Algebra Lineal

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN, UH.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu

Prof. David Balbuena Cruz david.balbuena@matcom.uh.cu

Curso: 2022

Algebra Lineal

Total de horas lectivas: 96

Evaluaciones: Tres (3) trabajos de control.
Examen Final Escrito y Oral

Temas del curso:

I. Espacios Vectoriales.
II. Aplicaciones Lineales.
III. Reducción de endomorfismos y matrices.

Bibliografía:

Texto Básico: Álgebra. Tomo I.(1983). Autores: T. Noriega & H. Arazoza

Complementario: Álgebra Lineal. (1992). Autor: S. Lipschutz. 2da. Edición.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Tema I
Espacios y subespacios vectoriales.

Conferencia 1:
Definición de espacio vectorial y de subespacio vectorial.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Semejanza entre estructuras conocidas

Propiedades	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$M(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}[x]$
Adición interna	$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}$	$\forall x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow x+y \in \mathbb{C}$	$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow A+B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$	$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow p(x)+q(x) \in \mathbb{K}[x]$
Adición	Asociativa, conmutativa.			
Neutro (+)	$e=0\in\mathbb{R}$	$e=0\in\mathbb{C}$	$a_{ij}=0, \forall i=1\ldots m, j=1\ldots n.$	$p(x)=0$
Opuesto (+)	$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ opuesto	$\forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow -x \in \mathbb{C}$ opuesto	$\forall (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow (-a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ opuesto	$\forall p(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow -p(x) \in \mathbb{K}[x]$ opuesto
Multiplicación por un escalar	$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b \wedge (\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)=\beta(\alpha a)$			
	Neutro (escalar): $\alpha=1$			

Definición: Sea E un conjunto, $E \neq \varnothing$, llamaremos **suma** de dos elementos del conjunto, $x, y \in E$, a la correspondencia de cada par de elementos de E y un elemento unívocamente determinado $x \oplus y$.

Definición: Sea E un conjunto, $E \neq \varnothing$, llamaremos **producto** de un elemento del conjunto **por un escalar** a la correspondencia dada por la multiplicación de un elemento $x \in E$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ y un elemento unívocamente determinado $\alpha \odot x$.

Definición (Espacio Vectorial): Sean $\mathbb{K}$ un conjunto de escalares y un conjunto $E \neq \varnothing$. Se dice que $(E, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un ***espacio vectorial*** o un ***K-espacio*** si existen dos operaciones: $\oplus$ suma interna en E y $\odot$ producto por un escalar (interno) que cumplen los siguientes axiomas:

I- La suma es conmutativa: $x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in E.$

II- La suma es asociativa: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \forall x, y, z \in E.$

III- Existe en E un elemento único, que se denota por 0_E y se denomina **cero** del espacio, que cumple: $x \oplus 0_E = x, \forall x \in E.$

IV- Para todo elemento $x \in E$ existe un único elemento $(-x)$ denominado **opuesto** de x que cumple: $x \oplus (-x) = 0_E, \forall x \in E.$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Definición (Espacio Vectorial): Sean $\mathbb{K}$ un conjunto de escalares y un conjunto $E \neq \varnothing$. Se dice que $(E, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un ***espacio vectorial*** o un ***K-espacio*** si existen dos operaciones: $\oplus$ suma interna en E y $\odot$ producto por un escalar (interno) que cumplen los siguientes axiomas (A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores) :

V- La suma de vectores y el producto por un escalar cumplen la propiedad distributiva: $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y \;\; \forall x, y, \in E, \; \alpha \in \mathbb{K}.$

VI- La suma en el conjunto de los escalares y el producto por un vector cumplen la propiedad distributiva: $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x \;\; \forall x \in E, \; \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

VII- El producto de un vector por un escalar y el producto en el conjunto de los escalares por un vector, cumplen la propiedad asociativa:

$$(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x) \;\; \forall x \in E, \; \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

VIII- La unidad del conjunto de los escalares cumple que: $1 \odot x = x \;\; \forall x \in E, \; 1 \in \mathbb{K}.$

Ejemplos de espacios vectoriales:

1. Espacio trivial: $\{0\}$

2. Espacios reales: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n \; n \in \mathbb{N}$

3. Espacios de matrices: $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

4. Espacio de todos los polinomios dimensión infinita $\mathbb{K}[x]$.

5. Espacio de los polinomios de grado menor que n, $\mathbb{K}_n[x]$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Propiedades de los espacios vectoriales:

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \odot 0_E = 0_E$

2. $\forall x \in E, 0 \odot x = 0_E$

3. $\forall x \in E, -x = -1 \odot x$

4. Si $\alpha \in \mathbb{K}, x \in E, \alpha \odot x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = 0_E$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Definición: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $F \subseteq E$, $F \neq \varnothing$

Diremos que F es un **subespacio vectorial** ($F \subset_S E$) de E si:

1. $\forall x, y \in F \quad x \oplus y \in F$
2. $\forall x \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \odot x \in F$
3. Para estas dos operaciones, $\oplus$ y $\odot$ por un escalar, que se definen en F a partir de las de E, F es un espacio vectorial.

