INTRODUCCIÓN
AL
ANÁLISIS MATEMÁTICO

Concepción Valdés Castro
Carlos Sánchez Fernández

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
2008

ÍNDICE

PRÓLOGO

"Cuando se introduce en el momento y lugar incorrecto,
la buena lógica puede ser el peor enemigo de la buena enseñanza."
George Polya (1887-1985)

"Sin los conceptos, los métodos y los resultados encontrados
y desarrollados por las generaciones precedentes,
remontándose hasta la antigüedad clásica griega,
no es posible comprender ni los objetivos
ni los logros de las matemáticas en los últimos cincuenta años."
Hermann Weyl (1885-1955)

Los orígenes de lo que hoy denominamos Análisis Matemático se encuentran en la matemática helena clásica, principalmente en la obra de Arquímedes. El gran geómetra de Siracusa supo introducir una original metodología para resolver difíciles problemas acerca del cálculo de magnitudes geométricas y físicas. Sin embargo no es hasta el siglo XVII cuando, apremiados por los problemas científico-técnicos de la época, los sabios se aprestan a la búsqueda de una ciencia general para la resolución de los nuevos problemas asociados al estudio de la variabilidad y del movimiento. En diversas regiones del mundo más desarrollado entonces, se aplicaron técnicas nuevas y se obtuvieron sorprendentes resultados. Todos estos descubrimientos fueron asimilados y sistematizados en la obra de quienes se consideran los fundadores del Cálculo, el inglés Newton y el germano Leibniz.

Los pioneros del Cálculo resolvieron con gran éxito problemas geométricos y mecánicos ayudados por los llamados "*algoritmos de diferenciación e integración*". En esa época, aún no se había enunciado el concepto función y estos algoritmos eran aplicados a fórmulas que relacionaban magnitudes variables. Será en pleno siglo XVIII, cuando el magnífico Leonhard Euler coloque el estudio de las funciones como el objetivo fundamental del Análisis Matemático y a las sumas infinitas como el instrumento expedito para representar y manipular las funciones.

Durante toda esta primera etapa, se consideraban evidentes muchas propiedades de los conjuntos numéricos y de las funciones definidas sobre ellos, las cuales hoy constituyen teoremas fundamentales del Análisis Matemático. Así aparecieron muchos resultados correctos y sumamente útiles, pero también se evidenciaron numerosas paradojas y ejemplos "excepcionales" que ponían en entredicho los resultados obtenidos. Esta situación conllevó a que, de forma gradual, surgieran críticas y cuestionamientos de estos usos indiscriminados, que comenzara una reestructuración de los fundamentos del Análisis que abarcó todo el siglo XIX y que convirtió a esta rama de la Matemática en un cuerpo de conocimientos sólido y lógicamente estructurado.

La lección primordial que nos proporciona la historia de la Matemática es que el rigor penetró en el Análisis, como muestra de su mayoría de edad, por necesidades intrínsecas a su desarrollo. En contraste con ello, la enseñanza tradicional del Cálculo suele adoptar un alto grado de formalidad y para ello se ve obligada a violentar casi totalmente la génesis de los conceptos y resultados fundamentales. Como consecuencia de lo anterior, con bastante frecuencia, al estudiante actual, se le trasmite el Análisis en una forma coherente, rigurosa y formal, pero que suele resultar fría y esquemática, desligada de los problemas que le dieron origen, sin una discusión reveladora de la dinámica de contradicciones que motivaron y estimularon a los científicos de cada época. Nuestra experiencia nos indica que esta forma de enseñanza no motiva al novato y es incapaz de suavizar el tránsito de los estudios secundarios a los universitarios, conduciendo a una apropiación poco provechosa de los conocimientos básicos del análisis matemático.

El presente texto pretende familiarizar al estudiante con aquellas herramientas analíticas utilizadas en la etapa de gestación y consolidación del Cálculo, con un espíritu cercano al que animó al maestro de todos los matemáticos, Leonhard Euler. Con ello, pretendemos preparar a los estudiantes para la asimilación de las ideas abstractas, *mostrándoles tanto los errores como las insuficiencias de las demostraciones que permanecieron largo tiempo inadvertidas y anunciando que los métodos nuevos los harán desaparecer*, como requiriera el gran matemático y maestro francés Charles Hermite. Por ello apelamos, sin formalizarlas, a las nociones de número entero, fraccionario y real que los estudiantes han adquirido en la enseñanza precedente. Las nociones de infinitesimal, infinitamente grande o de límite las utilizaremos de manera informal, siempre recurriendo a la percepción espontánea de las mismas, pero sin dejar de mostrar claramente las insuficiencias y riesgos de apoyarse únicamente en la intuición.

En el primer capítulo, *Funciones Elementales*, se estudian las funciones potencia, exponencial, logarítmica, trigonométricas y sus inversas. Se describe el "cómo" y el "para qué" surgieron nociones tales como potencia con exponente "arbitrario", logaritmo de un número, seno de un ángulo y algunas de los algoritmos introducidos para facilitar los cálculos. Posteriormente, en forma heurística, se deducen los desarrollos en series de potencias de estas funciones elementales.

El segundo capítulo, *Introducción al Cálculo Diferencial*, está dedicado a estudiar las ideas básicas de la diferenciación, como técnica de resolución de problemas geométricos y físicos. Se inicia con la presentación de un conjunto de problemas generadores, relacionados fundamentalmente con la determinación de tangentes a las curvas, la búsqueda de extremos y la noción física de velocidad. Las nociones de diferencial, tangente a una curva y sus relaciones, así como las reglas más elementales de diferenciación las explicamos mediante comentarios de fragmentos del primer libro de cálculo diferencial, debido al Marqués de L'Hôpital, *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, pero la operatoria de diferenciación está inspirada en las ideas contenidas en el *Cálculo Diferencial* de Euler.

En el tercer y último capítulo, *Introducción al Cálculo Integral*, comenzamos con algunos de los problemas de cuadraturas donde aparecieron las primeras nociones relacionadas con la integración. Una vez expuestas las ideas geométricas con las cuales Newton y Leibniz revelaron la relación entre los dos problemas básicos del cálculo infinitesimal: *la determinación de tangentes* y *el hallazgo de cuadraturas*, se define la integral mediante la fórmula fundamental del cálculo y se justifican sus propiedades básicas utilizando las correspondientes propiedades para la derivada. Este capítulo culmina con la discusión de algunos de los problemas más famosos que surgieron durante la etapa de la infancia y adolescencia del cálculo.

El libro contiene también unos *Preliminares*, donde se presentan informalmente algunas de las propiedades básicas de los números, así como el método de demostración conocido como *principio de inducción matemática*. En aras de facilitar al lector el incremento de su cultura matemática y una visión más humanista de la ciencia hemos añadido al final del libro notas biográficas de los principales protagonistas en la gestación del análisis matemático.

Esta obra es el resultado de la experiencia acumulada por los autores durante muchos años dedicados a la ardua, aunque incitante, tarea de introducir a los alumnos en los rudimentos del Análisis Matemático y, por tanto, las influencias recibidas han sido muchas y muy variadas. Hemos consultado disímiles libros de texto, intercambiado con profesores partidarios de diferentes tendencias pedagógicas, pero sobre todo la interacción con los estudiantes nos ha convencido de la necesidad de buscar un camino que facilite la asimilación de los conceptos por un grupo más amplio de principiantes, que los motive, descubriéndoles cómo, porqué y para qué, surgen los nuevos conceptos y teorías y dónde reside el entrañable encanto de esta generosa ciencia.

Además de los tratados de **Leonhard Euler** *Introducción al Análisis de los Infinitos*, *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral*, ha sido una fuente de inspiración el primer libro de Análisis que encontramos redactado siguiendo presupuestos didácticos muy semejantes a los nuestros, escrito por dos profesores suizos

Hairer, E., Wanner, G. (1991) *Analysis by its History*, Ed. Springer, New York-Berlín.

Una buena referencia para los lectores interesados en profundizar en los aspectos históricos es

Ribnikov, K. (1987) *Historia de las Matemáticas*, Ed. Mir, Moscú.

Pueden encontrarse más detalles sobre el desarrollo del concepto función y su relación con el surgimiento del cálculo en

Sánchez Fernández, C., Valdés Castro, C. (2007) *Las Funciones. Un paseo por su historia*, Ed. Nivola, Madrid.

Muchos textos originales de las obras clásicas son accesibles en las bibliotecas digitales:

http://gallica.bnf.fr

http://www.numdam.org

http://historical.library.cornell.edu/math/index.html

http://www.hti.umich.edu

Agradecimientos

En todo proyecto pedagógico, además de la literatura docente o científica disponible ejercen una influencia significativa los intercambios de opiniones y discusiones de trabajo con los colegas. Nuestro más sincero reconocimiento a aquellos compañeros del Departamento de Matemática de la Universidad de La Habana con los que, en distintas épocas, hemos mantenido provechosas conversaciones y, en especial, al colectivo que participa en nuestro *Seminario de Cultura Matemática*. Especialmente deseamos expresar nuestra gratitud a la Profesora Sofía Behar Jenquín por su lectura atenta del manuscrito y sus comentarios que han permitido corregir algunos de los gazapos que contenía. Finalmente, quisiéramos agradecer anticipadamente cualquier señalamiento crítico o sugerencia que se nos haga llegar para el perfeccionamiento de esta obra.

Los autores

Preliminares.

1. El dominio numérico del cálculo.

El uso del término "número" se ha ido extendiendo a través de la historia. En los comienzos, número era una reunión de unidades, de manera que ni siquiera el uno caía bajo la denominación de número. La necesidad de repartir cierta unidad, particularmente una herencia entre varios hijos, motivó la introducción de las fracciones. La consideración en algunos pueblos de un sistema de numeración posicional dio pie al establecimiento de algoritmos de cálculo sencillos, con las cuatro operaciones fundamentales: suma, producto, diferencia y división. Bajo la presión de querer realizar la práctica del cálculo con todas las operaciones, el uso de la palabra número se amplía. Los mayas en América parece que fueron los primeros en utilizar el cero, pero la consideración de los números negativos que aparecían en algunas operaciones comerciales, tuvo muchos obstáculos. Por ejemplo, los calculistas indios de la edad antigua hicieron un uso bastante ligero de los números negativos. Una deuda era significada por un número negativo y las reglas de cálculo se extendían sin modificación. Por esta razón, para algunos matemáticos, no sólo de la India, los números con signo negativo no necesitaban más carta de presentación. Pero en la realidad, como solución de problemas de índole concreta práctica, no eran muchas las situaciones que justificaban darle el mismo tratamiento que a los números positivos (enteros o fraccionarios).

En 1585, el ingeniero y contable holandés **Simon Stevin** da la idea que imperará durante tres siglos, al proponer una nueva definición:

Número es aquello con lo que se explica la magnitud de alguna cosa.

Aquí cabía la consideración del número negativo para designar la magnitud de una deuda. Fue también Stevin, en un libro muy popular entre los calculistas del renacimiento europeo, quién extendió el uso de la representación decimal de los números fraccionarios e irracionales, incluyendo los negativos.

Un *nuevo cálculo* surgió con la preocupación de explicar matemáticamente la manipulación de las magnitudes variables que se realizaban en la Mecánica, y durante el siglo XVIII se elevó a la categoría de método esencial para la aplicación de la matemática al conocimiento de la naturaleza, convirtiéndose en un conjunto de técnicas enormemente flexibles. Pero, ¿qué pasaba con los números negativos y los irracionales? Estrictamente no se podían situar bajo la definición de número como proporción entre magnitudes variables de la mecánica. Esto se discutió especialmente en Gran Bretaña a principios del siglo XIX. Es interesante notar que esta discusión se mantenía por un grupo de puristas, pero que en realidad hacía algún tiempo se disponía de una perfecta y utilísima interpretación geométrica de los números reales (fraccionarios e irracionales) como puntos de una recta.

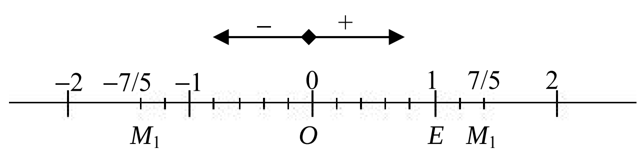

Fig.1

En esta interpretación (ver Fig.1) se fijaban sobre la recta dos puntos, el situado más a la derecha denotaba el origen O y el segmento OE se suponía la unidad de longitud. Entonces a O le correspondía el cero y a E el uno, seguidamente se situaban los enteros positivos a la derecha, contando tantas unidades como designara el número. Para ubicar un número fraccionario m/n se dividía el segmento unidad OE en n partes iguales y se consideraba el segmento OM_1 formado por m de esas partes, entonces a m/n le corresponde el punto M_1 (en la Fig.1 $m=7$ y $n=5$). Los números negativos se colocaban de igual forma pero en la dirección desde O hacia la izquierda. Finalmente los números irracionales se concebían a través de representaciones decimales y éstas constituían una vía aceptable para su localización aproximada. De esta forma quedaban representados sobre un eje numérico todos los números racionales e irracionales, es decir, los **números reale**s.

El problema de los **números complejos** sí que fue mucho más escandaloso. Desde el siglo XVI la solución de ecuaciones de tercer grado hizo necesaria la determinación de reglas de cálculo que mostraran como, al manipular los llamados "imaginarios", podrían aparecer números reales. Así se vieron en la obligación de establecer algoritmos de cálculos idóneos para operar con estos "números". Estos algoritmos se basaban en la manipulación de las expresiones imaginarias $x+iy$ utilizando las propiedades usuales de las operaciones, pero siempre teniendo presente la propiedad básica de la unidad imaginaria: $i^2=-1$. No fue hasta principios del siglo XIX que se elaboró una interpretación geométrica plausible de estos números, por cierto muy simple. La idea formulada por **Carl Gauss**, fue situar la parte real x del número complejo $z=x+iy$ en el eje de abscisas y la parte imaginaria y en el eje de ordenadas, de manera que a cada número complejo z le corresponde un único punto del plano (x,y) y viceversa.

Así, el campo numérico del cálculo en el siglo XIX era representado geométricamente como el conjunto de todos los puntos del plano. Los números reales se identificaban con aquellos números complejos cuya parte imaginaria era igual a cero y, por tanto, eran ubicados sobre el eje de abscisas, denominado por ello **eje real**. Sobre el eje de ordenadas o **eje imaginario** se colocaban los números cuya parte real era cero.

Un elemento que poco a poco se hizo inherente al cálculo numérico fue la consideración del módulo o valor absoluto de un número tanto real como complejo. Si $z=x+iy$ es un número complejo cualquiera, entonces se define el **valor absoluto** o **módulo** de z como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

donde se toma el valor positivo de la raíz cuadrada. Geométricamente $|z|$ representa la distancia desde el origen de coordenadas al punto del plano (x,y) que representa a z.

En el caso particular que z sea real, es decir, $y=0$, entonces obtenemos

$$|x| = |x+0i| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x\ , & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Una de las propiedades más utilizada del módulo es la llamada **desigualdad triangular**, debido a su interpretación geométrica:

Para todo par de números complejos $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$, se cumple:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \qquad (1)$$

En la Fig.2 se puede observar que $|z_1|$ es la longitud del segmento OA y $|z_2|$ coincide con la de AB. Por otra parte el número z_1+z_2 corresponde al punto B, de modo que $|z_1+z_2|$ representa la longitud de OB. De este modo vemos que la desigualdad (1) es una reformulación de la conocida propiedad de la geometría elemental:

En un triángulo cualquiera la longitud de uno de sus lados es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

En el caso particular de los números reales muchas de las propiedades se obtienen de forma sencilla a partir de la definición. Como en este primer curso de cálculo sólo nos interesamos por el estudio de las funciones definidas sobre la recta real, estudiaremos algunas propiedades del módulo y justificaremos la desigualdad triangular solo para los números reales y, para el caso general de los números complejos, nos contentaremos con la visualización geométrica. Veamos algunas de estas propiedades como ejemplos:

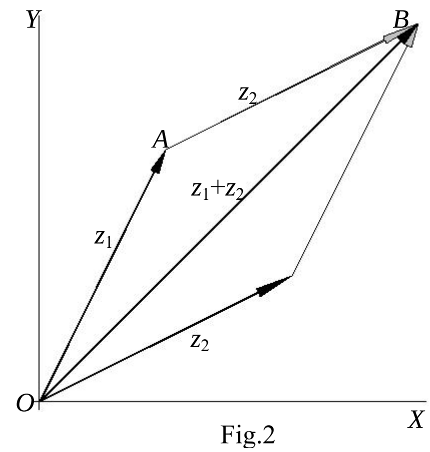

Fig.2

Ejemplo 1. Para todo número real x se cumple que

$$-|x| \le x \le |x|.$$

En efecto, para $x \ge 0$, $|x| = x$ por lo que en la parte derecha se cumple la igualdad y en la izquierda la desigualdad estricta (si $x \ne 0$). Análogamente, cuando $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y ahora será la parte izquierda una igualdad y la derecha una desigualdad estricta.

Ejemplo 2. Comprobemos que para x real, se cumple

$$|x| \le a \text{ si y sólo si } -a \le x \le a.$$

Supongamos que $|x| \le a$, entonces $-|x| \ge -a$, y usando el ejemplo 1, obtenemos

$$-a \le -|x| \le x \le |x| \le a.$$

Recíprocamente, supongamos que $-a \le x \le a$. Si $x \ge 0$, entonces $|x| = x$ y por tanto, $|x| \le a$. Para $x < 0$, se tiene que $|x| = -x$, pero $-x \le a$, por tanto, $|x| = -x \le a$, lo que completa la prueba.

Las desigualdades de los ejemplos anteriores permiten justificar sin dificultad la desigualdad triangular para números reales. En efecto, verifiquemos (1) para dos números reales cualesquiera x y u. Apliquemos la desigualdad del ejemplo 1 a estos dos números, entonces

$$-|x| \le x \le |x| \ , \ -|u| \le u \le |u|.$$

Si sumamos ordenadamente estas desigualdades, obtenemos:

$$-|x| - |u| \le x + u \le |x| + |u| \quad \text{o} \quad -\left(|x| + |u|\right) \le x + u \le \left(|x| + |u|\right).$$

Usando el resultado del ejemplo 2, esta última desigualdad se convierte en

$$|x + u| \le |x| + |u|,$$

así hemos justificado la desigualdad triangular para x y u reales.

Veamos algunos otros ejemplos del trabajo con el valor absoluto.

Ejemplo 3. Encuentra los valores reales de x que satisfacen la desigualdad

$$|2x + 3| > 5.$$

Cuando $2x+3=0$ no puede satisfacerse la desigualdad.

Si $2x+3>0$, entonces debemos resolver la inecuación $2x+3>5$. En tal caso todos los x tales que $x>1$ son solución.

Para $2x+3<0$, la desigualdad se transforma en $-(2x+3)>5$, es decir, $2x+3<-5$, lo que implica $x<-4$.

De modo que la desigualdad pedida se satisface para todos los números reales menores que -4, o para todos los mayores que 1.

Ejemplo 4. Resolvamos la ecuación

$$|x| = x+1.$$

Para $x\geq 0$ la ecuación se convierte en $x=x+1$, que no tiene solución.

Si $x<0$, entonces la ecuación dada se transforma en $-x=x+1$, que tiene como solución $x=-1/2$. Entonces, la ecuación pedida posee una solución única: $x=-1/2$.

Ejercicios

1. Prueba que para cualesquiera números reales x y u se verifica:

a) $|x\cdot u| = |x||u|$,

b) $|x-u| \geq \big||x|-|u|\big| \geq |x|-|u|$,

2. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $|5x-4|<1$, b) $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$, c) $|x^2-5x| > |x^2|-|5x|$.

3. Determina para qué valores de x serán ciertas las igualdades siguientes:

a) $|x^2-4x+3| = -(x^2-4x+3)$, b) $\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| = \dfrac{x-3}{x+3}$,

c) $|(x^4-8)-(x^2+4)| = |x^4-8|-|x^2+4|$.

2. El método de prueba de la inducción completa.

Las ideas de que a cada uno de los números naturales 1, 2, 3, etc., siempre sigue otro único, y que esta cadena no tiene fin, están desde muy pronto en la mente de cada persona. Pensar en ellos nos puso por primera vez en contacto con la idea de infinito. Pero, ¿cómo saber si una propiedad se cumple para los infinitos números naturales? Comencemos con dos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1. Supongamos que queremos calcular la suma de los primeros n números naturales.

Primero observamos el comportamiento de la suma para algunos valores de n:

$$1+2=3=\frac{2.3}{2}, \qquad 1+2+3=6=\frac{3.4}{2},$$

$$1+2+3+4=10=\frac{4.5}{2}, \qquad 1+2+3+4+5=15=\frac{5.6}{2},\ldots$$

lo que nos induce a sospechar que para todo *n*, se debe cumplir la igualdad

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Pero, la comprobación de que es correcta para unos cuantos valores de *n*, ¿será una garantía de su validez para todo número natural?

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2. El famoso matemático francés del siglo XVII **Pierre de Fermat**, después de comprobar que

$$2^{2^1}+1=5, \quad 2^{2^2}+1=17, \quad 2^{2^3}+1=257, \quad 2^{2^4}+1=65537,$$

eran números primos afirmó que *todos los números de la forma* $2^{2^n}+1$ *eran primos*. Sin embargo, en el siglo XVIII el ilustre matemático **Leonhard Euler** encontró que

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$$

y por tanto, no era un número primo. Hasta el momento no se ha podido demostrar si existen otros números de Fermat, es decir números de la forma $2^{2^n}+1$, que sean primos para $n>5$.

La suposición de la validez de cierto resultado matemático, después de su verificación en algunos casos particulares, es usual en el trabajo matemático y se denomina *inducción* o *generalización*. Sin embargo, el segundo ejemplo nos muestra el riesgo que significa la aceptación de la validez del resultado general sin una justificación.

La inducción matemática es un método adecuado para probar la validez de una propiedad para todos los números naturales o para todos a partir de alguno dado. La idea del principio de inducción y su manejo queda clara a partir del siguiente experimento:

Colocamos sobre una mesa las fichas de dominó de pie y en fila, un poco separadas, pero de tal modo que, si cae una de ellas, ésta empuja y hace caer la siguiente. Entonces si golpeamos la primera de las fichas obligatoriamente caerán todas, por grande que sea la cantidad que hayamos colocado.

Enfaticemos que para garantizar la caída de todas las fichas debemos estar seguros de que:

1) la primera cae,

2) la forma de colocación asegura que toda ficha, al caer, golpea la siguiente lo suficiente para que también caiga.

Los números naturales se pueden concebir como las fichas de dominó y el **principio de inducción matemática** es un medio adecuado para asegurarnos de que una determinada propiedad, cuyo enunciado depende de los números naturales, es correcta para todos ellos.

Supongamos que:

1) Nos aseguramos de que la propiedad se satisface para el primer elemento, es decir, que es cierta para $n=1$ (la primera ficha es golpeada).

2) Con la suposición de que la propiedad es cierta para un número *k*, probamos que también es cierta para el número $k+1$ (al caer una ficha derriba la siguiente).

Entonces, como en el dominó, podemos afirmar que la propiedad será válida para todo número natural.

Observa que en 2) no estamos afirmando que la propiedad sea cierta para k, solo decimos que si lo es, entonces también lo será para $k+1$. A esta suposición se le denomina **hipótesis de la inducción**.

Ilustremos este método probando la fórmula encontrada en el ejemplo 1.

Ejemplo 1 (continuación).

1) La validez para $n=1$ ya fue comprobada.

2) Supongamos que la fórmula es cierta para $n=k$, es decir que:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2} \tag{1}$$

y justifiquemos que también es cierta para $k+1$, esto es, debemos probar que se cumple

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Si en ambos miembros de (1) sumamos $(k+1)$, obtenemos

$$\left(1+2+3+...+k\right)+\left(k+1\right)=\frac{k(k+1)}{2}+\left(k+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Esto es precisamente lo que se quería probar. De esta forma hemos *demostrado por inducción* la fórmula conjeturada.

Veamos algunos otros ejemplos:

Ejemplo 3. Encontremos una fórmula análoga para la suma de los n primeros cubos

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3.$$

Para los primeros valores de n obtenemos

$$1^3=1=1^2,\quad 1^3+2^3=9=3^2,\quad 1^3+2^3+3^3=36=6^2,$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2,\quad 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=15^2.$$

Notamos que aparecen los cuadrados de 1, 3, 6, 10, 15 y puesto que en el ejercicio 1 probamos que estos son los número obtenidos al sumar los primeros enteros, entonces surge la conjetura:

$$¿1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2?$$

Probemos esta igualdad por inducción:

1) Para $n=1$ ya fue comprobada antes.

2) La hipótesis de la inducción es:

$$1^3+2^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2,$$

entonces debemos asegurarnos que es también cierta para $k+1$, es decir, que tiene lugar

$$1^3+2^3+...+k^3+\left(k+1\right)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Sumando $(k+1)^3$ en ambos miembros de la hipótesis de la inducción obtenemos

$$\left[1^3+2^3+...+k^3\right]+\left(k+1\right)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+\left(k+1\right)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2,$$

con lo que se concluye la prueba de la fórmula conjeturada.

Ejemplo 4. Las expresiones de los ejemplos 1 y 3 motivan la pregunta siguiente ¿Existirá una expresión semejante también para la suma de los cuadrados?

La suma de los *n* primeros números naturales tiene la forma:

$$\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}=a_1n+a_2n^2$$

y las de los cubos es:

$$\left[\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}\right]^2=\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^4}{4}=c_1n+c_2n^2+c_3n^3+c_4n^4\,.$$

Una conjetura un tanto audaz, pero no inmotivada, puede ser la siguiente: *Existen tres números* b_1, b_2, b_3*, tales que, para cada n, se cumple*

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=b_1n+b_2n^2+b_3n^3\,.$$

Para responder a la pregunta, ante todo debemos encontrar los números b_1, b_2, b_3 adecuados. Si queremos que la fórmula sea cierta para $n=1$, $n=2$, $n=3$, entonces debe cumplirse que

$$1^2=b_1+b_2+b_3\,,$$
$$1^2+2^2=2b_1+2^2b_2+2^3b_3\,,$$
$$1^2+2^2+3^2=3b_1+3^2b_2+3^3b_3\,.$$

La resolución de este sistema de ecuaciones proporciona:

$$b_1=\frac{1}{6};\quad b_2=\frac{1}{2};\quad b_3=\frac{1}{3}\,.$$

Es decir, la fórmula a demostrar se concreta como:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}\,.$$

Aplicamos el principio de inducción para probarla:

1) Las condiciones con que la obtuvimos nos garantiza que sea cierta para $n=1$.

2) Supongamos que es cierta para $n=k$:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{3},$$

de aquí se obtiene:

$$\left[1^2+2^2+3^2+...+k^2\right]+(k+1)^2=\left[\frac{k}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{3}\right]+(k+1)^2$$

y basta con comprobar que el segundo miembro de la igualdad anterior es igual a:

$$\frac{k+1}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{(k+1)^3}{3}.$$

Observaciones:

1) En el uso del método de prueba por inducción, los dos pasos son esenciales. En el ejemplo 2 tuvimos una muestra histórica del peligro de evadir el segundo paso del método. Pero también es importante el primer paso, lo que se evidencia del ejemplo siguiente:

Ejemplo 5. "Probemos" que todo número natural n es igual a su sucesor $n+1$, mediante el razonamiento siguiente:

Supongamos que la afirmación se cumple para $n=k$, es decir,

$$k=k+1,$$

entonces, sumando 1 en ambos miembros, obtenemos

$$k+1=k+2,$$

lo que demuestra la validez para $n=k+1$.

Sin embargo, la afirmación "probada" significaría que ¡todos los números naturales serían iguales! El error consistió simplemente en que no verificamos el primer paso del método de inducción, el cual requiere del cumplimiento de la igualdad $1=2$.

2) El primer paso del método de inducción puede realizarse para cualquier número natural $m>1$. Entonces, tras aplicar también el paso 2) del método, obtendremos que la propiedad se cumple para los números naturales mayores o iguales que m.

Ejemplo 6. Analicemos para qué valores de n se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2.$$

Por simple sustitución se comprueba que ella se cumple para $n=1$, es falsa para $n=2,3,4$ y vuelve a ser cierta para $n=5,6,\dots$ así que podemos conjeturar que se cumplirá para todo $n\geq 5$. Como para $n=5$ ya fue probado, pasemos al segundo paso de la inducción:

$$\text{Si } 2^k > k^2, \text{ entonces } 2^{k+1} > \left(k+1\right)^2.$$

Multiplicando por 2 ambos lados de la desigualdad de la hipótesis de inducción se obtiene

$$2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2.$$

Pero $(k+1)^2=k^2+2k+1$, luego bastaría verificar que se cumple la desigualdad $k^2\geq 2k+1$. Pero esta última desigualdad puede rescribirse en la forma $k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$, la cual es cierta para valores de k tales que $(k-1)^2>2$, esto es $k\geq 3$.

De esta forma hemos probado la desigualdad pedida para todos los números naturales $n\geq 5$.

3) A veces en el segundo paso de la inducción se demuestra la propiedad para el valor $n=k+1$, suponiendo su validez para dos términos anteriores $n=k-1$ y $n=k$. En tal caso, la propiedad en el primer paso debe probarse para los dos primeros valores de n que sean de nuestro interés.

Ejemplo 7. Supongamos que

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3 \quad , \qquad a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} \qquad (2)$$

y probemos entonces que

$$a_n = 2^{n-1} + 1 .$$

Para $n=1$ y $n=2$ la propiedad es válida pues $a_1=2=1+1$ y $a_2=3=2+1$.

Supongamos que es cierta para $n=k-1$ y $n=k$, esto es, que se cumplen las igualdades

$$a_{k-1} = 2^{k-2} + 1 \quad \text{y} \quad a_k = 2^{k-1} + 1 \quad (k \geq 2),$$

entonces, aplicando la relación de recurrencia en (2), obtenemos que:

$$a_{k+1} = 3(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) = 3 \cdot 2^{k-1} + 3 - 2^{k-1} - 2 = 2^k + 1$$

lo que prueba la fórmula pedida.

4) Existe otra forma de enunciar la segunda parte del principio de inducción matemática:

Dado que la propiedad se cumple para $n \leq k$, probar que es cierta para $n=k$.

Aunque este enunciado puede parecer más restrictivo que el otro se puede probar que ambos son equivalentes, pero ello se sale de los objetivos de este curso.

Ejercicios.

1. Demuestra utilizando el principio de inducción matemática:

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + \left(2n-1\right)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$,

b) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Encuentra una fórmula concisa, válida para todo número natural, que exprese las sumas

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$,

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1)n$,

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + ... + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

3. Demuestra que con billetes de 5 y 3 pesos es posible pagar cualquier cantidad mayor o igual a 8 pesos.

4. Prueba las desigualdades siguientes:

a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ para $n > 1$,

b) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, para $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $n > 1$,

c) $2^{n-1}\left(a^n + b^n\right) > \left(a+b\right)^n$ para todo número natural *n*,

d) $\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{6}{5} \cdot ... \cdot \dfrac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n+1}$.

5. Investiga para qué valores naturales de *n* se cumple la desigualdad $3^{n-1} > n^3$.

6. Prueba por inducción que, para cada *n*, el número $2^{2n}+15n-1$ es un múltiplo de 9.

Ejercicios complementarios

1. Analiza si existen valores de *x* para los cuales se cumplan las igualdades siguientes:

a) $|x+7|=5+|x|$, b) $|x+7|+|x-7|=|x|+7$, c) $|x|=|x+4|$.

2. Demuestra que para cualquier *n*-uplo de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se cumple que:

a) $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$,

b) $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|x_n|$,

c) $\dfrac{|x_1+x_2+\ldots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\ldots+x_n|} \le \dfrac{|x_1|}{1+|x_1|}+\dfrac{|x_2|}{1+|x_2|}+\ldots+\dfrac{|x_n|}{1+|x_n|}$.

3. Encuentra una fórmula para expresar el producto:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

para todo número natural $n \ge 2$.

4. Sea *b* un número natural. Prueba por inducción la validez de la afirmación siguiente:

Para cada número natural n existen números naturales q y r tales que

$$n = qb + r \quad \text{y} \quad 0 \le r < b.$$

5. Si *r* es un número real diferente de uno, prueba que para todo número natural *n* se cumple:

$$1+r+r^2+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

6. Fijado el número natural $p>3$, encuentra un polinomio $T(n)$ de la forma

$$t_1 n + t_2 n^2 + t_3 n^3 + \ldots + t_p n^p + t_{p+1} n^{p+1}$$

tal que

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = T(n)$$

para cada *n* natural. (Con este ejercicio se generalizan los resultados hallados en el texto para $n=1,2,3$).

7. Prueba que:

a) Un número de Fermat es igual al producto de todos los anteriores más 2.

b) Ningún número de Fermat puede ser la suma de dos números primos.

c) Dos números de Fermat distintos siempre son primos entre sí (es decir, no tienen ningún factor común).

CAPÍTULO I
FUNCIONES ELEMENTALES

A mediados del siglo XVIII, el maestro de todos los matemáticos, **Leonard Euler** escribió el libro *Introducción al Análisis de los Infinitos*, con el objetivo que sirviera de preparación a aquellos interesados en dominar la principal herramienta matemática del momento: el **Análisis Infinitesimal**. En el prefacio de esta obra Euler afirma: *me he extendido sobre todo en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del Análisis Infinitesimal*. De esta forma determina una nueva rama de la matemática diferente a las ramas clásicas de la geometría y el álgebra. Esta nueva rama tendría como objeto el análisis de las funciones y el estudio de los procesos infinitos.

El primero en utilizar el término función fue **Gottfried Leibniz,** sin embargo, dio a ese término un significado particular, más bien geométrico, muy lejano al concepto formalizado que es usado en la actualidad. Serán los hermanos **Jacob y Johann Bernoulli** quienes generalicen una noción de *función* con un significado próximo al actual. Euler precisará y asumirá esta definición de función: *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes.* Además aclara cuáles son las operaciones admisibles para la formación de las expresiones analíticas: las operaciones algebraicas habituales y varios procedimientos trascendentes que incluyen el paso al límite, aunque no da una definición explícita de esta noción.

Todo el primer tomo de esta obra de Euler está dedicado al estudio sistemático y detallado de lo que hoy denominamos *funciones elementales*: polinómicas, racionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y otras funciones trascendentes elementales. El instrumento básico de Euler en el estudio de las funciones trascendentes será la escritura de estas funciones mediante "*polinomios de grado infinito*", es decir, las series de potencias.

En este capítulo pretendemos seguir el principio euleriano de comenzar el estudio del Cálculo Diferencial e Integral por su objeto de estudio fundamental: las funciones analíticas. Las necesidades del desarrollo, primero del propio Análisis Matemático y posteriormente de otras ramas de la Matemática, motivaron la evolución de la definición euleriana de función, convirtiéndose en un concepto formal y sumamente abstracto. Para nuestros objetivos inmediatos la definición de Euler es suficiente. Ninguna otra será necesaria.

I.1. Fórmula del binomio y polinomio de interpolación

Es costumbre desde la enseñanza secundaria utilizar la notación

$$a\cdot a=a^2,\ a\cdot a\cdot a=a^3,\ a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4,\ \dots\ ,$$

en general escribimos: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ veces}}$.

La aparición de esta notación fue gradual, cristalizó en la obra de **René Descartes** y fue generalizada por **Isaac Newton**, sin embargo, conservamos algunas de las denominaciones más antiguas: *cuadrado* para a^2 (área del cuadrado de lado a) y *cubo* para a^3 (volumen del cubo de lado a). Es una notación apropiada para reflejar las propiedades básicas de la potenciación. Por ejemplo, se ve fácilmente que, $a^2\cdot a^3=a^5$, $a\cdot a^{n-1}=a^n$ y, en general, se puede demostrar utilizando el principio de inducción matemática que (ejerc.1)

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m,\ \text{ para }\ n,m=1,2,\dots. \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que $1\cdot a^n=a^n$, para que se mantenga (1), es natural utilizar la notación

$$a^0 = 1,$$

ya que, entonces tendríamos $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$.

Notemos que de (1) se deduce inmediatamente la propiedad:

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}, \text{ para } m \text{ y } n \text{ enteros positivos o cero.}$$

Además, el valor de a^n, para $a > 1$, crece con n y decrece si $a < 1$.

En lo que sigue nos proponemos encontrar una fórmula para la expresión $\left(a+b\right)^n$, donde n es un número entero mayor o igual a cero. Veamos algunos casos particulares:

$$\left(a+b\right)^0 = 1,$$

$$\left(a+b\right)^1 = a+b,$$

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$\left(a+b\right)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3, \ \ldots$$

……………………………………………..

Ordenemos los coeficientes en las expresiones anteriores en forma de triángulo, el denominado **triángulo de Pascal** (Fig.1), en el cual *cada número es la suma de los dos contiguos situados en la fila superior*. Queremos encontrar una ley general para estos coeficientes. No es difícil observar que la primera diagonal (desde la izquierda) está compuesta solo por "1s" y la segunda por 1, 2, 3, …, es decir corresponde al número "n" de la fila que se esté considerando. La tercera diagonal está formada por los números 1, 3, 6, 10, 15, 21, …, los cuales pueden representarse en la forma $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, la cuarta está constituida por los números generados por la expresión $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ y así sucesivamente.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\iddots & & \iddots & & \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

Fig.1

El comentario anterior sugiere el resultado siguiente

> Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene
>
> $$\left(a+b\right)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots \qquad (2)$$
>
> y esta suma solo contiene un número finito de sumandos.

Justifiquemos la fórmula anterior utilizando el principio de inducción completa. Para los primeros valores de n, la validez de (2) ya fue comprobada antes. Supongamos que (2) sea cierta para $n = k-1$, es decir, que se cumple

$$\left(a+b\right)^{k-1} = a^{k-1} + \frac{k-1}{1}a^{k-2}b + \frac{(k-1)\left(k-2\right)}{1\cdot 2}a^{k-3}b^2 + \ldots + \frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i}a^{k-1-i}b^i + \ldots \qquad (3)$$

y probemos que entonces tiene que ser cierta para $n = k$.

Si multiplicamos por $(a+b)$ en ambos miembros de (3), obtenemos

$$\left(a+b\right)^k =$$

$$= a^k + \frac{k-1}{1}a^{k-1}b + \frac{(k-1)\left(k-2\right)}{1\cdot 2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i}a^{k-i}b^i + \ldots +$$

$$+ a^{k-1}b + \frac{k-1}{1}a^{k-2}b^2 + \frac{(k-1)\left(k-2\right)}{1\cdot 2}a^{k-3}b^3 + \ldots + \frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \left(i-1\right)}a^{k-i}b^i + \ldots$$

Observemos que

$$\begin{gathered}\frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i} + \frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \left(i-1\right)} = \\ \frac{(k-1)\left(k-2\right)\ldots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i}\left(k-i+i\right) = \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i}.\end{gathered} \tag{4}$$

Esto demuestra que (2) se cumple para $n=k$.

Los coeficientes en (2) suelen ser escritos en una forma más sintética

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)(n-i)\ldots 1}{\left(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i\right)\cdot\left(1\cdot 2\cdot \ldots\left(n-i\right)\right)} = \frac{n!}{i!\left(n-i\right)!},$$

donde se ha introducido el símbolo $k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$, que se denomina el **factorial** del número k. Los coeficientes anteriores son llamados **coeficientes binomiales** y también se designan por

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\left(n-i\right)!}.$$

Observaciones:

1) Solo consideraremos el símbolo $\binom{n}{k}$ cuando $k \le n$ (se define 0!=1).

2) Con esta notación de la igualdad en (4) se tiene:

$$\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i}.$$

Esta igualdad prueba que la propiedad observada para la formación del triángulo de Pascal (Fig.1) es válida para cualquier fila de este triángulo.

A continuación nos proponemos estudiar un problema, de naturaleza totalmente diferente, pero donde también harán aparición los coeficientes binomiales.

Uno de los tipos de expresiones más sencillas formadas con una variable son los llamados polinomios, esto es, cuando a la variable x se le aplican solo las operaciones de suma algebraica y producto. Más precisamente

Llamaremos **polinomio** o, más exactamente, **función polinómica** a una expresión de la forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

donde los $a_0, a_1, \ldots a_n$ son constantes numéricas arbitrarias. Cuando $a_n \neq 0$, el polinomio se dice **de grado** n.

La simplicidad de los polinomios motiva que, en diferentes contextos de la matemática y sus aplicaciones, se trate de acudir a ellos como un instrumento expedito para la resolución de problemas. Uno de las formas de llevar a cabo esta metodología es la búsqueda de un polinomio que pase por cierta cantidad de puntos dados previamente, el llamado *problema de interpolación*.

Problema de Interpolación: Dados $n+1$ puntos en el plano (x_i, y_i), $i=0,1,\ldots,n$, queremos encontrar un polinomio de grado menor o igual a n que pase exactamente por esos puntos.

El caso más sencillo, pero muy importante, es cuando las abscisas de esos puntos son equidistantes. En particular, podemos considerar

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \ldots.$$

Los métodos para la solución de este problema, surgido de los cálculos relacionados con la astronomía y la navegación marítima, aparecieron a comienzos del siglo XVII. Sin embargo, será Isaac Newton el que atacará el problema con un nuevo enfoque que en esencia perdura actualmente. Describamos el método usado por Newton mediante el caso particular $n=3$.

Escribamos el polinomio buscado utilizando para los coeficientes letras, las cuales serán las incógnitas de nuestro problema:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 .$$

Los valores $y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3$, son conocidos, así que el problema se transforma en la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a & = y_0 \\ a+b+c+d & = y_1 \\ a+2b+4c+8d & = y_2 \\ a+3b+9c+27d & = y_3 \end{cases}.$$

Si restamos la primera ecuación de la segunda, la segunda de la tercera y ésta de la cuarta, eliminamos completamente la *a* y reducimos el sistema a

$$\begin{cases} b+c+d & = y_1 - y_0 = \Delta y_0 \\ b+3c+7d & = y_2 - y_1 = \Delta y_1 \\ b+5c+19d & = y_3 - y_2 = \Delta y_2 \end{cases}. \tag{5}$$

De forma semejante, en este sistema podemos eliminar *b* y obtener

$$\begin{cases} 2c+6d & = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 \\ 2c+12d & = \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 \end{cases}, \tag{6}$$

finalmente restamos para eliminar *c*, con lo que encontramos la igualdad

$$6d = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 .$$

Así calculamos $d = \dfrac{\Delta^3 y_0}{6}$. El valor de *c* podemos hallarlo, sustituyendo en la primera ecuación de (6):

$$c = \frac{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0}{2} .$$

De (5) tenemos

$$b = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} .$$

Como, evidentemente $a=y_0$, el polinomio buscado es

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \left(x^2 - x\right) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right),$$

que puede rescribirse en la forma

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\cdot\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\Delta^3 y_0 .$$

Veamos que la aparición de los coeficientes binomiales no resulta casual. Haciendo uso de la notación

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i ,\quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i ,\quad \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i ,\ \ldots,\ \text{con } i = 0, 1, \ldots, n,$$

Newton introdujo una forma de ordenar las diferencias que aún hoy se utiliza (Fig.2a).

