Por ejemplo, Galileo en 1638 en sus *Diálogos* llegó a la conclusión de que las relaciones "igual" "mayor" y "menor" se pueden aplicar a los conjuntos finitos, pero no a los infinitos. No fue hasta 1873 que G. Cantor consiguió comparar diferentes grados de infinitud mediante una técnica para "contar" la cantidad de elementos en los conjuntos infinitos.

Realmente, la técnica introducida por Cantor, como tantas otras geniales creaciones matemáticas, se basa en el proceso ordinario de contar que usamos desde la primaria: asignarle a cada dedo de la mano un número y a cada número un dedo, o sea, como se cuenta con el ábaco, asignando a cada bola un cierto número y recíprocamente; es decir, en el establecimiento de una correspondencia "uno a uno" entre los elementos del conjunto a "contar" y el conjunto conocido.

DEFINICIÓN 4.1

Diremos que dos conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos o que son de la misma *potencia* si entre ellos existe una correspondencia 1-1, es decir, si existe una regla por la cual a cada un elemento a de A se le hace corresponder un solo elemento b de B, y para todo elemento b de B se encuentra en A un único elemento a en correspondencia con b.

Nota: **En el Capítulo IV profundizamos en el concepto correspondencia y, en particular, en el de correspondencia 1-1 que también se conoce como correspondencia *biyectiva*.**

Con esa definición el conjunto de los números naturales $\{1, 2, \dots, n \dots\}$ contiene la misma cantidad de elementos que los números pares (impares), pues la correspondencia que asigna a cada número natural n el número par $2n$ (impar $2n - 1$) es una correspondencia 1-1.

Está claro que si A tiene la misma potencia que B y a su vez B tiene la misma potencia que C, entonces A y C son de la misma potencia; es decir, esta relación entre conjuntos es transitiva. Basándonos en esto se demuestra que el conjunto de los números enteros tiene la misma cantidad de elementos que **N**; en efecto, basta hacerle corresponder a cada número entero estrictamente positivo n el número 2n y a cada número entero negativo $(-m)$ el número natural $2m + 1$; así $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$ está en correspondencia completamente con **N**.

Ahora bien, ¿tendrá **Q** la misma cantidad de elementos que **N**? No parece cierto, pues como es conocido entre dos números racionales diferentes siempre existe al menos otro número racional. De ello se deduce, por tanto, que entre dos números racionales diferentes existen infinitos números racionales. No obstante, se puede probar que realmente **N** y **Q** son de la misma potencia, utilizando un recurso ingenioso pero sencillo.

TEOREMA 4.2

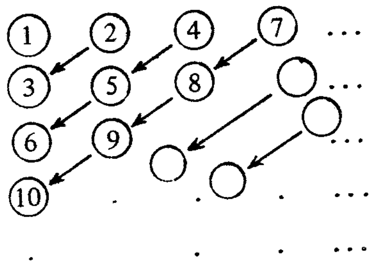
El conjunto de los números racionales posee la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos primero los números racionales positivos. Distribuyámoslos en una tabla infinita de la forma siguiente: en la primera fila pongamos en orden de crecimiento todos los números enteros positivos: $0, 1, 2, \dots$; en la segunda fila todas las fracciones positivas no simplificables con denominador 2 ordenados por el crecimiento de sus numeradores; en general en la n-ésima fila, $n = 1, 2, \dots$, se colocarán todas las fracciones positivas no simplificables con denominador n ordenados por el crecimiento de sus numeradores. Es evidente que cada número racional positivo está en algún lugar de la tabla obtenida:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\[4pt]
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2}\ldots \\[4pt]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\ldots \\[4pt]
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\[4pt]
\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdot & \cdots \\[4pt]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}$$

Enumeremos ahora los elementos de la tabla de acuerdo con el esquema siguiente:



donde los círculos significan el lugar de los números en la tabla y la flecha indica la dirección en la numeración.

Como resultado todos los racionales positivos quedan enumerados, es decir, se han puesto en correspondencia 1-1 con los números naturales.

Para asegurarse de que el conjunto **Q** tiene la potencia de **N** basta escribirlos todos en una tabla similar a la anterior. Esto se puede hacer, por ejemplo, intercalando después de cada racional positivo su opuesto $-x$:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots \\[4pt]
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\[4pt]
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\[4pt]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\[4pt]
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\[4pt]
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}$$

Enumerando los elementos de la tabla se obtiene el resultado buscado.

DEFINICION 4.3

A los conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos que **N**, es decir, que se pueden enumerar, se les llama *conjuntos numerables* o conjuntos cuya potencia es la del numerable.

Así, hemos probado que tanto **Z** como **Q** son conjuntos numerables. Surge ahora una pregunta natural, ¿formarán los números reales un conjunto numerable?, ¿existirán conjuntos infinitos que no sean numerables? No es evidente que el conjunto de los números reales sea numerable, pero tampoco era evidente que **Q** fuera numerable y acabamos de probar que sí lo es. Para ello, utilizamos el hecho de que cada número racional se escribe como el cociente de dos números enteros y que los números enteros forman un conjunto numerable. No podemos basarnos en esto si queremos probar la numerabilidad de **R**. Por otra parte, cuando estudiamos la representación decimal de los reales observamos una diferencia esencial entre los irracionales y los racionales. En ella se basa la demostración del resultado siguiente.

TEOREMA 4.4

El conjunto de los números reales no es numerable.

DEMOSTRACIÓN

Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que podemos enumerar todos los números reales: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ y escribirlos con ayuda de cifras decimales admisibles:

$$x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\ \alpha_2^{(1)} \ldots \alpha_m^{(1)} \ldots$$

$$x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\ \alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_m^{(2)} \ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Aquí $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$, representa una de las cifras $0, 1, 2, \ldots, 9$ y $\alpha_0^{(n)}$ un número entero con el mismo signo de x_n.

Elijamos la cifra α_n, $n = 1, 2, \ldots$ tal que:

$$\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)} \text{ y } \alpha_n \neq 9$$

Entonces el decimal $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ es admisible; sin embargo, el número $a = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ evidentemente no está entre los números x_n, $n = 1, 2, \ldots$, ya que el decimal $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ se diferencia en, al menos, una cifra, de cada representación decimal de x_n. Esta contradicción demuestra el teorema.

Por lo tanto el conjunto de los números reales y el conjunto de los números racionales no tienen la misma cantidad de elementos.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Pruebe que todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

Resolución

Sea X el conjunto infinito. Tomemos alguno de sus elementos y denotémoslo por x_1. Dado que X es infinito, en él existe al menos otro elemento x_2 diferente de x_1. Supongamos que en X ya han sido elegidos n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como X es infinito en él existe otro elemento que denotaremos x_{n+1} y así sucesivamente. Como resultado obtenemos el conjunto $\{x_n\}_{n \in N}$, el cual evidentemente es un subconjunto numerable de X.

2. Pruebe que si A y B son numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.

Resolución

Si A y B son numerables, entonces pueden escribirse en la forma

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \text{ y } B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

Enumeremos los elementos de $A \cup B$ de la manera siguiente: al número natural impar $(2m-1)$ le hacemos corresponder el elemento x_m y al número natural par $2m$ le hacemos corresponder y_m.

Si A y B no tienen elementos comunes entonces esta es una correspondencia 1-1 con el conjunto **N**. Si A y B tienen elementos comunes, entonces $A \cup B$ se pone en correspondencia con un subconjunto de **N**. O sea, $A \cup B$ es finito o numerable.

Como $A \subset A \cup B$ y A es numerable, entonces $A \cup B$ no puede ser finito. En conclusión, $A \cup B$ es numerable.

3. Demuestre que el conjunto de los puntos (x, y) del plano que tienen coordenadas racionales es numerable.

Resolución

Como x puede tomar sólo valores racionales, entonces el conjunto de sus valores es numerable. Podemos escribirlos de la forma

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Análogamente podemos numerar los posibles valores de y

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$$

Consideremos el conjunto de todos los pares (x_i, y_j) y numerémoslo de la forma siguiente. Escribamos primero el par (x_1, y_1) a continuación todos los pares (x_n, y_m) tales que $n + m = 3$, seguidamente aquellos tales que $n + m = 4$ y así sucesivamente. Es decir $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_3), (x_3, y_1), (x_2, y_2) \ldots$

Está claro que de esta forma podemos numerar todos los posibles pares con coordenadas racionales, lo que demuestra que el conjunto considerado es numerable.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Pruebe que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.
2. Pruebe que todo intervalo en **R** que posea dos puntos diferentes contiene un conjunto no numerable.
3. Pruebe que entre dos números reales hay infinitos números racionales e infinitos irracionales y que el conjunto de los números irracionales es no numerable.
4. Pruebe que la unión de un número finito de conjuntos numerables es numerable.

§ I.5 Conjuntos acotados de números reales

DEFINICIÓN 5.1

Un conjunto $E \subset \mathbf{R}$ está *acotado superiormente (inferiormente)* si existe un número $K \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{R})$ tal que $x \leqslant K$ $(x \geqslant k)$ para todo $x \in E$. Al número $K(k)$ se le denomina *cota superior (cota inferior)* del conjunto E. Un conjunto E está *acotado* si está a la vez acotado superior e inferiormente, es decir, si existen números K y k tales que, para todo $x \in E$, se cumple,

$$k \leqslant x \leqslant K$$

Ejemplo

1) El conjunto **R** de todos los números reales no está acotado ni superior ni inferiormente. El conjunto **N** de los números naturales está acotado inferiormente (cualquier número negativo, inclusive el cero o el mismo uno, sirve de cota inferior), pero no está acotado superiormente. (¿Por qué?) Los intervalos $[a, b]$ o (a, b) son conjuntos acotados, es decir, están acotados superior e inferiormente (en ambos casos sirven de cotas inferior y superior los números a y b).

Resulta claro que la definición de conjunto acotado puede ser reformulada de la forma equivalente siguiente:

DEFINICIÓN 5.1'

E está acotado si y solo si existe una constante $M > 0$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in E$.

En efecto, si E está acotado, lo está superior e inferiormente. Por tanto, existen k y K tales que $k \leqslant x \leqslant K$ para todo $x \in E$. Tomando $M = \text{máx}(|K|, |k|)$ se tiene que para todo $x \in E$

$$-M \leqslant -|k| \leqslant k \leqslant x \leqslant K \leqslant |K| \leqslant M$$

de donde $|x| \leqslant M$.

Recíprocamente, si $|x| \leqslant M$ para todo $x \in E$, entonces $-M \leqslant x \leqslant M$ y puede tomarse $k = -M$ y $K = M$.

Ejemplo

2) El conjunto $E = \{x \in \mathbf{R} \,/\, |x-2| \leqslant 1\}$ está acotado ya que

$$|x-2| \geqslant |x| - 2$$

y para todo $x \in E$ se cumple

$$|x| - 2 \leqslant 1, \text{ o sea } |x| \leqslant 3$$

(hemos demostrado que en este caso podemos tomar $M = 3$).

Es evidente que si un conjunto está acotado superiormente (inferiormente) siempre se encontrarán infinidad de cotas superiores (inferiores) de este. Dentro de todas estas infinitas cotas superiores (inferiores) destacaremos una que tendrá especial interés por ser, en cierto sentido, "la mejor".

DEFINICIÓN 5.2

El número M (m) se llama *supremo del conjunto E (ínfimo del conjunto E)* si se cumple:

1) M (m) es una cota superior (inferior) para E; es decir, $x \leqslant M$ ($x \geqslant m$), para todo $x \in E$.

2) M (m) es la menor (mayor) de las cotas superiores (inferiores) de E, es decir, si M' (m') es otra cota superior (inferior) de E, entonces $M \leqslant M'$ ($m \geqslant m'$).

Observación

Si M (m) es el supremo (ínfimo) del conjunto E, entonces cualquier número menor (mayor) ya no será cota superior (inferior), es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existirá algún elemento x_ϵ de E tal que $x_\epsilon > M - \epsilon$ ($x_\epsilon < m + \epsilon$).

Esta condición así formulada es muy útil para demostraciones teóricas.

El supremo de un conjunto acotado superiormente se denotará por *sup E* y el ínfimo de un conjunto acotado inferiormente por *inf E*. Si un conjunto no está acotado superiormente (inferiormente) convendremos en escribir $\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$).

Ejemplo

3) Los intervalos finitos $[a, b]$ y (a, b) tienen por supremo al número b y por ínfimo al número a. En efecto, dado cualquier número $\epsilon > 0$, $\epsilon < b - a$, se encuentra un número entre a y b que es mayor que $b - \epsilon$, por ejemplo, $b - \frac{\epsilon}{2}$ (en el caso del intervalo cerrado pudiera tomarse el mismo valor b).

Si $\epsilon > b - a$ es evidente que todos los elementos del intervalo serán mayores que $b - \epsilon$, luego hemos demostrado que $b = \sup(a, b)$ y $b = \sup[a, b]$. Análogamente se puede proceder con el ínfimo.

La primera pregunta que surge, naturalmente; después de la definición de ínfimo y supremo es la siguiente: ¿Existe siempre el supremo (ínfimo) de un conjunto acotado superiormente (inferiormente)? (Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente) resulta claro de la definición que no existe el supremo (ínfimo) como número real.)

TEOREMA 5.3 (existencia del supremo)

Cada conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente (inferiormente) tiene un supremo (ínfimo) real.

DEMOSTRACIÓN

Sea E un conjunto no vacío acotado superiormente. Esto significa, primeramente, que existe, al menos, un elemento $a \in E$ y, además, que existe un b tal que $x \leqslant b$ para todos los elementos $x \in E$. El intervalo $[a, b]$ contiene, al menos, un punto de E, por ejemplo al punto a. Si $a = b$, entonces este número es evidentemente la cota mínima buscada. Supongamos que $a < b$. Dividamos el intervalo $[a,b]$ a la mitad; esto es, consideremos los subintervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$; al primero de ellos lo llamaremos intervalo izquierdo y al otro, derecho.

Si el intervalo derecho contiene, al menos, un punto del conjunto E, entonces denotémoslo por $[a_1, b_1]$; si no contiene ningún punto de E, entonces denotamos por $[a_1, b_1]$ al intervalo izquierdo.

De esta forma, en ambos casos $[a_1, b_1]$ contiene puntos de E y todo el conjunto E está a la izquierda de b_1, es decir, $x \leqslant b_1$ para todo $x \in E$. Del intervalo $[a_1, b_1]$ de una forma análoga se obtiene el intervalo $[a_2, b_2]$, etc.

Así obtenemos el intervalo $[a_n, b_n]$, el cual contiene a lo menos un punto de E. Dividámoslo en dos intervalos iguales.

Si el intervalo derecho contiene, al menos, un punto de E lo denotamos $[a_{n+1}, b_{n+1}]$; si no contiene, entonces denotamos el intervalo izquierdo por $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Como resultado de este proceso obtenemos una sucesión de intervalos encajados.

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots$ cuyas longitudes son $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Este sistema de intervalos encajados es infinitesimal.

En efecto, para cada $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimedeana, existe un número natural n_ϵ tal que $n_\epsilon > \dfrac{b-a}{\epsilon}$; pero, entonces, para todo $n > n_\epsilon$ se cumple $n > \dfrac{b-a}{\epsilon}$ y, por consiguiente, la desigualdad $\dfrac{b-a}{n} < \epsilon$. Observando, por otra parte, que $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \ldots > n$, se obtiene $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Por esto, para todo $n \geqslant n_\epsilon$ se cumple $\dfrac{b-a}{2^n} < \dfrac{b-a}{n} < \epsilon$, lo cual significa que el sistema [an, bn] es infinitesimal. Esta sucesión de intervalos encajados tiene las propiedades siguientes:

a) $x \leqslant b_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ y cada $x \in E$; es decir, E está completamente situada a la izquierda del extremo derecho de todo intervalo $[a_n, b_n]$.

b) Todo intervalo $[a_n, b_n]$ contiene, al menos, un punto de E.

Por el principio de los intervalos encajados existe un único punto β perteneciente a todos los intervalos $[a_n, b_n]$. Probemos que $\beta = \sup E$. Para esto probemos primero que $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.

Supongamos lo contrario, o sea, que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 > \beta$ (ver figura 1.8).

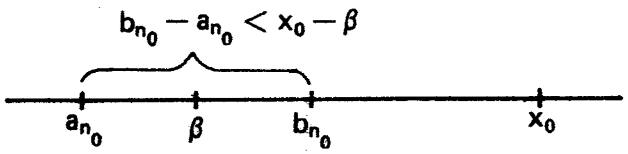


Fig. I.8

Por ser infinitesimal el sistema $[a_n, b_n]$ se tiene que existe n_0 tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < x_0 - \beta$, y de aquí que $b_{n_0} < x_0 - (\beta - a_{n_0})$. Puesto que $\beta \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, entonces $\beta - a_{n_0} \geqslant 0$, de donde $x_0 - (\beta - a_{n_0}) \leqslant x_0$.

Por consiguiente $b_{n_0} < x_0$. Esto contradice la propiedad a) y por eso, el supuesto x_0 no existe.

Probemos ahora que para todo $\epsilon > 0$ existe tal $x_\epsilon \in E$ que $x_\epsilon > \beta - \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$ fijo. Tomemos n tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$ (ver figura I.9)

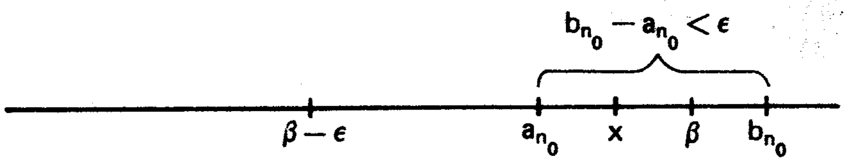


Fig. I.9

Entonces, por la propiedad (b), existe $x \in E$ tal que $x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Por lo tanto, $x \leqslant \beta$. De esta manera $a_{n_0} \leqslant x \leqslant \beta \leqslant b_{n_0}$. De aquí se deduce que $\beta - x \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$ y significa $x > \beta - \epsilon$. Así queda demostrado que $\beta = \sup E$.

Para demostrar la existencia de un ínfimo finito para un conjunto acotado inferiormente no vacío E basta observar que, en este caso, el conjunto E^* de todos los números $-x$, para $x \in E$, está acotado superiormente e $\inf E = -\sup E^*$ (¡ demuéstrelo !). Por tanto, el teorema queda completamente demostrado.

La pregunta natural a hacerse es la siguiente ¿es el supremo (ínfimo) de un conjunto de números reales único? La respuesta a esta pregunta es bastante evidente y se demuestra de manera sencilla:

Supongamos que existe un conjunto E que tiene dos supremos a y a'. Por ser supremos son cotas superiores de E. Como a es supremo y a' es cota superior, por la definición de supremo $a \leqslant a'$. Pero como a' es supremo y a cota superior por la misma definición $a' \leqslant a$. No queda más remedio que concluir $a = a'$.

Observación

El supremo (ínfimo) de un conjunto E acotado superiormente (inferiormente) puede pertenecer o no a E.

Ejemplo

4) En el intervalo $(0, 1]$ el 0 es ínfimo y no pertenece al conjunto, mientras que 1 es supremo y pertenece al conjunto.

DEFINICIÓN 5.4

Si el supremo (ínfimo) de un conjunto existe y pertenece al conjunto, entonces se le llama *máximo (mínimo)* de este conjunto.

Ejemplo

5) En $(0, 1]$ el 1 es un máximo, pero 0 no es mínimo, aunque sí es ínfimo.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Halle el supremo y el ínfimo del conjunto

$$E = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbf{N} \}$$

Diga en cada caso si se trata del máximo o el mínimo del conjunto.

Resolución

El conjunto E puede escribirse de forma extensiva como

$$E = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \}$$

Está claro que E es acotado, tanto superior como inferiormente. Como cota superior sirve el 1 y como cota inferior el 0.

Demostremos que además estos números son el supremo y el ínfimo, respectivamente. En efecto, como $1 \in E$, está claro que para cualquier número menor que 1 que se escoja habrá elementos del conjunto E mayores que ese número (al menos el propio $1 \in E$). En este caso, 1 es, además, el máximo del conjunto.

Note que siempre que una cota superior (inferior) de un conjunto pertenezca a él, ya es automáticamente su supremo y su máximo (ínfimo y mínimo).

Demostremos que $\inf E = 0$. Ya vimos que 0 es una cota inferior del conjunto: veamos que es la mayor. Sea $\epsilon > 0$. Debemos demostrar que existe $x_\epsilon \in E$ tal que $x_\epsilon > \epsilon$. Pero esto se deduce inmediatamente de la propiedad arquimedeana, pues existe un n_ϵ, tal que $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$ Luego, $x_\epsilon = \frac{1}{n_\epsilon} < \frac{1}{\epsilon}$ es el elemento buscado. Finalmente, $0 \not\subset E$, y por tanto, no es mínimo de este conjunto.

2. Dado el conjunto $E = \{ x \in \mathbf{Q} \ / \ |x^2 - 2| \leqslant 1 \}$ determine si está acotado superior e inferiormente, halle el supremo e ínfimo y diga en cada caso si son máximo o mínimo.

Resolución

La desigualdad $|x^2 - 2| \leqslant 1$ es equivalente a

$$1 \leqslant x^2 \leqslant 3$$

la que se cumple si y solo si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

$$|x| \leqslant \sqrt{3} \quad y \quad |x| \geqslant 1$$

es decir, E es el conjunto de los números racionales que satisfacen una de las condiciones

$$1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3} \quad o \quad \sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1$$

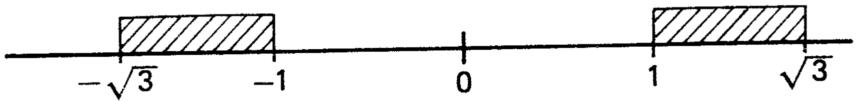


Fig. I.10

Luego, E está acotado y, además, $\sup E = \sqrt{3}$, $\inf E = -\sqrt{3}$. E no tiene máximo ni mínimo, pues $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ no son números racionales.

3. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbf{R}$, tales que para todo $a \in A$ y $b \in B$ se cumple $a \leqslant b$.
   a) Demuestre que: $\sup A \leqslant b$, para todo $b \in B$.
   b) $\sup A \leqslant \inf B$.

Resolución

El conjunto A está acotado superiormente por cualquier elemento $b \in B$.

a) Sea $M = \sup A$. Entonces, debemos probar que $M \leqslant b$, para todo $b \in B$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $b \in B$ tal que $b < M$. Como M es la menor cota superior de A, se cumplirá que existe $a \in A$ tal que $a > b$, lo que contradice la condición impuesta a los conjuntos A y B.

b) El conjunto B está acotado inferiormente por cualquier elemento $a \in A$. Sea $m = \inf B$. Supongamos que $m < M$; entonces, por el inciso a) para todo $b \in B$ se cumple

$$m < M \leqslant b$$

Esto significaría que m no puede ser la mayor de las cotas inferiores de B (pues M sería otra cota inferior mayor) luego $M \leqslant m$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Halle el supremo y el ínfimo de los conjuntos siguientes diciendo en cada caso si son máximos y mínimos:
   a) $E = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N} \}$
   b) $E = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x = \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbf{N} \}$
   c) $E = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ |1 + 3x| \leqslant 1 \}$
   d) $E = \{ x \in \mathbf{Q} \ / \ |x^2 - 3| \geqslant 1 \}$
   e) $E = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ |3x - 5| - |2x + 3| > 0 \}$

2. Sean A y B dos conjuntos de números reales y sea $A + B = \{ z \in \mathbf{R} \ / \ z = a + b, a \in A \ y \ b \in B \}$.
   Demuestre que:
   a) Si A y B están acotados superiormente, también lo está A + B y $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$.
   b) Si al menos uno de los conjuntos A o B no está acotado superiormente, entonces, tampoco A + B está acotado superiormente.

3. Sean A y B dos conjuntos de números reales acotados superiormente (inferiormente). Demuestre:
   a) $A \cup B$ y $A \cap B$ están acotados superiormente (inferiormente).
   b) i) $\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B)$
      $\inf (A \cup B) = \min (\inf A, \inf B)$
      ii) Si $A \cap B \neq \phi$, $\sup (A \cap B) \leqslant \min (\sup A, \sup B)$
      $\inf (A \cap B) \geqslant \max (\inf A, \inf B)$
   c) En el caso (b ii) exponga ejemplos en que las desigualdades sean estrictas.

§ I.6 Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano-Weierstrass

En el Análisis Matemático y también en otras disciplinas de las especialidades de Matemática, Física y Cibernética Matemática es necesario precisar el concepto de "cercanía", es decir, hace falta dejar bien establecido qué entendemos cuando decimos que "a está cerca de b" o que "los números a_n se acercan al punto a". Frases como estas ya las hemos encontrado al estudiar el axioma de continuidad, específicamente, cuando introdujimos el concepto de sistema infinitesimal de intervalos encajados. Por supuesto, si no dejamos bien claro qué significa "acercarse a", es muy posible que para algunos esto quiera decir una cosa y para otros algo muy distinto.

El concepto primario a definir es el de vecindad o entorno de un punto, es decir, todo lo que entendemos cercano a un punto.

DEFINICIÓN 6.1

Tomemos $\epsilon > 0$ y sea x un número real dado. Se llama vecindad o entorno de x de radio ϵ al intervalo abierto $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, el cual se denota también por $V(x;\epsilon)$ o simplemente $V(x)$ cuando la consideración del radio no es indispensable. El punto x se dice centro de la vecindad o entorno (ver fig. I.11).

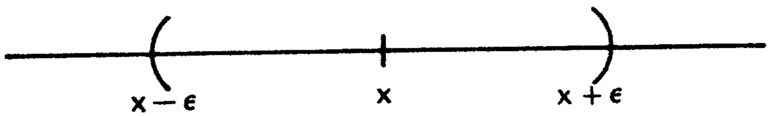


Fig. I.11

Nota: Observe que el valor $\epsilon > 0$ nos indica cuán cerca estamos de x.

DEFINICIÓN 6.2

Se dice que x es un *punto de acumulación* del conjunto S de números reales si toda vecindad V(x) contiene, *al menos, un punto de S distinto de x.*

Observación

De la definición de punto de acumulación no se deduce la pertenencia de tal punto al conjunto, en general, no tiene que pertenecer al conjunto.

Ejemplo

1) El 0 es un punto de acumulación del conjunto $(-1, 1)$ que pertenece a dicho conjunto, mientras que 1 también es punto de acumulación de $(-1, 1)$ aún cuando $1 \notin (-1, 1)$.

El resultado siguiente nos indica más claramente el porqué de la nominación de punto de acumulación para los puntos x que satisfacen la definición 6.2.

TEOREMA 6.3

Si x es un punto de acumulación de S, entonces toda vecindad V(x) contiene una infinidad de puntos de S.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos lo contrario, esto es, que exista una vecindad V(x) que contenga tan sólo un número finito de puntos de S, distintos de x, sean estos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si r es el menor de los números positivos $|x - x_1| = r_1, |x - x_2| = r_2, \ldots$ $|x - x_n| = r_n$, entonces $V_{(x, r/2)}$ será una vecindad de x que no contendrá puntos de S distintos de x, lo cual es una contradicción.

De este teorema se deduce en particular que no puede tener puntos de acumulación un conjunto que no tenga infinitos puntos. El recíproco, sin embargo, no es cierto. El conjunto de los números naturales **N** es un ejemplo de conjunto infinito desprovisto de puntos de acumulación. Pero si un conjunto infinito está *acotado,* entonces tiene necesariamente un punto de acumulación. Este es un resultado muy importante conocido como teorema de Bolzano-Weierstrass en memoria de los dos famosos matemáticos que lo demostraron primeramente.

TEOREMA 6.4 (teorema de Bolzano-Weierstrass)

Si un conjunto *acotado* S en **R** contiene infinitos puntos, entonces existe por lo menos un punto en **R** que es de acumulación de S.

DEMOSTRACIÓN

Como S está acotado lo podemos suponer contenido en el intervalo finito $[a, b]$. Subdividamos $[a, b]$ en dos intervalos iguales. Por lo menos uno de estos intervalos contiene un subconjunto infinito de S. (Si ambos subintervalos contienen un subconjunto infinito de S, se elige uno cualquiera de ellos.)

Designemos tal subintervalo por $[a_1, b_1]$. Análogamente se obtiene un subintervalo $[a_2, b_2]$ que contiene un subconjunto infinito de S y así sucesivamente. De esta manera se obtiene un sistema de intervalos encajados teniendo el n-ésimo intervalo longitud $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, es decir, este es un sistema infinitesimal de intervalos encajados y, por tanto, define un único número x perteneciente a todos ellos. El punto x es de acumulación. En efecto, si ϵ es cualquier número estrictamente positivo ($\epsilon > 0$) y n es lo suficientemente grande para que $b_n - a_n < \frac{\epsilon}{2}$, entonces el intervalo $[a_n, b_n]$ está contenido en $V(x;\epsilon)$. El entorno $V(x;\epsilon)$ contiene un punto de S distinto de x y, por tanto, x es un punto de acumulación de S. Esto prueba el teorema.

Observaciones

1) Note que el punto de acumulación cuya existencia asegura el teorema de Bolzano-Weierstrass puede o no pertenecer al conjunto, además, el conjunto puede tener otros puntos de acumulación.

2) Si sustituimos en el enunciado del teorema de Bolzano-Weierstrass **R** por **Q**, el teorema deja de ser cierto, pues existen conjuntos acotados de números racionales que no tienen ningún número racional como punto de acumulación.

Ejemplos

1) El conjunto $E = \{x \in \mathbf{R} / x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$ tiene a 0 como punto de acumulación (ver ejercicio resuelto 1) y $0 \notin E$, mientras que $E = (0, 1)$ tiene infinitos puntos de acumulación $[0,1]$ y todos, salvo 0 y 1, pertenecen al conjunto.

2) Consideremos el conjunto E de números cuyas cifras decimales, hasta un cierto orden finito, coinciden con las cifras correspondientes al número $\sqrt{2}$. Entonces ningún número racional puede ser punto de acumulación de este conjunto. En efecto, si $\epsilon > 0$ es arbitrario, se puede escoger n suficientemente grande para que $\epsilon > \frac{1}{10^n}$ y por tanto:

$$V(\sqrt{2}\,;\epsilon) \supset V(\sqrt{2}\,; \frac{1}{10^n})$$

Es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, en la vecindad $V(\sqrt{2}\,;\epsilon)$ se encuentran todos los elementos del conjunto E que poseen más de n cifras decimales coincidentes con $\sqrt{2}$. Luego, fuera de $V(\sqrt{2}\,;\epsilon)$ queda solo un número finito de elementos del conjunto E.

Sea $x \in \mathbf{Q}$ y $\epsilon > 0$, tal que $0 < \epsilon < \frac{|\sqrt{2} - x|}{2}$ (figura I.12)

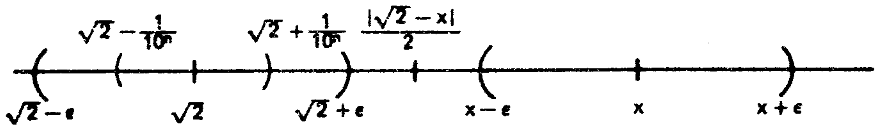


Fig I.12

Entonces, en la vecindad $V(x;\epsilon)$ habrá, a lo sumo, un número finito de elementos del conjunto E y por tanto, x no puede ser punto de acumulación del conjunto E.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Determine los puntos de acumulación del conjunto

$$E = \{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$$

Resolución

Probemos que 0 es punto de acumulación de E. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la propiedad arquimedeana existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Luego, $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ y $\frac{1}{n_0} \in E$.

Por tanto, $\frac{1}{n_0} \in V(0, \epsilon) \cap E$ y $\frac{1}{n_0} \neq 0$. Esto prueba que 0 es punto de acumulación de E.

Probemos que cero es el único punto de acumulación de E.

Sea $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. Entonces la vecindad de x dada por $(x - \frac{|x|}{2}, x + \frac{|x|}{2})$ tiene la propiedad de no contener al cero, luego a lo sumo tendrá un número finito de elementos de E, lo cual permite asegurar que x no es de acumulación de E.

2. Pruebe que todo número real es punto de acumulación de **Q**.

Resolución

Sea $x \in \mathbf{R}$ arbitrario y $\epsilon > 0$. Consideremos la vecindad de x de radio ϵ:

$$V(x;\epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

Como entre dos números reales siempre hay una infinidad de números racionales, en dicha vecindad hay infinitos números racionales y por tanto, x es punto de acumulación de **Q**.

Luego, todo número real es punto de acumulación de **Q**.

3. Demuestre que si x es punto de acumulación de $A \cap B$, entonces, x es punto de acumulación de A y de B.

Resolución

Si x es punto de acumulación de $A \cap B$, entonces para toda vecindad $V(x, \epsilon)$ de x la intersección $V(x, \epsilon) \cap (A \cap B)$ contiene números diferentes de x.

Pero

$$V(x, \epsilon) \cap A \supset V(x, \epsilon) \cap (A \cap B)$$

y

$$V(x, \epsilon) \cap B \supset V(x, \epsilon) \cap (A \cap B)$$

luego, los conjuntos $V(x, \epsilon) \cap A$ y $V(x, \epsilon) \cap B$ contienen números distintos de x y queda demostrado que x es punto de acumulación de A y B.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Determine los puntos de acumulación de los conjuntos:

a) $E = \{x \in \mathbf{R} / x = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$

b) $E = \{x \in \mathbf{R} / x = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbf{N}\}$

c) $E = \{x \in \mathbf{R} / |1 + 3x| \leqslant 1\}$

d) $E = \{x \in \mathbf{Q} / |x^2 + 4x + 3| < 5\}$

e) $E = \{x \in \mathbf{R} / |3x - 5| - |2x + 3| > 0\}$

2. Construya un conjunto que posea exactamente tres puntos de acumulación.

3. Demuestre que si x es punto de acumulación de $A \cup B$, entonces es x punto de acumulación de A o de B.

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. Enuncie la propiedad arquimedeana de los números reales. ¿Cómo se puede interpretar geométricamente esta propiedad?
2. ¿Cuáles son las propiedades fundamentales del conjunto de los números reales que no cumple el conjunto de los números racionales? Demuéstrelo.
3. Defina el concepto módulo de un número real y exprese la propiedad "desigualdad triangular". Demuéstrela.
4. Enuncie el principio de los intervalos encajados y demuéstrelo.
5. ¿Qué diferencia existe entre supremo y máximo de un conjunto? Dé un ejemplo ilustrativo.
6. Enuncie el teorema de la existencia del supremo.
7. ¿A qué se llama punto de acumulación de un conjunto de números reales? ¿Pertenece siempre el punto de acumulación al conjunto? Ilustre su respuesta con los correspondientes ejemplos.
8. ¿Existen conjuntos sin puntos de acumulación? ¿Y conjuntos en los que todos sus puntos sean de acumulación? Ejemplifique.
9. Enuncie el Teorema de Bolzano-Weierstrass y demuéstrelo.
10. Exponga un conjunto de números racionales infinito y acotado sin puntos de acumulación en **Q**.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Demuestre que el sistema de intervalos encajados de la forma

$$[0{,}9;\,1{,}1]\ ;\ [0{,}99;\,1{,}01]\ ;\ [0{,}999;\,1{,}001],\ \dots$$

tiene como único punto común el número 1.

2. Demuestre que el sistema de intervalos encajados de la forma

$$[0{,}3;0{,}4]\ ;\ [0{,}33;0{,}34]\ ;\ [0{,}333;0{,}334],\ \dots$$

tiene como único punto común el número $\frac{1}{3}$.

3. Demuestre que si $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, entonces:

a) $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

b) $|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n| = |x_1|\,|x_2| \dots |x_n|$

c) $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geqslant |x_1| - (|x_2| + \dots + |x_n|)$

d) $\dfrac{|x_1 + \dots + x_n|}{|1 + x_1 + \dots + x_n|} \leqslant \dfrac{|x_1|}{1 + |x_1|} + \dots + \dfrac{|x_n|}{1 + |x_n|}$

$1 + |x_1 + \dots + x_n|$

Analice cuándo se cumple la igualdad en a), c) y d).

4. Analice cuándo se cumplen las igualdades siguientes:

a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$

c) $(x+y)^n = x^n + y^n$

5. Demuestre que si $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, entonces,

$|x \pm y - (x_0 \pm y_0)| < \epsilon$.

6. a) Demuestre que para todo $r \in \mathbf{Q}$ que cumpla $r^2 < 2$, existe $h > 0$ tal que $(r+h)^2 < 2$.

b) Demuestre que para todo $r \in \mathbf{Q}$ con $r^2 > 2$ existe $h > 0$ tal que $(r-h)^2 > 2$.

c) Sea $E = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$ y $F = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 > 2, x > 0\}$ Demuestre que E está acotado y F está acotado inferiormente, sin embargo, E no tiene ínfimo ni supremo en **Q** y F no tiene ínfimo en **Q**. ¿Cuáles serían inf F, inf E, sup E y sup F en **R**?

7. Dados los conjuntos siguientes, determine si están acotados o no, y halle el supremo e ínfimo aclarando en cada caso si son máximo o mínimo o si no lo son:

a) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |5 + \frac{1}{x}| < 1\}$

b) $\{x \in \mathbf{Q} \,/\, |x^2 - 2| \geqslant 1\}$

c) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x - 5| \leqslant |x + 1|\}$

d) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x| > x\}$

e) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x| = x\}$

f) $\{x \in \mathbf{Q} \,/\, |\frac{x}{x+1}| > \frac{x}{x+1}\}$

g) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, \frac{ax+b}{cx+d} < 1\}$

h) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x^2 + 4x + 3| < 5\}$

i) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, \sqrt{x^2 - 3x - 4} < 2\}$

j) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, \sqrt{x^2 - 3x - 4} \leqslant 2\}$

k) $\{x \in \mathbf{Q} \,/\, \sqrt{x^2 + x + 3} \in \mathbf{Q}\}$

l) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |3x - 5| - |2x + 3| > 0\}$

m) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |(x^2 + 2) - (x^4 - 2)| = |x^2 + 2| - |x^4 + 2|\}$

n) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, \big||x + 1| - |x - 1|\big| < 0{,}05\}$

ñ) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, 2^x < 8\}$

o) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x+2| \cdot |x-2| = 0\}$

p) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, |x+2| \cdot |x-2| > 1\}$

q) El conjunto de los números racionales de la forma $0{,}1 \ldots 1$, es decir, que se representa mediante un número finito (arbitrario) de cifras decimales iguales a 1.

r) El conjunto de los números racionales de la forma $1{,}23455 \ldots 5$, donde la parte entera y las tres primeras cifras decimales no varían y el número de cifras iguales a 5 es finito pero arbitrario.

8. Encuentre (si existen) los puntos de acumulación de los conjuntos del ejercicio 7.

9. Encuentre un conjunto de números reales que tenga como puntos de acumulación exactamente los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$.

10. a) Dados los números reales a y b tales que $a < b$, encuentre un conjunto no acotado, numerable, tal que a y b sean sus únicos puntos de acumulación.

b) Encuentre un conjunto numerable cuyo ínfimo sea a. Halle el supremo y los puntos de acumulación.

11. Sea el conjunto de números reales de la forma $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, donde $\alpha_i = 1$ para algún i y $\alpha_j = 0$ para $j \neq i$. Demuestre que este conjunto es numerable. Halle su supremo e ínfimo y diga (si existen) cuáles son sus puntos de acumulación.

12. Sea el conjunto de los números reales de la forma $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ donde α_i tome uno de los valores 0 o 1. Demuestre que este conjunto tiene la misma cantidad de elementos que **R**. Halle su supremo y su ínfimo y diga (si existen) cuáles son sus puntos de acumulación.

13. a) Demuestre que un conjunto que no tenga puntos de acumulación es finito o numerable.

b) Demuestre que si un conjunto tiene un único punto de acumulación es numerable.

c) Demuestre que un conjunto que tenga un número finito de puntos de acumulación es numerable.

d) Analice si un conjunto con un conjunto numerable de puntos de acumulación debe ser necesariamente numerable.

14. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbf{R}$ es cerrado si todos los puntos de acumulación de E pertenecen a E y que es abierto si su complementario en **R** es cerrado.

a) Diga si los conjuntos siguientes son cerrados, abiertos o ninguna de las dos cosas:

i) $[a, b]$, ii) (a, b), iii) $[a, b)$, iv) $\mathbf{Z}$,

v) $\mathbf{Q}$, vi) $\mathbf{R}$, vii) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$,

viii) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = (-1)^n + (-1)^m,\ n, m \in \mathbf{N}\}$,

ix) $\{x \in \mathbf{R} \,/\, \sqrt{x^2 - 3x - 4} < 2\}$

b) Demuestre que si A y B son cerrados (abiertos), entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son cerrados (abiertos).

c) Demuestre que si $A_1, A_2, \ldots A_n$ son cerrados (abiertos), entonces $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ son cerrados (abiertos).

15. Demuestre que todo conjunto E de números reales acotados, infinito y cerrado tiene, al menos, un punto de acumulación que pertenece a E. Mediante ejemplos adecuados ilustre que al omitir alguna de las hipótesis sobre el conjunto E (cumpliéndose las restantes) deja de ser cierta la afirmación.

CAPÍTULO II. SUCESIONES Y SUS LÍMITES

> El (método de exhaución) puede traer a la matemática no poco beneficio; yo supongo que algunos de nuestros contemporáneos o futuros matemáticos podrán con la ayuda de este método encontrar otros teoremas, los cuales a nosotros aûn no se nos han ocurrido
>
> ARQUÍMEDES[1]

Introducción

La consideración del "paso al límite" surge en la antigua Grecia generada por el problema de la búsqueda de una medida exacta y el uso del "método de exhaución" para lograrla. Ejemplos de hábil manipulación de tal método son citados en el libro XII de los *Elementos* de Euclides y en muchas de las obras de Arquímedes. Se utilizaba entonces para el cálculo del área de figuras planas, volúmenes de cuerpos sólidos, longitud de curvas, búsqueda de tangentes, etc. Por ejemplo, si era necesario calcular el área de la figura B (figura II.1) entonces, como primer paso se inscribían en esta figura otras figuras $A_1, A_2, A_3, \ldots$ con las características siguientes:

a) las áreas de las figuras A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ son conocidas,

b) el área de A_{k+1} es mayor que el área de A_k,

c) la diferencia entre las áreas de B y A_k se hace arbitrariamente pequeña a medida que k crece.

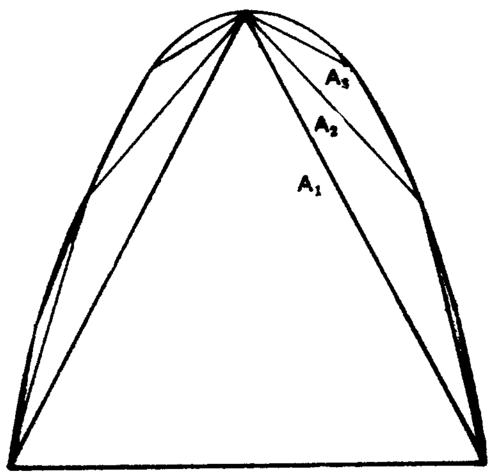


Fig. II.1

[1] ARQUÍMEDES (siglo III a.n.e.): *The Method of Archimedes*. p. 299, Cambridge, 1912.

Como paso siguiente se encontraba el "valor mayor" A que podía tomar el área de la figura inscrita $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$. Esto se hacía sin ningún rigor, a través de razonamientos geométricos o cálculos aritméticos según el caso.

Por último, usando el método de prueba por reducción al absurdo, se suponía que el "valor mayor" A era distinto de B y se llegaba a contradicciones, bien con la estructura inherente a las A_k o bien con relación a las características específicas de B o A.

El método de exhaución fue uno de los métodos más ampliamente difundidos en la matemática antigua. Los "pasos al límite" que con anterioridad se habían realizado en el tratamiento de otros problemas utilizando razonamientos intuitivos y empíricos obtuvieron en el método de exhaución su primera conformación teórica. No obstante, adolecía de insuficiencias como era la necesidad de verificar, en cada caso específico, que la medida de la figura límite era exactamente la medida de la figura dada.

Una forma más evolucionada del método de exhaución se conoce como método de aproximaciones sucesivas y sobre este y sus aplicaciones existe una extensa bibliografía. Se puede pensar que en nuestra época, debido a que la revolución científico-técnica ha obtenido tan altos logros y las mediciones se realizan con precisiones inimaginables con la ayuda de los rayos laser y otros adelantos de la Física y la Metrología, no sean tan útiles los métodos de aproximaciones sucesivas. Hay que decir que el empleo del método de aproximaciones sucesivas se necesitó hace muy poco tiempo, cuando aparecieron las computadoras de acción rápida. Existen modelos de máquinas que son capaces de ejecutar sólo tres operaciones aritméticas: adición, sustracción y multiplicación. Además, por regla general también permiten dividir entre los números del tipo 2^n. ¿Cómo pueden hacer estas máquinas la división entre números cualesquiera?

Dividir el número b por el número a significa resolver la ecuación $ax = b$. Puesto que la máquina puede multiplicar y dividir entre 2^n, se puede considerar que $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$ (de lo contrario multiplicaríamos o dividiríamos los dos miembros de la ecuación $ax = b$ entre la potencia correspondiente del número 2).

Escribamos la ecuación $ax = b$ en la forma

$$x = (1-a)x + b \tag{1}$$

Tomemos por la primera aproximación del número x el valor $x_1 = b$. Designemos con ϵ_1 el error de esta aproximación, es decir, supongamos que $x_1 - \frac{b}{a} = \epsilon_1$. Entonces de la ecuación (1) obtenemos

$$x_1 + \epsilon_1 = (1-a)(x_1 + \epsilon_1) + b = (1-a)\, x_1 + b + (1-a)\,\epsilon_1 \tag{2}$$

Como $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, resulta que:

$$0 < 1 - a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Puesto que el coeficiente $1-a$ es comparativamente pequeño, en el segundo miembro de la ecuación (2) despreciemos el sumando $(1-a)\epsilon_1$, el cual es, por lo menos, dos veces menor que ϵ_1. Obtendremos

$$x_1 + \epsilon_1 \approx (1-a)\,x_1 + b$$

El número

$$x_2 = (1-a)\,x_1 + b$$

lo tomaremos por la siguiente aproximación para x.

Designemos por ϵ_2 el error de la aproximación x_2, es decir, hagamos $x_2 - \frac{b}{a} = \epsilon_2$. En este caso, de la ecuación (1) se infiere que

$$x_2 + \epsilon_2 = (1-a)\,x_2 + b + (1-a)\,\epsilon_2$$

Despreciando en el segundo miembro de esta ecuación el sumando $(1-a)\epsilon_2$, obtendremos la igualdad aproximada

$$x_2 + \epsilon_2 \approx (1-a)\,x_2 + b$$

Así pues, para la aproximación siguiente se puede tomar

$$x_3 = (1-a)\,x_2 + b$$

Utilizando este mismo procedimiento, encontraremos que la aproximación siguiente tiene la forma

$$x_4 = (1-a)\,x_3 + b$$

Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ calculados sucesivamente según la fórmula

$$x_{n+1} = (1-a)\,x_n + b$$

van aproximándose al número $\frac{b}{a}$. Más aún, en esta fórmula sólo se utilizan las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, lo que significa que la máquina puede operar conforme a ella.

Por medio de algoritmos similares basados en el método de las aproximaciones sucesivas se pueden realizar complejas operaciones en las máquinas computadoras. En el epígrafe ∮ II.6 se expone uno de dichos métodos para el cálculo de raíces cuadradas.

El método de aproximaciones sucesivas se emplea en la resolución de los más disímiles problemas, entre ellos, la elaboración de planes de transporte, minimización de costos y maximización de producción y otros relacionados con la rama de las matemáticas aplicadas, conocida por investigación de operaciones; en la resolución de ecuaciones de diversa complejidad y de problemas geométricos; en el cálculo del movimiento de los *sputniks,* de los reactores nucleares y en la exploración de la estructura del átomo.

Por supuesto, estos problemas, ya no tan elementales, como la división entre dos números y el cálculo de la raíz cuadrada necesitan del conocimiento de técnicas que permitan determinar la "convergencia" del proceso, es decir, que nos aseguren que la sucesión de aproximaciones se acercan al valor buscado con una precisión tan "exagérada" como se quiera y con una rapidez "aceptable" según nuestras condiciones.

Estas técnicas las dan la teoría de límites y en particular la teoría de las sucesiones convergentes.

El lector encontrará en este capítulo no sólo el concepto sucesión convergente y sus antípodas, sino además, ejemplos notables de sucesiones, como las monótonas y las recurrentes y sus propiedades fundamentales, pero ante todo, encontrará métodos de razonamiento muy útiles en el tratamiento de procesos continuos a través de su discretización.

∮ II.1 Sucesiones numéricas

Parece que la definición moderna de sucesión se formuló por primera vez en una obra inédita de C. F. Gauss, que data de principios del siglo XIX cuyo título es *Nociones fundamentales de la teoría de las sucesiones.* Gauss comienza dando una definición muy general de sucesión: "un conjunto con un número cualquiera de elementos es una sucesión", lo que parece indicar que para él todo conjunto era numerable. Sin embargo, el propio Gauss considera que esta extensión de la noción de sucesión es de poca utilidad y define entonces este concepto como es hoy usual y como a continuación formulamos.

DEFINICIÓN 1.1

Si a cada número natural n se le hace corresponder un número real x_n por una regla determinada, entonces, al sistema de números reales ordenados

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

lo llamamos sucesión numérica o simplemente *sucesión.* A cada número x_n le llamamos *término* o *elemento* de la sucesión y con él denotamos el *término general* de la sucesión.

Como escritura abreviada para designar la sucesión utilizaremos el símbolo $\{x_n\}$.

Ejemplos

1) La más simple de todas las sucesiones es la constante, es decir, aquella que se obtiene al hacer corresponder a cada número natural n el mismo número real c:

$$c, c, c, \ldots, c, \ldots = \{c\}$$

2) Si a cada número natural impar hacemos corresponder el cero (0) y a cada número natural par le asignamos la unidad (1) se obtiene la sucesión:

$$0, 1, 0, 1, \ldots = \{\frac{1+(-1)^n}{2}\}$$

3) También elemental es la sucesión de todos los números naturales, la cual se obtiene de la forma más "natural":

$$1, 2, 3, \ldots = \{n\}$$

4) Algo más compleja, pero aún simple, es la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots = \{\frac{1}{n}\}$$

5) Y si similarmente, la sucesión con signos alternos

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$$

6) No siempre es evidente cómo escribir la fórmula para el término general, así en la sucesión

$$1, 2, 3, \ldots, 10, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$$

la ley de formación no se obtiene a través de una sola fórmula, sino por dos que expresan su comportamiento más claramente

$$x_n = \begin{cases} n, & n = 1, 2, \ldots, 10 \\ \dfrac{1}{10^{n-10}}, & n = 11, 12, \ldots \end{cases}$$

7) Una clase muy importante de sucesiones la constituyen las llamadas *sucesiones recurrentes:*

Una sucesión $\{x_n\}$ es recurrente si todo término de la sucesión a partir de cierto n se expresa mediante una cierta fórmula en la que intervienen los miembros anteriores de la sucesión. La palabra "recurrente" se emplea aquí precisamente porque para determinar el término posterior hay que recurrir a los anteriores. Veamos algunos ejemplos de sucesiones recurrentes:

a) *Progresión geométrica:* Consideremos la progresión geométrica

$$x_1 = a,\ x_2 = aq,\ x_3 = aq^2, \ldots, x_n = aq^{n-1}, \ldots$$

En este caso la fórmula de recurrencia es:

$$x_n = qx_{n-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

b) *Progresión aritmética:* En el caso de una progresión aritmética

$$x_1 = a,\ x_2 = a + d,\ x_3 = a + 2d, \ldots, x_n = a + (n-1)d, \ldots$$

tenemos: $x_n = x_{n-1} + d \quad (n \geqslant 2)$.

c) *Sucesión de Fibonacci* (ver "Preliminares" § P.2). La famosa solución al antiguo problema de Fibonacci sobre el número de conejos que se pueden criar a partir de una pareja y bajo ciertas condiciones de aislamiento sexual se expresa mediante una sucesión recurrente:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n \geqslant 3)$$

d) No siempre es evidente que una cierta sucesión es recurrente. Sea, por ejemplo, la sucesión de los cuadrados de los números naturales:

$$x_1 = 1^2,\ x_2 = 2^2,\ x_3 = 3^2, \ldots, x_n = n^2, \ldots$$

Aquí $x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ y, por lo tanto, $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$.
Aumentando n en uno, obtenemos $x_{n+2} = x_{n+1} + 2n + 3$.
Por consiguiente, encontramos:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1}.$$

o sea:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2$$

De ahí que la sucesión se defina por:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4$$
$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2 \quad (n \geqslant 3)$$

Note que en las sucesiones recurrentes se expresan numéricamente "algunos" primeros elementos y después se da la fórmula de recurrencia con la cual obtenemos el término general por medio de "algunos" anteriores. Por supuesto los "algunos" primeros elementos están determinados por los "algunos" necesarios para poder obtener a través de la fórmula de recurrencia uno y cada uno de los restantes elementos. Así, en la sucesión de Fibonacci son necesarios x_1 y x_2 fijos para poder determinar por la fórmula a x_3 y sucesivamente a los demás miembros de la sucesión.

8. Por último, señalemos que no siempre es posible expresar explícitamente la ley de formación de una sucesión. Por ejemplo, los números primos

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

constituyen una sucesión, pero no se conoce ninguna fórmula matemática que defina el n-ésimo número primo. Para dar una idea algo más sugestiva sobre la distribución *aparentemente* caótica de los números primos observemos que nos encontramos con primos "gemelos" tales como 8 004 119 y 8 004 121 cuya diferencia es dos, y también primos "lejanos" tales como 86 629 y 86 677, entre los cuales no hay ningún otro número primo.

Observación

El conjunto de todos los términos de una sucesión $\{x_n\}$ constituye un conjunto numérico, pero no debe confundirse el concepto de sucesión con este conjunto. Por ejemplo, la sucesión constante está constituida por un sistema de infinitos términos iguales entre sí y el conjunto numérico correspondiente consta de un solo elemento. Por eso, la nomenclatura de "término" es más correcta que la de "elemento" pues esta última está relacionada con el concepto de conjunto y se aplica a los objetos que pertenecen al conjunto.

Consideremos dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, podemos operar algebraicamente con ellas a partir de las definiciones siguientes.

DEFINICIONES 1.2

Llamamos sucesión *suma* de las dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ a la sucesión $\{x_n + y_n\} = x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots$; sucesión *diferencia* a la sucesión $\{x_n - y_n\}$ y sucesión *producto* a la sucesión $\{x_n y_n\}$.

Para definir la sucesión *cociente* $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ es necesario exigir que y_n sea distinto de cero para todo $n \in N$. Observemos, sin embargo, que si la sucesión $\{y_n\}$ tiene solo un número finito de ceros, entonces el cociente $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ se puede definir a partir del término en que después de él todos los términos de la sucesión son distintos de cero.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Conociendo los primeros términos dé una sucesión, escriba una de las posibles expresiones para su término general

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots$$

Resolución

Observemos que el numerador de todos los términos dados de la sucesión es igual al cuadrado del número de orden correspondiente más la unidad, o sea, $n^2 + 1$

Los denominadores forman una progresión artimética 3, 8, 13, 18. . . que tiene como primer miembro $a_1 = 3$ y como diferencia $d = 5$. Por consiguiente

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n - 2$$

Por tanto

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{5n - 2}$$

Observación

El conocimiento de los primeros términos de una sucesión no determina la sucesión. Por eso el tipo de problema como el ejercicio antes resuelto debe considerarse como un problema de búsqueda de una cierta ley de formación que se adapte a los términos dados.

2. Dadas las dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ cuyos términos generales vienen dados por las fórmulas

$$x_n = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}), \text{ si n es impar} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, \text{ si n es par} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} \frac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{2^{\frac{n}{2}}}, \text{ si n es impar} \\ \frac{2^{\frac{n}{2}} + 1}{2^{\frac{n}{2}}} \end{cases}$$

halle las sucesiones suma, diferencia, producto y cociente $\{\frac{x_n}{y_n}\}$.

Resolución

$$\text{a) } x_n \pm y_n = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}) \pm (\frac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{2^{\frac{n}{2}}}), \text{ si n es impar} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \pm (\frac{2^{\frac{n}{2}} + 1}{2^{\frac{n}{2}}}), \text{ si n es par} \end{cases}$$

O sea:

$$x_n \pm y_n = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}) \pm (1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}), \text{ si n es impar} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \pm (1 + \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}), \text{ si n es par} \end{cases}$$

Por tanto:

$$x_n + y_n = \begin{cases} 2 - \dfrac{2}{2^{\frac{n}{2}}} = 2 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}, & \text{si n es impar} \\ 1 + \dfrac{2}{2^{\frac{n}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}, & \text{si n es par} \end{cases}$$

$$x_n - y_n = \begin{cases} 0 , & \text{si n es impar} \\ -1 , & \text{si n es par} \end{cases}$$

b) Hallemos la sucesión producto

$$x_n y_n = \begin{cases} (1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}) \ (\dfrac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{2^{\frac{n}{2}}}), & \text{si n es impar} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left(\dfrac{2^{\frac{n}{2}} + 1}{2^{\frac{n}{2}}} \right), & \text{si n es par} \end{cases}$$

$$x_n y_n = \begin{cases} (1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}})(1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}) & , \text{si n es impar} \\ \dfrac{2^{\frac{n}{2}} + 1}{2^n} & , \text{si n es par} \end{cases}$$

$$x_n y_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} + \dfrac{1}{2^n} & , \text{si n es impar} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}} + \dfrac{1}{2^n} & , \text{si n es par} \end{cases}$$

c) Encontremos, por último, el término general de la sucesión cociente (nótese que $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$).

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}}{\dfrac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{2^{\frac{n}{2}}}} & , \text{si n es impar} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} + 1} & , \text{si n es par} \end{cases}$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 1 & , \text{si n es impar} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} + 1} & , \text{si n es par} \end{cases}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Encuentre una de las posibles expresiones para el término general de las sucesiones siguientes:

   a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

   b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$

   c) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$

   d) $1, 2, 6, 2, 4, 12, 6, 8, 24, \ldots$

2. Halle los cinco primeros términos de las sucesiones recurrentes siguientes:

   a) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ x_n = x_{n-1}^2 + (-1)^{n-1}, \ n \geqslant 2$

   b) $x_1 = 1, \ x_2 = 4, \ x_3 = 9,$

   $$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n$$

3. Pruebe que la sucesión de los cubos de los números naturales $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3, \ldots$ es una sucesión recurrente.

4. Sean las dos sucesiones cuyos términos generales vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si n es par} \\ 0 , & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Halle las sucesiones suma, diferencia y producto.

¿Está definida la sucesión cociente $\{\frac{x_n}{y_n}\}$?, ¿y la sucesión cociente $\{\frac{y_n}{x_n}\}$?

Exprese por una fórmula el término general de la sucesión cociente que existe.

§ II.2 Sucesiones acotadas, no acotadas, infinitesimales e infinitamente grandes

El conjunto de todos los elementos de una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ constituye un conjunto numérico y para él son válidos los conceptos relativos a acotación introducidos en § I.4.

DEFINICIONES 2.1

Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ está *acotada* superiormente (inferiormente) si existe un número real M (un número real m) tal que cada término de esta sucesión x_n satisface la desigualdad

$$x_n \leqslant M \quad (x_n \geqslant m) \tag{1}$$

Al número M (m) se le llama *cota superior (inferior)* de la sucesión $\{x_n\}$.

Ejemplo

1) La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ está acotada superiormente por todo número mayor que 1 e inferiormente por todo número negativo.

DEFINICIÓN 2.2

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente, es decir, si existen dos números reales M y m tales que cada elemento x_n de esta sucesión satisface las desigualdades

$$m \leqslant x_n \leqslant M \tag{2}$$

Análogamente al caso de los conjuntos numéricos acotados, la condición de acotación (2) se puede escribir en la forma equivalente siguiente: la sucesión $\{x_n\}$ está acotada si y solo si existe un número real A, tal que cada elemento de la sucesión x_n satisface la desigualdad: $|x_n| \leqslant A$ (3)

Ejemplo

2) La sucesión $\{(-1)^{\frac{n}{n}}\}$ está acotada pues si tomamos $A \geqslant 1$ entonces

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant A.$$

En correspondencia con la definición 2 de sucesión acotada podemos expresar el concepto de sucesión no-acotada:

Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es no-acotada si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada, es decir: si para cada número positivo A se encuentra, al menos, un término de la sucesión, x_{n_0}, que satisface la desigualdad

$$|x_{n_0}| > A \tag{4}$$

Desde el punto de vista de esta definición toda sucesión acotada sólo superior o inferiormente es no-acotada.

Ejemplo

3) La sucesión $1, 2, 1, 4, \ldots, 1, 2n, \ldots$ está acotada inferiormente pero no está acotada superiormente, por tanto, es no acotada: para cualquiera sea el número real positivo A se encuentra un elemento de esta sucesión correspondiente a un número par y satisfaciendo la desigualdad (4).

