

Examen Mundial de Lógica  
Curso 2018-2019

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

1. Responda Verdadero (V) o Falso (F). Justifique en cada caso.
  - Sean  $A = \{\emptyset, 2, b\}$  y  $P = \{\{\emptyset\}, \{2, b\}\}$  una partición de  $A$ . La relación de equivalencia que define  $P$  sobre  $A$  es  $R = \{<\emptyset, \emptyset>, <2, 2>, <b, b>, <2, b>, <b, 2>\}$
  - Sea  $N = \{1, 2, \dots\}$ , la relación  $R \subseteq N \times N$  tal que  $R = \{<x, y> \mid \exists n \in N : xn = y\}$  no es un orden parcial
  - Sea  $R$  una relación de equivalencia definida en un conjunto  $A$  y la función  $f : A \rightarrow A/R$  entonces es cierto que, si  $|R| > |A|$  entonces  $f$  es biyectiva.
  - Si  $R$  es una relación binaria reflexiva y antisimétrica, entonces  $R^{-1}$  es una función sobreyectiva.
2. Una planta de manufactura depende, para su funcionamiento, de dos máquinas independientes. El funcionamiento de estas máquinas depende del suministro eléctrico que puede ser proporcionado por tres cables. Una máquina está conectada a dos cables y funciona si solamente en uno de los dos cables existe corriente eléctrica. La otra máquina está conectada a los tres cables y funciona si posee exactamente dos cables con fluido eléctrico y además la primera máquina se encuentra funcionando.
  - (a) Proponga una fórmula de la lógica proposicional, una para cada máquina, que determine si estas se encuentran funcionando o no.
  - (b) Diseñe un circuito lógico que se corresponda con el funcionamiento de la planta de manufactura. Para diseñarlo se dispone solamente de 3 componentes AND, 2 NOT, 1 OR y 2 NOR.
3. En Isla de los Truhanes y los Caballeros existe un monasterio en cuyo salón principal se encuentran 3 puertas de diferentes materiales (Oro, Mármol y Madera). Alguna(s) de estas puertas lleva(n) a una habitación con un gran tesoro, las otras a una trampa mortal. En este salón hay 3 sacerdotes (A, B y C). Se conoce que los sacerdotes son caballeros. Sin embargo, un famoso impostor ha asesinado a uno de los sacerdotes y ocupado su lugar. Se sabe que dicho delincuente es un truhan. Para determinar cual de los sacerdotes es el impostor los habitantes de la isla han contratado al Inspector Craig. Este entrevistó a los sacerdotes quienes dieron las siguientes declaraciones:

A: Si la puerta de Marmol lleva al tesoro también lo hará la de Oro  
B: La puerta de Oro lleva al tesoro  
C: La puerta de Madera es un trampa certera

Además, el Inspector Craig pudo establecer los siguientes hechos:

H1: La puerta de Marmol sí conduce al tesoro  
H2: Si la puerta de Oro es una trampa también lo será la de Madera

  - (a) Exprese cada uno de estos enunciados en el lenguaje de la Lógica Proposicional.
  - (b) Demuestre formalmente, utilizando la Lógica Proposicional, cuál de los sacerdotes es el impostor (recuerde que hay uno y solo un impostor).
4. Escriba en el Lenguaje de Predicados las siguientes expresiones definidas en el dominio de los números naturales. Defina toda relación o función que utilice.
  1. El máximo común divisor de dos números cualesquiera, siendo al menos uno distinto de 0, es el mayor número que los divide a ambos.
  2. Dos números son primos relativos siempre y cuando su máximo comun divisor sea 1.
  3. Cualquier divisor común de dos números divide al máximo común divisor de estos.
5. Demuestre formalmente  $\forall(x)A(x) \vee \forall(x)B(x) \Rightarrow \forall(x)[A(x) \vee B(x)]$  (Ley 58). No utilice en la demostración ninguna ley cuyo número sea igual o superior a la 58.