Observemos que cada término es la diferencia de los dos términos a su izquierda. Por lo que también es posible ordenarlo en la forma de la Fig.2b.

a)

$$\begin{array}{lllll}
\underline{|y_0} & & & & \\
 & \underline{|\Delta y_0} & & & \\
y_1 & & \underline{|\Delta^2 y_0} & & \\
 & \Delta y_1 & & \underline{|\Delta^3 y_0} & \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \underline{|\Delta^4 y_0} \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\
 & \Delta y_3 & & & \\
y_4 & & & &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccc}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_0 + \Delta y_0 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^3 y_0 \\
y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & \\
 & \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & \\
y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & &
\end{array}$$

Fig.2

La similitud en la formación de este triángulo con la del triángulo de Pascal, permite explicar el porqué de la aparición de los coeficientes binomiales. Utilizando la expresión de los coeficientes binomiales obtenemos el resultado siguiente:

El polinomio de grado menor o igual a n que pasa por los puntos $(0, y_0), (1, y_1), (2, y_2), \ldots, (n, y_n)$ viene dado por

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\cdot\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\Delta^n y_0 . \tag{7}$$

Ejemplo 1. Hallemos el polinomio de cuarto grado que pasa por los puntos

$$(0,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (3,5),\ (4,2).$$

En este caso el esquema de Newton se muestra en la Fig.3 y el polinomio de interpolación es

$$y = 4 + \frac{x}{1} - 4\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + 10\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} - 22\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\text{, es decir,}$$

$$y = -\frac{11}{12}x^4 + \frac{43}{6}x^3 - \frac{205}{12}x^2 + \frac{71}{6}x + 4 .$$

$$\begin{array}{lllll}
\underline{|4} & & & & \\
 & \underline{|1} & & & \\
5 & & \underline{|-4} & & \\
 & -3 & & \underline{|10} & \\
2 & & 6 & & \underline{|-22} \\
 & 3 & & -12 & \\
5 & & -6 & & \\
 & -3 & & & \\
2 & & & &
\end{array}$$

Fig.3

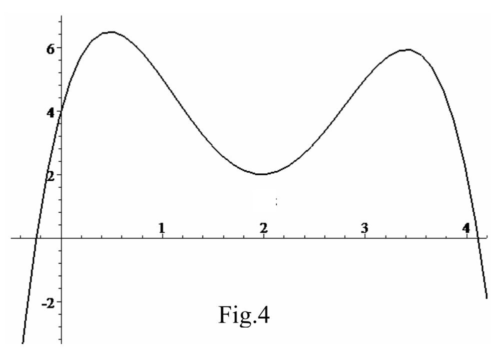

Fig.4

cuyo gráfico aparece en la Fig.4.

Ejemplo 2. Hallemos el polinomio de interpolación cuyo valor en $x=n$ es la suma $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Las diferencias correspondientes se muestran en la Fig.5. Haciendo uso de la fórmula (7) y después de simplificar obtenemos el polinomio

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}.$$

$\boxed{0}$					
	$\boxed{1^3}$				
1^3		$\boxed{7}$			
	2^3		$\boxed{12}$		
1^3+2^3		19		$\boxed{6}$	
	3^3		18		0
$1^3+2^3+3^3$		37		6	
	4^3		24		
$1^3+2^3+3^3+4^3$		61			
	5^3				
$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$					

Fig.5

Es interesante observar que el polinomio resultante no depende del valor de n, es decir de la cantidad de puntos considerados. Este procedimiento nos ha permitido deducir, por una vía diferente a la utilizada en los Preliminares, la fórmula:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$$

Similarmente pueden obtenerse expresiones para la suma de cualquier potencia de los números enteros. En particular pueden encontrarse las conocidas expresiones:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

Para la deducción de la fórmula en (7) se ha considerado que las abscisas de los puntos de interpolación son los números $0,1,2,\ldots,n$. Este resultado puede extenderse fácilmente al caso cuando las abscisas son equidistantes, pero arbitrarias (ejerc.9):

El polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, donde $x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h,\ x_n=x_0+nh$ tiene la forma

$$p(x)=y_0+\frac{(x-x_0)}{h}\Delta y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\cdot h^2}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n y_0.$$

Esta expresión nos será de mucha utilidad en el Capítulo 2, cuando introduzcamos la serie de Taylor.

Ejercicios

1. Demuestra, utilizando el principio de inducción matemática, que

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m,\quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m,\ \text{para}\ \ n,m=1,2,\ldots.$$

2. Halla el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$.

3. Prueba que $\left(5+\sqrt{26}\right)^{20}+\left(5-\sqrt{26}\right)^{20}$ es un número entero. ¿Podrías encontrar una generalización del resultado anterior?

4. Calcula $\sum_{i=0}^{8}\binom{9}{i}\binom{12}{8-i}$, igualando los coeficientes de x^n en la igualdad $(1+x)^9(1+x)^{12}=(1+x)^{21}$.

5. Halla el término de valor máximo en el desarrollo de $\left(1+\sqrt{2}\right)^{30}$.

6. Calcula:

a) $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots$, b) $\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\dots$, c) $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$,

d) $2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+4\binom{n}{3}+\dots$, e) $\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\dots$.

7. Usa el polinomio de interpolación para deducir las fórmulas

$$1+2+\dots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

8. Halla el polinomio de interpolación de grado menor o igual que 3 que pasa por los 4 puntos:

$$(0,0),\quad (1,1),\quad (2,2),\quad (3,3).$$

¿Puedes explicar el porqué del resultado obtenido?

9. Prueba que el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, donde $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, $x_n=x_0+nh$ tiene la forma

$$p(x)=y_0+\frac{(x-x_0)}{h}\Delta y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\cdot h^2}\Delta^2 y_0+\dots+\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n y_0.$$

Sugerencia: Utiliza el cambio de variables $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

10. a) Prueba que las diferencias de orden *n* correspondientes a puntos situados sobre el gráfico de un polinomio de grado *n* son siempre constantes.

b) Explica por qué, para cualquier valor de *n*, las diferencias de orden $k+1$ correspondientes a los puntos de la forma $\left(n,\ 1^k+2^k+\dots+n^k\right)$ son constantes.

11. Halla el polinomio $y=f(x)$, tal que $f(0)=3$ y sus diferencias $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$ satisfacen

$$\Delta f(n)=9n^2-3n-2.$$

I.2. Las funciones exponencial y logarítmica

La noción de potencia de un número y las notaciones que se usan actualmente son el resultado de muchos años de evolución de estas ideas. Ya en el siglo XVII, en la obra de Descartes, Leibniz, Newton y sus contemporáneos, podemos encontrar formas muy parecidas a la actual. Sin embargo, un estudio sistemático de la **función exponencial** $y=a^x$, es decir, la relación que se establece entre las cantidades variables *x* y $y=a^x$, se debe fundamentalmente a la obra de Euler y aparece en pleno siglo XVIII.

Nos proponemos extender la exponenciación para el caso cuando el exponente es un número cualquiera. Pero, una generalización provechosa no debe hacerse de forma arbitraria, es preciso que este concepto general posea las propiedades básicas del caso particular. Nosotros, procederemos por etapas y utilizaremos como guía la conservación de la propiedad fundamental

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \,. \qquad (1)$$

1) Exponentes negativos. Como $a^0 = 1$, entonces la relación $a^n \cdot \dfrac{1}{a^n} = 1 = a^0$ $(a \neq 0)$. Esta igualdad sugiere inmediatamente la notación:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Puede verificarse fácilmente que, con esta definición, la propiedad (1) se conservará para cualquier valor de m y n entero (positivo, negativo o cero).

2) Exponente racional. Queremos darle un sentido a expresiones de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, donde m y n son enteros. Por ejemplo, consideremos la expresión $a^{\frac{1}{2}}$. La igualdad (1) nos indica que deberá cumplirse

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 .$$

Así que, es natural tomar como definición $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Observemos que esta definición tiene sentido solo cuando a sea un número positivo o nulo, $a \geq 0$. Como también consideraremos exponentes negativos, **en lo que sigue supondremos $a > 0$**.

Un razonamiento análogo sugiere la notación

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Finalmente, la igualdad

$$\underbrace{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\left(a^{\frac{1}{n}}\right)}_{m \text{ veces}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m ,$$

explica que para un exponente fraccionario m/n arbitrario definamos

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Para evitar ambigüedades, solo tendremos en cuenta las raíces positivas de los números.

El lector puede demostrar (ejerc.1) que cuando x y z son números racionales cualesquiera tienen lugar las propiedades

$$a^{x+z} = a^x \cdot a^z \qquad \text{y} \qquad \left(a^x\right)^z = a^{xz} .$$

3) Exponente irracional. Ya Euler señaló al caso en que los exponentes son irracionales como "el más difícil de comprender". Y explica: como $\sqrt{7}$ está comprendido entre 2 y 3, entonces $a^{\sqrt{7}}$ $(a > 1)$ debe ser un valor bien definido comprendido entre a^2 y a^3. Más precisamente, también

$$\frac{26}{10} < \sqrt{7} < \frac{27}{10} \quad \text{y} \quad \frac{264}{100} < \sqrt{7} < \frac{265}{100} ,$$

luego

$$a^{\frac{26}{10}} < a^{\sqrt{7}} < a^{\frac{27}{10}} \text{ y } a^{\frac{264}{100}} < a^{\sqrt{7}} < a^{\frac{265}{100}},$$

y así sucesivamente. De este modo el valor de $a^{\sqrt{7}}$ puede ser "determinado con cualquier grado de exactitud que se desee".

La forma de interpretar la exponenciación para este tipo de exponentes más generales no permite (con las herramientas hasta aquí desarrolladas) una comprobación de la propiedad (1), sin embargo, el hecho de que estas potencias se conciban como "aproximaciones con cualquier grado de exactitud" de potencias con exponentes racionales, para las cuales si puede ser comprobada, sugiere que también es válida para exponentes irracionales.

Resumamos las **propiedades fundamentales de la función exponencial**:

1) a) $a^0 = 1$;	b) $a^{-1} = \frac{1}{a}$;	c) $a^{x+z} = a^x \cdot a^z$;	d) $\left(a^x\right)^z = a^{xz}$.
2) a) $a^x > 0$;	b) Si $a > 1$, entonces el valor de a^x crece cuando aumenta el valor de *x*.		

Si $a < 1$, entonces podemos hacer $b = \frac{1}{a} > 1$, de modo que $a^x = b^{-x}$. De esta forma, el estudio de la función exponencial con base menor que la unidad puede reducirse al caso en que la base es mayor que uno. En particular, para $a < 1$ si x aumenta, entonces el valor de a^x disminuye.

En la Fig.6 se muestran los gráficos de la función $y = a^x$ para algunos valores de a.

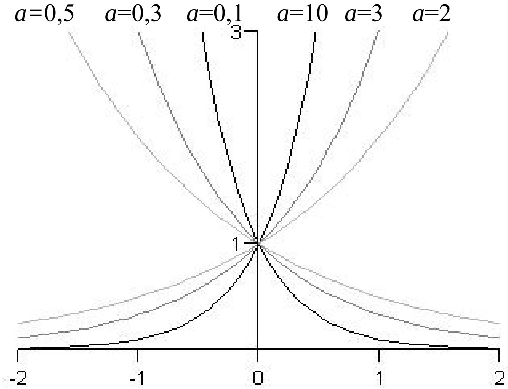

Fig.6

Íntimamente ligada a la función exponencial definió Euler la llamada **función logarítmica**. Sin embargo, la noción de **logaritmo** había surgido mucho antes como un medio imprescindible en la realización de los cálculos necesarios en la astronomía.

El objetivo fundamental para la introducción de esta herramienta era reducir la tediosa operación de multiplicación a la operación mucho más simple de la suma. Esta reducción se revelaba especialmente importante cuando era necesario llevar a cabo gran cantidad de multiplicaciones con números grandes. Veamos sucintamente cómo se generó la idea de asociar a un número su logaritmo con vistas a la simplificación de las operaciones aritméticas.

Todo parece indicar que la confrontación del comportamiento de una progresión aritmética con una geométrica:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \textit{progresión aritmética}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \textit{progresión geométrica}: & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & \cdots \end{array}$$

permitió advertir que a una *adición* de dos elementos de la primera sucesión de valores correspondía una *multiplicación* de los correspondientes elementos de la segunda sucesión. Por ejemplo, a $9 = 3 + 6$ en la línea superior corresponde en la inferior el número $512 = 8 \cdot 64$, es decir el producto de los números correspondientes a 3 y 6.

La idea era buena, pero no muy útil prácticamente, pues en la segunda sucesión faltan demasiados números y esta situación se hace más crítica en la medida que se consideran números mayores. De modo que, para que la correspondencia entre estas dos progresiones pudiera utilizarse con fines prácticos, era necesario que la razón de la progresión geométrica estuviera cerca de la unidad (en el ejemplo mostrado es 2), de modo que la diferencia entre dos términos sucesivos fuera pequeña. Así por ejemplo, para construir la primera *tabla de* *logaritmos*, el escocés **John Napier** consideró como razón al número $0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$ y calculó los primeros 100 términos de la progresión geométrica con esta razón y primer término 10 000 000$= 10^7$, es decir, los números de la forma

$$10^7\left(1-10^{-7}\right)^n, \quad n = 0,1,2,...,100,$$

o

$$10\,000\,000{,}0000000; \quad 9999999{,}0000000; \quad 9999998{,}0000001; \ ...; \ 9999900{,}0004950.$$

Entonces llamó logaritmos de dichos números a los números $n = 0, 1, 2, \dots, 100$, por ejemplo, 100 es el logaritmo de $9999900{,}0004950$. Al parecer Napier utilizó el factor 10^7, para evadir en lo posible el trabajo con números decimales, ya que la mejor aproximación que se utilizaba en la época era con 7 cifras decimales.

Así que si escribimos $y = \mathrm{Nlog}\,x$ (logaritmo según Napier del número *x*), entonces

$$x = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^y.$$

Notemos que $\mathrm{Nlog}\,10^7 = 0$ y $\mathrm{Nlog}\,x$ crece en la medida que x decrece. Esta propiedad es contraria a la que posee el actualmente denominado **logaritmo neperiano**, llamado así en honor de Napier (ver I.5).

Por otra parte, si consideramos otro número *x*'

$$x' = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{y'},$$

entonces, de las propiedades de las potencias tenemos que

$$\frac{x}{x'} = \left(1-10^{-7}\right)^{y-y'}.$$

De este modo, *la diferencia de los logaritmos de los números x y x' depende solo del cociente entre estos números*. Será Napier quien acuñe el término *logaritmo*, el cual proviene de las palabras griegas *lógos*, razón y *arithmós*, número, aludiendo así a la propiedad de que *el logaritmo de dos números solo depende de la razón entre ellos*.

Estas primeras ideas relacionadas con el logaritmo de un número revolucionaron las posibilidades de los cálculos con números grandes y por tanto, se construyeron diferentes tipos de tablas, variando la razón y el término inicial de las progresiones, se descubrieron propiedades de los logaritmos, todo lo cual convirtió a los logaritmos en un instrumento cada vez más eficiente y totalmente indispensable en los cálculos aritméticos.

Ya en el siglo XVIII algunos científicos comenzaron a estudiar el comportamiento del gráfico que se producía al considerar como abscisa al número y como ordenada a su logaritmo. Sin embargo, corresponderá una vez más a Euler institucionalizar y difundir el uso del logaritmo como una función, proporcionándole así su significado actual. En lo que sigue utilizaremos básicamente las ideas desarrolladas por Euler.

Fijemos un cierto número $a > 0$, $a \neq 1$. Dado un número *x* se puede encontrar el número *y*, positivo, tal que satisface $y = a^x$. Del mismo modo, dado el número *y* positivo, se puede encontrar el número *x* que satisface la igualdad anterior. A este número *x* se le denominará **logaritmo** de *y* en la **base *a*** y se denotará por $x = \log_a y$. Así que resultan equivalentes las igualdades siguientes

$$y = a^x \qquad\qquad x = \log_a y, \quad (y > 0). \tag{2}$$

Esta definición para la función logarítmica permite deducir sus propiedades mediante las correspondientes propiedades de la función exponencial.

Propiedades de la función logarítmica:

1) a) $\log_a 1 = 0$; b) $\log_a a = 1$; c) $\log_a(yv) = \log_a y + \log_a v$;

d) $\log_a\left(\dfrac{y}{v}\right) = \log_a y - \log_a v$; e) $\log_a\left(b^y\right) = y\log_a b$.

2) Si $a > 1$ ($a < 1$), entonces el valor de $\log_a y$ crece (decrece) cuando aumenta el valor de y.

Por ejemplo, para verificar la propiedad 1c) escribamos

$$\log_a y = x, \qquad \log_a v = z,$$

usando (2) obtenemos

$$y = a^x, \qquad v = a^z,$$

luego, por la propiedad 1c) de la exponencial,

$$yv = a^x \cdot a^z = a^{x+z},$$

lo que significa que

$$\log_a(yv) = x + z = \log_a y + \log_a v.$$

La definición dada de logaritmo indica que se tienen tantos sistemas de logaritmos como números *a* puedan tomarse como base. Sin embargo, los logaritmos de un mismo número en diferentes bases tienen una relación muy sencilla que permite pasar de una base a otra sin ninguna dificultad. Supongamos que *a* es la base de un sistema y *b* la de otro y denotemos

$$\log_a x = p, \quad \log_b x = q,$$

o de forma equivalente

$$a^p = x, \quad b^q = x,$$

entonces

$$a^p = b^q \quad \text{o} \quad a = b^{q/p}.$$

De la última igualdad se obtiene

$$\log_b a = \frac{q}{p} = \frac{\log_b x}{\log_a x} \qquad \text{o} \qquad \log_b x = \left(\log_b a\right)\left(\log_a x\right).$$

Esto significa que *basta conocer* $\log_b a$ *para calcular el logaritmo de cualquier número en la base b conocido el logaritmo en la base a*.

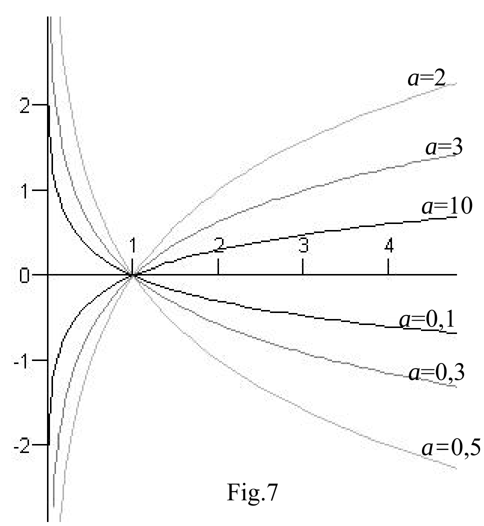

Fig.7

Dado que nuestro sistema de numeración es decimal, para la realización de cálculos aritméticos la base más adecuada es la base 10. El uso de esta base fue introducida por el profesor de matemáticas inglés Henry Briggs en 1624. En la Fig.7 se muestran los gráficos de la función logarítmica para diferentes bases.

Actualmente cualquiera que necesite el logaritmo de un número solo tiene que oprimir el botón de una calculadora, pero en la época que fueron ideados, una de las tareas más urgente era la confección de tablas, cada vez más exactas, para lo cual se desarrollaron una gran variedad de algoritmos, siempre bajo la influencia de los avances logrados por la matemática en los siglos XVII y XVIII. Más adelante veremos algunas formas usadas en la confección de estas tablas y que resultan cercanas a los algoritmos en que se basan los programas computacionales actuales.

A continuación consideraremos algunos ejemplos de aplicación de los logaritmos tomados del texto de Euler:

Ejemplo 1. Calcular el valor aproximado de la potencia $2^{7/12}$.

Como

$$\log_{10}\left(2^{\frac{7}{12}}\right)=\frac{7}{12}\log_{10}2\,,$$

entonces podemos buscar en una tabla $\log_{10}2=0,30103$ y por tanto

$$\log_{10}\left(2^{\frac{7}{12}}\right)=\frac{7}{12}0,30103=0,17560\,.$$

Buscando nuevamente en una tabla el número 0,17560, pero esta vez en la columna correspondiente a los logaritmos, encontramos que $\log_{10}\left(1,498307\right)=0,17560$, lo que significa que

$$2^{\frac{7}{12}}=1,498307\,.$$

Ejemplo 2. El número de habitantes de una ciudad se incrementa cada año en su trigésima parte y se sabe que al fundarse la habitaban 100 000 personas. Se busca el número de habitantes al cabo de 100 años.

Si denotamos por *n* el número inicial de habitantes, entonces en el primer año el número de habitantes será

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)n=\frac{31}{30}n\,,$$

después de dos años ascenderá a $\left(\frac{31}{30}\right)^2 n$, al cabo de tres a $\left(\frac{31}{30}\right)^3 n$, … . Así que después de 100 años la ciudad estará habitada por

$$M=\left(\frac{31}{30}\right)^{100}n=\left(\frac{31}{30}\right)^{100}100\,000\,.$$

Calculemos *M* haciendo uso de los logaritmos en base 10. Por las propiedades del logaritmo se tiene que

$$\log_{10}M=100\log_{10}\left(\frac{31}{30}\right)+\log_{10}10^5=100\left(\log_{10}31-\log_{10}30\right)+5\,.$$

En una tabla (o con el uso de una simple calculadora) encontramos los valores

$$\log_{10}31=1,49136 \quad \text{y} \quad \log_{10}30=1,47712$$

con lo cual obtenemos $\log_{10}31-\log_{10}30=0,01424$. Luego

$$\log_{10}M=1,42404+5=6,42404\,,$$

entonces la tabla nos proporciona

$$M=2654874.$$

Observación. En realidad las tablas se confeccionan para números cuyos logaritmos están entre 0 y 1, para el logaritmo en base 10 estos números estarán comprendidos entre 1 y 10. Si un número es mayor que 10, basta dividirlo por una potencia conveniente de 10 para reducirlo a un número entre 1 y 10 y esta división solo se reflejará en la parte entera del logaritmo. Recíprocamente si, como en el caso anterior, el logaritmo es un número cuya parte entera es $m \geq 1$ (en el ejemplo, $m=6$), eso simplemente significa que el número debe tener $m+1$ dígitos.

Ejercicios

1. a) Para cualesquiera valores racionales de x y z, prueba las igualdades

$$a^{x+z} = a^x \cdot a^z \qquad \text{y} \qquad \left(a^x\right)^z = a^{xz}.$$

b) Prueba que, si $a>1$ y $x>z$, entonces $a^x > a^z$, cuando x y z toman valores racionales arbitrarios.

2. Muestra que: a) $\log_N b = \dfrac{1}{\log_b N}$, b) $\log_N b = \log_{\frac{1}{N}} \left(\dfrac{1}{b}\right)$.

3. Dado $a>0$, encuentra los valores de x tales que se satisface:

a) $\left|\log_a x\right| \leq 1$, b) $\log_a |x| \leq 1$

4. Compara los números

a) $\log_2 3$ y $\log_3 2$, b) $\log_9 80$ y $\log_7 50$.

5. Halla los números reales que satisfacen la ecuación $(2^{6x+3})(4^{3x+6}) = 8^{4x+5}$

6. ¿Cuál debe ser el incremento anual de la población para que en un siglo ésta se duplique?

7. Un hombre toma a crédito 400 000 florines con la condición de tener que pagar cada año un 5% de interés. De acuerdo a sus posibilidades, cada año paga 25 000 florines. Se quiere saber al cabo de cuántos años tendrá saldada la deuda.

8. Se considera la progresión geométrica $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ y se quiere saber cuántos dígitos tiene el número correspondiente al vigésimo quinto lugar.

Nota. Los logaritmos que son necesarios en los problemas 6, 7 y 8 aparecen calculados en I.6

I.3. Un poco de historia sobre sumas infinitas

Las primeras sumas de infinitos términos de que se tiene noticia se ubican en la civilización helénica y todas ellas son del tipo llamado **serie geométrica**

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots, \quad \text{donde } r \text{ es un número real.} \tag{1}$$

Para poder asignar un número como suma de (1) se utilizaron procedimientos particulares ingeniosos, pero algo complicados. Nosotros razonaremos con ayuda de la fórmula para la suma de los n primeros términos de la correspondiente progresión geométrica (ver Preliminares ejerc. comp. 5)

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Supongamos que r es un número menor que uno en valor absoluto, es decir $|r|<1$, entonces, cuando n toma valores enteros positivos cada vez mayores, la cantidad r^{n+1}, se irá haciendo cada vez más pequeña y podemos lograr hacerla "tan pequeña como queramos". Por tanto,

$\dfrac{r^{n+1}}{1-r}$ será también muy pequeño, entonces es natural asignarle a la "suma infinita" o "serie" dada en (1) el valor $\dfrac{1}{1-r}$, es decir, considerar este valor como la "suma" de la serie:

$$\boxed{1+r+r^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}.}$$

La forma de "sumar" seguida anteriormente podemos intentar utilizarla con cualquier suma infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

independientemente de la expresión concreta de su *término general* a_n.

Veamos algunos ejemplos muy sencillos:

Ejemplo 1. Consideremos las sumas

$$a+a+a+a+\ldots,$$

es decir, $a_n=a$ para todo valor de *n*. Entonces la suma de los primeros *n* términos es igual a na. Cuando hagamos crecer indefinidamente al número *n* de términos, evidentemente esta suma se hará tan grande como se quiera (a menos que $a=0$). En este caso no asignaremos suma a la serie infinita y decimos que la serie es divergente.

Ejemplo 2. Analicemos ahora la serie (1) cuando $r=-1$, esto es la suma

$$1-1+1-1+1-1+\ldots.$$

Las sumas finitas serán

$$\boxed{1},\ 1-1=\boxed{0},\ 1-1+1=\boxed{1},\ 1-1+1-1=\boxed{0},\ 1-1+1-1+1=\boxed{1},\ldots$$

Resulta claro que estas sumas valen alternadamente 0 o 1, por lo que no hay ningún número del que ellas difieran tan poco como se desee. En este caso también se dice que la serie es divergente.

El método seguido antes lo podemos describir de la forma siguiente: Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sumamos los primeros *n* términos, es decir, tomamos una **suma parcial**

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

cuyo valor dependerá de *n*. Esta suma parcial tratamos de expresarla en forma lo más reducida y simple posible, para analizar su comportamiento cuando la *n* crece indefinidamente. Cuando las sumas parciales S_n, al crecer indefinidamente *n*, se acerquen tanto como se desee a un único valor *S* determinado lo simbolizaremos en la forma

$$S_n \to S,\ \text{ cuando } n\to\infty \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

En este caso se dice que **la serie es convergente** y su suma es *S*. En caso contrario se dice que **la serie es divergente**.

La idea descrita antes resulta intuitivamente aceptable y fue la más común hasta el siglo XIX, cuando se enunciaron definiciones formales de límite y serie convergente. Sin embargo, es conveniente comentar que ésta no era la única forma utilizada para asignarle suma a una serie y también estas formas alternativas resultaron de muchísimo interés tanto teórico como práctico (ejerc. comp.7).

Veamos la convergencia de algunas series sencillas:

Ejemplo 3. En 1672 el prestigioso físico y matemático Christian Huygens le planteó al joven abogado y diplomático Gottfried Wilhelm Leibniz este reto:

Calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots .$$

La respuesta de Leibniz, tras unos pocos días, fue original y reflejó una mente ingeniosa:

$$S = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\right]$$

y escribió las fracciones sumandos de esta otra forma:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

Sustituyendo en la serie obtuvo:

$$S = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots\right] = 2 \cdot 1 = 2 .$$

Utilizando la idea de Leibniz, el término general de esta serie toma la forma:

$$\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

con ayuda de la cual podemos escribir la suma de los *n* primeros términos como

$$S_n = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) .$$

De aquí se percibe claramente que cuando, *n* se hace infinitamente grande, el sumando $\frac{1}{n+1}$ se puede hacer suficientemente pequeño para que el valor de S_n se acerque tanto como se quiera a 2, es decir, $S=2$, tal como obtuvo Leibniz.

Ejemplo 4. Consideremos la serie de los inversos de todos los números naturales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Como el término general $1/n$, cuando *n* crece se hace infinitamente pequeño, puede pensarse que la sumas parciales de esta serie no pueden crecer demasiado. Esta idea intuitiva se refuerza cuando se calculan los valores de las sumas parciales para diferentes valores de *n*. La tabla de la Fig.8 muestra que tal creencia tenía un fundamento concreto. Obsérvese que la suma de un millón de términos no pasa de 14,4 y los sumandos sucesivos son cada uno menor a una millonésima, es decir, si $n > 1000000$, entonces

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000000}.$$

Por esta razón fueron muchos los matemáticos que se sorprendieron enormemente al probar que, en realidad, las sumas parciales de esta serie pueden hacerse tan grande como se quiera, es decir, que la serie diverge. Quizás este asombro motivó que fueran varias las pruebas que se dieron de la divergencia de esta serie (ejerc.5). Veamos aquí la forma en que demostró este resultado Jacob Bernoulli, cuyo sorpresa lo llevó a escribir: *¡Entonces una suma donde el último término desaparece puede ser infinitamente grande!*

n	$\sum_{k=1}^{n} 1/k$	***n***	$\sum_{k=1}^{n} 1/k$	***n***	$\sum_{k=1}^{n} 1/k$
1 000	7,485470	7 000	9,430952	200 000	12,783290
2 000	8,178368	8 000	9,564474	250 000	13,006433
3 000	8,583749	9 000	9,682251	300 000	13,188755
4 000	8,871390	10 000	9,787606	400 000	13,476436
5 000	9,094508	100 000	12,090146	500 000	13,699580
6 000	9,276813	150 000	12,495609	1 000 000	14,392726

Fig.8

Evidentemente,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

como en total son $n^2 - n$ sumandos, se obtiene

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \left(n^2 - n\right)\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

por tanto

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

Así podemos formar grupos de términos cada uno de los cuales tiene una suma mayor que 1, y por consiguiente podemos encontrar un número finito (posiblemente enorme) de términos cuya suma sea tan grande como queramos. De modo que la serie es divergente.

Para la determinación de la convergencia y la suma de una serie una de las dificultades principales es el poder encontrar una expresión sencilla para las sumas parciales. Por esta razón, muchas veces se recurría a artificios de diferente índole. Veamos un ejemplo, conocido desde la Edad Media, donde se utiliza una ingeniosa idea geométrica.

Ejemplo 5. Sumemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots$$

y para ello nos auxiliaremos de la Fig.9. Consideremos la serie geométrica de (2) con $r = 1/2$:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

lo que nos permite la descomposición del rectángulo superior en la primera de las figuras en la unión de los rectángulos que se muestran en la segunda figura y cuya área total es la misma. A continuación, se pasa a la tercera figura mediante bisección sucesiva de cada rectángulo en la figura intermedia. Esto muestra que las tres figuras poseen área igual a 2. Por otra parte si, en la última figura calculamos las áreas sumando primero "en forma vertical" se tiene la serie dada. De modo que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots = 2.$$

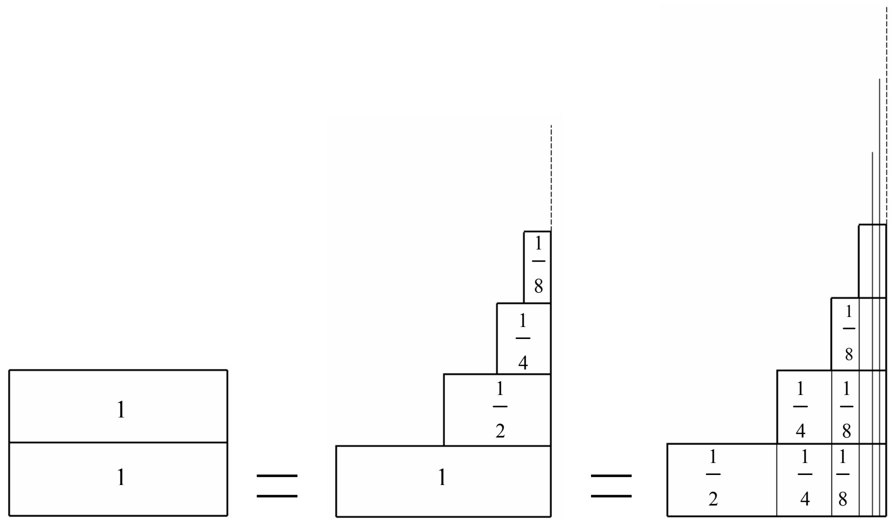

Fig.9

Ejemplo 6. Una serie a la cual los matemáticos, en particular Jacob Bernoulli, dedicaron muchos esfuerzos para calcular su suma fue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Jacob Bernoulli demostró que la serie era convergente, para lo cual usó la serie del ejemplo 3. En efecto, es evidente que

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k-1)}, \; k = 2,3,\ldots,$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Todos los sumandos en las sumas anteriores son positivos, así que cuando n crece, las correspondientes sumas parciales crecerán, luego estas sumas no pueden oscilar. Pero, haciendo uso del ejemplo 3, puede verse que el miembro derecho se acerca tanto como se quiera a 2, por tanto resulta claro intuitivamente que la de la izquierda debe acercarse a un cierto número positivo y menor que 2. Pero ¿cuál es ese número? A este problema se le conoció como **Problema de Basilea**, por la ciudad donde fue propuesto y discutido intensamente, la ciudad natal de los hermanos Jacob y Johann Bernoulli y de Euler. Este último fue quien encontró la respuesta, de forma extraordinariamente ingeniosa que expondremos en I.7.

En los ejemplos anteriores hemos manipulado las sumas infinitas de la misma forma como trabajamos con las sumas finitas, así se procedió en la matemática durante muchos años. Sin embargo, no todas las sumas infinitas resisten ser tratadas como si fueran sumas finitas. Veamos un ejemplo tomado de la obra de Jacob Bernoulli, quien advirtió la paradoja a la cual podía llegarse en algunas ocasiones, pero no pudo dar una explicación convincente del porqué.

Consideremos la igualdad siguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

de donde se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^p}\Bigg/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^p}=2^p-1\,.$$

Igualdad que es totalmente paradójica cuando $p\leq 1$, por ejemplo cuando $p=1$ y $p=1/2$, pues se tendrían que cumplir las igualdades

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\Bigg/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\Bigg/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k}}=\left(\sqrt{2}-1\right),$$

las cuales son "absurdas". Obsérvese que, en el primer caso, cada sumando del numerador es mayor que el correspondiente sumando del denominador y en cambio la razón obtenida es 1. En el segundo caso los sumandos del numerador también son todos mayores y no obstante la razón es menor que 1. La explicación radica esencialmente en que las series involucradas son todas divergentes (ejerc.2) y las sumas infinitas tanto en el numerador como en el denominador carecen de sentido, en realidad no constituyen un cociente de números.

Cuando se opera con series infinitas que son divergentes, tratándolas como si poseyeran las mismas propiedades que las sumas finitas, tienen lugar muchas otras paradojas. Por ejemplo, si en la serie del ejemplo 2 agrupamos los sumandos de dos en dos

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0,$$

podríamos asociarle como suma 0. Sin embargo, las manipulaciones siguientes nos sugieren una respuesta totalmente distinta:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=1-(1-1+1-1+1+\ldots),$$

pero la suma infinita entre paréntesis en el miembro derecho es la misma que la del izquierdo, luego, el valor de esa suma infinita debería satisfacer la ecuación

$$S=1-S,$$

así que ¡$S=1/2$!

Ejercicios

1. Prueba que para $|r|\geq 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

2. Justifica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ es convergente.

3. Un número fraccionario se puede escribir siempre en forma decimal, efectuando la división aritmética del numerador entre el denominador. Por ejemplo, si dividimos 4 entre 17, obtenemos $4/17=0,2151515...=0,2\overline{15}$.

a) Argumenta que el número así obtenido o tiene un número finito de cifras decimales, o tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. En el ejemplo anterior el período es 15, lo cual denotamos colocando la barra encima de las cifras correspondientes.

b) Justifica que también tiene lugar el recíproco: una fracción, en forma decimal, que tiene un número finito de cifras o infinitas cifras periódicas puede escribirse como el cociente de dos enteros.

c) Comprueba que $0,99999...=1$.

4. Calcula las sumas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3+3^2+...+3^n}{5^{n+2}}$

5. Argumenta cómo puede justificarse la divergencia de la serie armónica, a partir de la siguiente idea concebida en el siglo XIV por el filósofo Nicole Oresme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+....$$

I. 4. Generalización de la fórmula del binomio

Comencemos analizando dos casos especiales de la potencia de un binomio: cuando el exponente es -1 y cuando es $-1/2$.

Consideremos primeramente el caso $(a+b)^{-1}$, para el cual podemos escribir

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b/a}.$$

Asumamos que $|b|<|a|$, entonces el segundo factor en el producto anterior no es más que la suma de una serie geométrica de razón $-b/a$. De modo que podemos escribir

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+... ,$$

donde en el miembro derecho hemos considerado una suma de *infinitos* términos.

Escribamos la serie anterior utilizando exponentes negativos en lugar de fracciones

$$(a+b)^{-1}=a^{-1}-a^{-2}b+a^{-3}b^2-a^{-4}b^3+..., \tag{1}$$

entonces podemos constatar fácilmente que esta es la misma fórmula del binomio (2, I.1) para el caso en que $n=-1$. Sin embargo, hay una diferencia esencial entre estas dos expresiones: *para n entero positivo, la suma solo contiene un número finito de términos, mientras que* (1) *posee infinitos sumandos*.

Seguidamente estudiaremos el caso $n=1/2$, es decir

$$(a+b)^{1/2}=\sqrt{a+b}.$$

Comencemos con un método que surgió en relació con la búsqueda de las raíces cuadradas de los números que no son cuadrados perfectos. Se conjetura que este método de aproximación era conocido de la civilización babilonia y puede tener más de 3000 años de antigüedad. Los hallazgos arqueológicos atestiguan que los babilonios obtuvieron algunas aproximaciones interesantes para las raíces cuadradas. Por ejemplo, en una tablilla aparece el número 17/12 como una aproximación de $\sqrt{2}$ y en otra se encuentra una aproximación que es mucho más exacta (ver ejerc.2).

La idea básica consiste en suponer que $a>0$ (cuya raíz se conoce) y que $|b|$ **es pequeño con relación a *a***, por ejemplo podríamos calcular $\sqrt{2}$ utilizando a=16/9 y b=2/9 y para $\sqrt{5}$, suponer a=2 y b=1. Como una primera aproximación (bastante burda) podemos considerar

$$\sqrt{a+b}\approx\sqrt{a}.$$

Sea δ el error que se comete en la aproximación anterior, es decir

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\delta.$$

Entonces,

$$a+b=\left(\sqrt{a}+\delta\right)^2=a+2\delta\sqrt{a}+\delta^2 .$$

Con la suposición hecha sobre $|b|$, δ es, en valor absoluto, menor que 1, luego el sumando δ^2 será pequeño en relación con los otros dos y podemos despreciarlo. Entonces, obtenemos el estimado $\delta=b\big/\left(2\sqrt{a}\right)$. Estos razonamientos nos llevan a la aproximación

$$\sqrt{a+b}\approx\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad |b|<a . \tag{2}$$

Notemos que la expresión encontrada para δ indica que este error será más pequeño en la medida que b sea mucho menor que a. Así que, una vez encontrado un valor aproximado para $\sqrt{a}$, una nueva aplicación de (2), nos proporcionará una aproximación mejor de la raíz buscada.

Usemos la fórmula (2) y la observación anterior para encontrar un algoritmo eficiente que permite calcular $\sqrt{2}$.

Algoritmo para el cálculo de $\sqrt{2}$

Denotemos $a=v^2$, $b=2-a=2-v^2$, entonces la fórmula (2) se convierte en

$$\sqrt{2}\approx v+\frac{2-v^2}{2v}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{v}+v\right),$$

y la aproximación es tanto mejor cuanto más cerca está v de $\sqrt{2}$. Apliquemos reiteradas veces el valor dado en la expresión

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{v}+v\right) \tag{3}$$

y colocaremos cada vez como valor de v el resultado del cálculo precedente. Si comenzamos sustituyendo $v_0=1$, entonces obtenemos el valor $v_1=1{,}5$. Al sustituir este valor en (3), calculamos la aproximación $v_2=1{,}417$ y al evaluar (3) con este último se consigue $v_3=1{,}41421$ y así sucesivamente

$$v_4=1{,}41421356237, \quad v_5=1{,}414213562373095048801\,68,$$

$$v_6=1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753\,7, \ldots .$$

Todas las cifras de las aproximaciones anteriores son exactas. Es interesante notar el rápido crecimiento de la cantidad de cifras correctas que da este método.

Ahora retornemos a la fórmula (2) para aplicar a ella un procedimiento semejante al utilizado en su deducción. Escribamos la igualdad:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\delta ,$$

donde δ denota el error de la aproximación en (2).

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$a+b=a+b+\frac{b^2}{4a}+2\delta\sqrt{a}+\frac{b\delta}{\sqrt{a}}+\delta^2 .$$

Como δ es pequeño y hemos supuesto que $|b|<a$, entonces los dos últimos sumandos, resultan mucho más pequeños que los restantes, así que los eliminaremos. De esta forma encontramos el estimado

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}. \tag{4}$$

Esta fórmula también permite elaborar un algoritmo de obtención de la raíz cuadrada de un número, por supuesto, con él se obtienen mucho más rápidamente cifras exactas de $\sqrt{2}$. Por ejemplo, comenzando los cálculos con $v=1,5$ ya en la cuarta iteración aparecen ¡68 cifras decimales exactas!

Transformemos las expresiones (2) y (4) con el fin de obtener una expresión más cómoda de recordar y utilizar en la práctica. Dividamos ambas expresiones por $\sqrt{a}$ y hagamos la sustitución $x = b/a$, entonces ellas se convierten, respectivamente, en

$$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}, \qquad (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Para obtener aproximaciones más precisas, podríamos repetir el procedimiento seguido antes, pero sería demasiado tedioso. Sin embargo, es más interesante seguir un método que Newton utilizó con frecuencia y otros muchos científicos tras él. Newton consideró la igualdad siguiente

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots,$$

donde los coeficientes c, d, … deben ser hallados. Para el cálculo de estos coeficientes, utilizó la relación evidente $(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} = 1+x$ y efectuó el producto de las dos sumas infinitas, como si fueran polinomios. Es decir,

$$1+x = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + cx^3 + dx^4 + \ldots\right) =$$

$$= 1 + x + \left(2c - \frac{1}{8}\right)x^3 + \left(2d + c + \frac{1}{64}\right)x^4 + \ldots.$$

A continuación igualó los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos miembros de la igualdad. Así obtuvo:

$$c = \frac{1}{16} \quad \text{y} \quad d = -\frac{5}{128},$$

luego

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots.$$

Notemos que

$$-\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}, \quad \frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad -\frac{5}{128} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

lo cual nos hace conjeturar que el desarrollo del binomio también es válido para el valor de $n=1/2$. En la Fig.10 se ilustra gráficamente como los polinomios

$$P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}, \quad P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad P_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3, \ldots$$

se aproximan a la función $y = \sqrt{1+x}$, cuando $-1 < x < 1$.