Introduzcamos ahora los conceptos de sucesión infinitamente grande y de sucesión infinitesimal.

DEFINICIÓN 2.3

Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ es *infinitamente grande* si para cada número real positivo A, se encuentra un número real N, tal que para todo $n \geqslant N$ los elementos x_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|x_n| > A \tag{5}$$

Nota: Que una propiedad P referente a una sucesión se cumple a partir de un determinado valor de n, es decir, para $n \geqslant N$, se expresa equivalentemente de cualquiera de las formas siguientes:

- P se cumple *para n suficientemente grande.*
- P se cumple *para casi todo n* o *para casi todo término de la sucesión.*
- P se cumple para la sucesión, *salvo un número finito de términos.*

Así, por ejemplo, en la definición 2.3 la desigualdad (5) se cumple para casi todo n.

Es evidente que cada sucesión infinitamente grande es no-acotada pues la definición de sucesión infinitamente grande exige que para todo $A > 0$ la desigualdad (5) la cumplan casi todos los términos de la sucesión, mientras que la definición de sucesión no-acotada exige que para todo $A > 0$ la desigualdad (5) la cumpla, al menos, un término de la sucesión.

Ejemplo

4) La sucesión $\{n\}$ es un ejemplo trivial de sucesión infinitamente grande como consecuencia directa de la propiedad arquimedeana de los números reales.

Sin embargo, no toda sucesión no-acotada es infinitamente grande.

Ejemplo

5) La sucesión del ejemplo 3:

$$1, 2, 1, 4, \ldots, 1, 2n, \ldots,$$

siendo no-acotada no es infinitamente grande, pues para cualquier $A > 1$ la desigualdad (5) no se cumple para los términos x_n correspondientes a los números impares $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$

El siguiente tipo de sucesiones es muy importante. Las representaremos por letras griegas para diferenciarlas.

DEFINICIÓN 2.4

Se dice que una sucesión $\{\alpha_n\}$ es *infinitesimal* si para cada número real estrictamente positivo $\epsilon > 0$ se encuentra un número natural N_ϵ, tal que para $n \geqslant N_\epsilon$ los términos α_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|\alpha_n| < \epsilon \tag{6}$$

Ejemplo

6) La sucesión formada por las longitudes de los intervalos en un sistema infinitesimal de intervalos cerrados encajados constituye una sucesión infinitesimal y de ahí, la denominación empleada para tales sistemas. Así, sabemos que las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{\frac{1}{10^n}\}$ son infinitesimales, ambas aparecieron en el epígrafe § I.3 al probar que **Q** no poseía la propiedad de continuidad.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Pruebe que la sucesión $\{a^n\}$ es infinitamente grande cuando $|a| > 1$ e infinitesimal si $|a| < 1$.

Resolución

Consideremos primeramente el caso $a > 1$. Entonces $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Utilizando la desigualdad de Bernoulli podemos escribir

$$a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha > n\alpha$$

Sea ahora $A > 0$ un número real cualquiera. Por la propiedad arquimedeana existe N tal que

$$N\alpha > A$$

Pero si $n \geqslant N$, entonces $n\alpha > A$ y se cumplirá

$$a^n > n\alpha > A, \text{ para } n \geqslant N$$

con lo que se demuestra que $\{a^n\}$ es infinitamente grande.

Si $a < -1$, entonces teniendo en cuenta que $|a| > 1$ y $|a^n| = |a|^n$ se concluye, por lo demostrado anteriormente, que la sucesión $\{a^n\}$ es infinitamente grande.

Consideremos ahora $|a| < 1$, entonces $\frac{1}{|a|} > 1$ y por tanto, la sucesión

$\{(\frac{1}{a})^n\}$ es infinitamente grande. Sea $\epsilon > 0$ un número real arbitrario; entonces podemos encontrar $N \in \mathbf{N}$, tal que

$$\left|(\frac{1}{a})^n\right| > \frac{1}{\epsilon}, \text{ cuando } n \geqslant N$$

Utilizando las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades, la relación anterior es equivalente a

$$|a^n| < \epsilon, \text{ cuando } n \geqslant N$$

lo que demuestra que la sucesión $\{a^n\}$ es infinitesimal si $|a| < 1$ (¿Qué ocurre si $|a| = 1$?)

2. Pruebe que:

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

es no-acotada, y sin embargo, no es infinitamente grande.

Resolución

Veamos algunos primeros términos de la sucesión para inducir la idea de la demostración.

$$x_1 = 1^{(-1)^1} = 1^{-1} = 1,$$

$$x_2 = 2^{(-1)^2} = 2^1 = 2,$$

$$x_3 = 3^{(-1)^3} = 3^{-1} = \frac{1}{3},$$

$$x_4 = 4^{(-1)^4} = 4^1 = 4,$$

etc, . . .

Observemos que los miembros impares se comportan como la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, mientras que los pares lo hacen como la sucesión $\{n\}$. Luego la prueba de no-acotación debe basarse en el comportamiento de los miembros pares y la de no infinitamente grande en el comportamiento de los miembros impares. Así, $\{x_n\}$ es no-acotada, pues, para cada $A > 0$, por la propiedad arquimedeana, se encuentra un n_0, $n_0 = 2k_0$ donde k_0 es cierto número natural, tal que

$$|x_{2k_0}| > A$$

Por otra parte, $\{x_n\}$ no es infinitamente grande ya que, si tomamos $A > 1$ la desigualdad

$$|x_n| > A$$

no se cumple para $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. En cada uno de los siguientes casos diga si se trata de una sucesión infinitamente grande, infinitesimal, acotada o no-acotada y pruebe su afirmación

   a) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

   b) $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$ $(p > 0)$

   c) $\{(-1)^n(2n+1)\}$

   d) $\{n^2 - 100n\}$

   e) $x_n = \begin{cases} n & , n \leqslant 100 \\ \dfrac{100}{n} & , n > 100 \end{cases}$

   f) $x_n = \begin{cases} k, & \text{si } n = 2^k \\ 0, & \text{si } n \neq 2^k \end{cases}$

   g) $x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{1}{2^{x_{n-1}}}, & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$

2. Para cada una de las sucesiones infinitesimales siguientes:

   a) $x_n = \dfrac{1}{n!}$ b) $x_n = (-1)^n (0{,}999)^n$

   forme la tabla siguiente referente a la definición 2.4:

ϵ	0,1	0,01	0,0001	. . .
N				

§ II.3 Propiedades fundamentales de las sucesiones infinitesimales

Consideremos algunas de las propiedades de las sucesiones infinitesimales.

TEOREMA 3.1

La suma algebraica de dos sucesiones infinitesimales es una sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ dos sucesiones infinitesimales. Demostremos que las sucesiones $\{\alpha_n + \beta_n\}$ y $\{\alpha_n - \beta_n\}$ son también infinitesimales. Fijemos un número real estrictamente positivo ϵ. Como la sucesión $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal, entonces, para el número $\frac{\epsilon}{2} > 0$ se encuentra un natural N_1 tal que para $n \geqslant N_1$ se cumple

$$|\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Análogamente, como la sucesión $\{\beta_n\}$ es infinitesimal, entonces para $n \geqslant N_2$ se cumple

$$|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $N = \max\ \{N_1, N_2\}$. Entonces, si $n \geqslant N$ se cumplen las dos desigualdades anteriores y, por tanto,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

siempre que n sea mayor o igual que N. Esto significa que $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es una sucesión infinitesimal.

COROLARIO

La suma algebraica de un número finito arbitrario de sucesiones infinitesimales representa una sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN

Basta aplicar el principio de inducción matemática y el teorema 3.1; se propone como ejercicio.

TEOREMA 3.2

El producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Por definición de sucesión acotada existe un número real $A > 0$ tal que para todos los términos x_n se cumple

$$|x_n| \leqslant A$$

Fijemos $\epsilon > 0$. Puesto que $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal para el número real positivo $\frac{\epsilon}{A}$ existe un natural N tal que

$$|\alpha_n| < \frac{\epsilon}{A}, \text{ si } n \geqslant N$$

Recordando que el módulo del producto es igual al producto de los módulos y utilizando las dos desigualdades anteriores obtenemos para todo $n \geqslant N$:

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \frac{\epsilon}{A} = \epsilon,$$

lo cual significa que la sucesión $\{x_n \alpha_n\}$ es infinitesimal.

TEOREMA 3.3

Toda sucesión infinitesimal está acotada.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal. Fijemos $\epsilon = 1$. Por definición de sucesión infinitesimal, para este ϵ se encuentra un número natural N_1 tal que $|\alpha_n| < 1$ si $n \geqslant N_1$, es decir, salvo los $N_1 - 1$ primeros términos, los restantes están acotados por 1. Basta entonces tomar

$$A = \text{máx } \{1, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N_1 - 1}|\}$$

para acotar todos los términos de la sucesión $\{\alpha_n\}$. O sea, $|\alpha_n| \leqslant A$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

COROLARIO

El producto de un número finito de sucesiones infinitesimales es una sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN

Se deduce por el principio de inducción matemática directamente de los teoremas 3.2 y 3.3. Dejamos al lector la formulación detallada de la demostración.

TEOREMA 3.4

Si casi todos los términos de una sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ son iguales a un mismo número c, entonces $c = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos $c \neq 0$. Tomemos $\epsilon = \frac{|c|}{2}$. Para dicho ϵ se encuentra un número N tal que:

$$|\alpha_n| < \epsilon = \frac{|c|}{2} \quad (\text{si } n \geqslant N)$$

y a la vez $\alpha_n = c$ (¿Por qué?)

Se ha llegado a un absurdo, puesto que no puede ocurrir:

$$|c| < \frac{|c|}{2}$$

Por consiguiente la suposición $c \neq 0$ es falsa y la propiedad queda probada.

TEOREMA 3.5

Si $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande, entonces, a partir de cierto n está definida la sucesión $\{\frac{1}{x_n}\}$, la cual es una sucesión infinitesimal. Si todos los términos de la sucesión $\{\alpha_n\}$ infinitesimal son distintos de cero, entonces la sucesión $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ es infinitamente grande.

DEMOSTRACIÓN

Comencemos demostrando la primera parte del teorema. Observemos que $\{x_n\}$, siendo infinitamente grande, sólo puede tener un número finito de términos diferentes de cero. En efecto, por definición de sucesión infinitamente grande para $A = 1$ se encuentra un número N_1 tal que $|x_n| > A = 1$ para todo $n \geqslant N_1$, o sea que si $n \geqslant N_1$ entonces $x_n \neq 0$ y podemos considerar el cociente $\frac{1}{x_n}$. Probemos que la sucesión $\{\frac{1}{x_n}\}$ es infinitesimal. Fijemos $\epsilon > 0$.

Por definición de sucesión infinitamente grande para $\frac{1}{\epsilon} > 0$ se encuentra un N_2 tal que $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$ para $n \geqslant N_2$. Tomando $N = \text{máx } (N_1, N_2)$ entonces para $n \geqslant N$ se cumple:

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \epsilon$$

lo cual significa que $\{\frac{1}{x_n}\}$ es una sucesión infinitesimal.

Para la demostración de la segunda parte del teorema supongamos que todos los elementos de la sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ son diferentes de cero. Fijemos un número positivo A.

Como $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal, entonces, para el número estrictamente positivo $\frac{1}{A}$ se encuentra un número N tal que

$$|\alpha_n| < \frac{1}{A} \quad \text{para } n \geqslant N$$

o sea,

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > A \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Esto significa que la sucesión $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ es infinitamente grande.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Investigue si la sucesión $\{\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\}$ es infinitesimal.

Resolución

En los Preliminares § P.2 probamos que la suma de los primeros n números naturales viene dada por la fórmula siguiente:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Luego el término general de la sucesión será:

$$x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

La sucesión $\{\frac{1}{2n}\}$ es infinitesimal por ser el producto de la sucesión acotada $\{\frac{1}{2}\}$ por la sucesión infinitesimal $\{\frac{1}{n}\}$.

Pero, la sucesión suma $\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\}$ no es infinitesimal, pues si $\epsilon = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbf{N}$: $|x_n| > \frac{1}{2}$.

De este modo, queda demostrado que la sucesión $\{x_n\}$ no es infinitesimal.

2. Si $\{a_n\}$ es infinitesimal y $\{b_n\}$ es infinitamente grande, pruebe que $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ es infinitesimal.

Resolución

La sucesión $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ es el producto de la sucesión $\{a_n\}$ infinitesimal por la sucesión $\{\frac{1}{b_n}\}$, la cual está bien definida para n suficientemente grande y es infinitesimal (por el teorema 3.5), al ser cada uno de sus términos el inverso de los términos correspondientes de una sucesión infinitamente grande. Dado que el producto de dos sucesiones infinitesimales es infinitesimal, entonces, obtenemos que $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ es infinitesimal.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Investigue si las sucesiones siguientes son infinitesimales. Justifique su respúesta.

   a) $\{\frac{1+(-1)^n}{n}\}$

   b) $\{a^n[\frac{(-1)^{n+1}}{n}]\}$ donde $0 < a < 1$

   c) $\{\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\}$

2. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones tales que $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{5}{2}$, para $n = 1, 2, \ldots$ Pruebe que:

   a) Si $\{b_n\}$ es infinitesimal, entonces $\{a_n\}$ también es infinitesimal.

   b) Si $\{a_n\}$ es infinitamente grande, entonces $\{b_n\}$ es también infinitamente grande.

3. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y sea el conjunto $A = \{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$.

   a) ¿Es acotado el conjunto A? Justifique su respuesta.

   b) Pruebe que:

      (i) Si $\sup A \neq 0$, entonces $\sup A \in A$.

      (ii) Si $\inf A \neq 0$, entonces $\inf A \in A$.

§ II.4 Concepto sucesión convergente

Introduzcamos ahora el concepto fundamental sucesión convergente.

DEFINICIÓN 4.1

La sucesión $\{x_n\}$ es *convergente* si existe un número real l tal que la sucesión $\{x_n - l\}$ sea infinitesimal. Al número real l se le llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$.

Observación

Según la definición 4.1 toda sucesión infinitesimal es convergente y tiene como límite $l = 0$.

Ejemplo

1) La sucesión constante es el ejemplo más trivial de sucesión convergente, pues de $c - c = 0$ se deduce que $\{c\}$ es convergente al límite c.

Notación: Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y tiene como límite al número l, simbólicamente escribimos:

$$\lim x_n = l \quad \text{o} \quad x_n \to l$$

Si es necesaria la aclaración se especifica $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ o $x_n \underset{n\to\infty}{\to} l$. Utilizando la definición de sucesión infinitesimal llegamos a otra forma de la definición de sucesión convergente equivalente a la definición 4.1.

DEFINICIÓN 4.1'

La sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número real l tal que para cualquiera sea el número real estrictamente positivo ϵ se encuentra un número natural N_ϵ tal que si $n \geqslant N_\epsilon$, entonces los términos x_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|x_n - l| < \epsilon$$

o sea, $l - \epsilon < x_n < l + \epsilon$.

La desigualdad de la definición 4.1' se interpreta geométricamente por el hecho de que todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ para n suficientemente grande, pertenecen a una ϵ-vecindad del punto l, es decir

$$x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon), \quad \text{para } n \geqslant N_\epsilon \text{ (figura II.2)}$$

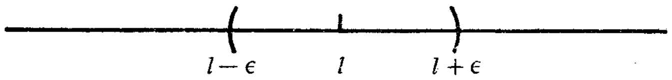


Fig. II.2

Esta idea geométrica motiva la definición siguiente, equivalente a las anteriores 4.1 y 4.1'

DEFINICION 4.1"

La sucesión $\{x_n\}$ es *convergente* si existe un número real l, tal que en cualquier ϵ-vecindad ($\epsilon > 0$) del punto l se encuentran casi todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$.

Observaciones a los conceptos sucesión convergente y límite

1) El concepto límite de una sucesión está íntimamente relacionado en determinado sentido con el problema práctico de encontrar el valor de una magnitud con una exactitud prefijada de antemano $\epsilon > 0$. La sucesión de los valores de las mediciones $\{x_n\}$ puede obtenerse como resultado de experimentos o en el cálculo de alguna fórmula recurrente o por cualquier otro método. Este problema tiene solución si es posible encontrar un n, tal que a partir de él los valores x_n de las mediciones o cálculos se acercan a un valor determinado (el límite de la sucesión de mediciones con una precisión menor que ϵ).

2. Si analizando la convergencia de una sucesión determinada $\{x_n\}$ encontramos N_ϵ para un valor particular de ϵ, esto no significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge; en la definición 4.2 se exige que el correspondiente número N_ϵ se puede hallar *cualquiera sea* $\epsilon > 0$.

3. De la definición de sucesión convergente se deduce que si eliminamos un número finito de términos de la sucesión cualesquiera sean, esto no influye sobre la convergencia de la sucesión ni sobre el valor de límite.

4. Según la definición 4.1 la sucesión $\{x_n\}$ converge al número l si la diferencia $x_n - l = \alpha_n$ es el término general de una sucesión infinitesimal. Por consiguiente, la sucesión convergente $\{x_n\}$ se puede representar en la forma $x_n = l + \alpha_n$ donde α_n es una sucesión infinitesimal. Esta condición se utiliza frecuentemente en la determinación de los límites de sucesiones y en el estudio de las propiedades de las sucesiones convergentes.

DEFINICIÓN 4.2

Si una sucesión $\{x_n\}$ no es convergente, se dice que es *divergente*.

PROPIEDAD 4.3

Toda sucesión infinitamente grande es divergente.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{x_n\}$ infinitamente grande y supongamos que el número real l es límite de esta sucesión. Entonces dado $\epsilon > 0$ por definición 4.1' existe un N_ϵ, tal que si $n \geqslant N_\epsilon$, entonces,

$$l - \epsilon < x_n < l + \epsilon \tag{1}$$

Tomando $A = \text{máx}\,(|l - \epsilon|, |l + \epsilon|)$, obtenemos de (1) que $|x_n| < A$ si $n \geqslant N_\epsilon$, lo cual contradice el hecho de que $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande.

Notación: Si $\{x_n\}$ es infinitamente grande, entonces, *simbólicamente* se escribe

$$\lim x_n = \infty$$

Si, además, a partir de cierto índice n los términos de la sucesión $\{x_n\}$ tienen signo positivo (negativo) entonces se utiliza la simbología siguiente:

$$\lim x_n = +\infty \quad (\lim x_n = -\infty)$$

Observación

Existen, por supuesto, otras sucesiones divergentes que no son infinitamente grandes, así, por ejemplo, la sucesión: $0, 1, 0, 1, \ldots$ no converge a ningún número l, pues fuera de cualquier ϵ-vecindad de ese número l, $0 < \epsilon < 1$, hay infinitos términos de la sucesión y según la definición 4.1″ esto impide a l ser límite de esa sucesión, la cual, por otra parte, no es infinitamente grande.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que $\lim x_n = 1$ si $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Resolución

Debe probarse que para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N_ϵ tal que si $n \geqslant N$ se cumple que $|x_n - 1| < \epsilon$.

Para ello investiguemos el comportamiento de la cantidad $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\frac{2n-1-2n-1}{2n+1}\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1}$$

Así, se tiene que la desigualdad $|x_n - 1| < \epsilon$ se satisface si se cumple que $\dfrac{2}{2n+1} < \epsilon$ y esta relación es válida si $n > \dfrac{1}{\epsilon} - \dfrac{1}{2}$. Es decir, la sucesión x_n tendrá límite 1 si es posible garantizar la existencia de un número natural N_ϵ que cumpla la definición. Y, en efecto, tomando N_ϵ como el número natural más próximo al valor $\dfrac{1}{\epsilon} - \dfrac{1}{2}$ y mayor que éste, se obtendrá lo deseado pues anteriormente encontramos que si $n > \dfrac{1}{\epsilon} - \dfrac{1}{2}$ se cumple que $|x_n - 1| < \epsilon$. Resulta importante aclarar que la selección de N_ϵ en la forma mencionada es posible gracias a la propiedad arquimediana conocida del capítulo anterior. (¿Por qué?)

2. Sea la progresión geométrica $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ $(|q| < 1)$ y consideremos la sucesión cuyo término general es:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \quad (|q| < 1)$$

Pruebe que $\lim s_n = \dfrac{a}{1-q}$.

Resolución

Como se sabe, la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica dada será:

$$S_n = \frac{1-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n$$

Es decir, que el término general S_n difiere del número $\dfrac{a}{1-q}$ en la cantidad $\alpha_n = -\dfrac{a}{1-q}q^n$.

Basta probar que α_n es el término general de una sucesión infinitesimal. Pero esto es consecuencia de la hipótesis $|q| < 1$ y el hecho de que entonces $\{q^n\}$ es infinitesimal (ver ejercicio resuelto 1 en el párrafo § II.2).

Así, $\lim s_n = \dfrac{a}{1-q}$ como se quería probar. Este número $S = \lim s_n$, se puede interpretar como la suma de un número infinito de términos de la progresión dada que podemos escribir como sigue:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q}$$

En el próximo capítulo trataremos la teoría general de las sumas infinitas.

3. Sean a y b dos números cualesquiera. Tomemos $x_0 = a$, $x_1 = b$ y $x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$ para $n \geqslant 2$. Calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}$.

Resolución

Restando x_{n-1} en ambos miembros de la fórmula de recurrencia para x_n se obtiene:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \quad (n \geqslant 2)$$

De esta manera la sucesión de las diferencias $x_1 - x_0 = b - a$, $x_2 - x_1, \ldots, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - x_{n-1}, \ldots$ cumple que cada término se obtiene del anterior multiplicando por $-\dfrac{1}{2}$, es decir, estamos en presencia de una progresión geométrica de razón $q = -\dfrac{1}{2}$.

Como la suma de los primeros n términos es $x_n - a$ (esto se puede comprobar con un simple cálculo) utilizando la fórmula obtenida en el ejercicio anterior para la suma de una progresión geométrica, se obtiene

$$\lim (x_n - a) = \frac{b-a}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(b-a)$$

de donde

$$\lim x_n = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}$$

quedando así calculado el límite de la sucesión recurrente $\{x_n\}$.

4. Demuestre que $l = \frac{3}{2}$ no es límite de la sucesión cuyo término general es $x_n = \frac{2n^2-3}{n^2-2}$.

Debe probarse que este valor de l no cumple la condición de la definición de límite. Es decir, que existe algún $\epsilon > 0$, tal que para cualquier N que se escoja ocurrirá que $|x_n - l| \geqslant \epsilon$, para algún $n \geqslant N$.

Observe la expresión $\left|\frac{2n^2-3}{n^2-2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2(n^2-2)}\right|$

Es fácil comprobar que para todo n, dicha cantidad es siempre mayor o igual que $\frac{1}{2}$, o sea, que tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ para cualquier n se cumple que $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| \geqslant \epsilon$, quedando así probado que $l = \frac{3}{2}$ no es el límite de la sucesión dada. (Realmente, $\lim x_n = 2$, lo cual el lector puede demostrar como ejercicio).

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuestre que las sucesiones siguientes convergen a los valores indicados en cada caso:

a) $x_n = \frac{3n-5}{9n+4}$; $l = \frac{1}{3}$

b) $x_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$; $l = \frac{3}{5}$

c) $x_n = a^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$; $l = 1$

Sugerencia: Escriba $y_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ y demuestre que $y_n \to 0$ utilizando la fórmula del binomio de Newton.

2. ¿Cuáles de estas sucesiones poseen límite y cuáles no?

Justifique su respuesta.

a) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{, si n es par} \\ \frac{1}{n} & \text{, si n es impar} \end{cases}$

b) $x_n = \frac{1}{2\pi} + \sqrt[3]{n}$

c) $x_n = n\,[1-(-1)^n]$

3. Exprese las simbologías $\lim x_n = +\infty$ y $\lim x_n = -\infty$ en la forma de la definición 4.1′.

§ II.5 Propiedades de las sucesiones convergentes

Las propiedades siguientes que estudiaremos son fundamentales y resultan como consecuencia de la definición de sucesión convergente.

TEOREMA 5.1 (propiedad de unicidad del límite)

El límite de una sucesión convergente es único.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que los números reales l_1 y l_2 son límites de la sucesión convergente $\{x_n\}$. Entonces, por la definición 4.1 se cumple

$$x_n = l_1 + \alpha_n,$$

y

$$x_n = l_2 + \beta_n$$

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitesimales. Restando las dos igualdades anteriores obtenemos

$$\alpha_n - \beta_n = l_2 - l_1$$

Por el teorema 3.1 la sucesión $\{\alpha_n - \beta_n\}$ es infinitesimal y de 3.4 se obtiene que $l_2 - l_1 = 0$, es decir,

$$l_2 = l_1$$

con lo que la unicidad del límite queda demostrada.

Observación

Esta propiedad de carácter teórico nos permite adquirir la certidumbre de que cualquiera sea el método que usemos para calcular un límite, siempre que trabajemos correctamente, el resultado debe ser el mismo.

TEOREMA 5.2 (Acotación de las sucesiones convergentes)

Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente, entonces está acotada, es decir, existe un número positivo $A > 0$, tal que $|x_n| \leqslant A$ para todo $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN

Como la sucesión $\{x_n\}$ es convergente cada uno de sus elementos puede expresarse por

$$x_n = l + \alpha_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donde $\{\alpha_n\}$ es infinitesimal. Según el teorema 3.3 toda sucesión infinitesimal es acotada, es decir, para cierto $M > 0$ se cumple

$$|\alpha_n| \leqslant M\,, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Por la propiedad de desigualdad triangular del módulo se cumple

$$|x_n| = |l + \alpha_n| \leqslant |l| + |\alpha_n| \leqslant |l| + M$$

y haciendo $A = |l| + M$ obtenemos la cota buscada.

Observación

El recíproco de la propiedad 5.2 no es válido como lo muestra el ejemplo de la sucesión

$$0,1,0,1,\ldots$$

la cual, según sabemos, no converge a pesar de estar acotada.

Las propiedades siguientes son análogas a las propiedades aritméticas de las sucesiones infinitesimales demostradas en el epígrafe § II.3.

TEOREMA 5.3 (Propiedades aritméticas de las sucesiones convergentes)

Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones convergentes. Entonces se cumple las propiedades siguientes:

i. $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$

ii. $\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$

iii. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, si $\lim y_n \neq 0$

Observaciones

1) En (iii) observe que no se exige $v_n \neq 0$ puesto que la condición $\lim y_n \neq 0$ implica que todos los términos, salvo un número finito de ellos, son distintos de cero, como será demostrado, y las operaciones con límite no se alteran si se elimina un número finito de términos.
2) En las propiedades queda implícito que si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ convergen, entonces son convergentes también las sucesiones suma, diferencia , producto y cociente (con la condición señalada) y además se cumplen las igualdades (i) – (iii). Nótese además que los límites de las sucesiones a la izquierda de (i) – (iii) pueden existir y, sin embargo, no ser convergentes las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$; por ejemplo,

$$x_n = y_n = (-1)^n\,,\; x_n - y_n = 0,\; \frac{x_n}{y_n} = 1$$

DEMOSTRACIÓN

La validez de esta propiedad aritmética de las sucesiones convergentes es consecuencia del hecho de que $x_n = l_1 + \alpha_n$, $y_n = l_2 + \beta_n$ para todo n donde l_1 y l_2 son los límites de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ respectivamente y $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitesimales, y las propiedades de las sucesiones infinitesimales del epígrafe § II.3. La prueba de (i) es inmediata basándose en lo dicho anteriormente.

Probemos (ii): Hagamos primero el producto de las dos sucesiones: $x_n y_n = l_1 l_2 + l_1 \beta_n + l_2 \alpha_n + \alpha_n \beta_n$, o sea, $x_n y_n - l_1 l_2 = l_1 \beta_n + l_2 \alpha_n + \alpha_n \beta_n$.

Resta probar que en el miembro de la derecha tenemos una sucesión infinitesimal pero esto es consecuencia inmediata de las propiedades 3.2 ($l_1 \beta_n$ y $l_2 \alpha_n$ son infinitesimales) el corolario de la propiedad 3.3 ($\alpha_n \beta_n$ es infinitesimal) y el corolario de la propiedad 3.1 (la suma de las tres sucesiones infinitesimales $\{l_1 \beta_n\}$ y $\{l_2 \alpha_n\}$ $\{\alpha_n \beta_n\}$ es infinitesimal).

Probemos finalmente (iii). Para simplificación, supongamos $l_2 > 0$. Entonces:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + \alpha_n}{l_2 + \beta_n} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{l_2(l_2 + \beta_n)}\,(\alpha_n l_2 - \beta_n l_1)$$

Como $y_n \longrightarrow l_2$ entonces $y_n > \dfrac{l_2}{2} > 0$ para n suficientemente grande. En efecto por la definición 4.1 si fijamos $\epsilon = \dfrac{l_2}{2}$ encontramos N_0 tal que para $n \geqslant N_0$ se cumple

$$y_n > l_2 - \epsilon = l_2 - \frac{l_2}{2} = \frac{l_2}{2}$$

(aquí se usa que hemos supuesto $l_2 > 0$). Luego para $n \geqslant N_0$ tenemos:

$$0 < \frac{1}{l_2\,(l_2 + \beta_n)} = \frac{1}{l_2\, y_n} < \frac{2}{l_2^2}$$

De donde se deduce que la sucesión $\dfrac{1}{l_2\,(l_2 + \beta_n)}$ es acotada (¿por qué?).

Por las propiedades de las sucesiones infinitesimales de § II.3 se tiene que $\{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1\}$ es infinitesimal y que, por tanto, $\left\{\dfrac{1}{l_2\,(l_2 + \beta_n)}\,(\alpha_n l_2 - \beta_n l_1)\right\}$ es infinitesimal. Por consiguiente $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$

Análogamente se prueba el caso en que $l_2 < 0$.

En el caso de sucesiones infinitamente grandes las propiedades aritméticas no son válidas. Veamos en general algunos ejemplos:

1) Si $x_n = n+1, y_n = n$, entonces
$\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n y_n = +\infty$ y $\lim\limits_n (x_n - y_n) = 1$
Si $x_n = 2n, y_n = n$, entonces $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$
y $\lim (x_n - y_n) = +\infty$

Si $x_n = n + (-1)^{n+1}$, $y_n = n$, entonces, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$
y $(x_n - y_n) = (-1)^n$ que no tiene límite. Estos ejemplos muestran que la diferencia de dos sucesiones infinitamente grandes puede ser convergente, infinitamente grande o divergente acotada. En este caso decimos que el límite $\lim (x_n - y_n)$ presenta una *indeterminación del tipo* $\infty - \infty$.

2) Si $x_n = n$, $y_n = n^2$, entonces

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ y $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

Si $x_n = n^2, y_n = n$, entonces

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ y $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim n = +\infty$

Si $x_n = an\ (a > 0)$, $y_n = n$, entonces

$\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ y $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim a = a$.

Análogamente al caso 1), el límite del cociente de sucesiones infinitamente grandes puede ser nulo, finito no nulo o infinitamente grande. En este caso, decimos que $\lim \dfrac{x_n}{y_n}$ presenta una *indeterminación* del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3) Si $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = n$, entonces

$\lim x_n = 0$, $\lim y_n = +\infty$ y $\lim x_n y_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Si $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = n$, entonces $\lim x_n = 0$,

$\lim y_n = +\infty$ y $\lim x_n y_n = \lim 1 = 1$

Si $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = n^2$, entonces $\lim x_n = 0$,

$\lim y_n = +\infty$ y $\lim x_n y_n = \lim n = +\infty$

Observemos que el producto de una sucesión infinitesimal por una infinitamente grande puede tener límite cero, finito no nulo o ser infinitamente grande. En este caso, decimos que $\lim x_n y_n$ presenta *una indeterminación del tipo* $0 \cdot \infty$.

4) Si $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, entonces $\lim x_n = \lim y_n = 0$

y $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

Si $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, entonces $\lim x_n = \lim y_n = 0$

y $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim n = +\infty$

Si $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = (\dfrac{-1}{n})^n$, entonces $\lim x_n = \lim y_n = 0$ y $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$

que no tiene límite.

Podemos concluir, que el cociente de sucesiones infinitesimales puede ser una sucesión infinitesimal, infinitamente grande o no tener límite ni finito ni infinito.

Este caso, presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

En las diferentes expresiones indeterminadas no podemos a priori saber cuál es el límite y es necesario transformar dicha expresión (lo cual en ocasiones no es simple) hasta obtener otra a la cual puedan aplicarse las propiedades aritméticas del límite. Sin embargo, el lector no debe pensar que todas las expresiones donde aparezcan sucesiones infinitamente grandes presentan indeterminaciones. Conocemos, por ejemplo, el caso del recíproco de una sucesión infinitamente grande que es siempre una infinitesimal (teorema 3.5), además le proponemos verifique las afirmaciones siguientes:

1) Si $x_n \longrightarrow +\infty$ y $y_n \longrightarrow a$ (a finito o $+\infty$), entonces $(x_n + y_n) \longrightarrow +\infty$.

2) Si $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow a$ (a finito o infinito, $a \neq 0$), entonces
$(x_n y_n) \longrightarrow \infty$ (el signo depende del signo de x_n y y_n).

3) Si $x_n \longrightarrow \infty$ y $y_n \longrightarrow 0$, $y_n \neq 0$ entonces

$\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \infty$ y $\dfrac{y_n}{x_n} \longrightarrow 0$ (el signo del infinito depende del signo de x_n y y_n).

En la práctica, al investigar la convergencia de una sucesión o, al pretender hallar su límite, sucede que si nos limitamos solamente al uso de la definición o a las propiedades aritméticas el trabajo se hace engorroso. En ocasiones, esto se facilita si se logra compararcon otra sucesión cuyo comportamiento es conocido.

TEOREMA 5.4 (Paso al límite en igualdades)

Si dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son tales que $x_n = y_n$ para casi todo n y si $\{x_n\}$ tiene límite, entonces $\{y_n\}$ es convergente y sus límites son iguales.

DEMOSTRACIÓN

Esto es una consecuencia inmediata de la definición de sucesión convergente y el teorema 5.1 de la unicidad del límite.

TEOREMA 5.5

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge al número a y $a > p$ $(a < q)$, entonces todos los términos, salvo un número finito, son también mayores que p (menores que q).

DEMOSTRACIÓN

Seleccionemos un número positivo $\epsilon < a - p$ $(q - a)$ y tendremos $a - \epsilon > p$ $(a + \epsilon < q)$. Pero, por la definición del límite de una sucesión, para este ϵ existe un N_ϵ, tal que siendo $n \geqslant N_\epsilon$ tendremos

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon\,;$$

para estos valores de n se cumple

$$x_n > p \qquad (x_n < q)$$

y el teorema queda demostrado.

Esta simple propiedad tiene dos corolarios importantes.

COROLARIO 1

Si la sucesión $\{x_n\}$ tiende a un límite $a > 0$ $(a < 0)$, entonces, $x_n > 0$ $(x_n < 0)$ para n suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN

Basta considerar el teorema 5.5 en el caso $p = 0$ $(q = 0)$

COROLARIO 2

Si a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ y para casi todo n:

$$x_n \leqslant p \quad (x_n \geqslant q)$$

entonces también

$$a \leqslant p \quad (a \geqslant q)$$

DEMOSTRACIÓN

Basta asumir lo contrario, es decir, $a > p$ $(a < q)$ y aplicar el teorema 5.5 para llegar a un absurdo.

El corolario 2 puede generalizarse de la siguiente forma:

TEOREMA 5.6

Si para las dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ se cumple:

$$x_n \geqslant y_n \quad \text{para casi todo n}$$

y $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$,
entonces, $a \geqslant b$

DEMOSTRACIÓN

La sucesión $z_n = x_n - y_n$ cumple las hipótesis del corolario 2, con $q = 0$. De las propiedades aritméticas del límite se deduce lo que se quería demostrar.

Observaciones

1) Por supuesto, en el teorema 5.6 se puede reemplazar la desigualdad $x_n \geqslant y_n$ por $x_n \leqslant y_n$ para casi todo n, y así obtener, en lugar de $a \geqslant b$, la relación $b \geqslant a$.
2) Préstese atención al hecho de que, en general, $x_n > y_n$ no implica que $\lim x_n > \lim y_n$ sino solo que $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Así, por ejemplo, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ para todo n y en cambio

$$\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

Uno de los resultados más útiles para calcular límites es el teorema siguiente, el cual es conocido entre los estudiantes sugestivamente como la "propiedad del emparedado".

PROPIEDAD 5.7

Si las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son tales que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para casi todo n y además, $\lim x_n = \lim z_n = a$,
entonces, la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim y_n = a$.

DEMOSTRACIÓN

Tomemos un $\epsilon > 0$ arbitrario. Para este ϵ existe un N' tal que

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \quad \text{para } n \geqslant N'$$

y existe también un N'' tal que

$$a - \epsilon < z_n < a + \epsilon \quad \text{para } n \geqslant N''$$

Tomando $N = \text{máx}\,(N', N'')$, se tiene que para $n \geqslant N$ se satisfacen ambas desigualdades y por tanto

$$a - \epsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \epsilon$$

O sea, para $n > N$

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$$

de donde $\lim y_n = a$.

Observación

En particular esta propiedad implica que si para todo n

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

y se sabe que $z_n \to a$, entonces, también $y_n \to a$.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice el límite de un polinomio p(n) con coeficientes constantes

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k,\ a_0 \neq 0$$

Resolución

Si todos los coeficientes son positivos (negativos), entonces queda claro que el límite de p(n) será $+\infty$ $(-\infty)$. Pero, en el caso de coeficientes de distinto signo, unos términos tienden a $+\infty$ y otros a $-\infty$ y se obtiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolver este problema escribamos

$$p(n) = n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}\right)$$

Como todos los términos del paréntesis a partir del segundo, son infinitesimales, la expresión que aparece entre paréntesis tiende a a_0. Como el primer factor tiende a $+\infty$, el polinomio tenderá a $+\infty$ o $-\infty$ según sea el signo de a_0.

2. Analice el límite de la fracción racional $\frac{p(n)}{q(n)}$ donde

$$q(n) = b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_{l-1} n + b_l,\ b_0 \neq 0$$

Resolución

Es claro que cuando n crece, $\frac{p(n)}{q(n)}$ presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Escribamos la fracción de la manera siguiente:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_l}{n^l}}$$

El segundo factor tiende a $\frac{a_0}{b_0}$. Esto se ve claramente haciendo el mismo razonamiento del ejemplo anterior.

Si los grados son iguales, es decir, si $k = l$, entonces, $\frac{p(n)}{q(n)}$ tendrá como límite al valor $\frac{a_0}{b_0}$.

Si $k > l$ el primer factor tiende a $+\infty$ y la fracción tenderá a $+\infty$ o $-\infty$ según sea el signo de $\frac{a_0}{b_0}$. Por último, si $k < l$ el primer término, y con él toda la expresión, tiende a cero.

De esta manera queda totalmente analizado el problema del límite de una fracción racional $\frac{p(n)}{q(n)}$ cuando n crece indefinidamente.

Resumiendo

Supuestos $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, entonces

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_l} \xrightarrow[n\to\infty]{} l = \begin{cases} 0, & \text{si } k < l \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si } k = l \\ sg(\frac{a_0}{b_0}) \cdot \infty, & \text{si } k > l \end{cases}$$

3. Calcule:

a) $\lim \frac{5n+1}{7n+5}$; b) $\lim \frac{5n+1}{7n^2+5}$; c) $\lim \frac{5n^2+1}{7n+5}$

Resolución

Aplicando el ejemplo 2 obtenemos:

a) $\lim \frac{5n+1}{7n+5} = \frac{5}{7}$, pues $k = l = 1$

b) $\lim \frac{5n+1}{7n^2+5} = 0$, pues $1 = k < l = 2$

c) $\lim \frac{5n^2+1}{7n+5} = +\infty$, pues $2 = k > l = 1$ y $sg(\frac{5}{7}) = +1$

4. Calcule $\lim \frac{(-3)^n + 2^{n+1}}{(-2)^{n-1} + (-1)^n}$

Resolución

Para calcular un límite de este tipo, el primer paso a seguir es el de llevar todos los términos a un exponente común, es decir,

$$\frac{(-3)^n + 2^n \cdot 2}{(-2)^n \cdot 2^{-1} + (-1)^n}$$

A continuación se toma el término cuya base tiene módulo mayor y se divide el numerador y el denominador (¡ambos!) por dicha cantidad. En este caso, es necesario dividir por la expresión $(-3)^n$.

$$\lim \frac{(-3)^n + 2^n \cdot 2}{(-2)^n \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n} = \lim \frac{\frac{(-3)^n}{(-3)^n} + \frac{(2^n)}{(-3)^n} \cdot 2}{\frac{(-2)^n}{(-3)^n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{(-3)^n}} = \lim \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n \cdot 2}{(\frac{2}{3})^n \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^n}$$

Pero $(-\frac{2}{3})^n$ es una sucesión infinitesimal, así como lo son $(\frac{2}{3})^n$ y $(\frac{1}{3})^n$, luego estamos en presencia de un cociente entre una sucesión que es acotada y una sucesión infinitesimal. Por tanto, dado que el numerador y el denominador a partir de cierto n son ambos positivos, concluimos que la sucesión diverge a $+\infty$.

5. Demuestre que si $\lim a_n = +\infty$, entonces

$$\lim \sqrt{a_n} = +\infty$$

Resolución

Como $\lim a_n = +\infty$ se sabe que para todo $A > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ se cumple que $|a_n| > A$.

Por otra parte, para casi todo n, los términos de la sucesión van a ser positivos y podemos eliminar el módulo. Así $a_n > A$ para casi todo n.

Se debe demostrar que para todo $A' > 0$ existe N' tal que si $n \geq N'$, entonces, $|\sqrt{a_n}| > A'$.

En primer lugar se debe aclarar que por la consideración anterior acerca del signo de a_n, tiene sentido la expresión $\sqrt{a_n}$. Además, como dicha raíz es positiva nuestro problema puede plantearse sin el módulo, es decir, en términos de encontrar N' tal que $\sqrt{a_n} > A'$ a partir de N'.

Ahora bien, fijemos $A' > 0$ y sea $A = A'^2$. Como $a_n > A$, extrayendo raíz en ambos miembros se obtiene $\sqrt{a_n} > \sqrt{A} = A'$ para N' el N correspondiente al número A, y queda así probado lo deseado.

Veamos una aplicación de esta propiedad al cálculo de límites.

Calculemos $\lim (\sqrt{3n-5} - \sqrt{3n+5})$.

Aplicando la propiedad anterior podemos comprobar que se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para eliminarla multiplicaremos y dividiremos por la expresión *conjugada* de la anterior:

$$\sqrt{3n-5} + \sqrt{3n+5}$$

Así,

$$\lim \frac{(\sqrt{3n-5} - \sqrt{3n+5})(\sqrt{3n-5} + \sqrt{3n+5})}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{3n+5}} =$$

$$\lim \frac{3n-5-(3n+5)}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{3n+5}} = \lim \frac{-10}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{3n+5}}$$

Aplicando de nuevo la propiedad antes enunciada se obtiene que el denominador tiende a $+\infty$ y en virtud del teorema 3.5 del presente capítulo el cociente es un infinitesimal. De manera que

$$\lim (\sqrt{3n-5} - \sqrt{3n+5}) = 0$$

6. Demuestre que si $\lim a_n = l > 0$, entonces

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}.$$

Resolución

En este caso, debemos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe N_ϵ tal que si $n \geq N_\epsilon$ entonces $|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| < \epsilon$;

En primer lugar debe aclararse que en virtud del teorema 5.5 tiene sentido $\sqrt{a_n}$ para casi todo n. Consideremos la expresión $|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}|$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| = \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{l})(\sqrt{a_n} + \sqrt{l})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \right| = \left| \frac{a_n - l}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \right|$$

Como $\lim a_n = l$, fijado $\epsilon' > 0$, se cumple que para casi todo n $|a_n - l| < \epsilon'$, es decir, que casi todos los a_n estarán tan próximos como se quiera a l. De manera que para casi todo n, $a_n > \frac{l}{2}$, de donde,

$$\left| \frac{a_n - l}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \right| < \left| \frac{a_n - l}{\sqrt{\frac{l}{2}} + \sqrt{l}} \right| < \epsilon, \text{ si } \epsilon' = \epsilon\left(\sqrt{\frac{l}{2}} + \sqrt{l}\right)$$

Con lo que queda demostrada la propiedad.

Veamos una aplicación de esta propiedad al cálculo de límites.

Calculemos $\lim 5n(\sqrt{4n^2-3} - 2n)$

La indeterminación del tipo $\infty - \infty$ que aparece se elimina multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de $(\sqrt{4n^2-3} - 2n)$. Es decir,

$$\lim 5n(\sqrt{4n^2-3} - 2n) = \lim \frac{5n(\sqrt{4n^2-3} - 2n)(\sqrt{4n^2-3} + 2n)}{\sqrt{4n^2-3} + 2n} =$$

$$= \lim \frac{5n(4n^2-3-4n^2)}{\sqrt{4n^2-3} + 2n} = \lim \frac{-15n}{\sqrt{4n^2-3} + 2n}$$

Al llegar a esta expresión se ha eliminado la indeterminación del tipo $\infty - \infty$, sin embargo, aparece la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverla dividiremos el numerador y el denominador por n. En efecto,

$$\lim \frac{-15n}{\sqrt{4n^2-3}+2n} = \lim \frac{\frac{-15n}{n}}{\frac{\sqrt{4n^2-3}+2n}{n}}$$

$$= \lim \frac{-15}{\sqrt{\frac{4n^2-3}{n^2}}+2} = \lim \frac{-15}{\sqrt{4-\frac{3}{n^2}}+2}$$

En virtud de la propiedad demostrada en este ejemplo se deduce que $\lim \sqrt{4-\frac{3}{n^2}} = 2$, de modo que

$$\therefore \lim 5n(\sqrt{4n^2-3}-2n) = \frac{-15}{2+2} = -\frac{15}{4}$$

Las afirmaciones demostradas respecto al límite de la raíz cuadrada de una sucesión pueden ser generalizadas para cualquier raíz de orden k, k = 2, 3, . . . utilizando en lugar de la expresión $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ la expresión

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

7. Pruebe que $\lim\limits_{n} y_n = 1$, si $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Resolución

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ obtenemos que

$$y_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ veces}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

Sea $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Se tiene, entonces, que $x_n \leqslant y_n$

$$\lim x_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

Por otra parte

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{para todo } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Por tanto, $y_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Definimos, entonces, $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; y, $y_n \leqslant z_n$. Además

$$\lim z_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Así, hemos encontrado dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ tales que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ y $\lim x_n = \lim z_n = 1$; luego se obtiene, aplicando el teorema 5.7, que $\lim y_n = 1$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Calcule los límites siguientes

a) $\lim \frac{3n^2+1}{5n^2+1}$

b) $\lim \frac{1\,000\,n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$

c) $\lim \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}\right)$

d) $\lim \frac{3^n+1}{3^n}$

e) $\lim \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

f) $\lim (\sqrt{9n^4+5} - 3n^2)$

g) $\lim (\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2+5})$

h) $\lim 2n(\sqrt{n^2+1} - n)$

i) $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

j) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$

k) $\lim \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

2. Demuestre que si $\lim a_n = 0$ y $a_n \geqslant 0$, entonces, $\lim \sqrt[k]{a_n} = 0$.

3. Demuestre que si $x_n \leqslant y_n$ para $n \geqslant N$ y $\lim x_n = +\infty$ $(\lim y_n = -\infty)$, entonces $\lim y_n = +\infty$ $(\lim x_n = -\infty)$,

4. Demuestre que si $\lim a_n = l$, entonces $\lim |a_n| = |l|$.
Demuestre con un ejemplo que el recíproco es falso.

5. Si $\lim a_n = l$, ¿qué puede decirse del límite?

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$, m números reales positivos. Designemos por $A = \max\ \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Demuestre que

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = A$$

7. Halle $\lim \left(\dfrac{1}{n^n+1} + \dfrac{1}{n^n+2} + \dfrac{1}{n^n+3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n+n}\right)$

§ II.6 Sucesiones monótonas. El número e

En el epígrafe anterior encontramos un criterio para la existencia de límite comparando con otras sucesiones cuyos límites son conocidos. En lo que sigue nos preocuparemos por hallar criterios que sólo necesiten del análisis del término general de la sucesión dada.

DEFINICIÓN 6.1

Diremos que la sucesión $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, es *monótona creciente (monótona decreciente)* si para cada $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desiguaidad $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n-1})$. A las sucesiones que son monótonas crecientes o que son monótonas decrecientes se les llama simplemente *monótonas.*

Ejemplos

1) La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es monótona decreciente y la sucesión $\{n\}$ es monótona creciente, mientras que la sucesión $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ no es monótona.

Veamos en relación con las sucesiones algunos conceptos que estudiamos en el primer capítulo.

DEFINICIÓN 6.2

El número a es *el supremo (ínfimo)* de la sucesión $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ si es el supremo (ínfimo) del conjunto de sus elementos, es decir,

1) para todo $n = 1, 2 \ldots$ se cumple $a_n \leqslant a$ $(a_n \geqslant a)$,
2) para cada $\epsilon > 0$ existe un N_ϵ, tal que

$$a_{N_\epsilon} > a - \epsilon \ (a_{N_\epsilon} < a + \epsilon)$$

Ejemplos

2) En calidad de ejemplos observemos que

$$\sup \{\frac{1}{n}\} = 1,\ \inf \{\frac{1}{n}\} = 0$$

$$\sup \{n\} = +\infty, \inf \{n\} = 1$$

TEOREMA 6.3 (Sobre la convergencia de sucesiones monótonas)

Cada sucesión $\{x_n\}$ acotada superiormente (inferiormente) y monótona creciente (monótona decreciente) es convergente y se tiene

$$\lim x_n = \sup \{x_n\} (\lim x_n = \inf \{x_n\})$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{x_n\}$ monótona creciente y acotada superiormente. Por ser acotada superiormente existe el supremo $\sup \{x_n\} = a$. Probemos que $\lim x_n = a$. Fijemos $\epsilon > 0$. Del hecho que $a = \sup \{x_n\}$ se sigue que para todo $n \in \mathbf{N}$, se cumple $x_n \leqslant a$ y que existe un número N_ϵ tal que $x_{N_\epsilon} > a - \epsilon$. Luego, por la monotonía de la sucesión, para todo número $n \geqslant N_\epsilon$ se tiene

$$a - \epsilon < x_n \leqslant a$$

Por tanto, para todo $n \geqslant N_\epsilon$ se cumple $|a - x_n| < \epsilon$, lo cual significa que $a = \lim x_n$. Análogamente se demuestra el caso de la sucesión monótona decreciente. El teorema queda demostrado.

Observación

Hemos probado anteriormente que si una sucesión converge, entonces está acotada, de donde en particular se deduce que si una sucesión monótona creciente converge, entonces está acotada superiormente; por otra parte, si una sucesión monótona creciente está acotada superiormente, entonces, es convergente.

De esta forma se cumple el corolario siguiente:

COROLARIO

Para que una sucesión monótona creciente (decreciente) sea convergente, es necesario y suficiente que esté acotada superiormente (respectivamente acotada inferiormente).

Ejemplo

3) Si $[a_n, b_n]$ es un sistema infinitesimal de intervalos encajados y ξ el punto que pertenece a todos los intervalos del sistema, entonces

$$\xi = \lim a_n = \lim b_n$$

En efecto, en el primer capítulo se demostró que

$$\xi = \sup \{a_n\} = \inf \{b_n\}$$

y por otra parte, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son monótona creciente y monótona decreciente respectivamente.

Una aplicación interesante y útil de este ejemplo es la propiedad siguiente.

PROPIEDAD 6.4

Todo número real puede expresarse como el límite de una sucesión de números racionales.

DEMOSTRACIÓN

Sea el número $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}$ entonces la sucesión constante de términos iguales a α sirve para probar la propiedad. Si $\alpha \notin \mathbf{Q}$, entonces, se sabe (Capítulo I § I.3) que α puede escribirse como una expresión decimal con infinitas cifras: $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$, o sea, α es el único punto común a la sucesión de intervalos encajados.

$$[\alpha_0; \alpha_0 + 1], [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}] \ , [\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2; \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{10^2}] \ .$$

y las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \text{ y } b_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

constituida por los extremos de los intervalos del encaje cumplen

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha$$

y tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ están constituidos por fracciones decimales finitas que como es también conocido del Capítulo I § I.3 representan números racionales.

Ejemplo

4) Analicemos una sucesión que es ampliamente utilizada en la práctica para el cálculo de la raíz cuadrada de un número real a través de máquinas computadoras. Esta sucesión se define por la fórmula de recurrencia siguiente:

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \ , \ a > 0 \qquad (1)$$

Digamos, como dato curioso, que este método de extracción de raíces cuadradas se utilizaba ya en la Babilonia antigua muchos siglos antes de nuestra era y que después fue abandonado por engorroso hasta la aparición de las máquinas computadoras..

Demostremos que $\lim x_n = \sqrt{a}$; para ello probemos que $\{x_n\}$ está acotada inferiormente y que a partir del segundo término es decreciente. Es evidente que $x_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Mejoremos la acotación probando que $x_n \geqslant \sqrt{a}$ para $n \geqslant 2$, o sea,

$$\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geqslant \sqrt{a} \text{ para } n \geqslant 1.$$

Como $x_n > 0$, entonces, la desigualdad anterior es equivalente a la desigualdad:

$$x_n^2 - 2x_n \sqrt{a} + a \geqslant 0$$

y esta desigualdad es evidente, pues

$$x_n^2 - 2x_n \sqrt{a} + a = (x_n - \sqrt{a})^2 \geqslant 0$$

Por tanto, la desigualdad $x_n \geqslant \sqrt{a}$ es válida para todo $n \geqslant 2$.

Probemos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente.
En efecto,

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

y como $x_n > 0$ y $x_n^2 \geqslant a$ para $n = 2, 3, \ldots$

entonces $x_n \geqslant x_{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$

Así, $\sqrt{a} \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_2$

es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente, luego por el teorema 6.1 es convergente.

Sea $x = \lim x_n$. Nos resta determinar este límite. Considerando que $x_n \geqslant \sqrt{a}$ para $n \geqslant 2$ obtenemos (por el corolario 2 de la propiedad 5.5) que $x \geqslant \sqrt{a} > 0$. Tomando en cuenta que $x > 0$ pasemos al límite para $n \to \infty$ en la relación de recurrencia (1). Se obtiene la siguiente igualdad:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Esta igualdad representa una ecuación que determina el límite x. La única raíz positiva de esta ecuación es $x = \sqrt{a}$ y de ahí, que $\lim x_n = \sqrt{a}$.

Ejemplo

5) Sean dos números reales a y b $(a > b)$. Consideremos su media aritmética y su media geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}\quad,\quad b_1 = \sqrt{ab}$$

La media aritmética es mayor que la media geométrica, como se deduce de la desigualdad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} > 0\ (a \neq b)$$

y ambas se encuentran entre los dos números dados:

$$a > a_1 > b_1 > b$$

Para los números a_1 y b_1 consideremos de nuevo ambas medias:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}\quad,\quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

además,

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1$$

Así, definimos por recurrencia las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$a > a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > b \quad (n \in N)$$

claro que $\{a_n\}$ es decreciente y acotada, mientras que $\{b_n\}$ es creciente y acotada, y por consiguiente ambas son convergentes:

$$\alpha = \lim a_n \quad y \quad \beta = \lim b_n$$

Si en la igualdad

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

pasamos al límite, entonces obtenemos

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

de donde $\alpha = \beta$.

De forma tal que las dos sucesiones, tanto la de las medias aritméticas $\{a_n\}$ como la de las medias geométricas $\{b_n\}$, convergen al mismo límite $\mu = \mu(a, b)$; siguiendo a Gauss, a este número se le llama la media aritmético-geométrica de los números a y b. Expresar el número $\mu(a, b)$ mediante a y b en una fórmula analítica no es tarea fácil y la forma más simple conocida se realiza con la utilización de las llamadas integrales elípticas. (¡En este aparente "misterio" bajo el cual las cosas más simples promueven el conjuro de sofisticadas técnicas para su cabal comprensión, reside una de las más bellas características de la Matemática!)

Como último ejemplo utilizaremos las propiedades estudiadas del paso al límite, para introducir un nuevo número irracional muy importante, tanto para el Análisis Matemático como para sus aplicaciones.

Ejemplo

6) El número e.

Sea $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Probemos que esta sucesión converge. Aplicando la fórmula del binomio de Newton, obtenemos

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \tag{1}$$

Todos los sumandos son positivos y al pasar de n a n + 1 su número aumenta.

Además, cada sumando crece; en efecto,

$$1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1}\ ,\ \text{para } s=1,2,\ldots,n-1,$$

entonces, $x_n < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Observando en (1) que cada paréntesis de la forma $(1-\frac{s}{n})$ es menor que la unidad y que

$$\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\quad \text{para } n=1,2,3,\ldots\ (\text{¡demuéstrelo!})$$

se obtiene:

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Puesto que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$, como suma de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$,

será, $2 < x_n < 3$.

De esta forma, la sucesión x_n crece monótamente y está acotada superiormente, por tanto, tiene límite. Este límite se denota por la letra e, y por las propiedades del límite se tendrá:

$$2\leqslant e\leqslant 3$$

Un cálculo más exacto (por ejemplo en una máquina computadora) permite encontrar una mejor aproximación, así:

$$e\approx 2{,}718281828459045$$

Se demuestra que el número e es irracional y, además, trascendente, esto es, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

El número e desempeña una función muy importante en el análisis. Particularmente, constituye la base de los logaritmos neperianos o naturales que utilizaremos en el Capítulo IV.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Dada la sucesión cuyo término general es

$$x_n=\frac{10^n}{n!}$$

pruebe que es decreciente para $n \geqslant 10$.

Resolución

$$x_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n}{n!}\cdot\frac{10}{n+1}=x_n\cdot\frac{10}{n+1}$$

Como $\frac{10}{n+1}<1$ para $n\geqslant 10$, entonces desde este índice:

$x_{n+1} < x_n$ y esto significa que la sucesión es monótona decreciente para $n \geqslant 10$.

2. Demuestre que la sucesión cuyo término general es

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}$$

es convergente.

Resolución

a) La sucesión $\{x_n\}$ es creciente, pues

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{5^{n+1}+1}>x_n$$

b) La sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente. En efecto,

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}<\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}-(\frac{1}{5})^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})<\frac{1}{4}$$

c) Por el teorema sobre la convergencia de las sucesiones monótonas, $\{x_n\}$ es convergente. ¡Trate el lector de precisar su límite!

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Determine la monotonía de las sucesiones siguientes:

a) $\{\frac{n^2}{1+n^2}\}$

b) $\{\frac{n^n}{n!}\}$

c) $\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\}$

d) $\{\frac{\sqrt{n}}{n+100}\}$

Nota: La monotonía puede cumplirse a partir de cierto n suficientemente grande.

2. Dada la sucesión $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{c^n}{n!}$, con $c > 0$.

   a) Halle la fórmula de recurrencia para x_n.

   b) Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente a partir de cierto n y que está acotada inferiormente.

   c) Compruebe que $\lim x_n = 0$.

3. Demuestre que la sucesión cuyo término general es

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$$

es convergente.

4. Dada la sucesión recurrente siguiente:

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{(n veces)}} = \sqrt{2+x_n}$$

   a) Demuestre que $\{x_n\}$ es creciente.

   b) Demuestre que $\{x_n\}$ está acotada superiormente por 2.

   c) Compruebe que su límite es 2.

5. Fijemos el número real x_0 y definamos la sucesión $\{x_n\}$ por la fórmula recurrente:

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$$

   a) Si $0 < x_0 < 1$, pruebe que $\{x_n\}$ converge a 1.

   b) Analice qué ocurre si $x_0 \notin (0, 1)$.

   c) Sea $c > 0$. Pongamos $y_n = \dfrac{x_n}{c}$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y tomemos la condición inicial $0 < y_0 < \dfrac{1}{c}$. Pruebe que la sucesión $\{y_n\}$ converge a $\dfrac{1}{c}$.

Nota: Siguiendo este esquema las máquinas computadoras calculan el inverso de un número positivo dado.

§ II.7 Puntos de acumulación y sucesiones

Recordemos que se ha definido "punto de acumulación de un conjunto S de números reales" como aquel número x tal que toda vecindad de éste contiene, al menos, un punto de S diferente de x. Este concepto está muy relacionado con el de límite de una sucesión como veremos a continuación.

PROPIEDAD 7.1

Un punto $x \in \mathbf{R}$ es de acumulación para el conjunto S, si y solo si, existe una sucesión de términos diferentes en S que converge a x.

DEMOSTRACIÓN

Si existe $x_n \in S$, $x_n \neq x_m$ para $n \neq m$ y tal que $x_n \longrightarrow x$, entonces, por definición de límite, en cada vecindad de x se encontrarán casi todos los elementos de la sucesión y como son todos diferentes habrá, al menos, uno diferente de x, lo que prueba que x es de acumulación para S.