Según la definición anterior, para demostrar que un subconjunto es un subespacio vectorial, habrá que probar que este es un espacio vectorial, con las operaciones definidas, es decir, probar que se cumplen los axiomas.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Sean $\mathbb{K}$ un conjunto de escalares y un conjunto $E \neq \varnothing$. Se dice que $(E, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un ***espacio vectorial (ev)*** o un ***K-espacio*** si existen dos operaciones: $\oplus$ suma interna en E y $\odot$ producto por un escalar (interno) que cumplen los siguientes axiomas:

I- La suma es conmutativa: No hay que probarlo pues si la suma es conmutativa en el ***ev*** E**,** es conmutativa para los elementos de un subconjunto de E.

II- La suma es asociativa: No es necesario comprobarlo pues si la suma es asociativa en E, también lo será en F.

III- Existe un elemento 0_E único: Hay que comprobar que el cero es uno de los elementos de F.

IV- Para todo elemento $x \in F$ existe el opuesto $(-x)$: Hay que comprobar para todo elemento $x \in F$, que su opuesto $(-x) \in F$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

V- La suma de y el producto por un escalar cumplen la propiedad distributiva: No hay que comprobarla porque si se cumple en E , se cumple en $F \subset E$.

VI- La suma en el conjunto de los escalares y el producto por un elemento del conjunto, cumplen la propiedad distributiva: No hay que comprobarlo por la misma razón anterior.

VII- El producto por un escalar y el producto en el conjunto de los escalares cumplen la propiedad asociativa: Tampoco hay que comprobarlo.

VIII- La unidad del conjunto de los escalares cumple que: $1 \odot x = x \;\; \forall x \in E,\; 1 \in \mathbb{K}$, este axioma se cumple para todos los elementos del conjunto, en particular para los del subconjunto.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

En la práctica basta comprobar los siguiente axiomas:

F subconjunto de $E \neq \emptyset$ es un subespacio vectorial de E si se cumple:

1. $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$
2. $x \in F, \ \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in F$
3. $0_E \in F$
4. $x \in F \Rightarrow -x \in F$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Ejemplos de subespacios vectoriales:

5. Subespacios triviales: $\{0_E\}$, E.

6. $\mathbb{K}_n[x]$

7. $\mathbb{R} \subset_S \mathbb{C}$ si se considera $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}-$espacio.

8. En el espacio $M_n(\mathbb{K})$ las matrices simétricas $MS_n(\mathbb{K})$.

9. Todo plano de $\mathbb{R}^3$ que contenga al origen.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Analicemos nuevamente las 4 condiciones que tenemos que comprobar para demostrar que F es un subespacio vectorial de E. Veamos las condiciones (3) y (4).

3. $0 \in F$. Esta condición no hay que comprobarla si se cumple la condición (2): $x \in F,\ \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in F$, pues en particular para $\alpha = 0$: se tiene $0x = 0 \in F$.

4. $x \in F \Rightarrow -x \in F$. Esta condición tampoco hay que comprobarla, pues si se cumple (2), tomando en particular $\alpha = -1$, se tiene $x \in F \Rightarrow (-1)x = -x \in F$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Concluyendo, para demostrar que $F \subset E, F \neq \varnothing$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial E, es suficiente comprobar (1) y (2).

Observación:

A pesar de que $-u \in F, 0 \in F$ son consecuencia de la definición de s.e.v. y de las propiedades de e.v., verificar su pertenencia al conjunto suele utilizarse para verificar que un conjunto no es s.e.v.

Ejemplos:

10. $V \subset \mathbb{R}^2, V = \{(x,1) / x \in \mathbb{R}\}$

11. $V \subset \mathbb{R}, V = \{|x| / x \in \mathbb{R}\}$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Teorema: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $F \subseteq E, F \neq \emptyset$.
Entonces F es un **subespacio vectorial** $(F \subset_S E)$ de E si y solo si: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F,\ \alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in F.$

Demostración:

$(\Rightarrow)\quad F \subset_S E$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F$$
$$\Rightarrow x' = \alpha \odot x \in F \ \wedge \ y' = \beta \odot y \in F \ \text{ por ser } F \subset_S E$$
$$\Rightarrow x' \oplus y' \in F \ \text{ por ser } F \subset_S E$$

$(\Leftarrow)\quad \alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in F$

para $\alpha = \beta = 1$ tenemos $x \oplus y \in F$

para $\alpha \in \mathbb{K}, \beta = 0$ tenemos $\alpha \odot x \in F$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu. Celia Tamara González González, celia@matcom.uh.cu ,

Ejemplo 12: Demuestre que F es un s.e.v. del e.v. $\mathbb{R}^3$.

$$F=\{(x,y,x+y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.


¿ALGUNA DUDA?

Estudio individual

Verifique que el siguiente subconjunto es un subespacio del espacio que se indica:

$$E = F\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right), \quad V = \left\{ f \in F\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) : f(x) = f(-x) \right\}.$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.