Newton, inspirado en ideas expresadas previamente por **John Wallis**, aplicó un razonamiento (algo dudoso, pero eficaz) de interpolación para obtener el desarrollo del binomio para $(1+x)^a$ con un valor de a cualquiera. Como ya conocía los desarrollos para $n=1,2,3,\dots$, entonces, para un valor arbitrario de a, era necesario solo "interpolar" los coeficientes de estos desarrollos. Pero estos coeficientes eran polinomios en n, por lo que lo único que restaba era sustituir n por a. Aunque este razonamiento no satisfacía plenamente ni siquiera al propio Newton, fue utilizado profusamente y con mucho éxito durante todo el siglo XVIII y por todos denominado **fórmula del binomio de Newton**. No será hasta comienzos del siglo XIX que el joven matemático noruego **Niels Abel** realice una demostración rigurosa de la validez del resultado siguiente:

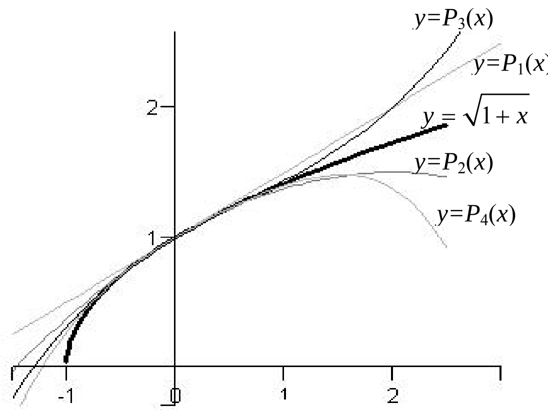

Fig.10

Para cualquier número a y si $|x|<1$ tiene lugar

$$(1+x)^a = 1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots\ .$$

Ejercicios.

1. Calcula aproximadamente $\sqrt{5}$ tomando $a=4$ y $b=1$ en las fórmulas (2) y (4). Compara los resultados obtenidos.

2. a) Tomando $a=16/9$ y $b=2/9$ en (2) verifica la aproximación para $\sqrt{2}$ obtenida por los babilonios: 17/12.

b) Ahora toma $a=(17/12)^2$, $b=-1/144$ en (4) y encuentra la aproximación babilónica más exacta:

$$\sqrt{2}\approx 1,4142155\ .$$

3. Multiplicando la serie $(1+x)^{1/2}=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\dots$ por sí misma, calcula los coeficientes y compara los valores hallados con los que proporciona la fórmula del binomio.

4. a) Multiplicando la serie $(1+x)^{1/3}=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\dots$ tres veces por sí misma, comprueba que

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3\cdot 6}x^2+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\dots\ .$$

b) Usa a) y la relación $2\cdot 4^3-5^3=3$ para obtener la fórmula

$$\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{125}-\frac{1}{125^2}+\frac{5}{3\cdot 125^3}-\dots\right).$$

I.5. Expresión de las funciones exponencial y logarítmica mediante series

En el epígrafe I.2 estudiamos las propiedades elementales de las funciones exponencial y logarítmicas. En este epígrafe retomamos el estudio de estas funciones, pero ahora con el fin de encontrar para ellas desarrollos en series. Utilizaremos la forma de razonamiento heurístico expuesto por Euler en su libro *Introducción al Análisis de los Infinitos*. En esta obra, Euler manipula profusamente las cantidades llamadas *infinitamente pequeñas* o *infinitesimales* y las *infinitamente grandes*. Estos tipos de entes matemáticos ya habían sido utilizados ampliamente durante más de un siglo, siempre sin una basamento adecuado, por lo que recibió fuertes críticas por parte, tanto de filósofos, como de matemáticos. Euler no se detiene a explicar el significado de estas nociones y menos aún pretende dar una definición precisa, las concibe únicamente como una herramienta extraordinariamente útil para *descubrir* las propiedades de las funciones, propiedades que era imposible siquiera imaginar con el estilo de razonamiento matemático más ortodoxo. Así, veremos como estas cantidades son introducidas y utilizadas, para luego desaparecer totalmente, pero solo después de habernos develado propiedades ocultas de las funciones que se estudian. En el estilo euleriano, las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes se comportan como una especie de "rayos X matemáticos", que ponen de manifiesto propiedades ocultas, pero sumamente importantes de los objetos matemáticos bajo su estudio.

La falta de precisión matemática en el manejo de estas nociones al estilo del siglo XVIII, provoca que el uso que haremos de esta herramienta sea totalmente heurístico, con un gran parecido a la forma de trabajo en las ciencias físicas o naturales. Sin embargo, los resultados y las propiedades aquí obtenidos son completamente válidos y serán demostrados, con todo el rigor contemporáneo, en cursos más avanzados de análisis matemático. Es saludable advertir al lector acerca de que la forma de trabajo heurístico, como método de descubrimiento, no ha perdido actualidad en la matemática, al contrario, son muchas las ramas de esta ciencia que realizan conjeturas y descubren resultados fundamentales apoyándose en este método, lo que ha cambiado es que, en la actualidad, se poseen medios de cómputo electrónicos que facilitan el experimento matemático.

Representación en serie de la función exponencial. Supongamos que $a>1$ (sabemos que el caso $a<1$ se reduce al primero), entonces al crecer el exponente al cual elevamos a, aumentará el valor de la potencia. Como $a^0=1$, si elevamos a a un exponente positivo, pero muy pequeño, entonces la potencia será mayor que 1, pero superará a este número en una cantidad infinitamente pequeña. En el caso de un exponente negativo, próximo a cero, se obtendrá una potencia menor, pero próxima a 1. Así si h es una cantidad infinitesimal (positiva o negativa), entonces

$$a^h = 1 + kh,$$

donde k depende del valor de a.

Si elevamos la igualdad anterior a la potencia N y aplicamos la fórmula del binomio obtenemos

$$a^{Nh} = (1+kh)^N = 1 + \frac{N}{1}kh + \frac{N(N-1)}{2!}k^2h^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}k^3h^3 + \dots \qquad (1)$$

Consideremos $N = \frac{x}{h}$, donde x es un número finito fijo, de modo que la igualdad (1) puede rescribirse en la forma

$$a^x = \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N = 1 + \frac{1}{1}kx + \frac{1(N-1)}{2!N}k^2x^2 + \frac{1(N-1)(N-2)}{3!N^2}k^3x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{kx}{1} + \frac{1\left(1-\frac{1}{N}\right)}{2!}k^2x^2 + \frac{1\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)}{3!}k^3x^3 + \dots . \qquad (2)$$

En la medida que h se hace más pequeño, N será un número cada vez más grande, es decir, puede considerarse mayor que cualquier cantidad prefijada. Entonces la fracción $\frac{N-1}{N}$ se aproximará tanto como se quiera al valor 1. De forma semejante, cuando N es infinitamente grande, también las fracciones $\frac{N-2}{N}$, $\frac{N-3}{N}$, ... se acercarán tanto como se quiera a 1. Así que, para N infinitamente grande, todas ellas pueden ser sustituidas por la unidad. Así, obtenemos

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \dots, \tag{3}$$

expresión que tiene infinitos términos y constituye una representación en forma de serie para la función exponencial $y = a^x$.

Por otra parte, (3) permite encontrar una relación entre la base a y el número k. En efecto, cuando $x = 1$, obtenemos

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots. \tag{4}$$

Representación en serie de la función logarítmica. Si la igualdad $a^h = 1 + kh$ la elevamos a la potencia N y seguidamente le aplicamos logaritmo en base a, obtenemos

$$Nh = \log_a (1 + kh)^N. \tag{5}$$

Es claro que para $h > 0$ $(h < 0)$ cuanto mayor sea el número N tanto más la potencia $(1+kh)^N$ será mayor (menor) que uno, luego podemos escribir

$$(1 + kh)^N = 1 + x, \tag{6}$$

donde el signo de x está en dependencia del de h. Las relaciones (5) y (6) implican que

$$\log_a (1 + x) = Nh,$$

Por otra parte, despejando en (6) se obtiene

$$kh = (1 + x)^{\frac{1}{N}} - 1,$$

de donde

$$Nh = \frac{N}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{N}} - 1\right],$$

por lo tanto

$$\log_a (1 + x) = \frac{N}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{N}} - 1\right].$$

Si suponemos $|x| < 1$, la fórmula del binomio da lugar a:

$$(1+x)^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N}x - \frac{(N-1)}{1\cdot 2N^2}x^2 + \frac{(N-1)(2N-1)}{1\cdot 2\cdot 3N^3}x^3 - \frac{(N-1)(2N-1)(3N-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4N^3}x^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{N}x - \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)}{2N}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{2N}\right)}{3N}x^3 - \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3N}\right)}{4N}x^4 + \dots.$$

De forma semejante a como razonamos en el caso de la función exponencial, para N infinitamente grande, sustituyamos por 1 las expresiones

$$\left(1-\frac{1}{N}\right),\ \left(1-\frac{1}{2N}\right),\ \left(1-\frac{1}{3N}\right),\ \ldots$$

y entonces obtenemos

$$N\left(1+x\right)^{\frac{1}{N}}-N=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

luego

$$\log_a\left(1+x\right)=\frac{1}{k}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right),\quad \text{para}\quad |x|<1. \tag{7}$$

Observación. Notemos que el razonamiento euleriano de sustituir expresiones del tipo $\frac{N-i}{N}$ por 1 en una cantidad infinita de sumandos es **altamente riesgoso** y puede dar lugar a absurdos. Por ejemplo, con un razonamiento semejante podemos "probar" que ¡$1=0$!:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underbrace{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}}_{N\ \text{veces}}=0+0+\ldots+0=0.$$

La base $a>0$ del logaritmo puede ser escogida de forma arbitraria. Entre todos los valores posibles de a, el que proporciona una expresión más simple para (7) es aquél donde $\boxed{k=1}$. A este valor de a Euler lo denotó con la letra *e*posiblemente por ser la inicial de la palabra exponencial, y seguro que no por ser la inicial de su nombre dado que su carácter no le permitiría ese gesto. La base tomada por Napier veremos que es aproximadamente el inverso de esta cantidad, por tanto, no parece apropiado llamar a esta constante por el nombre de Euler, aunque a él se deba el descubrimiento de muchos de los atributos que la hicieron imprescindible en el cálculo diferencial e integral, así como en sus aplicaciones. Por esto último es que en algunos libros la llaman el número de Euler.

La relación (4), indica que el valor de e viene dado por

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots,$$

y se obtiene un caso particular de (3) de importancia capital en todo el análisis matemático:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots. \tag{3a}$$

De este modo, para la función e^x se obtienen dos expresiones que permiten aproximarla. Una de ella es (3a), la otra la obtenemos de (2), ya que la expresión $\left(1+\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$, cuando N se hace infinitamente grande, se acerca a e^x. Es usual escribir este resultado, como

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{N}}\to e^x,\ \ \text{cuando}\ \ N\to\infty$$

o

$$e^x\approx\left(1+\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{N}} \tag{2a}$$

En particular,

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{N}} \approx e, \text{ cuando } N \to \infty .$$

El número *e* puede ser estimado mediante las dos aproximaciones

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\frac{1}{N!}, \qquad e \approx \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}, \quad \text{cuando} \quad N \to \infty .$$

Los dos estimados anteriores mejoran con el aumento de *N*, sin embargo el primero permite lograr una buena aproximación mucho más rápidamente. Por ejemplo, si aplicamos la primera aproximación con N=41 obtenemos

$$2,7182818284590452353602874713526624977572470937000,$$

que tiene todas sus cifras decimales exactas (¡son 49 cifras!), mientras que para obtener solo 4 cifras correctas en la segunda necesitaríamos utilizar ¡ $N = 1\,000\,000$!

El logaritmo con base *e* de un número *x* se denota simplemente como $\ln x$ o, a veces por $\log x$ y se denomina logaritmo hiperbólico[1] o neperiano, esta última denominación en honor de Napier, aunque en realidad, los logaritmos introducidos por Napier no corresponden a los actuales logaritmos con base *e*.

En I.2 cuando $x = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^y$, escribimos $y = \mathrm{Nlog}\, x$ (logaritmo según Napier del número *x*), de donde

$$\frac{x}{10^7} = \left[\left(1-10^{-7}\right)^{10^7}\right]^{y/10^7},$$

por tanto, haciendo uso de la aproximación (2a), podemos escribir

$$\frac{x}{10^7} \approx \left(\frac{1}{e}\right)^{y/10^7}.$$

Así que, $\frac{y}{10^7} \approx \log_{1/e}\frac{x}{10^7}$, esto significa que el logaritmo definido por Napier está cercano, salvo un cambio de escala, al logaritmo en base 1/*e*.

De la expresión (7) obtenemos, para el logaritmo neperiano, la representación en serie siguiente:

$$\ln\left(1+x\right) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots, \quad |x|<1. \tag{7a}$$

Tanto la función exponencial como la logarítmica pueden ser aproximadas mediante polinomios, considerando solo un número finito de términos en las series (3a) y (7a):

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^N}{N!},$$

$$\ln\left(1+x\right) \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{N-1}\frac{x^N}{N}, \quad |x|<1$$

[1] La explicación del calificativo *hiperbólico* la veremos en el Cap III.

La calidad de los estimados (3a) y (2a) para la función $y=e^x$ puede apreciarse en las figuras 11a) y 11b) respectivamente, siempre la línea punteada representa a la función $y=e^x$. Los gráficos de $y=\ln(1+x)$ y sus aproximaciones se pueden ver en la Fig.12. Nótese que en este

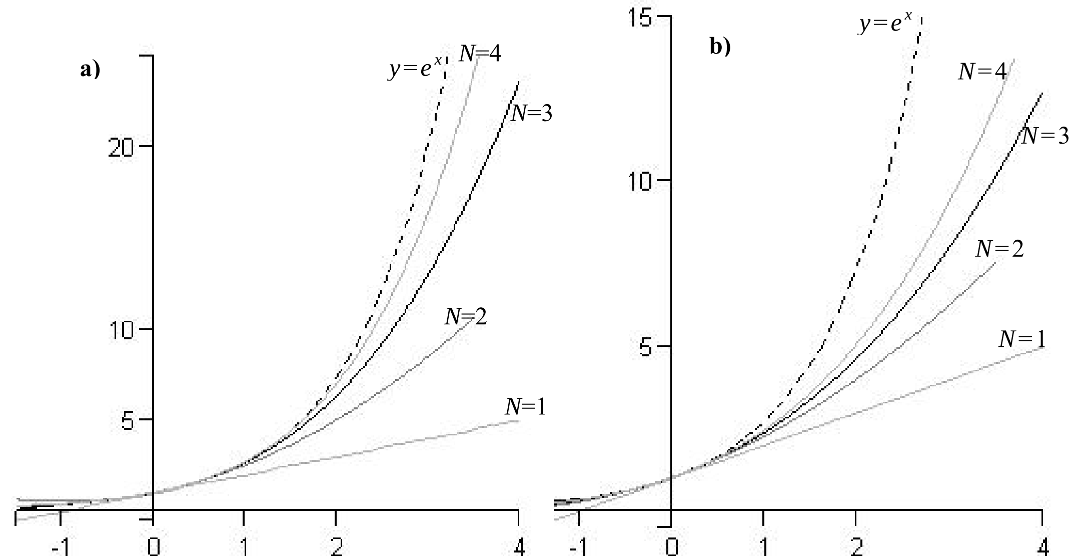

Fig.11

caso, para valores de x que satisfacen $|x|>1$, los gráficos de los polinomios aproximantes se separan rápidamente de la función logarítmica (en línea punteada).

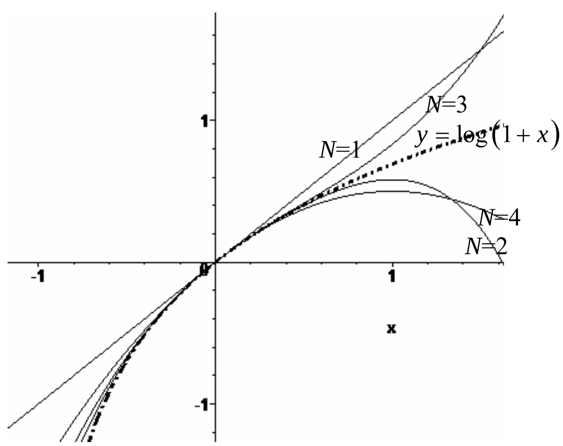

Fig.12

La representación en series del logaritmo neperiano de un número (7a) puede pensarse como un instrumento para el cálculo de logaritmos. Por ejemplo para $x=1$, obtendríamos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + . \qquad (8)$$

Sin embargo, esta serie, aunque sencilla y elegante, es de poca utilidad para el cálculo del logaritmo de 2, ya que se aproxima a este número de forma extremadamente lenta. De este modo fue necesario elaborar métodos alternativos para el cálculo de los logaritmos. Veamos algunos de estos métodos surgidos, fundamentalmente en los siglos XVII y XVIII.

Newton observó que la serie (7a) proporciona una buena aproximación cuando el valor de x es próximo a cero, entonces tomó $x=\pm 0{,}1$, $x=\pm 0{,}2$ y obtuvo $\ln(1\pm 0{,}1)$ y $\ln(1\pm 0{,}2)$, es decir $\ln(0{,}8)$, $\ln(0{,}9)$, $\ln(1{,}1)$, $\ln(1{,}2)$ (¡con 57 lugares decimales!). A continuación escribió

$$2 = \frac{1{,}2\times 1{,}2}{0{,}8\times 0{,}9}, \quad 3 = \frac{1{,}2\times 2}{0{,}8}, \quad 5 = \frac{2\times 2}{0{,}8},$$

y, haciendo uso de las propiedades del logaritmo calculó $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$.

En su libro *Introducción al Análisis de los Infinitos*, Euler cambia x por $-x$ en la serie (7a) y considera la serie

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots . \tag{9}$$

Entonces resta (9) de (7a) para obtener la expresión

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right). \tag{10}$$

Por ejemplo, colocando $x = 1/3$ en (10) se obtiene

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \dots\right). \tag{11}$$

En la tabla de la Fig.13 se puede comparar la velocidad con que las series (8) y (11) aproximan al número $\ln 2 = 0{,}6931471805498....$

N	(8)	(11)
1	1	0,667
2	0,5	0,6914
3	0,833	0,69300
4	0,583	0,693135
5	0,783	0,6931460
6	0,617	0,69314707
7	0,760	0,693147170
8	0,635	0,6931471795
9	0,746	0,693147180559
10	0,646	0,6931471805498

Fig.13

Ejemplo 1. Euler, para calcular $\ln 5$, escribe

$$\ln 5 = \ln\frac{5}{4} + \ln 4 = \ln\frac{5}{4} + 2\ln 2 .$$

Poniendo $x = \frac{1}{9}$ en la serie (10) obtiene

$$\ln\frac{5}{4} = \frac{2}{9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \dots = 0{,}22314 .$$

De donde $\ln 5 = 1{,}60943$.

Entonces $\ln 10$ se calcula inmediatamente como $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \approx 2{,}30258$.

En general, si se quiere calcular el logaritmo de cierto número $M > 1$, puede utilizarse la expresión (10) con

$$x = \frac{M-1}{M+1}.$$

Por supuesto, esto no significa que en todos los casos sea esa la forma más eficiente de calcular los valores de la función logarítmica.

Las relaciones entre los logaritmos en diferentes bases estudiadas en I.2, facilitan el cálculo del logaritmo de un número en cualquier otra base, conocido su logaritmo neperiano y el logaritmo neperiano de su base. Por ejemplo, como

$$\log_{10} e = \frac{1}{\ln 10},$$

entonces

$$\log_{10} e = 0{,}43429 .$$

Tomando este número como factor, una tabla de logaritmos neperianos se puede convertir en una tabla de logaritmos en base 10. En la Fig.14 se pueden comparar los gráficos de $y = \ln x$ y

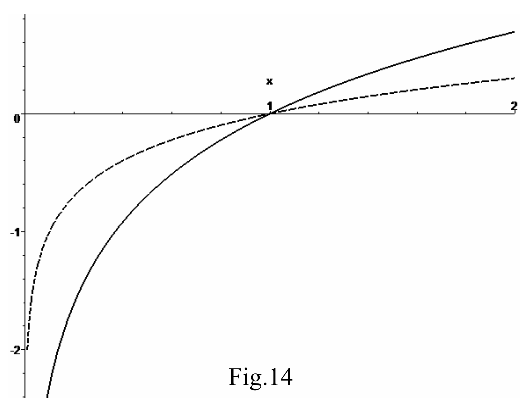

Fig.14

$y = \log_{10} x$.

En particular,

$$\log_{10} 2 = \left(\log_{10} e\right)\left(\ln 2\right) = 0,43429 \cdot 0,69314 = 0,30103 .$$

Ejercicios

1. a) Prueba que toda exponencial, puede ser escrita utilizando al número *e* como base:

$$a^x = e^{x \log a} .$$

b) Halla una expresión en serie para la función 10^x.

2. Prueba que $2 < e < 3$.

3. a) En la serie (10) sustituye $x = \dfrac{1}{2n+1}$ para obtener

$$(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\cdot(2n+1)^3} + \frac{1}{5\cdot(2n+1)^5} + \frac{1}{7\cdot(2n+1)^7} + \ldots \right)$$

b) Utiliza la suma anterior para encontrar los resultados

$$\ln 3 = 1,0986 , \quad \ln 7 = 1,9459 .$$

c) Comprueba que

$$\log_{10} 3 = 0,4771 , \quad \log_{10} 7 = 0,8451 , \quad \log_{10} 21 = 1,3222 .$$

4. Halla la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

I.6. Funciones trigonométricas.

Uno de los problemas más antiguos estudiados en la geometría es la medición de ángulos, el fin fundamental que se perseguía era su aplicación a los cálculos astronómicos. Para ello, los babilonios dividieron el círculo en 360 partes o grados, quizás por ser aproximadamente la cantidad de días en un año, y estas partes las utilizaron como unidad de medición. Más tarde el famoso astrónomo, geógrafo y matemático Claudio Tolomeo refinó esta forma de medición, dividiendo un grado en 60 partes (lo que hoy conocemos como minutos) y cada una de ellas, nuevamente en otras 60 partes (los actuales segundos). Claramente esta forma de concebir las unidades de medida es totalmente convencional, depende del objetivo que se persiga y de las herramientas de cálculo que se dispongan.

En la práctica resultaba muy difícil medir los ángulos de forma directa con los instrumentos usuales, por ejemplo con una regla. Una forma mucho más cómoda de realizar la medición era inscribir el ángulo en una circunferencia y entonces asociarlo a la medida de la *cuerda* correspondiente y, mediante la confección de tablas adecuadas, dada la cuerda poder encontrar el valor del ángulo y viceversa. Tales tablas datan de la época helenística y se conocen que fueron elaboradas por Hiparco de Nicea (actualmente región de Turquía) y precisadas por Tolomeo de Alejandría (en Egipto).

Alrededor del siglo VI d. C. el carácter del tema sufrió un cambio en manos de los maestros indios. Se utilizaron métodos matemáticos más refinados y complejos y estos cálculos requerían una amplia gama de técnicas novedosas dentro de lo que hoy denominamos trigonometría. En sus estudios de las relaciones trigonométricas, los matemáticos indios usaron con mayor frecuencia la semicuerda. A la semicuerda en sánscrito se le llamaba *jya-ardha*, posteriormente abreviada hasta *jya* para convertirse en el *seno indio*. Así se desarrollaron tres funciones, que, a continuación, expresamos en la terminología moderna y con referencia a la Fig.15:

$$jya\ q = AM = r \operatorname{sen} q\ ,$$

$$kojya\ q = OM = r \cos q\ ,$$

$$ukramajya\ q = MC = OC - OM = r - r \cos q\ .$$

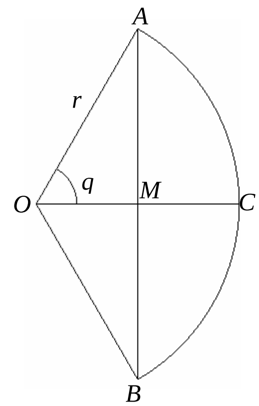

Fig.15

La etimología de la palabra "seno" es instructiva, pues demuestra lo que puede ocurrir como consecuencia de una transformación lingüística y cultural imperfectas. El término sánscrito para seno se abrevió a *jya* y al pasar a los árabes, que acostumbran a no usar las vocales, se escribió *jyb*. Los primeros traductores latinos, al encontrarse con esta palabra técnica aparentemente sin traducción, la confundieron con otra, *jaib*, que entre otras acepciones, significaba la abertura del vestido de una mujer por el pecho, o seno. Así que jaib fue traducido como *sinus*, que en latín tiene varias acepciones, entre ellas *pecho*, *bahía y ensenada*. Y de ahí viene la actual palabra castellana *seno*.

Para estos cálculos se utilizaron diversas relaciones entre el seno de un arco y sus múltiplos enteros y fraccionarios. Así construyeron tablas de senos de diferentes arcos entre 0º y 90º. Puesto que los senos indios representan las semicuerdas, sus valores claramente dependen de la longitud del radio de la circunferencia escogida. Estas tablas se emplearon en cálculos astronómicos, por ejemplo, para computar las posiciones exactas de los planetas. La exactitud de algunas de estas mediciones es sumamente notable.

La formación del imperio islámico favoreció la interacción de las antiguas tradiciones astronómicas helenas y de otros pueblos del Asia Menor con las ideas desarrolladas por los astrónomos indios. Así los científicos árabes, mediante una síntesis creativa, perfeccionaron los métodos de cálculo y lograron aumentar la exactitud de las tablas trigonométricas. Estas serán las ideas que posteriormente se expandirán a la Europa medieval tras la conquista musulmana. Durante los siglos XV, XVI y XVII se perfeccionará el uso de la trigonometría, se introducirá una terminología y notación próxima a la actual, se confeccionarán tablas cada vez más precisas, sin embargo, la idea básica de que las magnitudes seno y coseno eran longitudes de segmentos de líneas relacionadas con una circunferencia de radio dado y por tanto dependientes del valor de éste, en esencia permaneció hasta la aparición de los trabajos de Euler.

Euler solamente considerará la circunferencia de radio unidad. De modo que $\operatorname{sen}\alpha$ representa la ordenada *QP* del punto de la circunferencia y $\cos\alpha$ la abscisa *OQ* de dicho punto (Fig.16). Las restantes funciones trigonométricas se definen, como es usual, mediante sus relaciones con seno y coseno:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Esto no solo proporcionó definiciones mucho mejor determinadas del seno y el coseno, sino que además permitió introducir una nueva forma de medir los ángulos, basada en la longitud de la semicircunferencia unidad, es decir la cantidad que hoy denotamos por π, cuyo valor se conocía con bastante precisión desde épocas anteriores. Esta forma de medida, asigna a cada ángulo la longitud del arco subtendido en el círculo unidad. De modo que π representa al ángulo llano, $\pi/2$ al ángulo recto, es decir 90°, $\pi/3$ es la tercera parte de un ángulo llano, es decir 60°, etc. A un ángulo de 1° se le asigna el valor de $\pi/180$ y, por tanto a uno de α grados corresponderá la longitud $x = \alpha\pi/180$. Más tarde se introdujo la denominación **radián** para denotar la unidad en esta forma de medición de los ángulos. Un ángulo mide un radián cuando el arco correspondiente tiene longitud 1 y su medida en grados es igual a $180^\circ/\pi \approx 57{,}3^\circ$.

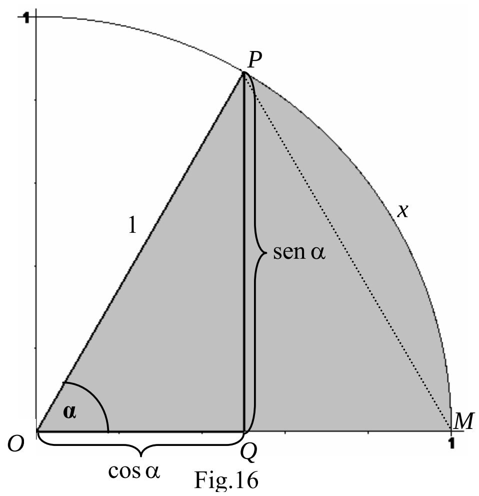

Fig.16

De modo que ahora los ángulos podían ser medidos de la misma forma que los segmentos de rectas, a través de unidades lineales. Esto permitió concebir claramente a las funciones trigonométricas como funciones de una variable real x.

De la Fig.16 se pueden deducir muchas de las fórmulas usuales de la trigonometría, por ejemplo

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{sen}\pi = 0, \quad \cos\pi = -1.$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, && \cos(-x) = \cos x \\ &\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x, && \cos(x+2\pi) = \cos x, \\ &\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x, && \cos(x+\pi) = -\cos x, \\ &\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x, && \cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{2}$$

Ya comentamos que las necesidades de la astronomía motivaron la confección de tablas con los valores de las funciones trigonométricas, estos cálculos se llevaron a cabo mediante la realización de razonamientos geométricos y el desarrollo de nuevas relaciones entre estas funciones. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Dado un pentágono regular (Fig.17), con lado igual a la unidad, denotemos por x la longitud de las diagonales del pentágono. Se puede demostrar fácilmente que los triángulos isósceles AEF y ACE son semejantes. Por tanto,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AE}{EC},$$

luego

$$AF = \frac{1}{EC} = \frac{1}{x}.$$

De lo anterior obtenemos que

$$x = CA = CF + AF = 1 + \frac{1}{x},$$

y, resolviendo la ecuación de segundo grado resultante, se obtiene

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como $\measuredangle BAE = 108°$ y el triángulo ABE es isósceles, entonces $\measuredangle AEF = 36°$. Esto significa que

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

A partir de este valor pueden deducirse los valores de las restantes funciones trigonométricas de 18°.

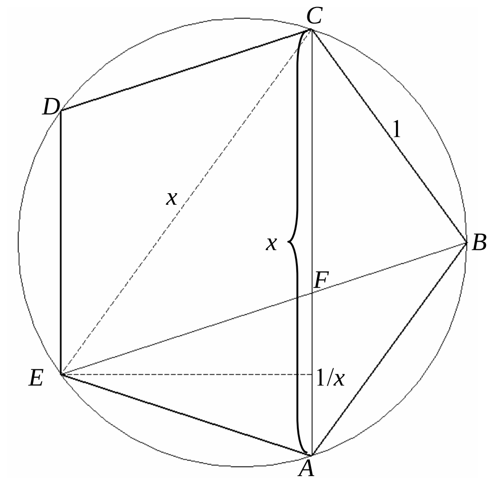

Fig.17

Veamos a continuación como pueden obtenerse, mediante razonamientos geométricos, las relaciones fundamentales que proporcionan el seno y el coseno de la suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y, \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \qquad (3)$$

Cuando los dos ángulos x, y satisfacen $0 \le x, y \le \pi/2$, las igualdades en (3) pueden deducirse fácilmente de los triángulos rectángulos en la Fig.18.

En efecto, del triángulo rectángulo OMP son evidentes las relaciones siguientes:

$$OM = \cos y, \quad PM = \operatorname{sen} y.$$

Además, el ángulo SPM tiene sus lados mutuamente perpendiculares al ángulo MOR, luego del triángulo SPM, se obtienen

$$\operatorname{sen} x = \frac{SM}{PM} = \frac{SM}{\operatorname{sen} y}.$$

Así que

$$SM = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad PS = \operatorname{sen} y \cos x.$$

Por otra parte,

$$\operatorname{sen} x = \frac{RM}{OM} = \frac{RM}{\cos y},$$

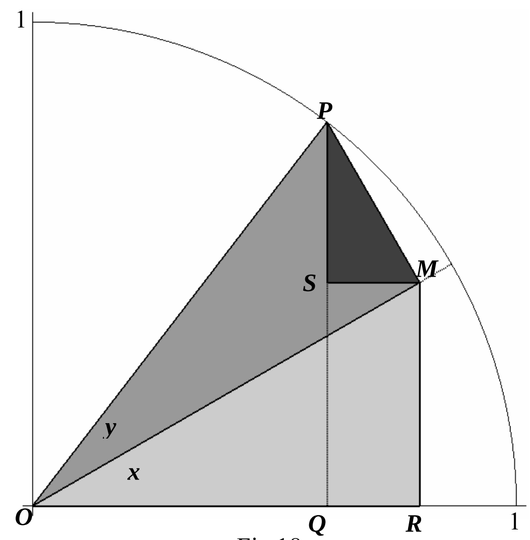

Fig.18

por tanto,

$$RM = \operatorname{sen} x \cos y, \quad OR = \cos x \cos y.$$

Finalmente, del triángulo rectángulo OQP, se tiene que

$$\operatorname{sen}(x+y) = PQ = PS + SQ, \qquad \cos(x+y) = OQ = OR - QR,$$

lo que junto a las relaciones obtenidas anteriormente demuestra las igualdades (3). Para ángulos mayores que $\pi/2$, se puede simplemente aplicar las relaciones (1).

La fórmula para la tangente del ángulo suma la podemos obtener simplemente dividiendo las del seno y el coseno:

$$\tan(x+y)=\frac{\operatorname{sen} x\cos y+\cos x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},$$

siempre que x y y sean tales que los denominadores de las expresiones anteriores sean no nulos.

Reemplazando y por $-y$ se obtienen las respectivas fórmulas para las funciones de la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x\cos y-\cos x\operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y.$$

Con este conjunto de fórmulas podemos deducir cualquier otra identidad entre las funciones trigonométricas. Veamos algunas que serán útiles en el los capítulos siguientes.

Es evidente que

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen} x\cos y,$$

denotando $u=x+y$, $v=x-y$, se tiene que

$$\operatorname{sen} u+\operatorname{sen} v=2\operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}.$$

Análogamente pueden obtenerse expresiones para la suma de cosenos y para la diferencia tanto de senos como de cosenos.

Haciendo $x=y$ en (3) encontramos

$$\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x=2\cos^2 x-1.$$

Reemplazando x por $x/2$, se tienen las fórmulas para el ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

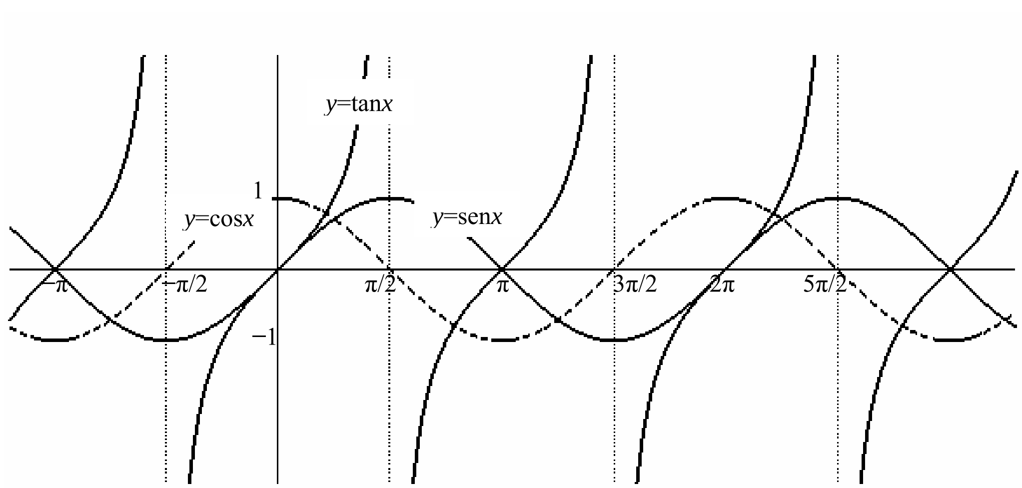

Fig.19

Las propiedades (1) de las funciones seno y coseno, así como las tablas de valores para ellas confeccionadas, permitieron esbozar los gráficos de estas funciones que mostramos en la Fig.19. Puede observarse como los gráficos reflejan las propiedades fundamentales de estas funciones: Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, la función tangente tiene período π, los gráficos de las funciones seno y coseno son idénticos, salvo una traslación de $\pi/2$, …

Ejercicios

1. a) En el *Almagesto* de Claudio Tolomeo aparece el teorema siguiente: Si *ABCD* es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia (ver Fig.20), entonces

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD\,,$$

es decir la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las dos diagonales. Haz la demostración con la construcción auxiliar del segmento *BE* tal que el ángulo *ABE* sea igual al ángulo *DBC* y observa que el triángulo *ABE* es semejante al *BCD*.

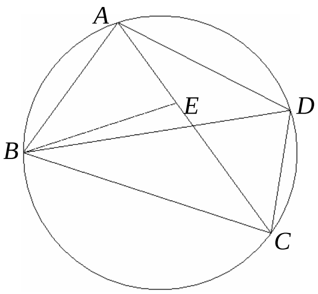

Fig.20

b) Supongamos ahora que *AD* es un diámetro del círculo (Fig.21). Entonces si $AD=2r$, el arco $BD=2\alpha$ y el arco $CD=2\beta$, prueba que el teorema de Tolomeo en a) conduce a la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,.$$

Esta es la fórmula que Tolomeo encontró más útil para la construcción de sus tablas de cuerdas.

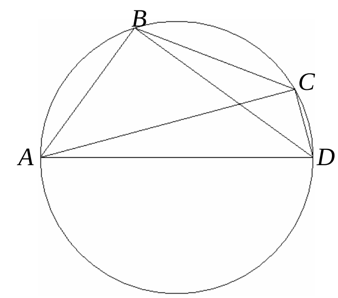

Fig.21

2. Prueba que las tres funciones trigonométricas indias cumplen la identidad siguiente:

$$jya^2\theta+ukramajya^2\theta=2r(r-cojya\ \theta)$$

3. Calcula $\operatorname{sen}x$, $\cos x$, $\tan x$, para

a) $x=\pi/4,\ \pi/3$.

b) $x=\pi/6,\ \pi/8,\ \ \pi/12$.

Sugerencia: En a) utiliza un triángulo rectángulo isósceles y uno equilátero.

4. Prueba las fórmulas trigonométricas siguientes:

a) $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$, b) $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$,

c) $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1-\tan x\tan y}$.

5. Con el auxilio de la Fig.16 prueba la siguiente relación entre la longitud de la cuerda y el seno del ángulo correspondiente:

$$PM=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,.$$

6. Justifica que:

a) $|\operatorname{sen}x|\le 1$ y $|\cos x|\le 1$, b) $\cos 2x\ge\operatorname{sen}x$, c) $\dfrac{\cos x(1-2\operatorname{sen}x)}{\cos x-\operatorname{sen}x}\le 0$.

7. a) Justifica en forma geométrica que

$$\operatorname{sen}x\le x\le\tan x\,,\qquad \text{para }\ 0\le x<\pi/2\,.$$

b) Prueba las desigualdades siguientes:

i) $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, ii) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$, para todo x.

iii) $\tan x < \dfrac{2}{\pi - 2x}$, para $x \in (0, \pi/2)$.

I.7. Relación entre las funciones trigonométricas y la exponencial. Funciones trigonométricas inversas.

Ya desde el siglo XVI, vinculado al problema de la solución de ecuaciones algebraicas, se había comenzado a considerar las cantidades *imaginarias*. Se les llamó así a las que surgían cuando se extraían raíces de índice par a los números negativos. De esta forma, por ejemplo, el talentoso médico, mecánico y matemático italiano Gerónimo Cardano considera el problema "dado un segmento de longitud 10, formar un rectángulo cuya área sea igual a 40". Este problema conduce a la ecuación

$$x(10 - x) = 40,$$

entonces comenta que, aunque cualquiera puede observar que un rectángulo así formado no puede tener un área mayor que 25, el álgebra proporciona dos soluciones

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{y} \quad 5 - \sqrt{-15}.$$

Añade que estas soluciones no tienen sentido, pero que en ellas debe haber "alguna verdad", pues

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 5^2 - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 25 - (-15) = 40.$$

Pero este tipo de cantidades "imaginarias", si bien no se les podía asignar un sentido concreto, se revelaron de suma utilidad en los cálculos. En particular, la fórmula para la solución de las ecuaciones de grados tercero y cuarto contenían radicales, en los cuales con frecuencia aparecían números negativos, pero realizando operaciones formales con ellos se obtenían soluciones reales. Las soluciones así obtenidas podía comprobarse directamente que eran "verdaderas" soluciones de la ecuación propuesta. De este modo, paulatinamente se regularizó el uso de las cantidades imaginarias, consideradas como herramientas idóneas para el cálculo. Uno de los matemáticos que contribuyó al perfeccionamiento y difusión de este instrumento fue Euler, quien la utilizó como integrante esencial de su metodología de trabajo en el Análisis, especialmente en el estudio de las funciones elementales. Como comentamos en los Preliminares, la aceptación de estas cantidades como números y la asignación de un sentido geométrico a las mismas solo se consigue a comienzos del siglo XIX, fundamentalmente bajo la influencia de Karl Gauss, de reconocido prestigio y autoridad desde muy joven, lo que llevó a nombrarlo el príncipe de las matemáticas, por sus aportes brillantes en todas las ramas de las ciencias matemáticas de la época.

Euler introdujo la notación actual de la letra i para designar $\sqrt{-1}$, esto es,

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{o} \quad i^2 = -1,$$

de modo que las soluciones de la ecuación de Cardano se representan como

$$5 + i\sqrt{15} \quad \text{y} \quad 5 - i\sqrt{15}.$$

Los **números complejos** tienen la forma general

$$c = a + ib,$$

donde a y b son números reales, denominados respectivamente la **parte real** y la **parte imaginaria** de c.

Las operaciones con estos números se realizan aplicando las propiedades usuales para los números racionales y reales, siempre teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Por ejemplo, sean

$$c = a + ib \quad \text{y} \quad c' = a' + ib',$$

entonces

$$c \pm c' = (a \pm a') + i(b \pm b'),$$

$$c \cdot c' = (aa' - bb') + i(a'b + ab').$$

En particular si consideramos el producto del número complejo c por el número $\overline{c} = a - ib$, denominado **complejo conjugado** de c, obtenemos

$$c \cdot \overline{c} = a^2 + b^2,$$

luego el módulo o valor absoluto de un número complejo c, introducido en los Preliminares, puede expresarse en la forma:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \overline{c}}.$$

En lo que sigue, veremos, siguiendo en líneas generales las ideas de Euler, cómo pueden utilizarse los números complejos para el trabajo con las funciones elementales.

La relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, puede rescribirse en la forma

$$1 = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos x - i \operatorname{sen} x),$$

factores que, "si bien imaginarios, prestan no obstante un gran servicio a la hora de combinar y multiplicar arcos". En efecto, haciendo uso de las fórmulas (3) del epígrafe anterior encontramos que

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)(\cos y \pm i \operatorname{sen} y) =$$

$$= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \pm i(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y) = \cos(x+y) \pm i \operatorname{sen}(x+y).$$

Si aplicamos sucesivamente esta relación obtenemos

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x \pm i \operatorname{sen} 2x,$$

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x \pm i \operatorname{sen} 3x,$$

y, en general

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx, \qquad (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx - i \operatorname{sen} nx. \tag{1}$$

En honor del matemático francés **Abraham de Moivre**, estas relaciones se conocen como *fórmulas de Moivre*. De Moivre nunca las formuló explícitamente, sin embargo vinculado con la solución del problema de la división de un ángulo en n partes iguales, escribió la igualdad (ejerc.2)

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} n\theta + \sqrt{-1}\cos n\theta\right)^{1/n} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} n\theta - \sqrt{-1}\cos n\theta\right)^{1/n} = \operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

La suma de las dos relaciones en (1) proporciona

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n + (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2} \\ \operatorname{sen} nx &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n - (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2i}, \end{aligned} \tag{3}$$

Estas expresiones la utilizaremos para obtener el desarrollo en serie de las funciones coseno y seno, mediante consideraciones semejantes a las realizadas en el caso de la función exponencial. Pero veremos antes dos relaciones fundamentales para los razonamientos. Supongamos que el ángulo que estemos considerando sea muy pequeño, entonces también será muy pequeño el arco correspondiente (medida del ángulo en radianes), por tanto este arco prácticamente coincidirá con la cuerda. Finalmente, la relación entre el seno de un ángulo y la cuerda correspondiente (ejerc.5, I.6), explica la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x, \quad \text{para } x \to 0. \tag{4}$$

Por otra parte, es intuitivamente claro que

$$\cos x \approx 1, \quad \text{para } x \to 0. \tag{5}$$

A continuación, consideremos $x = \dfrac{y}{N}$, donde y es un número fijo y N un número infinitamente grande, de modo que x resultará infinitamente pequeño.