Supongamos ahora que x es de acumulación para S. Sea $V(x; \epsilon)$ una vecindad arbitraria de x. Por definición de punto de acumulación en ella existe un $x_1 \neq x$ y $x_1 \in S$. Tomemos ahora una vecindad de x de radio menor que la distancia de x a x_1, digamos $\epsilon_1 = \dfrac{|x_1 - x|}{2}$. En esta vecindad $V(x; \epsilon_1)$ existe, al menos, un $x_2 \in S$ tal que $x_2 \neq x$ y $x_2 \neq x_1$. De manera análoga tomamos $\epsilon_2 = \dfrac{|x_2 - x|}{2}$ y encontramos un $x_3 \in S$ $x_3 \in V(x; \epsilon_2)$, $x_3 \neq x$, $x_3 \neq x_2$, $x_3 \neq x_1$ y continuamos el proceso indefinidamente formando así una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in S$ y $\lim x_n = x$ como el lector puede probar fácilmente. Así queda demostrada la propiedad.

Observación

Es importante destacar que en la propiedad 7.1 se tratan sucesiones de términos diferentes, pues una sucesión que sea *estacionaria*, es decir, que a partir de un cierto índice n sea constante no tiene como límite un punto de acumulación del conjunto de sus términos.

Precisemos que x es un *punto de acumulación de la sucesión* $\{x_n\}$ si lo es del conjunto de sus términos.

Ejemplo

1) La sucesión constante $\{c\} = c, c, c, \ldots$ no tiene puntos de acumulación y la sucesión

$$\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}, \ldots$$

tiene sólo 2 puntos de acumulación $x = 0$ y $x = 1$. En efecto, el hecho que estos dos puntos son de acumulación de $\{x_n\}$ se desprende de que las sucesiones $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ son de *términos diferentes* y convergen a 1 y a 0 respectivamente. Falta demostrar que cualquier otro número x_0 diferente de 0 y 1 no es punto de acumulación de $\{x_n\}$. Como $x_0 \neq 0$ y $x_0 \neq 1$ entonces puede tomarse por ejemplo $\epsilon = \dfrac{\min\{|x_0|, |x_0 - 1|\}}{3}$ y las ϵ-vecindades de los puntos 0 y 1 no tendrán puntos de intersección con la ϵ-vecindad de x_0. Pero casi todos los elementos impares de nuestra sucesión están en una ϵ-vecindad de 0 y casi todos los pares en una ϵ-vecindad de 1. Por tanto fuera de los límites de las ϵ-vecindades de 0 y 1 (y en particular en la ϵ-vecindad del número x_0) pueden haber sólo un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$. Lo cual significa que x_0 no es un punto de acumulación de $\{x_n\}$.

El ejemplo anterior junto con la propiedad 7.1 nos hace pensar en caracterizar todos los puntos de acumulación de una sucesión a través de las distintas sucesiones que de ella puedan extraerse. Aquí, se debe tener cuidado en la forma en que se extraen los términos de la sucesión original y por eso se introduce la definición siguiente:

DEFINICIÓN 7.2 (subsucesión)

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales, es decir $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ Elijamos de la sucesión $\{x_n\}$ los términos con índice $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ y ordenémoslos en el orden creciente de tales índices. Obtenemos así una nueva sucesión

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$$

la cual se denomina ***subsucesión*** de la sucesión $\{x_n\}$.

En particular, la misma sucesión $\{x_n\}$ puede considerarse como subsucesión con los índices $k_n = n$.

De inmediato se observa que $k_n \geqslant n$ pues toda subsucesión no coincidente con toda la sucesión se obtiene eliminando algunos términos de la sucesión.

Ejemplo

2) $\{x_n\} = \{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \ldots\}$,

entonces, la sucesión $\{x_{2n}\}$ forma una subsucesión de $\{x_n\}$ tomando $k_n = 2n$ mientras que

$\{y_n\} = \{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{n}, \ldots\}$ no es una subsucesión de $\{x_n\}$ aunque en ambos casos, los términos forman subconjuntos del conjunto de los términos de $\{x_n\}$.

Una de las principales razones por las cuales la definición de subsucesión se da en la forma anterior es la posibilidad de probar la propiedad siguiente.

PROPIEDAD 7.3

Si una sucesión $\{x_n\}$ es convergente entonces toda subsucesión $\{x_{k_n}\}$ es también convergente y al mismo límite de $\{x_n\}$.

DEMOSTRACIÓN

Fijemos $\epsilon > 0$ y, utilizando la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ al límite x, elijamos para este ϵ un número N tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n \geqslant N$. Sea $\{x_{k_n}\}$ una subsucesión cualquiera de $\{x_n\}$. Como $k_n \geqslant n$, entonces para todos los $n \geqslant N$, $k_n \geqslant N$ por tanto, los elementos de la subsucesión $\{x_{k_n}\}$ satisfacen la desigualdad $|x_{k_n} - x| < \epsilon$ y esto significa que la subsucesión $\{x_{k_n}\}$ converge al límite x.

Observaciones

1) Por supuesto, una subsucesión de una sucesión puede ser convergente y, sin embargo, la sucesión no serlo, por ejemplo, la sucesión $0, 1, 0, 1, \ldots$ no es convergente y la subsucesión de los términos pares formada por la constante 1 es evidentemente convergente.

2) Además, es posible que una sucesión no posea ninguna subsucesión convergente como es el caso de la sucesión de los números naturales la cual es infinitamente grande al igual que cualquiera de sus subsucesiones ($!k_n \geqslant n!$).

En cambio, si la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, entonces se tiene el siguiente resultado que no es más que una traducción al lenguaje de las sucesiones del conocido teorema de Bolzano-Weierstrass que vimos en el 1er. capítulo (ver § 15).

TEOREMA 7.4 (Bolzano-Weierstrass para sucesiones)

De toda sucesión acotada puede extraerse una subsucesión convergente.

DEMOSTRACIÓN

Recordemos que el teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos plantea que todo conjunto infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación. Luego, si $\{x_n\}$ es una sucesión con infinitos términos diferentes y acotada, el conjunto formado por sus términos tiene, al menos, un punto de acumulación x y por la propiedad 7.1 existe una sucesión de términos de $\{x_n\}$ convergente a x que ordenándolos en sentido creciente de los índices constituye una subsucesión de $\{x_n\}$. Si $\{x_n\}$ sólo tiene un número finito de términos diferentes, esto quiere decir que, al menos, uno de ellos se repite infinitas veces formando una subsucesión constante que evidentemente es convergente.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Encuentre los puntos de acumulación de la sucesión siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots,$$

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Resolución

Como se deduce de la construcción de la sucesión, de ella se pueden extraer subsucesiones

$$\{\frac{1}{n}\},\ \{1+\frac{1}{n}\},\ \{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\},\ \{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\},\ldots \tag{1}$$

las cuales son de términos diferentes y convergen respectivamente a:

$$0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ldots \tag{2}$$

Cualquier otra subsucesión convergente de términos diferentes es subsucesión de alguna (1) y, por tanto, debe converger a uno de los números (2). En consecuencia, los únicos puntos de acumulación de la sucesión son los puntos de la forma

$$p_n = \frac{1}{n} \text{ y el punto } p = 0$$

2. Pruebe que $\lim (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e$.

Resolución

Para probar lo anterior nos basaremos en que

$$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e \qquad (\S\ \text{II.6 ejemplo 6})$$

Es fácil ver que la sucesión dada:

$$\{(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}\}$$

es una subsucesión de la sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$.

En efecto, tomando la sucesión estrictamente creciente $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ de la definición 7.2 como la sucesión $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ se obtiene una nueva sucesión $\{(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}\}$ subsucesión de $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$.

Finalmente, en virtud de la propiedad 7.3 y apoyándonos en lo planteado al inicio del ejemplo se concluye que

$$\lim (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Pruebe que las únicas sucesiones convergentes cuyos términos son números enteros son las sucesiones estacionarias, es decir, aquellas que a partir de cierto índice N son constantes.

2. Dadas las sucesiones siguientes, halle dos subsucesiones de cada una, convergentes a diferentes límites. En cada caso determine si los límites de dichas subsucesiones son puntos de acumulación del conjunto de términos de la sucesión original.

   a) $0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ \ldots$

   b) $1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ldots$

   c) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{15}{16},\ldots$

   d) $x_n = 3 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + 2(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}.$

3. Demuestre utilizando la propiedad 7.1 que 0 es punto de acumulación del intervalo $[0,1)$.

4. Demuestre que si $\{x_n\}$ es infinitamente grande, toda subsucesión de ella es infinitamente grande.

5. Demuestre que si $\{x_n\}$ es no acotada existe alguna subsucesión de $\{x_n\}$ infinitamente grande.

6. a) Demuestre que si $\{x_n\}$ tiene dos subsucesiones convergentes al mismo límite y tales que todo término de $\{x_n\}$ sea término de una de ellas, $\{x_n\}$ converge al valor común del límite de las subsucesiones.

   b) Encuentre una sucesión que verifique lo anterior.

7. a) Demuestre que si $k_n \longrightarrow +\infty$, $k_n \in \mathbf{N}$ para todo n y $\lim x_n = l$ entonces $\lim x_{k_n} = l$.

   b) Verifique que la propiedad del inciso anterior se cumple para $x_n = (1 + \frac{1}{n})$ y $k_n = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ par} \\ 2n+1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

8. Calcule los límites siguientes:

   a) $\lim (1 + \frac{1}{2n+1})^{2n+1}$

   b) $\lim (\frac{5n^3 + 4}{5n^3 + 3})^{5n^3+3}$

   c) $\lim (\frac{9n^2 + 4}{9n^2 + 3})^{3n^2+1}$

   d) $\lim (\frac{n^3 + n^2 + 1}{n^3 + n^2})^{\frac{4n^2(n+1)}{\sqrt{5}}}$

9. Construya un ejemplo de una sucesión numérica, que tenga como puntos de acumulación los números

$$a_1, a_2 \ldots, a_p$$

10. Construya un ejemplo de sucesión numérica tal que tenga como puntos de acumulación los miembros de la sucesión

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

¿Cuáles otros puntos de acumulación tiene obligatoriamente esta sucesión así construida?

§ II.8 Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy

Terminemos este capítulo planteándonos el problema de encontrar un criterio de convergencia donde sólo intervengan relaciones entre los términos de la sucesión; ya fue hallado dicho criterio en el epígrafe anterior para el caso particular de las sucesiones monótonas pero una forma más general se debe a Bolzano (1817) y a Cauchy (1821) y se suele denominar *criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para sucesiones.*

TEOREMA 8.1 (Bolzano-Cauchy)

Para que la sucesión $\{x_n\}$ tenga un límite finito es necesario y suficiente que: (B-C). Para todo número $\epsilon > 0$ exista un N tal que la desigualdad $|x_n - x_m| < \epsilon$ sea válida siempre que $n \geqslant N$ y $m \geqslant N$.

Observación

Como es evidente, la esencia del criterio es que los términos de la sucesión se acerquen unos a otros a medida que su índice crece.

DEMOSTRACIÓN

(Necesidad) Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ tenga un límite finito, digamos a. De acuerdo con la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un N tal que se cumpla

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } n \geqslant N$$

Tomemos ahora dos números $n \geqslant N$ y $m \geqslant N$; entonces tendremos simultáneamente

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por tanto,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Luego, la condición es necesaria.

(Suficiencia) Asumamos que la condición (B-C) se satisface para $\{x_n\}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ encontramos N, tal que, siendo $n, m \geqslant N$, se cumple $|x_n - x_m| < \epsilon$. Fijemos ϵ y m y escribamos la desigualdad $|x_n - x_m| < \epsilon$ en la forma

$$x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon \tag{1}$$

es decir, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, puesto que (1) se cumple para $n \geqslant N$ y los restantes términos de la sucesión son sólo un número finito. Podemos proceder de manera análoga a la demostración del teorema 3.3 acerca de la acotación de una sucesión infinitesimal.

Ahora, por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos extraer una subsucesión convergente $\{x_{k_n}\}$ tendiente a un límite finito c:

$$\lim x_{k_n} = c$$

Probemos que este c es límite además, de la sucesión $\{x_n\}$.
Podemos elegir un k_n suficientemente grande, tal que

$$|x_{k_n} - c| < \frac{\epsilon}{2}$$

y, al mismo tiempo, se cumpla $k_n \geqslant N$. Consecuentemente podemos tomar $m = k_n$ en la condición (B-C) y tener

$$|x_n - x_{k_n}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Comparando estas dos últimas desigualdades obtenemos:

$$|x_n - c| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ para } n \geqslant N,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

El criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy es muy útil para probar la convergencia de sucesiones cuyos términos generales vienen dados por sumas.

Ejemplo

1) Apliquemos el criterio de Bolzano-Cauchy para probar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$:

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

donde a_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) son números reales que cumplen $|a_k| \leqslant q^k$, y q es un número real del intervalo $0 < q < 1$.
Sean n y m dos números naturales arbitrarios y supongamos para perder ambigüedad que $n > m$, o sea, existe $p > 0$ tal que $n = m + p$.
Entonces, $|x_n - x_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}| \leqslant$

$$\leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_{m+p}| \leqslant$$

$$\leqslant q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots + q^{m+p} =$$

$$= \frac{q^{m+1} - q^{m+1+p}}{1-q} < \frac{q^{m+1}}{1-q}$$

Recordando que la sucesión $\{q^n\}$ es infinitesimal con $q < 1$ (∮ II.2 ejercicio resuelto 1) podemos asegurar que para todo $\epsilon > 0$ se encuentra N tal que:

$$q^{m+1} < \epsilon\,(1-q), \text{ para } m \geqslant N$$

Luego, para cualesquiera m y $n \geqslant N$ se obtiene:

$$|x_n - x_m| < \frac{q^{m+1}}{1-q} < \epsilon$$

es decir, la sucesión $\{x_n\}$ cumple la condición de Bolzano-Cauchy y, por tanto, converge.

Menos usual, aunque a veces útil, es la prueba de la divergencia de una sucesión aplicando el criterio de Bolzano-Cauchy.

Ejemplo

2) Probemos que la sucesión cuyo término general es $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, diverge.

Debemos probar que existe $\epsilon = \epsilon_0$ para el cual no se encuentra N, tal que si m y n son mayores que N entonces $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Observemos que para $n = 2m$ se tiene

$$|x_n - x_m| = |x_{2m} - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m} = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

Así, tomando $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, para todo N se encuentran m y $n = 2m$, $m \geqslant N$ tales que:

$$|x_n - x_m| \geqslant \frac{1}{2}$$

o sea, la sucesión $\{x_n\}$ no cumple el criterio de Bolzano-Cauchy y por tanto, diverge.

Observación

El criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy es válido en el campo de los números reales pero no en el campo de los números racionales, es decir, existen sucesiones de términos racionales que cumplen dicha condición y no tienen límite racional.

Ejemplo

3) La sucesión introducida en el ejemplo 4 del ∮ II.6 que sirve para hallar la raíz cuadrada de un número real a través de máquinas computadoras tiene como término general

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (a > 0)$$

Tomando $x_1 = 1$, y "a" racional, el término general define un número racional para todo $n > 1$. Si $a = 2$, ya demostramos en ∮ II.6 que $\lim x_n = \sqrt{2}$.
El límite no es racional y la sucesión es convergente y cumple la condición (B-C) de que $|x_n - x_m| < \epsilon$ para n y m suficientemente grandes. (El lector puede comprobar directamente esta desigualdad si es de su interés.)

Esta característica de las sucesiones de elementos racionales de cumplir la condición de Bolzano-Cauchy y no siempre converger a un número racional motivó una fundamentación de la teoría de números reales diferente a las señaladas en la introducción al Capítulo I. Hay que darle el honor de ser el primero en hacer tales consideraciones al mismo Cauchy, para el que los números reales se definían con los axiomas de los números racionales y con el cumplimiento del criterio de convergencia que nos ocupa. Pero los razonamientos de Cauchy no eran completamente rigurosos desde el punto de vista lógico. Se considera que Charles Méray y George Cantor dieron simultánea e independientemente, una teoría del número irracional fundamentada en la consideración de sucesiones convergentes de números racionales. Para Méray y Cantor las sucesiones que cumplen el criterio de

Bolzano-Cauchy son sucesiones *fundamentales* y sus límites son números racionales o nuevos entes, completamente determinados por tales sucesiones. De este modo, toda sucesión fundamental determina un número racional o irracional (un número real) que es su valor límite. Por supuesto, varias sucesiones cuyos términos son diferentes pueden definir el mismo número real, pero ésta aparente dificultad se elimina considerando tales sucesiones fundamentales como equivalentes. Al introducir así, los números irracionales, la prueba del cumplimiento de las propiedades P-1 y P-16 enunciadas en el Capítulo I se hace muy fácil, aunque tiene el inconveniente de ser poco asequible para el principiante. Agreguemos, que tal método ha servido para generalizar a conjuntos abstractos (no numéricos) teoremas análogos a los demostrados para las sucesiones de números reales. Esta generalización se debe, en particular, al trabajo investigativo realizado a principios de siglo, por varios matemáticos soviéticos, polacos y franceses, pioneros de la hoy importante teoría del análisis funcional.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Pruebe que converge la sucesión:

$1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}, \ldots$ cuyo término general es

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Resolución

Utilizando el criterio de Bolzano-Cauchy bastará probar que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \text{para } n, m \geqslant N$$

En efecto, consideremos que $n = m + p$, entonces,

$$|x_n - x_m| = |x_{m+p} - x_m| =$$

$$= |(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+p)^2})$$

$$-(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2})| =$$

$$= |\frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+p)^2}|$$

Aplicando ahora la desigualdad

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

la cual es válida para $n \geqslant 2$, se obtiene:

$$|\frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+p)^2}| <$$

$$< |\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+p-1} + \frac{1}{m+p}| =$$

$$= |\frac{1}{m} + \frac{1}{m+p}| \leqslant |\frac{1}{m}| + |\frac{1}{m+p}|$$

y, mantenido p fijo y haciendo m crecer indefinidamente, la expresión $|\frac{1}{m}| + |\frac{1}{m+p}|$ se hace tan pequeña como se desee. Por tanto, queda probada la convergencia de la sucesión

$$\{1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Diga si las siguientes sucesiones satisfacen o no la condición de Bolzano-Cauchy

a) $\{(-1)^n \frac{n^2}{n^2-1}\}$ b) $\{\frac{n^3 - 2\sqrt{n}}{2n^3 + 3n + 1}\}$ c) $\{\frac{n^2+1}{n-1}\}$

2. Pruebe la convergencia de $\{x_n\}$, donde $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, con $|a_k| < M$, $k = 0,1,\ldots$ y $|q| < 1$

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que:

$$|x_{n+1} - x_n| < \alpha\, |x_n - x_{n-1}|$$

donde $0 < \alpha < 1$. Probar que esta sucesión $\{x_n\}$ es convergente.

4. Pruebe que si la sucesión $\{x_n\}$ de elementos racionales cumple la condición de Bolzano-Cauchy, entonces cualquier subsucesión $\{x_{k_n}\}$ también es fundamental.

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. Defina el concepto de sucesión numérica y dé un ejemplo de sucesión infinitesimal y otro de sucesión infinitamente grande.
2. ¿Cuándo se dice que una sucesión está acotada? Dé un ejemplo de sucesión acotada y otro de sucesión no acotada.
3. Pruebe que toda sucesión infinitamente grande es no acotada y dé un ejemplo de sucesión no acotada que no sea infinitamente grande.
4. Pruebe que el producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal.
5. Pruebe que toda sucesión infinitesimal está acotada.
6. Exponga las tres definiciones dadas de sucesión convergente.
7. Pruebe que toda sucesión infinitamente grande no es convergente. Dé un ejemplo de sucesión divergente que no sea infinitamente grande.
8. Pruebe que el límite de una sucesión convergente es único.
9. Pruebe que la suma de una sucesión infinitamente grande y una sucesión acotada es una sucesión infinitamente grande. En general, ¿la suma de sucesiones infinitamente grandes es infinitamente grande?
10. Enuncie y demuestre la llamada "propiedad de emparedado."
11. Diga si es válido o no y por qué la afirmación siguiente: "Si la sucesión convergente $\{x_n\}$ es tal que todos sus términos se mantienen estrictamente positivos, entonces, el límite de $\{x_n\}$ es también estrictamente positivo."
12. ¿Qué se entiende por sucesión creciente? Dé un ejemplo.
13. Enuncie y demuestre el teorema sobre la convergencia de sucesiones monótonas.
14. Enuncie y demuestre la propiedad que caracteriza los puntos de acumulación como límites de sucesiones.
15. ¿Cómo se define el concepto de subsucesión? Dé un ejemplo de sucesión que posea una subsucesión infinitesimal y una subsucesión infinitamente grande. ¿Puede ser esta sucesión convergente?
16. Dé un ejemplo de una sucesión que no posea subsucesiones convergentes. ¿Puede ser esta sucesión acotada? ¿Por qué?
17. Enuncie y demuestre el criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para sucesiones.
18. Exprese qué significa que una sucesión no cumpla la condición de Bolzano-Cauchy.

5, 7, 8, 10, 12, 15 y 16

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Demuestre que $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ tiende a 1, al crecer n indefinidamente. ¿A partir de qué valor de n el valor absoluto de la diferencia entre x_n y 1 no es mayor que 10^{-4}?

2. Demuestre que $\lim x_n = 1$ si $x_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$. ¿A partir de qué valor de n la magnitud $|1 - x_n|$ es menor que un número dado $\epsilon > 0$? ¿Es creciente o decreciente?

3. Demuestre que la sucesión $\{1 + (-1)^n\}$ no tiene límite cuando n crece indefinidamente.

4. Demuestre que al crecer n indefinidamente la sucesión $x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ no tiene límite y la sucesión $y_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$ sí lo tiene. ¿A qué es igual este?

5. Pruebe que las sucesiones siguientes no tienen límite:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \ldots$

cuyo término general es:

$$x_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^{\frac{(n+1)}{2}}}, & \text{si } n \text{ es impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{4}{5}, \ldots$

6. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim \left(\frac{n}{n^2+5} - \frac{n^2}{n^3+1}\right)$

b) $\lim \left(\frac{n^3}{n^2+1} - n\right)$

c) $\lim \left(\frac{n^3}{2n^2-1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)$

d) $\lim \left[\dfrac{3n^2}{2n+1} - \dfrac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2} \right]$

e) $\dfrac{\lim (n+1)^{10} + (n+2)^{10} + \ldots + (n+100)^{10}}{n^{10} + 10^{10}}$

f) $\lim \dfrac{2^{n+2} + 3n^{n+1}}{(-8)^n + 5^{n+1}}$

g) $\lim \dfrac{(-1)^n + 5^{2n-1}}{7^{2n+1} + 4^{2n}}$

h) $\lim \left(\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2+5} \right)$

i) $\lim \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$

j) $\lim \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right)$

k) $\lim \left(\sqrt{n^2-2n-1} - \sqrt{n^2-7n+3} \right)$

l) $\lim \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right)$

Indicación: Emplee la fórmula siguiente:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

m) $\lim n^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} \right)$

n) $\lim \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$

Indicación: Utilice la fórmula de la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales. (Preliminares § P.2, ejercicio 1 b).

p) $\lim \dfrac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}$ $|a| < 1,\ |b| < 1$

q) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2} \right) = \dfrac{1}{2}$

r) $\lim \left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} \right) = 1$

s) $\lim \left(\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \sqrt[8]{2} \ldots \sqrt[2n]{2} \right) = 2$

7. Pruebe que las sucesiones siguientes convergen y halle sus límites respectivos.

a) $x_1 = \dfrac{x_0}{a+x_0}$, $x_2 = \dfrac{x_1}{a+x_1}$, ..., $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}$ $(a > 1,\ x_0 > 0)$ decreciente > 0 $\to 0$

b) $x_n = \dfrac{2^n}{(n+2)!} \to 0$ decreciente $\to 0$ c) $x_n = \dfrac{n!}{n^n} \to 0$ decreciente > 0

8. Se llama *límite parcial* de la sucesión $\{a_n\}$ al límite de cada subsucesión convergente de $\{a_n\}$.

Construya una sucesión tal que:

a) No posea límites parciales finitos.

b) Posea un único límite parcial finito, pero que no sea convergente.

c) Posea un conjunto infinito de límites parciales.

d) Tenga como límite parcial a cada número real.

9. Pruebe que la sucesión $\{q_n\}$ de los números racionales pertenecientes al intervalo $[0,1]$ es una sucesión acotada no convergente. ¿Cuántas subsucesiones convergentes pueden extraerse de esta sucesión? ¿Cuáles son $\overline{\lim}\, q_n$ y $\underline{\lim}\, q_n$ (ver ejercicio 12).

10. Demuestre que toda sucesión acotada divergente contiene dos subsucesiones que convergen a diferentes límites.

11. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente es que sea acotada y tenga un límite parcial único.

12. a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada. Demuestre que el conjunto de los límites parciales de $\{a_n\}$ posee máximo y mínimo. El valor máximo se llama límite superior de $\{a_n\}$ y el valor mínimo es llamado límite inferior de $\{a_n\}$ y se denotan por $\overline{\lim}\, a_n$ y $\underline{\lim}\, a_n$ respectivamente.

b) Pruebe que una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión es que los límites superior e inferior coincidan.

c) Halle $\overline{\lim}\, a_n$ y $\underline{\lim}\, a_n$ para las sucesiones siguientes:

i) $\{\frac{1}{n}\}$ ii) $\{n^{(-1)^n}\}$

iii) $\{(-1)^n (1 + \frac{1}{n})\}$ iv) las sucesiones del ejercicio 5.

v) $\{1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}\}$ vi) $\{\frac{n}{n+1} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2}\}$

13. Demuestre que $\lim (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}) = e$ y deduzca que $e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!\,n}$, donde $0 < \theta_n < 1$.

14. Demuestre que e es irracional:

15. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene *variación acotada* si existe una constante c tal que

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < c, \quad n = 2, 3, \ldots$$

a) Demuestre que si $\{x_n\}$ es de variación acotada, entonces, converge.

b) Dé un ejemplo de una sucesión convergente que no sea de variación acotada.

16. Demuestre utilizando el teorema sobre la convergencia de sucesiones monótonas que las sucesiones siguientes convergen:

a) $x_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \ldots (1 + \frac{1}{2^n})$

b) $y_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{2^n})$

c) $z_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$

CAPÍTULO III. SERIES NUMÉRICAS

> Si no existe "lo más pequeño", entonces de infinitas partes se constituyen los menores cuerpos: a la mitad se le encuentra siempre su mitad y para tal división no hay jamás limitaciones. ¿En qué se diferencia pues, la cosa más insignificante al Universo? Créeme, exactamente en nada.
>
> LUCRECIO[1]

Introducción

Para los antiguos griegos el problema del infinito matemático fue objeto de las más diversas e inagotables discusiones. Ya en la introducción al Capítulo I hicimos mención a la controversia entre los pitagóricos y los eléatos ilustrada con la célebre paradoja de "Aquiles y la tortuga". Pero, por supuesto, existen muchas otras paradojas acerca del infinito.

El mismo Zenón de Elea nos muestra otra paradoja en la cual se plantea que *el movimiento es imposible.* Esta conclusión, que hemos de admitir como una locura, es producto de un razonamiento cuya "lógica" es muy convincente, como vamos a ver.

Para ir de un punto cualquiera P a otro punto Q hemos de recorrer primero la mitad de la distancia de P a Q, después la mitad de la que queda, después la mitad del resto y así sucesivamente... El "así sucesivamente" significa que el proceso se repetirá indefinidamente. Por muy pequeñas que sean las distancias sucesivas, el recorrerlas exige indudablemente un período finito de tiempo. Y, como decía Zenón, la *suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo es infinita.* Por lo tanto, nunca podremos ir de P a Q por muy cerca que estén los dos puntos.

La afirmación de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita, fue contradicha 2 000 años más tarde con la creación de la teoría de las series numéricas. En los siglos XVII y XVIII algunos matemáticos empezaron a pensar que era posible extender la idea de suma ordinaria de conjuntos finitos de números a sucesiones infinitas, de manera que en algunos casos, la "suma" de una sucesión resultara finita. Para entender cómo se puede hacer esta extensión conviene analizar la paradoja de Zenón con más detalle.

Supongamos primero que la distancia entre P y Q es una cierta unidad y que un corredor se propone ir de P a Q con una velocidad constante. Sea T la cantidad de minutos necesarios para recorrer la primera mitad del trayecto. Para el siguiente cuarto de recorrido necesitará $\frac{T}{2}$ minutos, para el octavo siguiente $\frac{T}{4}$ minutos y "en general" para la parte comprendida entre $\frac{1}{2^n}$ y $\frac{1}{2^{n+1}}$ necesitará $\frac{T}{2^n}$ minu-

[1] LUCRECIO (siglo I a.n.e.): *De la naturaleza de las cosas.* t.1, pp 41 y 42, Ed. Mir, Moscú, 1945.

tos. La "suma" de todos estos intervalos se puede indicar simbólicamente por la expresión:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \ldots + \frac{T}{2^n} + \ldots \qquad (1)$$

La experiencia física dice que el corredor que corre a velocidad constante alcanzará su meta en un tiempo doble del que necesitaba para alcanzar su punto medio. Puesto que necesita T minutos para la mitad del recorrido, habrá que emplear 2T minutos para el recorrido completo. Este razonamiento sugiere que se debe asignar la "suma" 2T a la expresión (1) de tal forma que la igualdad

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \ldots + \frac{T}{2^n} + \ldots = 2T,$$

sea "válida" en algún sentido matemático.

Si consideramos algunas de las "sumas parciales", es decir, las sumas de los n-primeros términos S_n, observamos que

$$S_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{2^2} + \ldots + \frac{T}{2^{n-1}}$$

representa la suma de los primeros n términos de una progresión que como se conoce de los Preliminares § P. 2 tiene como suma:

$$S_n = \frac{T - \frac{T}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2T\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

y como $\{\frac{1}{2^n}\}$ es una sucesión infinitesimal, resulta que S_n converge a 2T.

Por tanto, resulta "válido" calcular la suma de una sucesión de números $\{\frac{T}{2^{n-1}}\}$ calculando la suma de los primeros n términos y después hacer el paso al límite, pues el resultado que así obtenemos coincide con lo que la experiencia física nos ha enseñado. Podemos pues, dormir tranquilos: ¡el movimiento es posible!

De manera análoga, por generalización, los matemáticos del siglo XVII y XVIII definieron el concepto "serie numérica". Pero resuelta esta cuestión surgen nuevos problemas ¿están estas "sumas infinitas" sujetas a las leyes usuales de las sumas finitas? Consideremos una de las propiedades más simples de las sumas ordinarias: la asociatividad.

Consideremos la serie

$$S = a - a + a - a + a - a + a - a + \ldots$$

Si asociamos los términos de un modo, tenemos

$$\begin{aligned} S &= (a-a) + (a-a) + (a-a) + (a-a) + \ldots \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si los asociamos de otro modo, podemos escribir

$$\begin{aligned} S &= a - (a-a) - (a-a) - (a-a) - (a-a) - \ldots \\ &= a - 0 - 0 - 0 - \ldots \\ &= a \end{aligned}$$

Y asociándolos todavía de otra manera

$$\begin{aligned} S &= a - (a - a + a - a + a - a + \ldots) \\ &= a - S \end{aligned}$$

Por lo tanto, 2S = a, o sea, $S = \frac{a}{2}$. He aquí, pues, una serie infinita cuya suma pudiera ser una de las tres cantidades: 0, a o $\frac{a}{2}$.

Valiéndonos del concepto de suma de una serie establecido a propósito de la paradoja de Zenón, podemos comprobar que esta serie no tiene suma, o sea, que la sucesión de sus sumas parciales no es convergente. En efecto, en este caso:

$$S_{2n} = a - a + a - a + \ldots + a - a = 0$$

$$S_{2n+1} = a - a + a - a + \ldots + a - a + a = a$$

y esta sucesión oscila entre los valores 0 y a, y por tanto no tiene límite.

Sin embargo, los primeros investigadores en este dominio, prestaban poca o ninguna atención a las cuestiones de convergencia, y por eso no es sorprendente que se haya visto más tarde que algunos de los primeros resultados obtenidos fueran incorrectos. Incluso Leibniz, uno de los genios del siglo XVII, no vio claro en este caso particular. Decía que puesto que los límites 0 y a, son igualmente probables, el verdadero límite de la serie, es su valor medio $\frac{a}{2}$.

Así, el problema revela una nueva faceta: clasificar aquellas series convergentes cuyas sumas no cambien al agrupar sus términos de cualquier modo. Tales series se denominan "absolutamente convergentes" y aquellas que siendo convergentes no cumplen esa condición se llaman "condicionalmente convergentes". Para ilustrar lo sorprendente de las series condicionalmente convergentes mencionemos el resultado que en 1854 el notable matemático alemán Riemann logró demostrar: "Se pueden ordenar los términos de una serie condicionalmente convergente de modo que su suma sea cualquier número finito dado, o más infinito, o menos infinito."

Esperamos que el lector haya comprendido que el estudio de las "sumas infinitas" presenta un interés peculiar matizado de misterio y belleza. Desde sus orígenes estuvo ligado a problemas físicos y filosóficos. Pasó por un período en el que el instinto de lo matemáticamente correcto, basado fundamentalmente en la experiencia física, evitaba llegar a conclusiones falsas, aunque no se pudieran justificar los métodos utilizados. Fue en esta época que Leonard Euler utilizaba las "sumas infinitas" como concepto unificador de diversas ramas de la Matemática que hasta entonces se habían desarrollado independientemente.

Poco después de la muerte de Euler, el caudal de nuevos descubrimientos empezó a disminuir y el período "formal" en la historia de las series llegó a su término. Un período más crítico, comenzó en 1812 cuando Gauss publicó la célebre memoria que contenía, por primera vez en la historia, un estudio riguroso de la convergencia de *algunas* series numéricas.

Unos años más tarde, con la introducción por Cauchy de la definición analítica del concepto límite, se abrían las posibilidades de fundamentar una teoría rigurosa de las series numéricas convergentes. Pero, por supuesto, esto no era suficiente. El misterio de las series divergentes, la inconsistencia de todas las fundamentaciones de su comportamiento continuaba latente. Ilustremos esto con unas frases que el joven prodigio N. Abel dijera en 1825: "Las series divergentes, en general, son una diabólica invención, y es una vergüenza que se permita fundamentar cualquier tipo de demostración, basándose en ellas. Utilizándolas se puede llegar a cualquier cosa y por esto surgen tantas dificultades y paradojas" Cauchy y Abel fueron quienes dieron los fundamentos de la teoría moderna de las series. En este capítulo exponemos los rudimentos de esta teoría y esperamos que el "apetito" del lector sea suficientemente estimulado para que posteriormente profundice en esta fascinante teoría.

§ III.1 Concepto serie numérica. Ejemplos

DEFINICIONES 1.1

Sea dada la sucesión $\{a_n\}$. La expresión

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

se denomina *serie numérica* y los números a_k, $k \geqslant 1$ se llaman *términos de la serie*, siendo a_n el *término general de la serie*. La serie (1) frecuentemente se simboliza así:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Esta simbología *puramente formal* es más cómoda que la expresión (1).

Los números $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ se llaman *sumas parciales* de la serie (1). Las sumas parciales conforman una sucesión $\{S_n\}$ que siempre se considera junto con la serie (1). Por definición, se dice que la serie (1) es *convergente* si existe el límite de la sucesión de sus sumas parciales $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Al número S se le llama también *suma* de la serie (1) y se escribe

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

En caso de no existir el límite de las sumas parciales de (1) se dice que la serie es *divergente*.

Observación

Hemos establecido *convencionalmente* que cuando hablemos del carácter de una serie debemos entender el carácter de la sucesión de sus sumas parciales. El símbolo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ o la expresión $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ no representan nada en absoluto si no los consideramos asociados a la sucesión de sus sumas parciales. De esta forma el concepto serie generaliza el concepto suma finita, como ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplos

1) Sea la serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 0 + 0 + \ldots$, donde $a_n = 0$ para $n > k$.

Entonces las sumas parciales serán:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $S_{k+1} = S_k, \ldots$

Se obtiene que la sucesión $\{S_n\}$ es constante igual a S_k salvo los primeros $k-1$ términos, luego

$$\lim S_n = S_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

y por tanto, la serie es convergente y su suma coincide con la suma finita $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

2) Sea la serie

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

Aquí $a_n = a$ para todo n. Entonces,

$$S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{n veces}} = na$$

Evidentemente

$$\lim S_n = 0\,, \quad \text{si } a = 0$$

$$\text{y} \quad \lim S_n = \lim\ na = \infty\,, \quad \text{si } a \neq 0$$

Luego, la serie considerada es divergente si $a \neq 0$ y convergente y de suma cero si $a = 0$.

3) Sea la serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \tag{2}$$

donde a y q son números reales.

La suma parcial de orden n $S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$ coincide con la suma de los $n + 1$ primeros términos de una progresión geométrica de razón "q" y 1er. término "a".

Luego

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Cuando $|q| < 1$, sabemos del capítulo anterior que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, luego, en este caso, la serie será convergente y su suma igual a $\frac{a}{1-q}$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \text{ si } |q| < 1$$

Si $|q| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ y la serie será divergente.

Si $q = 1$ la serie considerada coincide con la del ejemplo 2) y será divergente salvo cuando $a = 0$.

Si $q = -1$, obtenemos $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a + a \ldots$ que ya fue analizada en la introducción al capítulo.

Resumiendo, la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \textit{converge}, \text{ si } |q| < 1 \text{ y su suma es } \frac{a}{1-q} \\ \textit{diverge}, \text{ si } |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

Aplicación

Utilizando la serie geométrica puede demostrarse que toda expresión decimal periódica representa un número racional e incluso se puede calcular ésta en la form de cociente de dos enteros (con esto cumplimos una promesa contraída en el Capítulo I, § I.3).

Sea, primero, como ilustración:

$$0,3\overline{14} = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} + \frac{14}{10^5} + \frac{14}{10^7} + \ldots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$ es una serie geométrica, donde $a = 1$ y $q = \frac{1}{10^2}$ luego, $0,3\overline{14} = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{311}{999}$.

El método utilizado puede ser aplicado a cualquier fracción decimal periódica. En efecto, toda expresión decimal periódica puede escribirse como

$$a + b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^m}\right)^{n-1} \qquad (1)$$

donde a y b son cocientes de enteros y m es el número de cifras que constituyen el período de la expresión. Pero $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^m}\right)^{n-1}$ es una serie geométrica donde $a = 1$ y $q = \frac{1}{10^m}$, $q < 1$, para $m \geqslant 1$. Luego (1) es igual a $a + \frac{b}{1 - \frac{1}{10^m}} = a + \frac{b\,10^m}{10^m - 1}$, la cual puede escribirse como el cociente de dos números enteros.

4) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyo término general a_n es descomponible como

$a_n = b_n - b_{n+1}$, siendo $\{b_n\}$ una sucesión convergente al número real l.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y su suma es $b_1 - l$.

En efecto, sea $a_n = b_n - b_{n+1}$, entonces

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N =$$

$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_N - b_{N+1}) = b_1 - b_{N+1}$$

y, por tanto, $\lim S_N = \lim (b_1 - b_{N+1}) = b_1 - l$. Así, el problema del hallazgo de la suma se reduce a saber cuál es la sucesión $\{b_n\}$ con la que se puede descomponer el término general de la serie, por ejemplo:

a) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$

En este caso, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1}$,

siendo $b_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_1 = 1$

Aplicando lo probado en 4) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

b) Análogamente se trata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \ldots$$

donde x es un número real fijo distinto de ± 1. En efecto,

$$a_n = \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} = \frac{1}{1 - x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^n}} = b_n - b_{n+1}$$

siendo, $b_n = \dfrac{1}{1-x^{2^{n-1}}}$ y $b_1 = \dfrac{1}{1-x}$

$$\text{pero, } l = \lim b_n = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{luego, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{si } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

c) Apuntemos que la descomposición del término general de una serie $a_n = b_n - b_{n+1}$ se puede lograr siempre. Basta elegir b_1 arbitrario y por recurrencia definir

$$b_{n+1} = b_1 - S_n, \text{ para } n \geqslant 1,$$

dónde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
Se obtiene que $a_n = b_n - b_{n+1}$

La cuestión es que esta descomposición no ayuda realmente al análisis de la convergencia de la serie dado que el término general de la sucesión auxiliar b_n se define a través del término general de la sucesión de sumas parciales S_n y la dificultad, por tanto, no se reduce.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice el carácter y la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{4^{2n}}$$

Resolución

Consideremos una suma parcial:

$$S_n = \frac{-1+3^2}{4^2} + \frac{1+3^3}{4^4} + \frac{-1+3^4}{4^6} + \dots + \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{4^{2n}} = \frac{-1}{4^2} +$$

$$+ 3\left(\frac{3}{4^2}\right) + \frac{1}{4^4} + 3\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + \frac{-1}{4^6} + 3\left(\frac{3}{4^2}\right)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{4^{2n}} + 3\left(\frac{3}{4^2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{-1}{4^2} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^6} + \dots + \frac{(-1)^n}{4^{2n}}\right) + 3\left(\frac{3}{4^2} + \left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4^2}\right)^n\right)$$

Utilizando la fórmula que da la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, para cada uno de los paréntesis en la suma anterior, obtenemos:

$$S_n = \frac{\dfrac{-1}{16} - \left(\dfrac{-1}{16}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{16}} + 3\,\frac{\dfrac{3}{16} - \left(\dfrac{3}{16}\right)^n}{1 - \dfrac{3}{16}}$$

$$S_n = \frac{-1}{17} - \frac{\left(-\dfrac{1}{16}\right)^n \cdot 16}{17} + \frac{9}{13} - \frac{3\left(\dfrac{3}{16}\right)^n \cdot 16}{13}$$

y como $\dfrac{1}{16} < 1$ y $\dfrac{3}{16} < 1$ se obtiene

$$\lim S_n = \frac{-1}{17} + \frac{9}{13} = \frac{140}{121}$$

luego la serie converge y su suma es $\dfrac{140}{121}$

2. Analice el carácter y la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

Resolución

Observemos que

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

Luego, una suma parcial puede escribirse en la forma:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

Si consideramos sumas parciales de índice par obtenemos:

$$S_{2n} = \frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2n-1} -$$

$$- \frac{1}{2n+1})] = \frac{1}{2}[1+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}]$$

En caso de ser sumas parciales de índice impar se tiene

$$S_{2n+1} = \frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2})] =$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}]$$

Como $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = \frac{3}{4}$ la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge y su límite es $\frac{3}{4}$. Luego la serie propuesta converge, siendo su suma $\frac{3}{4}$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Escribir la forma más simple del término general de las siguientes series, de acuerdo con los términos que se indican:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$

b) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots$

d) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots$

f) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \ldots$

2. Analice la convergencia de las series siguientes. En caso de ser convergente, calcule su suma.

a) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{3}{2^n} + \ldots$

b) $2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \ldots$

c) $1+2+3+4+\ldots$

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \ldots$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+3^{2n+1}}{(-6)^{n+2}}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

3. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sucesiones de números reales tales que $a_n < b_n < c_n$. Además, supongamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = l$$

Demuestre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = l$

4. Exprese x como cociente de dos enteros si:

a) $x = 0{,}\overline{4}$

b) $x = 0{,}\overline{123}$

c) $x = 0{,}\overline{142857}$

5. Demuestre, utilizando series, que un número representado en forma decimal con un número finito de cifras $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ puede ser escrita con infinitas cifras decimales iguales a 9, por ejemplo $2{,}1413 = 2{,}14129999\ldots$

6. Cada vez que una pelota rebota en el suelo lanzada desde una altura de h metros, recorre una distancia de $\frac{3}{4}$ h metros. Halle la distancia total recorrida si se lanza desde una posición a un metro de altura del suelo.

§ III.2 Propiedades generales de las series numéricas

PROPIEDAD 2.1

Consideremos las series

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n} + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty} a_{k+l} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \qquad (2)$$

Las series (1) y (2) tienen ambas el mismo carácter, es decir, convergen o divergen a la vez.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, si consideramos sumas parciales con índice $n > k$ obtenemos para la serie (1),

$$S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} + \ldots + a_n,$$

y para la serie (2), $S_{n-k}^{(2)} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n$

luego, $S_n^{(1)} = S_{n-k}^{(2)} + \sum_{i=1}^{k} a_i$ (3)

Como k es un número fijo, la suma $\sum_{i=1}^{k} a_i$ no depende de n, luego, $\{S_n^{(1)}\}$ y $\{S_n^{(2)}\}$ convergerán o divergerán a la vez.

En el caso de que ambas sucesiones converjan, pasando al límite en la expresión (3), obtenemos, además

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} S_{n-k}^{(2)} + \sum_{i=1}^{k} a_i \qquad (4)$$

es decir, la suma de la serie (2) difiere de la suma de la serie (1) en el número

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = S_k$$

DEFINICIÓN 2.2

Cada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y un número natural n, llamaremos *resto de orden n* de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a la serie

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots$$

Observaciones

1) Teniendo en cuenta la propiedad 2.1, el resto de cualquier orden de una serie tiene el mismo carácter que dicha serie, es decir, convergen o divergen simultáneamente.

2) Para cada n natural se obtiene un resto r_n y de la fórmula (4) se deduce que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + r_n\,, \quad \text{para cada } n \geqslant 1 \qquad (5)$$

de ahí el nombre de *resto de orden* n.

3) De la observación anterior se evidencia que los diferentes restos asociados a una serie constituyen una sucesión r_n y su comportamiento está muy relacionado con el carácter de la serie.

PROPIEDAD 2.3

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, si y solo si,

$$\lim r_n = 0$$

DEMOSTRACIÓN

Es una consecuencia directa de (5), y su comprobación la dejamos al lector.

Observación

Esta propiedad indica que la suma de una serie convergente puede ser aproximada por una suma parcial S_n cometiéndose un error igual al resto r_n, el cual puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande. En la práctica la dificultad reside en la estimación del error, es decir, en encontrar una "buena" mayoración del resto.

Existen diferentes métodos que permiten encontrar una cota superior para el valor absoluto del resto, uno de los cuales será expuesto en el § III.4 de este capítulo, como una consecuencia del teorema 4.1 (Criterio de Leibniz).

Sea una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por definición esta serie será convergente o divergente según lo sea la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$. Teniendo en cuenta el criterio de Bolzano-Cauchy (capítulo II, § II.8) para la convergencia de una sucesión podemos afirmar que:

$\{S_n\}$ converge, si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbf{N}$, tal que si $n,m \geqslant N$, entonces

$$|S_m - S_n| < \epsilon \qquad (6)$$

Como los índices n y m son arbitrarios, con la sola condición de ser mayores que N, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer $m > n$ y $m = n + p$ donde $p \in \mathbf{N}$ arbitrario y $n > N$.

Entonces, la condición (6) puede ser reescrita teniendo en cuenta que S_n y S_m son sumas parciales. Así,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$S_{n+p} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$$

luego, $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}$

es decir, la desigualdad (6) es equivalente a

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

y obtenemos:

PROPIEDAD 2.4 (condición de Cauchy)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un número natural N, tal que, si $n > N$, entonces, se cumple

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon, \text{ para todo } p \in N$$

Aunque la cóndición de Cauchy tiene importancia teórica, es poco útil para decidir la convergencia de una serie particular. Sin embargo, una consecuencia sencilla de la condición de Cauchy suministra una condición *necesaria* para la convergencia que es demasiado importante para dejar de mencionarla explícitamente:

PROPIEDAD 2.5 (condición necesaria *de convergencia)*

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es infinitesimal.

Para su prueba, basta considerar $p = 1$ en la condición de Cauchy, obteniendo que el elemento a_{n+1} es en valor absoluto arbitrariamente pequeño, para n suficientemente grande, es decir, $\lim a_{n+1} = 0$ como corresponde probar.

Ejemplos

1) La divergencia de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, cuando $|q| \geqslant 1$ se deduce inmediatamente del hecho que $a_n = aq^{n-1}$ no tiende a cero para $|q| \geqslant 1$.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \ldots$

   es divergente, pues $\lim \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0$.

Es conveniente destacar que la propiedad 2.5 es necesaria, pero no suficiente para la convergencia de una serie, como indica el ejemplo siguiente

3) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

   conocida por el nombre de *serie armónica* (el cual se le atribuye por la propiedad de que cada uno de sus términos comenzando en el segundo representa la media armónica de los dos vecinos, es decir, $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$).

   Analicemos su convergencia utilizando la condición de Cauchy en el caso particular $p = n - 1$. Como $a_n = \frac{1}{n}$ tenemos

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+(n-1)}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

De la desigualdad anterior se infiere que la condición de Cauchy no se satisface para $\epsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$, de donde se concluye la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a pesar de que $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Señalemos, como dato curioso, que aunque la serie armónica es divergente sus sumas parciales H_n no crecen muy rápido.

Euler, por ejemplo, calculó que

$$H_{1\,000} = 7{,}48 \ldots, \text{ y } H_{1\,000\,000} = 14{,}39 \ldots$$

Las series convergentes poseen algunas propiedades aritméticas análogas a las conocidas de las sumas finitas:

PROPIEDAD 2.6

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{8}$$

Entre las sumas parciales de las series de (8) se tiene la relación

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Como por hipótesis estos límites de las sucesiones de sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} a_k$ y $\sum_{k=1}^{n} b_k$ existen, entonces, existirá el límite de la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ será convergente, y se cumple la relación (8).

PROPIEDAD 2.7

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $c \in R$, entonces, es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ y se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN

Análogamente a la demostración de 2.6 se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Luego, utilizando las propiedades de los límites de sucesiones se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ converge y

$$\lim \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \lim \sum_{k=1}^{n} a_k$$

de donde sigue la igualdad (9).

Observación

En particular si $c = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

PROPIEDAD 2.8 (Asociatividad)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Entonces, la serie obtenida sustituyendo varios términos consecutivos por su suma, es convergente, manteniéndose el valor de su suma.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_3}) + \ldots = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

donde

$$b_1 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1})$$
$$b_2 = (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = (a_{k_{n-1}+1} + \ldots + a_{k_n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Denotemos por $\{S_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y por $\{S'_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Entonces, $S'_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1} = S_{k_1}$, $S'_2 = S_{k_2}, \ldots S'_n = S_{k_n}, \ldots$, es decir, la sucesión $\{S'_n\} = \{S_{k_n}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{S_n\}$. Como la sucesión $\{S_n\}$ es convergente, la subsucesión $\{S_{k_n}\}$ es también convergente y su límite es precisamente la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto deja demostrada la propiedad.

Observaciones

1) Como apuntamos en la introducción, la asociatividad no es propiedad de las series divergentes, pues, por ejemplo, la serie

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \quad (a \neq 0)$$

puede asociarse de tal forma que la serie resultante, tenga como suma tres cantidades distintas: 0, a y $\frac{a}{2}$.

2) Para las sumas finitas se cumple la *propiedad disociativa*, es decir, cada sumando puede ser descompuesto en la suma de varios sin que se altere el valor total de la suma. Sin embargo, en las series numéricas, aún en el caso convergente, no se conserva esta propiedad. Por ejemplo, la serie convergente

$$0 + 0 + 0 + \ldots$$

se descompone en $a - a + a - a + a - a + \ldots \quad (a \neq 0)$
que como sabemos es divergente.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

Determine el carácter y en caso de ser convergente la suma de las series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$

Resolución

1. Como el término general puede descomponerse en la forma

$$\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = (\tfrac{1}{3})^n + (\tfrac{1}{2})^n$$

la convergencia de la serie dada se deduce de la convergencia de las series geométricas $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

2. El término general puede ser escrito en la forma siguiente:

$$\frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}\, n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}},$$

luego la convergencia de la serie se deduce de la convergencia de

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$. La primera fue analizada en el ejemplo 4 ∮ III.1 y la segunda es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2} < 1$. Además, la serie dada converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}\, n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Ejercicios para el estudio independiente

1. Analice la convergencia de cada una de las siguientes series y en caso de ser convergente calcule su suma:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} + 2^{n+5}}{6^{2n-1}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sqrt{n+1} - 2^n \sqrt{n} + \sqrt{n^2+n}}{2^n \sqrt{n^2+n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a+b)^{3n}$, $|a+b| < 1$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\,000\,n+1}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(2n+1) + 4n^2(n+1)^2}{3^{n+1}\, n^2 (n+1)^n}$

2. Encuentre el error en la "demostración" del siguiente

"Teorema" Una serie numérica converge a cualquier número S prefijado.

Demostración:

Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y S un número cualquiera fijo. Entonces

$$a_1 = S - (S - a_1)$$
$$a_2 = (S - a_1) - (S - a_1 - a_2)$$
$$a_3 = (S - a_1 - a_2) - (S - a_1 - a_2 - a_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = (S - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}) - (S - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} - a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sumando estas igualdades, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

∮ III.3 Series de términos positivos

En este epígrafe nos dedicaremos al estudio de criterios para determinar la convergencia de las series cuyos términos son todos positivos. La ventaja que ofrecen estas series radica en la siguiente

Observación

"Si $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in N$, entonces, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es monótona creciente". En efecto, como $a_{n+1} \geqslant 0$

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geqslant S_n$$

De esta forma, en virtud del teorema sobre la convergencia de las sucesiones monótonas (capítulo II, ∮ III.6) la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si su sucesión de sumas parciales está acotada superiormente. En caso de no estar acotada $\{S_n\}$ la serie divergerá a $+\infty$.

TEOREMA 3 (criterio de comparación)

Sean las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, para todo $n \geqslant N$

entonces a) si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces diverge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

DEMOSTRACIÓN

La propiedad 2.1 del epígrafe anterior nos permite alterar un número finito de términos de una serie sin que se altere su carácter. En virtud de esto, podemos analizar la convergencia de las series dadas en el teorema, a partir del término de lugar N. Ello equivale a suponer que la condición $a_n \leqslant b_n$ se cumple para todos los términos de la serie. Sin alterar la notación supongamos que $a_n \leqslant b_n$ para todo n. Entonces,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = \sigma_n$$

Si la sucesión $\{\sigma_n\}$ está acotada superiormente, también lo estará $\{S_n\}$, y si $\{S_n\}$ no está acotada, tampoco estará acotada $\{\sigma_n\}$. Con este razonamiento y utilizando la observación hecha al comienzo del epígrafe se concluye la demostración del teorema.

COROLARIO 3.2

Sean $a_n \geqslant 0$ y $b_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = k \tag{1}$$

entonces,

a) Si $k \neq 0$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.

b) Si $k = 0$, de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la convergencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y de la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN

a) Por la condición (1) puede encontrarse un N suficientemente grande tal que

$$\frac{k}{2} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant k+1 \quad , \; n = N, N+1, N+2, \ldots,$$

de donde $a_n \leqslant (k+1)\, b_n$, para $n \geqslant N$.

De la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (k+1)\, b_n$ y por el teorema 3.1 obtenemos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Análogamente, de la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se infiere la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Utilizando la desigualdad

$$\frac{k}{2} b_n \leqslant a_n \quad , \; n = N, N+1, \ldots$$

y razonando similarmente de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se deduce la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y de la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, sigue la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto concluye la demostración de a).

b) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces existe $N \in \mathbf{N}$, tal que para $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n$, y utilizando el criterio de comparación se deduce la afirmación b del corolario.

Ejemplos

1) Analicemos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{an}\right)^n$, $a > 0$.

Como $a_n = \left(\frac{1+n}{an}\right)^n = \frac{1}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tomando $b_n = \frac{1}{a^n}$ obtenemos:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

De ahí que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ y la serie dada tengan el mismo carácter.

Como $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ es el término general de una serie geométrica, será convergente cuando $\frac{1}{a} < 1$ y divergente si $\frac{1}{a} \geqslant 1$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{an}\right)^n \begin{cases} \text{converge, para } a > 1, \\ \text{diverge, para } 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

2) Analicemos ahora la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$. Considerando $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3}$, observamos que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n+3}} = \lim \frac{n+3}{\sqrt{n}\, n} = 0$$

Como sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, llegamos a la conclusión de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$ es divergente.

Desde el punto de vista práctico, el criterio de comparación es más fácil de aplicar en la forma del corolario (es decir, con paso al límite) y las series que, generalmente, se consideran para comparar son las series geométricas y las llamadas *series armónicas* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbf{R}$, las cuales reciben este nombre por su semejanza con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ § III.2 ejemplo 3). Dada la importancia, para la comparación, del conocimiento del carácter de estas series, haremos un paréntesis y analizaremos su comportamiento para las distintas s reales.

Si $s = 1$ sabemos que la serie armónica es divergente.

Si $s < 1$, entonces $n^s < n$, para todo $n \in \mathbf{N}$, por lo que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^s}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ será divergente en virtud del criterio de comparación.

Si $s > 1$, demostremos que la serie es convergente.

Consideremos las sumas parciales de orden $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$S_1 = 1,\ S_3 = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = 1 + \frac{1}{2^{s-1}}$$

$$S_7 = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{7^s} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + $$
$$+ \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} = 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}}$$

y así sucesivamente

$$S_{2^k-1} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^s} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k(s-1)}}$$

luego,

$$S_{2^k-1} < 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{2(s-1)}} + \ldots + \frac{1}{2^{k(s-1)}}$$

El segundo miembro de la desigualdad anterior es la suma parcial de orden k de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2^{(s-1)}} < 1$ $(s > 1)$, luego como dicha serie geométrica es convergente, sus sumas parciales estarán acotadas superiormente y con mayor razón estará acotada $\{S_{2^k-1}\}$. Sea $M > 0$ la cota superior de $\{S_{2^k-1}\}$.

Dado un número natural n siempre puede encontrarse un número de la forma $2^k - 1$ tal que $2^k - 1 > n$ (pruébelo) y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es de términos positivos

$$S_n < S_{2^k-1} \leq M$$

por tanto, la sucesión $\{S_n\}$ está acotada y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es convergente en el caso que $s > 1$.

Como dato curioso digamos que la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$ está relacionada con el problema de la distribución de los números primos en la sucesión de números naturales.

Se debe a Euler y a Riemann los más importantes resultados en esta dirección, conocida como "teoría analítica de los números".

Resumiendo, el carácter de las series armónicas está dado por la relación que tenga el exponente s con la unidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \textit{converge}, & \text{si } s > 1 \\ \textit{diverge}, & \text{si } s \leq 1 \end{cases}$$

Vamos a aplicar ahora el criterio de comparación utilizando las series armónicas:

Ejemplos

3) Analicemos el carácter de $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-5)}}$.

Sea $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2-5)}}$ y $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,

entonces,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2-5)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2-5)}} = 1$$

de donde, por el corolario 3.2, las correspondientes series tienen el mismo carácter. En este caso hemos comparado con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, donde $s = \frac{3}{2} > 1$, luego la serie converge.

4) La comparación con las series armónicas permite determinar que la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s} \quad (b > 0)$$

converge para $s > 1$ y diverge para $s \leq 1$. (Aquí n_0 designa el menor entero a partir del cual los términos de la serie son todos positivos.)

En efecto, basta observar que

$$\frac{\frac{1}{(a+bn)^s}}{\frac{1}{n^s}} = \frac{n^s}{(a+bn)^s} \longrightarrow \frac{1}{b^s} \neq 0$$

Aunque en los ejemplos vistos, el criterio de convergencia es fácil de aplicar, se necesita predeterminar con qué serie se va a comparar y además conocer el carácter de esta serie, lo cual limita su efectividad. Queda clara pues, la conveniencia de tener criterios de convergencia cuya aplicación sólo requiera del conocimiento de la expresión del término general de la serie dada. Esta característica la tienen los criterios del cociente y de la raíz que estudiaremos a continuación.

TEOREMA 3.3 (Criterio del cociente o de D'Alembert)

Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

1. Si existe un número $q < 1$ y un n_0, tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q, \quad \text{para } n \geqslant n_0, \tag{1}$$

entonces la serie dada converge.

2. Si para algún n_0 se cumple

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{para } n \geqslant n_0, \tag{2}$$

entonces la serie dada diverge.

DEMOSTRACIÓN

Sea $0 < q < 1$, tal que se cumpla (1), entonces,

$$a_{n+1} \leqslant q\, a_n \quad \text{para } n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

Por tanto,

$$a_{n_0+1} \leqslant q\, a_{n_0}$$
$$a_{n_0+2} \leqslant q\, a_{n_0+1} \leqslant q^2 a_{n_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n_0+k} \leqslant q\, a_{n_0+k-1} \leqslant q^k a_{n_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Como la serie con término general $b_k = a_{n_0} q^k$ es convergente (serie geométrica con razón $q < 1$) y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene sus términos menores o iguales a los de dicha serie para $n \geqslant n_0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente. Esto demuestra la primera parte del teorema.

Si se cumple (2), entonces para $n \geqslant n_0$ se tiene

$$a_{n+1} \geqslant a_n > 0$$

es decir, la sucesión $\{a_n\}$ a partir del término a_{n_0} comienza a comportarse como una sucesión monótona creciente con términos positivos, luego, no puede ser convergente a cero, por lo que la serie dada diverge, cumpliéndose la segunda parte del teorema.

