Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Ejercicios Resueltos 2

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Calcula la longitud del arco de cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, cuando $0 \leq t \leq 2\pi$.

Respuesta

$$x(t) = a(t - \operatorname{sen} t),\ y(t) = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$\Downarrow$$
$$x'(t) = a(1 - \cos t),\ y'(t) = a \operatorname{sen} t.$$

Hallemos la longitud de arco

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \overset{(\star)}{=} \sqrt{2} a (4\sqrt{2}) = 8a \end{aligned}$$

Resolvamos la integral en $(\star)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt \overset{(**)}{=} 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \, du = 2\sqrt{2}(-\cos u)|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}(-\cos \pi + \cos 0) = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

En $(**)$ se hizo el cambio de variables $u = \frac{t}{2}$.

Ejercicio 2

Calcula las integrales siguientes utilizando cambios de variables adecuados:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$

Respuesta

a)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(1+(\frac{x}{2})^2)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \\
&\overset{(2)}{=} \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int \frac{\sec^2 t\ dt}{\sqrt{\sec^2 t}} = \int \sec t\ dt = \int \sec t \cdot \frac{(\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)} dt \\
&= \int \frac{\sec^2 t + \sec t \tan t}{\sec t + \tan t} dt = \ln|\sec t + \tan t| + C = \ln|\sqrt{1+y^2} + y| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{x}{2}\right| + C = \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + \ln\frac{1}{2} + C \\
&= \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + K, \text{con } C,\ K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En (1) se hizo el cambio de variable $y = \frac{x}{2}$ y, en (2), $y = \tan t$.

b)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x\ dx \overset{(1)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y(-\operatorname{sen} y) dy = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \operatorname{sen} y\ dy = -0 = 0.
\end{aligned}$$

En (1) se hizo el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{2}$. Se usó, además, que si $f(x)$ es impar entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ (si la integral existe): en particular, la función $f(y) = \cos^2 y \operatorname{sen} y$ es impar.

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes utilizando el método de integración por partes:

a) $\displaystyle\int \ln^2 x \; dx$

b) $\displaystyle\int \cos(\ln x) \; dx$

Respuesta

a)

$$\begin{aligned} I &= \int \ln^2 x dx \overset{(4)}{=} x\ln^2 x - \int \frac{2x\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx \\ &= x\ln^2 x - 2I_1 = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Calculemos $I_1 = \int \ln x dx$:

$$I_1 = \int \ln x dx \overset{(5)}{=} x\ln x - \int \frac{x \; dx}{x} = x\ln x - x + K, \; K \in \mathbb{R}.$$

En (4) y (5) se usó el método de integración por partes.

b)

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln x)dx \overset{(6)}{=} x\cos(\ln x) - \int \left(-\frac{x\sin(\ln x)}{x}\right) dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx \\ &= x\cos(\ln x) + I_1 = x\cos(\ln x) + (x\,\mathrm{sen}(\ln x) - I) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$2I = x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)}{2} = \frac{x}{2}\left[x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)\right] + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Calculemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(\ln x)dx \overset{(7)}{=} x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \frac{x\cos(\ln x)}{x}dx = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \\ &= x\,\mathrm{sen}(\ln x) - I. \end{aligned}$$

En (6) y (7) se usó el método de integración por partes.

Ejercicio 4

Calcula las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$

Respuesta

a)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \int_0^1 \frac{2}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-x-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1-1}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-1}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}(I_1 - I_2). \end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx = \ln\left|x^2-x-1\right| \ \Big|_0^1 \\ &= \ln|1^2-1-1| - \ln|0^2-0-1| = \ln|-1| - \ln|-1| = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} \overset{(i)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y^2-\frac{5}{4}} \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{-\frac{5}{4}\left(1-\frac{4y^2}{5}\right)} = -\frac{4}{5}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-\left(\frac{2y}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&\overset{(ii)}{=} -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{dz}{1-z^2} \overset{(iii)}{=} -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\cos t\ dt}{1-\operatorname{sen}^2 t} \\
&= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\cos t\ dt}{\cos^2 t} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{dt}{\cos t} \\
&= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \sec t\ dt \\
&= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \sec t\cdot\frac{(\sec t+\tan t)}{(\sec t+\tan t)}\ dt \\
&= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{(\sec^2 t+\sec t\tan t)}{(\sec t+\tan t)}\ dt \\
&= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln|\sec t+\tan t|\ \Big|_{-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left|\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|-\ln\left|\sec\left(-\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+\tan\left(-\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|\right] \\
&= -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left|\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|-\ln\left|\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)-\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

$$
I_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\right|
$$

Por tanto,

$$
I = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sec\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\right| \approx 0{,}430409.
$$

En (i) se hizo el cambio de variable $y = x - \frac{1}{2} \Rightarrow dy = dx$. En (ii) se hizo el cambio de variable $z = \frac{2y}{\sqrt{5}} \Rightarrow dz = \frac{2dy}{\sqrt{5}}$. En (iii) se hizo el cambio de variable $z = \operatorname{sen} t \Rightarrow dz = \cos t\ dt$.