Usaremos la primera de las fórmulas de (3) con $n=N$, pero desarrollando las potencias que en ella aparece mediante la fórmula del binomio. Así obtenemos

$$\cos Nx = \cos^N x - \frac{N(N-1)}{2!}\operatorname{sen}^2 x \cos^{N-2} x + \\ + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\operatorname{sen}^4 x \cos^{N-4} x - \ldots,$$

o, en forma equivalente

$$\cos y = \cos^N\left(\frac{y}{N}\right) - \frac{N(N-1)}{2!}\operatorname{sen}^2\left(\frac{y}{N}\right)\cos^{N-2}\left(\frac{y}{N}\right) + \\ + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\operatorname{sen}^4\left(\frac{y}{N}\right)\cos^{N-4}\left(\frac{y}{N}\right) - \ldots.$$

Haciendo uso de (4) y (5), Euler reemplaza $\cos\left(\dfrac{y}{N}\right)$ por 1 y $\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{N}\right)$ por $\dfrac{y}{N}$, entonces la expresión anterior se convierte en

$$\cos y = 1 - \frac{N(N-1)}{N^2 2!} y^2 + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4 4!} y^4 - \ldots \, . \tag{6}$$

A continuación, con los coeficientes de la expresión anterior, razona de forma semejante al caso de la función exponencial (I.5). En efecto,

$$\frac{N(N-1)}{N^2} = 1 - \frac{1}{N}, \quad \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right), \ \ldots$$

y todas las expresiones de la forma $(1-k/N)$ las reemplaza por 1. Notemos que como N lo hemos considerado infinitamente grande, la suma finita (6) se convierte en una suma de infinitos términos. De esa forma obtiene el desarrollo en serie del coseno:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots. \tag{7}$$

Análogamente puede procederse con la segunda fórmula de (3) para mostrar que

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots. \tag{8}$$

En las Fig.22 y 23 se ilustra la aproximación de las funciones coseno y seno por varias sumas parciales de las series anteriores. Notemos que, para valores de *x* menores que π/2, se obtienen buenas aproximaciones con valores de *n* relativamente pequeños.

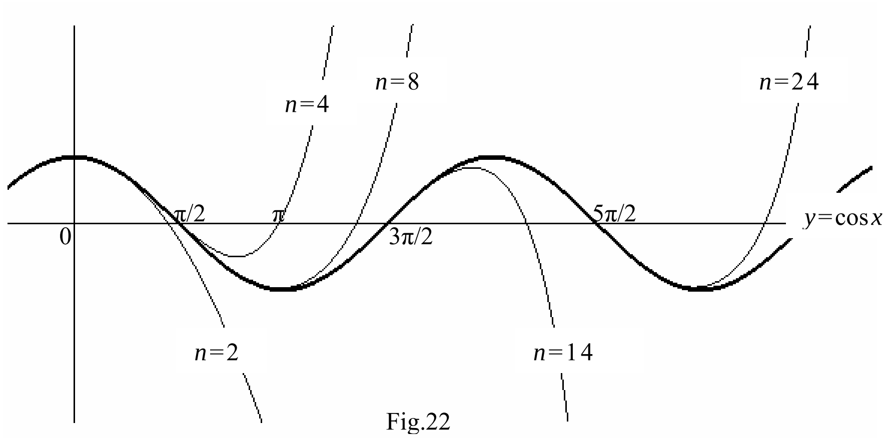

Fig.22

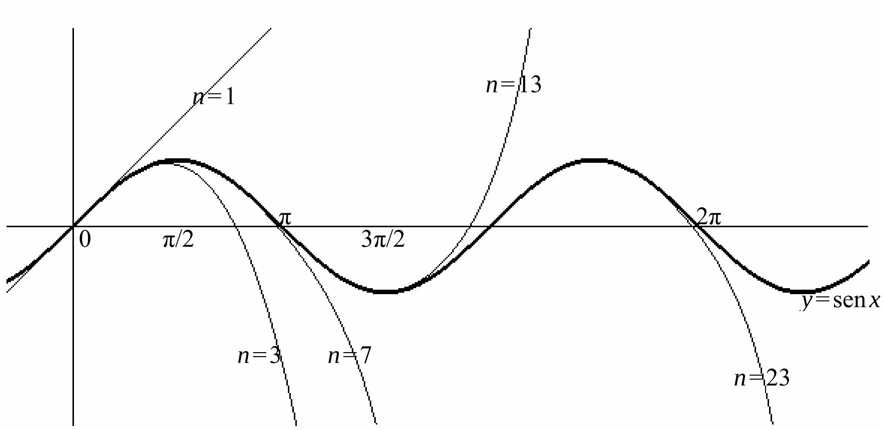

Fig.23

Observación. Comentemos que los razonamientos heurísticos anteriores son altamente riesgosos y pueden conducir a resultados erróneos. Por ejemplo, cuando reemplazamos $\cos(y/N)$ por 1, lo estamos haciendo en la base de una potencia con un exponente que simultáneamente se hace infinitamente grande. En I.6 vimos que, aún cuando la base $(1+k/N)$ se acerca a 1, la potencia $(1+k/N)^N$ no se acerca a 1, sino a e^k. En este caso el riesgo se evita porque $\cos(y/N)$ se acerca a 1 "con mayor velocidad" que $(1+y/N)$.

Como una aplicación de la fórmula (8), veamos cuál fue la primera solución de Euler al problema de Basilea (I.4):

Calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}...+\frac{1}{n^2}+...$.

Del álgebra elemental conocemos, por ejemplo, la descomposición,

$$1-Ax+Bx^2-Cx^3=(1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x), \tag{9}$$

donde $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, son las raíces del polinomio $1-Ax+Bx^2-Cx^3$ y además se cumple la relación

$$A=a_1+a_2+a_3. \tag{10}$$

Como esta relación es válida para polinomios de grado arbitrario, entonces Euler decidió aplicarla a "polinomios de grado infinito", es decir a las series en potencias de la variable x.

Del desarrollo del seno (8) se obtiene inmediatamente la representación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots .$$

Por otra parte la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene como raíces a los números $\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots$. Por tanto

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots =$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots .$$

Entonces la generalización de (10) (con el reemplazo de x por x^2) para una serie en potencias de x, permite escribir

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6},$$

por tanto

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Este método heurístico, independientemente de su audacia y belleza, no satisfacía los estándares de rigor, incluso del siglo XVIII. Por esta razón, Euler realizó numerosos cálculos aproximados del valor de la suma, todos los cuales le condujeron a la certeza de que el resultado obtenido era correcto. Años más tarde daría otras dos formas de demostración, más complicadas, pero que satisfacían mejor a los matemáticos.

Relación entre las funciones exponencial y trigonométricas. Las manipulaciones heurísticas realizadas en I.5 para obtener la expresión en serie de potencias de la función exponencial, pueden hacerse de forma totalmente análoga cuando el exponente es un número complejo, luego podemos escribir

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

Separando en la expresión anterior partes real e imaginaria, se obtiene:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right).$$

De esta forma llegamos a la famosa relación encontrada por Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x . \tag{11}$$

Si en la fórmula anterior colocamos $x=\pi$, encontramos que

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{o} \quad e^{i\pi} + 1 = 0,$$

esta última relación liga las constantes más famosas de la matemática: 0, 1, i, π, e. En una encuesta bastante reciente (1990) para determinar las más bellas fórmulas de la matemática, esta relación euleriana obtuvo el primer lugar. (Digamos además que entre los cinco primeros lugares, tres se deben a Euler).

La relación (11) facilita la interpretación geométrica de los números complejos y proporciona una nueva escritura de los mismos. Al número complejo $c=a+ib$ se puede asociar el par ordenado (a,b) y, por tanto, representarlo geométricamente como un punto o vector del plano (Fig.24). Por otra parte, de (11) vemos que $\cos\varphi$ es la parte real del número complejo $e^{i\varphi}$ y $\operatorname{sen}\varphi$ su parte imaginaria, luego $e^{i\varphi}$ puede identificarse con un punto de la circunferencia unidad. De este modo, todo número complejo $c=a+ib$ queda escrito en la forma

$$c = re^{i\varphi},$$

donde $r=|c|=\sqrt{a^2+b^2}$ y φ es el ángulo que forma con el eje de abscisas la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a,b) (Fig.24).

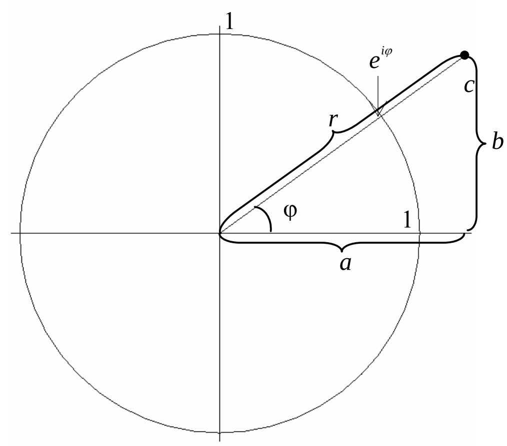

Fig.24

La función exponencial también puede definirse para valores complejos del exponente como

$$e^c = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a\left(\cos b + i\operatorname{sen} b\right).$$

Esta definición conserva la propiedad características de los exponentes:

$$e^{c+d} = e^c \cdot e^d. \tag{12}$$

Como consecuencia de (12) puede comprobarse que, al igual que las funciones trigonométricas, la función exponencial es periódica, pero su período es el número complejo $2\pi i$. En efecto,

$$e^{c+2k\pi i} = e^c \cdot e^{2k\pi i} = e^c\left(\cos 2k\pi + i\operatorname{sen} 2k\pi\right) = e^c, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$$

Esta última propiedad significa que hay infinitos números complejos a los cuales se puede elevar el número *e* para obtener un número complejo (y también real) dado. Por ejemplo:

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1, \quad e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} = i.$$

Por esta razón es natural considerar que **el logaritmo de un número complejo no tiene un valor único, sino que toma infinitos valores**.

Observación histórica. Por mucho tiempo los sabios del siglo XVII y XVIII discutieron intensamente sobre cómo definir los logaritmos de los números negativos. Son famosas las cartas intercambiadas entre Leibniz y los hermanos Bernoulli (Jacob y Johann) sobre este tema. En particular, Johann consideraba que para $x>0$, $\ln(-x)=\ln x$ y su argumentación era muy simple, pues se deducía de las reglas elementales de los logaritmos:

$$2\ln(-x) = \ln(-x)^2 = \ln\left(x^2\right) = 2\ln x$$

de ahí que $\ln(-x)=\ln x$ y en particular $\ln(-1)=0$.

Pero Leibniz observó que si se hacía $x=-2$ en el desarrollo de la serie del logaritmo:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

el resultado era

$$\ln(-1) = -2 - 2 - \frac{8}{3} - 4 - \frac{32}{5} - \ldots.$$

En consecuencia $\ln(-1)$ no puede valer 0 como se infiere del razonamiento de Johann.

Una vez más será Euler quien, con su audacia característica, promueva la idea de que los números complejos diferentes de cero tienen infinitos logaritmos. El primer razonamiento que realiza Euler es muy sugerente: Si $y = \ln x$, entonces

$$x = e^{y} = \left(1 + \frac{y}{N}\right)^{N},$$

donde N es un número infinitamente grande. Como la ecuación de grado n

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^{n} = x,$$

en el campo complejo tiene n soluciones, entonces todo número x diferente de cero debe tener infinitos logaritmos.

Por supuesto, esta justificación difícilmente convenció a Euler y pronto demostró la infinitud de los logaritmos de la forma más concreta posible, dando una regla explícita para generarlos todos: Si $z = re^{i\varphi} \neq 0$, entonces

$$e^{\log r + (\varphi + 2k\pi)i} = e^{\log r} e^{(\varphi + 2k\pi)i} = re^{i\varphi} = z,$$

por lo tanto

$$\boxed{\log z = \log r + (\varphi + 2k\pi)i.}$$

En ocasiones, para evitar la ambigüedad al trabajar con el logaritmo de los números complejos se selecciona una **rama** del logaritmo, esto es, un valor de k. Es común considerar $k=0$, la llamada **rama principal**.

Ejemplo 1. $\log 1 = 2k\pi i$ y $\log(-1) = (2k+1)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *y los valores correspondientes a la rama principal son*

$$\log 1 = 0, \quad \log(-1) = \pi i.$$

Ahora podemos considerar las potencias con base y exponente complejos. Definamos

$$a^{b} = e^{b \log a},$$

donde a y b son números complejos arbitrarios. Notemos que aquí también, dados a y b, obtenemos infinitos valores de a^b y, de forma análoga, también podemos considerar el valor correspondiente a la rama principal del logaritmo.

Ejemplo 2. Calculemos $(-1)^i$.

De acuerdo a la definición anterior, se tiene que

$$(-1)^{i} = e^{i \ln(-1)} = e^{-(2k+1)\pi}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y el valor correspondiente a la rama principal es $(-1)^{i} = e^{-\pi}$.

Otra consecuencia inmediata de la importantísima fórmula (11) es que permite una expresión de las funciones trigonométricas mediante la exponencial. Sumando o restando esta relación con su compleja conjugada

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x,$$

obtenemos inmediatamente

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{13}$$

de donde

$$\tan x = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}\right) = i\left(\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{-ix} + e^{ix}}\right). \tag{14}$$

Íntimamente relacionadas con las funciones trigonométricas están las llamadas **funciones trigonométricas inversas**. La **función inversa** del seno o función **arcoseno** se definen como el valor del arco cuyo seno es x. Geométricamente esto significa que si x denota la longitud de un cateto en un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 1, entonces $\operatorname{arcsen} x$ denotará el ángulo que se opone a dicho cateto (Fig.25).

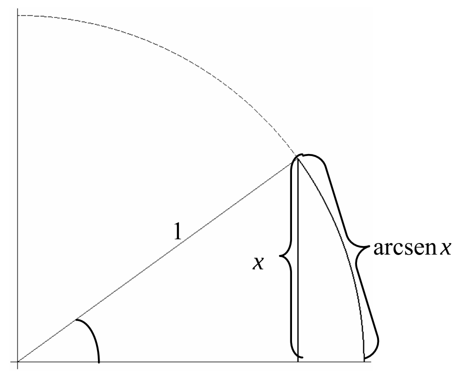

Fig.25

Definiciones análogas se tienen para las funciones inversas del coseno y de la tangente: $\arccos x$ y $\arctan x$.

Debido al comportamiento de las funciones trigonométricas, en particular a su periodicidad, es claro que habrá infinitos arcos diferentes cuyo seno (o coseno, o tangente) sea un cierto valor x. De modo que si queremos que estas funciones estén bien determinadas, es necesario fijar una rama de estas funciones. Se suelen considerar como **ramas principales** las que satisfacen las relaciones siguientes:

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{si y solo si} \quad x = \operatorname{sen} y, \qquad -1 \le x \le 1,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2,$$

$$y = \arccos x \quad \text{si y solo si} \quad x = \cos y, \qquad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi,$$

$$y = \arctan x \quad \text{si y solo si} \quad x = \tan y, \qquad -\infty < x < \infty,\ -\pi/2 < y < \pi/2.$$

Hagamos uso de (14) para escribir

$$x = \tan y = \frac{1}{i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}},$$

de donde, despejando, se obtiene

$$e^{2iy} = \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

y aplicando logaritmos

$$y = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

Si en la expresión (10, I.5), colocamos ix en lugar de x obtenemos

$$\frac{1}{2i}\ln\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1}{i}\left(ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} + \frac{(ix)^7}{7} + \ldots\right),$$

es decir,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

La fórmula anterior, para el valor particular $x = 1$, produce una expresión en forma de serie para el número π, que muchos conocen como serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots . \tag{15}$$

A pesar de la indudable belleza de esta igualdad, ella es poco útil desde el punto de vista del cálculo aproximado del número π. Mediante el cálculo de los perímetros de polígonos inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, 48, 96 lados, ya Arquímedes había obtenido la doble desigualdad

$$3{,}1408\ldots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots,$$

la cual proporciona de forma exacta las tres primeras cifras decimales de π: $\pi = 3{,}141\ldots$. Para obtener semejante aproximación con la serie (15) es necesario calcular ¡500 sumandos!

Mucho mejor resultado puede lograrse utilizando la igualdad $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right),$$

pues esta serie converge más rápidamente que (15).

El deseo de calcular cada vez más cantidad de cifras exactas del número π motivó a los matemáticos para la búsqueda de relaciones trigonométricas ingeniosas que proporcionaran series con una convergencia cada vez más rápida.

Ejemplo 3. De la fórmula (ejerc.6b)

$$\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) = \arctan u + \arctan v,$$

Euler deduce que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3},$$

cuya serie converge mucho mejor que (15).

Comentemos que el cálculo de cada vez mayor cantidad de cifras decimales del número π ha sido y es un reto matemático en todas las épocas. En un inicio la motivación principal era poder determinar si existía periodicidad en sus cifras decimales, lo que significaría la racionalidad de π. Tal motivación cesó cuando en 1767 se demostró que π era un número irracional, época en la cual ya se conocían 112 cifras correctas de este número. Por esa época, aún quedaba la interrogante de si π es un número algebraico, es decir, si es o no raíz de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, o por el contrario es trascendente. Pero, a pesar de que en 1882 se demostró la trascendencia de π y ya se conocían más de 500 dígitos correctos, los esfuerzos por encontrar una aproximación cada vez más exacta se ha mantenido hasta la época actual. Con el uso de algoritmos sumamente sofisticados y con la potencia de las modernas supercomputadoras se han conseguido calcular más de ¡6 mil millones de cifras exactas de π!

Posiblemente el lector se estará preguntando ¿para qué son necesarias tamaña cantidad de cifras? En realidad para realizar cálculos aproximados sumamente precisos son suficientes bastante menos de 100 cifras. Sin embargo, existen otras razones muy interesantes que sustentan esta motivación. Una de estas razones es que estos cálculos brindan una herramienta excelente para probar el desempeño de nuevos programas computacionales e incluso errores de diseño en los equipos. Por ejemplo, en 1986 un error en el funcionamiento de una supercomputadora fue detectado a través de la ejecución de un programa para calcular π.

Ejercicios

1. Muestra que, cuando c y d son números complejos cualesquiera, $e^{c+d} = e^c \cdot e^d$.

2. a) Prueba por el método de inducción completa las fórmulas de Moivre.

b) Justifica que las fórmulas (1) y la (2) son equivalentes.

c) Explica por qué (2) permite resolver el problema de dividir un ángulo en n partes iguales.

3. Comprueba que:

a) $i(\pi/2 + 2k\pi)$, $k = 0,1,2,...$ son todos valores de $\log i$,

b) $i^i = e^{-\pi/2} \approx 0,20787958$, (El resultado $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\pm 2k\pi}$ aparece en una carta de Euler a Christian Goldbach en junio de 1746 y según palabras de Euler "es más destacable porque es real e incluye infinitos valores reales diferentes... lo que me parece extraordinario"

4. Prueba, usando las fórmulas de Moivre, que:

a) $(-1-i)^{15} = -128 + 128i$.

b) $i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

5. Halla las sumas:

a) $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$, b) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{sen}\, k\varphi$, c) $\sum_{k=0}^{n} \cos k\varphi$.

6. Prueba que:

a) $\mathrm{arcsen}\, x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1$.

b) $\arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) = \arctan u + \arctan v$.

c) $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

Observación. La serie para π que puede obtenerse de la igualdad en c) proporcionó un algoritmo que permitió, en 1873, calcularlo con 707 cifras.

7. Traza los gráficos aproximados de las ramas principales de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.

8. Prueba las desigualdades siguientes:

a) $\mathrm{arcsen}\, x > x,\ x \in (0,1)$, b) $|\arctan x| \le |x|$, para todo x.

9. Construye los gráficos de las curvas:

a) $y = \mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}\, x)$, b) $y = \mathrm{arcsen}(\mathrm{sen}\, x)$.

Ejercicios complementarios.

1. En el triángulo de Pascal (Fig.1), prueba que un elemento cualquiera es la suma de todos los elementos de la diagonal a su derecha situados en las filas superiores a él.

2. **Polinomio de interpolación de Lagrange**. Cuando las abscisas de los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ no son equidistantes, Lagrange dio una forma de encontrar un polinomio que pasa por estos puntos:

a) Comprueba que las expresiones

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

son polinomios de grado n que satisfacen $l_k(x_i) = 0,\ k \neq i,\quad l_i(x_i) = 1$.

b) El polinomio

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

resuelve el problema de interpolación para los puntos dados.

3. De los dos desarrollos siguientes, elige cuál consideras correcto y explica el porqué:

i) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \ldots = 1$

ii) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}{2} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}{2} + \ldots = \frac{1}{2}$

7. El algoritmo siguiente constituye otra forma de asignar una suma a una serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots\ .$$

i) Calculamos las sumas parciales S_n, ii) Consideramos los promedios de éstas:

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}\ .$$

iii) Si los valores de σ_n se acercan tanto como se quiera a un valor σ, este valor lo denominamos *suma de la serie por el método de los promedios*.

a) Justifica que la serie 1−1+1−1+1−1+… tiene una suma por el método de los promedios y hállala.

b) Prueba que la serie geométrica de razón r, con $|r| < 1$, por el método de los promedios tiene la misma suma que la hallada en I.3.

c) ¿Será la serie 1+1+1+1+… sumable por el método de los promedios?

d) Analiza si la serie 1−1+0+1−1+0+1−1+0+… tiene una suma por el método de los promedios y compara con el resultado de a).

4. Con la notación

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

prueba que

a) $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n < \ldots < e < \ldots < b_n < \ldots b_3 < b_2 < b_1$.

b) $b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$.

5. Considera una circunferencia cualquiera, prueba que:

a) Si a_n denota el área del polígono inscrito con n lados, entonces $a_{2n} = a_n \cdot \sec \pi/n$.

b) Comienza con un cuadrado inscrito en la circunferencia y usando a) reiteradas veces deduce la fórmula, debida a Vieta, para π:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

6. Utilizando razonamientos similares a los expuestos para $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ¿Podrías hallar el valor de la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$?

7. El sabio alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) introdujo las llamadas **funciones hiperbólicas**:

$$\operatorname{senh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

a) Verifica las identidades siguientes:

i) $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$, ii) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\operatorname{senh} x\operatorname{senh} y$,

iii) $\operatorname{senh}(x\pm y)=\operatorname{senh} x\cosh y\pm\cosh x\operatorname{senh} y$.

b) Encuentra fórmulas para $\operatorname{senh} 2x,\ \cosh 2x,\ \operatorname{senh}\frac{x}{2},\ \cosh\frac{x}{2}$.

c) Muestra que $\operatorname{senh} ix=i\operatorname{sen} x$, $\cosh ix=\cos x$

d) Encuentra las representaciones en forma de serie para las funciones seno y coseno hiperbólico.

e) Las inversas de las funciones hiperbólicas, $\arg\operatorname{senh}$, $\arg\cosh$ y $\arg\tanh$ pueden definirse de forma semejante al caso de las funciones trigonométricas. Prueba que

$$\operatorname{argsenh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad \operatorname{argcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

$$\arg\tanh x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Capítulo II.
Introducción al Cálculo Diferencial.

Pasaron 7 años entre la publicación de la *Introducción al Análisis de los Infinitos* y el *Tratado de Cálculo Diferencial* de Leonard Euler. Pero las técnicas con diferenciales para el estudio analítico de las curvas se venían desarrollando, al menos, desde que apareció la primera memoria de Leibniz en 1684 titulada pomposamente: *Nueva investigación de los máximos y mínimos y además de las tangentes, aplicable también al caso de las expresiones fraccionarias e irracionales, y el trascendental cálculo relativo a esta investigación.* Después de Leibniz y antes que Euler, sin dudas, los hermanos Jacob y Johann Bernoulli, perfeccionaron esas técnicas y las aplicaron también con eficacia a problemas de extremos y tangentes, pero mucho más complejos que aquellos resueltos por Leibniz.

El primer texto con cierto afán didáctico de promover el uso del cálculo diferencial fue escrito por el matemático de mayor prestigio en la Francia absolutista de Luis XIV, **Guillaume François, marqués de L'Hôpital,** basado en ideas compradas a Johann Bernoulli. Este texto se tituló *Análisis de los infinitesimales para el estudio de las líneas curvas* y como se ve tampoco incluía en su título el término de cálculo diferencial, aunque ya en sus primeras páginas define *diferencial* como *la parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente*. Describió la notación a utilizar y explicó geométricamente la idea de diferencial. L'Hôpital presentó su texto en forma de problemas de carácter geométrico, que resuelve con ayuda de los diferenciales, pero no se interesó en ningún momento por la cuestión de la existencia de las cantidades infinitesimales. Para L'Hôpital éstas siempre existen, pueden ser representadas geométricamente y se calcula con ellas siguiendo las reglas que se describen en su libro y que nosotros expondremos en este capítulo.

En Italia va a aparecer otro texto interesante, también escrito en el espíritu de los diferenciales de Leibniz, pero esta vez por una talentosa mujer, **María Gaetana Agnesi.** Nos referimos al *Tratado de Análisis para el uso de la juventud italiana* publicado en 1748, a través de una edición costeada privadamente por la propia Agnesi. Este libro le produjo a su autora mucha fama. Es un texto cuyo fin es esclarecer los conceptos y provee de numerosos ejemplos cuidadosamente seleccionados con este fin. Tiene una sección sobre máximos y mínimos, donde Agnesi presenta numerosos problemas de tipo geométrico como por ejemplo, cómo *cortar una línea recta en un punto de modo que el producto de las longitudes de un segmento y el cuadrado de otro sea maximal* o el de *encontrar la línea de longitud mínima la cual pasa a través de un vértice de un rectángulo e interseca las extensiones de los dos lados opuestos*.

Nos parece que lo dicho es suficiente para dejar claro que en 1755 cuando aparece el *Tratado de Cálculo Diferencial* de Euler ya se habían publicado varias obras mostrando los beneficios del cálculo introducido por Leibniz para la resolución de los problemas de máximos y mínimos, así como otros problemas donde la idea geométrica de tangente jugaba un papel principal. Sin embargo, nadie le había dado el enfoque analítico puro que encontramos en la monumental obra de Euler de 1755. No cabe la menor duda acerca de que Euler conocía muy bien y utilizaba las numerosas aplicaciones del cálculo diferencial a la geometría, no obstante, en el *Tratado de Cálculo Diferencial* no encontramos alguna aplicación geométrica y ni tan siquiera gráficos explicativos. Se observa un gran contraste con los textos de análisis anteriores, donde abundan las consideraciones geométricas. De esta manera se pretendía mostrar la independencia del análisis de las otras ramas de la matemática pura: el álgebra y la geometría. Comenzaba así un largo camino hacia su transformación en una disciplina autónoma dedicada al estudio de las funciones y no a la investigación de las curvas geométricas, ni de las ecuaciones algebraicas, con un cuerpo de procedimientos fundamentados en el concepto diferencial.

Veamos enseguida una muestra del tipo de problemas que motivó la introducción de los nuevos métodos diferenciales y un conjunto de ideas capitales que sistematizadas constituyen hoy lo que llamamos *Cálculo Diferencial*.

II.1. Los problemas generadores.

En el estudio de las funciones es necesario tener una idea general de como varía la función tanto *localmente* (en las proximidades de un punto dado) como *globalmente* (para todos los valores en que tiene sentido su expresión analítica). Los métodos geométricos y el álgebra que estudiamos en la enseñanza secundaria no nos permiten responder con precisión a multitud de preguntas acerca del comportamiento de las curvas planas, aunque éstas representen el gráfico de una función algebraica bien conocida. Por ejemplo, supongamos que necesitamos encontrar entre todos los pares de números positivos que suman 100 aquel que arroja el resultado máximo al multiplicar el cubo del primero por el cuadrado del segundo. Cualquier estudiante con un mínimo de madurez matemática comprende que se trata de hallar un número x entre 0 y 100 de modo que la expresión $x^3(100-x)^2$ sea lo mayor posible. Pero la expresión anterior es un polinomio, así que el problema se reduce a encontrar el máximo valor del polinomio

$$P(x) = x^3(100-x)^2 = x^3(x^2 - 200x + 10\ 000) = x^5 - 200x^4 + 10\ 000x^3,$$

cuando la variable x toma valores entre 0 y 100. Mediante el gráfico del polinomio $y=P(x)$ (Fig.1), podemos dar una interpretación geométrica de este problema: se requiere la abscisa x del punto donde la curva posee "una cumbre". El análisis del gráfico de la Fig.1 nos permite estimar esa abscisa en alrededor de 60. Sin embargo, armados solo con nuestros conocimientos de geometría elemental y de álgebra, no podemos dilucidar cuál será exactamente el valor de x que produce el resultado máximo. Claro que podemos mejorar nuestra idea aproximada del valor máximo de $P(x)$, analizando algo más detalladamente el gráfico del polinomio y haciendo uso eficiente de alguno de los programas computacionales que hoy son tan populares. Pero ¿cómo podríamos encontrar el valor exacto? ¿qué hubieran hecho los interesados en resolver tales problemas de optimización en épocas cuando no solo no existían las computadoras electrónicas, sino ni siquiera existían buenos algoritmos de

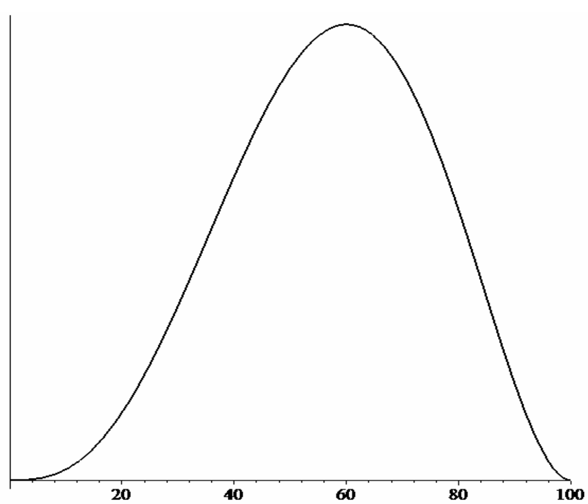

Fig.1

resolución de ecuaciones algebraicas y no se había desarrollado una técnica eficaz para representar geométricamente polinomios de un grado superior al tercero? ¿podremos confiar plenamente en un gráfico trazado con el auxilio de alguno de los actuales programas computacionales? El ejemplo siguiente muestra que estos recursos gráficos son muy sugerentes si se utilizan adecuadamente y su información se contrasta con los resultados analíticos, pero pueden conducirnos a ideas equivocadas cuando son empleados en forma mecánica.

Supongamos que queremos saber si la curva $y=100x^3-60x^2+11x-0{,}6$ posee alguna "cumbre". En la Fig.2 a) aparece el gráfico de esta curva proporcionado por uno de estos programas computacionales. A partir de este gráfico podríamos responder que, al menos para valores de x en el intervalo $[-2,2]$, esta curva no posee "cumbres". Respuesta completamente errónea, como lo muestra el gráfico más preciso de la Fig.2 b).

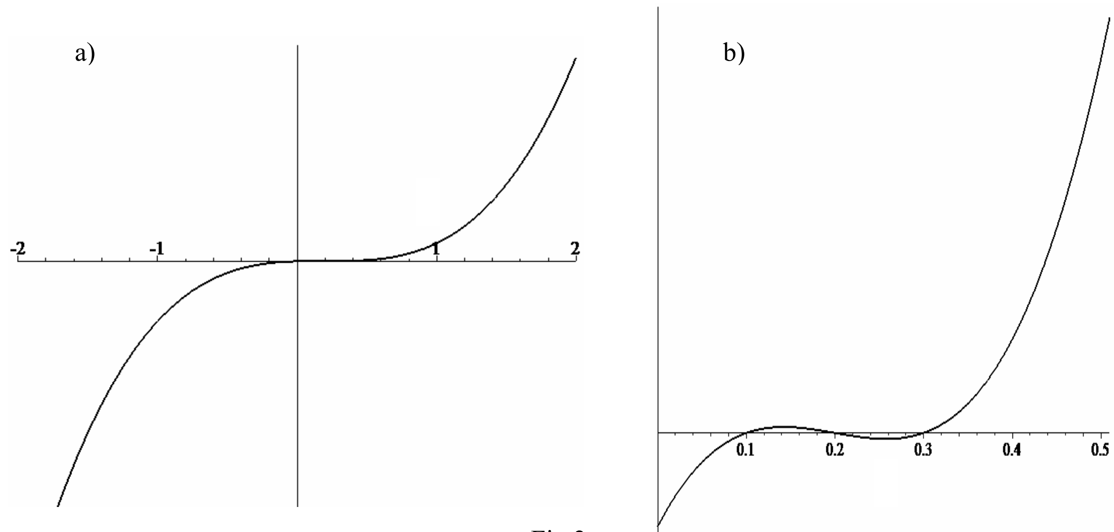

Fig.2

El problema de localizar los puntos de máximo o mínimo ("cumbres" o "valles") de una curva dada tiene tras sí una larga historia que se remonta a la antigüedad. No obstante, no es hasta el siglo XVII, que se elaboran procedimientos de búsqueda eficaz y suficientemente generales. Entre los primeros sabios que expusieron ideas claras y plausibles para el ataque de tales problemas, está un célebre abogado francés, "aficionado" a las matemáticas, llamado **Pierre de Fermat**. Primeramente, Fermat estudió los lugares geométricos dados por ecuaciones de la forma $y=x^n$ y, más tarde, para curvas polinómicas generales, encontró un método ingenioso de búsqueda de los puntos de máximo y mínimo.

Para la determinación de extremos (puntos de máximo o mínimo), Fermat comparó los valores de la función f en el punto de interés con los valores en otros puntos próximos y observó que cuando se trata de un punto cualquiera, estos valores son claramente diferentes, pero cuando el punto se encuentra en una cumbre o en un valle de una curva la diferencia era casi imperceptible. En la Fig.3 el lector puede observar que la diferencia entre los valores de la función en los puntos x_1 y x_2 (o entre x_7 y x_8) es mucho mayor que la diferencia correspondiente a los puntos x_3 y x_4 (o entre x_5 y x_6), sin embargo la distancia entre todas estas parejas de abscisas es siempre la misma. De este modo Fermat redujo, en esencia, el problema de hallar los puntos de máximos o mínimos al siguiente algoritmo:

Algoritmo de Fermat.

a) Forma el cociente

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$$

y, después de simplificar, pone $e=0$.

b) Iguala a cero el resultado obtenido en a) y se resuelve la ecuación correspondiente. Esto le proporciona los valores de x donde el gráfico de f puede tener máximos o mínimos.

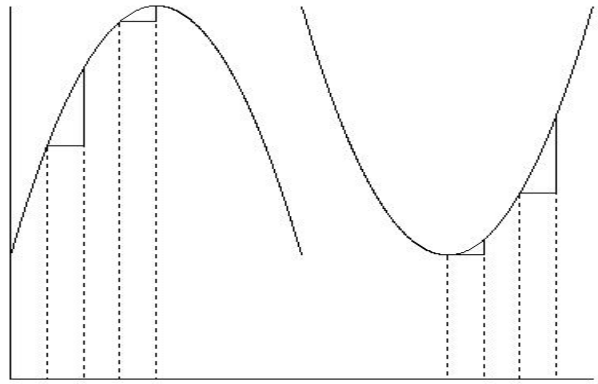

Fig.3

Ejemplo 1. Apliquemos el método de Fermat para obtener los puntos donde $f(x)=x^3-3x+2$ puede tener máximos o mínimos.

El cociente indicado en a) es:

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}=\frac{(x+e)^3-3(x+e)+2-(x^3-3x+2)}{e}=\frac{3x^2e+3xe^2+e^3-3e}{e},$$

esto es,

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}=3x^2+3xe+e^2-3.$$

Si hacemos $e=0$, la expresión en el miembro derecho se convierte en $3x^2-3$.

Así que, la ecuación que se debe resolver en b) es $3x^2-3=0$.

Luego los puntos de máximo y mínimo solo pueden ser (1,0) y (−1,4). Para determinar si estos puntos son efectivamente o no puntos de extremo de $f(x)$, escribamos, por ejemplo

$$f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2=(x-1)^2(x+2).$$

Entonces es fácil ver que $f(x)\geq 0$ cuando $x\geq -2$, en particular en todos los puntos cercanos a 1, los valores de la función son mayores que el valor que alcanza en el propio punto. De modo que, el punto (1,0) es de mínimo de la función.

En forma semejante puede compararse el valor 4, que la función alcanza en −1, con los valores que toma en los puntos cercanos a él:

$$f(x)-4=(x+1)^2(x-2)$$

y este producto evidentemente es negativo en puntos próximos a $x=-1$. Esto significa que la función tiene en (−1,4) un punto de máximo.

Te proponemos (ver ejerc.1) que precises la localización de los puntos donde alcanzan valores máximos y mínimos los dos primeros polinomios considerados.

Esta misma idea también la va a usar Fermat para resolver otro antiguo e importante problema geométrico: *realizar el trazado de tangentes a las líneas curvas*. En la época era usual definir **tangente a una curva** como aquella recta tal que toda la curva se encuentra situada a un mismo lado de ella y ambas tienen común un solo punto.

Veamos como procede Fermat para trazar la tangente a una parábola:

Considera la parábola *BDN* y un punto *B* sobre ella en el cual se quiere encontrar la tangente *BE* (Fig.4). Para determinar esta recta basta encontrar el punto *E* situado sobre el eje de la parábola y unirlo con el punto dado *B*.

Seleccionemos el punto *O* sobre la recta *BE* y tracemos su ordenada *OI*, así como la ordenada *BC* del punto *B* sobre la parábola. Como *B* está dado, se conoce el segmento *BC*, luego también el punto *C* y el segmento *CD*. Denotemos $CD=d$, $CE=a$, $CI=e$, así que, para determinar el punto *E*, basta con encontrar el valor de *a*.

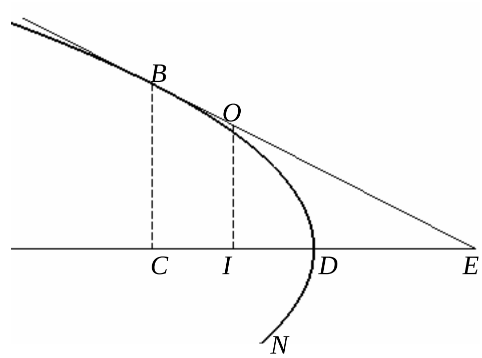

Fig.4

La parábola se puede definir como el lugar geométrico de los puntos tales que tiene lugar la proporcionalidad

$$\frac{CD}{DI}=\frac{BC^2}{OI^2}.$$

Entonces, al ser el punto *O* exterior a la parábola se debe cumplir

$$\frac{CD}{DI}>\frac{BC^2}{OI^2},$$

pero los triángulos *BCE* y *OIE* son semejantes, luego se obtiene

$$\frac{d}{d-e}>\frac{a^2}{a^2+e^2-2ae},$$

de donde $de^2-2dae>-a^2e$. Pero, si *e* es muy pequeño, el punto *O* está muy cerca de la parábola y por ello Fermat sustituye la desigualdad (>) por una aproximación (≈). Seguidamente divide por *e* y obtiene

$$de+a^2\approx 2da.$$

Finalmente elimina el sumando de y llega a que

$$a=2d.$$

Paralelamente, en el mismo siglo XVII, con los trabajos de Galileo, Kepler, Huygens y otros sabios, que tenían el propósito de estudiar matemáticamente los fenómenos físicos, se pusieron de moda los problemas relacionados con el estudio del movimiento mecánico. A través del experimento físico se infería la ley del movimiento $E=y(t)$, es decir, la forma en que variaba la posición del móvil en el tiempo. Veamos brevemente en que consiste, en el caso más sencillo, el problema fundamental de la cinemática que se investigaba en el siglo XVII.

Consideremos un móvil que se desplaza a lo largo de una línea recta durante un intervalo de tiempo desde cierto instante *t* hasta el instante $t+\Delta t$ (Fig.5), entonces en ese lapso de tiempo el espacio se incrementa en

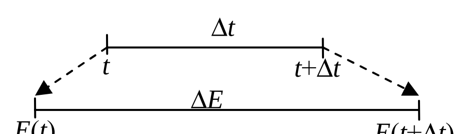

Fig.5

$$\Delta E=E(t+\Delta t)-E(t).$$

El cociente $\frac{\Delta E}{\Delta t}$, denominado *velocidad media*, en cierta manera caracteriza la rapidez con que el móvil se desplaza en el intervalo $(t, t+\Delta t)$. Si el movimiento es uniforme, esto es, E es una función lineal de t de la forma $E = v_0 t + E_0$, entonces la *velocidad media,* $\frac{\Delta E}{\Delta t} = v_0$, es una constante que indica la velocidad del movimiento rectilíneo uniforme.

En el caso de un movimiento no uniforme la velocidad media v_m depende tanto del instante t como de la longitud del intervalo Δt. Es claro que el punto puede moverse de diferentes formas y no obstante, la velocidad media para un mismo intervalo de tiempo ser la misma. Esto significa que la magnitud v_m no caracteriza de forma satisfactoria el movimiento en dicho intervalo. Además, para un mismo instante t y una misma ley de movimiento hay diferentes valores de la velocidad media en dependencia de la longitud Δt del intervalo considerado. Por tanto, resulta natural caracterizar el movimiento mediante la *velocidad instantánea*, esto es, el valor que toma la velocidad media cuando la longitud considerada para el intervalo de tiempo Δt se hace muy pequeña.

Como es común en el trabajo científico, después que se hicieron suficientes avances en el estudio del movimiento mecánico, esto es en la cinemática, los sabios se interesaron por aplicar los resultados encontrados para resolver otros problemas que en la época urgían de solución, como eran los problemas de búsqueda de extremos y el trazado de la tangente.

Uno de los primeros en utilizar métodos cinemáticos en los razonamientos matemáticos fue el francés **Gilles Personne de Roberval**. El método cinemático de construcción de la tangente se conoce como *método de Roberval* aunque realmente varios sabios lo utilizaron independientemente con relativa eficacia.

El método cinemático considera una curva como la trayectoria de un punto en movimiento y a la tangente como la dirección que tiene el movimiento en un instante dado. Cuando el movimiento que genera la curva puede expresarse como combinación de dos movimientos suficientemente simples, entonces la dirección instantánea del movimiento puede ser determinada por composición de los movimientos constituyentes.

Roberval describió este método en forma sistemática y exhaustiva mostrando su efectividad para numerosas curvas. Consideremos el trazado de la tangente a la parábola según el método de Roberval. Para ello describiremos la parábola como:

El lugar geométrico de los puntos E que equidistan del punto fijo A y de una recta fija BH (ver Fig.6).