Al igual que el criterio de comparación, es más fácil de aplicar el criterio del cociente "pasando al límite" cuando $n \to \infty$.

COROLARIO 3.4

Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$, y supongamos que existe

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \tag{3}$$

Entonces, si $l < 1$ la serie converge y si $l > 1$ la serie diverge.

DEMOSTRACIÓN

Si se cumple (3) y $l < 1$, entonces existe q: $l < q < 1$ y $n_0 \in \mathbf{N}$ tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q, \quad \text{para } n \geqslant n_0$$

Aplicando la parte 1) del teorema se concluye la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si $l > 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \quad \text{para } n \geqslant n_0$$

y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente (por la segunda parte del teorema).

Observación

Es conveniente hacer notar que si $l = 1$, el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ puede ser mayor que 1 o menor que 1 o ambas cosas a la vez por lo que no puede ser aplicado el teorema y nada puede concluirse de la convergencia de la serie dada.

Ejemplos

5 a) Analicemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)$. Como

$a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, formando

el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$

como $l = 0 < 1$, la serie es convergente.

b) Analicemos para qué valores de $a > 0$ es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, $s \in R$. Utilizando el criterio del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s a \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

Por el corolario 3.4, independientemente del valor de s, si $a < 1$ la serie es convergente y si $a > 1$ la serie es divergente.

Si $a = 1$ observemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \longrightarrow 1$$

por lo que no puede aplicarse el criterio del cociente. Sin embargo, la serie obtenida al sustituir a por 1 no es otra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, la cual conocemos que diverge si $s \leqslant 1$ y converge si $s > 1$.

Resumiendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \begin{cases} \text{converge} \begin{cases} \text{para } 0 < a < 1 \text{ y todo } s \in \mathbf{R} \\ \text{para } a = 1 \text{ y } s > 1 \end{cases} \\ \text{diverge} \begin{cases} \text{para } a > 1 \text{ y todo } s \in \mathbf{R} \\ \text{para } a = 1 \text{ y } s \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

Este ejemplo ilustra la observación hecha al corolario 3.4: cuando el límite del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es 1 no puede afirmarse, a priori, nada del carácter de la serie dada.

TEOREMA 3.5 (Criterio de la raíz o de Cauchy)

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in$ N.

1) Si existen $0 < q < 1$ y n_0, tales que

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q, \text{ para } n \geqslant n_0 \tag{4}$$

entonces, la serie converge.

2) Si para $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1, \tag{5}$$

entonces, la serie diverge.

DEMOSTRACIÓN

Si se cumple (4), entonces $a_n \leqslant q^n$ para $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es convergente $(q < 1)$, por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

Si tiene lugar (5), $a_n \geqslant 1$ para $n \geqslant n_0$, luego el límite de $\{a_n\}$ no puede ser cero y la serie diverge.

Análogamente al criterio del cociente se tiene:

COROLARIO 3.6

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Si existe el límite

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = l$$

entonces, cuando $l < 1$ la serie converge y cuando $l > 1$ la serie diverge.

La demostración es análoga a la del corolario del criterio del cociente.

Veamos cómo aplicar este criterio:

Ejemplos

6) Analicemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n} = 1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{4^3} + \frac{2^4}{5^4} + \ldots$$

En este caso: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)^n}} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$,

luego la serie es convergente.

7) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$

Como $a_n = \frac{[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} > 0$, para todo $n \in$ **N** se puede analizar su carácter aplicando el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3}$$

Observemos que el límite de $\dfrac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3}$ no existe. (¿Por qué?). Sin embargo, utilizando directamente el teorema 3.5, se prueba la convergencia de la serie.

En efecto, como $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, se tiene que

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{\frac{3}{2}+1}{3} < 1$$

y queda probada la convergencia.

Es interesante observar cómo el conocimiento del carácter de las series proporciona información sobre la convergencia de sucesiones, e incluso sobre el valor de su límite, lo que por otros caminos (con los recursos que disponemos) sería muy engorroso.

Ejemplos

8) De la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ para $0 < a < 1$ y $s \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\lim \frac{a^n}{n^s} = 0 \quad (0 < a < 1,\ s \in \mathbf{R})$$

9) Aún más interesante resulta demostrar que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, utilizando el criterio de la raíz y la información que se posee sobre la serie armónica.

En efecto, la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ es decreciente y como evidentemente $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene que $\lim \sqrt[n]{n} \geqslant 1$.

Pero $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, y si $\lim \sqrt[n]{n} > 1$, entonces $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$ y

por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ debería ser convergente, lo cual sabemos no es cierto. Por tanto, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Conociendo que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ se pueden ahora dar ejemplos de caso dudoso para el criterio de la raíz.

10) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-\alpha}}$

Aplicando el criterio de la raíz obtenemos

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n^{\frac{n-\alpha}{n}}} = \frac{n+1}{n} \cdot n^{\frac{\alpha}{n}} \longrightarrow 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Si se compara con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ se tiene

$$\frac{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-\alpha}}}{\dfrac{1}{n^s}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot n^{s+\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n n^{s+\alpha},$$

el primer factor tiene límite e y para $s = -\alpha$ $n^{s+\alpha} = 1$. Luego, el límite del cociente anterior es igual a e independientemente del valor de α. De aquí se deduce que la serie dada converge si $\alpha < -1$ y diverge si $\alpha \geqslant -1$.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice la convergencia de las series siguientes

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 a^n}{(n+1)^n}$, $a > 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Resolución

1. a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{2n} = b_n$

Como $\lim_n \dfrac{b_n}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ entonces

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tienen el mismo carácter por tanto, como

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, también lo será $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Como $a_n \geq 0$ y $a_n \geq b_n$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también es divergente.

Observación

Se puede también probar la divergencia de esta serie, notando que

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ si $a_n = \sqrt{n-1}$, y como $\lim\limits_{n} a_n$ no existe, entonces la serie diverge.

b) Utilicemos el criterio de la raíz:

$$a_n = \frac{n^3 a^n}{(n+1)^n} > 0\text{ , luego}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3 a^n}{(n+1)^n}} = \frac{a(\sqrt[n]{n})^3}{n+1}$$

Como $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, entonces,

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a(\sqrt[n]{n})^3}{n+1} = 0 < 1$$

y la serie propuesta es convergente.

c) Utilicemos el criterio del cociente:

$a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n} > 0$, luego,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n\, n!}{n^n}} = 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Pero, $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

y de aquí, utilizando el límite fundamental estudiado en el capítulo anterior, $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e}$, es decir, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{e} < 1$

y la serie propuesta es convergente.

Ejercicios para el estudio independiente

1. Determine si las series siguientes son o no convergentes:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-4n+5}$

ch) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n^4+1}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

ll) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{2^n}$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a^{-(n^2)}, a > 1$

ñ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(2n)!}$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^3}}$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} a^n, a > 0$

2a) Sea $a_n \geq 0$, $\{a_n\}$ decreciente. Pruebe que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim n\, a_n = 0$.

b) Dé un ejemplo en que $a_n \geq 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converja pero, sin embargo la sucesión $\{n\, a_n\}$ no sea infinitesimal.

3a) Demuestre que si para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (1)

entonces existe también

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q \tag{2}$$

b) El recíproco de a) no se cumple: si existe el límite (2), entonces el límite (1) puede no existir. Considere el ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

4. Sea $\epsilon_n \geqslant 0$. Se define a_n del modo siguiente:

$$2\, a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + \epsilon_n}\,,\ a_1 > 0$$

a) Muestre que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

b) Halle una mayoración para $2(a_{n+1} - a_n)$.

c) Pruebe que $\epsilon_n = 4a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$.

d) Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n$ es convergente.

§ III.4 Series de términos con signo arbitrario

Teniendo en cuenta que la alteración de un número finito de términos en una serie no altera su carácter, el estudio de las series cuyos términos, salvo un número finito, sean positivos, se reduce al estudio de la serie considerada como serie de términos positivos. Análogamente, el estudio de la convergencia de una serie cuyos términos, salvo un número finito, sean negativos se reduce, cambiando de signo a todos los términos, y en virtud de las propiedades estudiadas en § III.1, al análisis de una serie de términos positivos.

En este epígrafe nos dedicaremos al estudio de aquellas series que tienen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Dentro de este tipo de series, las de comportamiento más simple son aquellas cuyos términos son alternativamente positivos y negativos y que por abuso del lenguaje, se les llama *series alternadas.* Se les puede representar así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

donde $a_n \geqslant 0$ designa el valor absoluto del término n-ésimo de la serie.

El criterio de convergencia para series alternadas más útil y antiguo es el formulado por Leibniz (1704).

TEOREMA 4.1 (Criterio de Leibniz)

Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente y $\lim a_n = 0$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos una suma parcial de orden par de la serie dada:

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2k}$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

Teniendo en cuenta el no crecimiento de la sucesión $\{a_n\}$, cada paréntesis en la suma S_{2k} es positivo por lo que, evidentemente,

$$S_{2k} \leqslant S_{2k+2} \text{ para todo k.}$$

Esto es, la subsucesión de las sumas parciales formada por las de subíndice par es creciente. Además, podemos observar que

$$S_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + a_{2k}] \leqslant a_1$$

luego, la sucesión $\{S_{2k}\}$ es acotada superiormente y, por tanto, convergente. Sea $S = \lim_{k\to\infty} S_{2k}$ y demostremos que la subsucesión de sumas de índice impar converge a ese mismo valor S. En efecto,

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$$

Como por hipótesis $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ y $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$, entonces, existe el límite de S_{2k+1} y es igual a S. Esto demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

y la serie es convergente con suma S, lo que demuestra el teorema.

Puede ilustrarse el comportamiento de las sumas parciales de una serie alternada a partir de la figura III.1:

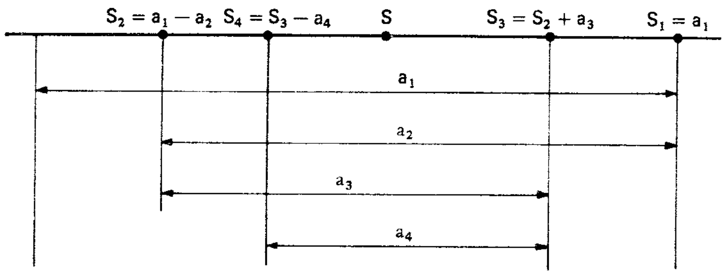


Fig. III.1

$S \leqslant S_{2k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (1)

ne

$$S \leqslant S_1 = a_1 \qquad (2)$$

le alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es menor o igual al

l resto de orden n de una serie alternada. Como el

a se tendrá que si $\{a_n\}$ cumple las hipótesis del cri-

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}$$

específica de acotar el resto, y por tanto, el error
lor de la suma de la serie, por una suma parcial. Es
$a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n$, entonces, el error cometi-
uto por a_{n+1}: $|E| \leqslant a_{n+1}$.

$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ es convergente pues la

e y tiende a cero.

enemos para la suma S de esta serie

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1 \qquad (3)$$

ora con este ejemplo, cómo no todas las propieda-
den a las series convergentes.

r $\frac{1}{2}$ la serie armónica alternada,

$$\dots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$+ \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

ue contiene los mismos términos que la serie armónica alternada, pero con el orden ambiado. Por tanto, debiera ocurrir que

$$\frac{3}{2} S = S$$

e donde se obtendría que $S = 0$, lo cual contradice (3). Está claro que en los razonamientos realizados hay un error. ¿Dónde está? La respuesta a esta interrogante daremos más adelante en este epígrafe.

De lo estudiado hasta ahora concluimos que las series cuyos términos mantienen ignos alternos son susceptibles de analizar con los criterios estudiados. Sin embargo, ¿cómo proceder con una serie no alternada cuyos términos son de signo arbitrario. Analicemos la posibilidad de aplicar, en algunos casos, los criterios de series de términos positivos a una serie arbitraria.

DEFINICIÓN 4.2

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Observemos los ejemplos siguientes:

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente, y puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Además, esta serie converge de acuerdo con el criterio de Leibniz.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ no converge absolutamente pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Como vimos en el ejemplo 1, la serie armónica alternada es convergente.

3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no converge absolutamente porque la serie $1 + 1 + 1 + \dots$ es divergente. Esta serie es evidentemente divergente.

En los ejemplos anteriores observamos que una serie puede ser convergente y absolutamente convergente (ejemplo 1), convergente y no absolutamente convergente (ejemplo 2) y puede ser que no converja y tampoco converja absolutamente (ejemplo 3). Para completar la interrelación entre los conceptos de convergencia y convergencia absoluta podríamos preguntarnos: ¿existirá algún ejemplo de una serie que converja absolutamente y no sea convergente? La respuesta a esta interrogante nos la da el teorema siguiente:

TEOREMA 4.3

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces es convergente y además se cumple:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right| \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN

Utilicemos la condición de Cauchy (necesaria y suficiente) para la convergencia de una serie (propiedad 2.4).

Para todo valor de n y p se tiene la relación siguiente

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \qquad (2)$$

Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario, entonces como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, existirá n_ϵ tal que, para $n \geqslant n_\epsilon$ y todo $p \in \mathbf{N}$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

Luego, en virtud de (2) con mayor razón se cumplirá que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon \text{ para } n \geqslant n_\epsilon \text{ y } p \in \mathbf{N}$$

Esto demuestra la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la primera parte del teorema.

Probemos la desigualdad (1). Para cualquier suma parcial $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k$ se cumple

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sigma_n$$

donde $\{\sigma_n\}$ representa la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Como las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{\sigma_n\}$ son convergentes, se tiene que

$$|\lim S_n| = \lim |S_n| \leqslant \lim \sigma_n$$

lo que demuestra la relación (1).

Observación

El ejemplo 3) muestra que el recíproco de este teorema no es cierto. Es decir, una serie puede ser convergente sin ser absolutamente convergente. A este tipo de serie se le denomina *condicionalmente convergente.*

El teorema anterior nos permite utilizar para series de términos cualesquiera los criterios estudiados en § III.2 para series de términos positivos.

5) Analicemos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para $x \in \mathbf{R}$. Apliquemos el criterio del cociente a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0, \text{ para todo } x \in \mathbf{R}$$

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbf{R}$.

Observemos que si al analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ obtenemos que ésta es divergente, entonces en general, nada podemos afirmar de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sin embargo, si recordamos la demostración de los criterios del cociente y de la raíz, cuando el límite l es mayor que 1 se concluye que el término general no tiende a cero y por tanto se cumple una condición necesaria para la convergencia de cualquier tipo de serie.

Hecha esta observación podemos aplicar completamente estos criterios de series de términos positivos a cualquier tipo de serie.

PROPIEDAD 4.4

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie arbitraria. Si existe $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ ($a_n \neq 0$ para todo n) o $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$ entonces:

a) Si $l < 1$, la serie converge absolutamente y, por tanto, converge.

b) Si $l > 1$, entonces la serie diverge.

Ejemplo

6) Analicemos para qué valores de $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ es convergente. Aplicando el criterio del cociente a la serie de los valores absolutos obtenemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} |x|$$

luego $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$

Si $|x| < 1$ la serie converge y si $|x| > 1$ la serie diverge.

En el caso en que $|x| = 1$, el criterio del cociente no es aplicable, no obstante, analizando directamente observamos que para $x = \pm 1$ se obtendría

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ o $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Como la primera es convergente, la segunda es convergente absolutamente y, por tanto, convergente en el sentido usual.

Las series absolutamente convergentes son las que por sus propiedades resultan más parecidas a las sumas finitas.

Puede demostrarse (y lo dejamos como ejercicio) que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n \, (c \in \mathbf{R})$ convergen absolutamente.

Analicemos ahora el cumplimiento de la propiedad conmutativa en las series absolutamente convergentes, es decir, si un reordenamiento de los términos de la serie puede o no alterar su carácter o su suma.

TEOREMA 4.5

Sea la serie absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S \tag{1}$$

entonces cualquier serie obtenida de (1) por una permutación (cambio de orden) de sus términos es también absolutamente convergente y su suma es igual a S.

DEMOSTRACIÓN

Dividamos el razonamiento en dos partes:

a) Consideremos que $a_n \geqslant 0$. Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots \tag{2}$$

una serie cuyos términos coinciden con los de la serie (1) sólo que tomados en otro orden.

Sea S'_n una suma parcial de (2), es decir,

$$S'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n$$

Como cada término a'_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ es igual a algún término a_n, se encuentra una suma parcial S_m con m suficientemente grande que contenga todos los a'_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ y por tanto

$$S'_n \leqslant S_m \tag{3}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la sucesión $\{S_n\}$ está acotada y de la desigualdad (3) se deduce que también estará acotada la sucesión $\{S'_n\}$.

Por tanto, la serie (2) es convergente y

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \leqslant S \tag{4}$$

Pero, como la serie (1) puede ser obtenida de (2) por un reordenamiento se concluye que

$$S \leqslant S' \tag{5}$$

y de (4) y (5) se obtiene que $S = S'$ lo que demuestra la afirmación del teorema en el caso de las series de términos positivos

b) Se ahora la serie (1) de términos de signo cualesquiera y pongamos

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n \,, & a_n \geqslant 0 \\ 0 \,, & a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n \,, & a_n \leqslant 0 \\ 0 \,, & a_n > 0 \end{cases}$$

entonces, evidentemente,

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \tag{6}$$

y el análisis de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se reduce a analizar las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ de términos positivos.

Si la serie (1) converge absolutamente, entonces, convergen las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ pues

$$a_n^+ \leqslant |a_n| \;;\; a_n^- \leqslant |a_n|.$$

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ obtenida de (1) por un reordenamiento. Esto produce un reordenamiento en las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ que denotaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'^-$ respectivamente.

De la relación (6) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{7}$$

Como las series del segundo miembro de (7) son de términos positivos, por lo demostrado en la parte a) del teorema, las series reordenadas convergen y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^+ \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^-$$

Luego sustituyendo en (7) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{8}$$

Como la diferencia de series convergentes es convergente sigue la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^+ - a_n'^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$

y además de (8) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^+ - a_n'^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n',$$

lo que demuestra el teorema.

El teorema anterior pierde su validez cuando trabajamos con series cuya convergencia es condicional. Esto es lo que produjo la contradicción enunciada en la observación posterior al ejemplo 1 de este epígrafe, pues las series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \dots$$

y

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

aunque tienen los mismos términos términos, su ordenamiento es diferente, y por tanto, su suma es susceptible de cambiar (recuerde que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente).

Enunciaremos a continuación, sin demostración, el teorema general debido a Riemann (1854) y que explica por qué Abel calificó las series condicionalmente convergentes como algo "diabólico"

TEOREMA 4.5

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, entonces, para todo $S \in R$ pueden reordenarse los términos de la serie dada y obtener una serie que converja a S o una serie que sea divergente.

EJERCICIOS

Ejercicio resuelto

1. Determine si las series siguientes son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$

Resolución

a) $a_n = \frac{(-1)^n n^5}{2^n}$

Como $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} < 1$, **la serie es absolutamente convergente.**

b) $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$

Como $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, **no se puede afirmar nada utilizando el criterio del cociente.**

Como evidentemente $\lim a_n = 0$ y además $\{a_n\}$ es monótona decreciente, lo que **el lector puede comprobar, utilizando el criterio de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente. Además, $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$, por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente, pues $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tienen el mismo carácter. En conclusión hemos obtenido que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$ es condicionalmente convergente.**

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Considere la serie

$$-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

Obtenga un estimado del error que se comete al sustituir la suma de esta serie por la suma de sus cuatro primeros términos y por la suma de sus cinco primeros términos.

2. Determine cuáles de las series siguientes son absolutamente convergentes, cuáles son condicionalmente convergentes y cuáles son divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-2)}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3 a^n}{2^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n^2+a)}{n!\, b}$

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. ¿A qué se llama suma parcial de una serie? ¿Cuándo se dice que una serie es convergente? Ponga un ejemplo de serie convergente y otro de serie divergente.
2. Si a una serie se le altera un número finito de términos ¿se altera su carácter? ¿Y su suma?
3. ¿A qué se llama resto de una serie? ¿Qué relación tiene el resto con el carácter de la serie?
4. Enuncie y demuestre la condición de Cauchy para la convergencia de series.
5. Exponga una condición necesaria de convergencia para una serie arbitraria. ¿Es suficiente? Ponga ejemplos que expliquen su respuesta.
6. Si en una serie convergente, sustituimos cada 3 términos consecutivos por el valor de su suma, se formará una nueva serie. ¿Será esta nueva serie convergente? Si lo es ¿se altera su suma?
7. ¿Qué característica tiene la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos?
8. Enuncie y demuestre el criterio de comparación en sus dos formulaciones.
9. Enuncie y demuestre los criterios del cociente y la raíz en sus dos formulaciones.
10. ¿Cuándo se dice que una serie es alternada? Enuncie y demuestre el criterio de convergencia para series alternadas.
11. ¿Cuándo se dice que una serie converge absolutamente?
12. ¿Qué relación existe entre convergencia y convergencia absoluta? Explique su respuesta utilizando el teorema correspondiente y ejemplos adecuados.
13. Los criterios del cociente y la raíz ¿pueden aplicarse a series de términos cualesquiera? Explique su respuesta.
14. ¿Cuándo puede garantizarse la propiedad conmutativa para las series? Ponga un ejemplo donde no se cumpla esta propiedad.
15. ¿Qué nos plantea el teorema de Riemann para series condicionalmente convergentes?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Determine, en cada caso, si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1\,000\,n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{25}}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - (1+\frac{1}{n})^n\right)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\alpha e^{n\beta}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

2. Determine para qué valores de la variable x son convergentes las series siguientes y halle su suma.

a) $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$

b) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$

c) $x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots + n!\, x^n + \ldots$

d) $x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n+1} + \ldots$

e) $\frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{4} + \frac{x^9}{8} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{2^n} + \ldots$

f) $\frac{2x}{3} + \frac{4x^4}{9} + \ldots + \frac{2^n x^{2n}}{3^n} + \ldots$

3. Determine para qué valores de la variable x las series siguientes son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

a) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n n^{10}}{(n-3)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3 x^n}{1\,000\,n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+10}{4n+1}x\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\; x^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right]^p x^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5\, x^{2n}}{2^n+3^n}$

4. Compruebe que el criterio de Leibniz no es aplicable a las series siguientes. Diga cuáles de estas series son divergentes, cuáles condicionalmente convergentes y cuáles absolutamente convergentes.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots$

c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots$

d) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots$

Sugerencia: En a) y d) examine la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k})$ y en b) y c) investigue por separado las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$

5. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. Muestre con un ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ puede ser convergente y sin embargo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverger.

6. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ convergen.

7. Diga si son ciertas o falsas las proposiciones siguientes:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ converge absolutamente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y $a_n \neq -1$ para todo n, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge absolutamente.

8. a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y $\{b_n\}$ es una subsucesión cualquiera de $\{a_n\}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente.

b) Demuestre que la afirmación anterior es falsa si se cambia convergencia absoluta por convergencia.

9. Demuestre las relaciones siguientes utilizando una serie convergente adecuada.

a) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ b) $\lim \frac{n^n}{(2n)!} = 0$ c) $\lim \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

10. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos, pruebe que:

a) Si $\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

c) Si $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

d) Si $\underline{\lim}\ \sqrt{a_n} > 1$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Nota: Para ver el significado de los símbolos $\overline{\lim}$ y $\underline{\lim}$, el lector puede acudir al ejercicio complementario 12 del Capítulo II.

11. Analice las series siguientes utilizando los criterios demostrados en 10.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{n}$

CAPÍTULO IV. FUNCIONES Y SUS LÍMITES

Las mismas matemáticas, al tratar las magnitudes variables, pisan el terreno dialéctico, y es significativo que fuese un filósofo dialéctico, Descartes, quien llevó este progreso al campo matemático.

FEDERICO ENGELS[1]

Introducción

Cuando observamos algún fenómeno de la naturaleza o nos interesamos por el curso de algún proceso tecnológico nos damos cuenta de que no todas las cantidades que intervienen en estos fenómenos o proceso mantienen el mismo comportamiento. Algunas de ellas no cambian en el transcurso del proceso, conservando "valores constantes", mientras que otras manifiestan cambios significativos, haciéndose mayores o menores, o, como se dice, tomando "valores variables".

Las cantidades que intervienen en todo proceso, como regla, no varían independientemente unas de otras; con frecuencia tales cantidades se encuentran en una estrecha vinculación, de forma que cualquier variación de una, por pequeña que sea, implica una variación de la otra. Estas cantidades que varían una en dependencia de otras, en un cierto fenómeno o proceso, se dice que están en *dependencia funcional*.

La aceptación intuitiva de la dependencia funcional como manifestación de una relación de causa y efecto en un fenómeno, en diferentes situaciones, ha sido natural desde los tiempos más remotos. Una larga historia poseen los intentos de expresar esta dependencia funcional entre cantidades variables a través de la matemática.

El concepto dependencia funcional se manifiesta matemáticamente, por primera vez, en la expresión de la variación de los parámetros que determinaban un lugar geométrico, a través de una *tabla numérica* (figura IV. 1).

x	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
y	0,01	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07

Fig. IV.1

En una parte se señalaban valores fijos de una de las variables y experimentalmente, dada la condición que definiría el lugar geométrico se encontraban los valores de la otra variable. Pero, el conocimiento de la dependencia funcional no pasaba

[1]ENGELS, FEDERICO: *Anti-Dühring*. p. 148, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1979.

de la conformación de la tabla; el matemático antiguo no poseía medios suficientes para expresar de otra forma esta dependencia. Poco a poco, en la medida en que fue haciéndose más necesario, el conjunto de medios a través de los cuales se podía expresar una función matemática se fue enriqueciendo considerablemente. Aparecieron primero las funciones algebraicas elementales, y más tarde se comenzaron a utilizar las funciones circulares o trigonométricas y las funciones logarítmicas (estas últimas en el siglo XVII). Se acopiaron más y más datos concretos acerca de unos y otros tipos de dependencias funcionales, sin embargo, para las exigencias del progreso técnico y científico en la época del Renacimiento, no bastaban las tablas y los algoritmos desarrollados. Agreguemos, por ejemplo, que los navegantes, astrónomos y constructores de todos los países clamaban por unas tablas trigonométricas más exactas y los más connotados matemáticos de la época dedicaron heroicos esfuerzos para su completamiento, utilizando métodos muy ingeniosos.

En el transcurso del siglo XVII se continuó la introducción vertiginosa de los métodos matemáticos en la ciencia y, sobre todo, en la Astronomía y la Mecánica. Pero, para la aplicación efectiva de cualquier método matemático se debía conocer la forma de dependencia funcional entre las variables del fenómeno. Así, por ejemplo, Kepler entre 1609 y 1619 descubre experimentalmente y formula en términos matemáticos las famosas leyes del movimiento de los planetas:

1. Los planetas se mueven en trayectorias elípticas y el Sol se encuentra en uno de sus focos.
2. Los radio-vectores de posición de los planetas "cubren" en iguales intervalos de tiempo, iguales áreas sectoriales (ver figura IV. 2).

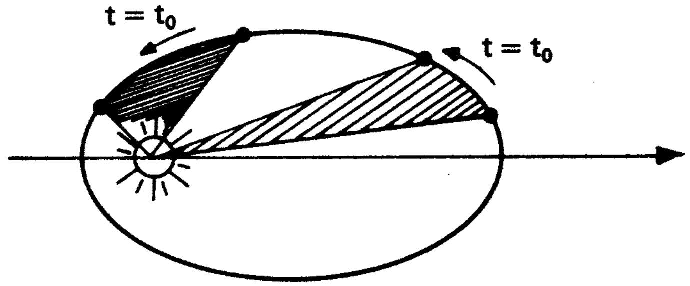


Fig. IV.2

3. El cuadrado del tiempo de traslación de un planeta alrededor del Sol se relaciona con el cubo de las distancias medias hasta el Sol.

La sola formulación de estas leyes alerta que para su demostración matemática no bastaban las técnicas de cálculo con cantidades constantes y sus respectivas tablas hasta entonces desarrolladas.

La introducción por Descartes del concepto cantidad variable y, sobre todo, la vinculación de los métodos geométricos con los analíticos llevó en el siglo XVII a representar las dependencias funcionales no sólo a través de tablas, sino también, a través de gráficos y de *fórmulas analíticas*.

La revolución cartesiana abrió nuevos horizontes a la matemática. Las aplicaciones a la Mecánica se hicieron célebres, sobre todo, por los trabajos de I. Newton relacionados con la ley de la gravitación universal. El movimiento había entrado en la matemática. El método analítico se puso de moda. " Todo se puede reducir a fórmulas" parecen gritar a coro los matemáticos de la época... Pero, entonces, comenzaron de nuevo las dificultades. ¿En qué consistieron esas nuevas dificultades? Precisamente en la extendida creencia de que cada dependencia funcional se podía expresar a través de una fórmula. Surgieron problemas (como el de la cuerda vibrante) cuyo tratamiento a través de la aplicación del cálculo infinitesimal exigía de una definición más general del concepto función. Crear una teoría de funciones se convirtió en el siglo XVIII en el principal problema del análisis infinitesimal. Euler, uno de los más grandes matemáticos de todas las épocas, escribió entonces que "todo el análisis infinitesimal gira alrededor de las cantidades variables y sus funciones".

En el transcurso de un largo período (todo el siglo XVIII y comienzos del siglo XIX) el concepto función se continuó asociando al de fórmula analítica. Esta tendencia, formalista por su carácter (pues la forma –representación analítica– dictaba sus leyes al contenido real de la correspondencia funcional) se mantuvo durante más de un siglo y aún en nuestros días no se ha eliminado totalmente.

Para dar una idea de las limitaciones del enfoque formalista en el concepto función, mencionemos una de las controversias más notables entre los matemáticos del siglo XVIII.

Supongamos que en el estudio de un cierto proceso (como el ilustrado en el ejemplo 4, § IV. 1) encontramos que la variable y depende de t de "forma" distinta para $t > t_0$ y para $t < t_0$. Es decir, se expresa por una fórmula $y = f(t)$ para $t > t_0$ y por otra fórmula $y = g(t)$ para $t < t_0$. Entonces, ¿este proceso se define por una función o por dos funciones? Si estamos de parte de los formalistas afirmamos que son dos funciones y si consideramos como lo más importante: la correspondencia existente entre los dominios de variación de t y de y, entonces debemos responder que es sólo una.

El caso más elemental de tal tipo de situación lo encontramos con la correspondencia que a cada número real positivo le asigna el número + 1 y a cada número real negativo le asigna – 1, dejando a 0 invariante. Esta correspondencia se denomina "signo de x" y se denota sg(x). Para los formalistas estamos en presencia de 3 funciones. Pero observamos que la correspondencia se puede expresar con la ayuda del concepto límite de una sucesión, a través de una sola fórmula

$$\operatorname{sg} x = \lim \sqrt[2n-1]{x}$$

Mediante esta representación de la función sg(x) podemos encontrar una expresión única a la correspondencia mencionada más arriba y que en tiempos de Euler se consideraba como dos funciones distintas. Sea

$$y = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] + \frac{1}{2}\operatorname{sg} x\,[f(x) - g(x)]$$

Si damos valores a x estrictamente positivos, entonces, obtenemos $y = f(x)$ y para $x < 0$ se obtiene $y = g(x)$. Es decir, queda corroborado que la concepción de la función como fórmula es sólo superficial y no recoge la esencia del fenómeno estudiado, es decir, la correspondencia entre la variable independiente y la variable dependiente.

La victoria de la definición del concepto función, independientemente de cualquier expresión formal, se acostumbra relacionar con el nombre del matemático alemán P. G. Dirichlet. Sin embargo, algunos años antes B. Bolzano y el genial matemático ruso N. Lobachevski habían lanzado la audaz definición de función como correspondencia de índole completamente general.

En este capítulo pretendemos, después de precisar el concepto función y dar la clasificación de las funciones elementales (algunas de las cuales se tratan más detalladamente en el Apéndice), estudiar el concepto límite de una función en un punto de acumulación de su dominio. Terminamos dando el correspondiente criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para funciones. Aspectos interesantes e importantes de la teoría de límites de funciones se trasladan para el próximo capítulo donde podrán tratarse más cómodamente con la ayuda del concepto continuidad funcional.

§ IV.1 Concepto función. Distintas formas de expresar una función

Como se ha planteado en la introducción a este capítulo, al concepto función se llega estudiando dos cantidades variables cuyos respectivos cambios están íntimamente relacionados, en correspondencia mutua. Una función es precisamente una correspondencia.

DEFINICIÓN 1.1

Sean dados dos conjuntos X e Y. Si a cada elemento $x \in X$ se le hace corresponder por una cierta relación *uno* y *solamente un* elemento $y \in Y$, el cual denotaremos $y = f(x)$, entonces, se dice que sobre el conjunto X está definida la *función f*. Al conjunto X se le llama *dominio* de definición de la función f y al conjunto de todos los $y \in Y$ para los cuales existe un $x \in X$, tal que $f(x) = y$ se le llama *imagen de X* por la función f o, simplemente, imagen de f. A la cantidad variable x se le llama *argumento* o *variable independiente* y a la cantidad y se le denomina valor de la función en el punto x *variable dependiente* de x o también imagen de x por f. Al conjunto Y en el cual toma valores la función, se le llama frecuentemente *codominio* de la función f.

Observaciones

1) Para que una función f quede determinada es necesario dar: el dominio de definición X, el codominio Y y la relación o correspondencia por la cual se define para cada $x \in X$ el elemento $y \in Y$ tal que $y = f(x)$.
2) Se acostumbra a denotar una función de la manera siguiente: $f: X \longrightarrow Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$; el dominio X se denota por Dom f y la imagen de f por Im(f) o f(x).

3) Nos interesa el estudio de un tipo concreto de funciones: aquellas en que tanto el dominio de definición X como el codominio Y son subconjuntos de números reales (en particular, X o Y pueden ser todo **R**). Las variables, en este caso, se dicen reales y la función se denomina *función real* de una variable real. En lo adelante, *aunque no se especifique*, el codominio de toda función será **R**.

Un tipo de función real ha sido estudiado en el capítulo anterior: aquella que como dominio de definición tenía al conjunto de los números naturales **N**, es decir, la correspondencia que aparece al definir el concepto sucesión numérica.

Con las funciones reales se pueden definir de manera natural las operaciones aritméticas fundamentales. Dadas las funciones reales f y g se definen las funciones $f \pm g$, fg y $\frac{f}{g}$ de forma tal que:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$fg(x) = f(x)\,g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ , \text{ si } g(x) \neq 0$$

Puede probarse fácilmente que $\text{Dom}(f \pm g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ y que $\text{Dom}(\frac{f}{g}) = (\text{Dom} f \cap \text{Dom} g) \setminus \{x \in \text{Dom } g : g(x) = 0.\}$

Dejamos al lector la prueba de estas aseveraciones.

Existen diversas formas de expresar una función. En particular las funciones pueden darse con ayuda de fórmulas, éste es el *método analítico*. En este método primero se determina la ley de correspondencia o dependencia funcional entre las dos variables y después el dominio de definición.

Ejemplos

1) Consideremos el problema de la caída libre de un cuerpo desde una altura h. Representemos por y la posición del cuerpo. Evidentemente y depende del tiempo t transcurrido desde el instante inicial hasta el momento en que fijemos la posición y es dado por la fórmula:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

(puesto que en el intervalo de 0 a t el cuerpo se traslada un espacio $S = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g \simeq 9{,}81$ m/seg^2 es la aceleración de la fuerza gravitacional). Así determinamos la dependencia funcional de y con relación a t. Para precisar el dominio denotemos por T el momento de contacto del cuerpo con la superficie de la tierra; la altura y en tal caso será nula. Sustituyendo en (1) T por t y 0 por y, determinamos T

$$0 = h - \frac{1}{2}gT^2\ ,\ T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

De esta forma, la caída del cuerpo debe suceder en el intervalo $[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$ y, por consiguiente, éste es el dominio de esta función. La función que expresa matemáticamente este proceso está determinada por:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Subrayemos que la determinación de una función por el método analítico es a través de la fórmula y el dominio de definición de la función. Puesto que en la práctica se encuentran diferentes procesos que son expresados matemáticamente por una misma fórmula, es sumamente importante dejar bien explícito el rango de variación del argumento.

2) La función $S = \frac{1}{2}at^2$, $0 \leqslant t \leqslant T$ expresa la ley de movimiento uniforme con velocidad inicial nula y aceleración a. Pero tal dependencia funcional se encuentra en otros problemas. Por ejemplo, la energía cinética de un cuerpo viene expresada por la fórmula

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

donde m representa la masa de este cuerpo. Para la mecánica newtoniana la velocidad v teóricamente no está acotada, o sea, $0 \leqslant v < \infty$. Posteriormente, a principios del siglo XX, para la mecánica relativista resulta ser cota superior la velocidad de la luz en el vacío, o sea $0 \leqslant v \leqslant 3 \times 10^{10}$ *(cm/s)*.

Desde un punto de vista general podemos considerar la función $y = px^2$, donde p es un parámetro fijo real, para todos los valores de la variable independiente x para los cuales esta fórmula tiene sentido y los valores de la imagen son todos reales. Así, el estudio de la función $y = px^2$ se puede realizar en todo **R**, o sea, para x tal que $-\infty < x < +\infty$.

DEFINICIÓN 1.2

El conjunto de todos los valores reales de la variable x para los cuales está definida y es real la expresión analítica f(x), se llama *dominio máximo* o *natural* de la función y = f(x).

Observación

En este texto, si no se dice lo contrario, siempre que una función venga dada por una expresión analítica, por dominio de esta función se entenderá el dominio máximo o natural de ésta.

Ejemplos

3) Sea $y = \sqrt{1 - x^2}$. El dominio máximo de esta función es el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, puesto que sólo para estos valores la cantidad bajo el radical es positiva. El conjunto imagen es el segmento $0 \leqslant y \leqslant 1$. Por supuesto, como dominio (no natural) puede considerarse cualquier subconjunto propio del segmento $[-1, 1]$.

La dependencia funcional por el método analítico puede expresarse no sólo por una fórmula, sino por dos o más fórmulas. Problemas en los que tal situación ocurre son frecuentes en la Física.

4) Un elevador comienza a subir y a partir de cierto instante se mueve uniformemente. En este mismo momento desde el piso superior se deja caer una pelota, la cual se encuentra con el elevador en el instante t_0 y sube con él. El problema consiste en encontrar la ley de movimiento de la pelota, si la resistencia del aire se considera despreciable.

Sean: t – tiempo del movimiento de la pelota desde el momento del comienzo de su caída.

t_1 – tiempo de subida del elevador hasta el piso superior.

h – altura de la pelota en el instante t.

v – velocidad del elevador.

En el intervalo desde el comienzo de su caída hasta el encuentro con el elevador la pelota cae libremente. En el ejemplo 1 se halló que, entonces,

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{1}$$

En el momento t_0 de encuentro con el elevador la altura de la pelota se halla por la fórmula (1)

$$y(t_0) = h - \frac{1}{2} g t_0^2$$

Después del encuentro de la pelota con el elevador, ambos se elevan juntos y su altura crece uniformemente con la velocidad v, o sea,

$$y = (h - \frac{1}{2} g t_0^2) + v(t - t_0) \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2}$$

Uniendo (1) y (2) obtenemos:

$$y = \begin{cases} h - \frac{1}{2} g t^2, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ h - \frac{1}{2} g t_0^2 + v(t - t_0), & \text{si } t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \end{cases}$$

Observación

Llamemos la atención al lector sobre las principales insuficiencias del método analítico de dar una función. Primeramente, no toda función puede ser dada analíticamente como veremos enseguida y en segundo lugar, la expresión analítica puede ser tan engorrosa que imposibilita su utilización para el estudio de la función o del proceso físico que representa.

Otra forma de dar una función es a través de una descripción de la correspondencia; a este método se le llama *descriptivo.*

Ejemplos

5) La función que a cada número racional le asigna el número 1 y a cada número irracional le hace corresponder el 0 se denomina "función de Dirichlet y se denota $y = D(x)$. En este caso, el dominio de definición es todo **R**, pero la imagen es sólo $\{0, 1\}$. El lector puede tratar de hallar una expresión analítica para esta función.

6) La función que a cada número real x le asocia el mayor número entero menor o igual que x se denomina "función parte entera" y se denotará $y = [x]$ o $y = E(x)$. Esta función tiene como dominio a **R** y como imagen al conjunto **Z**.

7) La función que a cada número real le hace corresponder su valor absoluto o módulo se denomina *función módulo* y se denota $f(x) = |x|$. La función módulo se puede expresar por dos fórmulas analíticas de la forma siguiente:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Observación

Debe tenerse en cuenta que cada nueva función puede servir para la definición de otras funciones en forma analítica utilizando este símbolo nuevo.

Ejemplo

8) A cada número real estrictamente positivo $x > 0$ le hacemos corresponder el número 1, al 0 le asignamos el 0, y a cada $x < 0$ le asociamos el número -1. Como resultado obtenemos una función definida sobre todo **R** y que toma sólo los tres valores: 1, 0 y -1. Esta función así descrita se denota sg x, se lee "signo de x" y puede expresarse por las fórmulas:

$$f(x) = \operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

o, utilizando el ejemplo 7,

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dejamos al lector la comprobación de la equivalencia de estas dos definiciones de la función sg x.

En las aplicaciones técnicas de la matemática un método muy difundido para determinar una función es el método gráfico.

DEFINICIÓN 1.3

Se define como *gráfico* de la función $y = f(x)$ al conjunto de los puntos del plano cartesiano con las coordenadas $(x, f(x))$, donde $x \in \text{Dom}\, f$.

En casos particulares se poseen instrumentos especiales que producen el gráfico de la función en una pantalla y empíricamente se determina el tipo de dependencia funcional. El método gráfico posee una insuficiencia esencial: al construir un gráfico y utilizarlo para la determinación de la función es necesario hacer mediciones, las cuales sólo pueden realizarse con un determinado grado de precisión. No obstante, el gráfico de una función permite establecer conclusiones que, aunque no sean terminantes y exactas, ayudan a la comprensión de los procesos que son representados por tal dependencia funcional. En el Análisis Matemático se estudian procedimientos que permiten de una manera bastante precisa construir el gráfico de una función dada.

Ejemplo

9) A continuación (figuras IV. 3 - IV. 9) se muestran los gráficos de las funciones dadas en los ejemplos anteriores con excepción del gráfico de la función de Dirichlet, el lector puede tratar de hacer el gráfico de esta función y confrontar la dificultad que proviene de la propiedad de densidad de los números racionales y los números irracionales en **R**.

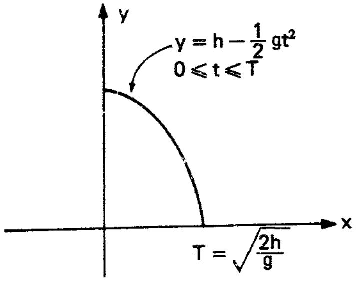


Fig. IV.3

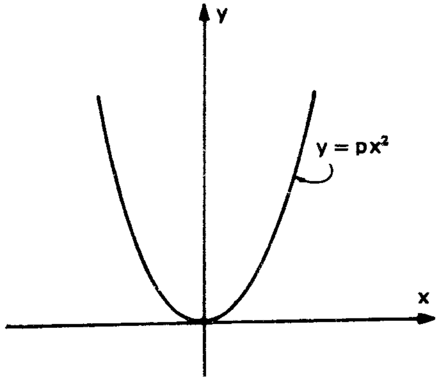


Fig. IV.4

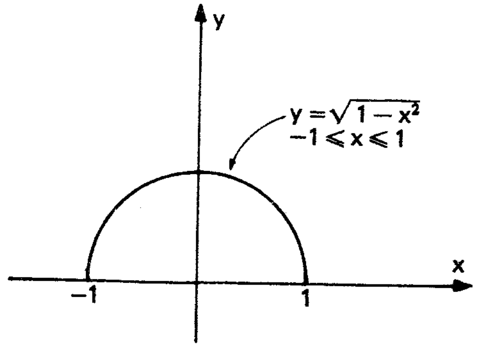


Fig. IV.5

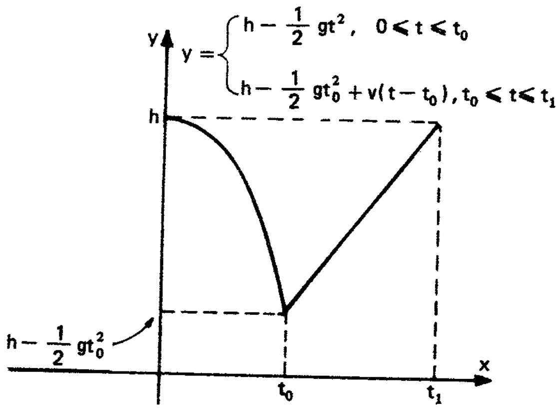


Fig. IV.6

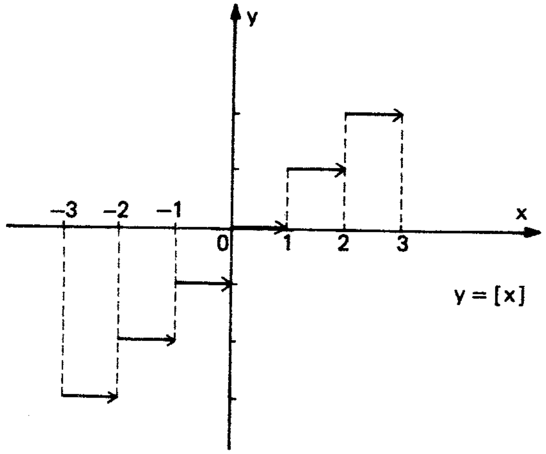


Fig. IV.7

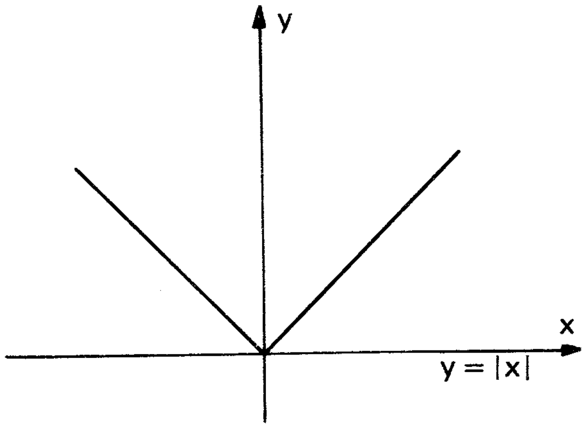


Fig. IV.8

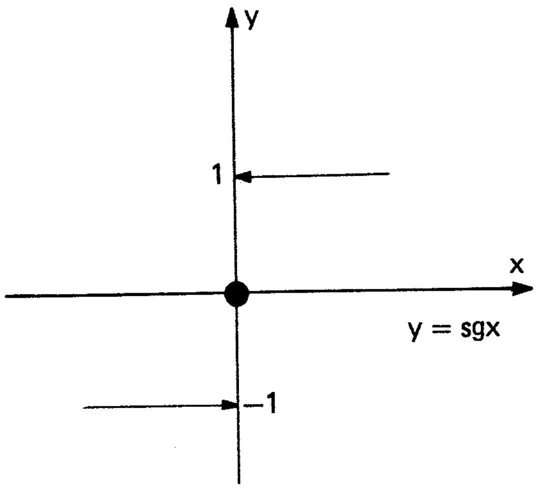


Fig. IV.9

Resulta muy práctico el método experimental de dar una función construyendo una tabla de valores del argumento con sus correspondientes imágenes. En este método se fijan un número finito de valores de x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

y para ellos se determinan experimentalmente los valores de y: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ que se expresan en una tabla (figura IV. 10).

El lector, seguramente, estará familiarizado con las tablas logarítmicas y trigonométricas que se estudian en la enseñanza preuniversitaria.

La formación de la tabla, frecuentemente, se llama *tabulación* y, a la función, *función tabulada.*

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Fig. IV.10

La diferencia entre los valores vecinos de x, x_k y x_{k+1}, seleccionados para construir la tabla se llama *paso de orden k* y se denota $\Delta X_k = x_{k+1} - x_k$. Frecuentemente, las tablas se construyen con un paso constante.

El *método tabular* de expresar una función es cómodo porque para ciertos valores del argumento en la tabla están determinados los valores de la función. La utilización de las máquinas computadoras ha impulsado significativamente el rango de aplicación del método tabular pues existen programas muy sencillos que permiten determinar *aproximadamente* los valores que no contiene la tabla. Estos métodos se llaman de *interpolación* y consisten en sustituir la función entre dos argumentos sucesivos en la tabla por los valores dados por alguna función de naturaleza simple (por ejemplo lineal o cuadrática).

Ejemplo

x	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	0	3,0	4,0	3,0	2,5	2,0	1,7	1,3	1,1	0,8	0,7	0

Fig. IV.11

10) En la tabla de la figura IV. 11 se escriben los datos obtenidos en la medición de la profundidad de un río. En la primera línea se escribe la distancia a una de las riberas. Si se desea una representación más precisa de esta dependencia es necesario aumentar el número de puntos en la medición (disminuir el paso en la tabulación).

Una forma especial de dar una función es a través de la operación denominada *composición de funciones.*

DEFINICIÓN 1.4

Sean $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ y $g: B \longrightarrow \mathbf{R}$ dos funciones reales tales que:

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$$

entonces, a cada $x \in \operatorname{Dom} f$ le hacemos corresponder de manera natural el número z tal que

$$z = g[y] \;,\; \text{donde } y = f(x)$$

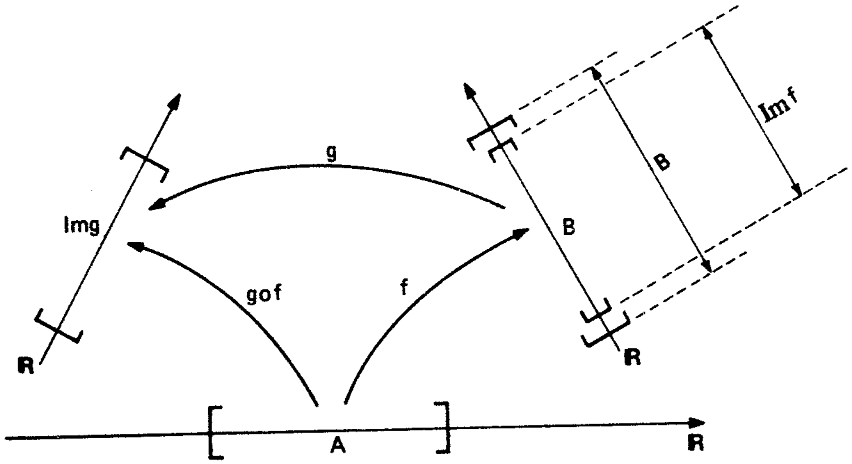


Fig. IV.12

La función definida por la relación $z = g[f(x)]$ se llama *función compuesta* o *superposición* de las funciones f y g, y se denota $z = (g \circ f)(x)$, figura IV. 12.

Ejemplo

11) Sea $f(x) = x^2$, y $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Dom $g = [-1,1] \not\subset$ Im $f = \mathbf{R}_+$. Para poder definir la función compuesta gof con estas dos expresiones analíticas hay que restringir el Dom g a $[0,1]$ y el dominio de f a $[-1,1]$.

Entonces,

$$f([-1,1]) = [0,1] = \text{Dom } g$$

y la función gof tiene sentido:

$$(gof)(x) = \sqrt{1 - x^4}, \ -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Observaciones

1) En general, esta operación de composición no es conmutativa.

Ejemplo

12) Si $f(x) = |x|$ y $g(x) = -x$, entonces para todo $x \in \mathbf{R}$ están definidas las dos compuestas fog y gof, y sin embargo $(fog)(x) = |-x| = |x|$ y $(gof)(x) = -|x|$, evidentemente, son diferentes, pues las imágenes son números opuestos.

2) Tomando en cuenta las restricciones necesarias para que se pueda definir una función compuesta, se puede considerar la composición de más de dos funciones.

Ejemplo

13) Sea $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = \sqrt{x}$

Entonces, Dom $g = \mathbf{R} \supset$ Im $h = \mathbf{R}_+$

y Dom $f = \mathbf{R} \supset$ Im $(goh) = (-\infty, 1)$

luego, tiene sentido:

$$[f\,o(goh)](x) = \left|1 - \sqrt{x}\right|, \text{ para } x \geqslant 0.$$

Además, como Dom $f = \mathbf{R} \supset$ Im $g = \mathbf{R}$ y Dom $(fog) = \mathbf{R} \supset$ Im $h = \mathbf{R}_+$ se puede definir

$$[(fog)\,o\,h](x) = \left|1 - \sqrt{x}\right|, \ x \geqslant 0.$$

Puede demostrarse de manera general que la operación de composición de funciones es asociativa. Así, para toda terna de funciones f, g, h (que verifique las condiciones exigidas para la correcta definición de cada una de las compuestas que aparecen involucradas en la siguiente expresión) se cumple que

$$[(fog)\ o\ h](x) = [f\ o\ (goh)](x)$$

lo cual dejamos al lector de ejercicio.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Halle el dominio de definición de la función

$$y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$

Resolución

La función queda definida para las x tales que la raíz tenga sentido y a la vez el denominador no sea nulo, es decir, para los números reales que cumplen $|x| - x > 0$. Pero $|x| - x > 0$ significa que $x < 0$. Por consiguiente, el dominio de definición de la función es el intervalo $(-\infty, 0)$.

2. Halle fog y gof si:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = (x - 2)(x + 1)$$

Resolución

Debemos analizar primeramente para qué valores de $x, g(x) > 0$.

Esto ocurre si el signo de $(x-2)$ y de $(x+1)$ es el mismo, o sea, si $(x-2>0$ y $x+1>0)$ o $(x-2<0$ y $x+1<0)$. De aquí se deduce que para $x>2$ y $x<-1$ (y sólo para estos valores) se cumple que $g(x)>0$. Luego,

$$f\circ g(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-2)(x+1)}\ , & x<-1\\ 0 & , x\in[-1,2]\\ \sqrt{(x-2)(x+1)}\ , & x>2\end{cases}$$

La función compuesta $g\circ f$ es más fácil de determinar:

$$g\circ f(x)=\begin{cases}-2\ , & \text{si } x\leqslant 0\\ (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)\ , & \text{si } x>0\end{cases}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Exprese y como función de x en los casos siguientes y encuentre el dominio de la función compuesta:
   a) $y=z^2$; $z=x+1$
   b) $y=\sqrt[4]{z+3}+\sqrt[3]{1+z}+\sqrt[2]{1-z^2}$; $z=1-2x^2$
2. Halle, en caso que existan, $f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$ y $g(f(x))$, si
   a) $f(x)=\operatorname{sg} x$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$
   b) $f(x)=\begin{cases}0\ , & \text{si } x\leqslant 0\\ x\ , & \text{si } x>0\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}0\ , & \text{si } x\leqslant 0\\ -x^2, & \text{si } x>0\end{cases}$
   c) $f(x)=-|x|$ y $g(x)=\sqrt{x}$
3. Sea $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Encuentre la expresión analítica de las funciones compuestas siguientes y determine el dominio máximo de definición en cada caso:
   a) $f(f(x))$
   b) $f(\frac{1}{x})$
   c) $f(cx)$
   d) $f(x+y)$
   e) $f(x)+f(y)$
   f) ¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx)=f(x)$?
4. Sea $g(x)=x^2$ y sea
   $h(x)=\begin{cases}0\ , & x \text{ racional}\\ 1\ , & x \text{ irracional}\end{cases}$
   a) ¿Para cuáles y es $h(y)\leqslant y$?
   b) ¿Para cuáles y es $h(y)\leqslant g(y)$?
   c) ¿Para cuáles z es $g(h(z))=h(z)$?
   d) ¿Para cuáles w es $g(w)\leqslant w$?
   e) ¿Para cuáles t es $g(g(t))=g(t)$?
5. Construya el gráfico de las funciones siguientes
   a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sg} x & \text{si } |x|\leqslant 1\\ [x] & \text{si } |x|>1\end{cases}$
   b) $g(x)=\begin{cases}|x+1| & \text{si } x>-2\\ x+3 & \text{si } -5\leqslant x\leqslant -2\\ 2 & \text{si } x<-5\end{cases}$
   c) $h(x)=f\circ g(x)$ donde f y g son las de los incisos (a) y (b), respectivamente.

§ IV.2 Funciones elementales y su clasificación

Las *funciones elementales básicas* se conocen de la enseñanza preuniversitaria y son las siguientes:

Función constante: $y=c$ $(c\in \mathbf{R})$ (c-fijo)

Función potencia: $y=x^\alpha$ $(\alpha\in\mathbf{R})$

Función exponencial: $y=a^x$ $(a>0)$

Función logarítmica: $y=\log_a x$ $(a>0)$

(Si $a=10$ se denota $y=\log x$ y si $a=e$, $y=\ln x$)

Funciones trigonométricas: $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$

$y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$

En el próximo capítulo se introducen las llamadas funciones trigonométricas inversas que también se consideran funciones elementales básicas.

DEFINICIÓN 2.1

Toda función que puede ser dada mediante fórmulas las cuales contienen solamente un número finito de operaciones aritméticas y composiciones de funciones elementales básicas se llama función elemental.

Ejemplo

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+\log x}}{\operatorname{sen} x^2}$ es una función elemental constituida por las funciones elementales básicas $\sqrt{x}$, $\log x$, $\operatorname{sen} x$ y x^2.

Observaciones

1) Es necesario subrayar que el problema de la definición rigurosa de las funciones elementales básicas no es tan fácil como puede parecer. Por ejemplo, la función

exponencial $y = a^x$ puede definirse fácilmente para los valores racionales de x a partir de las propiedades aritméticas de los números reales estudiados en el Capítulo I, pero, para el caso en que x es irracional tal definición no puede considerarse sencilla (véase Apéndice). Asimismo, la definición de las funciones trigonométricas sen x y cos x con ayuda de razonamientos geométricos, evidentemente no es rigurosa, puesto que se basa en la existencia de una correspondencia entre los puntos de la circunferencia y los números reales en el intervalo $[0,2\pi)$, la cual no puede establecerse de una forma elemental sin caer en contradicciones lógicas.

2) Como dominio de una función elemental, de acuerdo con lo planteado en el epígrafe anterior, se entiende el conjunto de todos los números reales x para los cuales, primero, la fórmula que determina la función elemental tiene sentido, y segundo, en el proceso de realización de los cálculos indicados en esta fórmula se obtienen sólo números reales.

3) Demostrar que una cierta función no es elemental, es un problema generalmente complicado. La función de Dirichlet D(x) introducida en el epígrafe anterior es un ejemplo de una tal función; el lector puede corroborar nuestra observación tratando de demostrar que D(x) no es elemental.

Las funciones elementales suelen dividirse en dos clases principales: funciones elementales algebraicas y funciones elementales trascendentes.

Las funciones elementales algebraicas son las siguientes:

a) Las funciones polinomiales, que son las funciones elementales que se expresan en la forma:

$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ donde los a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, son números reales. Si $a_n \neq 0$ entonces el número n se llama *grado* de la función polinomial $P_n(x)$.

Toda función polinomial tiene como dominio máximo el conjunto de los números reales **R**.

Ejemplo

2) $y = x^3 + 3x^2 + \sqrt{2}$ es una función polinomial de tercer grado.

b) Las funciones racionales son aquellas funciones elementales que pueden expresarse como cociente de dos funciones polinomiales P(x) y Q(x):

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de una función racional está constituido por los números reales que no anulan a la función polinomial Q(x).

Ejemplo

3) $y = \dfrac{2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ es una función racional cuyo dominio es $\mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$ pues $Q(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

c) Funciones irracionales son todas aquellas que pueden expresarse con la ayuda de las cuatro operaciones aritméticas y la composición de un número finito de funciones racionales y de funciones potencia con exponente racional con la condición de que aparezca al menos una potencia con exponente no entero.

El dominio máximo de las funciones irracionales no puede determinarse de forma general puesto que depende de la fórmula específica que expresa la función.

Ejemplo

4) $y = \dfrac{\sqrt{x+1} - x}{x^2 - 1}$ es una función irracional cuyo dominio máximo es $\{x \in \mathbf{R} : x > -1,\ x \neq 1\}$, pues x debe ser mayor que -1 para que exista la raíz de $x + 1$ y $x \neq \pm 1$ para que el denominador no se anule.

Observación

A la clase de las funciones algebraicas pertenecen otras funciones que no son racionales ni irracionales, por ejemplo, la definida por la ecuación $y^5 - xy + 1 = 0$. En general, se dice que y es función algebraica de x_0 si satisface a una ecuación de la forma:

$$P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y + P_n(x) = 0$$

donde $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ son funciones polinomiales en x. El estudio de estas funciones y su comportamiento geométrico, constituye uno de los problemas fundamentales de la Geometría Algebraica y su investigación ha abierto campos importantes de la Matemática Moderna.