b)

$$I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \overset{(3)}{=} xe^{\sqrt{x}}|_0^1 - \int_0^1 \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = e - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} dx = e - \frac{1}{2} I_1$$
$$= e - \frac{1}{2}[2(e-2)] = 2.$$

Calculemos

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} dx \overset{(4)}{=} \int_0^1 te^t 2t\ dt = 2\int_0^1 t^2 e^t = 2(e-2).$$

En (3) se utilizó el método de integración por partes y, en (4), el cambio de variable $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Ejercicio 5

Consideremos la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Halla su área y la porción de ella que está dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Sugerencia: Utiliza las coordenadas polares.

Respuesta

Primeramente llevemos la ecuación que define la lemniscata (figura 1) a coordenadas polares. El cambio de variables es

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

La ecuación, en coordenadas cartesianas, es

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

aplicando el cambio de variables se llega a la ecuación

$$r^2 = a^2\cos(2\varphi).$$

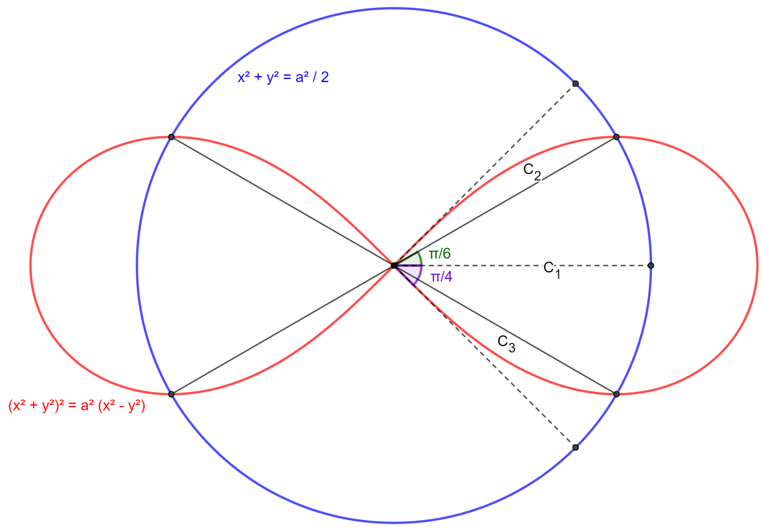

Figura 1: Lemniscata de Bernoulli

i) Hallemos el área que encierra la lemniscata de Bernoulli ($\bar{A}$). Esta región es simétrica respecto al eje OY, de modo que podemos calcular el área a la derecha (A) y duplicarla para hallar lo que se quiere ($\bar{A} = 2A$). Se conoce que el área de una región acotada por una curva en coordenadas polares, entre los radios $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$ es

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi.$$

En este caso, los radios son $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{\pi}{4}$ debido a que esta curva comienza y termina en $(0,0)$ por lo que

$$r = 0 \Leftrightarrow r^2 = 0 = a^2 \cos(2\varphi) \Rightarrow 2\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Entonces el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d\varphi \overset{(\star)}{=} \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \; dt = \frac{a^2}{2} \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el área que encierra la lemniscata de Bernoulli es

$$\bar{A} = a^2.$$

En $(\star)$ se hizo el cambio de variable $t = 2\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dt}{2}$.

ii) Hallaremos ahora el área de la región acotada por la lemniscata que queda dentro de la circunferencia. Primeramente notemos que, nuevamente, la región es simétrica respecto al eje OY, de modo que su área ($\bar{B}$) es el duplo del área de la región de la derecha ($\bar{B} = 2B$). Ahora veamos que la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{\sqrt{2}a}{2}$, en coordenadas polares, es

$$r^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Al interceptar la circunferencia anterior con la lemniscata se obtienen los valores $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$. La región de área B está compuesta por un sector circular (C_1) de ángulo central $\frac{\pi}{3}$ y de dos regiones simétricas respecto a OX ($C_2 = C_3$), acotadas por la lemniscata y los radios $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ($\alpha = -\frac{\pi}{4}$) y $\beta = \frac{\pi}{4}$ ($\beta = -\frac{\pi}{6}$), como se aprecia en la figura 1. Por tanto:

$$B = C_1 + C_2 + C_3 = C_1 + 2C_2.$$

Calculemos

$$C_1 = \frac{\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{a^2\pi}{12}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d\varphi \overset{(\star\star)}{=} \frac{a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \; dt \\ &= \frac{a^2}{4}\left(\sin t|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

En ($\star\star$) se hizo el cambio de variable $t = 2\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dt}{2}$.

Entonces

$$B = \left[\frac{a^2\pi}{12}\right] + 2\left[\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Por tanto, el área buscada es

$$\bar{B} = 2B = a^2\left(\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.