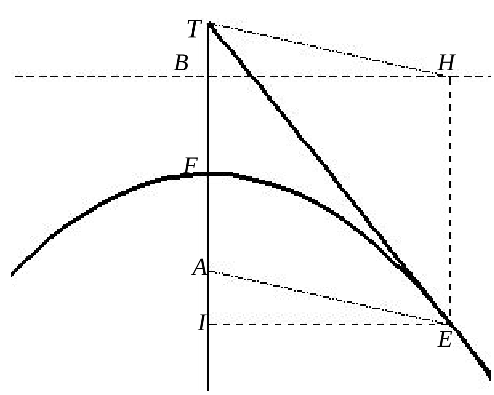

Fig.6

El punto A es el denominado *foco* de la parábola, la recta BH su *directriz* y el punto F el *vértice*. Así que para todo punto de la curva los segmentos AE y HE son iguales. Entonces Roberval concluye que eso significa que las componentes de la velocidad en estas dos direcciones son iguales, por lo que la recta tangente biseca al ángulo AEH. Esta conclusión brinda un método para construir la tangente en un punto cualquiera de la curva. Obsérvese que el método de Roberval para la parábola conduce al mismo resultado que el de Fermat (ver ejerc.2).

De forma análoga Roberval describe cómo trazar las tangentes a la elipse y la hipérbola. Pero lo más interesante de este método no es su aplicación al trazado de tangentes a curvas cuya ecuación se expresa mediante un polinomio (curvas algebraicas), lo cual podía ser realizado utilizando el método ideado por Fermat. La verdadera importancia del mismo estriba en su posibilidad de aplicación a los otros tipos de curvas, las denominadas mecánicas, cuestión ésta que Roberval desarrolló en su obra (ver ejerc.3 y 4).

Pero el método de Roberval todavía presentaba insuficiencias cuando se trataba de generalizar y aplicar a algunos tipos de curvas conocidas. Un paso decisivo en el hallazgo de un algoritmo general para determinar la tangente a cualquier curva y a la vez, resolver el problema de la descripción matemática del movimiento continuo, lo dio precozmente el célebre sabio **Isaac Newton**.

El basamento de los razonamientos de Newton es de tipo cinemático, que como dijimos antes estaba muy de moda en el s.XVII. Parte de dos conceptos básicos: el concepto de *fluente*, como magnitud que varía en dependencia del tiempo y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo. Newton considera la trayectoria del punto móvil como una curva, susceptible de ser representada a través de un desarrollo en potencias de la variable independiente y esa suma de potencias o serie infinita que la representa era también un instrumento primordial de trabajo, una forma ágil de manejar las curvas.

En su obra magna sobre el nuevo cálculo "*Método de las fluxiones y de las series infinitas*", escrita en 1671, pero impresa postmorten en 1736, Newton explica sus ideas al respecto:

> "*Considero en este lugar cantidades matemáticas que no consisten de pequeñas partes; sino que son descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas, y de aquí generadas, no por yuxtaposición de partes, sino por el movimiento constante de los puntos*...
>
> *Considerando, que las magnitudes que crecen, en tiempos iguales son más o menos grandes, según que crezcan con una velocidad mayor o menor, busco un método para determinar las magnitudes a partir de las velocidades de sus movimientos o incrementos que las engendran; y denomino fluxión a la velocidad de esos movimientos o incrementos, mientras que las magnitudes engendradas tomaran el nombre de fluentes*..."

Es natural que si por diversas razones tanto técnicas, como científicas, los problemas geométricos de trazado de la tangente, de hallazgo de valores óptimos y de análisis del movimiento mecánico, se pusieron de moda en el s.XVII, aparecieran varios sabios que como Newton se consideraran fundadores de la teoría general que respondiera con mayor eficacia y eficiencia a todas estas interrogantes. Como antecesores hemos mencionado a Fermat y a Roberval, pero fueron muchos más los que se pudieran considerar promotores de un algoritmo universal. Entre los contemporáneos a Newton se destaca el filósofo, diplomático e historiador **Gottfried Wilhelm Leibniz**, sabio alemán que elaboró su teoría independiente de Newton. La metodología de Leibniz se llamó *cálculo de los diferenciales* y en definitiva fue la que predominó. Por tanto, hoy seguimos llamando *Cálculo Diferencial* a la parte del Análisis Matemático que abarca las herramientas clásicas útiles para abordar tanto los problemas generadores que mencionamos anteriormente, como muchos otros que sobrepasan los límites de este curso introductorio.

En el epígrafe siguiente expondremos algunos elementos del cálculo de los diferenciales de forma aproximada a como era comprendido en los siglos XVII y XVIII. Para ello vamos a auxiliarnos del primer libro sobre esta temática: *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, que se publicó en 1696 y también haremos uso del texto *Calculo Diferencial* de Leonard Euler.

Ejercicios

1. Usando el algoritmo de Fermat, determina los puntos donde alcanzan sus valores máximos y mínimos las funciones

a) $P(x) = x^5 - 200x^4 + 10\ 000x^3$, b) $P(x) = 100x^3 - 60x^2 + 11x - 0{,}6$

2. Usa las Fig.4 y 6 para probar geométricamente que los métodos de Fermat y Roberval para la determinación de la tangente a la parábola conducen al mismo resultado.

4. Halla la pendiente de la tangente a la parábola $y=x^2$

a) en el origen de coordenadas,

b) en el punto $(-2,4)$,

c) en los puntos de intersección de la parábola con la recta $y=3x-2$.

5. Consideremos la llamada *espiral de Arquímedes*, que fue estudiada por este sabio en su *Tratado sobre las espirales*. Esta curva se genera por el movimiento de la recta *OP* que gira en torno al punto fijo *O*, mientras que simultáneamente el punto *P* se mueve a lo largo de la recta con velocidad constante (ver Fig.7).

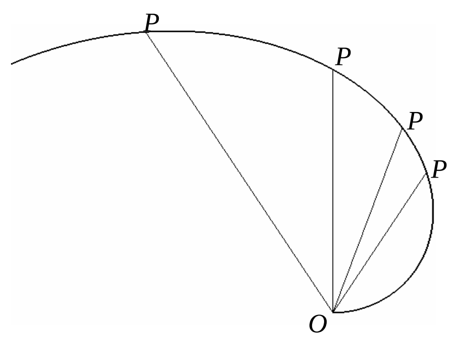

Fig.7

a) Prueba que esta curva puede darse en coordenadas polares mediante la ecuación $r=a\varphi$, donde a es una constante.

b) Usando el método de Roberval indica cómo puede trazarse la tangente a esta curva.

6. La cicloide se describe mecánicamente por el movimiento de rotación de un círculo de radio $OC=a$ (ver Fig.8) que gira sin resbalar sobre una recta *OX*. En una nueva posición del círculo su centro estaría en el punto *D* y el punto de contacto se desplazará a la posición *N*. De este modo el radio *OC* girará un ángulo dado por *MDN* que denotaremos por *t*.

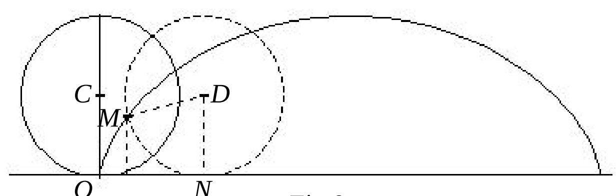

Fig.8

a) Prueba que la cicloide está dada en forma paramétrica por

$$x = at - a\,\mathrm{sen}\,t,\ \ y = a - a\cos t\,.$$

b) Siguiendo el método de Roberval, explica cómo puede trazarse la tangente a la cicloide.

II.2. Diferencial. Propiedades elementales.

Como dijimos en la introducción a este capítulo el libro de *Bernoulli-L'Hôpital* comienza con la definición del diferencial de una variable:

> *Diferencial es la parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente*.

Seguidamente introduce la notación a utilizar y explica geométricamente la idea de diferencial (Fig.9): Sea *AMB* una línea curva cualquiera y *M* un punto de la curva que tiene como abscisa el valor *OP* y como ordenada el segmento *MP*. Consideremos otra ordenada *pm* "infinitamente cercana" a la primera. Tracemos *MR* paralela al eje *OX*, entonces *Pp* será el diferencial de *OP*; *Rm* el de *PM* y *Mm* el del arco *AM*. Así que el *diferencial* de una cantidad variable no es otra cosa que *el incremento que ella sufre, cuando este incremento es considerado muy pequeño*. En el lenguaje usual, el término "incremento" se asocia a un "aumento", sin embargo, en la definición aquí considerada la variable puede aumentar su valor, en este caso el incremento será positivo, pero también su valor puede disminuir y entonces el incremento resultará negativo.

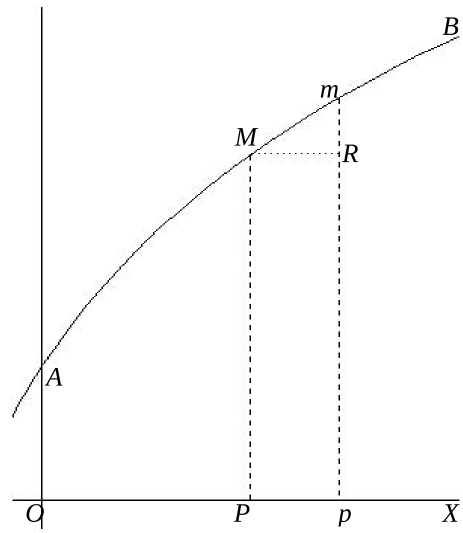

Fig.9

La notación para el diferencial de una variable indicada por una sola letra será anteponer a esa letra el símbolo *d*. Por ejemplo, si escribimos

$$OP = x\,; \quad PM = y\,; \quad AM = s\,,$$

los diferenciales respectivos serán

$$dx = Pp\,; \quad dy = Rm\,, \quad ds = Mm\,;$$

Es consecuencia inmediata de la definición dada que:

Regla 1. El diferencial de una cantidad constante es nulo.

A continuación, en el libro se asumen sin demostración dos *suposiciones básicas*, en las cuales se apoyarán todos los razonamientos posteriores:

Postulado 1. *Se consideran como iguales dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad que es infinitamente pequeña en relación con ellas*.

Postulado 2. *Una línea curva es considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña, o (lo que es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño.*

Observaciones.

1. La idea expresada en el postulado 1 ya fue utilizada en múltiples ocasiones en el capítulo anterior cuando en una suma eliminábamos aquellas cantidades que eran infinitamente pequeñas respecto al sumando principal.

3. Era usual, desde la antigüedad considerar la circunferencia como un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños y hacer uso de esta interpretación para realizar

cálculos aproximados de su longitud o del área del círculo correspondiente. El segundo postulado no es más que una generalización, a una curva plana cualquiera, de esta interpretación. En relación con el uso de las técnicas computacionales, es interesante observar la gran actualidad de esta concepción de una curva: para construir los gráficos de las funciones, los programas computacionales contemporáneos simplemente evalúan dicha función en un número muy grande de puntos y seguidamente los unen mediante pequeñísimos segmentos de recta. Es decir, el trazado de los gráficos se reduce a la construcción de una poligonal inscrita en la curva con lados muy pequeños, de modo que las limitaciones del ojo humano "ven" una línea suave, sin angulosidades.

A continuación estudiaremos cómo se encontraban las reglas que permitían operar con los diferenciales.

Supongamos que las magnitudes u y v dependen de cierta cantidad variable que denotamos por x, esto es $u=u(x)$, $v=v(x)$. Entonces cuando x se incrementa en una cantidad pequeña dx, u se convierte en $u+du=u(x+dx)$ y v en $v+dv=v(x+dx)$.

De este modo la variable $y(x)=u(x)+v(x)$ tomará el valor

$$\begin{aligned} y+dy &= y(x+dx) = u(x+dx)+v(x+dx) = (u+du)+(v+dv) \\ &= (u+v)+(du+dv). \end{aligned}$$

Así que la variable y pasa del valor $u+v$ al valor $(u+v)+(du+dv)$, luego su incremento será

$$dy = du + dv\,.$$

Esto demuestra la propiedad siguiente

Regla 2. El diferencial de la suma de dos variables es la suma de los diferenciales correspondientes, es decir

$$d(u+v) = du + dv\,.$$

Observación. La regla 2 puede ser extendida para cualquier número finito de sumandos (ver ejerc.3).

De forma análoga, con un incremento dx el producto $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ pasa a tomar el valor

$$y+dy = u(x+dx)\cdot v(x+dx) = u\cdot v + \left(u\cdot dv + v\cdot du + du\cdot dv\right).$$

Como du y dv son ambos "infinitamente pequeños" en relación con u y v respectivamente, entonces la cantidad $du\cdot dv$ será infinitamente pequeña respecto a $u\cdot dv$ y $v\cdot du$. De este modo tenemos la aproximación

$$u\cdot dv + v\cdot du + du\cdot dv \approx u\cdot dv + v\cdot du\,,$$

que haciendo uso del postulado 1 consideraremos como iguales. Entonces el incremento de la variable y será igual a $u\cdot dv+v\cdot du$. El resultado obtenido lo resumimos como

Regla 3. El diferencial del producto de dos variables u, v está dado por la fórmula

$$d(uv) = udv + vdu\,.$$

Apliquemos las propiedades anteriores para encontrar el diferencial de algunas funciones.

Ejemplo 1. El diferencial de $y=x^2$ puede calcularse inmediatamente utilizando el diferencial del producto:

$$dy = d\left(x^2\right) = d\left(x \cdot x\right) = 2xdx .$$

Similarmente $d\left(x^3\right) = d\left(x \cdot x^2\right) = x\left(2x \cdot dx\right) + x^2 \cdot dx = 3x^2 dx$.

Estos casos particulares nos sugieren la hipótesis

$$\boxed{d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx ,} \tag{1}$$

cuando n es un entero positivo, la cual puede ser probada haciendo uso del principio de inducción completa (ver ejerc.3).

Ejemplo 2. Calculemos el diferencial de la función $y(x) = a \cdot u(x)$, donde a es una constante. Apliquemos la regla 3:

$$dy = d\left(a \cdot u\left(x\right)\right) = a \cdot du\left(x\right) + u\left(x\right) \cdot da ,$$

pero por la regla 1, $da = 0$, luego

$$\boxed{dy = a \cdot du\left(x\right).}$$

Este resultado es un caso particular importante de la regla 3.

Ejemplo 3. El diferencial de una función polinómica arbitraria

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

puede encontrarse combinando los resultados obtenidos hasta el momento.

Apliquemos primero la regla 2 (generalizada a un número finito de sumandos) y obtenemos

$$dy = d(a_0) + d\left(a_1 x\right) + d\left(a_2 x^2\right) + ... + d\left(a_n x^n\right),$$

a continuación usamos combinadamente los resultados de los ejemplos 1 y 2 para finalmente encontrar que

$$dy = (a_1 + 2a_2 x + ... + na_n x^{n-1})dx .$$

Estos mínimos conocimientos permiten atacar uno de los problemas fundamentales: *el trazado de la tangente a una línea curva***.**

Mientras los matemáticos se limitaron al estudio de las cónicas y algunas pocas curvas más, la definición de tangente introducida en el epígrafe anterior era satisfactoria. Sin embargo, ya el estudio de curvas polinomiales evidenció que la recta concebida geométricamente como tangente podía cortar a la curva en varios puntos y, además, la curva no tenía que permanecer siempre de un mismo lado de dicha recta. Por ejemplo, en la Fig.10, la recta *AP* es natural llamarla tangente a la curva en el punto *P*, no obstante cortarla en *A*. Esta situación provocó que se definiera la recta tangente de una forma completamente diferente:

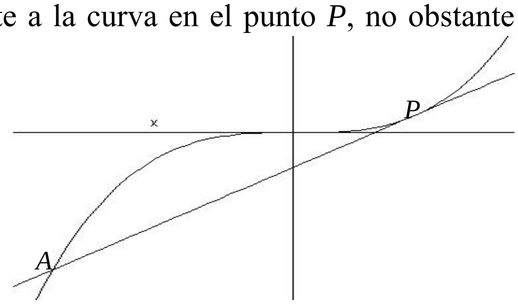

Fig.10

La noción de curva asociada al postulado 2, permite definir la **recta tangente** a una curva en un punto *M* como la *recta que es la prolongación de uno de los pequeños lados Mm de la poligonal que constituye la línea curva* (Fig.11).

A continuación mostraremos cómo determinar esta recta tangente haciendo uso del diferencial. Supongamos dada una curva *AM* tal que la ordenada *PM*=*y* es una función de la abscisa *OP*=*x*, se quiere encontrar un método que permita trazar la tangente *MT* por un punto *M* de esta curva (Fig.12).

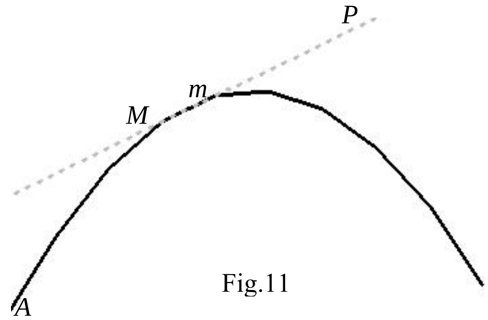

Fig.11

Si el segmento *Pp*=*dx* es muy pequeño, entonces *RM*=*dy* es también pequeño, además podemos suponer que el arco de la curva *Mm* constituye uno de los lados de la poligonal y la tangente buscada *MT* es prolongación de *Mm*. Observemos que los triángulos *mRM* y *MPT* son semejantes, luego

$$\frac{mR}{RM}=\frac{MP}{PT}$$

o, en el lenguaje de los diferenciales

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{PT}.$$

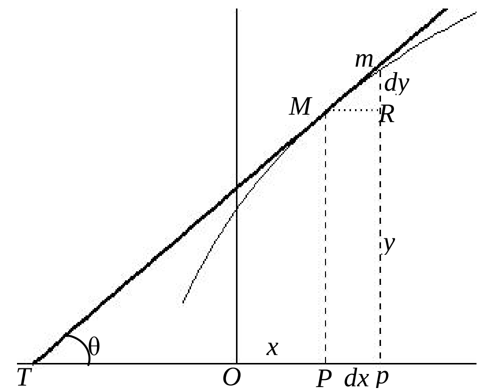

Fig.12

De modo que el segmento *PT* se puede determinar por la relación

$$PT=y\frac{dx}{dy},$$

con lo cual se conoce la abscisa del punto *T* y se puede trazar la tangente *TM*. Notemos adicionalmente que el cociente y/PT proporciona la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma la recta tangente *MT* con el eje horizontal, es decir la *pendiente de la recta tangente* viene dada por:

$$\boxed{\tan\theta=\frac{y}{PT}=\frac{y}{y\frac{dx}{dy}}=\frac{dy}{dx}.}$$

Veamos cómo funciona este método en un ejemplo concreto. Si la relación de *OP* y *PM* que describe la curva *AM* es $x=y^n$, entonces al tomar los diferenciales en una y otra parte de la ecuación se tendrá

$$d(x)=d(y^n)=ny^{n-1}dy.$$

De donde

$$PT=y\frac{dx}{dy}=y\frac{ny^{n-1}dy}{dy}=ny^n=nx.$$

Así que si se toma el punto *P* de modo tal que el segmento *PT* tenga una longitud *n* veces mayor que *OP* y se traza la recta *MT*, ésta será la recta tangente en el punto *M*. Este resultado contiene como caso particular (*n*=2) la relación obtenida por Fermat y por Roberval.

La pendiente de la recta tangente a $x = y^n$ en el punto (1,1) es:

$$\tan\theta = \frac{y}{nx} = \frac{1}{n},$$

luego la ecuación de dicha recta es

$$y = \frac{1}{n}(x-1)+1.$$

En el gráfico de la Fig.12, al punto *m* lo hemos considerado sobre la recta tangente, pues nos hemos referido al "triángulo" *mRM*, es decir *Mm* es un segmento de recta. De este modo hemos sustituido un pequeño arco de la curva por el segmento *Mm* de su tangente en el punto *M*. Evidentemente, esta sustitución constituye una aproximación, que es tanto mejor, cuanto más próximos estén los puntos *p* y *P*.

Veamos cómo la idea geométrica anterior puede ser interpretada desde un punto de vista analítico. La identificación del arco *Mm* con el segmento *Mm* es equivalente a considerar como ordenada de la curva en *p*, en lugar de su verdadero valor $y(x+dx)$, a la magnitud $y+dy$, esto es equivalente a considerar como una igualdad la aproximación:

$$y(x+dx)-y(x)\approx dy.$$

La consideración anterior puede ser utilizada para realizar cálculos aproximados:

Sea la curva $y=x^{100}$ y los puntos P y p corresponden a $x=1$ y $x=1{,}001$ respectivamente, entonces $OP=1$, $Op=1{,}001$, luego $dx=Pp=0{,}001$. Como

$$dy = 100x^{99}dx,$$

entonces $mR=y+dy=1+100\cdot 0{,}001=1{,}1$. De modo que podemos considerar que

$$(1{,}001)^{100}\approx 1{,}1.$$

Observación. Advirtamos al lector que el diferencial solo nos da la posibilidad de realizar una primera aproximación del valor de una expresión, sin tener la posibilidad de estimar el error que se ha cometido. La tabla (Fig.13) que se adjunta permite comparar el valor con 5 cifras decimales exactas y los valores aproximados de x^{100} proporcionados por el diferencial en los puntos cercanos a 1, utilizando diferentes valores de *dx*. Nótese que la aproximación que se obtiene para 1,01 no es muy buena y las de 1,05 o 1,1 son pésimas, lo que pone en evidencia la estrecha relación que existe entre el valor de la magnitud *dx* y la bondad de la aproximación. Una forma de mejorar significativamente la exactitud en las aproximaciones y la posibilidad de estimar el error cometido las estudiaremos en II.5 y III.4.

	Aprox. diferencial	**5 cifras exactas**
1,0001	1,01001	1,01004
1,001	1,100	1,10511
1,01	2,00	2,70481
1,05	6,00	131,50125
1,1	11,00	13780,61234

Fig.13

Para ampliar las posibilidades de aplicación del diferencial, es conveniente poseer reglas para su cálculo en una clase suficientemente amplia de funciones. De forma semejante a como procedimos en las propiedades 1 y 2, encontremos una fórmula para el diferencial del cociente entre dos funciones.

Sea $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (se supone que $v(x) \neq 0$), entonces

$$dy = \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2 + vdv} = \frac{vdu - udv}{v^2}\left(1 + \frac{dv}{v}\right)^{-1}.$$

Pero, por el postulado 1, podemos sustituir $1 + dv/v$ por 1. Esto prueba la regla del cociente:

Regla 4. El diferencial del cociente de dos funciones (con denominador no nulo) está dado por la fórmula

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Las reglas de diferenciación anteriores permiten encontrar el diferencial de cualquier función racional, es decir, que esté dada como el cociente de dos polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Ejemplo 4. Calculemos el diferencial de la función

$$y = \frac{1}{x^n}.$$

Aquí $u(x)=1$ y $v(x)=x^n$, luego la regla 4 nos proporciona

$$d\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n d(1) - 1 \cdot d\left(x^n\right)}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}dx}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}dx.$$

Nótese que este ejemplo generaliza el resultado (1) para potencias enteras negativas de la variable:

$$\boxed{d\left(x^{-n}\right) = -nx^{-n-1}.}$$

En lo que sigue calcularemos los diferenciales para las llamadas funciones **trascendentes elementales**: exponencial, logarítmica y trigonométricas. Para ello nos auxiliaremos de las representaciones en serie de potencias estudiadas en el capítulo anterior.

Diferencial de la función exponencial: Sea $y=e^x$, entonces

$$y + dy = e^{x+dx} = e^x \cdot e^{dx},$$

luego, usando (I.6.3a)

$$dy = e^{x+dx} - e^x = e^x(e^{dx} - 1) = e^x\left(dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \dots\right).$$

Pero, en virtud del Postulado 1, la cantidad entre paréntesis en el miembro derecho se puede sustituir por *dx*, ya que lo que aparece sumado a *dx* son cantidades infinitesimales respecto a ella. Por lo tanto:

$$\boxed{d\left(e^x\right) = e^x dx.}$$

Así que, para la función exponencial tenemos la aproximación

$$e^{x+dx} \approx e^x + e^x dx.$$

Por ejemplo, cuando $x=0$ y $dx=0{,}1$ se obtiene

$$e^{0,1} \approx e^0 + e^0 \cdot 0{,}1 = 1{,}1.$$

Un valor con dos cifras exactas de $e^{0,1}$ es 1,11, lo cual nos indica que la aproximación obtenida, sin gran esfuerzo, no es mala.

Diferencial de la función logarítmica: Sea ahora $y=\ln x$, $(x>0)$, entonces

$$d(\ln x) = \ln(x+dx) - \ln x = \ln\left(\frac{x+dx}{x}\right),$$

luego

$$d(\ln x) = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \ldots,$$

que tras la eliminación de las potencias de *dx* mayores o iguales a 2, produce:

$$\boxed{d(\ln x) = \frac{1}{x}dx.}$$

Diferencial de las funciones trigonométricas: Consideremos $y=\operatorname{sen} x$, entonces

$$dy = \operatorname{sen}(x+dx) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x\left[\cos(dx)-1\right] + \cos x \cdot \operatorname{sen}(dx).$$

Si usamos los desarrollos de $\operatorname{sen}(dx)$ y $\cos(dx)$ ((3) y (4) de I.8) obtenemos

$$dy = \operatorname{sen} x\left[-\frac{(dx)^2}{2!} + \ldots\right] + \cos x\left[dx - \frac{(dx)^3}{3!} + \ldots\right],$$

por tanto,

$$\boxed{d(\operatorname{sen} x) = \cos x dx.}$$

De forma similar se encuentra que

$$\boxed{d(\cos x) = -\operatorname{sen} x dx.}$$

Las reglas de diferenciación y los diferenciales de las funciones elementales calculados, podemos aplicarlos al cálculo de los diferenciales de otras muchas funciones, entre ellas las restantes funciones trigonométricas.

Ejemplo 5. Calculemos *dy* si $y=\tan x$.

Como

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

entonces aplicando la regla del diferencial del cociente y utilizando los diferenciales de las funciones seno y coseno, obtenemos:

$$dy = \frac{\cos x d(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x dx.$$

De forma análoga se pueden encontrar los diferenciales de las restantes funciones trigonométricas.

Ejercicios.

1. Dada la función $y=x^3+2x$, halla el valor de su incremento y de su diferencial cuando x varía de $x=2$ a $x=2{,}1$.

2. Halla el incremento ΔV del volumen V de una esfera al aumentar su radio $R=2$ en ΔR. Calcula ΔV para $\Delta R=0{,}1$; $0{,}01$. ¿Qué error se comete si eliminamos los términos que contienen potencias de ΔR mayores que uno?

3. Usando el principio de inducción, prueba que

a) $d\left(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right)=df_1(x)+df_2(x)+...+df_n(x)$,

b) $d\left(x^n\right)=nx^{n-1}dx,\ n=1,2,...$

4. Halla los diferenciales de las funciones siguientes:

a) $y=\dfrac{x}{n}+\dfrac{n}{x}+\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{m^2}{x^2},\ m,n\neq 0$, b) $y=\csc x$, c) $y=x\ln x$,

d) $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$, e) $y=\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$.

5. Las tangentes a la parábola cúbica $y=x^3$, ¿podrán formar un ángulo obtuso con el eje de abscisas?

6. ¿Para qué puntos son paralelas las tangentes a las curvas $y=x^2$ y $y=x^3$?

7. Halla la ecuación de la recta tangente en los puntos indicados a las curvas siguientes:

a) $y=\log_a x$ en $(1,0)$ y $(e,1)$, b) $y=2x+\operatorname{sen} x$ en $(0,0)$ y $(\pi,2\pi)$,

c) $y=\cosh x$ en $(0,1)$, d) $y=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x-3e^{2x+1}}{x^2+1}$ en $(0,-3e)$.

8. ¿Bajo que ángulos corta el eje de abscisas la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$?

9. Calcula el valor del diferencial de la función:

a) $y=\dfrac{1}{(\tan x+1)^2}$, al variar x desde $\dfrac{\pi}{6}$ hasta $\dfrac{61\pi}{360}$.

b) $y=\cos^2\theta$ al variar θ desde 60° hasta $60^\circ 30'$.

10. Usando el diferencial calcula aproximadamente

a) $\operatorname{sen} 30^\circ 1'$, b) $\tan 45^\circ 10'$.

II.3. Derivada de una función. Derivación de las funciones elementales.

A finales del siglo XVII y principios del XVIII ya el cálculo con diferenciales había demostrado su utilidad en la resolución de diferentes tipos de problemas y se hizo necesario introducir nuevas ideas que permitieran agilizar los cálculos. Así se introdujo una noción que simplificó algunos razonamientos y procedimientos en la aplicación del cálculo de los diferenciales a los problemas de optimización y mecánica. Como siempre ocurre, la idea no la introdujo una sola persona, sino varios lo hicieron de forma más o menos independiente. Euler en su texto "Cálculo Diferencial" utiliza profusamente los diferenciales, sin embargo, sitúa como el objetivo fundamental de este cálculo no la determinación del incremento, infinitamente pequeño, que recibe una función cuando su variable es incrementada en una cantidad infinitamente pequeña, sino *la relación* que existe entre ambos incrementos.

Más tarde, en la obra cumbre de un gran sabio del siglo XVIII, **Joseph-Louis Lagrange** titulada *Teoría de las funciones analíticas* (1797) esta relación pasará completamente al primer plano como el concepto básico para el estudio de las funciones de una variable real, recibiendo la denominación de *función derivada*.

Una simple ojeada a las expresiones obtenidas para los diferenciales de las funciones potencia, logarítmica, exponencial y trigonométricas, muestra que ellos están constituidos por dos factores: el diferencial de la variable x y un cierto "coeficiente" expresado como función de esta variable independiente. Precisamente este coeficiente es el que determina la relación entre los diferenciales dy y dx. Así, por ejemplo, si $y=\operatorname{sen} x$, entonces $dy=\cos x\,dx$ por lo que la relación entre los diferenciales es

$$\frac{dy}{dx}=\cos x\,.$$

En general, dada una función $y=f(x)$, a este coeficiente se le denomina **función derivada de $f(x)$ respecto a x**, la cual se denota por $y'=f'(x)$ o por $\frac{dy}{dx}$. A la función $f(x)$ entonces se le denomina **función primitiva de $f'(x)$**. De modo que, conocido el diferencial de una función se puede determinar su derivada y recíprocamente:

Dada la derivada $f'(x)$ de una función $y=f(x)$, su diferencial se expresa en la forma

$$dy=f'(x)dx\,.$$

Dado el diferencial dy de una función, su derivada se expresa en la forma

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}\,.$$

Observaciones: 1) Aunque en la actualidad la diferenciación de funciones de una variable utiliza como concepto principal al de derivada, el uso del diferencial en el sentido dado por los pioneros del cálculo sigue siendo el lenguaje en que se expresan aquellos que aplican las herramientas diferenciales a problemas de otras ciencias, especialmente de la física. En lo que sigue nosotros utilizaremos el lenguaje más conveniente en cada caso.

2) Para las funciones de una sola variable, únicas que nos interesarán en este curso, las dos nociones, diferencial y derivada de una función, están íntimamente relacionadas y lo que cambia es la forma, el énfasis y no la significación en el estudio del comportamiento de las funciones. No obstante, en el estudio de las funciones de varias variables y en otras investigaciones más modernas, el concepto diferencial adquiere una mayor importancia no solo práctica, sino también para las investigaciones teóricas.

El valor de la función derivada en un punto o **derivada en un punto de la función** puede ser interpretado geométrica y físicamente, poniendo de relieve la importancia de esta noción.

Interpretación geométrica de la derivada. Antes hemos señalado el papel del diferencial en la aproximación a través de la relación

$$f(x+dx) \approx f(x)+dy = f(x)+f'(x)dx, \quad \text{(para valores de } dx \text{ muy pequeños)}$$

la cual podemos transformar en

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \approx f'(x). \tag{1}$$

Un cociente de la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

donde Δx es una cantidad (positiva o negativa) que incrementa la variable x, se denomina **cociente incremental** de f en el punto x. Así que

La derivada de una función f en un punto x es aproximadamente igual al cociente incremental, cuando el incremento Δx es muy pequeño. Utilizando la notación introducida en el capítulo I, podemos expresar lo anterior simbólicamente

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x), \text{ cuando } \Delta x \to 0. \tag{2}$$

Observación. En la afirmación anterior hemos supuesto que el cociente incremental de f en el punto x se acerca a un valor bien determinado $f'(x)$ cuando el incremento Δx se acerca a cero, valor que corresponde a la derivada de f en x. Es conveniente advertir al lector que esta premisa no siempre tiene lugar. Sin embargo, para las funciones elementales, únicas que trataremos aquí, ella será válida excepto para algunos valores particulares de la variable independiente x, como ocurre en el ejemplo 2.

En la Fig.14 observamos que el cociente en la expresión (1) es la pendiente de la recta MQ, secante a la curva. Además, cuando $\Delta x \to 0$, el punto Q se mueve sobre la curva aproximándose a M, de modo que la secante MQ gira hasta ocupar la posición MT de la tangente a la curva. Luego, desde un punto de vista geométrico, (2) significa que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto M de abscisa x. Por tanto, la **ecuación de la recta tangente** a una curva $y=f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$\boxed{y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).}$$

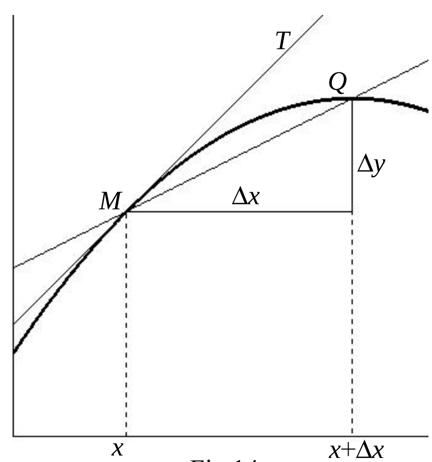

Fig.14

Interpretación física de la derivada.

a) Consideremos un móvil que se desplaza sobre una línea recta. El movimiento es tal que la magnitud del espacio recorrido E en función del tiempo t viene dado por $E=f(t)$, entonces la velociad media del movimiento v_m entre los instante t y $t+\Delta t$ puede expresarse como

$$v_m = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

De modo que la relación (1) indica físicamente que la derivada del espacio como función del tiempo es una buena caracterización del comportamiento del móvil en un instante de tiempo dado. Por esta razón, se define la **velocidad instantánea** como la derivada del espacio respecto al tiempo,

$$\boxed{v(t) = \frac{dE}{dt}.}$$

b) Supongamos que se tiene una línea material por ejemplo un hilo muy fino y conocemos la forma en que la masa del hilo depende de la longitud

$$m = \Phi(s).$$

Si el hilo es homogéneo la masa está distribuida uniformemente y esta dependencia se expresa por: $m=\delta_0 s$, donde δ_0, es una constante de proporcionalidad que se denomina **densidad (lineal) de masa**.

Cuando la distribución de la masa no es uniforme, entonces la variación de la masa Δm en el tramo de hilo desde s hasta $s+\Delta s$ viene dada por

$$\Delta m = \Phi(s+\Delta s) - \Phi(s).$$

El cociente

$$\frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{\Phi(s+\Delta s) - \Phi(s)}{\Delta s}$$

depende de s y Δs y se denomina densidad media correspondiente a la porción $[s, s+\Delta s]$ de la línea material y no caracteriza completamente la variación de la masa en un punto del hilo. Entonces, razonando de forma semejante a como hicimos con la velocidad instantánea, es natural llamar **densidad** de la línea material en el punto correspondiente a s a la derivada de la función $\Phi(s)$, es decir:

$$\boxed{\delta(s) = \frac{d\Phi}{ds} = \Phi'(s).}$$

Reglas de derivación. Las reglas para la diferenciación de funciones pueden fácilmente reformularse en el lenguaje de las derivadas dando lugar a las denominadas *reglas de derivación*:

1) Derivada de la función constante: $f(x)=c$, (c const.), entonces $f'(x)=0$ para todo x.

2) Derivada de la suma: $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$.

3) Derivada del producto: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$.

4) Derivada del cociente: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Los diferenciales encontrados en el epígrafe anterior nos proporcionan inmediatamente las derivadas de las funciones elementales básicas que presentamos en la tabla siguiente:

Func. primitiva	Func. derivada	Func. primitiva	Func. derivada
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\ln x$, $(x>0)$	$1/x$	$\tan x$	$\sec^2 x$

Como una muestra del uso de las reglas de derivación veamos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1. Calculemos la derivada de la función

$$y = x^5 \ln x\,.$$

Aplicando la regla de la derivada del producto y las derivadas de las funciones que aparecen en los factores, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^5 \ln x\right)' = \left(x^5\right)' \ln x + x^5 \left(\ln x\right)' = 5x^4 \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x}\,,$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = x^4 \left(5 \ln x + 1\right).$$

Hasta ahora somos capaces de calcular las derivadas de las funciones elementales básicas estudiadas en el Cáp. I, excepto las funciones inversas de las trigonométricas. Veamos, la relación entre la derivada de una función y la de su inversa.

Sea $y=f(x)$ una función y $x=g(y)$ la inversa, es decir, ambas relacionan las mismas variables x y y, pero con los papeles de variable independiente y dependiente intercambiados. Este intercambio de los papeles de las variables se manifiesta en que los gráficos de ambas funciones tienen la misma forma, pero están situados de forma que uno es el simétrico del otro con relación a la recta $y=x$ (ver Fig.15). Por tanto, las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $y=f(x)$ en el punto (a,b), $b=f(a)$, y $x=g(y)$ en (b,a) son recíprocas una de la otra (desde luego, debemos suponer que estas pendientes no son iguales a cero). Este razonamiento geométrico justifica la fórmula

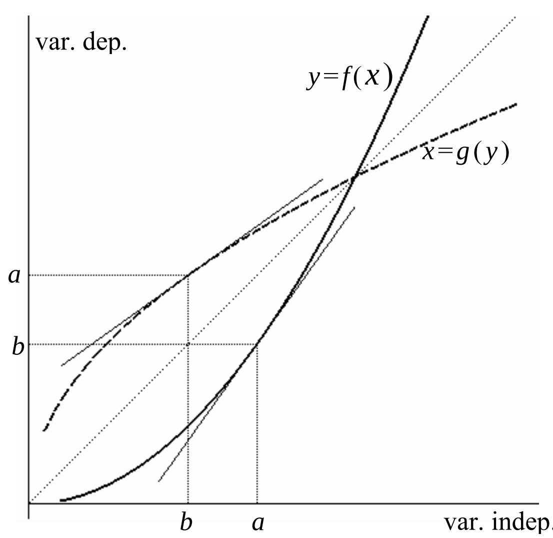

Fig.15

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{g'(f(a))}\,.$$

También podemos llegar al mismo resultado haciendo uso del lenguaje de los diferenciales. En efecto, entre los diferenciales de las variables y y x se tienen las relaciones:

$$dy = f'(x)dx \quad \text{y} \quad dx = g'(y)dy,$$

lo cual da lugar a

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)}.$$

De esta forma hemos obtenido la:

Regla de la derivada de la función inversa: Si $y=f(x)$ y $x=g(y)$ son funciones mutuamente inversas y $g'(y) \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))}, \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Observación. En la regla de la derivada de la función inversa hemos supuesto que $g'(y) \neq 0$, teniendo en cuenta que esta cantidad aparece en un denominador. Pero ¿qué ocurre cuando $g'(y) = 0$? El ejemplo siguiente permite adelantar una respuesta parcial, un análisis más detallado se sale del objetivo de este curso.

Ejemplo 2. La función $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene por inversa a $x=g(y)=y^3$, así que podemos aplicar la regla anterior:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3x^{2/3}},$$

válida siempre que $y \neq 0$ (también será $x \neq 0$). En el punto (0,0) el gráfico (ver Fig.16) de la función $x=y^3$ tiene una tangente horizontal (hemos colocado los valores de la variable independiente y sobre el eje horizontal y los de la variable dependiente x en el eje vertical), mientras que el gráfico de la función $y = \sqrt[3]{x}$ tiene en el origen una tangente vertical.

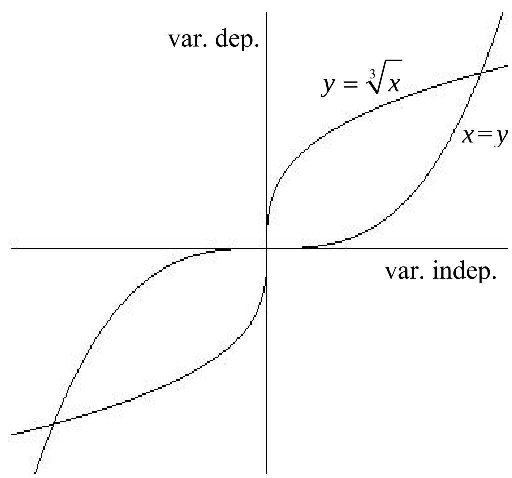

Fig.16

Ejemplo 3. (Derivadas de las funciones trigonométricas inversas)

Sea $y=\text{arcsen}\,x$, entonces $x=\text{sen}\,y$, $(-1<x<1, \quad -\pi/2<y<\pi/2)$, por tanto

$$(\text{arcsen}\,x)' = \frac{1}{(\text{sen}\,y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para los valores de y considerados, $\cos y$ toma solo valores positivos, por esto tomamos el valor positivo de la raíz cuadrada. Además, ha sido necesario eliminar los valores $x=\pm 1$ correspondientes a $y=\pm\pi/2$, puesto que para ellos el denominador es cero.

De forma análoga, para $y=\text{arccos}\,x$, $(-1<x<1, \quad 0<y<\pi)$ se obtiene

$$\left(\arccos x\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si y=arctan$x$, entonces x=tan$y$, $(-\infty<x<\infty,\quad -\pi/2<y<\pi/2)$, luego

$$\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Ejemplo 4. Sabemos que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, por tanto también podemos encontrar su función derivada aplicando la regla anterior:

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{\left(e^y\right)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

Observación. En este ejemplo la expresión obtenida para la derivada tiene sentido para todo valor de x no nulo. Sin embargo, si la función primitiva carece de sentido en un punto, entonces tampoco tiene sentido hablar de la función derivada en ese punto. En todo lo anterior hemos considerado las variables x y y tomando solo valores reales, por lo que la función logarítmica, y por tanto su derivada, deben considerarse definidas para valores reales estrictamente positivos, aunque la expresión analítica de la derivada $f'(x)=1/x$ tenga sentido en todo punto diferente del cero.

Ya somos capaces de encontrar las derivadas de las llamadas **funciones elementales básicas** (potencia, logarítmica, exponencial, trigonométricas y sus inversas) y las producidas por ellas al aplicarle las cuatro operaciones aritméticas. Pero ¿cómo calcular la derivada de funciones como por ejemplo

$$y=e^{\operatorname{sen} x} \text{ o } y=\ln\left(x^5-3x^4\right)?$$

Estas funciones están formadas por la aplicación sucesiva de dos funciones: en el primer caso se halla el seno de la variable x y seguidamente se aplica la función exponencial a este resultado; en el segundo, se ha evaluado la función logarítmica en un polinomio. La propiedad que veremos a continuación da una *regla para hallar la derivada de una función de función o función compuesta* en términos de las funciones componentes. Con esta propiedad completamos las reglas fundamentales de derivación y estaremos en disposición de hallar la derivada de cualquier función que pueda ser expresada mediante operaciones aritméticas y la composición de funciones elementales básicas, esto es, de las llamadas **funciones elementales**.