Las funciones elementales que no son algebraicas se llaman trascendentes, pues "trascienden la potencia de los métodos algebraicos" (Euler). Se puede probar (pero no de forma sencilla) que todas las funciones trigonométricas y también las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes. En el Apéndice se estudian con más detalle algunas de estas funciones trascendentes. Dada su constante y necesaria utilización en lo que sigue, trataremos aquí algunas características de las funciones trigonométricas.

Comencemos con las propiedades fundamentales:

PROPIEDAD 2.2

F.T 1) Para cualesquiera números reales x_1, x_2 y x se cumple:

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

F.T 2) $\operatorname{sen} 0 = 0$; $\cos 0 = 1$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

F.T 3) Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$; entonces, $0 < \operatorname{sen} x < x$

Las referidas propiedades se demuestran en los cursos preuniversitarios por medio de razonamientos geométricos.

Recordemos sólo la demostración geométrica de la desigualdad F.T 3). Además de tal desigualdad estableceremos la desigualdad $x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$ donde $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Consideremos la circunferencia de radio 1 con centro en el punto 0 y el punto A sobre esta circunferencia (figura IV. 13). Sea M un punto de la circunferencia en el primer cuadrante y sea x la longitud del arco AM, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (x – medida en radianes del ángulo AOM).

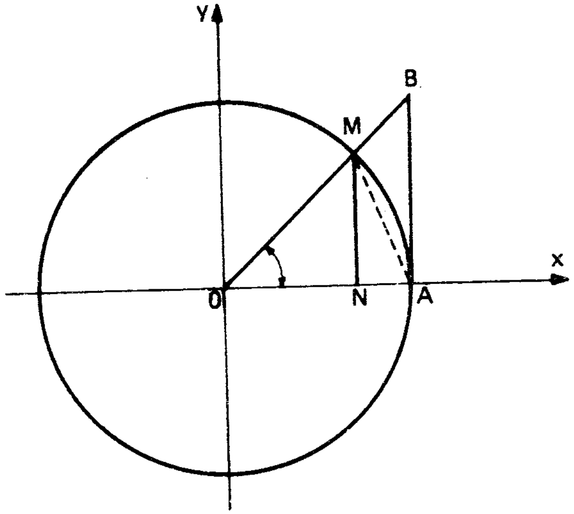


Fig. IV.13

Sea N la base de perpendicular, bajada desde M hacia OA y B el punto de intersección de la perpendicular a OA que pasa por A, con la prolongación del segmento OM. Entonces $MN = \operatorname{sen} x$, $ON = \cos x$, $AB = \operatorname{tg} x$. Como el triángulo OMA está contenido en el sector OMA, el cual a su vez está contenido en el triángulo OBA, para sus respectivas áreas se tiene

$$A_{\Delta OMA} \leq A_{\text{sector } OMA} \leq A_{\Delta OBA}$$

y por las fórmulas correspondientes de áreas se tiene:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

luego, tienen lugar las desigualdades

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

Bajo tales condiciones para x, $\operatorname{sen} x > 0$. De esta forma queda establecido que

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

Hemos dicho que las propiedades FT1, FT2 y FT3 son fundamentales puesto que pueden utilizarse como base de la definición axiomática de las funciones sen x y cos x.

Se puede demostrar que *existen sólo dos funciones definidas en todo* **R** *que cumplen las condiciones FT1, FT2 y FT3.* Esta demostración es algo complicada y sale de los objetivos de este curso. Menos difícil es demostrar que de las propiedades FT1, FT2 y FT3 se pueden deducir todas las otras propiedades de las funciones sen x y cos x conocidas por el lector de los textos preuniversitarios y demostradas allí a través de razonamientos geométricos.

Como ejemplo, deduzcamos algunas de las más usadas propiedades de las funciones trigonométricas:

PROPIEDAD 2.3

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \ \text{ y } \ |\cos x| \leq 1 \ , \text{ para todo } x \in \mathbf{R}$$

DEMOSTRACIÓN

Esto es consecuencia directa de la relación funcional $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ de FT1.

PROPIEDAD 2.4

$$\cos(-x) = \cos x \ , \ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \ \text{ para todo } x \in \mathbf{R}$$

DEMOSTRACIÓN

En efecto, utilizando las dos primeras relaciones de FT1 y las dos primeras de FT2 obtenemos que:

$$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}[x + (-x)] = \operatorname{sen} x \cos(-x) + \cos x \operatorname{sen}(-x) = 0$$
$$\cos 0 = \cos[x + (-x)] = \cos x \cos(-x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-x) = 1$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\cos(-x)$ y $\operatorname{sen}(-x)$. Resolviendo este sistema obtenemos que:

$$\cos(-x) = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \cos x$$

$$\operatorname{sen}(-x) = \frac{\operatorname{sen} x}{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)} = -\operatorname{sen} x$$

PROPIEDAD 2.5

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$
$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

para x_1 y x_2 números reales cualesquiera.

DEMOSTRACIÓN

Esto se deduce de FT1 y la propiedad 2.4. En efecto:

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen}[x_1 + (-x_2)] = \operatorname{sen} x_1 \cos(-x_2) + \cos x_1 \operatorname{sen}(-x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos[x_1 + (-x_2)] = \cos x_1 \cdot \cos(-x_2) - \operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen}(-x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2$$

PROPIEDAD 2.6

$$\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{x_2 + x_1}{2} \cos \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \operatorname{sen} \frac{x_2 - x_1}{2}$$

para x_1 y x_2 números reales cualesquiera.

DEMOSTRACIÓN

Utilizando la relación FT1 y la propiedad 2.5 obtenemos que:

$$\operatorname{sen} x_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \cos \frac{x_2 - x_1}{2} + \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \operatorname{sen} \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{x_2 + x_1}{2} \cos \frac{x_2 - x_1}{2} - \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Sumando y restando igualdades llegamos a las dos relaciones deseadas.

PROPIEDAD 2.7

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}$$

DEMOSTRACIÓN

Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esto es consecuencia de la propiedad FT3. Para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, la desigualdad se obtiene de la relación $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y de $0 < \operatorname{sen}(-x) < -x$ para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ pues $(-x) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Para $x = 0$, $\operatorname{sen} x = x$.

Para $\frac{\pi}{2} \leqslant |x|$, tenemos:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$$

La propiedad siguiente relaciona ambas funciones de una manera simple.

PROPIEDAD 2.8

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}.$$

DEMOSTRACIÓN

En efecto, de 2.5 y FT2 obtenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = \cos x$$

Establezcamos por último la periodicidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (otras propiedades se proponen como ejercicios al final del epígrafe).

PROPIEDAD 2.9

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}$$

DEMOSTRACIÓN

Haciendo $x = x_1 = x_2$ en FT1, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \tag{1}$$

De tales relaciones, haciendo $x = \frac{\pi}{2}$ y basándonos en que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, obtenemos:

$$\operatorname{sen} \pi = 0 \ , \ \cos \pi = -1$$

y de éstas, a su vez, utilizando de nuevo (1):

$$\operatorname{sen} 2\pi = 0 \ , \ \cos 2\pi = 1$$

Luego, se deduce de lo anterior, aplicando FT1 que:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \cos 2\pi + \cos x \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2\pi = \cos x$$

lo cual significa la periodicidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ con período 2π.

Para terminar este epígrafe subrayemos que toda otra función trigonométrica conocida se obtiene mediante combinaciones de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

A continuación, recordamos las gráficas que representan tales funciones trigonométricas (figuras IV.14-IV.19).

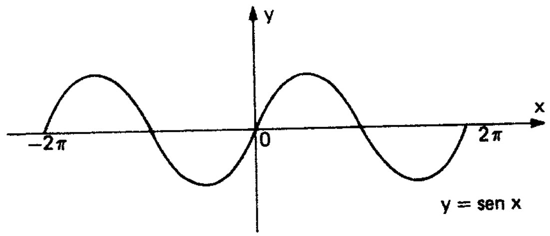


Fig. IV.14

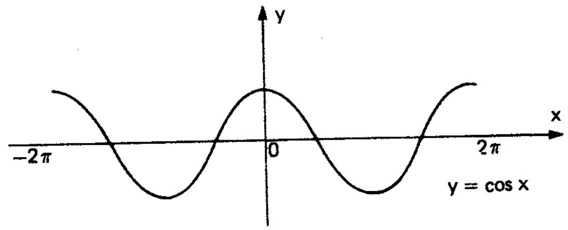


Fig. IV.15

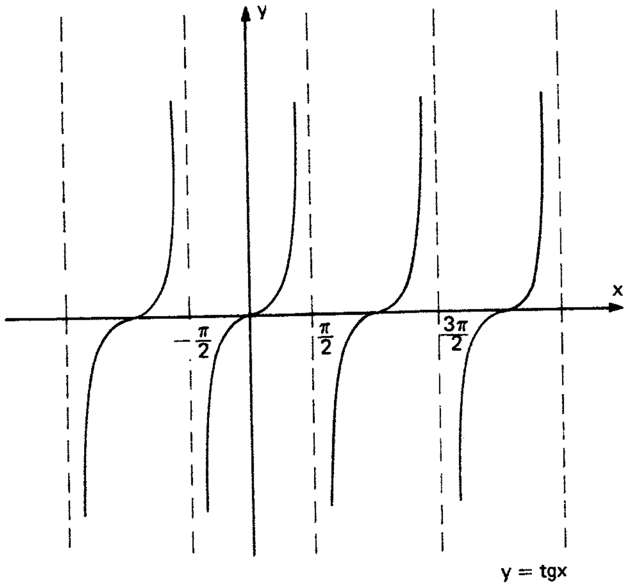


Fig. IV.16

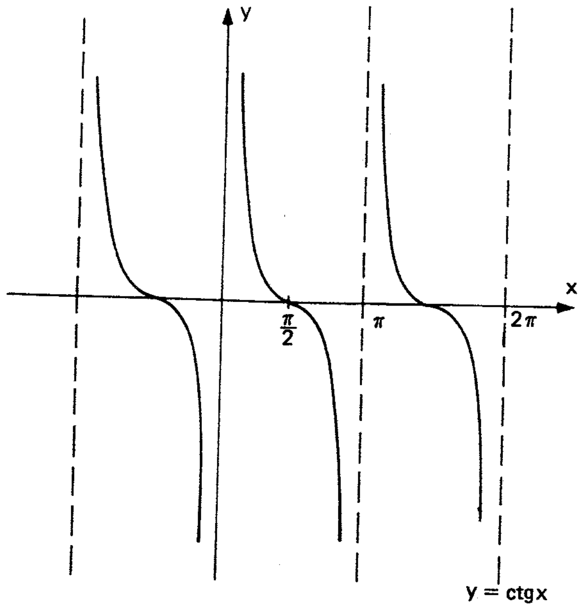


Fig. IV.17

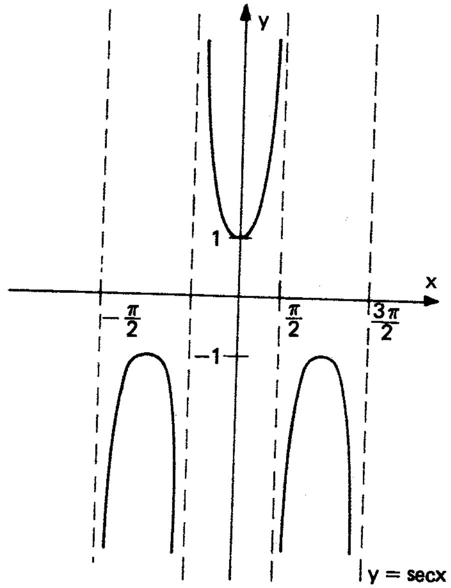


Fig. IV.18

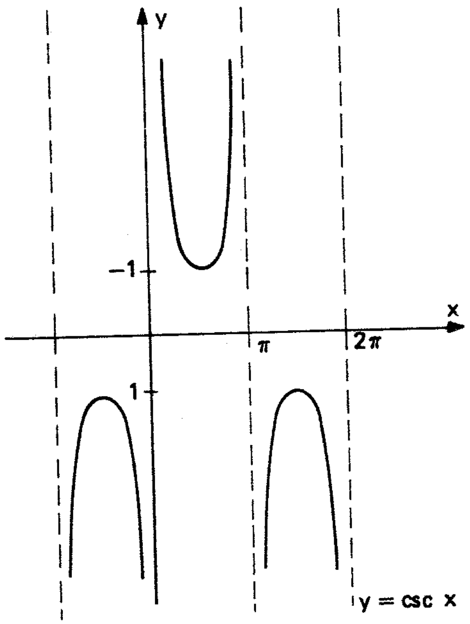


Fig. IV.19

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Pruebe que $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Por la propiedad 2.8 tenemos que:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

Utilizando la propiedad fundamental FT1 para $x = \frac{\pi}{4}$ se cumple:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1.$$ De ahí que:

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1.$$

Como $\frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$ por la propiedad fundamental FT3 $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} > 0$, y se deduce que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1 & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) & , \quad 0 \leqslant x < \pi \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x} - 2} & , \quad \pi \leqslant x \leqslant 9 \end{cases}$$

halle $f(-1)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(e^2)$.

Resolución

El punto $x = -1$ pertenece al intervalo $[-1, 0)$ por lo que $f(-1) = 3^{-(-1)} - 1 = 3 - 1 = 2$

$x = \frac{\pi}{2}$ pertenece a $[0, \pi)$ y, por tanto,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$$ (utilizando el ejercicio anterior).

El punto $x = e^2$ pertenece a $[\pi, 6]$ por lo que:

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2} - 2} = \frac{2}{e - 2}$$

3. Encuentre una función polinomial de 2do. grado $P_2(x)$ tal que $P_2(0) = 5$, $P_2(-1) = 10$, $P_2(1) = 6$.

Resolución

La expresión polinomial de 2do. grado es $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales. Utilizando las 3 condiciones dadas pueden determinarse los 3 parámetros a, b y c. En efecto:

$$P_2(0) = a\,0^2 + b0 + c = 5$$

$$P_2(-1) = a - b + c = 10$$

$$P_2(1) = a + b + c = 6$$

constituye un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, de cuya resolución se obtienen los valores $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$.

Luego $P_2(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Dada la función $f(t) = ta^t$ $(a > 0)$ halle:

$$f(0), f(1), f(-1), f(\tfrac{1}{a}), f(a), f(-a)$$

2. Halle el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$ d) $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$ e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$ f) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-16)}{\sqrt{4-x^2}}$

3. Dada las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{si } x \leqslant -1, \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } -1 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}^2(x) & \text{si } x \geqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sg} x & \text{si } |x| < 4 \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{2^x}} & \text{si } |x| \geqslant 4 \end{cases}$$

halle: $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $g(1)$, $g(4)$, $f(g(4))$, $g(g(4))$, $g(f(\pi))$,

$$f(\tfrac{\pi}{2}, f(f(-1))), g(\underbrace{\ldots(}_{\text{80 veces}}g(4f(\tfrac{\pi}{2}\, f(f(-1))))) \underbrace{\ldots)}_{\text{80 veces}}$$

4. Determine las funciones elementales básicas que componen las siguientes funciones elcmentales y determinar sus dominios.

a) $y = \operatorname{sen}(2x+1)$ b) $y = \operatorname{sen}((2x+1)^3)$

c) $y = \ln(\operatorname{tg}\sqrt{x})$ d) $y = 5^{(3x+1)^2}$

5. Encuentre todas las funciones racionales del tipo

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

tales que:

a) $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

b) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(x) \neq x$ para $x \neq 0,1$.

c) $f(0) = 0$ y $f(x) \neq x$, para $x \neq 0$

d) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(-1) = -1$

e) $f(f(x)) = x$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

6. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas

a) $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

b) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$

c) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x$

d) $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \dfrac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$

(−)

$\operatorname{tg}(x_1 - x_2) = \dfrac{\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2}{1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$

e) $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \dfrac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$

$\operatorname{sen} mx \cos nx = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x)$

$\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$

donde m y n son números enteros cualesquiera.

7. a) Deduzca fórmulas para sen 3x y cos 3x.

b) Utilice estas fórmulas para demostrar que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(valores deducidos mediante razonamientos geométricos en la enseñanza preuniversitaria).

§ IV.3 Definición de límite de una función según Heine

Consideremos una función real f(x) definida sobre un dominio X para el cual a es un punto de acumulación. Es de nuestro interés investigar el comportamiento de esta función cuando la variable x se acerca a a, particularmente, a través de una sucesión de valores cualquiera $x_n \in X$ cuyo límite sea a (obsérvese que tal sucesión existe, puesto que a es punto de acumulación de X).

DEFINICIÓN 3.1 (Límite de una función según Heine)

Sea f(x) una función real definida sobre X y sea a punto de acumulación de X. Decimos que el número l es límite de la función f cuando x tiende a a si para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in X$, $x_n \longrightarrow a$ y $x_n \neq a$, $n = 1,2,\ldots$, la sucesión de valores $\{f(x_n)\}$ converge al número l; es decir

$$\lim f(x_n) = l$$

y se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

o $f(x) \longrightarrow l$, cuando $x \longrightarrow a$.

Observaciones

1) Póngase atención en el hecho de que la sucesión de elementos x_n del dominio de la función se elige tal que $x_n \neq a$ por lo que la función no tiene que estar definida en el mismo punto a, y aunque esté definida, esto no interviene en la definición de límite.

2) Esta definición de límite según Heine de una función necesita que el lector tenga claro el concepto de punto de acumulación y su caracterización por sucesiones. No tiene sentido pretender hallar el límite de una función en un punto que no sea de acumulación de su dominio de definición, pues son sólo los puntos de acumulación los que poseen la característica de ser límites de sucesiones cuyos términos son distintos dos a dos y por tanto distintos a su límite.

3) La existencia del límite de la función f en el punto a no puede depender de la elección de la sucesión $\{x_n\}$, o sea, el límite existe porque $\{f(x_n)\}$ es convergente y su límite *es el mismo* cualquiera que sea la sucesión $\{x_n\}$ que cumple las condiciones dadas en la definición.

4) Si por cualquier criterio de convergencia podemos demostrar que para toda sucesión $\{x_n\}$ del dominio de f, tal que $x_n \longrightarrow a$ y $x_n \neq a$, se tiene que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ es convergente, entonces ¿el límite de f(x) en a existe? , en otra forma ¿todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tendrán el *mismo* límite? La respuesta es afirmativa y su prueba la dejamos al lector como útil ejercicio.

5) Para probar que una función f(x) no tiene límite en x = a basta encontrar una sucesión $\{x_n\}$ con las características expresadas en la definición 3.1 tal que $\{f(x_n)\}$ no sea convergente o bien dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ tales que $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$ converjan a límites diferentes.

Ejemplos

1) Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$. Investiguemos si existe o no $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Tomemos una sucesión de elementos $x_n \in \text{Dom } f$ (es decir, $x_n \neq 1$), tal que $\lim x_n = 0$ y $x_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces, por las propiedades aritméticas del límite de sucesiones, tenemos:

$$\lim \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2(\lim x_n)^2 + \lim x_n - 1}{\lim x_n - 1}$$

De esta forma $\lim f(x_n) = 1$ y como este límite no depende de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \longrightarrow 0$, $x_n \neq 0$, $x_n \neq 1$, entonces, será

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

2) Sea $f(x) = \text{sen } \dfrac{1}{x}$ (ver figura IV.20)

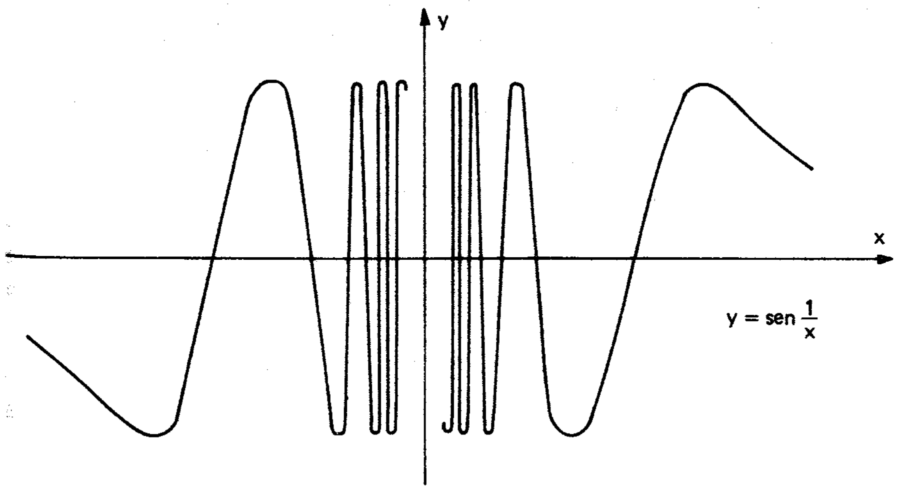


Fig. IV.20

Investiguemos de nuevo el problema sobre la existencia de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. El gráfico de f(x) hace suponer que en 0 no existe el límite. Para probar esto, según la observación 5, basta encontrar dos sucesiones infinitesimales tales que las sucesiones imágenes tiendan a límites diferentes. Tomemos las sucesiones de término general

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \text{ y } x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \text{ para } n = 1,2,3,\ldots$$

Evidentemente,

$$\lim x_n = \lim x'_n = 0$$

y

$$x_n \neq 0,\ x'_n \neq 0,\ n = 1,2,\ldots$$

Además, $f(x_n) = \operatorname{sen} \pi n = 0,\ n = 1,2,3,\ldots$

$$f(x'_n) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

Por tanto,

$$\lim f(x_n) = 0 \text{ y } \lim f(x'_n) = 1$$

de donde se obtiene que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe

Observación

Sean las funciones f y g definidas sobre el mismo dominio, salvo, quizás, en el punto a, y sea $f(x) = g(x)$ para $x \neq a$. Entonces, del hecho de que en la definición de límite en el punto a sólo intervienen valores de la función en puntos $x \neq a$, se deduce que los límites de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto a existirán o no simultáneamente teniéndose, en caso de que existan, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. En esta simple observación se fundamenta la llamada regla de eliminación de indeterminaciones con ayuda de simplificación de fracciones. Aclaremos esto con un ejemplo.

Ejemplo

3) Encontrar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}$. Repitiendo el razonamiento desarrollado en el ejemplo 1 se llega a la indeterminación $\dfrac{0}{0}$; esto es, este procedimiento no da respuesta al problema de existencia o no del límite. Sin embargo, tomemos la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ que se obtiene simplificando x en la expresión $g(x) = \dfrac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}$ y que para $x \neq 0$ cumple $f(x) = g(x)$. Entonces, de acuerdo con el ejemplo (1), $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ y, por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1$$

Dada esta definición del límite de una función se puede deducir fácilmente la validez de las propiedades aritméticas del límite de funciones en un punto y otras propiedades elementales a partir de las propiedades del límite de sucesiones.

TEOREMA 3.2

Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

4) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Como ejemplo demostremos la fórmula (2)

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Sea $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Entonces, para una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ tal que $x_n \to a$ y $x_n \neq a$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, se cumple $A = \lim f(x_n)$, $B = \lim f(x_n)$. Por eso, aplicando una de las propiedades aritméticas del límite de sucesiones, se tiene

$$\lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = AB$$

y como este límite no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$, entonces, de acuerdo con la definición de límite de una función en el punto a,

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = AB$$

Análogamente, se demuestran las otras propiedades.

Observación

Puede entenderse necesario que en las propiedades del cociente (3) y la raíz (4) debe exigirse la no anulación de la función g y $f(x) > 0$, respectivamente, pero esto es consecuencia respectivamente de las condiciones $\lim g(x) \neq 0$ y $\lim f(x) > 0$, como se verá en el § IV.5.

Un método útil para el cálculo de límites resulta el llamado "de cambio de variables" el cual exponemos a continuación:

TEOREMA 3.3

Sea la función $f(x)$ definida en una vecindad reducida del punto a, es decir en $V(a) \setminus \{a\}$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Sea $F(y)$ una función definida en una vecindad reducida de b de modo que exista la función compuesta $F(f(x))$ en una vecindad reducida de a. Y supongamos $\lim\limits_{y\to b} F(y) = l$, si además $f(x) \neq b$, para todo $x \neq a$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y) = l$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n \to a$, $x_n \neq a$ y $x_n \in \mathrm{Dom(Fof)}$.

Pongamos $y_n = f(x_n)$. Por la condición impuesta a $f(x)$, podemos asegurar que $f(x_n) \neq b$ y $\lim f(x_n) = b$. Como existe el límite de $F(y)$ en el punto $y = b$ para cualquier sucesión $\{y_n\}$, $y_n \to b$, $y_n \neq b$ y $y_n \in \mathrm{Dom}\, F$ se tiene $\lim F(y_n) = l$.

Pero esto significa

$$\lim F(f(x_n)) = l,$$

lo cual demuestra el teorema.

Ejemplo

4) Utilizando el método de cambio de variables hallemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$$

Cuando $x \to 1$ el cociente presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Hagamos el cambio de variables $y = \sqrt[3]{26+x}$. Entonces, $y^3 = 26 + x$, de donde $x = y^3 - 26$. Como por la propiedad (4) del teorema 3.2

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{26+x} = 3,$$

debemos calcular $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3} = \lim\limits_{y\to 3} \dfrac{2(y^3-26)-2}{y-3}$

o sea

$$\lim_{y\to 3} \frac{2y^3-54}{y-3} = 2\lim_{y\to 3} \frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{y-3} = 54$$

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in V(a,r)$ $(r>0)$, $x \neq a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, entonces $\lim g(x) = l$

Resolución

Sea $\{x_n\}$ tal que $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Como $x_n \to a$ sabemos que $x_n \in V(a,r)$, para $n \geqslant N_r$; luego para $n \geqslant N_r$, $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$.

De la definición de límite según Heine y de la hipótesis obtenemos que $\lim f(x_n) = \lim f(x_n) = l$. En fin, utilizando el criterio del emparedado se obtiene que $\lim g(x_n) = l$. Como esto es válido para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \neq a$, $x_n \to a$, utilizando nuevamente la definición de límite según Heine obtenemos que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

2) Utilizando cambio de variables, halle el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[2k]{x^2+1}-1}{x^2}$ donde k es un número natural fijo.

Resolución

Haciendo $y^{2k} = (x^2+1)$ obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[2k]{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^{2k}-1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y^k-1)(y^k+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+1)(y^k+1)}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{1}{(y^{k-1}+\ldots+1)(y^k+1)} = \frac{1}{2k}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Calcule los límites siguientes, utilizando las propiedades aritméticas o cambio de variable según sea necesario.

a) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-b}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-a^4}{x^2-a^2}$

f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2h + 3xh^2 + h^2}{2xh + 5h^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$

j) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

k) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$

2. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{\pi}{x}$ no existen.

3. Demuestre que si para todo $x \in V(a), x \neq a, a \in \mathbf{R}$ se tiene que $f(x) \leqslant g(x)$; y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$, entonces $l \leqslant l'$.

§ IV.4 Límites laterales y al infinito

Si el dominio X de la función es tal que los valores cercanos al punto de acumulación a se encuentran sólo a uno de sus lados, es decir, a la derecha o a la izquierda de a, entonces en la definición 3.1 se consideran sólo sucesiones $\{x_n\}$, tales que $x_n \to a$ y $x_n > a$ ó $x_n < a$ respectivamente.

Sin embargo, en ocasiones, aunque la función esté definida a ambos lados del punto a tiene interés considerar el límite cuando nos acercamos a a solamente por uno de los lados. Esto da lugar a la definición siguiente:

DEFINICIÓN 4.1

Sea la función f definida sobre X y sea a punto de acumulación de X. Entonces el número l se dice *límite por la derecha (por la izquierda)* de la función f en el punto a si para cualquiera sea la sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in X, n \in \mathbf{N}$:

$$\lim x_n = a \ , \ x_n > a$$
$$(\lim x_n = a \ , \ x_n < a)$$

la correspondiente sucesión de valores $\{f(x_n)\}$ converge al número l:

Si un tal número l existe, se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \quad (\lim_{x \to a^-} f(x) = l)$$

Los límites por la derecha y por la izquierda se llaman *límites laterales* de la función f en el punto a.

Observaciones

1) Si a es punto de acumulación tanto para los puntos de X a la derecha como para los que están a la izquierda de él, entonces se pueden considerar ambos límites laterales. Puede demostrarse fácilmente (¡ejercicio!) que si en el punto a ambos límites laterales existen y son iguales, entonces, el límite ordinario existe y es igual a dicho valor común, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

   Recíprocamente, la existencia de límite en el punto implica la existencia o igualdad de ambos límites laterales.

2) Ambos límites laterales pueden existir y, sin embargo, no ser iguales, por ejemplo:

   Tomemos la función y = sg x (ver figura IV.21).

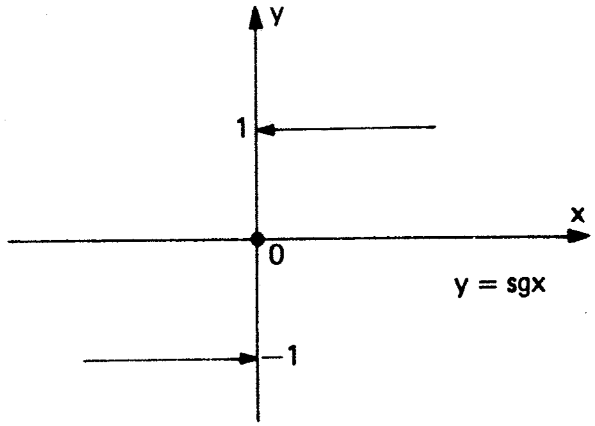


Fig. IV.21

Sea $x_n > 0$, $x'_n < 0$ $n = 1, 2, \ldots$

$$\lim x_n = \lim x'_n = 0$$

Entonces, $\lim sgx_n = \lim 1 = 1$

$$\lim sgx'_n = \lim(-1) = -1$$

y esto significa $\lim\limits_{x \to 0^+} sgx = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} sgx = -1$

En los casos en que, como en el ejemplo, existen ambos límites laterales en el punto a, se dice que la función tiene un salto en a y su longitud se define como.

$$\left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right| = d$$

En el ejemplo 1) se prueba que la función sgx tiene un salto en el origen de longitud 2.

3) El hallazgo de los límites laterales es un instrumento útil para determinar si una función tiene o no límite en un punto; por ejemplo:

La función $f(x) = \text{sgx}$ no tiene límite cuando x tiende a cero pues los límites laterales, aunque existen, son diferentes.

Veamos otro ejemplo:

$$\text{Dada la función } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Como ambos límites laterales existen y son iguales podemos decir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe y es igual al valor de los límites laterales, en este caso, cero.

El límite fundamental exponencial. En el capítulo de sucesiones § II.6 probamos que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1}$$

donde n recorre los números naturales. De aquí se deduce que para cualquier sucesión $\{k_n\}$ de números naturales tal que

$$\lim k_n = +\infty \tag{2}$$

se tiene que:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e \tag{3}$$

En efecto, sea dado $\epsilon > 0$. De (1) se obtiene que existe cierto n_ϵ tal que si $n \geqslant n_\epsilon$, entonces

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon$$

y por la condición (2) existe n'_ϵ tal que $k_n \geqslant n_\epsilon$ para $n \geqslant n'_\epsilon$, entonces:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} - e\right| < \epsilon \quad (n \geqslant n'_\epsilon),$$

lo cual significa que se cumple (3).

Sea ahora una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim x_n = 0$ y $x_n > 0$. Probemos que $\lim (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Podemos considerar que $x_n < 1$ sin perder generalidad (¿por qué?). Como $\frac{1}{x_n} > 1$ para cada x_n se encuentra un número natural k_n tal que $k_n + 1 > \frac{1}{x_n} \geqslant k_n$ y por consiguiente $\frac{1}{k_n + 1} < x_n \leqslant \frac{1}{k_n}$ Por tanto:

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} \tag{4}$$

Por la propiedad (3) tenemos

$$\lim \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1}}{\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)} =$$

$$= \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1}}{\lim \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)} = e$$

y $\lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} = \lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) = e$

Luego, pasando al límite en las desigualdades (4), obtenemos:

$$\lim (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$$

Dado que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria tal que $\lim x_n = 0$ y $x_n > 0$, queda demostrado que

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Sea ahora una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim x_n = 0, x_n < 0$. Pongamos $y_n = -x_n$. Entonces, $y_n > 0$ y $\lim y_n = 0$. Además, sin perder generalidad, podemos considerar que $y_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Entonces, $\lim (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim (1 - y_n)^{\frac{-1}{y_n}} = \lim \left(\frac{1}{1 - y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} =$

$$= \lim \left(1 + \frac{y_n}{1 - y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} = \lim (1 + z_n)^{\frac{1}{z_n} + 1}$$

donde $z_n = \dfrac{y_n}{1 - y_n} > 0$, $\lim z_n = 0$.

Por lo demostrado anteriormente:

$$\lim (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim (1 + z_n)^{\frac{1}{z_n}} \lim (1 + z_n) = e$$

Pero $\{x_n\}$ era una sucesión arbitraria tal que $\lim x_n = 0$ y $x_n < 0$; por eso

$$\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Así, la función $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, tiene en el punto 0 límite por la derecha e izquierda, ambos iguales al número e; por tanto, existe el límite en $x = 0$ y es igual a e:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Este límite se conoce como límite fundamental exponencial, pues a partir de él, haciendo convenientes transformaciones y cambios de variables se pueden resolver infinidad de límites de tipo exponencial. Así, por ejemplo, para determinar $\lim_{x \to 0}(1 + \operatorname{sen} x)^{3 \csc x}$ hacemos el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$ y obtenemos la expresión equivalente $\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{3}{y}}$ la cual se transforma en $\lim_{y \to 0} [(1+y)^{\frac{1}{y}}]^3 = e^3$ (al final del epígrafe se resuelven ejercicios de este tipo).

Supongamos ahora que el dominio X de f contiene números de módulo arbitrariamente grande. Aunque $+\infty$ y $-\infty$ son sólo símbolos representativos de la divergencia de un proceso al límite y no son números reales, es conveniente tomar ciertas consideraciones que permitan hablar de límite al infinito análogamente a como se habla de los límites ordinarios.

Si por vecindades de $+\infty$ (o $-\infty$) entendemos los intervalos abiertos $(x_0, +\infty)$ (o $(-\infty, x_0)$) para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces, decir que $+\infty$ (o $-\infty$) es punto de acumulación del dominio X puede entenderse como que en toda vecindad de $+\infty$ (o $-\infty$) existen infinitos puntos de X. Dejamos al lector probar que $+\infty$ es punto de acumulación del conjunto X si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ de términos diferentes que diverja a $+\infty$ (lo mismo para $-\infty$).

DEFINICIÓN 4.2

Diremos que el número l es límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ si la función $f(x)$ está definida en un dominio que posee a $+\infty$ como punto de acumulación y $\lim f(x_n) = l$ para toda sucesión $\{x_n\}$ divergente a $+\infty$ tal que $x_n \in \operatorname{Dom} f$, $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, se define $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$. La notación $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ significará entonces que tanto $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ como $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ existen y ambos son iguales a l.

Observación

En general, muchas propiedades de los límites para $x \to a$, donde a es un número finito se cumplen análogamente para $x \to \infty$. Los enunciados que se han hecho en el texto de estas propiedades pueden traducirse directamente al caso $a = \infty$. Así, todas las propiedades demostradas en este Capítulo para límites se cumplen también para el límite al infinito.

Ejemplos

1) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$.

Probemos:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

tomando $\{x_n\}$ tal que $x_n \to +\infty$, obtenemos $\lim \frac{1}{x_n} = 0$

Por tanto, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Análogamente, se toma $\{x_n\}$ tal que $x_n \to -\infty$ y se obtiene $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

De a) y b) se concluye que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2) Para la función $f(x) = \operatorname{sg} x$ evidentemente se cumple que $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sg} x = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sg} x = -1$, por lo que $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sg} x$, no existe.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice la existencia de los límites laterales de la función

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ (1+x)^{\frac{6x+1}{2x}}, & x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$ y concluya si existe o no el límite en $x = 0$.

Resolución

a) $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{5x+2}{4x+2} - 1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Haciendo el cambio $y = \dfrac{x}{4x+2}$; $x = \dfrac{2y}{1-4y}$ y sustituyendo:

$$\lim_{y \to 0^-} (1+y)^{\frac{1-4y}{2y}} = \lim_{y \to 0^-} \left((1+y)^{\frac{1}{2y}} (1+y)^{-2} \right)$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \left((1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{6x+1}{2x}} = \lim_{x \to 0^+} \left[(1+x)^{\frac{1}{2x}} (1+x)^3 \right] = e^{\frac{1}{2}}$$

Como ambos límites laterales en $x = 0$ existen y son iguales, entonces, el límite en $x = 0$ existe y es también $\sqrt{e}$.

2 Calcule el límite al infinito siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\csc^2 \frac{1}{x}}$$

Resolución

Recordando que $\cos^2 \frac{1}{x} - 1 = -\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

$$\text{y} \quad \csc^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}$$

si hacemos el cambio de variable $y = -\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$, obtenemos

$$\lim_{x \to \infty} \left(\cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\csc^2 \frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} (1+y)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{y \to 0} \left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-1} = e^{-1}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Analice la existencia de los límites laterales de las funciones siguientes en los puntos indicados.

a) $f(x) = [x]$ (parte entera de x) en los enteros

b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}, \text{ en } x = 3$$

c) $$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{x+3}, & -1 < x < 0 \\ (1+x)^{5x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ en } x = 0$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2+5x}{2+4x}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0 \\ (1+2x)^{\frac{3x+1}{4x}}, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ en } x = 0$$

2. Calcule si existen los límites al infinito siguientes:

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{4x+5}{2x+3}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{4y^2-3}{2y^3+3y^2}$$

c) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$$

d) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

e) $$\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

f) $$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$$

g) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-4}\right)^{x^2}$$

h) $$\lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{\csc^2 \frac{1}{x}}$$

§IV.5 Definición de límite de una función según Cauchy

El concepto límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a, ha sido construido sobre la base del concepto límite de una sucesión. No obstante, en muchas situaciones es conveniente contar con otra definición.

TEOREMA 5.1

Sea f(x) una función real definida sobre un dominio X y sea a un punto de acumulación de X. Para que el número l sea límite de f en el punto a es necesario y suficiente que se cumpla la condición $(\epsilon - \delta)$ siguiente:

Para cada número real ϵ, $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta, \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x \in X$ y

$$|x - a| < \delta \ , \ x \neq a, \text{ entonces}$$

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

DEMOSTRACIÓN

(Necesidad) Sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Para probar que la condición $(\epsilon - \delta)$ se satisface, asumamos lo contrario. Entonces, para algún número $\epsilon > 0$ el correspondiente número $\delta > 0$ no existirá, es decir, por muy pequeño que tomemos δ, siempre encontraremos un valor de la variable $x = x' \neq a$, y $x' \in X$ para el cual

$$|x' - a| < \delta \ \text{ y } \ |f(x') - l| \geqslant \epsilon$$

Tomemos una sucesión de números positivos δ_n convergente a cero; digamos $\delta_n = \frac{1}{n}$. Sobre la base de lo dicho anteriormente, para todo $\delta_n = \frac{1}{n}$ podemos hallar un valor $x' = x'_n$ tal que

$$|x'_n - a| < \frac{1}{n} \ \text{ y } \ |f(x'_n) - l| \geqslant \epsilon$$

Así, hemos construido una sucesión $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$ para la cual $\left|x'_n - a\right| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y como $\frac{1}{n} \to 0$ esto prueba que $x'_n \to a$.

Por hipótesis, la correspondiente sucesión de valores de la función

$$f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_n), \ldots$$

debe converger a l, pero esto es imposible por el hecho de que para todo $n = 1, 2, \ldots$, tenemos $|f(x_n) - l| > \epsilon$. Esta es la contradicción buscada, quedando así demostrada la necesidad de la condición $(\epsilon - \delta)$.

(Suficiencia) Esta parte de la demostración es más sencilla. Supongamos que f cumple la condición $(\epsilon - \delta)$ en el punto a. Tomemos una sucesión arbitraria del dominio de f que converja a a, y cuyos términos sean todos distintos (esto es posible, puesto que a es un punto de acumulación de X). Por definición de límite de la sucesión, a cada número $\delta > 0$ le corresponde un número N_δ tal que para $n \geqslant N_\delta$ la desigualdad $|x_n - a| < \delta$ se satisface. Utilizando la condición $(\epsilon - \delta)$ obtenemos $|f(x) - l| < \epsilon$. Esto prueba la convergencia de la sucesión $\{f(x_n)\}$ al número l y con ello queda probada la suficiencia de la condición $(\epsilon - \delta)$.

Este teorema nos permite, pues, dar la definición de límite de una función en un punto (según Cauchy), la cual como hemos demostrado es equivalente a la definición 3.1.

DEFINICIÓN 5.2 (Límite según Cauchy)

Sea f función y a punto de acumulación del dominio de f.

El número l se llama límite de la función f en el punto a, si cualquiera sea $\epsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ para el cual la condición $x \in \text{Dom } f$ y $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, implica que

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

Observaciones

1) Las definiciones de límites laterales y al infinito vistas en el epígrafe § IV.4 pueden ser parafraseadas en el lenguaje $(\epsilon - \delta)$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ si cualquiera sea $\epsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para las x del dominio de f que cumplen $0 < x - a < \delta$. La adaptación al lenguaje $(\epsilon - \delta)$ de las demás definiciones queda como ejercicio.
2) Utilizando el concepto vecindad de un punto de **R**, la definición $(\epsilon - \delta)$ asume la forma siguiente:

   El número l es límite de f cuando $x \to a$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si x pertenece a la δ-vecindad del punto a y $x \neq a$:

$$x \in V(a; \delta) \cap \text{Dom } f, \ x \neq a$$

entonces, el valor de f en este punto x pertenece a la ϵ-vecindad del número l:

$$f(x) \in V(l; \epsilon)$$

Esta observación nos permite dar una interpretación geométrica del concepto límite (figura IV. 22).

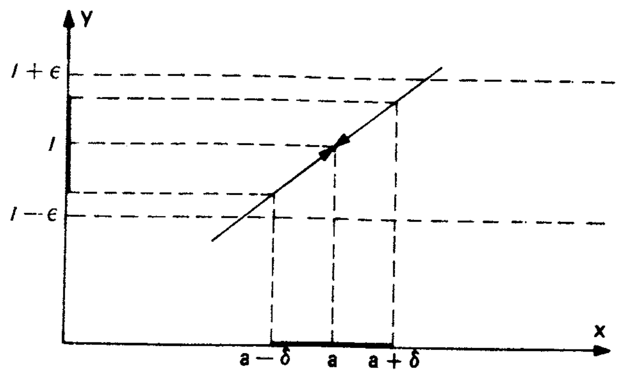


Fig. IV.22

Para todo $\epsilon > 0$, los valores que la función asume en la vecindad de a de radio $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, están contenidos en una banda de amplitud 2ϵ y centrada en L

Ejemplos

1) Utilizando la definición de límite según Cauchy probemos que $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 8) = -5$.

   Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - 1| < \delta, x \neq 1$, entonces $|(3x - 8) + 5)| < \epsilon$. En otras palabras, es necesario resolver la desigualdad

$$|(3x - 8) + 5| = 3\,|x - 1| < \epsilon$$

   Evidentemente, si $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, para $|x - 1| < \delta$, se cumple que

$$|(3x - 8) + 5| < 3 \cdot \delta = 3\,\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

2) Sea $f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \text{ irracional } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{q}\ , & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible, } 0 < x < 1 \end{cases}$

   (Recuerde que $\frac{p}{q}$ es irreducible si p y q son enteros sin divisores comunes y $q > 0$), figura IV.23.

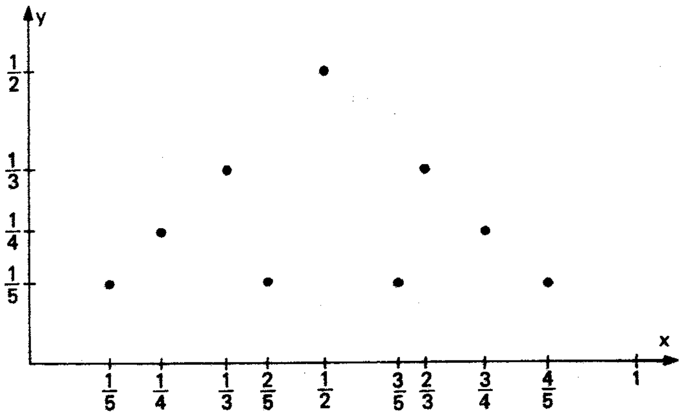


Fig. IV.23

Para cualquier número a, con $0 < a < 1$, la función f tiende hacia 0 en a.

Para demostrar esto, considere un número cualquiera $\epsilon > 0$.

Sea n un número natural suficientemente grande de modo que $\frac{1}{n} \leqslant \epsilon$. Observe

que los únicos números x para los cuales pudiera ser falso $|f(x) - 0| < \epsilon$ son

$$\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \frac{3}{4}\,;\ \frac{2}{5}\,;\ \frac{3}{5}\,;\ \frac{4}{5}\,;\ \frac{1}{n}\,;\ \dots,\ \frac{n-1}{n}: \qquad (1)$$

(Si a es racional, entonces, a podría ser uno de estos números). De tales números puede haber, a lo más un número finito. Por lo tanto, entre todos estos números habrá uno que será el más próximo a a: es decir $\left|\frac{p}{q} - a\right|$ es mínimo para algún $\frac{p}{q}$ entre estos números. (Si ocurre que a es uno de estos números, considérense entonces sólo los valores $\left|\frac{p}{q} - a\right|$ para $\frac{p}{q} \neq a$). El número δ puede elegirse como esta distancia mínima, pues si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x *no es ninguno* de los números en (1) y, por lo tanto, se cumple $|f(x) - 0| < \epsilon$.

Observe que nuestra descripción del δ que corresponde a un ϵ determinado es del todo adecuada: no es, en ningún modo imprescindible dar una fórmula para δ en términos de ϵ, la expresión $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ significa solamente que este número δ se halla después de haber prefijado el número ϵ, es decir, depende de ϵ y *no hace falta* hallar una fórmula que lo determine en función de ϵ, aunque en la práctica, a veces, es posible hacerlo.

Ejemplo

3) Demostremos que $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1, a > 0$.

   Supongamos que $a > 1$. Como $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim a^{\frac{-1}{n}} = \lim \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$ (ver capítulo II § 4), para cualquiera $\epsilon > 0$ se encuentra N_ϵ tal que

$$\left|a^{\frac{1}{N_\epsilon}} - 1\right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left|a^{\frac{-1}{N_\epsilon}} - 1\right| < \epsilon$$

   Teniendo en cuenta el crecimiento de la función exponencial cuando $a > 1$ (ver Apéndice) de las relaciones anteriores se tiene

$$1 - \epsilon < a^{\frac{-1}{N_\epsilon}} < a^{\frac{1}{N_\epsilon}} < 1 + \epsilon$$

   Sea $\delta > 0$, tal que $\delta < \frac{1}{N_\epsilon}$; entonces, $|x| < \delta$ significa que

$$-\frac{1}{N_\epsilon} < x < \frac{1}{N_\epsilon}$$

   de donde,

$$1 - \epsilon < a^{\frac{-1}{N_\epsilon}} < a^x < a^{\frac{1}{N_\epsilon}} < 1 + \epsilon$$

O sea, para $|x| < \delta$ se cumple

$$|a^x - 1| < \epsilon$$

lo que significa $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Si $0 < a < 1$ se demuestra análogamente, sólo que, en este caso, la exponencial será decreciente y las desigualdades cambiarán de sentido.

EJERCICIOS

Ejercicio resuelto

1. Pruebe a partir de la definición según Cauchy que

$$\lim_{x\to 5} x^2 = 25$$

Resolución

Por la definición de Cauchy se cumple que $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$, si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que de $0 < |x-5| < \delta$ se obtiene $|x^2 - 25| < \epsilon$.

Como

$$|x^2 - 25| = |x-5|\,|x+5| < \delta\,|x+5| \leqslant \delta\,(|x| + |5|)$$

Por otra parte, $|x-5| < \delta$
o sea, $-\delta < x - 5 < \delta$

$5 - \delta < x < \delta + 5$. Esto implica que $|x| < \delta + 5$, por tanto, $|x^2 - 25| < \delta(\delta + 10)$.

Para que $\delta(\delta + 10) \leqslant \epsilon$
basta que $\qquad \delta \leqslant \sqrt{\epsilon + 25} - 5$,
pues si $\qquad \delta \leqslant \sqrt{\epsilon + 25} - 5$,
entonces, $\delta(\delta + 10) \leqslant (\sqrt{\epsilon + 25} - 5)(\sqrt{\epsilon + 25} + 5)$

$$= \epsilon + 25 - 25 = \epsilon.$$

Así, hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \sqrt{\epsilon + 25} - 5 > 0$ tal que si $|x-5| < \delta$, entonces $|x^2 - 25| < \epsilon$, es decir, $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Utilice la definición de límite de una función según Cauchy para probar que:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

2. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4{,}001$ es falso.

3. a) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > p\,(< q)$ entonces existe una vecindad de a, $V(a)$ tal que para todo $x \in V(a)$, $x \neq a$, se tiene $f(x) > p\,(< q)$.

   b) Demuestre que si $f(x) \geqslant p\,(\leqslant q)$ para todo $x \neq a$ de alguna vecindad $V(a)$ y si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant p\,(\leqslant q)$ (a puede ser finito o infinito).

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ pruebe que existe una vecindad $V(2)$ del punto 2, tal que $f(x) > 3$ para todo $x \in V(2)$, $x \neq 2$.

5. Suponga que $f(x) \geqslant 2$ para $x > 5$ y $f(x) \leqslant 1$ para $x < 5$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ no existe.

§ IV.6 Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para funciones reales

Para las funciones reales existe también un criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy. En este caso, formularemos el criterio teniendo en cuenta la posibilidad de que el punto de acumulación del dominio de f donde queremos determinar la existencia del límite ordinario o lateral sea finito o infinito.

TEOREMA 6.1 (Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para funciones reales)

Para que la función f tenga límite finito cuando $x \to a$, donde a es un número x_0 o uno de los símbolos ∞, $+\infty$, $-\infty$, x_0^+, x_0^-, es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente condición:

(B – C) para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, x' \in \text{Dom } f$ y $x \in V(a;\delta)$, $x \neq a$ y $x' \in V(a;\delta)$, $x' \neq a$ (cuando esta desigualdad tenga sentido), entonces se cumple

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon$$

Observación

El símbolo $V(a;\delta)$ representa una vecindad de a según que a sea un número x_0 o uno de los símbolos ∞, $+\infty$, $-\infty$, x_0^+, x_0^-. Por ejemplo, si

$$a = x_0^+$$
$$V(a;\delta) = V(x_0^+;\delta) = \{x : x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

DEMOSTRACIÓN

(Necesidad) Sea $\lim_{x \to a} f(x) = l$, donde l es un número. Esto significa, por la condición $(\epsilon - \delta)$, que para cada $\epsilon > 0$ se encuentra $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que para cualquier $x \in V(a;\delta)$ $x \neq a$, se cumple:

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sean $x \in V(a;\delta), x' \in V(a;\delta)$, $x \neq a, x' \neq a$; entonces,

$$|f(x') - f(x)| = |[f(x') - l] + [l - f(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x') - l| + |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

es decir, se cumple la condición (B − C).

(Suficiencia) Sea f una función que satisface la condición (B − C) para $x \to a$. Sean $\epsilon > 0$ arbitrario y $\delta = \delta(\epsilon)$ tales que se cumple (B − C). Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión del dominio de f tal que $\lim x_n = a$, $x_n \neq a$; entonces $x_n \in V(a;\delta)$ para

$$n \geqslant N_\delta \qquad (1)$$

Probemos que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

De acuerdo con la condición (B − C) para todo $x \in V(a;\delta)$ y $x' \in V(a;\delta)$, $x \neq a$, $x' \neq a$, se obtiene la desigualdad

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon$$

Luego, por (1) para cualesquiera $n \geqslant N_\delta$ y $m \geqslant N_\delta$ se cumple

$$x_n \in V(a;\delta)\,,\ x_m \in V(a;\delta)$$

y, por tanto, $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$.

Es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ satisface la condición de Bolzano-Cauchy para sucesiones y, por consiguiente, converge a un cierto número l:

$$\lim f(x_n) = l$$

Probemos ahora que $\lim f(x'_n) = l$ para cualquier otra sucesión $\{x'_n\}$ tal que

$$\lim x'_n = a,\ x'_n \neq a,\ x'_n \in \text{Dom } f,\ n = 1, 2, \ldots$$

En efecto, construyamos la sucesión

$$x''_n = \begin{cases} x_k\ , & \text{si } n = 2k - 1 \\ x'_k\ , & \text{si } n = 2k \end{cases}\ , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Evidentemente, $\lim x''_n = a$ y $x''_n \neq a$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ De ahí que, por lo ya demostrado, exista $\lim_n f(x''_n)$ y como el límite de cualquier sucesión convergente coincide con el límite de cualquiera de sus subsucesiones, se tendrá

$$\lim f(x''_n) = \lim f(x_n)$$

$$\lim f(x''_n) = \lim f(x'_n)$$

y, por tanto,

$$\lim f(x_n) = \lim f(x'_n) = l$$

Así, de acuerdo con la definición de límite de una función según Heine

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

El criterio de Bolzano-Cauchy para convergencia de funciones está demostrado.

Observaciones

1) En el caso en que a es un número, la condición de Bolzano-Cauchy puede parafrasearse de la manera siguiente: para cualquiera que sea $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si

$$|x - x_0| < \delta\,,\ |x' - x_0| < \delta\,,\ x \neq x_0,\ x' \neq x_0,$$

entonces, se cumple $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

2) En el caso $a = \infty$, entonces a la condición de Bolzano-Cauchy se le puede dar la forma siguiente: para todo $\epsilon > 0$ se encuentra un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que si $|x| > \delta$, $|x'| > \delta$, entonces $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

3) Para el caso de límites laterales finitos o infinitos se puede parafrasear la condición de Bolzano-Cauchy sin utilizar las vecindades de la forma siguiente: para todo $\epsilon > 0$ existe η ($\eta < a$ en caso límite a la izquierda y $\eta > a$ en caso límite a la derecha) tal que para todo par x, x' cumpliendo las condiciones $\eta < x < a$, $\eta < x' < a$ o, respectivamente, $a < x < \eta$, $a < x' < \eta$, se cumple la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

EJERCICIOS

Ejercicio resuelto

1. Demuestre que la función $f(x) = \text{sen } x$ satisface (B − C) en todo $a \in \mathbf{R}$ y que no lo satisface para $a = \pm\infty$.

Resolución

a) *Sea* $a \in \mathbf{R}$. Sea $\epsilon > 0$, y $x \neq x'$ tales que $x \neq a$, entonces, $|f(x) - f(x')| =$

$= |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| = |2 \operatorname{sen}(\frac{x - x'}{2}) \cos(\frac{x + x'}{2})|$ (ver propiedad 2.6).

Como $|\cos x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$

y $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leqslant \frac{2|x - x'|}{2} \\ &= |x - x'| \\ &= |x - a + a - x'| \\ &\leqslant |x - a| + |a - x'| \end{aligned}$$

Tomando $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ y considerando $x, x' \in V(a; \delta)$, es decir, $|x - a| < \delta$, $|x' - a| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y queda demostrado que $f(x) = \operatorname{sen} x$ satisface (B − C) en $x = a$.

Luego, $f(x) = \operatorname{sen} x$ cumple (B − C) en todo $a \in \mathbf{R}$.

Nota: Por tanto $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x$ existe para todo $a \in \mathbf{R}$.

b) Sea $a = +\infty$. *Sea* $\epsilon = \frac{1}{2}$ y $x_0 \in \mathbf{R}_+$ cualquiera.

Entonces, si n es suficientemente grande $x = 2n\pi$, $x' = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ cumplen $x > x_0$ y $x' > x_0$ y $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| = |\operatorname{sen} 2n\pi - \operatorname{sen}(2n + 1)\frac{\pi}{2}| = 1$.

Luego, en cualquier vecindad de $+\infty$ existen puntos tales que $|f(x) - f(x')| = 1 > \frac{1}{2}$ por lo que no se cumple la condición (B − C). Observe que podemos concluir del teorema 6.1 que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. El caso $x \to -\infty$ se analiza de forma análoga.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Analice en los casos siguientes si la función satisface la condición (B − C) en el punto indicado:

   a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; en $x = 0$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leqslant 3 \\ 2x + 1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$; en $x = 3$

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$, en $x = 0$

2. Demuestre que $f(x) = a^x$ satisface la condición (B − C) en todo punto de $\mathbf{R}$ y para $-\infty$, pero que no la satisface para $+\infty$.

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. Defina y ejemplifique los conceptos de función, dominio e imagen de una función. Ponga un ejemplo.
2. ¿Cómo se define la composición de funciones? ¿Siempre es posible componer dos funciones reales? ¿Qué propiedades posee y cuáles no cumple la operación de composición de funciones?
3. ¿Cuáles son las funciones elementales básicas?
4. ¿Qué propiedades de las funciones trigonométricas son esenciales para deducir de ellas toda otra propiedad de estas funciones?
5. Dé un ejemplo de una función elemental algebraica y otro de función trascendente.
6. Exprese la definición de límite de una función (según Heine). ¿Depende el límite de la sucesión $\{x_n\}$ que se elija?
7. ¿Cómo se definen los límites laterales y los límites al infinito? ¿Pueden existir ambos límites laterales y no existir el límite en un punto? Demuéstrelo.
8. Dé la definición de límite de una función (según Cauchy) y demuestre que es equivalente a la definición según Heine.
9. Enuncie y demuestre el criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.
10. Formule qué significa que una función f no cumpla la condición de Bolzano-Cauchy en el punto $x = a$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. a) Si $f(x) = \ln x$, demuestre que $f(x) + f(x + 1) = f(x(x + 1))$.

   b) Si $f(x) = \ln(\frac{1 - x}{1 + x})$, pruebe que $f(x) + f(y) = f(\frac{x + y}{1 + xy})$

2. Sea $f(x) = a^x$, $a > 0$:

   a) Demuestre que para cualquier valor de x es válida la relación $f(-x) f(x) - 1 = 0$

   b) Demuestre que $f(x) f(y) = f(x + y)$.

3. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ donde $a > 0$.

Demuestre que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

4. Una función se dice par (impar) si $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.
Demuestre que toda función puede escribirse como suma de una función par y otra impar.

5. Sea $f(x)$ una función definida para $0 < x < 1$. Halle el dominio de definición de:

a) $f(\operatorname{sen} x)$ b) $f(\ln x)$ c) $f(\frac{[x]}{x})$

6. Demuestre o dé un contraejemplo de las proposiciones siguientes:

a) $fo(g+h) = fog + foh$ c) $\frac{1}{fog} = \frac{1}{f} og$

b) $(g+h)of = gof + hof$ d) $\frac{1}{fog} = fo\frac{1}{g}$

7. Encuentre $f(x)$ si se sabe que

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x > 0$

8. Sea f: $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Sea $x_0 \in (a,b)$. Explique por qué son correctas las definiciones de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ siguientes:

Para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo x:

a) Si $0 < |x - x_0| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| < \delta$

b) Si $0 < |x - x_0| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| \leqslant \delta$

c) Si $0 < |x - x_0| < \epsilon$, entonces $|f(x) - l| < 5\delta$

d) Si $0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{10}$, entonces $|f(x) - l| < \delta$

e) Si $0 < |x - x_0| \leqslant \epsilon$, entonces $|f(x) - l| < \delta$

9. Exhiba ejemplos que demuestren que las definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ siguientes no son correctas:

a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$

b) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - l| < \epsilon$ entonces $|x - a| < \delta$, $x \neq a$.

10. a) Si no existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ o $\lim_{x \to a} f(x)\,g(x)$?

b) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ ¿debe existir $\lim_{x \to a} g(x)$?

c) Si existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$?

d) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x)\,g(x)$, ¿de ello se obtiene que existe $\lim_{x \to a} g(x)$?

11. Analice la existencia de los límites de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x) = \text{mantisa } x = x - [x]$ en los enteros

b) $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$

c) $f(x) = x\,[\frac{1}{x}]$ en $x = 0$

d) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $x = 0$

12. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3} - 5x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\operatorname{sen} \sqrt{x+1} - \operatorname{sen} \sqrt{x}]$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$

g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x}$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

k) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}]$

m) Determine a_1 y b_1 de modo que

$$\lim_{x \to \infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1] = 0$$

13. Demuestre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

(Sugerencia: utilice que $\lim \dfrac{n}{e^n} = 0$ y un método análogo al utilizado en el cálculo del límite $\lim (1 + \frac{1}{n})^n$)

14. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

15. Analice la convergencia de las series:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n\alpha}{2^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2^n}$ d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$

16. Demuestre que la fórmula

$$f(x) = \lim_{n} \lim_{k} (\cos n!\, \pi x)^{2k}$$

representa la función de Dirichlet considerada en § IV.1.

