Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Clase Práctica 4

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Al estudiante:

Bienvenido a la Clase Práctica 4 del Tema 2 del curso *Introducción al Análisis Matemático*. Los siguientes ejercicios pueden ser abordados con los conocimientos adquiridos en la conferencia correspondiente. ¡Esperamos que le vaya bien!

Colectivo de la asignatura

EJERCICIOS

Ejercicio 1.

Demuestre que si:

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a), \quad a \in \mathbb{R} \\ f'(x) &< g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) &< g(x), \quad \forall x > a \\ f(x) &> g(x), \quad \forall x < a \end{aligned}$$

a) Demuestre con un ejemplo la falsedad de lo anterior si faltara la hipótesis

$$f(a) = g(a).$$

Ejercicio 2.

Demuestre que si:

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) = 0, \quad a \in \mathbb{R} \\ f^{(k)}(a) &= g^{(k)}(a) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ f^{(n)}(x) &< g^{(n)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces

$$f(x) < g(x), \quad \forall x > a.$$

Ejercicio 3.

Demuestre las desigualdades

a) $e^x \geq 1 + x$.

b) $e^x \geq ex$.

c) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$.

d) $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \quad \forall x > 0,\ \forall \alpha : 0 < \alpha < 1$.

e) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

f) $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

g) $|\arctan x| \leq |x|$.

h) $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{2}{\pi} x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

i) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) < 1 \quad \forall x \in (0; 1]$.

j) $x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio 4.

Demuestre que:

$$2 \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos}(1 - 2x^2) \quad \forall x \in [0; 1]$$

Ejercicio 5.

Indica para qué valores de a son crecientes las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - ax$

b) $y = ax - \operatorname{sen} x$

c) $y = ax + 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$

Ejercicio 6.

Demuestre (asumiendo que existen las raíces de las que se habla en los incisos correspondientes) que:

a) La ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ posee una cantidad par de soluciones reales, que a lo sumo son 2.

b) La ecuación $e^x - 1 = \ln(1+x)$ no puede poseer 3 raíces reales.

c) Si $d : [a;b] \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable y satisface $d''(x) = e^x d(x)$, entonces d no puede tener un máximo local positivo, ni un mínimo local negativo. Si satisface además $d(a) = d(b)$!‘$0 \Rightarrow d(x) \equiv 0$.

d) La ecuación $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ posee a lo sumo una raíz real.

e) Los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ están situados sobre la curva cuya ecuación es $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

f) Si f es una función impar derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces para todo número positivo k, existe un $c \in (-k;k)$ tal que $kf'(c) = f(k)$.

g) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitamente diferenciable y tal que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f(0) = f(1) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$$

entonces existe algún $x \in (0;1)$ tal que $f^{(n+1)}(x) = 0$.

h) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > f(x)$ para todo valor real de x y que satisface $f(x_0) = 0$, se cumple que $f(x) > 0, \ \ \forall x > x_0$.

Ejercicio 7.

Determine los coeficientes a, b, c, d tales que:

a) La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $x = -1$ cuyo valor sea 10 y un punto de inflexión en $(1; -6)$.

b) $f'(x) = x \cos x$ si $f(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d) \operatorname{sen} x$.

Ejercicio 8.

¿Para qué valores de a y b, la curva $y = ax^2 + bx^3$ posee en $(1;3)$ un punto de inflexión?

Ejercicio 9.

Construye el gráfico aproximado de las funciones:

a) $y = x^4 - 2x^2$

b) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

d) $y = e^{1/x}$

Ejercicio 10.

Indique el aspecto que ofrece el gráfico de una función en un intervalo (a, b) si se sabe que en ese intervalo se cumple:

a) $y > 0, y' > 0, y'' > 0.$

b) $y > 0, y' < 0, y'' > 0.$

c) $y < 0, y' > 0, y'' > 0.$

d) $y > 0, y' < 0, y'' < 0.$

Ejercicio 11.

(Euler, 1755): Estudia las funciones:

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$
$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

hallando sus valores extremos, intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de su gráfico. Localiza los ceros por el método de Newton y Halley. Haz un gráfico aproximado de tales curvas.

Ejercicio 12.

a) Pruebe que $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \dfrac{1}{n \ln n}$ para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b) ¿ Será la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ convergente ?

Ejercicio 13.

Pruebe que la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

es creciente $(-\infty; -1)$ y en $(0; +\infty)$.