Supongamos que la y depende de x a través de la función $y=f(x)$ y que la variable z dependa de la variable y mediante $z=g(y)$, entonces la variable z dependerá también de x. Aquí hemos considerado que la función $g(y)$ tiene sentido para todos los valores y que toma la función $f(x)$. Esta dependencia entre z y x la podemos expresar como la función $z=h(x)=g(f(x))$, que se denomina **compuesta de las funciones** g y f. La función $y=e^{\operatorname{sen} x}$ puede verse como la compuesta de la función $y=g(z)=e^z$ y la función $z=f(x)=\operatorname{sen}x$, aquí la variable x puede tomar cualquier valor real. Por su parte, la función $y=\ln\left(x^5-3x^4\right)$ es la compuesta de $g(z)=\ln z$ y $f(x)=x^5-3x^4$. En este caso los valores de $f(x)$ deben ser positivos, puesto que a ellos se les aplicará la función logarítmica, esto significa que x solo podrá tomar valores estrictamente mayores que 3, es decir el dominio de definición de la función compuesta es el intervalo $(3,\infty)$.

Analicemos como se relacionan los diferenciales de estas tres variables y, por tanto, obtendremos una regla para calcular la derivada de *h*, conocida las derivadas de *f* y *g*.

Como

$$dy = f'(x)dx \quad \text{y} \quad dz = g'(y)dy\,,$$

entonces, sustituyendo la primera igualdad en la segunda, se tiene

$$dz = g'(y)\,f'(x)dx = g'(f(x))\,f'(x)dx\,,$$

luego $z' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

De este modo hemos obtenido la:

Regla de la derivada de la función compuesta. La derivada de una función de la forma $z=h(x)=g(f(x))$ se calcula mediante la fórmula

$$z' = h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)\,. \tag{3}$$

Veamos algunos ejemplos de la aplicación de esta regla:

Ejemplo 5. Calculemos la derivada de una potencia con exponente arbitrario: $z=x^a$ ($x>0$).

Utilizaremos la igualdad $z=x^a=e^{a\ln x}$ y así podemos considerar a esta función como la compuesta de $y=f(x)=a\ln x$ y $z=g(y)=e^z$. Por la regla (3) se tiene que

$$\left(x^a\right)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = e^{a\ln x}\cdot\left(a\ln x\right)' = e^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = ax^{a-1}\,.$$

De esta forma hemos generalizado la derivada de una potencia al caso de un exponente arbitrario:

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}\,.$$

Ejemplo 6. Análogamente podemos hallar la derivada de la exponencial con base real positiva arbitraria: Como $y=a^x=e^{x\ln a}$, entonces la fórmula (3) proporciona:

$$y' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = \left(\ln a\right)a^x\,.$$

Ejemplo 7. Queremos calcular la ecuación de la recta tangente en un punto cualquiera de la cicloide dada por:

$$x=at-a\,\mathrm{sen}\,t, \quad y=a-a\cos t,$$

Consideremos el punto de la curva correspondiente al valor del parámetro $t_0\neq k\pi$. La pendiente *m* de la tangente viene dada por

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(a-a\cos t_0\right)dt}{a\,\mathrm{sen}\,t_0\,dt} = \frac{1-\cos t_0}{\mathrm{sen}\,t_0}\,,$$

donde la condición impuesta a t_0 garantiza que el denominador no sea nulo. Aplicando las fórmulas para el arco mitad, la expresión para la pendiente se transforma en:

$$m = \frac{2\,\mathrm{sen}^2\,t_0/2}{2\,\mathrm{sen}\,t_0/2\,\cos t_0/2} = \tan t_0/2\,.$$

De modo que la ecuación de la tangente en (x_0,y_0) será:

$$y = y_0 + \tan\frac{t_0}{2}(x - x_0),$$

donde $x_0 = at_0 - a\,\mathrm{sen}\,t_0$, $y_0 = a - a\cos t_0$.

Las llamadas funciones elementales se forman mediante la aplicación de las operaciones algebraicas y la composición a las funciones elementales básicas, cuyas derivadas resumimos en la tabla siguiente y proponemos al lector como ejercitación que verifique aquellas no comprobadas anteriormente:

Func. primitiva	Func. derivada	Func. primitiva	Func. derivada
x^a	ax^{a-1}	$\mathrm{arcsen}\,x\ (-1 < x < 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$
$a^x\ (a > 0)$	$(\ln a)\cdot a^x (a > 0)$	$\arccos x\ (-1 < x < 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$
$\log_a x (x > 0)$	$\frac{1}{x}\log_a e\ (a, x > 0)$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sen}\,x$	$\cos x$	$\mathrm{senh}\,x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\mathrm{sen}\,x$	$\cosh x$	$\mathrm{senh}\,x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

En este capítulo, hasta el momento, hemos supuesto que tanto la variable independiente x como la función $y = f(x)$ toman valores reales. Sin embargo, podemos fácilmente extender la noción de derivada a una función cuya variable independiente toma solo valores reales, pero tal que $f(x)$ puede ser un número complejo. Supongamos que $f(x) = u(x) + iv(x)$, entonces diremos que la **derivada** de $f(x)$ es la función

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

y también que $f(x)$ es la **primitiva** de $f'(x)$. Esta definición reduce el cálculo de la derivada de $f(x)$ a las derivadas de las funciones que constituyen sus partes real e imaginaria y permite comprobar que **se conservan las reglas para las derivadas de las operaciones aritméticas** (ejerc.8).

Ejemplo 8. Hallemos la derivada de la función $y = e^{ibx}$. Usando la fórmula de Euler, tenemos que

$$\left(e^{ibx}\right)' = (\cos bx)' + i(\mathrm{sen}\,bx)' = -b\,\mathrm{sen}\,bx + ib\cos bx = ib(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx).$$

Esto significa que $\left(e^{ibx}\right)' = ibe^{ibx}$.

Ahora para hallar la derivada de $y = e^{cx}$, con $c = a + ib$, basta aplicar la regla de la derivada del producto y el resultado anterior:

$$\left(e^{cx}\right)' = \left(e^{ax}\cdot e^{ibx}\right)' = ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ax}e^{ibx} = ce^{cx}.$$

Observación. Notemos que la derivada de cualquier función elemental es otra función elemental, es decir, al igual que las operaciones aritméticas, el resultado de la derivación, realizado dentro del conjunto de las funciones elementales, permanece en dicho conjunto o como se dice usualmente, este conjunto es *cerrado* bajo la acción de la operación de derivación. Veremos en el próximo capítulo que, si consideramos también la operación inversa a la derivación, es decir, la operación que a cada función le hace corresponder su función primitiva, entonces el conjunto de las funciones elementales deja de ser cerrado. Esto es, *a través de la operación inversa a la diferenciación se obtienen nuevas funciones no elementales*. De tal forma se amplió considerablemente el campo de las funciones consideradas por Euler y Lagrange como el objeto principal de estudio del Análisis Matemático: *las funciones analíticas*.

Ejercicios.

1. Halla el cociente incremental para las funciones siguientes en el punto indicado:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 1$, en $x_0=1$.

b) $y = 1/x$, en $x_0=2$.

En cada caso analiza a qué se aproxima este cociente cuando el incremento se hace infinitamente pequeño.

2. Calcula las derivadas de las funciones siguientes e indica para qué valores de x es válid la expresión calculada:

a) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$, b) $y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, c) $y = \dfrac{1-\sqrt[4]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$, d) $y = \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$,

e) $y = e^{\operatorname{sen} x}$, f) $y = \arctan\left(x^5 - 3x^4\right)$, g) $y = \ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$

h) $y = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{sen}\left[\dfrac{x+3}{4}\right]\right)}$, i) $y = x\operatorname{sen}\left(x\arctan x\right)$.

3. Calcula las derivadas de las funciones hiperbólicas y sus inversas:

a) $y = \operatorname{senh} x$, b) $y = \cosh x$, c) $y = \tanh x$,

d) $y = \operatorname{arcsenh} x$, e) $y = \operatorname{arccosh} x$.

4. Calcula, aproximadamente,

$$\sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}.$$

5. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta fue realizada en 8 seg. Halla la velocidad angular 64seg. después del comienzo del movimiento.

6. Por el eje de abscisas se mueven dos puntos que tienen las siguientes leyes de movimiento:

$$x = 100 + 5t \quad \text{y} \quad x = \frac{t^2}{2},$$

¿A que velocidad se separan uno de otro en el momento del encuentro (x se mide en metros y t en segundos)?

7. Un móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t segundos es igual a

$$s = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2 .$$

¿En qué momentos la velocidad instantánea fue igual a cero?

8. Consideremos una barra delgada heterogénea *AB*, cuya longitud es igual a 20 cm. La masa de un segmento *AM* aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia entre el punto *M* y *A*, siendo la masa de la barra completa igual a 80g. Halla:

a) La densidad media lineal del segmento *AM* de longitud 2 cm.

b) La densidad media lineal de toda la barra.

c) La densidad de la barra en un punto *M* arbitrario.

9. La relación entre las variables y y x viene dada en la forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}.$$

Halla $\dfrac{dy}{dx}$.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la espiral $\rho = a\varphi$.

11. Un punto se mueve sobre la parábola cúbica $2y = x^3$. ¿Cuál de sus coordenadas varía más rápidamente?

12. Euler denotó a^x por $\exp_a x$. Halla la función derivada de la función $y = \exp_a\left[\exp_a\left(\exp_a\left(\exp_a x\right)\right)\right]$.

13. Prueba que las reglas de la derivada de la suma y el producto de funciones es la misma cuando éstas toman valores complejos.

14. Halla las derivadas de:

a) $f(x) = x^c$, donde $c = a + ib$, b) $f(x) = \left(1 + ix\right)^3$, c) $f(x) = \dfrac{1}{x+i}$.

II.4. Resolución de problemas históricos con el cálculo de diferenciales

Ya estamos en condiciones de presentar al lector algunos de los problemas que sirvieron a los pioneros del cálculo, unas veces como motivación para el desarrollo de las nuevas herramientas y otras, como medio de constatación de su eficacia en las aplicaciones.

Problema 1. La tractriz de Huygens

En una época en que Leibniz estaba en París, al comienzo de su interés en la matemática, un célebre médico y arquitecto propuso el siguiente problema:

¿Cuál es la curva que recorre un objeto que es arrastrado sobre un plano horizontal mediante una cuerda de longitud constante, cuando el extremo libre de la cuerda se mueve a lo largo de una línea recta en el plano?

Huygens lo resolvió de forma completamente geométrica y a la curva solución la denominó *tractriz*. Posteriormente Leibniz lo solucionó con la ayuda de su recién creado cálculo con diferenciales.

Supongamos que el objeto está atado al extremo P de una cuerda PQ de longitud a (Fig.17) y el extremo libre Q de la cuerda se desplaza a lo largo de la recta MQ arrastrando consigo al objeto que entonces describirá una curva C. Debemos encontrar la ecuación $y=f(x)$ de esta curva. Tomemos como eje de abscisas la recta MQ, y el eje de ordenadas será la perpendicular a esta recta que marca el lugar donde comenzó el movimiento. Las condiciones del problema indican que la cuerda PQ permanece tangente a la trayectoria en P, luego la curva C debe ser tal que el segmento de recta tangente PQ tiene siempre la misma longitud a. Por consiguiente, en cualquier punto (x,y) de la curva, la pendiente de la recta tangente viene dada por

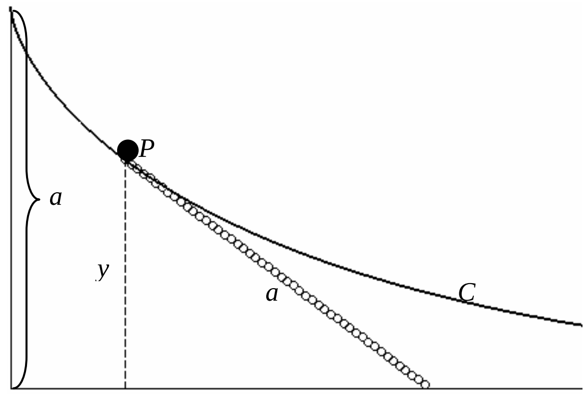

Fig.17

$$-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

De modo que la función $y=f(x)$ que describe la curva C satisface la relación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

que se puede rescribir en la forma

$$dx=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy. \qquad (1)$$

Si fuéramos capaces de encontrar una función $g(y)$ tal que

$$g'(y)=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}, \qquad (2)$$

entonces $x=g(y)$ satisfaría (1) y por tanto la función buscada es la inversa de $g(y)$. La relación (1) se denomina **ecuación diferencial** y $x=g(y)$ es una **solución** de esta ecuación. En el próximo capítulo aprenderemos algunos métodos para encontrar funciones primitivas de algunas funciones elementales, en particular calcularemos la función $g(y)$ en III.4. Pero el problema del cálculo de primitivas no siempre es fácil de resolver e incluso muchas veces no tiene solución en términos de las funciones elementales.

Como un ejercicio de cálculo de derivadas, el lector puede comprobar que, en este ejemplo

$$g(y) = -\sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

satisface (2). Notemos que, aún en posesión de este resultado es sumamente difícil (sino imposible) encontrar explícitamente la función $y=f(x)$, no obstante, una vez conocido el gráfico de $x=g(y)$ puede trazarse el de la tractriz mediante reflexión respecto a la recta $y=x$.

Observación. Una simple aplicación de las reglas de derivación indica que, después de encontrada una primitiva para una función $y=f(x)$, podemos encontrar muchas más primitivas, basta con sumarle una constante a la primera. Para poder escoger la función primitiva apropiada a un problema dado, debemos tener en cuenta las condiciones del problema. Por ejemplo, en el caso anterior, la forma en que hemos situado los ejes coordenados motiva que la tractriz debe pasar por el punto $(0,a)$ (punto de inicio del movimiento). Esto significa que la función $g(y)$ propuesta es justamente la que satisface las condiciones del problema.

Problema 2. **La isócrona de Leibniz.**

A fines del siglo XVII Leibniz propuso y resolvió con herramientas puramente geométricas el problema siguiente:

> *Encontrar la curva, situada en un plano vertical, según la cual un punto material desciende alturas iguales en tiempos iguales.*

Unos años más tarde, Jacob Bernoulli publicó una solución haciendo uso del nuevo cálculo, trabajo donde aparece la solución de una de las primeras ecuaciones diferenciales en la historia de la Matemática. Veamos la solución de Bernoulli.

Situemos el eje de abscisas a la altura en que el punto material comienza su movimiento y denotemos por v la magnitud de la velocidad en un instante dado. De acuerdo a la ley de Galileo, se tiene que

$$v = \sqrt{-2gy}\,,$$

donde g es una constante que caracteriza la fuerza gravitatoria.

Como el punto se mueve sobre la curva, el espacio recorrido hasta el instante t viene dado por la longitud del arco de curva ya transitado que denotaremos por $s(t)$. Entonces

$$v = \frac{ds}{dt},$$

de donde

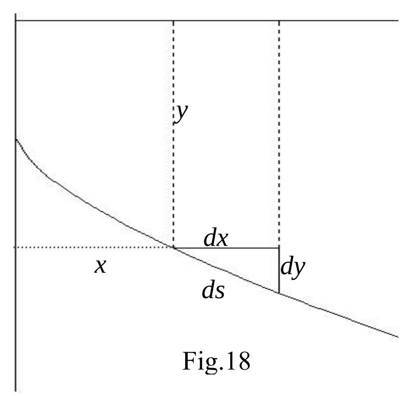

Fig.18

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2gy\,.$$

Si el diferencial de la longitud de arco ds es suficientemente pequeño, podemos considerarlo como si fuera un segmento de recta, luego (ver Fig.18)

$$\left(ds\right)^2 = \left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2}{\left(dt\right)^2} = -2gy\,.$$

La condición del problema de descender alturas iguales en tiempos iguales, puede expresarse mediante la igualdad $\frac{dy}{dt} = b = const$, que se convierte en

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = -\frac{2gy}{b^2} \qquad \text{o} \qquad dx = -\sqrt{-1-\frac{2gy}{b^2}}\,dy\,.$$

Hemos tomado el signo negativo del radical ya que cuando la variable *x* crece, la variable *y* decrece, luego *dx* y *dy* tienen signos opuestos. De este modo, el problema de la isócrona se reduce a hallar una primitiva de la función

$$\varphi(y) = -\sqrt{-1-\frac{2gy}{b^2}}\,.$$

¿Puede el lector descubrir cuál es la ecuación de la isócrona?

Problema 3. **Método de Newton para localizar raíces de ecuaciones algebraicas.**

En su famoso *Método de las fluxiones y de las series infinitas*, Newton introduce un procedimiento relativamente simple, pero efectivo, para hallar de forma aproximada los ceros de un polinomio. Como ejemplo considera el polinomio $P(x)=x^3-2x-5$. Primero encuentra varios valores sencillos:

$$P(0) = -5, \quad P(1) = -6, \quad P(2) = -1, \quad P(3) = 16,$$

de aquí infiere que debe haber algún cero cerca de $x_0=2$. Entonces Newton reemplaza la curva $y=P(x)$ por su tangente en el punto x_0, es decir por

$y = R_1(x) = P(2) + P'(2)(x-2)$ (ver Fig.19).

Por lo tanto una primera aproximación x_1 la brinda la ecuación $R_1(x)=0$, es decir

$$x_1 = \frac{-P(2)+2P'(2)}{P'(2)}.$$

Evaluando se obtiene

$$x_1 = \frac{1+20}{10} = \frac{21}{10} = 2{,}1\,.$$

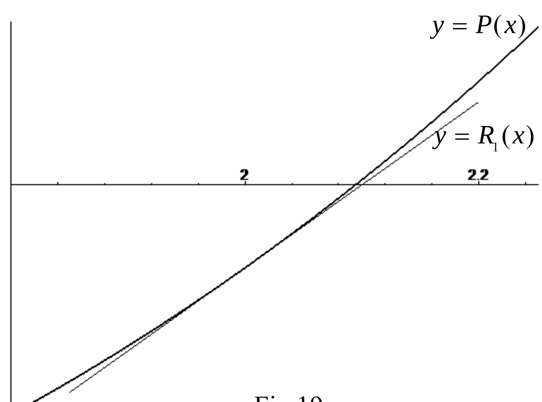

Fig.19

Seguidamente repite el proceso anterior, pero ahora tomando como abscisa del punto de tangencia a $x_1 = 2{,}1$ esto es considera

$$R_2(x) = 0{,}061 + 11{,}23\left(x-2{,}1\right)$$

que, cuando se iguala a cero, proporciona una nueva aproximación $x_2=2{,}0945681$. Con el fin de mejorar la aproximación, este proceso puede repetirse cualquier número de veces. Ya en el tercer paso, Newton obtiene el resultado $x_3=2{,}0945515$, que tiene todos sus dígitos correctos.

En general, si la ecuación que queremos resolver viene dada en la forma $f(x)=0$, encontramos un valor inicial x_0 que sospechamos, al menos intuitivamente, que no está demasiado lejos de una raíz de la ecuación. La ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en $\left(x_0, f(x_0)\right)$ viene dada por

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),$$

luego una primera aproximación es

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 .$$

Las aproximaciones sucesivas se obtienen reiterando el mismo procedimiento, solo que en lugar de x_0 colocamos el último valor aproximado que se ha obtenido. Así la aproximación x_n, en el paso n, será

$$x_n = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + x_{n-1} . \tag{3}$$

Ejemplo 1. Calculemos una raíz de la ecuación

$$x^3-2x^2-4x-7=0 .$$

Primero encontremos el punto x_0 a través de un intervalo donde la función $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$ asume valores de signos contrarios en sus extremos. Por ejemplo, dando valores enteros a x hallamos un cambio de signo entre 3 y 4: $f(3)=-10<0$, $f(4)=9>0$. En este caso vamos a usar el valor inicial $x_0=4$ pues parece estar más cerca del cero. Entonces, usando (3) la primera aproximación es

$$x_1 = 4-\frac{f(4)}{f'(4)} = 4-\frac{9}{28} = 4-0{,}32 \approx 3{,}7 .$$

La segunda aproximación nos da

$$x_2 = 3{,}7-\frac{f(3{,}7)}{f'(3{,}7)} = 3{,}7-\frac{1{,}473}{22{,}27} = 3{,}7-0{,}066... \approx 3{,}634 .$$

En este punto $f(3{,}634)\approx 0{,}042$ y el valor $x=3{,}63$ resulta aceptable.

Ejemplo 2. El método de Newton puede ser aplicado a ecuaciones no algebraicas. Como segundo ejemplo hallemos las raíces de

$$x\log x = 1,$$

donde log denota el logaritmo en base 10.

La ecuación propuesta se puede rescribir en la forma $\log x=1/x$ lo que permite comparar los gráficos de las curvas $y=\log x$ y $y=1/x$ (ver

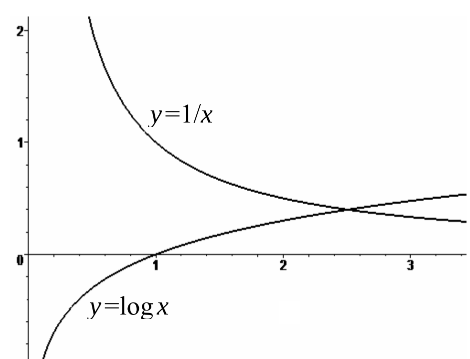

Fig.20

Fig.20). Ellas se intersecan en un punto cuya abscisa está en el intervalo (2,3). Lo cual puede confirmarse evaluando la función $f(x)=\log x-1$:

$$f(2)=2\log 2-1=-0{,}39793...<0\,,$$

$$f(3)=3\cdot 0{,}4771-1=0{,}43136>0\,.$$

Tomemos $x_0=3$. Como

$$f\,'(x)=\frac{1}{\ln 10}-\frac{\ln x}{\ln 10}\quad \text{y}\quad f\,'(3)=0{,}91142\,,$$

entonces de (3) se obtiene

$$x_1=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{0{,}43136}{0{,}91142}\approx 2{,}53\,.$$

El valor de la función en este punto es $f(2{,}53)=0{,}019894\ldots$.

Mejoremos la aproximación aplicando nuevamente (3):

$$x_2=2{,}53-\frac{f(2{,}53)}{f'(2{,}53)}=2{,}53-\frac{0{,}019894}{0{,}83741}\approx 2{,}5063\,.$$

En este punto se tiene $f(2{,}5063)=0{,}000096$, que es una buena aproximación.

Observación: Los métodos aproximados de cálculo y el análisis de la exactitud de ellos han sido objeto de estudio mucho antes de los trabajos de Newton y hoy han adquirido especial importancia con las posibilidades que brindan las herramientas computacionales. La amplitud y variedad de tales métodos ha conformado una rama independiente de la matemática: el Análisis Numérico. Una de las herramientas de las que se vale esta rama de la matemática es precisamente el cálculo diferencial. En el epígrafe II.6 y en Cáp. III estudiaremos algunas otras cuestiones relacionadas con los cálculos aproximados.

Ejercicios

1. La ecuación $f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$ tiene dos raíces reales: una en el intervalo $(-11,-10)$ y la otra entre 9 y 10. Encuéntralas aproximadamente.

2. Localiza algún cero no trivial ($x\neq 4$) de la ecuación $2^x=4x$.

3. La ecuación $x\,\mathrm{sen}\,x-0{,}5=0$ tiene infinitas raíces positivas y negativas. Localiza la menor de sus raíces positivas.

4. Aplica el método de Newton para hallar una raíz de la ecuación $x=\tan x$ que esté entre 4,4 y 4,5.

5. Descartes consideró que el problema siguiente no tenía solución, sin embargo Leibniz pudo resolverlo mediante el planteamiento de una ecuación diferencial. ¿Podrás tu encontrar la solución?

Hallar una curva WW tal que si su tangente WC se dibuja hasta el eje Y, el segmento XC es siempre igual a una constante a (Fig.21).

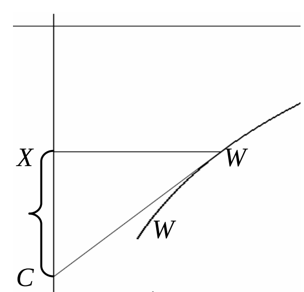

Fig.21

6. Se tiene un cuerpo que tiene una temperatura de $T°$ y

está situado en un medio con temperatura 0°. Newton estableció que la velocidad de enfriamiento del cuerpo es proporcional a su temperatura, es decir,

$$\frac{dT}{dt} = -kt\,,$$

donde k es una constante positiva. Determina cómo varía la temperatura del cuerpo a partir del instante $t=0$.

II.5. Análisis del comportamiento de las funciones mediante la derivada

En los epígrafes anteriores hemos visto cómo el diferencial y la derivada pueden ser aplicados en la resolución de diferentes problemas, entre ellos la determinación de tangentes. Ahora mostraremos el uso que se puede hacer de la derivada para analizar más detalladamente el comportamiento de una función y su gráfico. Por ello, en este epígrafe siempre consideraremos que *la variable independiente recorre intervalos donde están bien definidas la función y su derivada.*

Método para la determinación de extremos. En II.1 expusimos el método utilizado por Fermat para encontrar los posibles puntos donde una curva tiene sus máximos o mínimos. Veamos como el concepto derivada permite aclarar estas ideas y proporciona una simplificación del algoritmo de Fermat.

Ante todo aclaremos que, cuando nos referimos a los puntos de máximos o mínimos de una curva, estamos significando aquellos puntos cuya ordenada nunca es menor que las ordenadas de los *puntos vecinos*. Por esta razón, este tipo de punto suelen calificarse de **extremos relativos** o **locales**. Este carácter local es lo que permite su determinación mediante el uso de la derivada de la función que describe la curva.

En II.3(2) introdujimos la derivada como una aproximación del cociente incremental, cuando el incremento de la variable independiente se hace infinitesimal:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x), \text{ cuando } \Delta x \to 0 \tag{1}$$

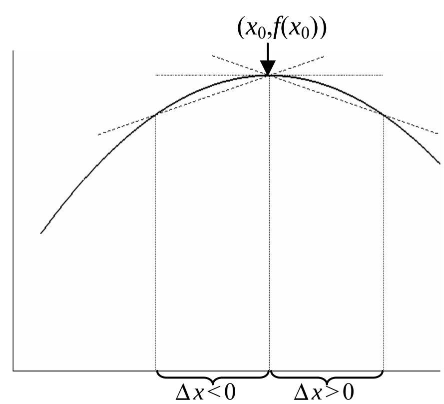

Fig.22

Supongamos que x_0 **es un punto interior a un intervalo donde tanto la función $f(x)$ como su derivada $f'(x)$ están bien definidas**. Si el gráfico de $y=f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ tiene un máximo (Fig.22), esto significa que el valor que toma la función en x_0 es mayor que en los demás puntos cercanos. Entonces,

$$f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)\,,$$

cuando el punto $x_0+\Delta x$ está próximo a x_0. Pero $x_0+\Delta x$ puede estar situado antes ($\Delta x<0$) o después ($\Delta x>0$) de x_0. Luego el cociente en (1) será positivo o negativo, en dependencia del signo de Δx. Recordemos que este cociente representa la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, además la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ ocupa la posición límite de estas secantes. Así que es intuitivamente claro que la tangente en dicho punto debe tener pendiente cero, es decir $f'(x)=0$. Un razonamiento análogo nos conduce a la misma conclusión, cuando el gráfico de la función tiene en $\left(x_0, f(x_0)\right)$ un punto de mínimo.

En resumen:

> Para que un punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ sea de máximo o mínimo de una función $y=f(x)$ **es necesario** que $f'(x_0)=0$.

Los puntos que satisfacen la condición $f'(x)=0$, es decir, cuando la recta tangente al gráfico de $y=f(x)$ es horizontal, se suelen denominar **puntos estacionarios** de $y=f(x)$. Ahora nos podemos preguntar ¿serán todos los puntos estacionarios de máximo o de mínimo? ¿cómo distinguir cuando es un máximo o un mínimo? Veamos primeramente algunos ejemplos:

Ejemplo 1. La función $f(x)=x^3$ tiene por derivada $f'(x)=3x^2$ que se anula cuando $x=0$. Así que este es un punto estacionario. Sin embargo, una simple ojeada al comportamiento de la función nos muestra que, para $x>0$ se tiene $f(x)>0$ y, para $x<0$ será $f(x)<0$. De modo que $x=0$ no es ni punto de máximo ni punto de mínimo para esta función.

Este ejemplo responde negativamente a la primera pregunta, mostrando que existen puntos estacionarios que no son ni de máximo ni de mínimo, es decir, que *la anulación de la derivada es una condición necesaria para que un punto sea de máximo o mínimo, pero no es suficiente.*

Por tanto precisamos de un método que nos permita distinguir, entre los puntos estacionarios, aquellos que son extremos y los que no lo son y, además, determinar de que tipo es este extremo. Para elaborar tal método será de gran ayuda el análisis del crecimiento de una función a través de su derivada.

Análisis del crecimiento de una función. Primeramente supongamos que una función $y=f(x)$ es **creciente** (en sentido amplio) en los puntos de cierto intervalo (a,b), esto es:

Dados dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de (a,b) tales que $x_1<x_2$ se cumple que

$$f(x_1)\leq f(x_2).$$

Supondremos además que, **en todos los puntos del intervalo (a,b), la función tiene derivada**. Entonces, para puntos x y $x+\Delta x$ en (a,b) se tendrá que:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0 \text{ para } \Delta x>0 \text{ y } f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0 \text{ para } \Delta x<0.$$

Esto significa que el cociente incremental

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

luego se deberá cumplir que $f'(x)\geq 0$.

Un resultado análogo puede comprobarse para funciones **decrecientes** (en sentido amplio), es decir para funciones $y=f(x)$ que satisfagan:

Para cualesquiera x_1 y x_2 de (a,b) tales que $x_1<x_2$ se cumple que

$$f(x_1)\geq f(x_2).$$

Hemos obtenido el resultado siguiente:

Si $y=f(x)$ tiene derivada y *es creciente (decreciente) en el intervalo* (a,b), *entonces para todos los x de ese intervalo se cumple que*

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Como lo que queremos es encontrar una forma de analizar, utilizando la derivada, si una función es creciente o decreciente, nos será más útil el recíproco del resultado anterior. Para justificarlo introduzcamos, de manera geométrica, una afirmación que Lagrange probó en forma analítica, pero demasiado enrevesada para nuestros propósitos.

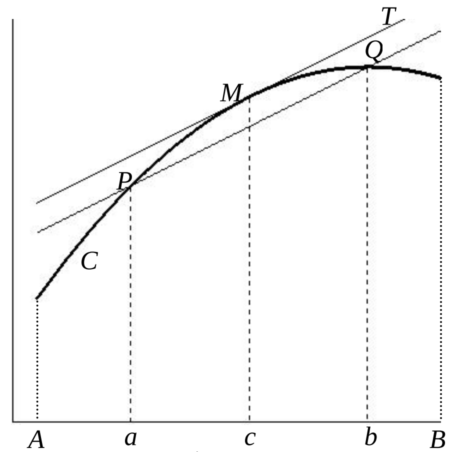

Fig.23

Consideremos la curva C dada por el gráfico de una función $y=f(x)$ con derivada en todo el intervalo (A,B) y dos puntos a y b de este intervalo (Fig.23). Tracemos la secante PQ que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ de C. Traslademos esta secante en forma paralela a sí misma y de manera que los puntos P y Q se tornen cada vez más próximos, entonces, cuando la distancia entre ellos sea infinitesimal, el segmento PQ se convertirá en uno de los lados infinitamente pequeños de la poligonal que identificamos a C. De este modo, la secante PQ, prolongación de este lado de la poligonal, se convierte en la tangente MT a C. Lo anterior significa que hemos encontrado un punto M de C, en donde su tangente es paralela a la secante PQ o, equivalentemente: existe un punto c del intervalo (a,b) donde la derivada de $y=f(x)$ coincide con la pendiente de PQ, es decir:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.} \tag{2}$$

Este resultado se conoce como **teorema del valor medio o de Lagrange.**

Observación. Si la función $y=f(x)$ representa el espacio recorrido por un móvil en un tiempo x, entonces el miembro derecho de la fórmula (2) no es más que la velocidad media del móvil en el intervalo de tiempo (a,b). Así que (2) puede interpretarse físicamente como: *hay algún instante donde la velocidad coincide con la velocidad media del móvil en el intervalo*. De ahí la denominación de "valor medio" para ella.

Supongamos ahora que la función $y=f(x)$ tiene derivada mayor o igual que cero para todos los puntos de un intervalo (A,B). Consideremos x y $x+\Delta x$ dos elementos de este intervalo y apliquemos (2) al intervalo $(x,x+\Delta x)$, para $\Delta x>0$ o a $(x+\Delta x,x)$, para $\Delta x<0$. Entonces habrá algún punto c entre x y $x+\Delta x$ y, por tanto, en (A,B), tal que

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x} = f'(c).$$

Como $f'(c)\geq 0$, entonces

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

lo cual significa que $f(x+\Delta x)-f(x)$ o es cero o tiene el mismo signo que Δx y podemos concluir que la función es creciente (en sentido amplio). Análogamente puede razonarse si la derivada de la función es negativa en los puntos de un intervalo (A,B). En resumen, tenemos el siguiente:

Criterio para el análisis del crecimiento de una función:

Una función $f(x)$ con derivada en el intervalo (A,B) es creciente (decreciente) si y solo si para todos los x de ese intervalo

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Ejemplo 2. La función $y=\operatorname{sen} x$ tiene por derivada $y'=\cos x$ que es positiva en el intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$ y negativa en $(\pi/2,3\pi/2)$, luego la función $\operatorname{sen} x$ es creciente en el primer intervalo y decreciente en el segundo. Análogamente puede verse que, en general, la función $\operatorname{sen} x$ es creciente en los intervalos de la forma $(-\pi/2+2n\pi,\pi/2+2n\pi)$ y decrecientes en los de la forma $(\pi/2+2n\pi,3\pi/2+2n\pi)$, donde n toma cualquier valor entero positivos, negativo o cero. Notemos que en los puntos inicial y final de estos intervalos la función alcanza sus valores extremos: en los del tipo $\pi/2+2n\pi$ siempre tiene un máximo, en los del tipo $3\pi/2+2n\pi$ un mínimo. Por tanto, en todos los casos los intervalos considerados anteriormente pudieran tomarse cerrados.

Observaciones. 1) La primera regla de derivación que estudiamos fue: *La derivada de una constante es cero*. La fórmula del valor medio proporciona un medio para justificar el recíproco de esta afirmación:

Si una función $y=f(x)$ tiene derivada cero en todos los puntos de un intervalo (A,B), entonces esta función es constante en dicho intervalo.

En efecto, si aplicamos la fórmula (2) a dos puntos cualesquiera a y b de dicho intervalo, encontramos algún c de dicho intervalo tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0,$$

por tanto $f(a)=f(b)$, luego la función es constante.

2) Si dos funciones $y=f(x)$ y $y=g(x)$ tienen sus derivadas iguales en un cierto intervalo, entonces la función diferencia $f(x)-g(x)$ tendrá derivada nula y por la observación anterior será constante. Por tanto, podemos concluir que:

Si $F(x)$ y $G(x)$ son ambas primitivas de la función $f(x)$ en un intervalo (A,B), entonces existe una constante C tal que $F(x)=G(x)+C$ en el intervalo (A,B). De forma equivalente:

Todas las funciones primitivas de una función $f(x)$ en un intervalo (A,B) se diferencian en una constante.

Esta última afirmación será muy valiosa para el estudio de la integración en el capítulo siguiente.

Veamos ahora cómo puede ayudarnos el análisis del crecimiento de una función con derivada para la determinación de cuáles puntos estacionarios son extremos y de qué tipo. Sea x_0 un punto estacionario de $y=f(x)$, es decir tal que $f'(x_0)=0$ y analicemos el comportamiento del signo de la derivada de $f(x)$ antes y después de x_0.

Condición suficiente de extremo.

Caso 1. (Fig.24a) Supongamos que para $\Delta x<0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x)\geq 0$ y para $\Delta x>0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x)\leq 0$, entonces la función será creciente antes de x_0 y decreciente después de este valor. Esto significa que $y=f(x)$ tendrá un **máximo** en el punto de abscisa x_0.

Caso 2. (Fig.24b) Consideremos ahora que para $\Delta x<0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x)\leq 0$ y para $\Delta x>0$ (pequeño) $f'(x_0+\Delta x)\geq 0$, entonces la función será decreciente antes y creciente después de x_0. Esto significa que $y=f(x)$ tendrá un **mínimo** en el punto de abscisa x_0.

Caso 3. (Fig.24c) Si para todo Δx, suficientemente pequeño, tanto positivo como negativo, $f'(x_0+\Delta x)\leq 0$ (o $f'(x_0+\Delta x)\geq 0$), entonces la función $y=f(x)$ permanecerá siempre decreciente (o creciente) en las cercanías de x_0 y, por tanto, no tendrá extremo en ese punto.

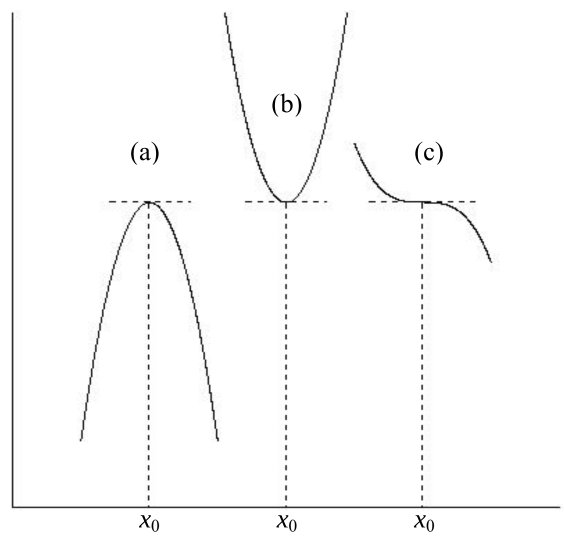

Fig.24

Observación. En la condición suficiente anterior, cuando nos referimos a extremo de una función lo hacemos con el sentido de un máximo o mínimo local. Por esta razón, hemos supuesto que la condición sobre el signo de la derivada se cumple antes y después del punto x_0, pero solo para valores que están suficientemente próximos al mismo. Advertimos al lector para que no confunda los puntos de máximo y mínimo locales de una función con los puntos donde la función alcanza su mayor o menor valor cuando la variable independiente recorre un cierto conjunto, por ejemplo un intervalo. Para distinguir estos dos casos a los segundos se les denomina **extremos absolutos** de la función.

Ejemplo 3. Una aplicación inmediata de la condición suficiente de extremo indica que la función $y=\operatorname{sen}x$ tiene puntos de extremos relativos en todos sus puntos estacionarios, los de la forma $\pi/2+2n\pi$ son puntos de máximos y los de la forma $3\pi/2+2n\pi$ son de mínimo. Además el valor máximo absoluto de esta función es 1 y el mínimo absoluto es -1.

Ejemplo 4. Analicemos el crecimiento y los puntos de extremos relativos del polinomio

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{19x^3}{3}-6x^2+1.$$

La derivada es

$$f'(x)=x^4-8x^3+19x^2-12x=x(x-1)(x-3)(x-4),$$

luego los puntos estacionarios de la función son

$$x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=4.$$

Notemos que el signo de la derivada está determinado por el de sus factores, luego se comprueba fácilmente el comportamiento de los signos dado en la tabla de Fig.25:

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	>0	<0	>0	<0	>0

Fig.25

Esta variación de los signos significa que la función es creciente en los intervalos $(-\infty,0)$, $(1,3)$, $(4,\infty)$ y decreciente en $(0,1)$ y $(3,4)$.

De este análisis del crecimiento de la función se infiere inmediatamente la naturaleza de sus puntos estacionarios: los puntos de abscisas $x=0$ y $x=3$ son de máximo y los puntos de abscisas $x=1$ y $x=4$ son de mínimo.

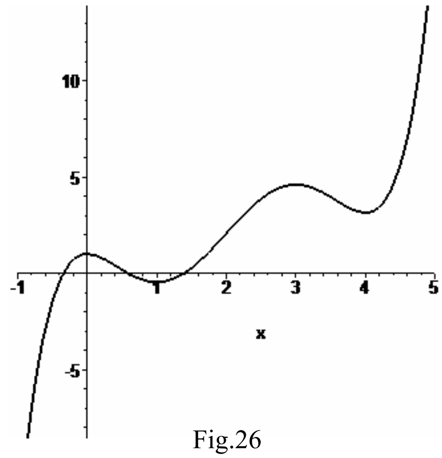

Fig.26

Las ordenadas de los puntos de máximo y mínimo del gráfico de la función son

$$f(0)=1,\quad f(1)=-0{,}47,\quad f(3)=4{,}6,\quad f(4)=3{,}13.$$

El gráfico de Fig.26 resumen las características encontrada para la función propuesta. Observemos que el valor 3,13 que toma la función en un punto de mínimo ($x=4$) puede ser mayor que el valor 1 que es alcanzado en uno de máximo ($x=0$). Esta observación enfatiza el *carácter local* de esta noción de extremo. Este polinomio tiene cuatro extremos relativos, dos mínimos, que los alcanza en $x=1$ y $x=4$ y dos máximos correspondientes a $x=0$ y $x=3$. Por otra parte, es claro que $f(x)$ toma valores, tanto positivos como negativos de valor absoluto tan grandes como se quiera (basta con dar a x valores infinitamente grandes positivos o negativos). Esto último significa que $f(x)$ **no tiene máximo ni mínimo absolutos** cuando consideramos a la variable x recorriendo todos los números reales. Por otra parte, si limitamos los valores de x, por ejemplo, al intervalo cerrado $[-1,1]$, entonces el máximo absoluto de la función será 1 y su mínimo absoluto $f(-1)=-13{,}53$.

Observaciones. 1) Notemos que los valores máximos y mínimos absolutos de una función $f(x)$ cuando la variable x recorre un intervalo cerrado $[a,b]$, pueden alcanzarse en un punto x_0 del interior del intervalo, en ese caso $f'(x_0)=0$. Pero, tal como sucedió en el ejemplo anterior, también un extremo absoluto puede ser el valor de la función en uno de los extremos del intervalo. Es decir, las abscisas de los *posibles puntos de extremo absoluto* de una función en un intervalo $[a,b]$ son:

$$x=a,\quad x=b \ \text{ y } \ x\in(a,b) \ \text{ tales que } \ f'(x)=0.$$

Asimismo puede ocurrir que una función carezca de extremos absolutos si la variable independiente recorre cierto conjunto, como ocurre con la función del ejemplo anterior cuando la variable recorre todo los números reales.

2) Al comienzo de este epígrafe convenimos en que solo trataríamos con funciones con derivadas bien definidas en el intervalo que nos interesara, ya que un estudio más profundo y riguroso de los extremos de una función sale de los objetivos propuestos en este curso. Por este motivo, los problemas que resolveremos tendrán una formulación lo suficientemente simple para que el análisis de los extremos no presente duda alguna. Sin embargo, hay funciones que no satisfacen la condición impuesta y que son lo

suficientemente sencillas para poder extender el método descrito en este epígrafe. El ejemplo siguiente pretende aclarar este comentario.

Ejemplo 5. Analicemos el crecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)=x^{2/3}$ (Fig.27).

Esta función está bien definida para cualquier x real y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3},$$

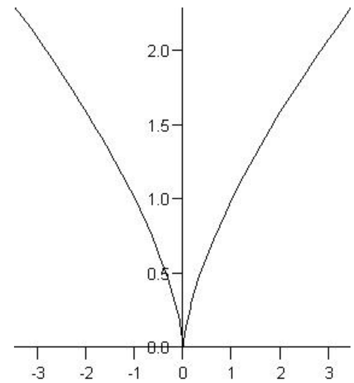

Fig.27

luego ella es positiva para $x>0$, negativa cuando $x<0$ y no existe si $x=0$. De modo que podemos afirmar que $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$. Pero ¿qué ocurre en $x=0$? En este ejemplo puede comprobarse directamente que el punto (0,0) es un mínimo de la función.