17. Decimos que la función f(x) es *infinitamente grande* en el punto a y se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ si para todo M existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x que cumpla $0 < |x - a| < \delta$ es $|f(x)| > M$ (trazar un gráfico ilustrativo).

a) Exprese la definición análoga en el lenguaje de las sucesiones.

b) Dado $\epsilon > 0$ fijo, demuestre que si $|f(x)| > \epsilon$ para todo x y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

c) Defina $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim f(x) = \infty$ ¿Cuántos otros símbolos similares podría definir?

d) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

e) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ si y solo si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{1}{x}) = \infty$

f) Demuestre que $f(x) = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$ es no acotada en cualquier vecindad de cero, pero no es infinitamente grande en $x = 0$

18. Se dice que L es el *límite superior de oscilación* de la función f(x) (o simplemente límite superior) para $x \to a$, si para cada número positivo $\epsilon > 0$ se verifica:

i) $f(x) < L + \epsilon$ en *toda una vecindad reducida de a*

ii) $f(x_0) > L - \epsilon$ en *algún punto x_0 de cada vecindad reducida de a*

Análogamente, se define el *límite inferior de oscilación* de la función f(x) para $x \to a$: basta intercambiar el sentido de las desigualdades en i) y ii) y escribir l en lugar de L.

Notación: $l = \underline{\lim}_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \inf f(x)$

$$L = \overline{\lim}_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sup f(x)$$

a) Pruebe que si $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$, entonces,

$$\underline{\lim}_{x \to 0} f(x) = -1 \text{ y } \overline{\lim}_{x \to 0} f(x) = 1$$

b) Pruebe que la función de Dirichlet tiene *en todo punto* límite inferior de oscilación 0 y límite superior de oscilación 1.

c) Defina los límites de oscilación laterales, en el infinito y los límites de oscilación infinitos, es decir, cuando a representa $x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty$ y/o l, L representan $-\infty, +\infty$.

d) Pruebe que la función $\dfrac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}$ tiene en el $x = 0$ los límites de oscilación $l = -\infty$, $L = +\infty$. En cambio, para $x \to \infty$ es $l = L = \infty$ límite ordinario (según el ejercicio anterior 19).

e) Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que la función f(x) admita límite ordinario en el punto $x = a$ es que coincidan en él los dos límites de oscilación.

f) Demuestre que para toda función definida en un intervalo, existen ambos límites de oscilación en cada punto de dicho intervalo (laterales en los extremos del intervalo).

g) Pruebe las desigualdades siguientes:

$$\overline{\lim}\, f(x) + \underline{\lim}\, g(x) \leqslant \overline{\lim}\,(f(x) + g(x)) \leqslant \overline{\lim}\, f(x) + \underline{\lim}\, g(x)$$

¿Qué desigualdades se cumplen para la diferencia $f(x) - g(x)$?

CAPÍTULO V. CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

El movimiento es la unidad de la continuidad y la discontinuidad (del espacio y el tiempo).

V. I. LENIN[1]

Introducción

Uno de los conceptos que desde la antigüedad hasta nuestros días ocupa la atención de filósofos, físicos y matemáticos es el concepto de continuidad. La importancia de este concepto reside en su vinculación con el problema del movimiento. En la antigua Grecia se desarrollaron una serie de teorías acerca de la continuidad del espacio y el tiempo y, por ende, del movimiento. En la introducción del 1er. y 3er. capítulos hemos mencionado dos de las famosas paradojas de Zenon de Elea: "Aquiles y la tortuga" y "La Dicotomia", las cuales reflejan la confusión de la época. Planteemos ahora otra paradoja, también de Zenon de Elea, donde se manifiesta una vez más el absurdo a que conduce una incorrecta concepción de la continuidad del espacio y el tiempo. En esencia, el razonamiento de Zenon de Elea en su paradoja "El vuelo de la flecha" consiste en lo siguiente: "Una flecha en vuelo en cada instante se encuentra en cierto punto del espacio y, por eso, en cada instante está en reposo. De esto se deduce que una flecha en vuelo siempre está en reposo y, por tanto, no está volando".

Las paradojas de Zenon demostraron que si se quiere encontrar una solución lógica del problema es necesario asumir un punto de vista dialéctico, es necesario desarrollar y aplicar razonamientos basados en las cantidades infinitesimales. Sabemos que como respuesta surgió el "método de exhausión" mencionado en la introducción del capítulo II, y que cuando "se vuelve a los clásicos", en el Renacimiento, unos 2,000 años después, se produce la revolución cartesiana de la que hablamos en la introducción del Capítulo IV.

La definición del concepto de continuidad de una función a partir de la revolución cartesiana se identificó con la continuidad de su gráfico.

La continuidad de una curva resulta intuitiva. Basta comparar, por ejemplo, dos curvas (figuras V.1 y V.2) y a primera vista vemos la diferencia entre ellas:

En la figura V.1 se ha dibujado una línea continua.

En la figura V.2 una línea discontinua; el punto x_0 es un punto de discontinuidad de la curva. En todos los demás puntos con excepción de x_0 la curva es continua.

Una función continua pues, en el siglo XVII está representada por un trazo sobre una hoja de papel que se ha dibujado sin levantar el lápiz de ésta.

Pero ya en el siglo XVIII se comenzó a operar con funciones tan complicadas que resultaba imposible confiar en la intuición. A principios del siglo XIX se hacen

[1]LENIN, V. I.: *Obras completas.* t. 29, p. 231.

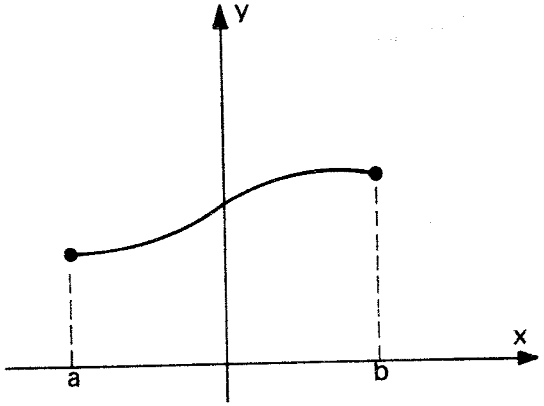


Fig. V.I

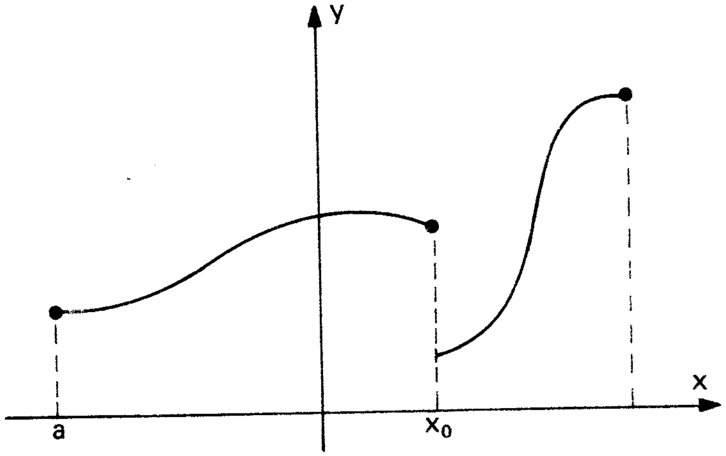


Fig. V.2

descubrimientos de cualidades de la materia insospechados desde el punto de vista cartesiano, como es el caso del movimiento browniano, descubierto por el inglés Brown, en 1827, que consternaba al observador deseoso de representarse la trayectoria de una partícula en suspensión en el fluido. Así, el conocimiento más profundo de la realidad física impulsaba a los matemáticos al desarrollo dialéctico del concepto de continuidad.

También desde el punto de vista puramente matemático la representación intuitiva de la continuidad no puede servir como fundamento para la construcción de una teoría matemática. Así, por ejemplo, la función $y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$, definida para todo x diferente de 0 y con límite 0 cuando x tiende a 0, es una función continua

para todo x si se define como 0 en el origen. Esta función se anula entonces para $x = 0$ y para todo x tal que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$, es decir, para $x = 0$ y para $x = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Luego se anula una infinidad de veces y nos vemos precisados a renunciar a representar gráficamente esta función en un intervalo que contenga al origen con un trazo continuo sin levantar el lápiz del papel (figura V.3).

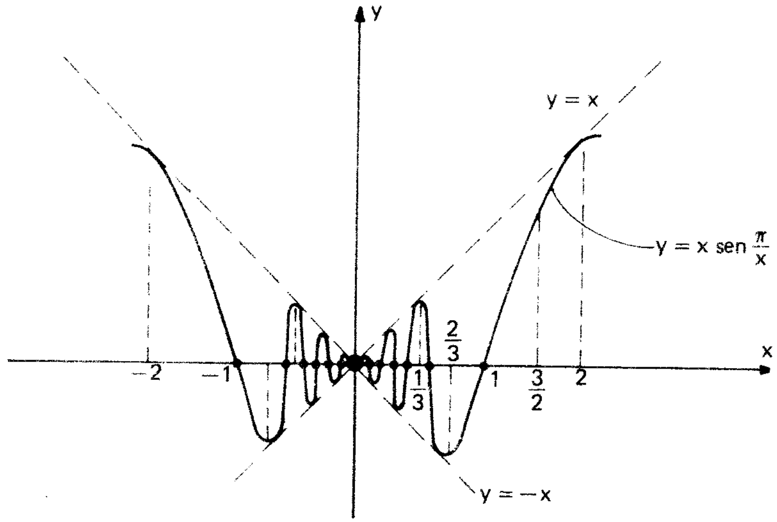


Fig. V.3

Por tanto, es necesario dejar a un lado los razonamientos basados en la intuición y buscar una fundamentación más precisa y lógica del concepto de continuidad. De los matemáticos del siglo XIX que se destacan por sus esfuerzos en este sentido dos reciben los mayores reconocimientos: Agoustin Cauchy (1789-1857) y Karl Weierstrass (1815-1897). Pero, quien realmente introduce primero el germen del rigor en las demostraciones de análisis matemático fue el filósofo y matemático checo Bernardo Bolzano (1781-1848). Expulsado de la Universidad de Praga por difundir las ideas revolucionarias contra la monarquía austríaca se le prohíbe expresarse públicamente tanto oral como por escrito y se le condena al ostracismo. Las condiciones extremadamente hostiles en que se desarrolló la obra de Bolzano fueron la causa que sus trabajos no se reconocieran hasta 30 años después de su muerte y el manuscrito de su obra fundamental "Estudio sobre las funciones" fue encontrado en 1920 y publicado en 1930, es decir, exactamente 100 años después de su escritura. Bolzano en la fundamentación del análisis matemático hizo mucho, antes que Cauchy y por supuesto que Weierstrass.

Así, por ejemplo, en 1817 Bolzano formuló y demostró el teorema que nosotros enunciamos como teoremas de Bolzano-Weierstrass en el 1ero. y 2do. capítulos.

Algunos años antes que Cauchy enunció el criterio de convergencia de Bolzano - Cauchy para sucesiones y dio la definición rigurosa de función continua (sin el uso del lenguaje $\epsilon - \delta$ que aparece después con Riemann).

Una ilustración característica de su afán por demostrar lógicamente los teoremas por muy evidentes que fueran, está en el conocido por 1er. teorema de Bolzano sobre la existencia de ceros.

Antes se consideraba evidente que si una función tomaba valores de signos opuestos en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$, entonces, debía tomar el valor cero en algún punto intermedio c, $a < c < b$ (figura V.4).

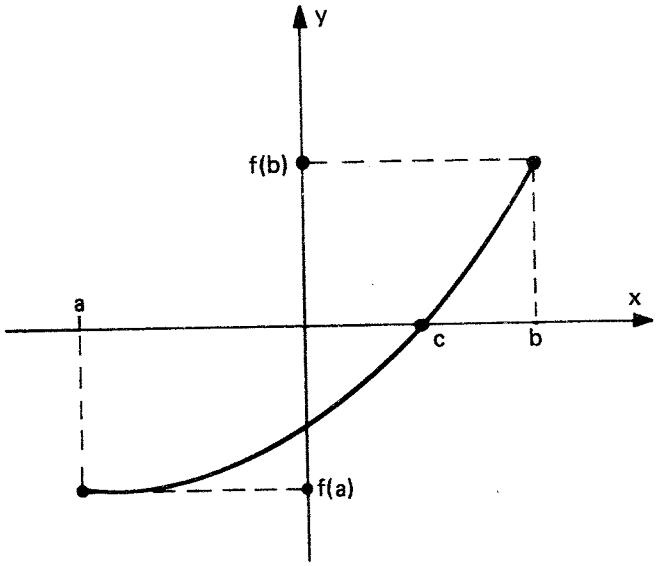


Fig. V.4

Bolzano dio una demostración rigurosa de este resultado que nosotros exponemos en este capítulo.

Pero no paró ahí. En esta época (y aún en épocas recientes) muchos matemáticos tomaban como condición equivalente a la continuidad de f(x) (o bien como definición de ella) el que no pasa de un valor a otro sin tomar todos los intermedios.

Bolzano construyó una función B(x), la cual sobre $[-1, 1]$ toma todos los valores de -1 a $+1$ y tiene una discontinuidad en cada punto de este segmento.

Debemos señalar que Bolzano también enunció y demostró el teorema sobre extremos de funciones continuas que nosotros en el capítulo, siguiendo la tradición, hemos denominado como Teorema de Weiertrass.

En la obra de Bolzano y en particular en su "Estudio sobre las funciones" está contenida la casi totalidad de los resultados incluidos en este capítulo. Quizás el único resultado importante que se le escapó a Bolzano es aquel con el cual cerramos el capítulo y que se conoce como Teorema de Heine-Cantor o Teorema de Cantor. Heine fue el que dio la clasificación de la continuidad global en un intervalo en uniforme y no-uniforme y Cantor casi a finales del siglo pasado demostró la equivalencia de ambos conceptos en el caso de funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados.

Este capítulo contiene, además de los resultados antes mencionados, algunos aspectos de la teoría de límites de funciones que como dijimos en la introducción al Capítulo IV preferimos incluirlo aquí para facilitar su ejercitación. El capítulo es voluminoso pero todo en él es imprescindible para comprender mejor la materia de los siguientes tomos de esta obra.

§ V.1 Concepto de continuidad

Analizaremos la continuidad de una función real en aquellos puntos que posean una vecindad completamente contenida en el dominio de f (lo que ocurre en casi todos los problemas prácticos), es decir, en los puntos de un cierto intervalo abierto del dominio de f. Esto se adapta a nuestra concepción intuitiva de la continuidad, como trazo continuo, representación de una correspondencia entre intervalos.

DEFINICIÓN 1.1

Sea la función f(x) definida en un cierto intervalo abierto I y sea $a \in I$. Se dice que *f(x) es continua en el punto a* si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Observaciones

1) Esta definición supone que se cumplan tres condiciones:

   a) $a \in \text{Dom } f$

   b) Existe $\lim_{x \to a} f(x) = l$

   c) $l = f(a)$

   Cuando alguna de estas tres condiciones no se cumple, entonces, se dice que a es un *punto de discontinuidad de f.*

2) Nótese que si f(x) no está definida en a no es continua en ese punto; sin embargo, cuando hablemos de punto de discontinuidad supondremos que este punto sea punto de acumulación del dominio de la función. Cuando un punto no sea de acumulación del dominio de la función, no analizaremos la continuidad en él.

   Según la definición de límite de una función utilizando el lenguaje de las sucesiones, la definición de continuidad es equivalente a la siguiente:

DEFINICION 1.1'

Sea f como en la definición 1.1. La función f es continua en el punto $a \in I$ si y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in I$, y tal que $\lim x_n = a$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente y, además, $\lim f(x_n) = f(a)$.

Esta definición en el lenguaje de las sucesiones permite interpretar la situación, frecuente en la práctica, de que al medir una cierta cantidad y con ayuda de un parámetro x del cual depende continuamente, $y = f(x)$, tenemos la certidumbre de que mientras más exactos sean los valores de x_n (obtenidos por medio de mediciones o cálculos) tanto más exactos son los valores de $y_n = f(x_n)$.

Según el lenguaje "$\epsilon - \delta$", la continuidad de una función f en un punto a se puede expresar como sigue:

DEFINICIÓN 1.1''

La función f es continua en el punto a si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se encuentra un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$.

Esta definición puede parafrasearse así:

"La función f es continua en a si, dado cualquier grado de exactitud $\epsilon > 0$ para el valor necesario de la función, existe un grado de aproximación para el argumento $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que en cuanto tomemos un valor x para el argumento a una distancia de a menor que δ y evaluemos f en x, entonces este valor f(x) representa al valor f(a) con un error menor que ϵ."

Como en el caso de la definición de límite, la definición de continuidad puede darse en el lenguaje de las vecindades.

DEFINICIÓN 1.1'''

La función f es continua en a si y sólo si para toda vecindad de f(a), $V(f(a); \epsilon)$, se encuentra una vecindad $V(a; \delta)$ de a tal que

$$f[V(a;\delta)] \subset V(f(a);\epsilon)$$

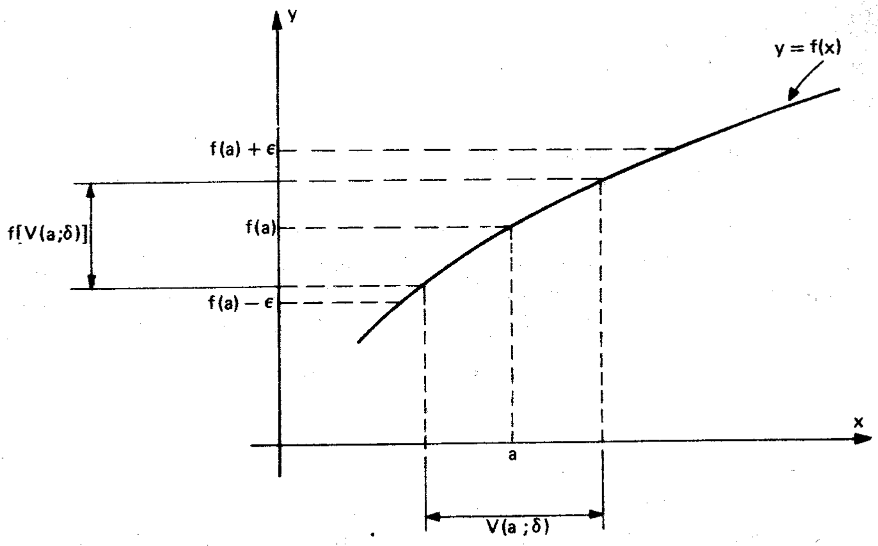


Fig. V.5

Por último, denominemos *incremento del argumento en el punto a:* $\Delta x = x - a$ y llamemos *incremento de la función* f con relación a x a la diferencia $\Delta f = \Delta y = f(x) - f(a)$. Entonces, en el lenguaje de los incrementos se tiene:

DEFINICIÓN 1.1''''

f es continua en a si y sólo si a incrementos infinitesimales del argumento en el punto a le corresponden incrementos infinitesimales en la función, o sea,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

La demostración es inmediata y la dejamos como ejercicio.

Observaciones

1) Si en la definición 1.1 consideramos que la función está definida en una vecindad lateral del punto a (es decir, en (a, x) o (x, a)) y sustituimos $\lim_{x \to a} f(x)$ por el correspondiente límite lateral obtenemos el concepto ***continuidad lateral*** (por la derecha o por la izquierda) en el punto a. Dejamos al lector, como útil ejercicio, la reformulación de la continuidad lateral en los distintos lenguajes.

2) Diremos que una función f(x) es continua en un intervalo abierto si es continua en cada punto de dicho intervalo. Una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en cada punto interior al intervalo y continua lateralmente en los extremos del intervalo.

Ejemplos

1) Consideremos $f(x) = x$ y demostremos que es continua en todo punto $a \in \mathbf{R}$. Para ello, hallemos el incremento

$$\Delta y = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$$

Luego, evidentemente, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Es decir, $f(x) = x$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

2) La función $y = \operatorname{sg} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

es discontinua en el punto 0, pues no existe el límite de sg x cuando $x \to 0$. Sin embargo, esta función es continua para los restantes valores de x (¿Por qué?). Luego, sg x es continua en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$

3) La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no es continua en el punto $x = 1$ porque $1 \notin \mathrm{Dom}\, f$; sin embargo, el límite en este punto existe, en efecto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

4) La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$, pues se cumple

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$$

5) La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en todo punto $a > 0$ puesto que

$$\Delta y = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

y de aquí que

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = 0$$

Como $\sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$, en el punto $a = 0$ sólo podemos analizar la continuidad lateral. Así,

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

luego, f es continua en el punto 0 por la derecha.
Podemos entonces afirmar que f(x) es continua en el intervalo $[0, +\infty)$.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$

¿Cómo debe ser elegido el número "a" para que la función f(x) sea continua en $x = 1$?

Resolución

Dado que la función f está definida por expresiones analíticas diferentes a la derecha y a la izquierda de $x = 1$ debemos analizar los límites laterales para determinar la existencia de límite en el punto.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3-ax^2) = 3-a$$

Luego, para que f(x) sea continua en $x = 1$, se debe cumplir $3-a = 2$, o sea, $a = 1$.

2. Sea f continua en $x = a$. Supongamos que existe una vecindad $V(a;\eta)$ tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in V(a;\eta)$.

Pruebe que g es continua en $x = a$

Resolución

Dado que los datos se expresan en términos de vecindades, parece ser más conveniente utilizar la definición de continuidad por vecindades. Así, debemos probar que para toda vecindad $V(g(a);\epsilon)$ se encuentra una vecindad $V(a;\delta)$ tal que la imagen por g de $V(a;\delta)$ está completamente contenida en $V(g(a);\epsilon)$.

Como f es continua en $x = a$, existe una cierta vecindad $V(a;\delta_0)$ tal que

$$f(V(a;\delta_0)) \subset V(f(a);\epsilon)$$

Por dato del problema: $f(x) = g(x)$ en la vecindad $V(a;\eta)$.
Luego, tomando $\delta = \min(\delta_0, \eta)$ obtenemos:

$$V(a;\delta) \subset (V(a;\delta_0) \cap V(a;\eta))$$

Por tanto, si $x \in V(a;\delta)$ se cumple a la vez que

$$f(x) = g(x) \quad \text{y que} \quad f(x) \in V(f(a);\epsilon).$$

luego, $g(x) \in V(g(a);\epsilon)$, para $x \in V(a;\delta)$ y queda probado que g es continua en $x = a$.

3 a) Suponga que f es una función que satisface $|f(x)| \leqslant |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Demuestre que f es continua en $x = 0$.

b) Dé un ejemplo de una función f que satisfaga la condición a) y que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

Resolución

a) Si $|f(x)| \leqslant |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces,

$-|x| \leqslant f(x) \leqslant |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Utilizando el criterio de convergencia para una sucesión comprendida entre dos convergentes a un mismo límite (propiedad del emparedado) y la definición de límite de una función (por sucesiones) obtenemos inmediatamente que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Por otra parte, $0 \leqslant f(0) \leqslant 0$, luego $f(0) = 0$ y por consiguiente, f es continua en $x = 0$.

b) Un ejemplo sería

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

Esta función, evidentemente, cumple con la desigualdad $|f(x)| \leqslant |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y, por tanto, es continua en $x = 0$. Además, si $a \neq 0$ la función no es continua en $x = a$ pues $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Esto es muy fácil de probar:

Sabemos que en cualquier vecindad de "a" existen puntos de $\mathbf{Q}$ y de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, luego existen sucesiones $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbf{Q}$ $x_n \neq a$ y $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x'_n \neq a$ tales que $x_n \to a$ y $x'_n \to a$. Por la forma en que está definida la función obtenemos inmediatamente $f(x_n) \to 0$ y $f(x'_n) \to a$

4. Suponga que f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbf{R}$ y que f es continua en $x = 0$. Demuestre que, para todo $a \in \mathbf{R}$, f es continua en a.

Resolución

Determinemos primeramente el valor de f en $x = 0$:

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2\,f(0)$$

de donde $f(0) = 0$

Por otra parte, $f(x) = f(x - a + a) = f(x - a) + f(a)$

Como f es continua en $x = 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x-a) = \lim_{y \to 0} f(y) = f(0) = 0$$

$$y = x - a$$

y, finalmente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x-a) + f(a)] = \lim_{x \to a} f(x-a) + \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= f(a).$$

Luego, f es continua en $x = a$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Analice la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, en $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$, en $x = 1$ y en $x = 0$

2. a) Suponga que f no es continua en a. Demuestre que para algún $\epsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiera a "a", tales que $|f(x) - f(a)| > \epsilon$

b) Deduzca que para algún $\epsilon > 0$, o bien existen números tan próximos como se quiera a "a" con $f(x) < f(a) - \epsilon$ o existen números x tan próximos como se quiera de "a" con $f(x) > f(a) + \epsilon$.

3. Considere que para algunos $\epsilon > 0$ se pueden hallar números $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ tales que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$.

¿Es posible deducir de aquí que la función f(x) es continua en el punto x_0 si:

a) ϵ recorre un conjunto finito?

b) $\epsilon = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$?

4. a) Para todo número $a \in \mathbf{R}$ halle una función que sea continua en a, pero que no lo sea en ningún otro punto.

b) Halle una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

c) Halle una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos.

5. La arista de un cubo se encuentra entre 2 y 3 *m*. ¿Con qué error absoluto se puede medir la arista x de este cubo, de modo que su volumen y pueda calcularse con error absoluto no mayor que ϵ m³ si:

a) $\epsilon = 0{,}1$ m³; b) $\epsilon = 0{,}01$ m³; c) $\epsilon = 0{,}001$ m³?

V.2 Propiedades elementales de las funciones continuas y continuidad de las funciones elementales

Con el objetivo de aumentar nuestro arsenal de funciones continuas y permitir la comprobación de la continuidad por un método menos directo, estudiamos a continuación algunas propiedades que surgen directamente de la definición de continuidad y sirven, a la vez, para la demostración de la continuidad de las funciones elementales.

PROPIEDAD 2.1

Si las funciones f y g son continuas en a, entonces las funciones $f \pm g$ y $f g$ son continuas en a. Si, además, $g(a) \neq 0$, también $\frac{f}{g}$ es función continua en a.

DEMOSTRACIÓN

Esta propiedad se obtiene como consecuencia directa de la definición de continuidad y las propiedades aritméticas del límite de funciones en un punto. Probemos, por ejemplo, la continuidad de fg. Tenemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$$

pues los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen y, por continuidad, son iguales a $f(a)$ y $g(a)$, respectivamente.

PROPIEDAD 2.2

Todo polinomio es continuo en cada punto de **R** y cada función racional $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo punto donde $Q(x)$ no se anula.

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que cada polinomio se obtiene de las funciones $y = \text{const.}$ $y = x$ (que son evidentemente continuas) con ayuda de operaciones aritméticas.

PROPIEDAD 2.3

La función exponencial a^x $(a > 0)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$.

DEMOSTRACIÓN

Según la definición de continuidad por incrementos, basta probar que $\Delta y = a^{x+h} - a^x$ es infinitesimal para $\Delta x = h \to 0$.

Pero, $\Delta y = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1)$ y $\lim_{h \to 0} a^h = 1$ (ejemplo 3, IV. 5) luego, $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y se concluye que la función exponencial es continua.

PROPIEDAD 2.4

Las funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio.

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que si $y = \text{sen } x$

$$\Delta y = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Entonces de: $\left|\text{sen } \frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{2}\right|$ y $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$

obtenemos

$$|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$$

de donde se deduce que $y = \text{sen } x$ es continua en todo **R**.

Similarmente si $y = \cos x$

$$|\Delta y| = |\cos(x + \Delta x) - \cos x| = 2 \left|\text{sen } \frac{\Delta x}{2}\right| \cdot \left|\text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|$$

Por tanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, y de ahí la continuidad de $y = \cos x$ en todo **R**.

Como las funciones tg x, ctg x, sec x y csc x se expresan por relaciones aritméticas con las funciones 1, cos x y sen x, aplicando la propiedad 2.1, se obtiene la continuidad de todas ellas en aquellos puntos en que están definidas.

No nos detendremos aquí en la demostración de la continuidad de la función logarítmica, la cual se obtiene como corolario del teorema de la función inversa que demostraremos en § V.7 (o que el lector puede leer en el Apéndice). Sin embargo, demostraremos ahora que la composición de funciones continuas es una función continua. Por tanto, se deduce que al tomar las funciones elementales en sus dominios de continuidad y aplicar a estas funciones las operaciones aritméticas y la composición obtenemos una función también continua. Esto quiere decir, que nuestro ámbito de funciones continuas es sumamente amplio.

PROPIEDAD 2.5

Sea la función $y = \varphi(x)$ continua en el punto a y la función $z = f(y)$ continua en el punto $b = \varphi(a)$; entonces, la función compuesta $f \circ \varphi$ es continua en a. En otra forma:

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to a} \varphi(x)] = f(\varphi(a))$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\epsilon > 0$. Entonces, por la continuidad de f en el punto b, existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tal que si para y se cumple $|y - b| < \eta$, entonces, la función f está definida en este punto y $|f(y) - f(b)| < \epsilon$.

Dada la continuidad de φ en a, para tal $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (|\varphi(x) - b| < \eta)$$

Luego, para estas x existe la función compuesta $f[\varphi(x)]$ y se cumple que

$$|f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)]| < \epsilon,$$

lo cual significa la continuidad de la función compuesta $f\circ\varphi$ en el punto a.

Para la búsqueda de límites de funciones continuas la propiedad 2.5 se puede utilizar en la forma siguiente:

Regla del cambio de variables para límites de funciones continuas

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to b} f(y) \quad , \text{ si } y = \varphi(x)$$

(Compare esta regla con la demostrada en el capítulo anterior.)

Aplicación: Continuidad de la función potencia x^α $(x > 0)$ $\alpha \in$ **R**.

Como $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ es una función compuesta de las funciones logarítmica y exponencial, entonces de la continuidad de estas dos últimas se deduce la continuidad de la función potencia.

Un caso muy frecuente de cálculo de límites es el de las *expresiones potencio-exponenciales:* u^v donde u y v son funciones de la variable x con dominio de variación una vecindad del punto a (salvo, quizás, el propio punto).

Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x\to a} u(x) = u_0 \text{ y } \lim_{x\to a} v(x) = v_0$$

donde $u_0 > 0$. Se necesita hallar el límite de la expresión $[u(x)]^{v(x)}$ (¿Por qué podemos asegurar que tal expresión tiene sentido en una vecindad de a?)

Dado que $[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ y la funciones $v(x)$ y $ln[u(x)]$ tienen los límites

$$\lim_{x\to a} v(x) = v_0 \ , \ \lim_{x\to a} \ln(u(x)) = \ln u_0$$

(Nótese que hemos usado la continuidad del logaritmo), entonces

$$\lim_{x\to a} v(x) \ln[u(x)] = v_0 \ln u_0$$

Por tanto, por la continuidad de la función exponencial, finalmente tenemos

$$\lim_{x\to a} [u(x)]^{v(x)} = e^{v_0 \ln u_0} = u_0^{v_0}$$

Observación

El límite de la expresión u^v puede determinarse aun cuando no existan los límites de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ siempre y cuando el límite l del producto

$v(x)\,ln[u(x)]$ sea finito o infinito. Para el finito evidentemente el límite de la expresión u^v será e^l. Si $l = -\infty$ o $l = +\infty$, entonces, este límite será 0 o $+\infty$, respectivamente.

El límite l se halla directamente, excepto en el caso en que el producto $v(x) \ln[u(x)]$ presente una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. El lector podrá fácilmente comprobar que esta indeterminación ocurre para los valores de los límites siguientes u_0 y v_0.

$$u_0 = 1 \quad \text{y} \quad v_0 = \pm\infty$$
$$u_0 = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = 0$$
$$u_0 = +\infty \quad \text{y} \quad v_0 = 0$$

En estos casos, la expresión u^v se dice que presenta una indeterminación de los tipos 1^∞, 0^0, ∞^0 respectivamente.

Ejemplo

1) Calculemos $L = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}$

Como $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 > 0$, podemos aplicar la observación hecha anteriormente y

$$L = \left[\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right]^{\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x} = 2$$

2) Calculemos $L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right)^{\operatorname{ctg} x}$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{3}$ y $\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x = \infty$

es conveniente expresar la función dada en términos de la exponencial; así

$$\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x \ln\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right)}$$

Calculemos primeramente el límite l del exponente:

$$l = \lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \ln\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right) = \infty$$

Debemos, entonces, precisar qué signo tiene dicho exponente.

Observemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{ctg} x \ln\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{ctg} x \ln\left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-2x-3}\right) = +\infty$$

Finalmente, el límite L no existe pues:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 2x - 3}\right)^{\operatorname{ctg} x} = 0 \quad y \quad \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 2x - 3}\right)^{\operatorname{ctg} x} = +\infty$$

3) Hallemos $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Este límite presenta una indeterminación del tipo 0^0. Así que escribimos

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Como $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (ver Capítulo IV)

tenemos $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leqslant 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Resolución

Si $x > 0$, la función coincide con una función elemental en una vecindad de x, luego es continua en x.

Si $x < 0$, la función coincide con una función elemental en una vecindad de x, luego es continua en x.

Si $x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} 2^x = 2^0 = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \sqrt{x}) = 1$$

Entonces, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ y $f(0) = 2^0 = 1$. Luego, f es continua en $x = 0$ y, por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3x - 2}{2x - 4}\right)^{\frac{5x^2 + 3}{7x + 4}}$ c) $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}\right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} x}$ d) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$

Resolución

En todos los límites propuestos la función es del tipo u^v. Procedamos a investigar, en cada paso, si constituye o no una indeterminación.

a) Como $\lim_{x \to 0} \frac{3x - 2}{2x - 4} = \frac{1}{2} > 0$ y $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 3}{7x + 4} = \frac{3}{4}$

podemos afirmar que

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{3x - 2}{2x - 4}\right)^{\frac{5x^2 + 3}{7x + 4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

b) Calculemos primeramente

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{1}{4}$$

Por otra parte:

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} x = +\infty$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}\right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} x} = 0$$

c) Este es un caso de indeterminación del tipo ∞^0.

Calculemos el límite del exponente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

puesto que $\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ (1) (ver Capítulo IV). Finalmente,

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \ln x} = e^0 = 1$$

d) Como, en este caso, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, es más sencillo proceder escribiendo la base $u(x)$ como $u(x) = 1 + \epsilon(x)$ donde $\epsilon(x) \to 0$ cuando x tiende a cero.

Así, $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Note que se ha usado

$$\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad \text{donde } y = -2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Analice la existencia de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x + 1}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right)^{\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{-\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+3}\right)^{x}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3-2x+1}{x^3-2x-1}\right)^{\ln(x^3-2x-1)}$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$

2. Analice la continuidad de las funciones siguientes

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} , & x \geqslant -1 \\ e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & x < -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4x^3-3x+1}{2x+5}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}, & x > 0 \\ e^{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^{3x} , & x > 0 \\ \cos 2x , & x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen} x , & x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ A\operatorname{sen} x + B , & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x , & x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

¿Existen A y B tales que f sea continua en **R**?

3. ¿Será necesariamente discontinua en el punto $x = a$ la suma de dos funciones $f(x) + g(x)$ si:
   a) $f(x)$ es continua y $g(x)$ es discontinua en $x = a$?
   b) Ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en $x = a$?
4. ¿Será necesariamente discontinua en el punto $x = a$ el producto de dos funciones $f(x) \cdot g(x)$ si:
   a) $f(x)$ es continua y $g(x)$ es discontinua en $x = a$?
   b) ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son discontinuas en $x = a$?
5. Dé un ejemplo de una función discontinua en todos los puntos de **R** y cuyo cuadrado sea una función continua.
6. Demuestre que si f es continua en $x = a$ entonces también lo es $|f|$. ¿El recíproco es cierto?

§ V.3 Comparación de funciones y cálculo de límites por equivalentes

DEFINICIÓN 3.1

Si $f(x) = \epsilon(x)\, g(x)$, donde $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$, entonces, se dice que f *es infinitesimal en relación con la función g* y se escribe $f = o(g)$ (se lee, "f es pequeña o de g") para $x \to a$.

La notación $f(x) = o(1)$ para $x \to a$ significa simplemente que la función $f(x)$ es infinitesimal para $x \to a$.

Si $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$, entonces, la condición

$$f = \epsilon g , \ \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$$

se puede reescribir en la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Por tanto, el símbolo o(g) para $x \to a$ representa aquellas funciones tales que:

$$\lim_{x \to a} \frac{o(g)}{g} = 0$$

Ejemplo

1) $$x^2 = o(x) \quad \text{para } x \to 0$$

pues $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

$$x = o(x^2) \quad \text{para } x \to \infty$$

pues $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$

El caso más interesante de comparación de funciones es el de los infinitesimales y los infinitamente grandes:

Sean $\lambda(x)$ y $\gamma(x)$ dos infinitesimales para $x \to a$.
Si $\lambda(x) = o(\gamma(x))$ para $x \to a$, entonces, se dice que λ es un infinitesimal de orden mayor que γ o que γ es un infinitesimal de orden menor que λ para $x \to a$.

Ejemplo

2) Para $x \to 0$ se puede establecer con las potencias el siguiente orden de infinitesimal

$$x^n = o(x^{n-1})$$

para toda n natural.

Sean $\Lambda(x)$ y $\Gamma(x)$ dos infinitamente grandes para $x \to a$
Si $\Lambda(x) = o(\Gamma(x))$ para $x \to a$ entonces se dice que Λ es un infinito de orden mayor que Γ o que Γ es un infinito de orden mayor que Λ para $x \to a$.

Ejemplo

3) Para $x \to \infty$ se establece con la potencia el siguiente orden de infinitos

$$x^{n-1} = o(x^n)$$

para toda n natural.

Un caso en que puede afirmarse que ambas funciones son del mismo orden lo trataremos enseguida.

DEFINICIÓN 3.2

Se dice que las funciones f(x) y g(x) son ***equivalentes*** para $x \to a$ y se escribe $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$ si ambos están definidos y no se anulan en cierta vecindad del punto a, con excepción, quizás, del mismo punto a, y si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

TEOREMA 3.3

Para que las funciones f(x) y g(x), definidas en cierta vecindad del punto a sean equivalentes es necesario y suficiente que se cumpla $f(x) = g(x) + o(g(x))$ para $x \to a$ siendo $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$.

DEMOSTRACIÓN

Necesidad: Sea $f \sim g$ para $x \to a$. Por definición $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, o sea, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \epsilon(x)$ donde $\epsilon(x) \to 0$ para $x \to a$.

Por tanto, $f(x) = g(x) + g(x)\,\epsilon(x) = g(x) + o(g(x))$ para $x \to a$.

Suficiencia: Supongamos que se cumple

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Dividiendo por g(x), $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$, obtenemos $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}$.

Pasando al límite cuando $x \to a$ se obtiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

o sea, $f \sim g$ para $x \to a$.

TEOREMA 3.4

Supongamos que en la vecindad reducida $V^*(a)$ están definidas las funciones f(x), g(x) y $\alpha(x)$. Si $f \sim g$ para $x \to a$, entonces,

$$\lim_{x \to a} \{f(x)\alpha(x)\} = \lim_{x \to a} \{g(x)\alpha(x)\}$$

Observación

Esta igualdad es necesario entenderla en el sentido de que si existe el límite del miembro derecho, entonces, existe también y además es igual a él, el límite del miembro izquierdo.

De aquí se deduce que si uno de los límites no existe, entonces, no existe el otro.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que existe el límite del miembro derecho y es igual a 1. Entonces, evidentemente

$$\lim_{x \to a} \{f(x)\alpha(x)\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} g(x)\alpha(x)$$
$$= 1 \cdot l = l$$

Análogamente se demuestra la existencia del límite en el miembro derecho suponiendo que el límite en el miembro izquierdo existe.

El teorema demostrado es muy simple pero, a la vez, sumamente importante en las aplicaciones al cálculo de límites. Por supuesto, en la práctica, es necesario conocer la mayor cantidad posible de pares de funciones equivalentes. Interesa el caso $x \to 0$, pues por el lema de cambio de variable en el límite todo otro caso se reduce a éste.

Ejemplo

4) Las funciones sen x y x son equivalentes para $x \to 0$.

En efecto, utilizando la desigualdad (ver Capítulo IV § IV.2)

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad (\text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

y dividiendo por sen $x > 0$ obtenemos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

o sea:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

Dado que las tres funciones que se comparan en esta última desigualdad son pares, es decir, no cambian su valor al sustituir x por $-x$, entonces $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ para $x \in V^*(0; \frac{\pi}{2})$.

Como tanto $f(x) = \cos x$, como $h(x) \equiv 1$ tienen en $x = 0$ límite igual a la unidad por el principio del emparedado para funciones también $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ posee en $x = 0$ límite igual a la unidad.

5) Las funciones tg x y x son equivalentes para $x \to 0$.

En efecto, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

6) $1 - \cos x$ es equivalente a $\frac{1}{2} x^2$ para $x \to 0$.

Efectivamente, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 (\frac{x}{2})^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\ln(1 + x) \sim x$ para $x \to 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} =$
$= \ln e = 1$

8) $e^x - 1 \sim x$ para $x \to 0$ puesto que si hacemos el cambio $e^x - 1 = u$, entonces $e^x = 1 + u$, $x = \ln(1 + u)$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{u}{\ln(1 + u)} = 1$

Veamos un ejemplo en el cual se utilizan los equivalentes para el cálculo del límite:

Calculemos: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

Haciendo la transformación conveniente podemos aplicar los equivalentes conocidos

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

De ahí que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{2}$

Observaciones

1) Una sustitución de tg x y de sen x por sus equivalentes en la expresión $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ nos llevaría a una solución equivocada; por tanto se recomienda *nunca sustituir directamente en las diferencias* sino transformar convenientemente la expresión en productos y cociente para después realizar en estos la sustitución de equivalentes.

2) En el cálculo de límite es frecuente encontrarse con expresiones que contienen no sólo sen x, tg x, etc., sino también sen u(x), tg u(x) . . . donde u(x) es una función infinitesimal en el punto donde se está calculando el límite. Utilizando la regla del cambio de variables para el cálculo de límites es inmediato que para estas funciones se obtienen equivalentes análogos, los cuales podemos resumir en el listado siguiente:

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ (donde a puede ser un punto finito o uno de los símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞, a^+, a^-), entonces, cuando $x \longrightarrow a$

$$u(x) \sim \operatorname{sen} u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \ln(1 + u(x)) \sim (e^{u(x)} - 1)$$
$$\text{y } \frac{u^2(x)}{2} \sim \frac{1 - \cos u(x)}{2}$$

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Calcule

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(3 \cos x - 2)}{e^{\operatorname{sen}^2 3x} - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} (1 + \ln x)^{\frac{1}{x - 1}}$

Resolución

a) Estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Utilizando la sustitución por equivalentes:

$$\ln(3 \cos x - 2) = \ln[1 + (3 \cos x - 3)] \underset{(x \to 0)}{\sim} 3 \cos x - 3$$

pero a su vez, $3\cos x - 3 = 3(\cos x - 1) = -3(1-\cos x) \underset{(x\to 0)}{\sim} -\frac{3x^2}{2}$

Por otra parte,

$$e^{\text{sen}^2 3x} - 1 \underset{(x\to 0)}{\sim} \text{sen}^2\, 3x \underset{(x\to 0)}{\sim} (3x)^2 = 9x^2$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3\cos x - 2)}{e^{\text{sen}^2 3x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2}{2(9x^2)} = -\dfrac{1}{6}$

b) La indeterminación, en este caso, es de la forma "1^∞"

Observemos primero que:

$$(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}} = \left[(1+\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}\right]^{\frac{\ln x}{x-1}}$$

y que $(1+\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} \xrightarrow[x\to 1]{} e$

Por otra parte: $\ln x = \ln[1+(x-1)] \underset{x\to 1}{\sim} x-1$

Luego $\lim\limits_{x\to 1} (1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}} = e$

2. Analice el carácter de las series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\ln\frac{n+1}{n}\right)^n$

Resolución

a) Comparemos con la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Para hallar, $\lim \dfrac{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$, basta calcular (si existe)

$$\lim_{y\to 0} \frac{(1-\cos y)}{\frac{y^2}{\pi^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2}y^2}{\frac{y^2}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{2} < +\infty$$

Tomando $y_n = \frac{\pi}{n} \to 0$, de la continuidad de las funciones consideradas se

se obtiene $\lim \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{\pi^2}{2} < +\infty$

y, por tanto, la serie analizada es convergente.

b) Esta serie es divergente puesto que su término general no converge a cero. En efecto,

$$\lim\left(1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n = \lim\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

y, por el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior, este límite existe, si existe el límite $\lim\limits_{y\to 0} (1+\ln(1+y))^{\frac{1}{y}}$ y su valor es el mismo.

Pero $\lim\limits_{y\to 0} (1+\ln(1+y))^{\frac{1}{y}} =$ (cambio de variable $y = x-1$)

$= \lim\limits_{x\to 1} (1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}} = e$ (ejercicio resuelto 1 b)

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Calcule utilizando las equivalencias entre infinitesimales, los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{\ln(1+4x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\ln(1+5x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\text{sen}\, 3x}-1}{\ln(1+\text{tg}\, 2x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\text{sen}\, 4x)}{e^{\text{sen}\, 5x}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\text{sen}\, 3x+1)}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x}$

h) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{tg}(\pi - x)}{\pi^2 - x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

2. Analice el carácter de las series siguientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \geqslant 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n^3+1}{n+5}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

§ V.4 Clasificación de los puntos de discontinuidad

Sea a un punto de un intervalo I y sea f una función definida en $I^* = I \setminus \{a\}$. Al analizar la continuidad de f en el punto a, lo primero que comprobamos es si f está definida o no en a. Según la definición de continuidad, si a no pertenece al dominio de f no tiene sentido continuar el análisis: evidentemente a no es punto de continuidad para f. Ahora bien, desde un punto de vista más amplio, en un análisis más profundo, aunque la función f no esté definida en a debe atenderse a su comportamiento en una vecindad de dicho punto. Así, es posible que el límite exista y, en ese caso, la discontinuidad existente en a "no es significativa" basta definir la función en a como el valor de su límite y la función resultante será continua en a.

También podemos encontrarnos en la situación de que el límite en a exista y la función en a esté definida con un valor diferente a dicho límite. En tal caso, tampoco "es muy grande" la discontinuidad, pues al redefinir f en a como el valor límite se elimina la discontinuidad. En las demás situaciones posibles el límite en a no existe y esto es esencial en la definición de continuidad: No hay forma de evitar tal discontinuidad sin alterar la función en toda una vecindad del punto.

De esta forma las discontinuidades quedan clasificadas en dos tipos: discontinuidades evitables y discontinuidades esenciales.

DEFINICION 4.1

Sea el punto $a \in I$ y f una función cuyo dominio contiene a $I^* = I \setminus \{a\}$. Se dice que a es un *punto* de *discontinuidad evitable* para f, si existe el límite de f(x)

en el punto a, pero en el punto a, o la función f(x) no está definida, o el valor f(a) es diferente al límite de f(x) en x = a.

Ejemplos

1) La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida en todo entorno reducido $V^*(0)$ del origen y su límite en a = 0 existe y es igual a 1. Luego, dado que f no está definida en a = 0, estamos en presencia de un punto de discontinuidad evitable.

2) $$\text{Si } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

la discontinuidad en a = 0 está presente y es evitable, dado que el valor de $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$.

Observación

En ambos ejemplos la discontinuidad se evita definiendo f(0) = 1 y la función resultante ya es continua en todo **R** pero *no es la misma función* dada la cual es discontinua en a = 0.

Toda discontinuidad que no es evitable se dice esencial. Tal clasificación resulta algo "grosera" cuando se requiere un conocimiento más profundo del comportamiento de la función. El comportamiento de una función en una vecindad del punto a es muy distinto en el caso que existan los límites laterales, aunque sean diferentes, al caso en que alguno o ambos límites laterales no existan.

Esto obliga a una clasificación más detallada de las discontinuidades esenciales.

DEFINICIÓN 4.2

Sea $a \in I$ y f tales que Dom $f \supset I^* = I \setminus \{a\}$. Se dice que a es un punto de discontinuidad de *primera especie* o *de salto finito* si en este punto la función f(x) tiene límites laterales finitos pero desiguales:

$$l^+(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = l^-_{(a)}$$

El nombre de discontinuidad de salto finito queda completamente justificado si llamamos *salto* a la diferencia entre $l^+(a)$ y $l^-(a)$ en valor absoluto, es decir,

$$\text{salto de f en a} \equiv s(f; a) = |l^+(a) - l^-(a)|$$

Ejemplo

3) El ejemplo típico está dado por la función signo de x

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

La función sg x tiene en el punto a = 0 una discontinuidad de salto finito cuya magnitud es de dos unidades (figura V.6).

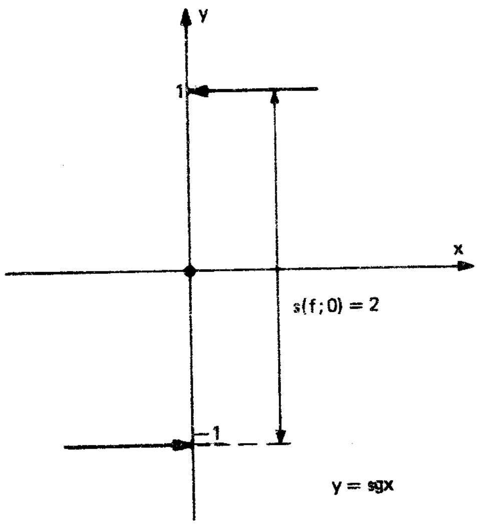


Fig. V.6

Si la discontinuidad en a es esencial pero no es de salto finito, es decir, si no existe al menos uno de los dos límites laterales en a, entonces se dice que la discontinuidad de f en a es *de segunda especie.*

Veamos algunos ejemplos de este tipo de discontinuidad

Ejemplos

4) Sea $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

El punto a = 0 es un punto de discontinuidad de segunda especie para f puesto que ninguno de los límites laterales existe (figura V.7)

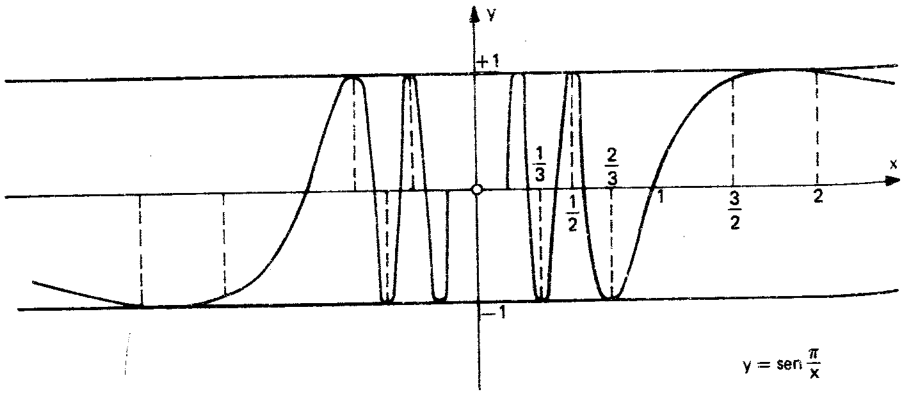


Fig. V.7

5) Consideremos la función $y = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

Esta función es continua para todo valor de $x \neq 0$, como compuesta de funciones continuas.

Observemos los límites laterales en x = 0.

Para x > 0, el exponente $\frac{1}{x}$ es positivo y es infinitamente grande para $x \to 0^+$. Por tanto

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Para x < 0, el exponente $\frac{1}{x}$ es negativo y diverge a $-\infty$ para $x \to 0^-$. Luego

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

De esta forma en x = 0 la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ tiene una discontinuidad de segunda especie (ver figura V.8).

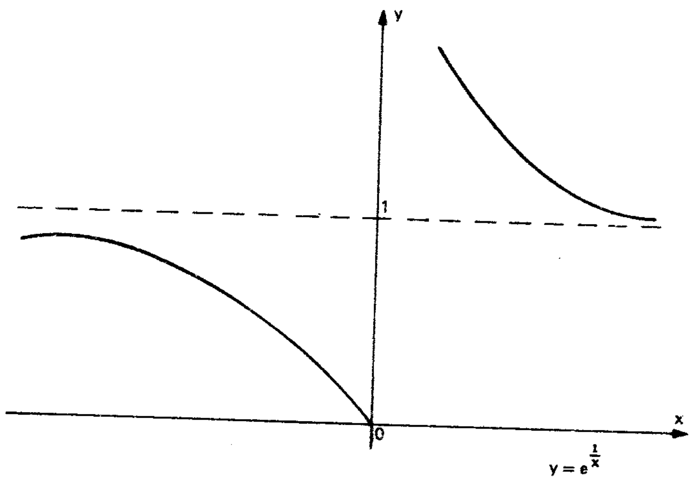


Fig. V.8

Observación

Analice el comportamiento de f en un intervalo con relación a la continuidad, significa analizar la continuidad de f en todos los puntos de dicho intervalo y clasificar sus discontinuidades cuando las tuviere. En el caso de los extremos del intervalo se analiza la continuidad lateral correspondiente.

Ejemplo

6) El análisis de la continuidad de la función f(x) = ln x, cuyo dominio máximo de definición es el intervalo abierto no acotado superiormente $(0, +\infty)$ consiste

en determinar la continuidad en todos los puntos $x > 0$ y clasificar la discontinuidad en $a = 0$. Esta discontinuidad en $a = 0$ es de segunda especie, dado que el único límite lateral posible es infinito. No se clasifican los puntos $x < 0$ por no ser puntos de acumulación del dominio de f.

RESUMEN

Sea a un punto del intervalo I y f una función definida en $I^* = I \setminus \{a\}$. Entonces, a puede ser:

A) *Punto de discontinuidad evitable* (existe $\lim_{x \to a} f(x) = l$)
- a) si f no está definida en a
- o
- b) si $f(a) \neq l$.

B) *Punto de discontinuidad esencial* (no existe $\lim_{x \to a} f(x)$)
- a) *1ra. especie* (salto finito). Si los límites laterales existen pero son diferentes.
- b) *2da. especie:* Si no existe por lo menos uno de los límites laterales.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + |x|)}{x} & , \ x \neq 0 \\ c & , \ x = 0 \end{cases} \quad , \text{ en } \mathbf{R}$$

Resolución

Si $x \neq 0$, la función es continua en x, pues coincide en una vecindad de x con una función elemental.

Análisis en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + |x|)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1 + |x|)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1 - x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Luego, para todo "c" la función f(x) presenta una discontinuidad esencial de primera especie en $x = 0$.

2. Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}} \quad , \text{ en } \mathbf{R}$$

Resolución

Esta función no está definida para los puntos de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ pues la tangente no está definida en esos puntos. En $\mathbf{R} \setminus \{x \ / \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbf{Z}\}$ la función es continua pues es una función elemental.

Analicemos en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)} \operatorname{tg} x = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z}. \text{ Luego,}$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} f(x) = 0, \text{ para todo } k \in \mathbf{Z}$$

Entonces, los puntos de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$ son puntos de discontinuidad esencial de primera especie para la función f.

3. Analice la continuidad de la función $y = x^2 \operatorname{ctg} x$ en $\mathbf{R}$.

Resolución

$$y = x^2 \operatorname{ctg} x = \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

El primer factor, x^2, es continuo en todo $\mathbf{R}$; el segundo en todo $x \neq m\pi$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en los cuales ctg x no está definida.

Consideremos el punto $x = 0$. En este punto el primer factor se anula y toda la expresión presenta una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Pero:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to 0} x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Luego en $x = 0$ existe una discontinuidad evitable.

Analicemos ahora el punto $x = \pi$.

$$\lim_{x \to \pi^-} x^2 \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to \pi^-} (x^2 \cos x) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

pues el límite de $x^2 \cos x$ existe y es igual a $\pi^2 \cos \pi = -\pi^2$, dada la continuidad de $x^2 \cos x$. Además sen x es infinitesimal para $x \to \pi$ y es positiva para $x < \pi$.

Análogamente

$$\lim_{x \to \pi+} x^2 \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to \pi+} = (x^2 \cos x) \ \frac{1}{\operatorname{sen} x} = +\infty$$

Por tanto, en $x = \pi$, f tiene una discontinuidad esencial de segunda especie. Lo mismo ocurre en cada punto de la forma $x = m\pi, \ m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\,\text{sen}\,x)^{2n}}$$

Resolución

El valor de la función f depende fundamentalmente del valor del límite de $(2\,\text{sen}\,x)^{2n}$ y este, a su vez, depende del valor de $|\text{sen}\,x|$.

Si

$$|\text{sen}\,x| = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ entonces } f(x) = \frac{x}{2} \\ a > \frac{1}{2}, \text{ entonces } f(x) = 0 \\ b < \frac{1}{2}, \text{ entonces } f(x) = x \end{cases}$$

El problema se reduce a determinar en qué puntos $|\text{sen}\,x| = \frac{1}{2}$, pues en todo otro punto la función es continua. Pero $|\text{sen}\,x| = \frac{1}{2}$ si y solo si $x = a_k = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ y en estos puntos, $\lim_{x\to a_k} f(x)$ no existe. En efecto, los límites laterales en estos puntos son, uno igual a $a_k \neq 0$ y otro cero.

En resumen, la función f es continua en $\mathbf{R} \setminus \{a_k = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ y en cada punto a_k presenta una discontinuidad esencial de primera especie de salto igual a $|a_k|$ (que es cada vez mayor a medida que $|k|$ crece).

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Analice la continuidad de las siguientes funciones en su dominio de definición y determine el carácter de sus puntos de discontinuidad:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{3x}}{x}, & x > 0 \\ -3, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{x}, & x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-[x]}$

e) $f(x) = (-1)^{[x]}$

f) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x| \leqslant 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \text{ctg}^2 x, & x \text{ no es entero} \\ 0, & x \text{ es entero} \end{cases}$

h) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$

i) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^{2n} x$

§ V.5 Propiedades locales de las funciones continuas

Se denominan propiedades locales de una función f(x) a aquellas que dependen del comportamiento de la función en una cierta vecindad de un punto fijo de su dominio. Por ejemplo, la continuidad de una función en un punto de su dominio es una propiedad local, puesto que para su verificación es necesario un comportamiento de la función en una vecindad del punto que garantice la existencia de límite.

En este parágrafo estudiaremos dos propiedades locales muy importantes de las funciones continuas: la propiedad de la acotación local y la propiedad de conservación del signo.

Introduzcamos algunos nuevos conceptos.

DEFINICIÓN 5.1

La función f(x) está *acotada superiormente (inferiormente)* sobre el conjunto X si existe un número real M (un número real m) tal que, para todos los valores del argumento $x \in X$, se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$.

Al número M (al número m) se le llama cota superior (cota inferior) de la función f sobre el conjunto X.

DEFINICIÓN 5.2

La función f(x) está *acotada* sobre el conjunto X si está acotada superior e inferiormente sobre X.

Note que decir que una función real está acotada es equivalente a decir que su conjunto imagen es un conjunto de números reales acotado o sea, que se cumpla la propiedad siguiente.

PROPIEDAD 5.3

La función f(x) es acotada sobre X si y sólo si existe un número real $K > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant K \quad \text{para todo } x \in X$$

Ejemplo

1) La función $f(x) = \text{tg } x$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ está acotada inferiormente por cualquier número real $m \leqslant 0$, pero no está acotada superiormente pues a medida que nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ los valores de la función crecen indefinidamente.

El ejemplo nos induce a pensar que una función que posee límite en un punto de un intervalo está acotada en una vecindad de ese punto. El teorema siguiente responde afirmativamente a esta inquietud.

TEOREMA 5.4 (Propiedad de la acotación local)

Sea la función $f(x)$ definida en una vecindad del punto a (salvo, quizás, en el propio punto a) y con límite finito en el punto a. Entonces, existe un número positivo δ tal que la función f está acotada en la vecindad $V^*(a;\delta) = V(a;\delta) \setminus \{a\}$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que el límite de $f(x)$ en el punto a es igual a l. Según la definición de límite (según Cauchy) para $\epsilon = 1$ se encuentra $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } x \in V^*(a,\delta) \text{ , entonces, } |f(x) - l| < 1$$

De ahí que: $l - 1 < f(x) < l + 1$ para $x \in V^*(a;\delta)$ y esto significa que $f(x)$ está acotada en $V^*(a;\delta)$, lo cual demuestra el teorema.

Note que si, además, $f(x)$ está definida en el punto a, estará acotada en toda $V(a;\delta)$: basta tomar como cota superior el máximo entre $l + 1$ y $f(a)$, y como cota inferior el mínimo entre $l - 1$ y $f(a)$.

COROLARIO (Propiedad de la acotación local para funciones continuas)

Si la función f es continua en a, entonces, existe una vecindad de a, $V(a;\delta)$, sobre la cual f está acotada.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, basta observar que una función continua en un punto a posee límite finito en a y, además, está definida en este punto.

La propiedad siguiente, aunque bastante evidente, es sumamente útil en muchas situaciones.

TEOREMA 5.5 (Propiedad de la conservación del signo)

Sea la función $f(x)$ continua en el punto a. Entonces, si $f(a) \neq 0$ existe una vecindad $V(a,\delta)$ tal que en ella la función mantiene el mismo signo que $f(a)$.

DEMOSTRACIÓN

Por la definición, según Cauchy, de continuidad en a para todo $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $x \in V(a,\delta)$, entonces,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

o sea,

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon \qquad (1)$$

Eligiendo $\epsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ se tiene que los números $f(a) - \frac{|f(a)|}{2}$ y $f(a) + \frac{|f(a)|}{2}$ serán ambos positivos si $f(a) > 0$ y ambos negativos si $f(a) < 0$ (figuras V.9 y V.10).

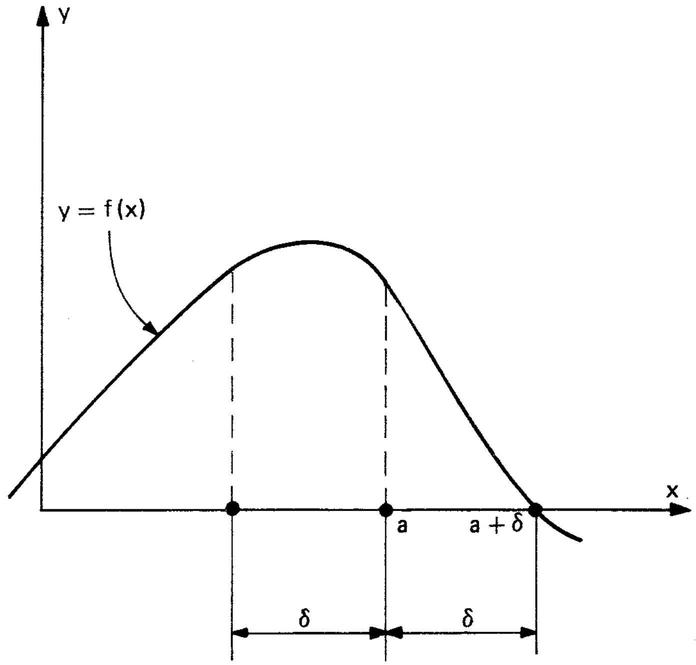


Fig. V.9

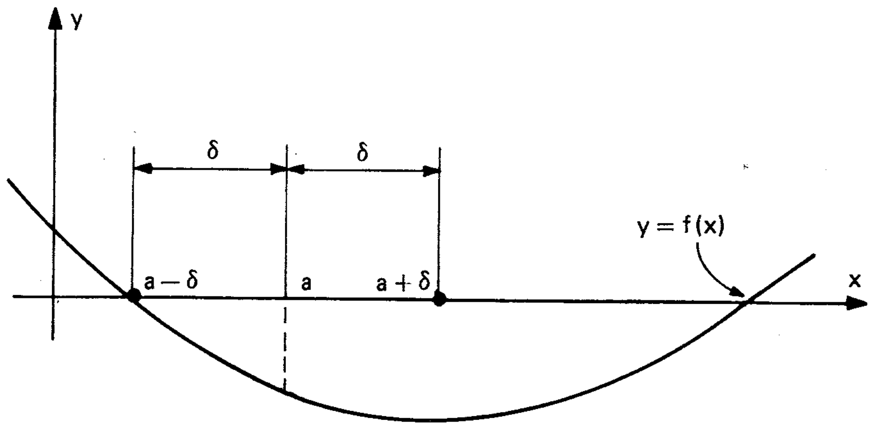


Fig. V.10

Entonces, de la doble desigualdad (1), válida en $V(a,\delta)$ se deduce la validez de la afirmación del teorema.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que existe una vecindad de $a = 1$, $V(1)$, tal que para todo $x \in V(1)$ se cumple

$$\left(\frac{(x-1)^2\, x^2 + 1}{x^2+1}\right) \cos \pi x > -1$$

Resolución

La función $f(x) = \left(\frac{(x-1)^2\, x^2 + 1}{x^2+1}\right) \cos \pi x + 1$ es continua en todo $\mathbf{R}$ y, en particular, lo es en $x = 1$.

Además, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$. Por el teorema de la conservación del signo, existe una vecindad $V(1)$ donde $f(x) > 0$.

En esa vecindad se cumple la desigualdad planteada.

2. Sea f continua en $x = a$ y $f(a) = 0$. Demuestre que si $\alpha \neq 0$, entonces, $f + \alpha$ es distinta de cero en una vecindad de a.

Resolución

Como f es continua en a y α es una constante, $f + \alpha$ es continua en a. Además

$$[f + \alpha](a) = f(a) + \alpha = \alpha \neq 0$$

Utilizando la propiedad de la conservación del signo, existe una vecindad $V(a)$ donde $f + \alpha$ tiene el mismo signo que α. Por tanto, $f + \alpha$ es distinta de cero en $V(a)$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Pruebe que existe un intervalo $[-a, a]$ tal que para todo $x \in [-a, a]$ se cumple que

$$\left(\frac{x^3 - 5x - 15}{x-4}\right) \cos^3 \pi x - \frac{3(x+1)^2}{4} > 2$$

2. a) Pruebe que si $f(x)$ es continua en a por la derecha (izquierda) entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ está acotada en $[a, a+\delta]$ ($[a-\delta, a]$).

   b) Pruebe que si $f(x)$ tiene en a una discontinuidad de primera especie, entonces, f está acotada en una vecindad reducida de a.

   c) Pruebe que si $f(x)$ es continua por la derecha (izquierda) de a y $f(a) \neq 0$, entonces, existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ en el intervalo $[a, a+\delta]$ ($[a-\delta, a]$).

§ V.6 Teoremas de Bolzano y algunas aplicaciones algebraicas

Además de las propiedades locales estudiadas, son clásicas ciertas propiedades de las funciones continuas llamadas *globales*, porque están relacionadas con el comportamiento de la función en todo su dominio de continuidad. Comenzamos con dos teoremas muy "evidentes" en su enunciado, pero cuya demostración rigurosa no es tan inmediata.

TEOREMA 6.1 (1er. teorema de Bolzano)

Sea f definida y continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)\, f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Observación

El 1er. teorema de Bolzano expresa la idea intuitiva de que una curva continua, para pasar de un punto situado por debajo del eje X a otro situado por encima, debe cortar dicho eje (figura V.11).

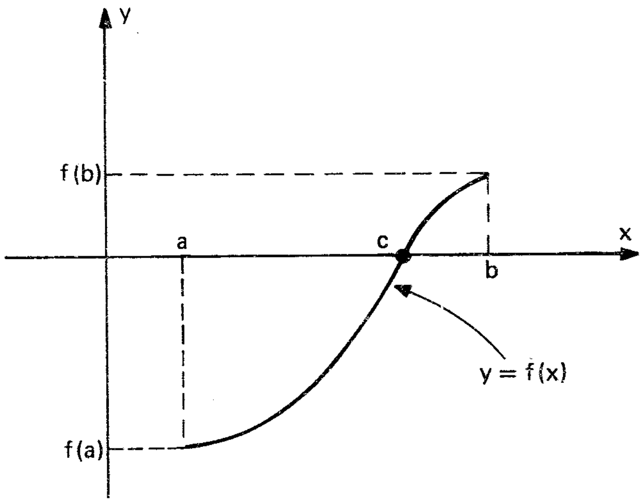


Fig. V.11

La demostración se realiza por el método de Bolzano o del "acorralamiento", ya varias veces utilizado en capítulos anteriores.

DEMOSTRACIÓN

Asumamos, sin perder generalidad, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en dos partes iguales por el punto $\frac{a+b}{2}$. Puede suceder que f se anule en este punto y, entonces, el teorema queda demostrado. Si no es así, esto quiere decir que $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ o $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. Consideremos el intervalo donde exista cambio de signo en los extremos y denotémoslo por $[a_1, b_1]$.

Dividamos $[a_1, b_1]$ en dos partes iguales. Denotemos por $[a_2, b_2]$ la mitad para la cual $f(a_2) < 0$ y $f(b_2) > 0$. Continuemos el proceso. Si en un número finito de pasos encontramos un punto c tal que $f(c) = 0$ queda terminada la demostración. Si no es así, entonces obtenemos un sistema infinitesimal de intervalos cerrados encajados, pues la longitud de $[a_n, b_n]$ es $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Por tanto, ambas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen límite común $\lim a_n = \lim b_n = c$, el cual evidentemente está en $[a, b]$. Probemos que este punto c satisface las condiciones del teorema.

Supongamos que $f(c) \neq 0$; entonces, por la propiedad de conservación del signo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo de $f(c)$ en toda la δ-vecindad de c. Pero, $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) > 0$ para todo n y particularmente para n suficientemente grande tal que $[a_n, b_n] \subset V(c; \delta)$. Esta contradicción prueba que $f(c) = 0$.

Evidentemente, $c \neq a$ y $c \neq b$ dada las hipótesis $f(a)\, f(b) \neq 0$, o sea, que $c \in (a, b)$ y el teorema queda demostrado.

Observaciones

1) El requerimiento de la continuidad de f es esencial. Basta que exista una discontinuidad evitable para que f no cumpla la tesis. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ entonces, sobre el intervalo } [-1, 1],\ f(1) = 1 > 0$$

y $f(-1) = -1 < 0$ y, no obstante, no hay intersección con el eje de abscisas.

2) Sin embargo, no debe concluirse que al fallar una de las hipótesis del teorema necesariamente tiene que ser falsa la tesis.

Analice el lector los ejemplos $f(x) = x^2$ y $f(x) = \text{sg}\, x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

¿A qué resultados podremos llegar si en lugar de plantearnos que f(a) y f(b) tienen signos contrarios suponemos que sus valores son distintos (los signos pueden ser iguales)? Analicemos geométricamente la situación (figura V.12).

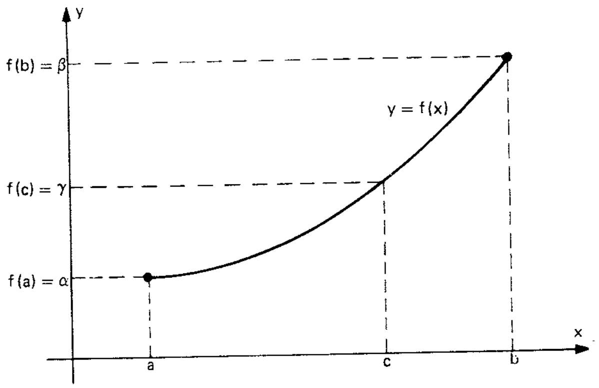


Fig. V.12

Para que la curva que representa gráficamente a la función continua f pase del punto (a, f (a)) al punto (b, f(b)) aparentemente debe pasar por los puntos "intermedios" del tipo (c, f(c)) donde $a < c < b$ y f(c) está entre f(a) y f(b).

Precisamente, se cumple el siguiente teorema:

TEOREMA 6.2 (2do. teorema de Bolzano o teorema de los valores intermedios)

Sea f continua sobre el segmento $[a, b]$ y tal que $f(a) = \alpha \neq f(b) = \beta$. Sea γ un número arbitrario entre α y β. Entonces sobre el intervalo (a, b) se encuentra un número c tal que $f(c) = \gamma$.

Observación

Haciendo una traslación del sistema de referencias que lleve γ al origen de coordenadas, entonces, $\text{sg}\, \alpha \neq \text{sg}\, \beta$ y se cumplen, por tanto, las hipótesis del 1er. Teorema de Bolzano. La demostración rigurosa, por supuesto, se basa en esta idea geométrica.

DEMOSTRACIÓN

Basta considerar la función auxiliar

$$\varphi(x) = f(x) - \gamma,$$

la cual tiene el mismo comportamiento de $y = f(x)$ sólo que "trasladado". Es decir, la función φ es continua en $[a, b]$ y $\varphi(a)\ \varphi(b) < 0$.

Luego, por el 1er. teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $0 = \varphi(c) = f(c) - \gamma$, lo cual implica $f(c) = \gamma$ y el teorema queda demotrado.

Observaciones

1) Puesto que tomando $\gamma = 0$ el 2do. teorema de Bolzano se reduce al 1ro., las observaciones hechas allí son válidas en este contexto.

2) Como probamos anteriormente, basta que haya una discontinuidad evitable para que los teoremas de Bolzano puedan dejar de cumplirse. No obstante, existen infinidad de funciones con discontinuidades hasta de segunda especie que cumplen la propiedad de alcanzar todos los valores intermedios entre los valores que toma en los extremos del intervalo. Tal es el caso de la función $f(x) = \text{sen}\, \frac{1}{x}$, la cual sobre el intervalo $[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$ alcanza cada valor entre -1 y 1, sin embargo, en el origen tiene una discontinuidad de segunda especie. Como se señaló en la introducción a este capítulo, Bolzano encontró una función discontinua en todo punto de un intervalo y que, sin embargo, alcanza todos los valores entre -1 y 1. Con este ejemplo, quiso mostrar a sus lectores que no bastaba la intuición para asegurar un hecho matemático, que es necesario utilizar el razonamiento lógico.

Las aplicaciones más inmediatas de los teoremas de Bolzano se refieren a las soluciones de ecuaciones.

Ejemplo

1) Sea la ecuación $x\,10^x = 1$; ¿posee esta ecuación alguna solución real?

Para resolver este problema puede utilizarse el 1er. o el 2do. teorema de Bolzano, es decir, computar las hipótesis del 1er. teorema para la función auxiliar

$$\varphi(x) = x\,10^x - 1$$

o las hipótesis del 2do. teorema para

$$f(x) = x\,10^x$$

a) En el primer caso basta comprobar que para dos ciertos números reales la función φ alcanza valores de signo contrario.

b) En el segundo caso hace falta hallar dos números reales tales que el valor de f en uno sea menor que 1 y en otro tome f un valor mayor que 1.

Se puede comprobar que los números más simples, $a = 0$, $b = 1$, nos sirven tanto en uno como en otro caso.

En efecto:

a') $\varphi(0) = -1$, $\varphi(1) = 9$

b') $f(0) = 0$, $f(1) = 10$ $\quad$ $f(0{,}35) < 1$, $f(0{,}45) > 1$, $f(0{,}$...

Observemos que el método de acorralamiento, como siempre, permite precisar mejor la localización de las soluciones de la ecuación; por ejemplo, si tomamos el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y aplicamos el razonamiento del 1er. teorema encontramos:

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} - 1 > 0. \qquad \varphi(\tfrac{1}{3}) < 0$$

luego, en este intervalo hay una solución. Reiterando el proceso precisamos que esta raíz de la ecuación está en el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ pues $\varphi(\frac{1}{4})\,\varphi(\frac{1}{2}) < 0$, y así sucesivamente.

En una máquina calculadora con su debido programa, la localización se hace con el error requerido en breves minutos.

Es también conveniente desde el punto de vista práctico no limitarse a la bisección del intervalo en la búsqueda de la raíz de la ecuación; por ejemplo, una división en 10 partes iguales de un intervalo de la longitud unidad nos permite determinar la primera cifra decimal y este proceso reiterado conduce directamente al número buscado con la exactitud deseada expresada en forma decimal.

Ilustremos el método mediante el ejemplo siguiente.

Ejemplo

2) Queremos buscar una raíz positiva de la ecuación $x^5 - 2x^3 + x^2 - 2 = 0$.

Consideremos la función $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$. Como $f(1) = -2$ y $f(2) = 18$, el polinomio tiene una raíz entre 1 y 2. Dividimos el intervalo

$[1, 2]$ en 10 partes iguales por los puntos 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; . . . ; 1,9 y calculamos:

$$f(1{,}1) = -1{,}84\,;\ f(1{,}2) = -1{,}43\,;\ f(1{,}3) = -1\,;$$

$$f(1{,}4) = -0{,}14\,;\ f(1{,}5) = 1{,}10.$$

Como $f(1{,}4) < 0$ y $f(1{,}5) > 0$, el polinomio tiene una raíz entre 1,4 y 1,5. Dividimos ahora el intervalo $[1{,}4\,;\,1{,}5]$ en 10 partes iguales y operamos igual que antes hasta que obtenemos

$$f(1{,}41) = -0{,}04 \quad y \quad f(1{,}42) = 0{,}06$$

Así concluimos que el polinomio tiene una raíz entre 1,41 y 1,42. Por tanto, si queremos una aproximación de una raíz con un error menor que 0,01 basta tomar un número entre 1,41 y 1,42. Si queremos una mejor aproximación continuamos el proceso dividiendo en 10 partes el intervalo $[1{,}41\,;\,1{,}42]$, y así sucesivamente.

EJERCICIO

Ejercicios resueltos

1. ¿Tiene la ecuación $x^5 - 18 + 2 = 0$ una raíz en el intervalo $[-1,1]$?

Resolución

Analicemos la función $f(x) = x^5 - 18x + 2$ en $[-1,1]$.

$$f(-1) = 19 \quad y \quad f(1) = -15.$$

Luego $f(-1)\,f\,(1) < 0$ y como f es continua en $[-1,1]$ (lo es en todo **R** porque es polinomial) se satisfacen las condiciones del 1er. teorema de Bolzano. Entonces, existe $c \in (-1,1)$, tal que $f(c) = 0$ y c es la raíz buscada.

2. ¿Tiene la ecuación $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$ alguna raíz en el intervalo $[0, 2]$?

Resolución

Analicemos la función $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ en $[0,2]$. $f(0) = 2 > 0$ y $f(2) = 6 > 0$. En este caso no se puede aplicar directamente el 1er. teorema de Bolzano. No obstante, como $f(1) = -1 < 0$, podemos aplicarlo tanto en el intervalo $[0,1]$ como en $[1,2]$ (la función f al ser polinomial es continua en todo **R**). Así aseguramos no solo la existencia de una, sino al menos 2 raíces en $[0,2]$, una en cada uno de los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$.

3. ¿Tiene la ecuación $x = a \operatorname{sen} x + b$, donde $0 < a < 1$, $b > 0$, una raíz positiva no mayor que $b + a$?

Resolución

Analicemos la función $f(x) = x - a \operatorname{sen} x$ en $[0, b + a]$, $f(0) = 0$, $f(b + a) = b + a - a \operatorname{sen}(b + a) = b + a\,[1 - \operatorname{sen}(b + a)]$

Como $1 - \text{sen}(b + a) \geqslant 0$ y $a > 0$, entonces $f(a + b) \geqslant b$.

Si $f(b + a) = b$, obtenemos una raíz positiva de la ecuación, no mayor que $b + a$. Analicemos, entonces cuando $f(b + a) > b$. f es una función continua en $[0, a+b]$ (lo es en todo $\mathbf{R}$), $b \in (f(0), f(a + b))$. Por tanto, aplicando el 2do. teorema de Bolzano, existe $c \in (0, a+b)$ tal que $f(c) = b$; c es la raíz buscada.

4. Demuestre que:

a) Las funciones polinomiales de grado impar tienen, por lo menos, una raíz real.

b) Las funciones polinomiales de grado par que toman un valor cuyo signo sea contrario al que tiene el coeficiente de su término de mayor grado, tienen, por lo menos, 2 raíces reales.

Resolución

a) Sea el polinomio $P(x)$: $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} (a_{2n+1} \neq 0)$.

De la teoría de límites conocemos $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = sg(a_{2n+1}) \infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -(sg\, a_{2n+1}) \infty$. Por tanto, existe $x_0 > 0$ tal que $sg\, P(x_0) = sg\, a_{2n+1}$ y existe $x_1 < 0$ tal que $sg\, P(x_1) = -sg\, a_{2n+1}$. Como $P(x)$ es una función continua en $[x_1, x_0]$ y $P(x_0) P(x_1) < 0$, aplicando el 1er. teorema de Bolzano obtenemos la existencia de $c \in (x_1, x_0)$ tal que $P(c) = 0$. Es decir, existe una raíz real de la función polinomial.

b) Sea el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n}$, tal que existe $x_0 \in \mathbf{R}$ con $P(x_0) a_{2n} < 0$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = (sg\, a_{2n}) \infty$, existen $x_1 > x_0$ y $x_2 < x_0$ tales que $P(x_1) P(x_0) < 0$ y $P(x_2) P(x_0) < 0$. Aplicando, entonces, el 1er. teorema de Bolzano a la función $P(x)$ en los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[x_2, x_0]$ obtenemos la existencia de $c_1 \in (x_0, x_1)$ y $c_2 \in (x_2, x_0)$ tales que $P(c_1) = P(c_2) = 0$. Es decir, existen dos raíces reales de la función polinomial.

Ejercicios para el estudio independiente

1. Compruebe que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene, al menos, una raíz comprendida entre 1 y 2.

2. ¿Toma la función $f(x) = \frac{x^3}{4} - \text{sen}\, \pi x + 3$ el valor $2\frac{1}{3}$ en el intervalo $[-2, 2]$?

3. Decimos que una raíz real de una ecuación ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a,b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Con ayuda del 1er. teorema de Bolzano separe las raíces reales de cada una de las ecuaciones siguientes (se sabe que cada una tiene 4 raíces reales).

a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$

b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$

c) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$

4. Para cada una de las funciones siguientes halle un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún $n \leqslant x < n + 1$. Calcule el valor de la raíz con 2 cifras decimales exactas.

a) $f(x) = x^3 - x + 3$

b) $f(x) = x^5 + x + 1$

c) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

5. Demuestre que existe algún número real x, tal que

a) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \text{sen}^2 x} = 119$

b) $\text{sen}\, x = x - 1$

6. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ toma siempre valores racionales. ¿Qué puede afirmar de la función f?

7. Suponga que f y g son continuas en $[a,b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demuestre que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in [a,b]$ (si la demostración no es muy corta no está bien).

8. Sea $f(x) = \text{tg}\, x$. A pesar de ser $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ y $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$ no hay ningún punto en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tal que $f(x) = 0$. Explique por qué no hay contradicción con el 1er. teorema de Bolzano.

§ V.7 Funciones inversas

En este epígrafe veremos un concepto muy importante y una aplicación más del 2do. teorema de Bolzano.

Sea la función $y = f(x)$ definida sobre el segmento $[a,b]$ y supongamos que el segmento $[\alpha, \beta]$ es su imagen por f. Supongamos además, que a cada y del segmento $[\alpha, \beta]$ corresponde *un solo valor* x del segmento $[a, b]$ tal que $f(x) = y$. Entonces, sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ se define una función, la cual a cada y de $[\alpha, \beta]$ le hace corresponder el valor x de $[a, b]$ para el cual $f(x) = y$. Esta función se denota por el símbolo $x = f^{-1}(y)$ y se llama función inversa de la función $y = f(x)$.

En los razonamientos anteriores, en lugar de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$ pudieran considerarse intervalos abiertos (a, b) y (α, β) donde a, b, α y β son números reales o los símbolos $+\infty$, $-\infty$. Mas generalmente, pudiera considerarse el caso en que la función f está dada sobre un conjunto arbitrario de números reales X y con valores sobre otro conjunto arbitrario Y de $\mathbf{R}$.

A tales efectos conviene introducir las definiciones siguientes (conocidas por el estudiante desde la enseñanza media).

DEFINICIONES 7.1

Sea la función f: $X \to Y$. Se dice que f es *epiyectiva* o *sobreyectiva* si su imagen es todo el conjunto Y, o sea, si para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Diremos que f es *inyectiva* si para cada par de números distintos x_1 y x_2 de X los correspondientes valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son también diferentes. Si la función f cumple las condiciones de epiyectividad e inyectividad se le llama *función biyectiva.*

Ejemplos

1) $f(x) = x$ es biyectiva de **R** sobre **R**.

2) $f(x) =$ cte no es inyectiva ni epiyectiva, salvo el caso en que tanto el dominio como el codominio se consideren puntuales.

3) $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni epiyectiva considerándola como función de **R** en **R**, pero si se considera de $\mathbf{R}_+$ en $\mathbf{R}_+$ entonces es tanto inyectiva como sobreyectiva.

DEFINICIÓN 7.1

Sea la función f: $X \to Y$ biyectiva.

La *función inversa* de f se define en Y sobre X como aquella función que a cada $y \in Y$ hace corresponder el único valor x en X tal que $f(x) = y$. Se denota $f^{-1}: Y \to X$.

La epiyectividad permite afirmar que para todo $y \in Y$ la ecuación $y = f(x)$ es soluble respecto a x y la inyectividad asegura que tal x es única.

Observaciones

1) Si $x = f^{-1}(y)$ es la función inversa de $y = f(x)$, entonces, evidentemente, la función $y = f(x)$ es la función inversa de la función $x = f^{-1}(y)$.

2) No toda función posee inversa: hace falta que f sea inyectiva y a la vez epiyectiva para que f^{-1} esté bien definida. No obstante, en muchos casos se puede restringir la función a un subconjunto de su dominio máximo sobre el cual sea inyectiva y, a su vez considerar como codominio la imagen correspondiente. En tal caso, la función resultante (evidentemente, distinta a la original) poseerá inversa.

Ejemplo

4) Como vimos en el ejemplo 3, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni epiyectiva considerada de **R** en **R**, pero de $\mathbf{R}_+$ en $\mathbf{R}_+$ es biyectiva y su inversa es la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Los gráficos de f y de f^{-1} están tan íntimamente relacionados, que es posible utilizar el gráfico de f para obtener "a mano alzada" el gráfico de f^{-1}. Puesto que el gráfico de f^{-1} está constituido por todos los pares (y,x) tales que (x,y) pertenece al gráfico de f y dado que los puntos (y,x) y (x,y) en el plano cartesiano son simétricos uno del otro respecto a la bisectriz del 1er. cuadrante (figura V.13), para

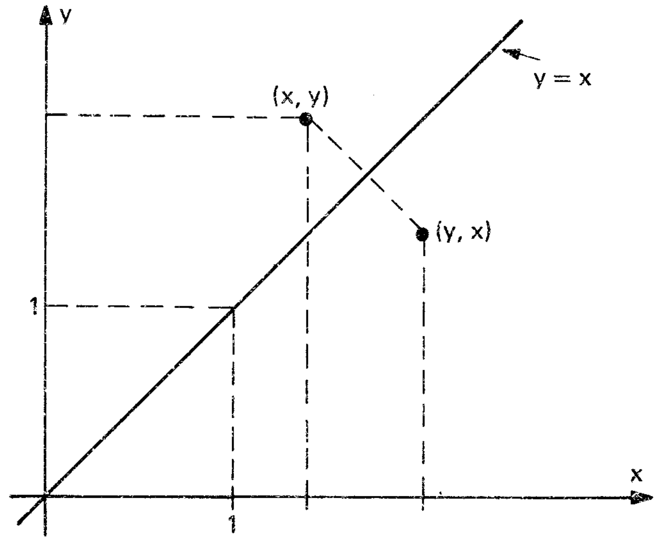


Fig. V.13

obtener el gráfico de f^{-1} basta hallar la simétrica del gráfico de f respecto a la recta $y = x$ (figura V.14).

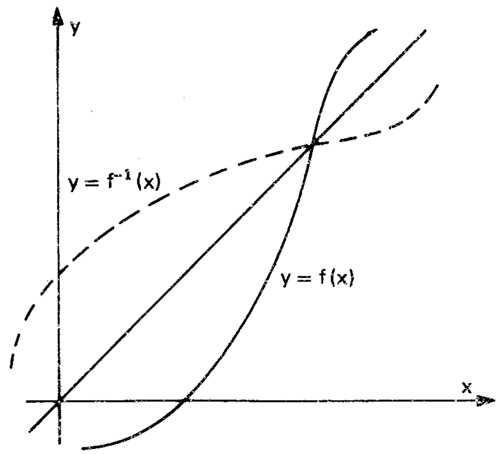


Fig. V.14

De la representación gráfica de la función inversa de f se indican propiedades importantes de tales funciones. Así, es evidente que si f es inyectiva también lo será f^{-1}. Mas generalmente, si $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$ (si $f(x_2) < f(x_1)$ para $x_2 > x_1$), entonces, f^{-1} también cumple la misma relación, o sea, $f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1)$

si $y_2 > y_1$ ($f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$ si $y_2 > y_1$). Antes de probar la veracidad de estas "evidencias", vamos a simplificar las notaciones llamando *función estrictamente creciente (estrictamente decreciente)* la que cumple:

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1))$$
$$(\text{resp. } (x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) < f(x_1))$$

LEMA 7.2

Sea la función f estrictamente creciente (decreciente) sobre el conjunto X y sea Y el conjunto de las imágenes de los elementos de X. Entonces, sobre Y existe la función inversa f^{-1}, la cual es inyectiva y también estrictamente creciente (decreciente).

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que f es estrictamente creciente. La inyectividad de f es inmediata, pues $x_1 \neq x_2$ significa $x_1 > x_2$ o $x_2 > x_1$ y, por el crecimiento estricto de f, en el primer caso será $f(x_1) > f(x_2)$ o, si ocurre el segundo caso, entonces, $f(x_2) > f(x_1)$. Por tanto, dado que por hipótesis Y es el conjunto imagen de X, f^{-1} existe.

Análogamente se demuestra que f^{-1} es inyectiva también como consecuencia del crecimiento estricto de f. Probemos ahora que f^{-1} es estrictamente creciente sobre Y.

Sean $y_1 < y_2$; $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$, y sean $x_1 = f^{-1}(y_1)$ $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Por consiguiente, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Para todo par de números x_1 y x_2 se cumple una (y sólo una) de las relaciones siguientes: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 < x_2$. Si $x_1 > x_2$, por ser f estrictamente creciente se tendría $f(x_1) > f(x_2)$, o sea, $y_1 > y_2$, lo cual es imposible. Si $x_1 = x_2$, dada la inyectividad de f se obtendría $f(x_1) = f(x_2)$, también contradictorio. Luego, de la desigualdad $y_1 < y_2$ se deduce que $x_1 < x_2$, lo cual significa que f^{-1} es estrictamente creciente sobre Y.

El caso en que f es estrictamente decreciente se puede demostrar análogamente o considerar la función $-f$ y aplicar el resultado demostrado, pues cuando la función f decrece estrictamente sobre X, entonces, la función $-f$ crece estrictamente sobre este mismo conjunto.

El lema queda demostrado.

El resultado que deduciremos a continuación es consecuencia del lema anterior y del teorema de los valores intermedios.

TEOREMA 7.3 (de la función inversa)

Sea la función f definida, estrictamente creciente (decreciente) y continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces, existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$), la cual es estrictamente creciente (decreciente) y continua sobre dicho intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Hagamos todos los razonamientos para las funciones estrictamente crecientes pues para las estrictamente decrecientes se procede análogamente.

Como f(x) es estrictamente creciente, por el lema 7.2 la función f^{-1} existe y es estrictamente creciente sobre Y el conjunto de valores de f. Evidentemente, al ser f estrictamente creciente $Y = f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$. Pero, si f es continua, el teorema de los valores intermedios asegura que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Luego, f^{-1} existe y es estrictamente creciente sobre todo el intervalo $[f(a), f(b)]$. Falta probar la continuidad de f^{-1} en $[f(a), f(b)]$.

Sea $y_0 \in [f(a), f(b)]$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Consideremos primeramente el caso en que $y_0 \in (f(a), f(b))$. Entonces, teniendo en cuenta el crecimiento estricto de f^{-1}, $x_0 \in (a, b)$. Sin perder generalidad (¿por qué?), sea $\epsilon > 0$ fijo y tal que

$$a \leqslant x_0 - \epsilon < x_0 < x_0 + \epsilon \leqslant b \tag{1}$$

Sean $y_1 = f(x_0 - \epsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \epsilon)$. Entonces, como f es estrictamente creciente, de (1) se obtiene

$$f(a) \leqslant y_1 \leqslant y_0 < y_2 \leqslant f(b)$$

Sea $\delta > 0$, tal que $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$. Entonces, para todo y tal que $|y - y_0| < \delta$ se cumple $y_1 < y < y_2$ y, por tanto, utilizando nuevamente el crecimiento estricto de f^{-1}:

$$x_0 - \epsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \epsilon$$

Así que hemos demostrado que para tales valores de y se cumple

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$$

lo que termina la prueba de la continuidad de f^{-1} en $y_0 \in (f(a), f(b))$. Análogamente, se prueba la continuidad por la derecha si $y_0 = f(a)$ y por la izquierda si $y_0 = f(b)$. Esto concluye la demostración del teorema (figura V.15).

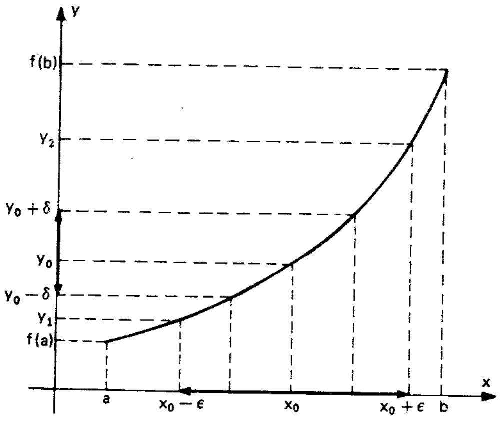


Fig. V.15

Ejemplo: Funciones trigonométricas inversas

Consideremos la función y = sen x sobre el segmento $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sobre este segmento la función y = sen x es estrictamente creciente y continua. El conjunto de sus valores es el segmento $[-1, 1]$. Por el teorema de la función inversa sobre el segmento $[-1, 1]$, existe la función inversa de la función y = sen x, la cual es también continua y estrictamente creciente. Esta función se denota por el símbolo x = arcsen y, o cambiando la notación del argumento y por x y de x por y, por el símbolo y = arcsen x.

Asimismo, se define sobre el segmento $[-1, 1]$ la función y = arccos x, inversa de la función x = cos y decreciente, continua y con imagen sobre el segmento $[0, \pi]$.

Las funciones y = arctg x y y = arcctg x se definen como inversas de las funciones tangente y cotangente sobre los intervalos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $(0, \pi)$, respectivamente. Estas funciones están definidas y son monótonas sobre toda la recta real.

Aunque para definir las inversas de las funciones trigonométricas es usual tomar como intervalos de crecimiento o decrecimiento los considerados anteriormente, podrían tomarse cualesquiera otros con las mismas características.

A continuación damos los gráficos de las funciones trigonométricas inversas (figuras V.16–V.19).

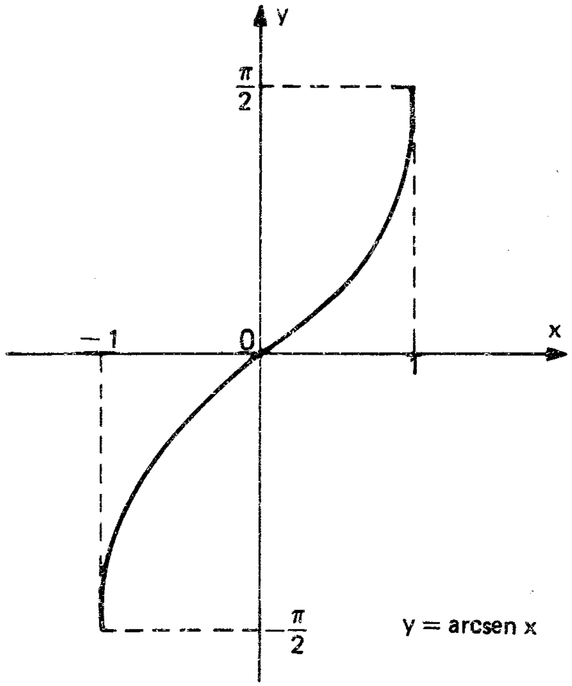


Fig. V.16

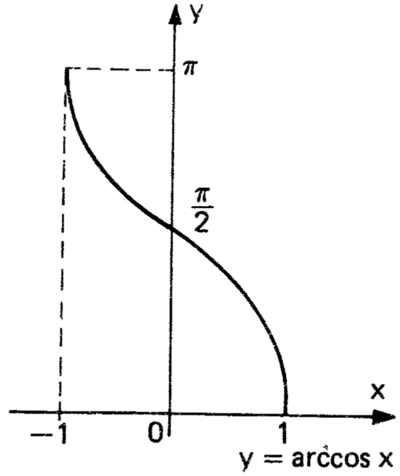


Fig. V.17

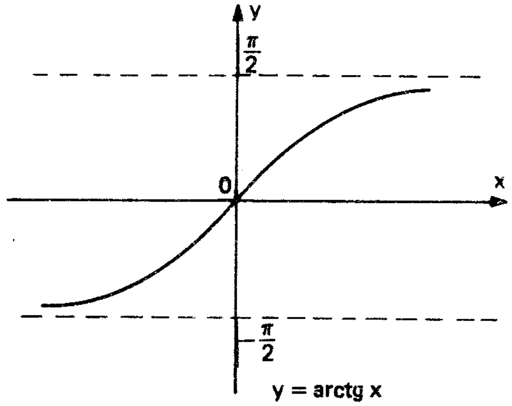


Fig. V.18

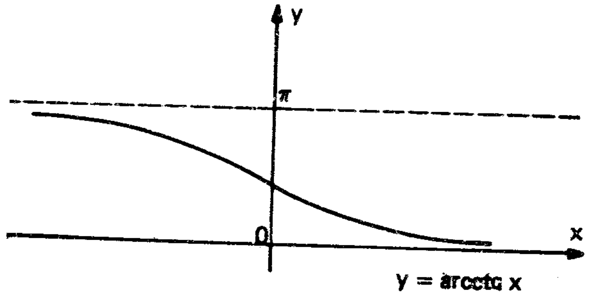


Fig. V.19

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Analice la existencia de la función inversa f^{-1}. En caso de no existir f^{-1} en todo **R**, restrinja f a un dominio máximo de inyectividad y encuentre, en ese caso, la expresión analítica de la función inversa especificando cuál es su dominio de definición.

Resolución

La función f está definida para todo $x \in \mathbf{R}$. Evidentemente, la función f no es inyectiva en todo **R**, pero basta restringirla al conjunto $\mathbf{R}_+$ para obtener la inyectividad. El conjunto $[0, +\infty)$ es un dominio máximo de inyectividad de f, pues dado cualquier $x_0 < 0$, entonces, $f(x_0) = f(-x_0)$.

Resolvamos la ecuación $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ para hallar la expresión analítica de la función inversa $y^3 = x^2 + 1$, o sea, $x = \pm\sqrt{y^3 - 1}$; pero hemos considerado $x \geqslant 0$ y; por tanto, la función inversa estará definida por la expresión

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y^3 - 1}$$

El dominio de f^{-1} es $1 \leqslant y < +\infty$, como fácilmente se puede comprobar.

2. Demuestre que para cada función del tipo $y = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-3} + \ldots + a_n x + a_{n+1}$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ son números positivos, existe la función inversa creciente y continua sobre todo el eje real.

Resolución

Como se sabe, las funciones $x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}$, son crecientes sobre todo el eje real. Mas aún, como los coeficientes a_i $(i = 0, 1, \ldots, n + 1)$ son positivos, entonces, $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1}$, también crece. Además, esta función es continua por ser polinomial. Luego, en virtud del teorema de la función inversa, existe la inversa de la función dada y ésta es creciente y continua sobre todo el éje real.

3. Demuestre que existe una única función continua $x = x(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$ que satisface la ecuación de Kepler

$$x - \epsilon \operatorname{sen} x = y \quad (0 < \epsilon < 1)$$

Resolución

Demostremos que $y(x)$ es una función creciente. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del eje real tales que $x_1 < x_2$.

Entonces,

$$y(x_2) - y(x_1) = (x_2 - \epsilon \operatorname{sen} x_2) - (x_1 - \epsilon \operatorname{sen} x_1) =$$
$$= (x_2 - x_1) - \epsilon(\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1).$$

Acotemos $|\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1|$

$$|\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right| \leqslant 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$
$$\leqslant 2\,\frac{|x_2 - x_1|}{2} = |x_2 - x_1| = (x_2 - x_1)$$

comoquiera que $0 < \epsilon < 1$, se tiene:

$$\epsilon\,|\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1| < (x_2 - x_1)$$

de donde,

$$(x_2 - x_1) - \epsilon(\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1) = y(x_2) - y(x_1) > 0$$

Esto significa que y es una función creciente, puesto que $y(x)$ es una función continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, la función inversa $x = x(y)$ es única y continua en la variable y.

4. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

Resolución

Haciendo el cambio de variables $y = \operatorname{arcsen} x$, y teniendo en cuenta la continuidad de la función arcsen x en $x = 0$, se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1$$

o sea, que $\operatorname{arcsen} x \sim x$ cuando $x \to 0$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Dadas las funciones:

a) $y = 2x - x^2$

b) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

c) $y = x^4 + 2x^2 + 1$

d) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

e) $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

Analice la existencia de función inversa. En caso de no existir f^{-1} en todo **R**, restrinja f a un dominio máximo de inyectividad y encuentre, en ese caso, la expresión analítica de la función inversa especificando cuál es su dominio de definición.

2. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \operatorname{arcsen}^2 x)}{\operatorname{arctg} 2x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{arctg} \operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{arcsen} x)^{\frac{1}{a^x - 1}}$

3. Demuestre que si la función f(x) está definida y es estrictamente monótona en el intervalo [a, b] y para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in [a,b]$ $\lim f(x_n) = f(a)$, entonces, $\lim x_n = a$.

4. ¿Puede admitir inversa una función no monótona y = f(x)?

Analice el ejemplo.

$$y = \begin{cases} x \ , \ x \in \mathbf{Q} \\ -x \ , \ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

5. Analice el carácter de las series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^\alpha}, \ \alpha \geqslant 1$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1 + \operatorname{arcsen} \frac{1}{n})}{n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha}}{\operatorname{arcsen} \frac{1}{n^\beta}}, \ \alpha, \beta > 0$

§ V.8 Teorema de Weierstrass

A continuación vamos a demostrar dos teoremas que, aunque elementales y también "evidentes" como los de Bolzano, han significado un importante estímulo para el desarrollo de la teoría de las funciones, tanto en su aspecto práctico como en el teórico. Se refieren estos teoremas a la *acotación global* de una función continua.

TEOREMA 8.1 (1er. teorema de Weierstrass)

Si la función f(x) es continua sobre el intervalo acotado y cerrado [a, b], entonces f está acotada sobre [a, b]; es decir, existe $M > 0$ tal que: $|f(x)| \leqslant M$, para todo $x \in [a, b]$.

Observaciones

1) Geométricamente, este teorema significa que el gráfico de una función continua en [a, b] queda entre dos ciertas rectas paralelas al eje OX, como en la figura V.20.

2) Si la continuidad deja de cumplirse en un sólo punto del intervalo, entonces la conclusión del teorema puede no ser cierta.

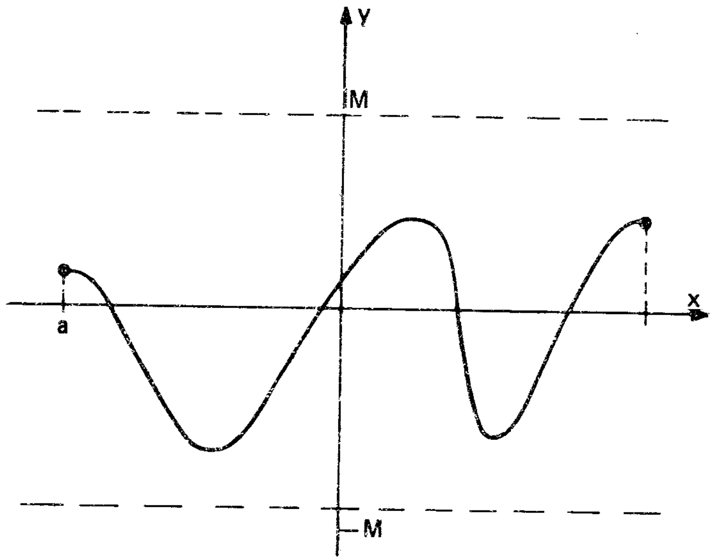


Fig. V.20

Ejemplo

1) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \ , & x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$, entonces, f es continua en todo punto de [−1, 1] excepto en 0, pero f no está acotada ni superior ni inferiormente en [−1, 1].

2) Este ejemplo hace ver también que el intervalo cerrado [a, b] no puede ser sustituido por el intervalo abierto (a, b), pues la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en (0, 1), pero no está acotada superiormente en este intervalo.

3) La anterior observación nos hace pensar que la demostración del 1er. teorema de Weierstrass debe utilizar fuertemente la hipótesis de que el intervalo es cerrado y, por supuesto, también el hecho de que el intervalo es acotado ya que evidentemente, sobre un intervalo no acotado no se cumple en general, el teorema como lo muestra la función f(x) = x. La demostración que hacemos se basa fundamentalmente en el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre sucesiones acotadas.

DEMOSTRACIÓN del 1er. teorema de Weierstrass

Demostremos que la función f(x) es acotada superiormente en [a, b], dado que la acotación inferior se demuestra análogamente.

Utilizaremos el método de prueba por reducción al absurdo. Supongamos que f(x) no es acotada superiormente sobre [a, b], entonces, para cada número natural n se encuentra, al menos, un punto $x_n \in [a, b]$, tal que $f(x_n) > n$.

De esta forma se construye una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in [a,b]$ y la correspondiente sucesión de valores $\{f(x_n)\}$ es infinitamente grande.

Utilizando el teorema de Bolzano-Weierstrass dado que $\{x_n\}$ es acotada al serlo $[a,b]$ que la contiene, extraemos de la sucesión $\{x_n\}$ una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ convergente al punto x_0. Como todos los miembros de la subsucesión $\{x_{k_n}\}$ están en $[a,b]$ (¡que es cerrado!), entonces, x_0 también pertenece a $[a,b]$.

Por la continuidad de f en $x_0 \in [a,b]$, la correspondiente subsucesión de valores $\{f(x_{k_n})\}$ está obligada a converger a $f(x_0)$. Pero esto contradice el hecho de que la subsucesión $\{f(x_{k_n})\}$, al ser extraída de una sucesión infinitamente grande tiene que ser también infinitamente grande. Luego, la suposición de que f(x) no es acotada superiormente es falsa. Lo que demuestra el teorema.

Utilizando los resultados del capítulo I sobre conjuntos acotados de números reales podemos afirmar que toda función continua sobre un intervalo $[a,b]$ es tal, que el conjunto de sus valores posee un supremo y un ínfimo, los cuales denotaremos por $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ y $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$.

Surge el problema siguiente: ¿ es posible que la función f alcance en algún punto $x_0 \in [a,b]$ el supremo? ¿y el ínfimo? ; en otras palabras ¿tiene el conjunto imagen de $[a,b]$ por f un máximo y un mínimo?

El 2do. teorema de Weierstrass responde afirmativamente a esta interrogante para las funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados.

TEOREMA 8.2 (2do. teorema de Weierstrass)

Si la función f(x) es continua sobre $[a,b]$ y $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, entonces existen puntos x_1 y x_2 en $[a,b]$ tales que

$$f(x_1) = M \quad y \quad f(x_2) = m$$

DEMOSTRACIÓN

Por el 1er. teorema de Weierstrass la función f es acotada sobre el intervalo $[a,b]$ y por eso existen números reales m y M representando el ínfimo y el supremo de los valores de f en $[a,b]$.

Demostremos que f alcanza su supremo M. La demostración para el ínfimo es análoga.

Supongamos, por el contrario, que f no alcanza al valor M sobre $[a,b]$, es decir, que todos los valores de f sobre $[a,b]$ son estrictamente menores que M. Consideremos la función auxiliar

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

El denominador $M - f(x)$ es una función continua y estrictamente positiva sobre el segmento $[a,b]$, luego φ es también continua sobre $[a,b]$. Por el 1er. teorema de Weierstrass la función $\varphi(x)$ está acotada superiormente en $[a,b]$, o sea, existe un número positivo A tal que $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} \leqslant A$ para todo $x \in [a,b]$. Esto es equivalente a la desigualdad $f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{A}$, lo cual contradice que el número M sea supremo de los valores f(x) sobre el intervalo $[a,b]$. La contradicción anterior prueba que la suposición de que f no alcanza su supremo M en $[a,b]$ es falsa, luego el teorema queda demostrado.

Observaciones

1) El 2do. teorema de Weierstrass puede reformularse diciendo "toda función continua en $[a,b]$ posee un valor máximo y un valor mínimo en este intervalo", pues como se sabe desde el Capítulo I, cuando el supremo de un conjunto pertenece a él se le denomina *máximo* y al ínfimo se le llama mínimo.

2) Una función que no es continua en un intervalo $[a,b]$ puede alcanzar sus extremos.

Ejemplo

2) La función sg x en $[-1, 1]$ alcanza sus extremos aunque no es continua en dicho intervalo.

Es posible que la función no sea continua en ningún punto de un intervalo $[a,b]$ y posea valor máximo y mínimo en este intervalo.

3) La función de Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 1, & x \in \mathbf{Q} \end{cases}$

alcanza su supremo 1 y su ínfimo 0 en el intervalo $[0,1]$ y no es continua en ningún punto de $[0,1]$.

Por supuesto, en un intervalo abierto una función continua puede estar acotada y, sin embargo, no alcanzar sus extremos.

4) La función $f(x) = x$ en $(0,1)$ tiene a 0 y a 1 como extremos inalcanzables.

El 2do. teorema de Weierstrass nos garantiza que una función continua en $[a,b]$ toma los valores m y M, mientras que el 2do. teorema de Bolzano asegura que, además, todos los elementos del intervalo $[m, M]$ son alcanzados por la función; es decir, la imagen de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ por una función continua es el intervalo cerrado y acotado $[m, M]$.

EJERCICIOS

Ejercicios resueltos

1. Para cada una de las funciones siguientes, decida cuáles están acotadas superior o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. Recuerde que f puede tener estas propiedades aunque no sea continua y el intervalo no sea cerrado.

a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < a \\ a+2 & , x \geqslant a \end{cases}$, en $[-a-1, a+1]$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, en $[0, 1]$

Resolución

a) La función $f(x) = x^2$ es continua en $[-1, 1]$, por tanto, por el 1er. teorema de Weierstrass, está acotada superior e inferiormente en ese intervalo, de modo que en $(-1, 1)$ también está acotada.

No podemos aplicar el 2do. teorema de Weierstrass para la existencia de máximo o mínimo, pues $(-1, 1)$ no es cerrado. Sin embargo, $f(x) = x^2 \geqslant 0$, por tanto, 0 es una cota inferior. Como $f(0) = 0$, entonces, $x = 0$ es un punto de mínimo y la función en $(-1, 1)$ alcanza su mínimo. Pero no alcanza su máximo ya que $f(x) = x^2 < 1$ para $x \in (-1, 1)$ y $\sup\limits_{x \in (-1,1)} \{f(x)\} = 1$.

b) Para que tenga sentido el ejercicio debe cumplirse que $[-a-1, +1]$ no sea vacío. Esto se cumple si $-a-1 \leqslant a+1$, es decir, si $a \geqslant -1$. En el caso $a = -1$ todas las respuestas son triviales. Supongamos, entonces, $a > -1$.

Si $x \neq a$ la función es continua en x pues coincide con una función elemental en una vecindad de x.

Si $x = a$ y $a \in (-a-1, a+1)$, entonces, $a > -a-1$, de donde $a > -\frac{1}{2}$.

En este caso, la función es continua en $x = a$, si $a^2 = a + 2$. Esto sucede cuando $a = -1$ o $a = 2$. Como $a > \frac{1}{2}$, entonces, f es continua cuando $a = 2$. En este caso, la función tiene el gráfico siguiente (figura V.21)

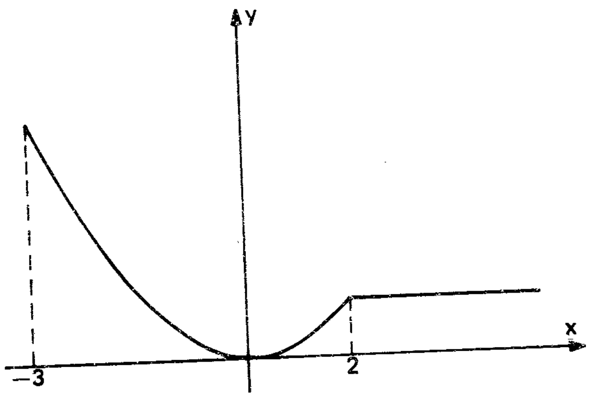


Fig. V.21

Por tanto, por el 1ro. y 2do. teoremas de Weierstrass la función está acotada superior e inferiormente (¿dónde?) y alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo, es decir, el máximo en $x = -3$ y su mínimo en $x = 0$.

Consideremos los restantes valores de a. Si $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$, entonces,

$f(x) = a + 2$ en $[-a-1, a+1]$. Por tanto, la función es constante y las respuestas son triviales.

Si $a > -\frac{1}{2}$ y $a \neq 2$, entonces, $a \in (-a-1, a+1)$ y f es discontinua en $x = a$. A pesar de ser discontinua en $x = a$ f está acotada en $[-a-1, a+1]$.

Si $a > 0$ alcanza en el intervalo su máximo y su mínimo y si $\frac{1}{2} < a \leqslant 0$ alcanza su máximo pero no su mínimo.

c) La función no es continua en cero a la derecha, pues $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Luego, f no es continua en $[0, 1]$ y no pueden aplicarse los teoremas de Weierstrass. Además, como para todo $K > 0$, existe $0 < x < 1$ tal que $\frac{1}{x^2} > K$, entonces, $\{\frac{1}{x^2} ; x \in (0, 1)\}$ no es un conjunto acotado y, por tanto, f no está acotada.

2. Suponga que f es una función continua en $\mathbf{R}$ y tal que $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Demuestre que existe algún número x_0 tal que

$$f(x_0) \geqslant f(x), \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Resolución

Como $f(0) > 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, existe $K > 0$ tal que $f(x) = |f(x)| < f(0)$ para $x > K$. .

Análogamente, como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, existe $K' < 0$ tal que $f(x) = |f(x)| < f(0)$ para $x < K'$.

Luego, para todo $x \in (-\infty, K') \cup (K, +\infty)$ se cumple $f(x) < f(0)$.

Por otra parte, como f es una función continua en todo $\mathbf{R}$ y $[K', K]$ es un intervalo acotado y cerrado de $\mathbf{R}$, podemos aplicar los teoremas de Weierstrass para obtener la existencia de $x_0 \in [K', K]$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$, cualquiera sea $x \in [K', K]$. Como $0 \in [K', K]$, $f(0) \leqslant f(x_0)$.

De lo anterior se deduce que:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ para todo } x \in \mathbf{R}$$

es decir, la existencia de un punto x_0 de máximo de $f(x)$ en todo $\mathbf{R}$.

3. Un bloque de peso P es movido a lo largo de un plano por una fuerza F que forma un ángulo θ con la dirección del movimiento, siendo $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la cual el bloque presiona perpendicularmente al plano. Demostrar que existe un ángulo por el cual la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción es mínima (figura V.22).

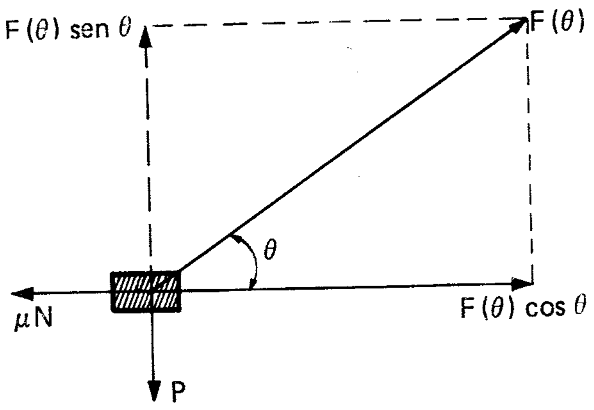


Fig. V.22

Resolución

Sea $F(\theta)$ la fuerza de propulsión. Esta tiene una componente vertical hacia arriba que es $F(\theta)$ sen θ, de modo que la fuerza normal de presión contra el plano es $N = P - F(\theta) \operatorname{sen} \theta$. La fuerza de fricción es μN, donde μ es el coeficiente de fricción. La componente horizontal de la fuerza de propulsión es $F(\theta) \cos \theta$. Cuando ésta se iguala a la fuerza de fricción se llega a

$$F(\theta) \cos \theta = \mu [P - F(\theta) \operatorname{sen} \theta]$$

de donde,

$$F(\theta) = \frac{\mu W \; P}{\cos \theta + \mu \operatorname{sen} \theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Para que $F(\theta)$ sea mínima debe ser máxima $g(\theta) = \cos \theta + \mu \operatorname{sen} \theta$. Como $\cos \theta$ y sen θ son continuas en todo **R** y μ es una costante, entonces, $g(\theta)$ es continua en **R** y, por tanto, alcanza su ~~mínimo~~ máximo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Dada una lámpara eléctrica colgada del techo sobre el centro de una mesa redonda de radio r. Demostrar que existe un valor de la distancia h de la lámpara a la mesa tal que la iluminación en los bordes de la mesa sea máxima (figura V.23).

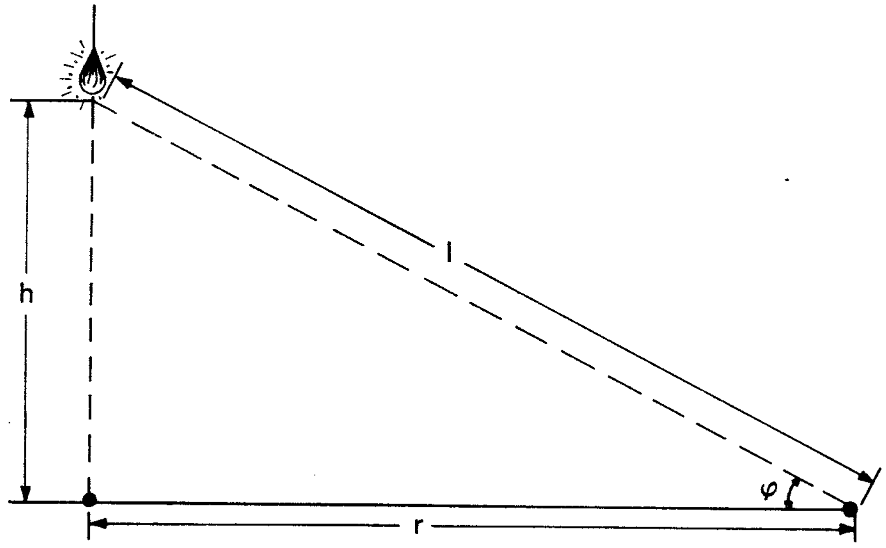


Fig. V.23

Resolución

La iluminación I es proporcional al sen φ e inversamente proporcional a la distancia l:

$$I = c \, \frac{\operatorname{sen} \varphi}{l^2}$$

donde c es una constante.

Como $\operatorname{sen} \varphi = \frac{h}{l}$, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$I = \frac{ch}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 0 < h < +\infty$$

Luego, debemos demostrar que hay un valor de h que hace a I máximo. En efecto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{ch}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{ch}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Como $I > 0$ para todo $0 < h < +\infty$, podemos tomar, por ejemplo, $I(1) = A > 0$. Entonces, existen $1 > \delta > 0$ y $K > 1$ tales que

$$I(h) < A, \text{ si } 0 < h < \delta \text{ ó } h > K$$

Consideremos $I(h)$ en el intervalo cerrado $[\delta, K]$. Como es una función continua, en ese intervalo alcanzará su valor supremo M. Pero $1 \in [\delta, K]$, luego $M \geq I(1) = A$ y por las condiciones de δ y K, M es el valor máximo para todo $0 < h < +\infty$.

Ejercicios para el trabajo independiente

1. Para cada una de las siguientes funciones, decida cuáles están acotadas superior o inferiormente en el intervalo indicado y cuáles de ellas alcanzan sus extremos.

   a) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$

   b) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$

   c) $f(x) = x - [x]$ en $[0, a]$

   d) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2^x, & x = 0 \\ 2^x - 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus Q \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \text{ fracción irreducible y } p \leq q \end{cases}$

   f) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus Q \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \text{ fracción irreducible y } p \leq q \end{cases}$

   g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus Q \\ -\dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \text{ fracción irreducible y } p \leq q \end{cases}$

   h) $f(x) = \text{sen}^2 (\cos x + \sqrt{1 + a^2})$, en $[0, a^3]$

2. Sea P una función polinomial cualquiera. Demuestre que existe algún número x_0, tal que $|P(x_0)| \leq |P(x)|$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

3. Supongamos que f es una función continua en todo $\mathbf{R}$, tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, y que, además, existen $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $f(a)\, f(b) < 0$. Pruebe que, entonces, f alcanza sus extremos.

4. a) Demuestre que si $f(x)$ tiene en el intervalo $[a, b]$ sólo un número finito de discontinuidades de primera especie, entonces, $f(x)$ está acotada en $[a, b]$.

   b) En las condiciones del inciso a) ¿$f(x)$ alcanzará sus valores extremos en (a, b)? Ilustre su respuesta.

5. Una bala se lanza desde el suelo con velocidad V_0 y según un ángulo α, de modo que su componente vertical de velocidad es V_0 sen α y la componente horizontal $V_0 \cos \alpha$. Su distancia $S(t)$ sobre el nivel del suelo obedece la ley $S(t) = -4{,}9\, t^2 + (V_0 \text{ sen } \alpha)\, t$ y su velocidad horizontal permanece constante. Demuestre que existe un ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

6. a) Sea $y(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Demuestre que y alcanza su ínfimo si $a > 0$ y el supremo si $a < 0$ en $\mathbf{R}$.

   b) Halle el punto en que y alcanza el ínfimo (para $a > 0$) y el supremo (para $a < 0$) en $\mathbf{R}$.