Supongamos que se desea también hallar los extremos absolutos de $f(x)$ en un intervalo, por ejemplo $[-1,3]$. Entonces observamos que el máximo valor se alcanza en el extremo derecho del intervalo $x=3$ y el mínimo será 0, que se alcanza en $x=0$.

Este ejemplo nos indica que, *tanto los extremos relativos como absolutos, también pueden alcanzarse en puntos donde la derivada de la función carece de significado*.

Ejemplo 6. Retomemos el problema presentado al inicio de este capítulo:

> *Encontrar entre todos los pares de números positivos que suman 100 aquel que arroja el resultado máximo al multiplicar el cubo del primero por el cuadrado del segundo.*

Para ello habíamos visto que lo que se necesitaba era encontrar los valores de x entre 0 y 100 de modo tal que el polinomio

$$P(x) = x^3(100-x)^2 = x^5 - 200x^4 + 10\ 000x^3$$

alcanzara su mayor valor, es decir su máximo absoluto.

La derivada de $P(x)$ es el polinomio

$$P'(x) = 5x^4 - 800x^3 + 30000x^2 = 5x^2\left(x^2 - 160x + 6000\right),$$

cuyos ceros son $x=60$ y $x=100$.

Como $x\in[0,100]$, entonces las posibilidades para los puntos de máximo son $x=0$, $x=60$ y $x=100$. Evaluemos el polinomio en estos tres puntos:

$$P(0)=0, \quad P(60)=345\,600\,000, \quad P(100)=0.$$

Evidentemente el valor máximo posible en este intervalo es $P(60)$ y el número buscado es $x=60$.

Ejemplo 7. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la región limitada por la parábola $y^2=4px$ y la recta $x=a$ (Fig.28).

Es claro que el rectángulo debe tener dos vértices sobre la recta $x=a$, denotemos por B y B' estos vértices y sean P y P' los vértice situados sobre la parábola (simétricos respecto al eje X). Se trata de encontrar las coordenadas (x,y) del punto P, de modo que el área del rectángulo $PBB'P'$ alcance el mayor valor posible.

Tanto cuando el punto P está muy próximo al origen como cuando P se acerca mucho a la recta $x=a$ obtenemos un rectángulo de área muy pequeña, por tanto, es geométricamente claro, que debe haber alguna posición intermedia de la recta PP' para la cual el área sea máxima.

El área del rectángulo $PBB'P'$ es igual a

$$A = 2y(a-x) = 2y\left(a - \frac{y^2}{4p}\right).$$

Así que debemos encontrar el máximo (absoluto) de la función

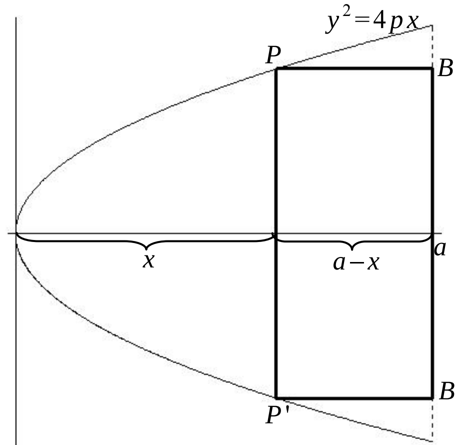

Fig.28

$$A(y) = 2y\left(a - \frac{y^2}{4p}\right),$$

donde evidentemente $0 < y < 2\sqrt{ap}$ (si $y=0$ o $y = 2\sqrt{ap}$ entonces no habría rectángulo propiamente dicho, degeneraría en una recta y se puede considerar que su área es cero).

La derivada de la función $A(y)$ es

$$A'(y) = 2a - \frac{3y^2}{2p}.$$

Esta derivada tiene dos ceros, pero como solo nos interesan los valores positivos de y, entonces el único punto posible es

$$y_0 = \sqrt{\frac{4ap}{3}}.$$

Luego podemos afirmar que las dimensiones del rectángulo de área máxima son

$$2y_0 = 2a - \frac{3y_0^{\,2}}{2p} \quad \text{y} \quad a - x_0 = a - \frac{y_0^{\,2}}{2p} = \frac{2a}{3}.$$

Ejemplo 8. Uno de los problemas que motivó a Fermat en el estudio de los valores extremos fue el de la refracción de la luz:

Supongamos que un rayo de luz viaja desde un punto A hasta otro B, situados en semiplanos diferentes respecto a la recta R. Si los dos medios son homogéneos, pero con densidades diferentes, entonces la trayectoria en cada medio es rectilínea, pero varía de dirección al atravesar la recta R. De esta forma la trayectoria resulta ser una línea quebrada ACB como en la Fig.29. Al ángulo i que forma la recta AC con la vertical se le denomina *ángulo de incidencia* y al ángulo r *ángulo de refracción*. Los experimentos sugerían que

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = c,$$

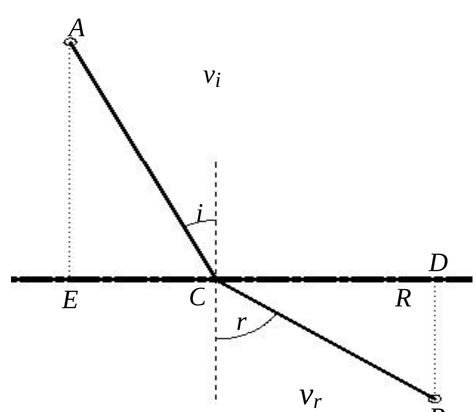

Fig.29

donde la constante c depende solamente de la relación entre las densidades de ambos medios.

Fermat se propuso obtener este resultado matemáticamente. Para ello postuló que

La luz viaja de un punto a otro a través de un camino que requiere el menor tiempo.

Cuando el rayo de luz pasa de un medio a otro (atravesando la recta R), la velocidad de la luz cambia en dependencia de las densidades de los medios atravesados. Supongamos que desde A hasta C la velocidad es constante e igual a v_i y al llegar a C su velocidad se convierte en v_r. De acuerdo al principio de Fermat el trayecto del rayo será la quebrada ACB, donde el punto C estará ubicado de modo tal que el tiempo de recorrido sea el menor posible.

En un movimiento uniforme (velocidad constante) se cumple la fórmula:

$$v = \frac{e}{t},$$

luego el tiempo de recorrido será el cociente del espacio entre la velocidad. Entonces el tiempo para recorrer el segmento AC (Fig.29) será

$$\frac{\sqrt{AE^2 + EC^2}}{v_i}$$

y el recorrido del segmento CB necesitará un tiempo

$$\frac{\sqrt{DB^2 + CD^2}}{v_r}.$$

Si denotamos por x a la longitud EC, entonces el tiempo total de recorrido desde el punto A hasta el punto B puede escribirse como una función de la variable x

$$t(x) = \frac{\sqrt{AE^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}}{v_r}.$$

Observemos que cuando la variable x toma valores infinitamente grandes, tanto positivos como negativos, la función $t(x)$ se hace infinitamente grande, por lo tanto el valor que minimiza la función debemos buscarlo entre los valores de x tales que $t'(x) = 0$. Es decir,

$$t'(x) = \frac{x}{v_i\sqrt{AE^2 + x^2}} - \frac{ED - x}{v_r\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}} = 0.$$

Pero de la Fig.29 se observa que

$$\operatorname{sen} i = \frac{x}{\sqrt{AE^2 + x^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} r = \frac{ED - x}{\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}},$$

de donde sigue inmediatamente

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen} r}{v_r} \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_i}{v_r},$$

lo que confirma el resultado experimental.

Tanto la fórmula del valor medio como el análisis del crecimiento o extremos de una función constituyen herramientas muy útiles en la demostración de desigualdades. Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 9. Probemos las desigualdades siguientes:

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}, \text{ siendo } 0<b\leq a.$$

Si aplicamos la fórmula del valor medio a la función $f(x)=\ln x$ en el intervalo (b,a), entonces:

$$\frac{\ln a - \ln b}{a-b} = \frac{1}{c}, \text{ para algún } b<c<a,$$

de donde

$$\ln\frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}.$$

Pero

$$\frac{a-b}{a} \leq \frac{a-b}{c} \leq \frac{a-b}{b},$$

lo que demuestra las desigualdades requeridas.

Ejemplo 10. Prueba que se cumple $\ln(1+x)\leq x$, para $x\geq 0$.

Consideremos la función $f(x)=\ln(1+x)-x$, entonces debemos probar que $f(x)\leq 0$ para todo $x\geq 0$. Observemos que $f(0)=0$, además

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Así que $f'(x)\leq 0$ cuando $x\geq 0$, de modo que $f(x)$ es decreciente en $(0,\infty)$ y por tanto, $f(x)\leq 0$ para $x\geq 0$.

Convexidad del gráfico de una función. El análisis del signo de la derivada nos indica cuando la función es creciente o decreciente sin embargo, el gráfico de una función, por ejemplo creciente, no siempre se comporta de igual forma. En la Fig.30a) se muestra una curva que crece y "se voltea" hacia arriba, mientras que en b) la curva también crece, pero "se voltea" hacia abajo. La comparación del comportamiento de las rectas tangentes a ambas curvas muestra que, en a) las pendientes de estas rectas crecen, mientras que en

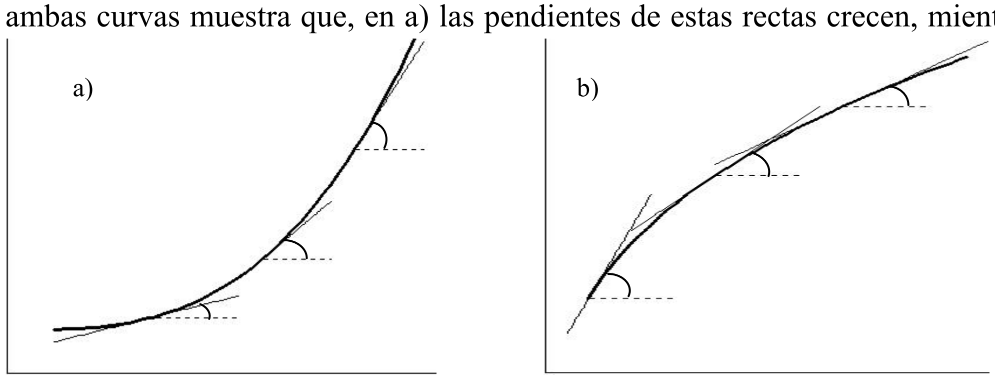

Fig.30

b) decrecen. En el primer caso diremos que el gráfico es *convexo hacia abajo* y en el segundo que es *convexo hacia arriba*.

Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada en todos los puntos del intervalo (a,b). Como la pendiente de la recta tangente a una curva $y=f(x)$ se calcula mediante la derivada, entonces la curva será convexa hacia abajo (resp. hacia arriba) en (a,b) cuando la función derivada $f'(x)$ sea creciente (resp. decreciente) en (a,b). Por otra parte, para determinar el crecimiento o decrecimiento de una función nos auxiliamos de su derivada. Entonces, si podemos calcular la derivada de la función $f'(x)$, el análisis de la convexidad podemos realizarlo acudiendo a la *función derivada de la función derivada*, esto es $\left(f'(x)\right)'$, la cual llamaremos **segunda derivada** de la función $f(x)$ y denotaremos por $f''(x)$. En resumen:

Una curva $y=f(x)$ es convexa hacia abajo en (a,b) (resp. hacia arriba) cuando $f''(x)>0$ (resp. $f''(x)<0$), $x\in(a,b)$.

Observación. Notemos que cuando x_0 es un punto estacionario de una función $f(x)$ y su segunda derivada es positiva, entonces la primera derivada es una función creciente. Por tanto la derivada debe ser negativa antes del punto x_0 y positiva después de él. Así que un punto estacionario, donde la segunda derivada de la función es positiva es un punto de mínimo. Un razonamiento análogo muestra que los puntos estacionarios donde la segunda derivada es negativa son puntos de máximo de la función. Este resultado proporciona una segunda condición suficiente para la determinación de los extremos de una función:

Condición suficiente para extremos. Si x_0 es un punto estacionario de $f(x)$ y $f''(x_0)>0$ (resp. $f''(x_0)<0$), entonces x_0 es un punto de mínimo (resp. máximo) de $f(x)$.

Los puntos donde una curva $y=f(x)$ cambia el sentido de su convexidad se denominan **puntos de inflexión.** Luego si x_0 es la abscisa de un punto de inflexión, debe satisfacer la condición $f''(x_0)=0$ (estamos suponiendo que la segunda derivada de la función está bien definida), además la segunda derivada debe cambiar de signo al pasar la variable x de valores menores que x_0 a valores mayores que x_0.

Ejemplo 11. Determinemos los puntos de inflexión y la dirección de la convexidad de la curva $y=f(x)=\operatorname{sen} x$.

La derivada es $f'(x)=\cos x$, por tanto $f''(x)=-\operatorname{sen} x$. Y debemos analizar el signo de esta última función.

La función seno se anula en los puntos de la forma $x=n\pi$, donde n toma cualquier valor entero. Además ella tiene signos diferentes antes y después de estos puntos. Por tanto todos los puntos de la forma $(n\pi,0)$ serán de inflexión de $y=\operatorname{sen} x$. En los intervalos de la forma $\left(2n\pi,(2n+1)\pi\right)$ la función seno es positiva, por tanto su segunda derivada es negativa y la porción de su gráfico en esos intervalos será convexa hacia arriba. Similarmente se ve que en los intervalos de la forma $\left((2n+1)\pi,2n\pi\right)$ la función seno es convexa hacia abajo.

Ejemplo 12. La función $f(x)=x^{1/3}$ tiene como segunda derivada

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3},$$

la cual es positiva, cuando x es negativa y negativa cuando x es positiva. Así que su gráfico (Fig.31) será convexo hacia abajo en el intervalo $(-\infty,0)$ y convexo hacia arriba en $(0,\infty)$, por tanto el punto (0,0) es de inflexión. En este ejemplo se muestra que, de forma semejante a lo que ocurría con los extremos, *pueden ser de inflexión puntos para los cuales la segunda derivada carezca de significado*.

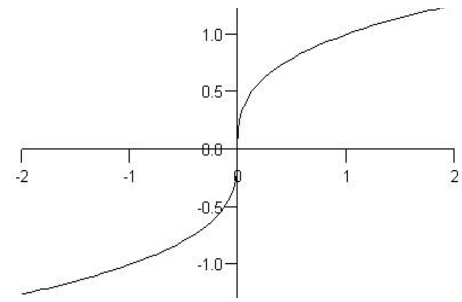

Fig.31

El análisis del crecimiento, extremos relativos, convexidad y puntos de inflexión de una función permite determinar con bastante exactitud su comportamiento y es una herramienta efectiva para la realización de un gráfico aproximado de la misma.

En el trazado del gráfico de una función, además del análisis del crecimiento y convexidad, constituyen una valiosa ayuda tener en cuenta algunos otros elementos. Veamos algunos de estos elementos:

- La determinación de los valores admisibles para la variable independiente, es decir para los cuales tiene sentido la expresión que define la función. Al conjunto de estos valores admisibles se le llama **dominio de la función**. Además, es útil observar cómo la función varía en las proximidades de los puntos que no pertenecen a su dominio.
- El análisis del comportamiento de la función cuando la variable independiente x toma valores infinitamente grandes, tanto positivos como negativos.
- El estudio de la simetría del gráfico. Cuando para todo valor admisible de la variable la función satisface $f(-x)=f(x)$, se dice que ella es **par** (por ser éste el comportamiento de las potencias pares de la variable). *El gráfico de una función par es siempre simétrico respecto al eje de ordenadas* (Fig.32a).Análogamente, una **función impar** es aquella que satisface $f(-x)=-f(x)$, (característica de las potencias impares) y *su gráfico es simétrico respecto al origen de coordenadas* (Fig.32b).

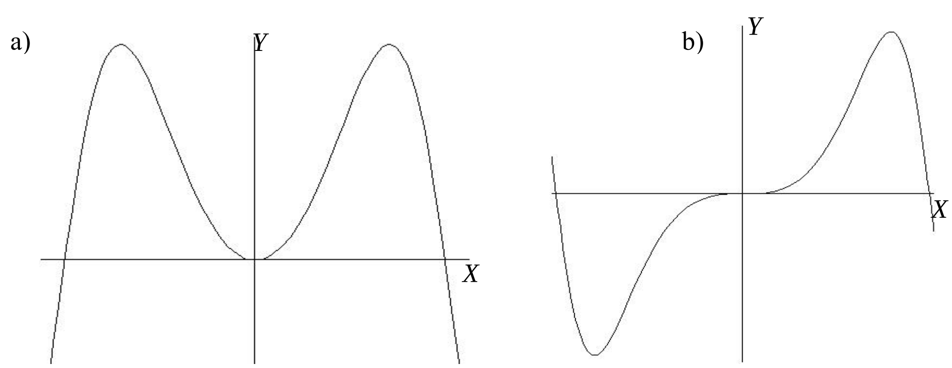

Fig.32

Ejemplo 13. Analicemos el comportamiento de la función $y=x+1/x$ y tracemos aproximadamente su gráfico.

Notemos que $f(x) = x + 1/x$ está definida para todo valor de x no nulo. Cuando la variable se acerca a cero se ve claramente que la función se hace, en valor absoluto, infinitamente grande. Por otra parte, si la variable x se hace infinitamente grande también se hará infinitamente grande la variable y.

La igualdad

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x} \right) = f(x),$$

indica que $f(x)$ es impar y su gráfico será simétrico respecto al origen de coordenadas.

Calculemos las derivadas primera y segunda de $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Por tanto esta función tiene dos puntos estacionarios $x=1$ y $x=-1$. En estos puntos la segunda derivada vale:

$$f''(1) = 2 > 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = -2 < 0,$$

así que la curva tiene en el punto $(-1,-2)$ un máximo y en $(1,2)$ un mínimo. Podemos observar además que la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$ y decreciente en $(-1,0)$ y $(0,1)$.

Como la segunda derivada no se hace cero, la curva no tiene puntos de inflexión. Cuando $x<0$ su convexidad está dirigida hacia arriba, mientras que para $x>0$ está dirigida hacia abajo. El gráfico de $y=f(x)$ se muestra en la Fig.33.

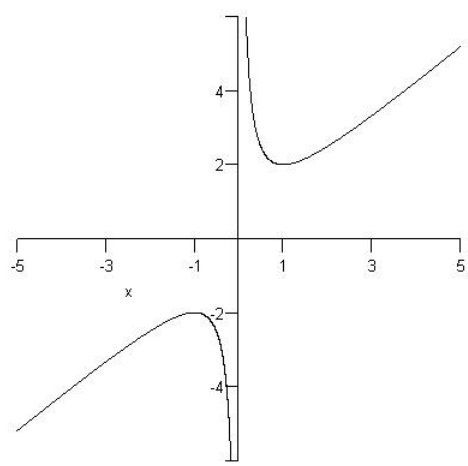

Fig.33

Ejemplo 14. Investiguemos el comportamiento de la curva $y = e^{-x^2}$ y tracemos aproximadamente su gráfico.

Ante todo observemos que la función $f(x) = e^{-x^2}$ está definida para todos los números reales y solo toma valores positivos. Además,

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$

luego es par y su gráfico es simétrico respecto al eje de ordenadas.

Cuando la variable x se hace infinitamente grande el exponente se hará aún mayor en valor absoluto, pero negativo, por tanto los valores de la función serán cada vez más pequeños.

Las derivadas primera y segunda de la función son

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

como

$$y' = -2xe^{-x^2} = 0 \text{ si y solo si } x = 0,$$

el único punto estacionario y posible punto de extremo relativo es el punto (0,1).

Además,

$$y''(0) = -2 < 0\,,$$

luego (0,1) es un punto de máximo relativo de la función.
La segunda derivada se anula cuando

$$2x^2 - 1 = 0,$$

luego los posibles puntos de inflexión son

$$x_1 = \sqrt{2}/2 \ \text{ y } \ x_2 = -\sqrt{2}/2\,.$$

En la tabla de la Fig.34 resumimos el comportamiento del signo de la segunda derivada y el cambio de la dirección de su convexidad. Por lo que concluimos que los puntos $\left(-\sqrt{2}/2, e^{-1/2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}/2, e^{-1/2}\right)$ son puntos de inflexión del gráfico de la función.

En la Fig.34 se muestra el gráfico de la curva $y = e^{-x^2}$ en el cual se ponen de manifiesto todas las características analizadas anteriormente.

intervalo	y''	**convexidad**
$\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$	$y''>0$	hacia abajo
$\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$	$y''<0$	hacia arriba
$\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$	$y''>0$	hacia abajo

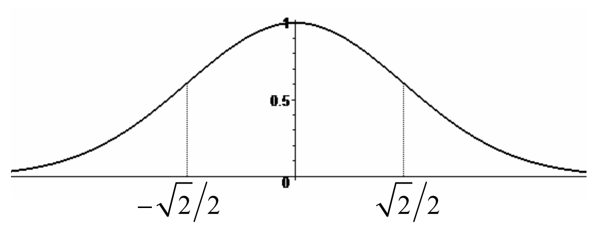

Fig.34

Ejercicios

1. Sobre la curva $y = x(x-2)(x-4)$ consideremos los puntos P_1 de abscisa x_1=1 y P_2 de abscisa x_2=3. ¿En qué puntos la tangente a la curva es paralela a la secante P_1P_2?

2. Halla el punto c de la fórmula del valor medio para los casos siguientes:

a) $f(x) = 3x^2 - 5$, con a=–2 y b=0 , b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con $a,b \neq 0$,

c) $f(x) = x^3$, con a,b arbitrarios.

3. Analiza el crecimiento y los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, b) $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$ c) $y = x^2 + \dfrac{2a^3}{x}$,

d) $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$, e) $y = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ d) $y = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{2}$.

4. En cada caso, traza un esquema aproximado del gráfico de una función con las características indicadas:

a) $f'(x) > 0$ para todo x real.

b) $f'(0) = -1$, $f'(2) = 1$.

c) $f(1) = 0$, $f'(x) < 0$, para $x<1$, $f'(x) \geq 0$, para $x>1$.

5. Prueba que:

a) $\left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \le \left|x - y\right|$, para todo x y y reales.

b) $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, para $x > -1$.

Sugerencia: Usa la fórmula del valor medio o sus consecuencias.

6. Prueba las desigualdades siguientes:

a) $\ln(1+x) \ge \dfrac{x}{x+1}$, $x > -1$.

b) $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$, $a, b > 0$.

c) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

d) $x^a - ax \le 1 - a$, $x > 0$, $0 < a < 1$.

7. Analiza la convexidad de los gráficos de las funciones siguientes:

a) $y = x^a$, $x > 0$, b) $y = \arctan x$ c) $y = \left(1 + x^2\right)e^x$,

d) $y = x - \operatorname{sen} x$, e) $y = x^2 \ln x$, f) $y = e^{\arctan x}$, g) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

8. ¿Para que valores de a tiene puntos de inflexión la gráfica de la función $y = e^x + ax^3$?

9. Demuestra que la curva $y = -\dfrac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que están situados sobre una misma recta.

10. Determina los coeficientes a, b, c, d, tales que la función $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $x = -1$, cuyo valor sea 10 y un punto de inflexión en (1,–6).

11. Si $f(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\operatorname{sen} x$ determina los valores de a, b, c, d, tales que $f'(x) = x\cos x$.

12. Indica el aspecto que ofrece el gráfico de una función en un intervalo (a, b) si se sabe que en ese intervalo se cumple:

a) $y>0$, $y'>0$, $y''>0$, b) $y>0$, $y'<0$, $y''>0$,

c) $y<0$, $y'>0$, $y''>0$, d) $y>0$, $y'<0$, $y''<0$.

13. ¿Para qué valores de a y b el punto (1,3) es de inflexión de la curva $y = ax^2 + bx^3$?

14. ¿Para qué valores de a tiene punto de inflexión la curva $y = e^x + ax^3$?

15. Construye el gráfico aproximado de:

a) $y = x^4 - 2x^2$ b) $y = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, d) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

16. Discute si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un máximo en $x=a$, entonces $f(x)+g(x)$ tiene un máximo en $x=a$.

b) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un máximo en $x=a$, entonces $f(x)\cdot g(x)$ tiene un máximo en $x=a$.

c) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de inflexión en $x=a$, entonces $f(x)+g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=a$.

d) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de inflexión en $x=a$, entonces $f(x)\cdot g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=a$.

17. ¿Cómo debe ser torcido un alambre de longitud L de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible?

18. (Kepler) Encontrar el cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

19. (Johann Bernoulli) Halla el valor de x tal que tenga área máxima el rectángulo de dimensiones x e y tales que el punto (x,y) está sobre el círculo $y=\sqrt{x-x^2}$.

20. Calcula el volumen máximo de un cilindro cuya área total es A. ¿Cuál será la relación óptima entre la altura y el diámetro de la base?

21. Entre los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado, halla aquel que tiene perímetro máximo.

II.6. Derivadas de orden superior y fórmula de Taylor

Los fundadores del Cálculo desde las postrimerías del siglo XVII utilizaron la diferenciación sucesiva en el estudio de las curvas y no mucho después, en el siglo XVIII, se usó pródigamente las funciones derivadas de orden superior para la investigación del comportamiento de las funciones analíticas. En este epígrafe veremos uno de sus usos más importantes: la fórmula de Taylor.

Para el análisis de la convexidad de una función, utilizamos la segunda derivada o derivada de la función derivada. De forma análoga, pueden definirse las derivadas tercera, cuarta, etc. En general, la **derivada de orden *k*** de una función $f(x)$ será la derivada de la función derivada de orden $k-1$ ($k\geq 2$), es decir

$$\boxed{f^{(k)}(x)=\left[f^{(k-1)}(x)\right]'.}$$

Ejemplo 1. La derivada de la función $f(x)=e^x$ es ella misma, por tanto su derivada de un orden cualquiera también es e^x:

$$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x.$$

Ejemplo 2. Hallemos la derivada de orden n de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$. La primera derivada es

$$f'(x)=\cos x,$$

pero

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

luego

$$f''(x)=\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

De este modo observamos que cada derivación se refleja en la adición de $\pi/2$ al argumento del seno, es decir conjeturamos que

$$f^{(k)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

lo cual puede probarse por inducción en el orden de derivación. En efecto,

1) Para $k=1$ ya lo comprobamos.

2) Supongamos que se cumple para $k=n$, es decir

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

entonces

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\operatorname{sen}\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

De modo que hemos probado la validez para $n+1$ y con ello la afirmación realizada.

Hoy en día existen diversos usos de las derivadas de orden superior, pero sin dudas el más recurrido es a través de una fórmula que se hizo popular después de ser expuesta por el escocés **Colin Maclaurin** (1698-1746) en su famoso *Tratado de las fluxiones*, obra muy didáctica publicada en dos tomos en Edimburgo (1742), pero estudios posteriores dieron con justeza la paternidad de esta fórmula a otro seguidor de Newton, el sabio inglés **Brook Taylor** (1685-1713)**.**

La fórmula de Taylor.

La obra maestra de Taylor, *Métodos directo e inverso de los incrementos,* se publicó postmorten en 1715 y la proposición 7 contiene la hoy denominada **fórmula de Taylor** para la representación de una función por una serie de potencias formada a través de sus derivadas (o fluxiones en el lenguaje newtoniano).

La idea que utiliza Taylor para llegar a la fórmula (1) se basa en el uso del polinomio de interpolación tan utilizado por su maestro Newton y que se introdujo en I.1.

Dada la función $y=f(x)$ consideremos una cantidad finita de puntos: x_0, $x_1=x_0+\Delta x$, $x_2=x_0+2\Delta x$, … y sus correspondientes valores: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$,…, entonces el polinomio de interpolación que pasa a través de estos puntos es (ver ejerc.9, I.1):

$$p(x)=y_0+\frac{x-x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3}+\ldots$$

donde la cantidad de sumandos depende de cuantos puntos se hallan tomado. Supongamos Δx muy pequeño, entonces, los puntos x_i $i=1,2,\ldots$ prácticamente coincidirán con x_0. Analicemos en qué se convierten los cocientes incrementales siguientes

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2},\ \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3},\ldots,$$

cuando $\Delta x \to 0$.

Ya sabemos que

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0).$$

El cociente con la segunda diferencia es

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} = \frac{(y_2-y_1)-(y_1-y_0)}{\Delta x^2},$$

que sustituyendo las y_i por sus valores se convierte en:

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right].$$

Pero

$$\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f\left(\left(x_0+\Delta x\right)+\Delta x\right)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x} \approx f'(x_0+\Delta x),$$

para Δx infinitesimal.

Luego

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \approx \frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x} \approx f''(x_0),$$

siempre que se considere el incremento Δx muy pequeño.

Similarmente puede razonarse con los restantes cocientes incrementales, en los cuales aparecen las diferencias de orden tres, cuatro, etc. y se obtiene:

$$\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} \approx f^{(k)}(x), \quad \Delta x \to 0.$$

De este modo el polinomio de interpolación $p(x)$ se convierte en el llamado **polinomio de Taylor** de la función $f(x)$ en el punto x_0:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

cuyo grado n está dado por la cantidad de puntos y, por tanto, de derivadas sucesivas que se hayan considerado. Por supuesto, para que (1) tenga sentido, debemos suponer que la función $f(x)$ y todas sus derivadas hasta el orden n están bien definidas en el punto x_0.

Veamos la interpretación geométrica de los polinomios de Taylor de una función $y=f(x)$. Para $n=1$ y $n=2$, de (1) tenemos:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

De modo que el polinomio $p_1(x)$ coincide con la ordenada de la recta tangente al gráfico de la función en el punto M de abscisa x_0 y $p_2(x)$ es la ordenada de la parábola que pasa por M y posee la misma recta tangente que la curva $y=f(x)$. Una interpretación análoga puede realizarse con los polinomios de grado superior. En la Fig.35 se observa como, en la medida que se toman polinomios de Taylor de grado mayor, la aproximación a la función es cada vez mejor.

Es natural pensar que cuanto mayor sea el grado tanto mejor será la aproximación del polinomio de Taylor a la función $f(x)$, razonamiento que justifica la representación en serie:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots \qquad (2)$$

al menos para puntos x que estén bastante próximos a x_0. Es claro que (2) tiene sentido solo cuando la serie que en ella aparece sea convergente y la función $f(x)$ tenga derivada de cualquier orden en el punto x_0.

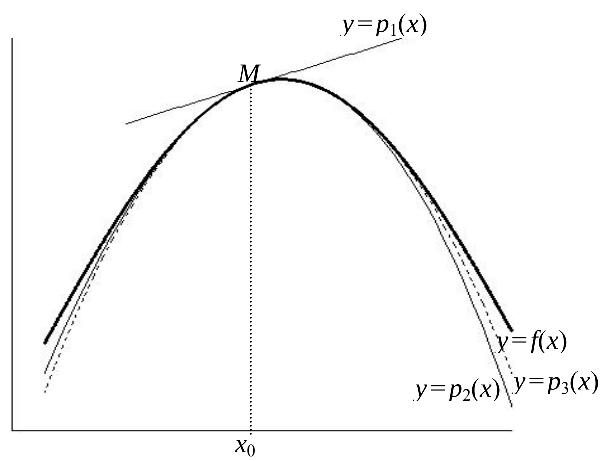

Fig.35

La expresión en (2) fue, en esencia, la fórmula a la que llegó Taylor, pero hemos utilizado la notación actual, popularizada por Lagrange a fines del siglo XVIII.

Cuando $x_0=0$ al desarrollo anterior frecuentemente se le denomina **fórmula de Maclaurin**. Aclaremos que nunca fue la intención de Maclaurin privar a Taylor del reconocimiento. La forma en que Maclaurin llega a la fórmula es diferente a la introducida por Taylor y escrupulosamente señala *que este teorema se encuentra en el "Methodus incrementorum" del Dr. Taylor*. El hecho de que haya sido más popular la fórmula de Maclaurin que la de Taylor puede deberse a la forma concisa y al estilo oscuro que le valiera a Taylor el título de "escritor enigmático". Agreguemos que antes de la publicación de Taylor y mucho antes que Maclaurin, otros sabios europeos dieron un uso explícito de la serie de potencias alrededor del origen. La serie de Taylor estaba en el tintero de varios de los geómetras que trabajaron por el establecimiento del nuevo cálculo.

En el caso particular cuando la función $y=f(x)$ es polinómica de grado n, todas las derivadas de orden superior a n serán idénticamente nulas y sus polinomios de Taylor correspondiente a esos valores de n coincidirán totalmente con $f(x)$. En ese caso la serie en (2) solo tendrá un número finito de términos.

Para una función no polinómica, cuando se realiza la aproximación

$$f(x)\approx p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

se comete un error, dado por la diferencia

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x).$$

La argumentación heurística, previa a la fórmula (2), se basa en que este error se hace cada vez más pequeño en la medida que n crece. Ella tiene varios puntos débiles, sin embargo, el resultado es válido para una gran cantidad de funciones. En particular, no es difícil comprobar que todas las series de potencias que usamos en el primer capítulo como representantes de la funciones elementales coinciden con sus correspondientes series de Taylor.

La comprobación por diferentes vías de (2) para las funciones elementales provocó que la serie de Taylor fuera considerada como válida para cualquier función por más de 100 años, hasta que **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) encontró un ejemplo de una función cuya serie de Taylor converge, pero no tiene por suma los valores de la función, es decir la fórmula (2) no tiene lugar. Hoy se conocen muchos ejemplos de funciones para las cuales la fórmula de Taylor no es válida, aunque resulta correcta para la mayoría de las funciones que aparecen en las aplicaciones elementales del cálculo. A una función cuya serie de Taylor converge a los correspondientes valores de la función se le llama **función analítica**, por ser el tipo de función que por muchos años fue el objeto principal de estudio del Análisis Infinitesimal.

En el capítulo siguiente presentamos un criterio dado por Cauchy (1821) para determinar cuando una función es analítica, aunque el primer sabio que llamó la atención sobre la necesidad de analizar la validez de la representación en serie de Taylor fue Lagrange en su libro de texto *Teoría de las funciones analíticas* (1797).

Ejemplo 3. En el ejemplo 2 vimos que la derivada de orden n de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ es:

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Si tomamos $x_0=0$, es decir, si usamos la forma de Maclaurin, se obtiene

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\ldots,\quad f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1},\quad f^{(2n)}(0)=0$$

Luego (2) da lugar a

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

que coincide con el resultado obtenido en I.8.

Ejemplo 4. Hallemos el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x)=\ln(1+x)$ para $x_0=0$.

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ son:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f^{(4)}(x)=-\frac{2.3}{(1+x)^4},$$

lo que nos permite conjeturar que

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

cuya prueba, por inducción completa, la proponemos al lector.

Por tanto

$$f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\quad n=1,2,\ldots$$

y el polinomio de Taylor (de grado n, $x_0=0$) para esta función es:

$$p_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Ejemplo 5. Veamos que la serie de Taylor para la función $f(x)=(1+x)^m$ coincide con la fórmula del binomio encontrada en I.4

Las derivadas sucesivas de esta función son:

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},\ \ldots,$$

y, en general (ejerc.1)

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Por tanto

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1),$$

y la serie de Taylor es:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Aplicaciones a los cálculos aproximados.

En el capítulo I vimos como las representación en serie del logaritmo podía ser de utilidad para calcular aproximadamente valores de esta función. También los valores de la exponencial y de las funciones trigonométricas pueden ser calculados aproximando estas funciones por su polinomio de Taylor. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6. Para las funciones trigonométricas basta con calcular sus valores solo para $0\le x\le \pi/2$, pues los restantes se deducen simplemente utilizando las fórmulas de reducción. Por otra parte la identidad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,$$

indica que es suficiente con determinar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ para valores $0\le x\le \pi/4$.

Estos últimos pueden ser calculados mediante las aproximaciones:

$$\operatorname{sen} x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\quad \text{y}$$
$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}.$$

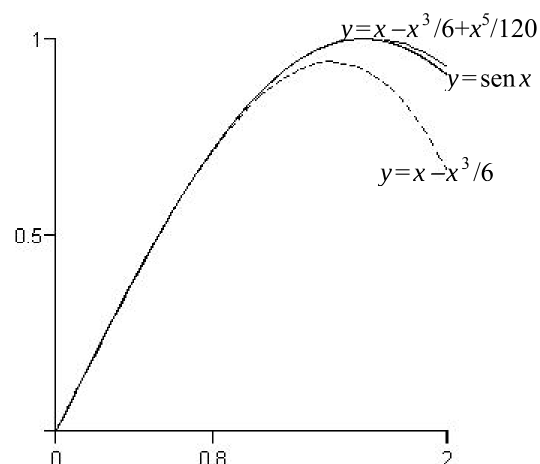

Fig.36

El gráfico de la Fig.36 muestra la calidad de la primera de estas aproximaciones en el intervalo $[0,\pi/4]$. Nótese que en el intervalo requerido los gráficos prácticamente no se distinguen y por esta razón tuvimos necesidad de realizar los gráficos con un rango mayor de valores de x. La segunda aproximación es aún mejor. En III.4, ejemplo 2, demostraremos que el error que se comete es menor que 0,0002.

El método de Newton para calcular raíces estudiado en el epígrafe 4, se basaba en la sustitución de la ecuación $f(x)=0$ por una ecuación de primer grado de la forma $p_1(x)=0$ donde $y=p_1(x)$ es la ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en un punto x_0 que seleccionábamos cada vez más cercano a la raíz buscada. Esta aproximación puede hacerse más rápida si en lugar de $p_1(x)$ se considera $p_2(x)$ o $p_3(x)$.

El astrónomo británico **Edmond Halley** (1656-1742), contemporáneo de Newton, aunque antecesor de Taylor y McLaurin, publicó en 1694 este procedimiento. En lugar del polinomio de primer grado obtenido con el método de la tangente, Halley propone usar polinomios de segundo o tercer grados, justamente los mismos que después serían llamados polinomios de Taylor de grado dos o tres.

Por ejemplo, en la ecuación de Newton $x^3-2x-5=0$, tomemos $x_0=2{,}1$. Entonces el polinomio de Taylor de segundo grado en x_0 es

$$p_2(x)=0{,}061+11{,}23\left(x-2{,}1\right)+6{,}3\left(x-2{,}1\right)^2,$$

luego debemos resolver la ecuación cuadrática

$$0{,}061+11{,}23\left(x-2{,}1\right)+6{,}3\left(x-2{,}1\right)^2=0.$$

El cambio de variables $z=x-2{,}1$ simplifica la ecuación anterior convirtiéndola en

$$0{,}061+11{,}23z+6{,}3z^2=0.$$

Esta ecuación tiene por soluciones: $-0{,}0004485$ y -1.7763335.

Escogemos la primera, por ser la menor en valor absoluto y, por tanto, nos proporciona el valor de x más próximo a 2,1. Con este método hemos encontrado la aproximación $x=2{,}0945515$, que es el mismo resultado anterior, pero en este caso obtenido con una iteración menos.

Ejercicios

1. Halla la derivada de orden n de las funciones siguientes:

a) $y=a^x$, b) $y=x^a$, c) $y=\ln\left(1+x\right)$,

d) $y=\left(1+x\right)^m$, e) $y=\operatorname{sen}x\cos x$.

2. Demuestra que la función

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x,\ c_1,\ c_2,\ \text{son constantes,}$$

satisface la relación diferencial

$$y''-4y'+4y=e^x.$$

3. Prueba, usando inducción completa en el orden de derivación, que:

a) $\left(af(x)+bg(x)\right)^{(n)}=af^{(n)}(x)+bg^{(n)}(x)$

b) $\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x)+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x)+\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x)+\ldots+$

$$+\binom{n}{i}f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)+\ldots+f(x)g^{(n)}(x).$$

c) Calcula la derivada de orden 100 de $y=e^x\left(x^2-1\right)$.

4. Halla las series de Taylor, con $x_0=0$, de las funciones siguientes:

a) $y=\operatorname{sen}3x+x\cos 3x$, b) $y=\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. Escribe el polinomio de Taylor de grado n, en los puntos indicados, para las funciones siguientes:

a) $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$, en $x_0=1$ b) $y=\operatorname{sen}^2 x$, en $x=0$ y $x=\pi/2$,

c) $y=\sqrt{x^3}$, en $x=1$, c) $y=\dfrac{1}{x}$, en $x=3$, d) $y=\dfrac{1}{(1-x)(2+x)}$, en $x=0$ y $x=3$

6. Sea $f(x)$ un polinomio de cuarto grado. Sabiendo que $f(2)=-1$, $f'(2)=0$, $f''(2)=2$, $f'''(2)=-12$, $f^{(4)}(2)=24$ calcula $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Ejercicios Complementarios

1. Prueba que si $f(x)$ es una función par (impar), entonces $f'(x)$ es impar (par).

2. Halla a, b, c tales que las curvas $y=x^2+ax+b$ y $y=x^3-c$ se corten en el punto (1,2) y tengan en ese punto la misma tangente.

3. Prueba que la tangente a la parábola $y=x^2$ en cualquier punto la interseca solo en ese punto.

4. Dado un sector circular de radio $R=100$ cm. y ángulo central $\alpha=60º$, se desea saber en cuánto varía su área si:

a) su radio R aumenta en 1 cm.,

b) el ángulo α disminuye en 30'.

Da la solución exacta y la aproximación que proporciona el diferencial

5. Sin efectuar los cálculos:

a) Prueba que $\dfrac{1}{9}<\sqrt{66}-8<\dfrac{1}{8}$, b) Compara π^3 y 3^π.

6. Justifica que las funciones (llamados polinomios de Chebyshev) de la forma

$$y=T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos\left(m\arccos x\right),\ m=1,2,\ldots$$

satisfacen la ecuación diferencial

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+m^2y=0.$$

7. Utilizando la derivada de $f(x)=(1+x)^n$, calcula la suma

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n}.$$

8. Determina los valores de a, b, c, d, tales que la función $y=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo relativo en $x=-1$, cuyo valor sea 10 y un punto de inflexión en (1,–6).

9. Indica para qué valor de a son crecientes las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^3 - ax$, b) $f(x) = ax - \operatorname{sen} x$, c) $f(x) = ax + 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$.

10. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = mx - \dfrac{(m^2+1)x}{200}$, el origen se toma en el punto desde el cual se lanza la pelota y la pendiente de la curva en el origen es m.

a) ¿Para que valor de m caerá la pelota en el mismo nivel horizontal a la mayor distancia?

b) ¿Para que valor de m alcanza la mayor altura en una pared vertical a la distancia de 7,5 m.?

11. Halla el radio de la base del cilindro de mayor volumen inscrito en una esfera de radio R.

12. Halla el punto de la hipérbola $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$ que está más cerca de (3,0).

13. Halla el área máxima del trapecio inscrito en un semicírculo de radio R de forma que la base inferior del trapecio sea el diámetro del semicírculo.

14. A las 9 de la mañana un barco B se encontraba a 65 m.m. (millas marítimas) al este de otro barco A. El barco B viajaba hacia el oeste a una velocidad de 10 m.m./h y A viajaba hacia el sur a una velocidad de 15 m.m./h ¿Cuándo se encontrarán a una distancia mínima y cuál es dicha distancia?

15. Dada una lámpara situada en A, sobre el centro O de una mesa circular de radio r (Fig.37) ¿A que altura h sobre el nivel de la mesa es necesario situar la lámpara para que la iluminación en el borde B sea máxima? Se conoce que la iluminación I es directamente proporcional a la distancia a, esto es $I = C\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{a^2}$.