7. Demuestre que entre los rectángulos de perímetro 2P hay uno de área máxima. ¿Cuál es?

§ V.9 Concepto continuidad uniforme

Para culminar este capítulo tratemos el atractivo concepto continuidad uniforme.

Para captar la esencia de este importante concepto, nada mejor que un ejemplo.

Ejemplo:

1) La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en todo punto distinto de 0. Si se elije particularmente $\epsilon = 0{,}1$ para $x = 4$, bastará tomar $|\Delta x| < \delta = 1$ para obtener $|\Delta f| < 0{,}1$. Pero este δ resulta ya excesivo para el punto $x = 1$. Claro es que se logra hacer Δf menor que 0,1, tanto en el punto $x = 4$ como en $x = 1$, tomando $|\Delta x| < \delta = 0{,}09$, pero también la amplitud resulta excesiva para todos los puntos comprendidos entre 0 y 0,1, por la misma razón anterior, así, esta situación continuará presentándose a medida que nos sigamos acercando a 0 (ver figura V.24).

Según Heine, la continuidad de una función f sobre un intervalo I puede ser de dos tipos:

1ro. *Uniforme.* Cuando para cada $\epsilon > 0$ se encuentra un número positivo $\delta > 0$ tal que *para todo par de puntos* x', x'' en el intervalo I que disten entre sí menos que δ, o sea, $|x' - x''| < \delta$, se cumple:

$$|f(x')| - f(x'')| < \epsilon$$

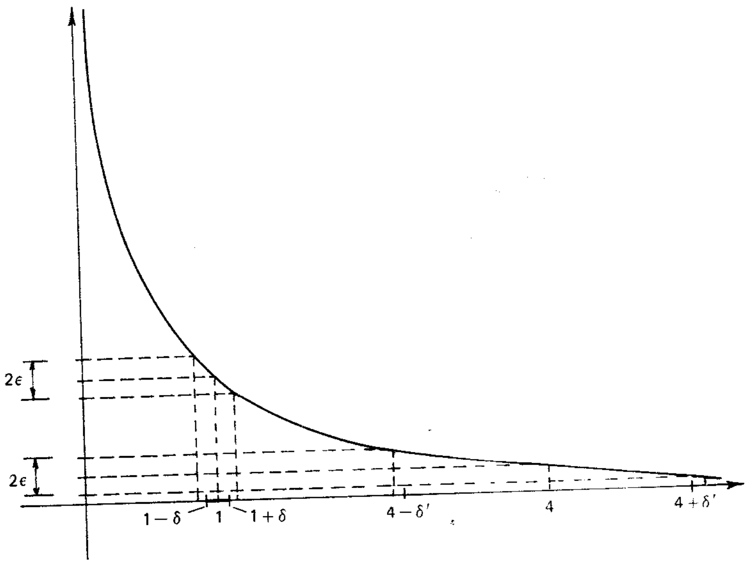


Fig. V.24

2do. No uniforme. Si para cierto $\epsilon_0 > 0$ y para todo valor de δ positivo se encuentran dos números x'_δ, x''_δ en I, tales que $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$; sin embargo, $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geqslant \epsilon_0$.

Resulta, pues, que la continuidad de $\frac{1}{x}$ *no es uniforme* en ningún intervalo (0, a) porque, aunque en una cierta vecindad de cada punto x_0 los valores de f(x) difieren de $f(x_0)$ en una cantidad menor que ϵ (y, por lo tanto, difieren entre sí en menos de 2ϵ), como existen infinidad de tales vecindades y las amplitudes de éstas son cada vez más pequeñas, a medida que x_0 se aproxima a cero, entonces, no es posible elegir una amplitud mínima válida para todo punto x.

En cambio, si consideramos la misma función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre la semirrecta $x \geqslant 1$, entonces, es uniformemente continua. En efecto, para dos números arbitrarios x', x'' de la semirrecta dada se cumple

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \left|\frac{x'' - x'}{x'x''}\right| \leqslant |x' - x''|$$

Por esto, tomando $\delta = \epsilon$, se cumple que cualesquiera sean $x', x'' \in [1, +\infty)$, tales que $|x' - x''| < \delta$, entonces, $|f(x') - f(x'')| \leqslant \delta = \epsilon$.

Mas aún, $f(x) = \frac{1}{x}$ considerada sobre el intervalo $[\frac{1}{n}, 1]$ es uniformemente continua por grande que sea n. Para cerciorarse de esto, basta aplicar el hecho de que, si x', x'' son dos puntos arbitrarios del intervalo $[\frac{1}{n}, 1]$, se cumple $x' \geqslant \frac{1}{n}$,

$x'' \geqslant \frac{1}{n}$; luego, $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{x'' - x'}{x'x''}\right| \leqslant \frac{|x'' - x'|}{n^2}$ n² ; por tanto, si tomamos $\delta = \epsilon n^2$ se produce la desigualdad deseada $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ siempre que $|x' - x''| < \delta = \epsilon n^2$. ¡ojo!

Este hecho puede generalizarse a través del teorema fundamental siguiente:

TEOREMA 9.1 (teorema de Cantor)

Si la función f(x) es continua sobre el intervalo cerrado [a, b], entonces, f(x) es uniformemente continua sobre este intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que la función f(x) es continua sobre el intervalo [a, b], pero que no es uniformemente continua sobre este intervalo.

Entonces, para cierto $\epsilon_0 > 0$ y cualquiera sea $\delta > 0$ se encuentran dos puntos x', x'' del intervalo [a, b] tales que

$$|x' - x''| < \delta, \text{ pero } |f(x') - f(x'')| \geqslant \epsilon_0$$

Escojamos la sucesión infinitesimal de números positivos $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Se puede asegurar que para el número ϵ_0 y cada $n \in \mathbf{N}$ existen x'_n y x''_n de [a, b] tales que

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{ pero } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \epsilon_0$$

Como la sucesión $\{x'_n\}$ está contenida en el intervalo acotado [a, b], ella es acotada, y por el teorema de Bolzano-Weierstrass se puede extraer de ella una subsucesión convergente $\{x'_{k_n}\}$ $(n \in \mathbf{N})$. El límite x_0 de esta subsucesión, por ser [a, b] cerrado, pertenece a este intervalo. Dada la desigualdad $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ esto quiere decir que la correspondiente subsucesión $\{x''_{k_n}\}$ de $\{x''_n\}$ es también convergente a x_0 (¡pruébelo!)

Como la función f es continua en cada punto de [a, b], lo es también en x_0.

Entonces, por la definición de continuidad según Heine, las correspondientes subsucesiones de valores $\{f(x'_{k_n})\}$ y $\{f(x''_{k_n})\}$ están obligadas a converger a $f(x_0)$; es decir, la diferencia $\{f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\}$ es infinitesimal. Esto, por supuesto, es contradictorio con la desigualdad $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \epsilon_0$, la cual era válida para todo n y, por tanto, para todo k_n.

La contradicción a la que hemos arribado demuestra que la suposición de que la función f es continua en [a, b] y no es uniformemente continua sobre este intervalo, es falsa. El teorema queda demostrado.

Observación

El recíproco del teorema de Cantor es evidentemente válido, pues toda función uniformemente continua sobre cualquier intervalo es continua en cada punto de tal intervalo. Luego, el teorema de Cantor nos dice que la continuidad y la continuidad uniforme son equivalentes sobre todo intervalo acotado y cerrado [a,b].

El teorema de Cantor también se puede reformular en términos del concepto *oscilación de una función en un intervalo.* Sea la función f(x) acotada sobre un segmento [a, b]. Se llama oscilación de f(x) sobre el segmento [a, b] a la diferencia $W = M - m$ entre el supremo M y el ínfimo m de la función f(x) sobre este segmento. Para una función continua f(x) sobre [a, b] la oscilación en [a, b] es igual a la diferencia entre los valores máximos y mínimos de esta función en [a, b].

COROLARIO (corolario del teorema de Cantor)

Si la función f(x) es continua sobre el segmento [a, b], entonces, para cada número positivo ϵ se encuentra un número positivo δ tal que sobre cada segmento de longitud menor que δ contenido en [a, b], la oscilación de f es menor que ϵ.

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ es continua y acotada en el intervalo (0, 1), pero que no es uniformemente continua en dicho intervalo.

Resolución

En efecto, $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ es continua en (0, 1) por ser una compuesta de funciones continuas en (0, 1). Además, está acotada, puesto que $\left|\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}\right| \leqslant 1$.

Para probar que nuestra función no es uniformemente continua, debemos hallar un $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cualquier $\delta > 0$, se encuentren puntos $x, x' \in (0,1)$ con $|x - x'| < \delta$ y $\left|\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{x'}\right| > \epsilon_0$.

Tomemos $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Como es sabido, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N} \\ (-1)^n, & x = \frac{2}{2n+1},\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$

Escojamos, entonces, x_n y x'_n de la forma siguiente

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{2}{2n+1}$$

Como $x_n \to 0$ y $x'_n \to 0$, entonces, para todo $\delta > 0$ existe n tal que $|x_n - x'_n| < \delta$; sin embargo, $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon_0$.

Así, queda demostrado que $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ no es uniformemente continua en (0, 1).

2. a) Demuestre que la función $f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ es uniformemente continua en cada uno de los intervalos

$$J_1 = (-1, 0) \text{ y } J_2 = (0,1)$$

por separado, pero que no es uniformemente continua en su unión

$$J_1 \cup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

b) Demuestre que si la función f(x) es uniformemente continua en cada uno de los segmentos [a, c] y [c, b], entonces, esta función es uniformemente continua en la unión [a, b].

Resolución

a) Comencemos por analizar el comportamiento de f(x) sobre los intervalos J_1 y J_2.

Para $x \in J_1$, $|\operatorname{sen} x| = -\operatorname{sen} x$, de modo que $f(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Para $x \in J_2$, $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$, y $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Construyamos la función $\hat{f}(x)$ sobre J_1 de la manera siguiente:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in [-1, 0) \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$\hat{f}$ es continua en [−1,0] puesto que $\lim -\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1 = \hat{f}(0)$, lo que garantiza la continuidad en x= 0. En el resto de los puntos es continua por ser el cociente de funciones continuas, cuyo denominador no se anula. Por el teorema de Cantor, si una función es continua sobre un intervalo cerrado y acotado, ella es uniformemente continua. Así, $\hat{f}(x)$ es uniformemente continua en [− 1, 0] y también lo será en $J_1 \subset [-1, 0]$. Pero $\hat{f}(x)$ restringida a J_1 es precisamente f(x), por lo que ésta será uniformemente continua en J_1. Similarmente, construyendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

y repitiendo el razonamiento anterior se demuestra que f(x) es uniformemente continua en J_2.

Probaremos ahora que f(x) no es uniformemente continua en $J_1 \cup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$.

En efecto, fijemos $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$ y tomemos $x_1 \in J_1$ y $x_2 \in J_2$. En este caso, por muy pequeño que se escoja δ tal que $|x_1 - x_2| < \delta$, nunca se cumplirá que

5. Demuestre que para que la función f(x), definida y continua en un intervalo finito (a, b) pueda extenderse de manera continua al segmento [a, b], es necesario y suficiente que la función f (x) sea uniformemente continua en (a, b).

6. Se dice que una función f(x) satisface la condición de Lipschitz de orden m en un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ si existe una constante C tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant C\ |x_2 - x_1|^m$$

para cualquier par de valores x_1, x_2 de [a, b]. Demuestre que toda función que satisfaga la condición de Lipschitz de orden $m > 0$ en [a, b] es uniformemente continua en ese intervalo.

7. Demuestre que si la función f(x) está definida y es continua en el dominio $a \leqslant x < +\infty$ y existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, entonces, f(x) es uniformemente continua en dicho dominio.

PREGUNTAS DE COMPROBACIÓN

1. Defina el concepto función continua en un punto en el lenguaje de las sucesiones, con "$\epsilon - \delta$" y con incrementos.
2. ¿Por qué cada función racional es continua en todo punto donde su denominador no es cero?
3. Pruebe la continuidad de las funciones exponencial y trigonométricas en sus correspondientes dominios.
4. Demuestre que la composición de funciones continuas produce otra función continua. Aplíquelo a la prueba de la continuidad de la función potencia x^α ($x > 0$ y $\alpha \in \mathbf{R}$).
5. ¿Cuándo se dice que $f(x) = o(g(x))$? Ponga ejemplos.
6. Defina qué se entiende por funciones equivalentes para $x \to x_0$ y demuestre que una condición necesaria y suficiente para la equivalencia entre las funciones f y g para $x \to x_0$ es que se cumpla $f(x) = g(x) + o(g(x))$ para $x \to x_0$ y $g(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$. Exponga ejemplos de funciones equivalentes para $x \to 0$.
7. Clasifique las posibles discontinuidades de f en el punto x_0 y dé un ejemplo de cada tipo de discontinuidad.
8. Enuncie y demuestre la propiedad de la acotación local para las funciones continuas.
9. Enuncie y demuestre la propiedad de la conservación del signo para las funciones continuas.
10. Enuncie y demuestre los dos teoremas de Bolzano.
11. ¿Es posible que una función discontinua alcance todos los valores entre su máximo y su mínimo? Dé un ejemplo de función que no cumpla tal propiedad.
12. Defina el concepto función inversa. Enuncie y demuestre el teorema de la función inversa. Aplíquelo en la definición de las funciones inversas trigonométricas.
13. Enuncie y demuestre los dos teoremas de Weierstrass.
14. Dé un ejemplo de una función discontinua en todo punto del intervalo [0, 1] y que posea valor máximo y mínimo en este intervalo. Exponga un ejemplo de una función continua acotada y que no alcance sus extremos.
15. Defina el concepto continuidad uniforme. Dé un ejemplo de función continua y no uniformemente continua. Enuncie el teorema de Cantor.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Dadas las funciones siguientes, analice su continuidad en **R** y clasifique sus puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2 + 3) & , x \leqslant 1 \\ 6 - 5x & , 1 < x < 3 \\ x - 3 & , x \geqslant 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\text{sen } x} & , \text{sen } x \neq 0 \\ 3 & , \text{sen } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{arctg } x}{x(x-1)} & , 0 < x < 1 \\ \text{sen } \dfrac{\pi}{2} x & , 1 < x < 2 \\ 1 - \sqrt{x(x-2)} & , x > 2 \text{ o } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{[x]} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

f) $y = \dfrac{1}{\mu^2 - \mu - 2}$, donde $\mu = \dfrac{1}{x-1}$

g) $y = u^2$, donde $u = \begin{cases} x-1 \text{ , } x \geqslant 0 \\ x+1 \text{ , } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$

i) $f(x) = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$

j) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

k) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x \text{ , } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 0 \quad \text{ , } x \in \mathbf{Q} \end{cases}$

2. Analice la continuidad en **R** y construya el gráfico de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x(-1)^{[\frac{1}{x}]}$

b) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$

c) $f(x) = [x] \operatorname{sen} \pi x$

d) $f(x) = [\frac{1}{x^2}] \operatorname{sg}(\operatorname{sen} \frac{\pi}{x})$

e) $f(x) = \lim\limits_{n} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$

f) $f(x) = \lim\limits_{n} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$

g) $f(x) = \lim\limits_{n} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$

h) $f(x) = \lim\limits_{n} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)]$

i) $f(x) = \lim\limits_{m} (\lim\limits_{n} \cos^m (\pi n! x))$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots$

3. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{sen} \ln(x+1) - \operatorname{sen} \ln x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2\ln x}{h^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}\,(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

f) $\lim\limits_{n} [(1+x)\ (1+x^2)\ (1+x^4) \ldots (1+x^{2^n})]$ si $|x| < 1$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim\limits_{n} (\cos(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{\varphi}{2^2}) \cos(\frac{\varphi}{2^3}) \ldots \cos(\frac{\varphi}{2^n}))$

l) $\lim\limits_{n} (\cos \frac{x}{n} + \lambda \operatorname{sen} \frac{x}{n})^n$

m) $\lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

4. Pruebe que si $f(x)$ es continua en $\mathbf{R}$, entonces, para todo $c \in \mathbf{R}$

$$f_c(x) = \begin{cases} -c & , f(x) < -c \\ f(x) & , |f(x)| \leqslant c \\ c & , f(x) > c \end{cases}$$

es continua en $\mathbf{R}$.

5. a) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en $\mathbf{R}$ y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

   b) Haga ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

6. a) Suponga que $g(x)$ y $h(x)$ son funciones continuas en a y que $g(a) = h(a)$. Defina:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \leqslant a \\ h(x) & , x > a \end{cases}$$

   Demuestre que f es continua en a.

   b) Suponga que g es continua en $[a, b]$ y h es continua en $[b, c]$, además, que $g(b) = h(b)$

   Sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in [a, b] \\ h(x) & , x \in [a, c] \end{cases}$$

   Demuestre que f es continua en $[a, c]$.

7. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $\mathbf{R}$ entonces

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \text{ y } \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

son también continuas en $\mathbf{R}$.

8. Sea $f(x)$ definida y acotada en $[a, b]$. Demuestre que las funciones

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \text{ y } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

son continuas por la izquierda en todo punto de $(a, b]$.

9. Demuestre que todo punto de discontinuidad de una función monótona y acotada es un punto de discontinuidad de primera especie.

10. Demuestre que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son positivas y continuas.

11. Muestre que la ecuación

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0,$$

donde $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ y $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, tiene dos raíces reales comprendidas en los intervalos (λ_1, λ_2) y (λ_2, λ_3).

12. Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Consideremos que la ecuación $f(x) = 0$ posee un número finito de raíces x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ en el intervalo $[a, b]$. Ordenémoslas según su orden de crecimiento:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$$

Pruebe que en cada intervalo $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$ la función $f(x)$ mantiene su signo constante.

13. Suponga que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$, para todo x.

    a) Demuestre que $f(x) = x$ para algún número x (a tales puntos se les llama puntos fijos de f y este resultado es conocido como el teorema del punto fijo de Brower).

    b) Demuestre que si g es también una función continua en $[0, 1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ o $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces, $f(x) = g(x)$, para algún x.

14. Dada una función continua sobre $[a, b]$ tal que $f(a) \leqslant a$ y $f(b) \geqslant b$, demuestre que f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

15. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\, 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Compruebe que en el intervalo $[-2, 2]$ ella toma todos los valores comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$ aunque no es continua.

¿En qué punto tiene f discontinuidad?

16. Demuestre que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo (a, b) y $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ son n puntos cualesquiera de este intervalo, entonces, existe un número $\xi \in [x_1, x_n]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$$

17. Suponga que φ es continua y que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n}$$

a) Demuestre que si n es impar, entonces, existe un número x tal que $x^n + \varphi(x) = 0$.

b) Demuestre que si n es par, entonces, existe un número y tal que $y^n + \varphi(y) \leqslant x^n + \varphi(x)$, para todo x.

18. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y sea x un número cualquiera. Demuestre que existe un punto en el gráfico de f que es, entre todos, el más próximo al punto $P(x, 0)$, en otras palabras existe algún y en $[a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ a $(y, f(y))$ es menor o igual a la distancia de $(x, 0)$ a $(z, f(z))$, para todo z de $[a, b]$.

b) Demuestre que esta misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a, b]$ se sustituye por (a, b).

c) Demuestre que la afirmación se cumple si $[a, b]$ se sustituye por **R**.

d) En los casos a) y c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x, 0)$ a un punto de la gráfica de f. Demuestre que $g(y) \leqslant g(x) + |x - y|$ y deduzca que g es continua.

e) Demuestre que existen números x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0, 0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es menor o igual a la distancia de $(x_0', 0)$ a $(x_1', f(x_1'))$ cualesquiera que sean x_0', x_1' en $[a, b]$.

19. Suponga que f es continua en $[0,1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural cualquiera. Demuestre que existe algún número x tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.
Indicación: Considere la función $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. ¿Qué ocurriría si $g(x) \neq 0$ para todo x?

b) Suponga que $0 < a < 1$, pero que a es distinto de $\frac{1}{n}$, cualquiera que sea el número natural n. Halle una función f que sea continua en $[0, 1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x + a)$ para ningún x.

20. a) Demuestre que no existe ninguna función definida y continua sobre **R** que tome exactamente dos veces cada uno de sus valores.

Indicación: Si $f(a) = f(b)$ para $a < b$, entonces, o bien $f(x) > f(a)$, para todo x de (a, b), o bien $f(x) < f(a)$, para todo x de (a, b). (¿Por qué?) En el primer caso todos los valores próximos a $f(a)$, pero ligeramente mayores que $f(a)$, son alcanzados en algún punto de (a, b), esto implica que $f(x) < f(a)$ para $x < a$ y $x > b$.

b) Mejore el resultado del inciso a) demostrando que no existe ninguna función continua f que tome cada valor de su imagen exactamente dos veces.

Indicación: La indicación anterior sugiere que f tiene, ya sea un máximo o un mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces) ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos de este extremo?

c) Halle una función continua f que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, hallar una función que tome todos los valores exactamente n veces, si n es impar.

d) Demuestre que si n es par, entonces no existe ninguna función continua f que tome todos los valores exactamente n veces.

Indicación: Para tratar, por ejemplo, el caso $n = 4$, ponga $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Entonces, o bien $f(x) > 0$ para todo x en dos de los tres intervalos (x_1, x_2), (x_2, x_3) o (x_3, x_4), o bien $f(x) < 0$ para todo x en dos de estos tres intervalos.

21. Se le llama "módulo de continuidad" de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) a la función.

$W_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$, donde x_1, x_2 son puntos cualesquiera de (a, b) que satisfacen la condición $|x_1 - x_2| < \delta$.

Demuestre que para que $f(x)$ sea uniformemente continua es necesario y suficiente que $\lim_{\delta \to 0^+} W_f(\delta) = 0$.

22. Obtenga acotaciones del módulo de continuidad $W_f(\delta)$ del tipo $W_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha$, donde C y α son constantes positivas, si:

a) $f(x) = x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$

b) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ y $(a < x < +\infty)$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$

23. ¿En cuántas partes iguales es necesario dividir el segmento $[1, 10]$ de modo que la oscilación de la función $f(x) = x^2$ en cada uno de estos subintervalos sea menor que 0,0001?

24. Pruebe que si la función $f(x)$ es continua en $a < x < +\infty$, y existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, entonces, esta función está acotada en (a, b).

25. Sea $f(x)$ continua y acotada en $(x_0, +\infty)$. Pruebe que cualquiera que sea T, existe una sucesión $x_n \to \infty$ tal que

$$\lim_n [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0$$

26. La función $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$. ¿Es posible completar la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ de tal modo que llegue a ser continua en este punto? Construya su gráfica.

27. Pruebe que si $\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = l$, entonces, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ si f(x) está acotada en cada intervalo finito.

28. Pruebe que si

a) $f(x) > 0$

b) $f(x)$ y $\frac{1}{f(x)}$ están acotadas en cada intervalo finito

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l > 0$

entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = l$$

29. Halle $\lim_{n} \frac{f(x)\, e^{nx} + g(x)}{e^{nx} + 1}$ y de aquí pruebe que $\operatorname{sg} x = \lim_{n} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}$.

30. Demuestre que si f(x) es continua en **R** y para todo par x_1, x_2 de **R**, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

31. Demuestre que la única función continua (no idénticamente nula en **R**) que satisface $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x, y de **R** ($f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo x, y de **R**) es la función $f(x) = a^x$ ($f(x) = \log_a x$) para un cierto $a > 0$.

32. Sean f(x) y g(x) funciones uniformemente continuas en un conjunto E:

a) Demuestre que $f(x) \pm g(x)$ es uniformemente continua en E.

b) Si, además, f(x) y g(x) están acotadas en E, demuestre que, entonces, f(x) g(x) es uniformemente continua en E.

c) Demuestre que, en general, el producto f(x) g(x) no es uniformemente continuo.

Indicación: Considere $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

33. Se dice que f(x) es *absolutamente continua* en [a, b] si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i + h_i) - f(x_i) \right| < \epsilon$$

para todo conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$a < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2 < \ldots < x_n + h_n < b$ y $\sum_{i=1}^{n} h_i < \delta$.

a) Pruebe que si f(x) es absolutamente continua sobre [a, b], es uniformemente continua en dicho intervalo.

b) Dé un ejemplo de una función uniformemente continua que no sea absolutamente continua.

Indicación: Considere la función $y = x\sqrt{\cos \frac{\pi}{x}}$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$.

c) Pruebe que la suma, diferencia y producto de funciones absolutamente continuas en [a, b] son absolutamente continuas en [a, b].

34. Demuestre que una función continua en un intervalo infinito $[a, +\infty)$ y no acotada ni superior ni inferiormente en este intervalo toma cada valor real un número infinito de veces.

APÉNDICE. FUNCIÓN EXPONENCIAL, FUNCIÓN LOGARÍTMICA Y FUNCIÓN HIPERBÓLICA

El necio ve el principio, el sabio el final

PROVERBIO ANTIGUO

Introducción

El concepto función es tan extenso y general que no es sorprendente encontrarnos con una inmensa variedad de funciones como expresión matemática de distintos procesos tecnológicos y fenómenos naturales. Lo que, a veces, sorprende es que un corto número de funciones especiales rijan una multitud de fenómenos completamente diferentes. Entre estas funciones realizan una función fundamental la conocida función exponencial. A continuación ilustramos esta idea con algunas leyes que son expresadas matemáticamente por la función exponencial.

1. Carlos Marx descubrió la ley exponencial del *crecimiento de la producción social.* En una primera aproximación se cumple que

$$K = 100\, e^{\varphi t}$$

donde K es el llamado índice de producción; t, el tiempo en años y φ, una constante; en el ejemplo numérico dado por Marx, $\varphi = 0{,}0953$.

V. I. Lenin desarrolló el modelo creado por Marx, tomó en cuenta otros factores como el progreso técnico y llegó en 1893 a una ecuación que describe con más exactitud la relación real:

$$K = 100\,[1 + v(e^{\varphi t} - 1)] \quad (v > 0)$$

2. Una función exponencial aparece también en la *desintegración radiactiva.* Si $N = f(t)$ es el número de núcleos atómicos de una sustancia en el instante t, entonces, se cumple que

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}$$

donde N_0 es el número inicial de núcleos y λ una constante característica de la sustancia, llamada constante de desintegración.

3. El crecimiento del número de bacterias en un cultivo (despreciando las disminuciones eventuales debidas a la falta de sustancia nutritiva o al influjo de sustancias antibacterianas) es directamente proporcional al número de bacterias que existen en un momento dado. El número N(t) de bacterias satisface, aproximadamente, la ecuación

$$N = N_0\, e^{kt} \quad (N_0 > 0,\ k > 0)$$

donde N_0 es el número inicial de bacterias y k una constante característica del caldo de cultivo.

4. Según Newton, el *enfriamiento de un cuerpo* en medio frío se produce de acuerdo con la ecuación

$$T = T_M + (T_0 - T_M)\, e^{-\alpha t}$$

donde T es la temperatura del cuerpo en el instante t; T_M, la temperatura del medio; T_0, la temperatura inicial del cuerpo y α una constante que depende de la sustancia y la superficie exterior del cuerpo.

Un cuerpo de superficie no reflectora (cuerpo "negro") emite, a la temperatura absoluta T, rayos que pueden descomponerse espectralmente. En el punto del espectro que corresponde a la longitud de onda λ se irradia una densidad E de energía, determinada por la ley de irradiación de Planck:

$$E = \frac{C}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)}$$

Creemos suficiente esta ilustración para convencer al lector de la importancia de las funciones exponenciales. ¿Cuál es la razón de que tantas leyes diferentes se expresen matemáticamente por funciones exponenciales? Como ocurre muchas veces en matemática, lo que a primera lectura nos sorprende aparece después, muy simple y natural, cuando profundizamos en la esencia del problema. En este caso, todo el misterio reside en que la función exponencial satisface una "ecuación diferencial" la cual expresa, de manera general, que la variación de la función respecto al argumento es proporcional al valor de la función misma. Por eso es que mediante funciones exponenciales se pueden expresar, aproximadamente, los procesos de crecimiento o decrecimiento de la producción, de las bacterias, de la energía, etc.

En este apéndice se estudiarán, además de la función exponencial, su inversa: la función logarítmica, y ciertas combinaciones particulares de ellas conocidas como funciones hiperbólicas por analogías en sus propiedades con las funciones circulares trigonométricas y con una interpretación similar sobre una hipérbola equilátera.

Existen varias razones para la consideración especial de las funciones hiperbólicas. Una razón es que son usadas en la solución de ciertos problemas técnicos. Por ejemplo, la tensión en cualquier punto de un cable flexible, pesado y suspendido por sus extremos (como lo es un cable de transmisión eléctrica) puede ser computada en términos de la función coseno hiperbólico $y = \text{ch}x$. La curva que determina esta función se conoce por *catenaria* (de la palabra latina *catena*, que significa cadena y hace alusión a la propiedad señalada anteriormente) y aparece en otros problemas de ingeniería.

Una segunda razón para estudiar las funciones hiperbólicas es que son muy útiles en el cálculo diferencial e integral y particularmente en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales.

Sin más, pasemos a estudiar detalladamente estas funciones.

§ A.1. Función exponencial

Veamos primero cómo puede ser definida la función exponencial para exponentes racionales (es decir, considerado como dominio) y después extenderemos la definición a los números reales.

Si a es un número real cualquiera y n es un número natural, "elevar a a la potencia n" significa, simplemente, multiplicarla por sí misma n veces, es decir, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ y se cumple para $n, m \in \mathbf{N}$ que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

La función $y = x^n$, para n natural está bien definida en el conjunto de los números reales. Comencemos por demostrar una propiedad sencilla de esta función.

PROPIEDAD 1.1

La función $y = x^n$ para $x \geqslant 0$ y $n \in \mathbf{N}$ es estrictamente creciente y continua en todo **R.**

DEMOSTRACIÓN

Demostremos primeramente el crecimiento de $y = x^n$. Sean $0 \leqslant x_1 < x_2$, entonces, $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \ldots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$
Dada la condición sobre x_1 y x_2, los factores del miembro izquierdo de esta igualdad son ambos positivos, por lo que se obtiene

$$x_2^n - x_1^n \geqslant 0, \quad x_2^n > x_1^n$$

y esto significa que x^n es estrictamente creciente para $x \geqslant 0$. La continuidad de $y = x^n$ se obtiene de la continuidad de $y = x$ y las operaciones con funciones continuas (Capítulo V § V.2), con lo cual queda demostrada la propiedad.

Consideremos la función $y = x^n$ en un intervalo cerrado $[0, N]$, donde N es un entero positivo cualquiera. Como esta función es continua y creciente estrictamente en el mencionado intervalo, podemos aplicar el teorema de la función inversa y afirmar que existe en el intervalo $[0, N^n]$ la función inversa, la cual, además, es continua y estrictamente creciente en dicho intervalo. Esta función inversa se denota por $x = y^{\frac{1}{n}}$. Como N es arbitrario, N^n puede tomarse tan grande como se quiera, por lo que la función $x = y^{\frac{1}{n}}$ está definida para cualquier $y \geqslant 0$. Como es usual, podemos regresar a la notación típica y escribir $y = x^{\frac{1}{n}}$ que estará definida para todo $x \geqslant 0$.

Definamos ahora la potencia $\frac{1}{n}$ de un número real $a \geqslant 0$ como el valor de la función $y = x^{\frac{1}{n}}$ en el punto a; esto es, $a^{\frac{1}{n}}$. Sea ahora $r = \frac{m}{n}$, donde n,m son números naturales. Entonces, definamos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

Además, definamos

$$a^0 = 1 \;,\; a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r \;,\; r \in \mathbf{Q} \;,\; r > 0 \;\text{ y }\; a > 0$$

De esa forma queda completamente definida la potencia racional de cualquier número real positivo, que cumple las propiedades siguientes (conocidas para las potencias enteras positivas):

PROPIEDAD 1.2

$(a^r)^s = a^{rs}$

DEMOSTRACIÓN

Observemos, primeramente, que para $r = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ y $p \in \mathbf{N}$ se tiene que

$$(a^{\frac{m}{n}})^p = a^{\frac{mp}{n}} \tag{1}$$

pues, desarrollando ambas potencias, se obtiene $a^{\frac{1}{n}}$ multiplicado por sí mismo mp veces.

Sean ahora $r = \frac{m}{n}$ y $s = \frac{p}{q}$, m, n, p, q enteros positivos y demostremos que $(a^r)^s = a^{rs}$.

Denotemos por $c_1 = (a^r)^s = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}$ y $c_2 = a^{rs} = a^{\frac{mp}{nq}}$. Si $c_1 \neq c_2$, en virtud de la inyectividad de $y = x^q$ para $x \geqslant 0$ se cumple $c_1^q \neq c_2^q$. Utilizando (1) reiteradamente, obtenemos

$$c_1^q = \left((a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} \right)^q = (a^{\frac{m}{n}})^p = a^{\frac{mp}{n}}$$

$$c_2^q = (a^{\frac{mp}{nq}})^q = a^{\frac{mp}{n}}$$

de donde, $c_1^q = c_2^q$ y se obtiene una contradicción, luego $c_1 = c_2$, es decir, se cumple la propiedad 1.2 para r, s racionales positivos. Si $r = 0$ o $s = 0$ la igualdad de la propiedad 1.2 es trivial y si $s < 0$ o $r < 0$ podemos utilizar la definición $a^{-r} = (\frac{1}{a})^r$ para $r > 0$ y se reduce al caso de exponentes positivos.

PROPIEDAD 1.3

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

DEMOSTRACIÓN

Podemos demostrarla para $r > 0$ y extenderla a los restantes valores racionales de r de la forma indicada anteriormente. Sea $r = \frac{m}{n}$; m, n enteros positivos.

Demos'remos, primeramente, que $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

Supongamos lo contrario, es decir, $c_1 = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \neq (ab)^{\frac{1}{n}} = c_2$. Entonces, en virtud de la inyectividad de $y = x^n$, $c_1^n \neq c_2^n$, o sea,

$$(a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}})^n \neq [(ab)^{\frac{1}{n}}]^n$$

utilizando (1) $[(ab)^{\frac{1}{n}}]^n = (ab)^1 = ab$; además, como sabemos que la propiedad 1.3 se cumple para exponente natural, tenemos

$$[a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}]^n = (a^{\frac{1}{n}})^n \cdot (b^{\frac{1}{n}})^n = a \cdot b$$

lo cual contradice que $c_1^n \neq c_2^n$ y queda demostrado lo que se quería. Multiplicando la igualdad $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ m veces por sí misma se demuestra la propiedad 1.3 para $r > 0$.

PROPIEDAD 1.4

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

DEMOSTRACIÓN

Sean $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$; m, n, p, q enteros positivos, entonces $r + s = \frac{mp + np}{nq}$ y se tiene, utilizando (1)

$$a^{r+s} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mq+np}$$

Como mq + np es un entero positivo

$$a^{r+s} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mq+np} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mq} \cdot (a^{\frac{1}{nq}})^{np} = a^{\frac{m}{n}} \cdot n^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot a^s$$

lo que demuestra la propiedad 1.4.

PROPIEDAD 1.5

Si $a > 1$ y r es un racional, tal que $r > 0$, entonces $a^r > 1$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $r = \frac{m}{n}$, y supongamos que $a^r = a^{\frac{m}{n}} \leqslant 1$, multiplicando n veces por sí misma esta desigualdad se obtiene $a^m \leqslant 1$, pero esta desigualdad contradice el hecho $a^m > 1$ que se obtiene multiplicando la desigualdad $a > 1$ por sí misma m veces.

PROPIEDAD 1.6

La función $y = a^x$, $a > 1$, definida sobre el conjunto de los números racionales es estrictamente creciente sobre este conjunto. (Si $a < 1$ es estrictamente decreciente).

DEMOSTRACIÓN

Sean r_1 y r_2 dos números racionales tales que $r_1 < r_2$, entonces

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \qquad (2)$$

Como $r_2 - r_1 > 0$ y $a > 1$ se tiene, en virtud de la propiedad 1.5, que $a^{r_2 - r_1} > 1$, luego

$$a^{r_2} - a^{r_1} > 0, \text{ esto es, } a^{r_2} > a^{r_1}$$

El decrecimiento estricto cuando $a < 1$ se obtiene de lo demostrado considerando $b^r = (\frac{1}{a})^r$, donde $b > 1$.

Note que si $r = \frac{m}{n}$ tiene denominador n impar, entonces, puede extenderse la definición de potencia racional a los números $a < 0$, definiendo:

$$a^r = \begin{cases} (-a)^r, & m \text{ par} \\ -(-a)^r, & m \text{ impar} \end{cases}$$

PROPIEDAD 1.7

Sea $a > 0$, entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo racional r que satisface $|r| < \delta$, se cumple $|a^r - 1| < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrarla utilizaremos que $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Sea $\epsilon > 0$, entonces, existe N_ϵ tal que

$$\left| a^{\frac{1}{N_\epsilon}} - 1 \right| < \epsilon \text{ y } \left| a^{-\frac{1}{N_\epsilon}} - 1 \right| < \epsilon$$

de donde (en virtud de la propiedad 1.6):

si $a \geqslant 1$, $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{N_\epsilon}} \leqslant a^{\frac{1}{N_\epsilon}} < 1 + \epsilon$

si $a < 1$, $1 - \epsilon < a^{\frac{1}{N_\epsilon}} < a^{-\frac{1}{N_\epsilon}} < 1 + \epsilon$

Si r es un racional tal que $|r| < \frac{1}{N_\epsilon}$, es decir, tal que $-\frac{1}{N_\epsilon} < r < \frac{1}{N_\epsilon}$, entonces, se cumple

$$a^{-\frac{1}{N_\epsilon}} \leqslant a^r \leqslant a^{\frac{1}{N_\epsilon}} \text{ (para } a \geqslant 1)$$

$$a^{\frac{1}{N_\epsilon}} < a^r < a^{-\frac{1}{N_\epsilon}} \text{ (para } a < 1)$$

Por tanto, para $|r| < \delta = \frac{1}{N_\epsilon}$ se tiene

$$1 - \epsilon < a^r < 1 + \epsilon.$$

o sea, $\left|a^r - 1\right| < \epsilon$.

Esto demuestra la propiedad.

Pasemos ahora a la definición de a^x con $x \in \mathbf{R}$. Para ello recordemos (Capítulo II, Propiedad 6.4) que cualquier número real x es límite de una sucesión de números racionales. Entonces, si $x = \lim r_n$ definimos $a^x = \lim a^{r_n}$.

Para que esta definición sea correcta es necesario demostrar la existencia del límite de la sucesión $\{a^{r_n}\}$ y la no dependencia del valor a^x de la sucesión de números racionales $\{r_n\}$ escogida.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\{r_n\}$ una sucesión cualquiera de números racionales tal que $r_n \to x$ y comprobemos que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ es convergente, utilizando la condición de Bolzano-Cauchy (§ II.8)

$$\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| = a^{r_m}\left|a^{r_n - r_m} - 1\right|$$

Como la sucesión $\{r_n\}$ es convergente, será acotada. Por tanto, existe $M > 0$ (¡podemos considerarlo racional!) tal que $\left|r_n\right| \leqslant M$, para todo n.

De donde $-M \leqslant r_n \leqslant M$. De ahí que si $a \geqslant 1$ se tiene $a^{-M} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^M$ y si $a < 1$, $a^{-M} > a^{r_n} > a^M$ Esto significa que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ está acotada superiormente, es decir, existe $K > 0$ tal que

$$a^{r_n} \leqslant K, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Utilizando la propiedad 1.6, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $r \in \mathbf{Q}$ y $|r| < \delta$, entonces,

$$|a^r - 1| < \frac{\epsilon}{K} \tag{3}$$

Como la sucesión $\{r_n\}$ converge, cumple la condición de Bolzano-Cauchy, es decir, dado $\delta > 0$ existe N_δ tal que

$$|r_n - r_m| < \delta, \text{ para } n,m \geqslant N_\delta \tag{4}$$

Utilizando (3), (4) y la acotación de a^{r_n} obtenemos

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < \epsilon, \text{ para } n,m \geqslant N_\delta,$$

lo cual significa que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ es convergente.

Supongamos ahora otra sucesión arbitaria $\{r'_n\}$ tal que $r'_n \to x$. Demostremos que las sucesiones $\{a^{r_n}\}$ y $\{a^{r'_m}\}$ convergen al mismo límite.

Consideremos la nueva sucesión $\{r''_n\}$ dada por $r''_1 = r_1$, $r''_2 = r'_1$, $r''_3 = r_2$, $r''_4 = r'_2, \ldots$.

Evidentemente, la sucesión $r''_n \to x$; luego, por lo que acabamos de demostrar, la sucesión $\{a^{r''_n}\}$ converge y esto significa que las subsucesiones $\{a^{r_n}\}$ y $\{a^{r'_n}\}$ convergen al mismo límite.

Eso demuestra que la definición del número a^x para $x \in \mathbf{R}$ es correcta.

Podemos, entonces, definir la *función exponencial con base $a > 0$* para todo $x \in \mathbf{R}$ como $y = a^x$.

Enunciemos un teorema que resume las propiedades de la función exponencial:

TEOREMA 1.8

La función exponencial a^x $(a > 0)$ tiene las propiedades siguientes para cualesquiera sean x_1, x_2 y x números reales:

1) Si $a > 1$ $(a < 1)$ es estrictamente creciente (decreciente) en todo **R**.
2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
4) $a^x b^x = (ab)^x$
5) Es continua en todo **R**.

DEMOSTRACIÓN

1) Supongamos que $a > 1$ y sean x_1, x_2 dos números reales cualesquiera tales que $x_1 < x_2$, entonces existen dos racionales r' y r'' tales que $x_1 < r' < r'' < x_2$. Tomemos dos sucesiones de números racionales $\{r'_n\}$ y $\{r''_n\}$ tales que

$$r'_n < r' < r'' < r''_n, \ n = 1, 2 \ldots \text{ y } r'_n \to x_1, \ r''_n \to x_2$$

Entonces,

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n}$$

y, pasando al límite

$$a^{x_1} \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^{x_2}$$

luego, $a^{x_1} < a^{x_2}$. Análogamente se demuestra el decrecimiento estricto de a^x cuando $a < 1$.

2) Sean $\{r'_n\}$ y $\{r''_n\}$ sucesiones de números racionales tales que $r'_n \to x_1$ y $r''_n \to x_2$, entonces, $\lim\ (r'_n + r''_n) = x_1 + x_2$ utilizando la definición de la función exponencial y la propiedad análoga demostrada para exponentes racionales

$$a^{x_1 + x_2} = \lim a^{r'_n + r''_n} = \lim a^{r'_n} \lim a^{r''_n} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

4) Se demuestra de forma análoga.

Dejemos para el final la demostración de (3).

5) Para demostrar la continuidad basta notar que la demostración hecha de la propiedad 1.7, sólo para racionales, puede ser extendida para números reales, pues dicha demostración se basaba en el crecimiento (decrecimiento) de la función exponencial y esta propiedad está demostrada para la función a^x con $x \in \mathbf{R}$ (parte 1 de este teorema). Es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $h \in \mathbf{R}$ que satisface $|h| < \delta$, se cumple $|a^h - 1| < \epsilon$.

Sea $x_0 \in \mathbf{R}$ fijo y sea $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = a^x - a^{x_0}$.
Entonces,

$$\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$$

Sea $\epsilon > 0$ fijo y $\delta > 0$ tal que, para $|\Delta x| < \delta$, se cumple

$$|a^{\Delta x} - 1| < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$$

Entonces, para incrementos Δx con $|\Delta x| < \delta$ se tiene

$$|\Delta y| = a^{x_0}\,|a^{\Delta x} - 1| < \epsilon$$

con lo que se demuestra la continuidad de $y = a^x$.

Para demostrar (3) debe demostrarse primero que si $r \in \mathbf{Q}$ y $x_1 \in \mathbf{R}$, entonces,

$$(a^{x_1})^r = a^{x_1 r}$$

La demostración de esta igualdad es análoga a la demostración de (1).

Sea ahora $x_2 \in \mathbf{R}$ y tomemos una sucesión $\{r_n\}$ de números racionales tal que $r_n \to x_2$. Entonces, pasando al límite en la igualdad

$$(a^{x_1})^{r_n} = a^{x_1 r_n},\quad n = 1, 2, \ldots .$$

se tiene

$$(a^{x_1})^{x_2} = \lim (a^{x_1})^{r_n} = \lim a^{x_1 r_n} = a^{\lim x_1 r_n} = a^{x_1 x_2}$$

Observe que se utilizó la continuidad de la exponencial en la tercera igualdad. Esto completa la prueba del teorema.

Pueden demostrarse otras propiedades de la exponencial; por ejemplo, si $a > 1$ $(a < 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\ (0)\ , \quad \lim_{x \to -\infty} (a^x) = 0(+\infty)$$

En efecto, como para $a > 1$ $\lim a^n = +\infty$ (§ II.2, ejercicio resuelto) y a^x es, en este caso, creciente, se obtiene $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Si $a < 1$, entonces, $\frac{1}{a} > 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = +\infty$, de donde $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

Análogamente se demuestran los límites cuando $x \to -\infty$.

Además, como consecuencia de las propiedades anteriores se puede demostrar que la función exponencial $y = a^x$ toma todos los valores $y > 0$. En efecto, cuando $x \to \pm\infty$ la función exponencial toma, respectivamente, valores tan pequeños como se quiera y valores infinitamente grandes. En virtud de la continuidad y el 2do. teorema de Bolzano se obtiene que $y = a^x$ toma todos los valores reales positivos.

A continuación damos los gráficos de las funciones exponencial $y = a^x$ con $a > 1$ y $a < 1$.

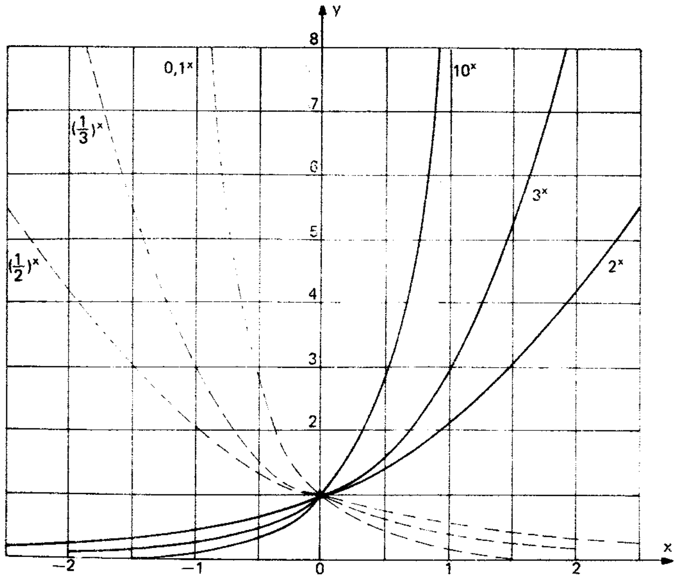


Fig. A.1

§ A.2 Función logarítmica

La función logarítmica la podemos definir como la inversa de la exponencial. Sea $[b, c]$ un intervalo cerrado arbitrario de la recta, como la función $y = a^x$ es continua y estrictamente creciente si $a > 1$ (o estrictamente decreciente si $a < 1$), entonces, aplicando el teorema 7.3 del Capítulo V, la función inversa está definida en el intervalo $[a^b, a^c]$ ($[a^c, a^b]$), siendo en ese intervalo continua y estrictamente creciente (decreciente). Esta función inversa se denota $x = \log_a y$, y se llama función logarítmica en base a. Intercambiando la designación de las variables dependiente e independiente, podemos escribir

$$y = \log_a x$$

El dominio de la función logarítmica coincide con la imagen de la función exponencial, es decir, el conjunto de los valores x tales que $x > 0$ y su imagen es todo **R**.

La función logarítmica es estrictamente creciente ($a > 1$) o estrictamente decreciente ($a < 1$) y continua en todo su dominio.

Además,

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1)$$

De la propiedad 2) del teorema 1.8, para la función exponencial, se obtiene que para la función logarítmica se cumple

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Usualmente en el análisis matemático se trabaja con el logaritmo cuya base es $e = \lim (1 + \frac{1}{n})^n$ y se utiliza la notación $\log_e x = \ln x$.

A continuación presentamos los gráficos de la función logarítmica cuando la base a es mayor que 1 y cuando es a tal que $0 < a < 1$ (figura A.2).

§ A.3 Funciones hiperbólicas

DEFINICIÓN 3.1

Las funciones $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se denominan, respectivamente, *coseno* y *seno hiperbólico* y se denotan por los símbolos ch x y sh x:

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

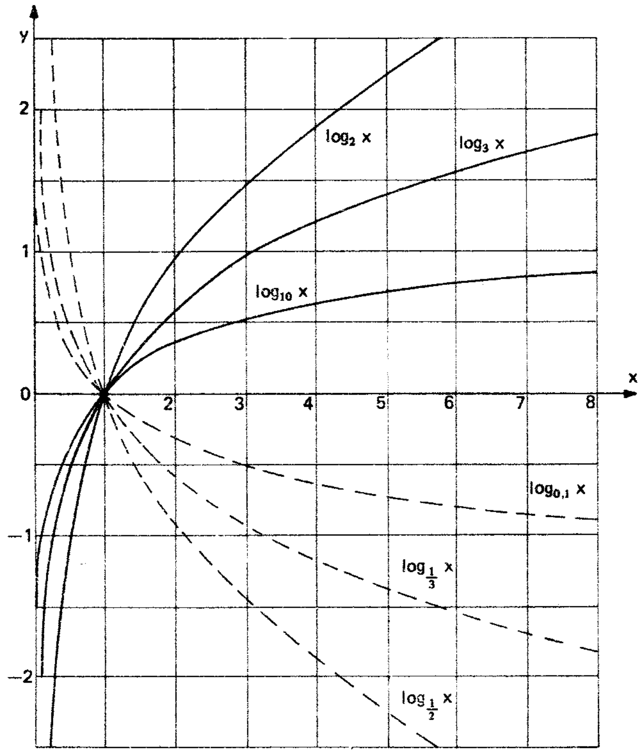


Fig. A.2

PROPIEDADES 3.2

Las funciones hiperbólicas ch x y sh x cumplen que:

1) Para cualesquiera números reales x_1, x_2 y x

$$\text{sh}(x_1 + x_2) = \text{sh } x_1 \text{ch } x_2 + \text{ch } x_1 \text{ sh } x_2$$

$$\text{ch}(x_1 + x_2) = \text{ch } x_1 \text{ch } x_2 + \text{sh } x_1 \text{ sh } x_2$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

2) $\text{sh } 0 = 0$; $\text{ch } 0 = 1$

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \text{ch } x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{sh } x = \pm\infty$

La demostración de tales propiedades se realiza directamente utilizando la definición 3.1 y las propiedades conocidas de la función exponencial. Así, por ejemplo, demostremos que $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$$

Estas fórmulas nos recuerdan las relaciones entre las funciones trigonométricas, las cuales, a veces, se denominan funciones circulares por estar referidas, en su interpretación geométrica, al círculo unidad: $x^2 + y^2 = 1$. Para sh x y ch x se cumplen estas y otras relaciones análogas a las correspondientes para sen x y cos x; de ahí el nombre de seno y coseno para ellas. El epíteto de "hiperbólicas" está relacionado con el hecho de que las fórmulas

$$x = \operatorname{ch} t\,,\quad y = \operatorname{sh} t \tag{1}$$

definen paramétricamente una hipérbola, análogamente

$$x = \cos t\,,\quad y = \operatorname{sen} t$$

definen paramétricamente al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En efecto, elevando al cuadrado ambas igualdades en (1) y restándolas posteriormente obtenemos:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

ecuación que representa una hipérbola equilátera en forma canónica (figura A.3).

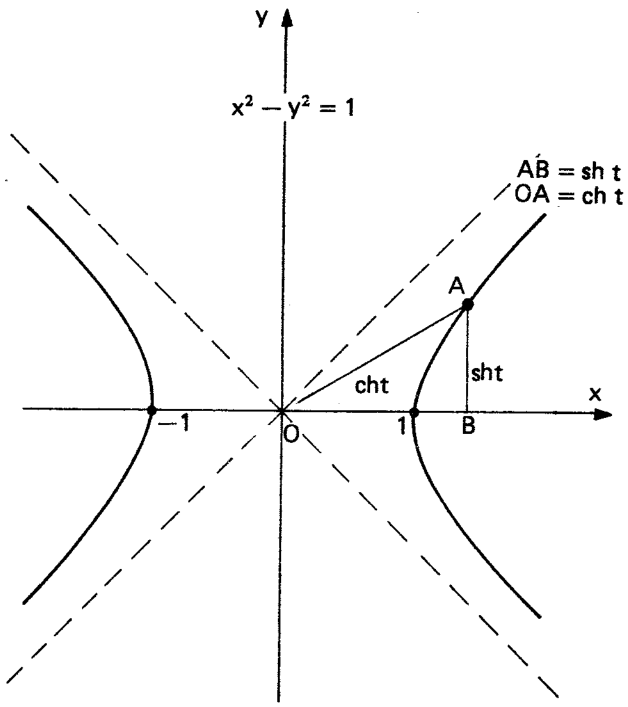


Fig. A.3

También, por analogía con las funciones circulares, se pueden definir otras funciones hiperbólicas; así, por ejemplo:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\ \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

las cuales cumplen:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{th} x = \operatorname{th} 0 = 0\ ,\quad \lim_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{cth} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{th} x = \pm 1\ ,\quad \lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{cth} x = \pm 1$$

Note que las funciones ch x, sh x y th x están definidas y son continuas en todo **R** y la función cth x está definida en **R** salvo en $x = 0$, donde posee una discontinuidad de segunda especie. Con los datos acopiados hasta el momento podemos, de forma aproximada, trazar los gráficos de estas funciones.

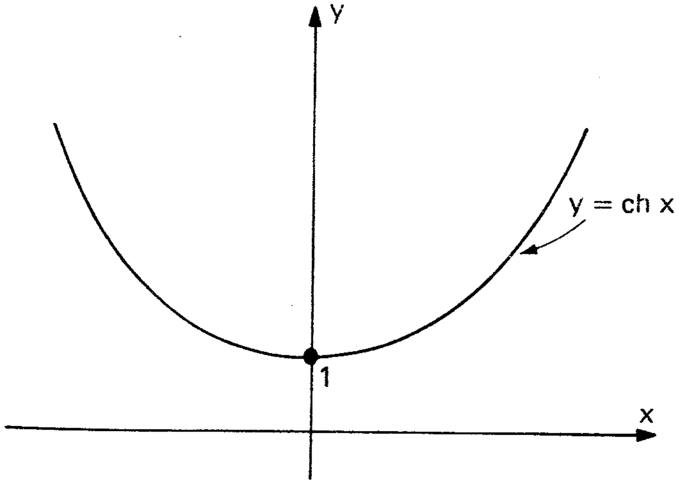


Fig. A.4

Dadas las características de las funciones hiperbólicas podemos aplicar el teorema (V.7.3) de la función inversa y determinar la existencia de las funciones hiperbólicas inversas (las cuales se denominan también "funciones de área" porque dependen del área de un sector hiperbólico como se demuestra en el cálculo integral).

La función $y = \operatorname{sh} x$ es biyectiva, continua y estrictamente creciente en todo **R** y, por tanto, su inversa existe y es continua en todo **R** y la denotamos $x = \operatorname{sh}^{-1} y$.

La inversa del coseno hiperbólico es posible considerarla cuando ch x se restringe a $x \geqslant 0$, subconjunto de **R** en que esta función es continua estrictamente creciente y biyectiva, si se toma como codominio al conjunto de los y, tales que $y \geqslant 1$. También pudiera considerarse la restricción de ch x a las $x \in \mathbf{R}$, tales que $x \leqslant 0$, en cuyo caso, resulta ser una función estrictamente decreciente, continua y biyectiva, tomando nuevamente como codominio el conjunto de las y, tales que $y \geqslant 1$ (caso análogo es conocido por el estudiante, a través del estudio de la inversa de la función $y = x^2$, que puede considerarse para $x \geqslant 0$ o para $x \leqslant 0$, obteniendo, respectivamente, $x = \sqrt{y}$ ó $x = -\sqrt{y}$).

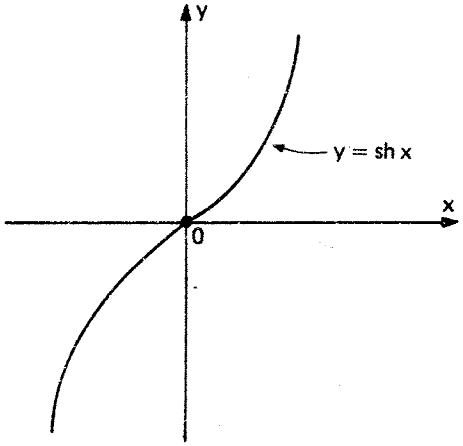


Fig. A.5

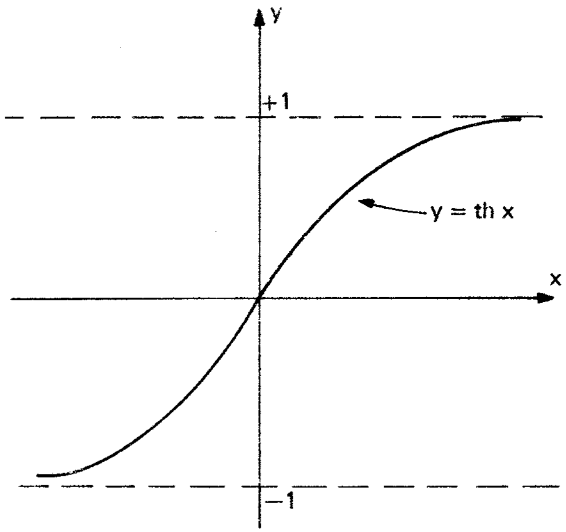


Fig. A.6

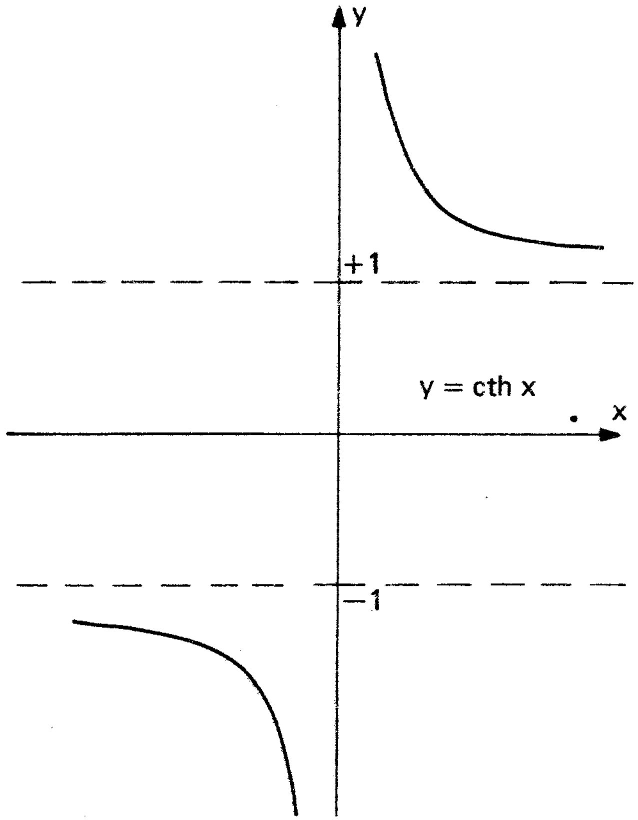


Fig. A.7

Las inversas de la th x y la cth x se determinan aplicando directamente el teorema de la función inversa, teniendo en cuenta en el caso de cth x la discontinuidad en $x = 0$.

El aspecto geométrico de las funciones de área es fácil deducirlo de las figuras A.4, A.5, A.6 y A.7 mediante una simetría respecto a la recta $y = x$.

La expresión analítica de cada una de las funciones hiperbólicas inversas se puede dar a través de la aplicación de la función logaritmo. Así, por ejemplo, para la función $y = \operatorname{ch} x$, obtenemos

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{o bien} \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

Esta es una ecuación de 2do. grado en e^x; su resolución da:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}, \quad \text{o sea} \quad x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

y cada signo del radical determina la función inversa $x = \operatorname{ch}^{-1} y$, según sea el dominio considerado para la directa.

Las expresiones de las otras funciones hiperbólicas inversas en términos de logaritmos pueden ser halladas por el lector de una forma similar. Ellas son:

$$\mathrm{sh}^{-1} y = \ln \ (x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty < y < \infty)$$

$$\mathrm{th}^{-1}\, y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}\,, \quad |y| < 1$$

$$\mathrm{cth}^{-1}\, y = \frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}\,, \quad |y| > 1$$

Uno de los méritos de las funciones hiperbólicas inversas reside en su utilización en el cálculo integral de lo cual el lector podrá convencerse en el próximo curso de Análisis Matemático.