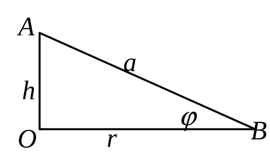

Fig.37

16. La fábrica A debe unirse mediante una carretera con la línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces ($k>1$) mayor que por el ferrocarril. ¿En que punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fabrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica hasta el poblado sea el mínimo?

17. Si $x>0$ y $f(x)=5x^2+Ax^{-5}$, siendo A una constante positiva. Halla el menor valor de A tal que $f(x)>24$.

18. Dados n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Prueba que el mínimo de la suma $\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ se alcanza cuando x es la media aritmética de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

19. Elige A y B tales que el punto $(2;2{,}5)$ sea de inflexión de la curva $x^2y+Ax+By=0$. ¿Qué otros puntos de inflexión tiene la curva hallada?

20. ¿Puede la función $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\neq 0$ tener extremos relativos?

21. Prueba las desigualdades siguientes:

a) $e^x\geq 1+x$, b) $e^x\geq ex$, c) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ \ x>0$,

c) $x^\alpha-\alpha x\leq 1-\alpha,\quad x>0,\quad 0<\alpha<1$, d) $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$, e) $\cosh x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}$

22. (Euler, 1755) Estudia las funciones

$$y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12,\quad y=x^5-5x^4+5x^3+1,$$

hallando los valores extremos, intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de su gráfico. Localiza los ceros por el método de Newton y Halley. Haz un gráfico aproximado de las curvas correspondientes.

23. Halla el polinomio de menor orden, que tiene máximo local igual a 6 en x=1 y mínimo local igual a 2 en $x=3$.

24. Se denomina **normal** a una curva $y=f(x)$ en un punto (x_0,y_0) a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la tangente a la curva. Encuentra:

a) Las curvas para las cuales cualquier normal a ella desde el punto de la curva hasta el punto de intersección con el eje de abscisa tiene longitud a.

b) Las curvas para las cuales todas sus normales pasan por el punto (a,b).

c) Dada la curva $y=\cosh\dfrac{x}{a}$, calcula, en cada uno de sus puntos, la longitud del segmento de la normal desde la curva hasta el eje de abscisas.

25. Se llama **ángulo entre dos curvas** que se intersecan en un punto al ángulo que forman sus tangentes en dicho punto. Determina en que punto y bajo que ángulo se cortan los gráficos de las funciones:

a) $f(x)=x-x^3$ y $g(x)=5x$, b) $f(x)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x$ y $g(x)=\sqrt{2}\cos x$

26. Demuestra que las familias de parábolas $y^2=p^2-2px$ y $y^2=2qx+q^2$, $p,q\neq 0$ se cortan ortogonalmente.

27. a) Prueba que $\ln\ln(n+1)-\ln\ln(n)<\dfrac{1}{n\ln n}$.

b) ¿Será la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ convergente?

28. Prueba que la función $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ es creciente en $(-\infty,-1)$ y $(0,\infty)$.

Capítulo III.
Introducción al Cálculo Integral

Así como el cálculo diferencial esta íntimamente ligado a los problemas de hallazgo de tangentes y determinación de los puntos de extremo de las curvas, el cálculo integral se relaciona con la medida de magnitudes geométricas tales como áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Según los documentos históricos que se conservan podemos asegurar que el primer gran especialista en la resolución de tales tipos de problemas fue **Arquímedes de Siracusa**. Por supuesto, Arquímedes se inspiró y utilizó magistralmente la obra de sus antecesores tanto de la Mesopotamia y el Egipto prehelénicos, como de aquellos que obtuvieron sus logros en el periodo clásico del helenismo. En toda la antigüedad greco-latina hallar el área de una figura significaba construir un cuadrado que tuviera la misma área y calcular el volumen de un cuerpo era mostrar como construir un cubo de volumen idéntico. Por eso tales problemas se conocen como los **problemas de cuadraturas** y **de cubaturas**.

Al menos se conservan 5 grandes trabajos de Arquímedes vinculados con los problemas de cuadraturas y cubaturas: *La medida del círculo*, *La cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre espirales*, *Sobre conoides y esferoides*. Nos parece significativo subrayar que en estos trabajos no se busca expresar una magnitud geométrica por una fórmula algebraica que nos permita calcular el valor numérico de la magnitud como actualmente es común en la enseñanza secundaria. La idea central era encontrar una figura o cuerpo más simple cuya área o volumen fuera equivalente a la figura o cuerpo dado. El cuadrado y el cubo por supuesto son las más simples posibles, pero a medida que se ampliaba el conocimiento, el almacén de figuras y cuerpos elementales usados para la comparación fue creciendo.

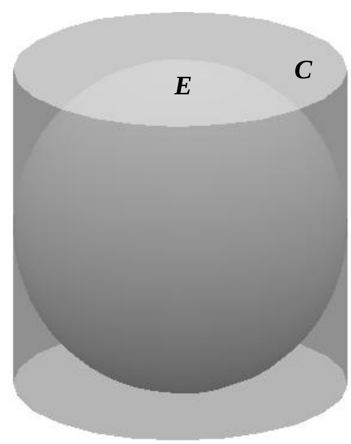

Fig.1

Por ejemplo, Arquímedes mostraba que el área A de la superficie de un cilindro circular recto (excluyendo su base) es igual al área de un círculo cuyo radio es la media proporcional entre la altura h del cilindro y el diámetro d de su base, esto es $h/r=r/d$. Hoy escribimos simplemente: $A=\pi dh$ porque usamos con desenfado la simbología algebraica y el símbolo π introducido por Euler en el siglo XVIII para representar la medida del área del círculo unidad. Muchos otros ingeniosos ejemplos se encuentran en la que se considera la obra más aguda y elegante de Arquímedes. En *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes muestra que la razón entre las áreas de la superficie de una esfera E y de la superficie C formada por el cilindro circular recto circunscrito a la esfera y sus tapas superior e inferior (ver Fig.1) es igual a la razón entre los volúmenes encerrados por estas mismas figuras. Para ello prueba que el área de E es exactamente dos tercios del área de C y que el volumen encerrado por la esfera es exactamente dos tercios del volumen limitado por el cilindro. Es decir

$$\text{Área}(E)=\frac{2}{3}\text{Área}(C),\ \ \text{Volumen}(E)=\frac{2}{3}\text{Volumen}(C).$$

Conocidas las expresiones para el área y volumen del cilindro, de tales relaciones no es difícil deducir las fórmulas que hoy nos enseñan en los estudios preuniversitarios:

$$\text{Área}(E) = 4\pi r^2, \quad \text{Volumen}(E) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

donde r es el radio de la esfera.

Arquímedes estaba tan orgulloso de estos resultados que mandó a grabar en su tumba una esfera inscrita en un cilindro circular recto de altura igual al diámetro de la esfera. Según se cuenta, gracias a esta inscripción es que el célebre orador romano Cicerón logró encontrar y restaurar la tumba de Arquímedes. Algunos historiadores comentan con picardía que probablemente esta sea la mayor contribución de los antiguos romanos a la historia de la matemática.

En el siglo XVII, las ideas contenidas en la obra de Arquímedes inspiraron a numerosos científicos, quienes desarrollaron nuevos conceptos y métodos para el cálculo de magnitudes geométricas. Gran significado tuvo la introducción de los infinitesimales, especialmente desde que Newton y Leibniz establecieron la relación recíproca entre los problemas de cuadratura y cubatura y el problema de la determinación de tangentes a las curvas. Fue precisamente esta relación la que permitió la elaboración de algoritmos de cálculo más eficaces y eficientes, los cuales a su vez ampliaron considerablemente el tipo y la complejidad de los problemas que podían ser resueltos.

De esta manera en la década del 60 del siglo XVIII, cuando Euler escribe su *Tratado de Cálculo Integral* en tres gruesos volúmenes, no sólo se consideraban dentro del radio de acción de esta rama del Análisis los problemas clásicos de medidas de magnitudes geométricas, sino también problemas muy diversos y específicos, ligados a ecuaciones diferenciales, entre ellos los llamados problemas variacionales, que tuvieron su origen en el tratamiento del problema de la braquistócrona que veremos en III.4. Para la solución de este tipo de ecuaciones se hacía indispensable el cálculo de primitivas de funciones elementales, es decir, la determinación de una función cuya derivada fuera cierta función elemental dada. Este problema era tan natural y a veces tan difícil, que se tornó en la preocupación principal de los más ilustrados pensadores dedicados al *Nuevo Cálculo*. El progreso que se alcanzó, principalmente por Euler en el siglo XVIII, hacía ver los logros de Arquímedes muy primitivos y sus métodos muy engorrosos. No obstante, la obra de Arquímedes, con sus resultados y procedimientos, está presente en la heurística de los grandes matemáticos del siglo de las luces. Como bien aseverara uno de los pensadores más incisivos de la época, el francés Voltaire, *"había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero"*. La labor de Euler, de sus contemporáneos y sucesores, sería darle a esta fuerza imaginativa el empaque y la elegancia que los nuevos tiempos exigían.

III.1. Algunos problemas que motivaron la aparición de las herramientas de integración

El cálculo de las áreas de los polígonos fue uno de los primeros problemas que se enfrentaron y resolvieron satisfactoriamente en los estudios geométricos de las civilizaciones antiguas. Sin embargo, la determinación de áreas limitadas por líneas no poligonales ofrecía, en general, grandes dificultades. Incluso el cálculo del área de un círculo evolucionó muy lentamente en la obra de los clásicos de la antigüedad. Para los helenos el cálculo de áreas se resolvía describiendo la forma de construir (con regla y compás solamente) un cuadrado que tuviera la misma área que la figura dada, de ahí la denominación de *cuadratura* para significar el cálculo de un área. Otro problema clásico era encontrar la longitud de una curva. En este caso se trataba de construir (solo con regla y compás) un segmento de recta con la longitud de la curva dada, por eso a este problema se le llamaba *rectificación* de curvas.

Ya en los *Elementos* de Euclides (s. III a.n.e.) aparece la proporcionalidad del área de un círculo con el cuadrado de su radio y de la longitud de la circunferencia con el radio. Concretamente, si A_r denota el área de un círculo de radio r y L_r la longitud de su circunferencia, entonces

$$A_r = kr^2 \text{ y } L_r = k'r,$$

donde k y k' son constantes.

Algo más tarde Arquímedes determinó la relación entre estas dos constantes: $k'=2k$ y con ello las redujo a una sola: **al área del círculo unidad**, es decir, lo que hoy denotamos como **el número π**. Para ello Arquímedes aproximó el área de un círculo y la longitud de su circunferencia por las áreas y perímetros, respectivamente, de polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

Dado un círculo C de radio r, denotemos por Q_n^1, Q_n^2 los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos a C, respectivamente, y por $A(Q_n^i)$ y $P(Q_n^i)$, $i=1,2$ sus correspondientes áreas y perímetros. Entonces, mediante la división en n triángulos congruentes (ver Fig.2), se ve fácilmente que:

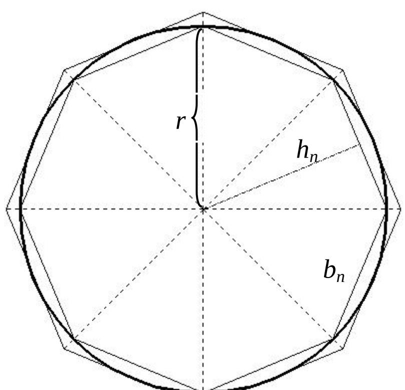

Fig.2

$$A(Q_n^1) = n \times \frac{b_n\, h_n}{2} = \frac{P(Q_n^1)\, h_n}{2},$$

donde h_n es la apotema de Q_n^1 y b_n es la longitud del lado del polígono inscrito. Análogamente se obtiene

$$A(Q_n^2) = \frac{r}{2} P(Q_n^2) .$$

Por otra parte:

$$A(Q_n^1) \le A_r \le A(Q_n^2) \quad \text{y} \quad P(Q_n^1) \le L_r \le P(Q_n^2), \tag{1}$$

donde A_r y L_r denotan respectivamente el área de C y la longitud de su circunferencia.

No es difícil observar que cuando n se hace cada vez mayor los polígonos "tienden" a confundirse con la circunferencia y que, por tanto, sus áreas estarán tan cerca como se desee del área del círculo; análogamente, el perímetro de los polígonos estaría también próximo a la longitud de la circunferencia. Siempre haciendo uso de la figura, se observa que h_n se "acercará indefinidamente" al radio del círculo, luego debe cumplirse:

$$A_r = L_r \times \frac{r}{2}. \tag{2}$$

Sin embargo, las consideraciones anteriores no satisfacían los cánones de rigor de la matemática helena y, por tanto, para demostrar completamente (2) realizaban un complicado razonamiento mediante una doble reducción al absurdo, el cual no expondremos.

¿Significa (2) que hemos logrado cuadrar el círculo? La respuesta sería afirmativa si fuéramos capaces de construir un segmento de longitud L_r. Ciertamente, no hemos cuadrado el círculo pero hemos encontrado una relación entre dos problemas geométricos teórica y prácticamente importantes: la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia.

Si, por convenio, consideramos $A_1=\pi$, entonces

$$A_r = \pi r^2 \quad \text{y} \quad L_r = 2\pi r .$$

Este método de aproximar el círculo por polígonos regulares inscritos y circunscritos divulgado por Arquímedes fue perfeccionado por muchos otros seguidores, lográndose estimaciones muy buenas para el número π (ejerc.1).

Arquímedes también logró cuadrar un segmento parabólico, esto es, la región determinada por un arco de la parábola y la cuerda correspondiente. Para realizar este cálculo Arquímedes utilizó una propiedad específica de las parábolas (ver ejerc.. De este modo, el cálculo del área por medio de polígonos, tanto para el círculo como para el segmento de parábola, estaba sustentado en propiedades particulares de estas figuras geométricas y no admitía generalización a otras figuras. Se conocen muy pocos resultados nuevos sobre cuadraturas y rectificaciones tanto del periodo romano como del medioevo. Aparentemente el placer puramente especulativo no compensaba la dificultad técnica de los problemas para el geómetra de esas épocas. Existe un largo intervalo que media entre los trabajos de Arquímedes (s.III a.n.e) y la aparición, en el siglo XVII, de ideas ingeniosas y originales relacionadas con la determinación de áreas de figuras y longitudes de curvas.

En la segunda década del siglo XVII, vinculado con el desarrollo científico técnico de la época, los geómetras comenzaron a interesarse en el cálculo de áreas y volúmenes. Entre los principales exponentes de las nuevas ideas se encuentran **Johann Kepler** y **Bonaventura Cavalieri**. Kepler, basado en los resultados de numerosas observaciones astronómicas, enuncia las conocidas leyes que rigen el movimiento de los planetas. En la primera afirma que las órbitas de los planetas son elipses y el Sol está situado en uno de sus focos. Su segunda ley afirma que:

El radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

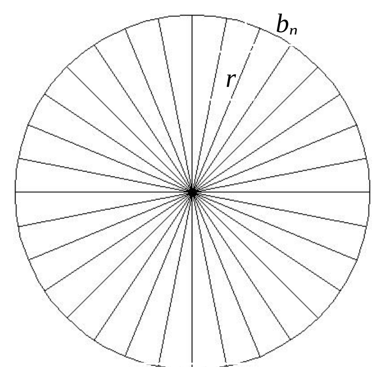

Fig.3

Para el cálculo de las áreas Kepler supuso que las figuras en cuestión estaban formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos en puntos infinitamente próximos situados sobre la órbita del planeta. Por ejemplo el área de un círculo de radio *r* puede calcularse de esta manera teniendo en cuenta que las alturas de los triángulos infinitamente estrechos son casi iguales al radio del círculo. Si llamamos a las bases infinitamente pequeñas situadas sobre la circunferencia del círculo $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ entonces el área del círculo, es decir la suma de las áreas de los triángulos será igual a

$$\frac{b_1 r}{2} + \frac{b_2 r}{2} + \ldots + \frac{b_n r}{2} + \ldots, \text{ (Fig.3)}$$

lo que proporciona una justificación, al estilo de Kepler, de la fórmula (2). También Kepler se preocupó por buscar un método más preciso que el utilizado comúnmente para el cálculo de los volúmenes de los toneles de vino. Para estos cálculos consideró los cuerpos sólidos formados por una infinidad de cuerpos de volúmenes infinitamente pequeños. Sin embargo, Kepler renuncia a la doble reducción al absurdo indispensable para los helenos y en esto fue seguido por la mayoría de sus contemporáneos. Kepler afirmaba: "Nosotros podríamos obtener demostraciones incuestionables y perfectas como las de los libros de Arquímedes, si no repeliéramos lo escabroso de su lectura."

Por su parte, Cavalieri logró calcular las áreas bajo las parábolas del tipo $y = x^n$, para $n = 1, 2, \ldots, 9$, para lo cual, concibió las figuras planas formadas por infinitos segmentos de rectas trazados paralelamente a cierta recta directriz (Fig.4). Las ideas de Kepler, Cavalieri y otros geómetras fueron perfeccionadas por sus seguidores, quienes elaboraron un algoritmo próximo a la posterior definición de *integral*. La esencia de estas ideas la podremos apreciar mediante la resolución del problema de la cuadratura de la parábola, que expondremos utilizando una terminología y notación desarrolladas posteriormente.

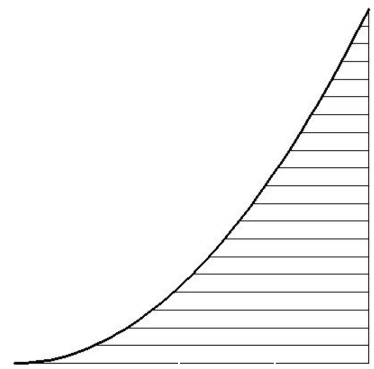

Fig.4

La cuadratura de la parábola.

Nos proponemos calcular el área comprendida entre el eje X, la parábola $y=x^2$ con x entre 0 y a, es decir, la región OaB de la Fig.5.

En lugar de realizar la aproximación de la figura mediante triángulos, utilizaremos rectángulos, o mejor, figuras formadas por la unión de rectángulos, todos ellos apoyados en el eje de abscisas y de modo que se "vayan adaptando" cada vez mejor a la figura OaB cuya área se desea calcular (sombreada en Fig.5). Por ejemplo, subdividamos el intervalo $[0,a]$ en n partes iguales de longitud a/n y consideremos rectángulos con base en cada una de estas subdivisiones y altura igual al valor de la función en uno de los extremos, por ejemplo en el extremo derecho. Queda así formado un polígono Q_n, unión de los n rectángulos, que contiene a la figura OaB y cuya área viene dada por

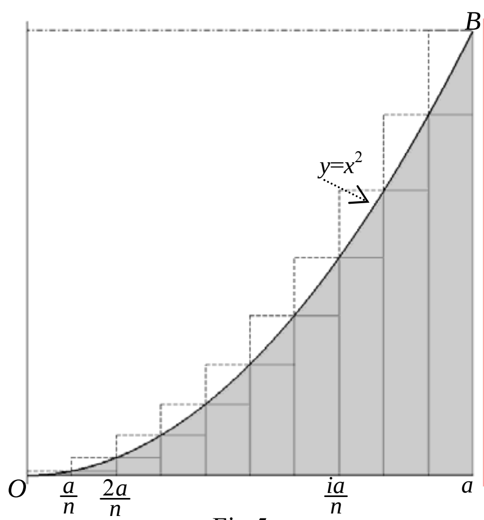

Fig.5

$$\text{Área}\left(Q_n\right)=\left[\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\frac{a}{n}\left(2\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+\frac{a}{n}\left(n\frac{a}{n}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{a^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right).$$

El problema fundamental radica en analizar cómo se comportan las sumas anteriores, cuando el valor de n se hace infinitamente grande, es decir cuando $n\to\infty$.

Usando la fórmula deducida en I.2 para esta suma, obtenemos

$$\text{Área}\left(Q_n\right)=\frac{a^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=\frac{a^3}{3}+\left(\frac{a^3}{2n}+\frac{a^3}{6n^2}\right).$$

Cuando $n\to\infty$, el sumando del miembro más a la derecha que está entre paréntesis resulta muy pequeño, así que es natural aceptar que

$$\text{Área}\left(OaB\right)=\frac{a^3}{3}. \tag{3}$$

Las áreas $\text{Área}(Q_n)$ son aproximaciones *por exceso* de $\text{Área}(OaB)$, es decir

$$\text{Área}\left(OaB\right)\leq\frac{a^3}{3}+\left(\frac{a^3}{2n}+\frac{a^3}{6n^2}\right).$$

Pueden encontrarse también aproximaciones *por defecto* de $\text{Área}(OaB)$, simplemente tomando los rectángulos con altura igual al valor de la función en el extremo izquierdo del subintervalo. En este caso se prueba que

$$\text{Área}\left(OaB\right)\geq \frac{a^3}{3}-\left(\frac{a^3}{2n}-\frac{a^3}{6n^2}\right),$$

luego

$$\frac{a^3}{3}-\left(\frac{a^3}{2n}-\frac{a^3}{6n^2}\right)\leq \text{Área}\left(OaB\right)\leq \frac{a^3}{3}+\left(\frac{a^3}{2n}+\frac{a^3}{6n^2}\right).$$

Nótese que en esta doble desigualdad las cantidades que se le suman a $a^3/3$ pueden hacerse ambas "tan pequeñas como se quiera", siempre que se tome n suficientemente grande y, aunque este razonamiento no sea matemáticamente riguroso, nadie dudaría de que Área(OaB) debe ser igual a $a^3/3$.

El método de cuadratura de Fermat. Para el razonamiento realizado anteriormente fue necesario poseer una fórmula para la suma $1^2+2^2+\ldots+n^2$. Por este motivo, su generalización al cálculo de las áreas bajo las curvas $y=x^k$, cuando k es un entero grande o un número negativo o fraccionario precisa de conocer expresiones semejantes para este tipo de sumas cuando el exponente 2 se sustituye por k. Esta dificultad motivó a Pierre Fermat para modificar la forma de realizar la división del intervalo $[0,a]$. Fermat consideró los puntos de subdivisión de modo que las longitudes de los subintervalos constituyeran una progresión geométrica. Ejemplifiquemos esta idea con el cálculo del área comprendida entre la curva $y=x^k$, ***k* entero positivo**, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$ (Fig.6).

Dividamos el intervalo $[a,b]$ por medio de los puntos

$$x_1=ar,\ x_2=ar^2,\ \ldots,\ x_{n-1}=ar^{n-1},$$

donde r se escoge de forma que $ar^n=b$ o $r=\sqrt[n]{b/a}>1$. Observemos que la longitud del subintervalo $i^{ésimo}$ es

$$x_i-x_{i-1}=ar^{i-1}\left(r-1\right),$$

por tanto en la medida que n aumenta, r se acerca a 1 y la longitud de todos los subintervalos se hará cada vez más pequeña.

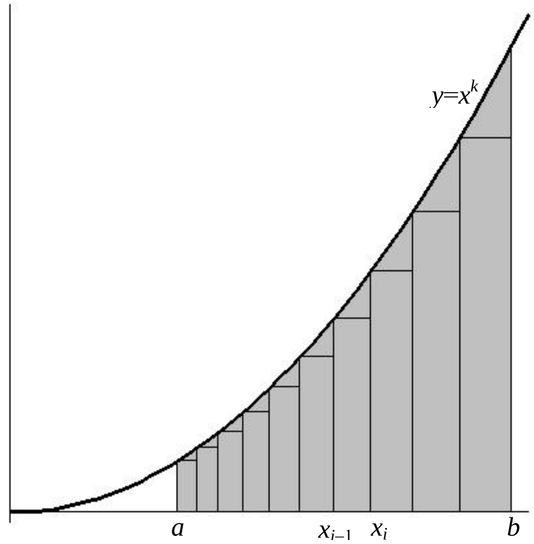

Fig.6

El área A_n de la figura formada por la totalidad de los rectángulos con base en los subintervalos $[x_{i-1},x_i]$ y altura igual a $(x_{i-1})^k$ es:

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}ar^{i-1}\left(r-1\right)\left(ar^{i-1}\right)^k=a^{k+1}\left(r-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(r^{k+1}\right)^{i-1}.$$

En el miembro derecho tenemos la suma de una progresión geométrica de razón r^{k+1} y primer término 1, luego

$$A_n=a^{k+1}\left(r-1\right)\frac{\left(r^{k+1}\right)^n-1}{r^{k+1}-1}=a^{k+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}-1\right]\frac{r-1}{r^{k+1}-1}=\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\frac{r-1}{r^{k+1}-1}.$$

Cuando aumentamos el número n de subdivisiones y, por tanto, r se acerca a 1, la figura formada por la unión de los rectángulos se acercará cada vez más al área buscada. Luego solo nos resta analizar el comportamiento de la expresión

$$\frac{r-1}{r^{k+1}-1}, \quad \text{cuando } r \to 1.$$

Pero esta fracción puede ser escrita en la forma

$$\frac{r-1}{r^{k+1}-1} = \frac{1}{r^k + r^{k-1} + \ldots + r + 1},$$

luego, es intuitivamente claro que cuando r se aproxima a 1, ella se aproximará a $\frac{1}{k+1}$. Por tanto, el valor del área buscada debe ser

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Sin grandes dificultades se puede comprobar que, efectivamente, este método es útil para potencias de la variable x, tanto positivas como negativas, enteras como fraccionarias, pues en todos los casos conduce a la suma de una progresión geométrica (ejerc.. La única excepción es el caso del exponente -1 que, aunque aparenta ser el más simple, se convirtió en un verdadero rompecabezas para los científicos de la época y sirvió de punto de partida para la comprensión del logaritmo como función.

Los logaritmos y el área hiperbólica. Los esfuerzos realizados durante mucho tiempo para encontrar áreas de figuras limitadas por la curva $xy=1$ no condujeron a una fórmula matemática, pero pusieron de manifiesto una propiedad básica de estas áreas: **su relación con los logaritmos**.

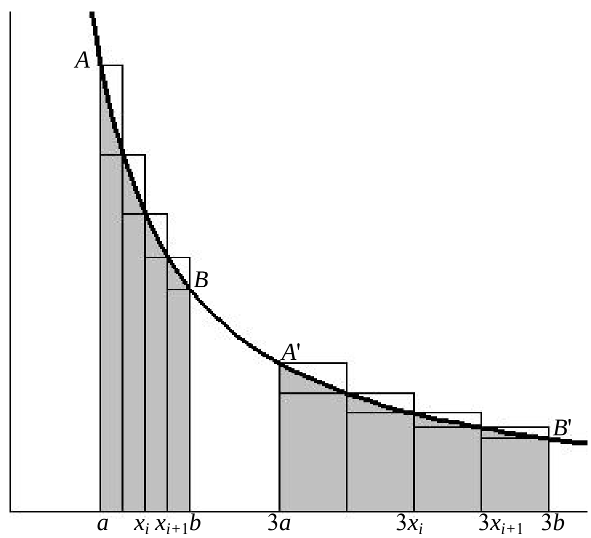

Fig.7

Consideremos la hipérbola equilátera $y=1/x$ (Fig.7) y comparemos las áreas de los trapecios curvilíneos $AabB$ y $A'3a3bB'$ determinados por arcos de la hipérbola y con bases situadas respectivamente en los intervalos $[a,b]$ y $[3a,3b]$. Una subdivisión del intervalo $[a,b]$ determina rectángulos cuya suma de áreas es una aproximación (por defecto o por exceso, según se tomen los rectángulos inscritos o circunscritos) del área $A(a,b)$ del trapecio curvilíneo $AabB$. A toda subdivisión de $[a,b]$ puede asociarse una subdivisión del intervalo $[3a,3b]$ que determina rectángulos aproximantes para el área $A(3a,3b)$ del trapecio curvilíneo $A'3a3bB'$. Es fácil comprobar que todo rectángulo con base en las subdivisiones del intervalo $[a,b]$ tiene la misma área que el rectángulo correspondiente en el intervalo $[3a,3b]$. Por tanto las figuras poligonales aproximantes (por defecto y por exceso) para los dos trapecios curvilíneos tienen áreas iguales. Haciendo cada vez más pequeños las divisiones del intervalo $[a,b]$, observamos que las áreas de las figuras $AabB$ y $A'3a3bB'$ son iguales, es decir $A(3a,3b)=A(a,b)$. Es completamente obvio que este razonamiento puede realizarse con cualquier factor de proporcionalidad t y así obtener que

$$A(ta,tb)=A(a,b)\,, \tag{4}$$

para todo valor real positivo de t.

Esta propiedad relaciona directamente las áreas hiperbólicas con los logaritmos. En efecto, para $x\geq 1$ denotemos por $L(x)=A(1,x)$ el área del trapecio curvilíneo correspondiente al intervalo $[1,x]$, y si $0<x<1$ al opuesto del área del trapecio curvilíneo con base en el intervalo $[x,1]$. Entonces $L(x)$ satisface las propiedades del logaritmo. Por ejemplo, en el caso que $x>1$, $y>1$, se tiene:

$$L(xy)=A\left(1,xy\right)=A\left(1,x\right)+A\left(x,xy\right),$$

pero de (4) obtenemos

$$A\left(x,xy\right)=A\left(1,y\right),$$

luego

$$L(xy)=A\left(1,x\right)+A\left(1,y\right)=L(x)+L(y)\,. \tag{5}$$

El descubrimiento en el siglo XVII del carácter logarítmico del área hiperbólica puso de manifiesto una nueva faceta de los logaritmos, los cuales hasta ese momento se concebían solo como meros instrumentos para los cálculos numéricos en astronomía. El nexo establecido entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola motivó que se pensara en el logaritmo como un instrumento para cuadrar curvas, pero también se utilizó la cuadratura como una vía para facilitar la confección de las tablas de logaritmos. Precisamente fue la evolución de estas ideas lo que motivó la aparición de *la función logarítmica*, estudiada en el Cáp. I.

Pero la propiedad (5) la satisface la función logarítmica con cualquier base, luego debemos determinar más precisamente cuál de ellas es $L(x)$ y para ello calcularemos su derivada. La propiedad (5) permite transformar el cociente incremental en la forma

$$\frac{L(x+\Delta x)-L(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}L\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}L\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\ (x>0),$$

la cual, con la notación $k=\dfrac{\Delta x}{x}$ se convierte en

$$\frac{L(x+\Delta x)-L(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{L\left(1+k\right)}{k}.$$

Cuando Δx sea muy pequeño, también lo será k, por lo que debemos analizar el comportamiento del cociente

$$\frac{L\left(1+k\right)}{k},\text{ cuando } k\to 0.$$

Si en la Fig.8 comparamos el área sombreada, esto es $A(1,1+k)=L(1+k)$, con las áreas de los rectángulos R_1 y R_2, entonces podemos observar que

$$\frac{k}{1+k}\leq L\left(1+k\right)\leq k\,,$$

por tanto

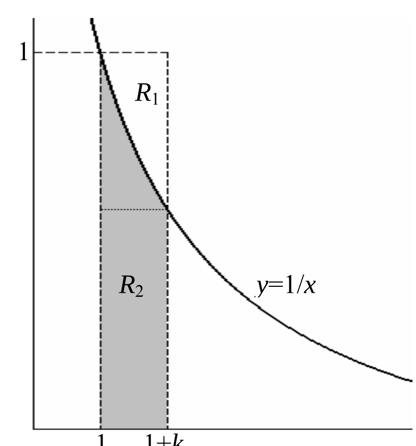

Fig.8

$$\frac{1}{1+k} \leq \frac{L(1+k)}{k} \leq 1,$$

lo que significa que $\dfrac{L(1+k)}{k}$ se acerca a 1, cuando $k \to 0$.

De este modo hemos encontrado que

$$L'(x) = \frac{1}{x},$$

y en II.2 vimos que una primitiva de $1/x$ es la función $\ln x$. Así que la función $L(x)$ debe ser de la forma

$$L(x) = \ln x + C,$$

donde C es cierta constante. Pero, de la definición es inmediato que $L(1)=0$, por tanto, podemos afirmar que

$$L(x) = \ln x.$$

Esta relación entre los logaritmos con base e y el área bajo la hipérbola es lo que motiva que se les denomine **logaritmos hiperbólicos**.

Ejercicios

1. a) ¿Cómo podrías utilizar las relaciones en (1) para calcular aproximaciones por exceso y por defecto del número π?

b) Encuentra una relación entre las áreas (o perímetros) de los polígonos inscritos y circunscritos con n lados y con $2n$ lados. Arquímedes utilizó esta relación para facilitar el cálculo aproximado de π ¿Podrías explicar cómo esto puede llevarse a cabo?

2. Aplica la idea de Fermat para calcular el área limitada por la curva $y=x^{2/3}$ y el eje X con x entre 0 y a.

3. Calcula el área entre el eje de abscisas y la curva dada por $y=x^k$ con $a \leq x \leq b$, siendo k un entero distinto de -1.

4. Calcula el área de la figura limitada superiormente por la curva $y=e^x$ e inferiormente por el segmento del eje de abscisas entre 0 y $a>0$.

5. Calcula el área de la figura limitada superiormente por la curva $y=\operatorname{sen} x$ e inferiormente por el segmento del eje de abscisas entre 0 y π.

6. Prueba que la función de área hiperbólica $L(x)$ satisface $L(xy)=L(x)+L(y)$ para todos los valores de x y y positivos.

7. Arquímedes calculó el área A de un segmento parabólico mediante aproximaciones por triángulos. Los siguientes pasos te ayudarán a realizarlo, aunque usaras algunas herramientas más actuales:

a) Considera el segmento de la parábola $y=x^2$ con $0 \leq x \leq 2$. El área del triángulo OBA, con $B=(1,1)$ es una primera aproximación del área del segmento parabólico. Una forma de mejorar la aproximación es añadir, como en la Fig.9 el área de los triángulos OC_1B y BC_2A. Hemos tomado a C_1 como el punto de la parábola con abscisa 1/2, es decir la media aritmética entre las abscisas de los puntos O y B y como C_2 el de abscisa 3/4, que es la media entre las abscisas de B y A. Este proceso puede continuarse para lograr la aproximación que se desee al área de la parábola. Usando la aproximación anterior muestra el resultado de Arquímedes:

$$A \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

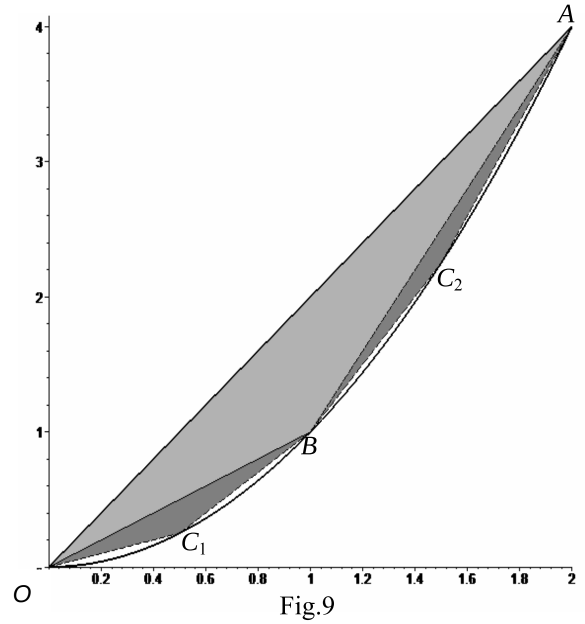

Fig.9

Sugerencia: El área de un triángulo con vértices en los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2), y (a_3, b_3) viene dada por

$$\frac{1}{2}\left[(a_2 - a_1)(b_3 - b_1) - (b_2 - b_1)(a_3 - a_1)\right].$$

b) ¿Cómo podrías obtener el resultado anterior haciendo uso de (3)?

c) Utilizando el resultado o el método de a) ¿podrías calcular el área de cualquier segmento parabólico?

8. Se quiere calcular el volumen de un cono circular recto con base de radio r y altura h. En la Fig.10 hemos considerado al cono aproximado mediante un cuerpo constituido por la yuxtaposición de cilindros circulares rectos de altura h/n.

a) Prueba que el volumen del cuerpo aproximante es

$$\frac{\pi h r^2}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right).$$

b) Argumenta la fórmula para el volumen del cono:

$$V = \frac{\pi h r^2}{3}.$$

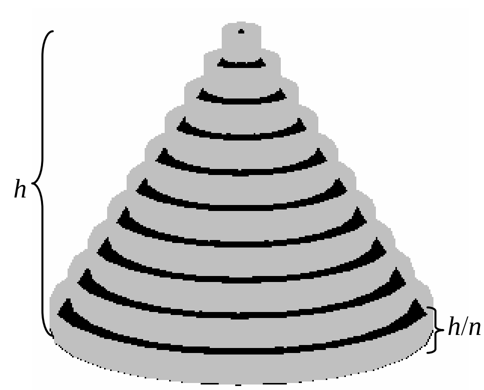

Fig.10

III.2. Fórmula fundamental del cálculo

El problema de la determinación de áreas, volúmenes y algunas magnitudes físicas constituyó una tarea sumamente difícil mientras solo se poseían los métodos descritos anteriormente. Este tipo de métodos obligaban a la repetición de construcciones semejantes en cada problema particular lo que, además de bastante trabajo, requería de la posesión de ciertas dotes imaginativas. La situación va a cambiar radicalmente cuando, tanto Leibniz como Newton, encuentren la relación existente entre este tipo de problemas y el problema de la diferenciación de funciones. Veamos en qué consiste esa relación y cómo la justificaron los fundadores del Cálculo.

Para Leibniz la clave fundamental del nuevo método era la concepción de una curva como un polígono de infinitos lados, la longitud de los cuales era infinitamente pequeña. Supongamos que el polígono *ABCD* aproxima la curva y tiene sus vértices sobre ella (Fig.11). Entonces dicho polígono da lugar a dos sucesiones de variables: las abscisas x_1, x_2, x_3,… y las ordenadas y_1, y_2, y_3,… de los vértices. Si escogemos el polígono de modo que las abscisas de sus vértices difieran en una unidad (que puede ser muy pequeña), entonces la suma de las ordenadas da una aproximación del área bajo la curva, es decir de su cuadratura. Por otra parte, la diferencia de las ordenadas sucesivas es la pendiente de la secante correspondiente y, por tanto, constituye una aproximación de la pendiente de la tangente en los puntos de la curva. Estas aproximaciones mejoran cuando las diferencias entre abscisas consecutivas se toman cada vez más pequeñas, luego resuelven respectivamente los problemas de cuadraturas y tangentes, suponiendo que el polígono tiene "infinitos lados infinitamente pequeños". De esta forma Leibniz interpretó el procedimiento para las cuadraturas como una sumación y la determinación de la tangente lo asoció al cálculo de diferencias.

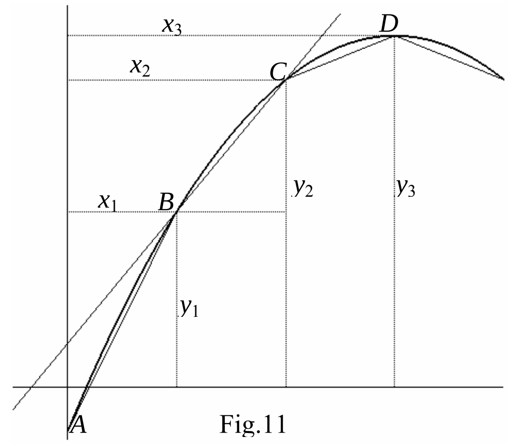

Fig.11

Por otra parte, Leibniz observó que si para una sucesión de valores y_1, y_2, y_3,… se hallan las sumas y_1, y_1+y_2, $y_1+y_2+y_3$,…, entonces la primera sucesión puede recuperarse simplemente mediante la diferencia de dos términos consecutivos de la segunda. Recíprocamente, si a partir de la sucesión original se calculan las diferencias sucesivas y_1, y_2-y_1, y_3-y_2… y seguidamente estas diferencias se suman, también se regresa a la sucesión original. Esta observación y la interpretación establecida en el párrafo anterior le permitió advertir que *los problemas de la cuadratura de una curva y del hallazgo de su tangente son uno el inverso del otro*.

Las ideas concebidas por Newton las describiremos utilizando un lenguaje más contemporáneo. Newton imagina una curva $y=f(x)$ (supondremos $f(x)\geq 0$) descrita por el movimiento del punto M desde un punto inicial $A=(a,f(a))$ hasta $B=(b,f(b))$, entonces el segmento de recta Mx barrerá el área de la figura $abBA$, esto es, el área comprendida entre el eje X y el gráfico de la función cuando la variable x se mueve entre los valores $x=a$ y $x=b$ (Fig.12). El área de la porción con base en el intervalo $[a,x]$, es decir $axMA$, depende de la variable x, luego es natural denotarla por $z=F(x)$. Si la variable x se incrementa en Δx, entonces el área se incrementará en $F(x+\Delta x)-F(x)$, pero esta área (sombreada en gris oscuro) puede ser aproximada, cuando Δx es muy pequeño, por la área del rectángulo con base Δx y altura $y=f(x)$:

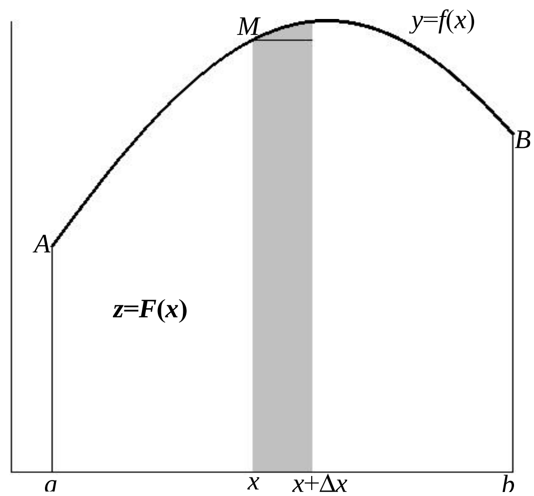

Fig.12

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\Delta x\,,$$

luego,

$$F'(x)=f(x)\,.$$

De este modo concluimos que el cálculo del área determinada por $y=f(x)$ puede realizarse mediante el hallazgo de una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, resultado que se conoce como **Teorema Fundamental del Cálculo**:

Si $F(x)$ representa el área de la figura *axMA*, entonces $F'(x) = f(x)$.

La notación actual la debemos a Leibniz, quien aprovechó la analogía establecida con las operaciones aritméticas de suma y diferencia. Por ello designó con una letra S alargada al valor del área, esto es a "la suma de las áreas infinitesimales $f(x)dx$". Este símbolo evolucionó rápidamente transformándose en la notación actual para la **integral**

$$\int_a^b f(x)dx,$$

donde la función $f(x)$ se denomina **integrando** y los valores a y b se llaman **límites de integración**.

De modo que:

Si concebimos la figura *abBA* (Fig.12) formada por una cantidad "infinitamente grande" de bandas rectangulares con base *dx* y cuya área es igual a $f(x)dx$, entonces el área total será la "suma" de todas estás áreas infinitesimales, es decir

$$\text{Área}(abBA) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Ahora se presenta el problema

$$\text{¿cómo calcular } \int_a^b f(x)dx\,?$$

El teorema fundamental del cálculo nos indica que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b),$$

donde la función $F(x)$,que es el área de la figura *axMA*, satisface $F'(x) = f(x)$, es decir es una primitiva de $f(x)$. En II.5 vimos que *dos primitivas cualesquiera de una misma función solo pueden diferir en una constante*, lo que nos proporciona una vía excelente para el cálculo de la integral definida.

Supongamos que $G(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, entonces $F(x)=G(x)+C$, para alguna constante C. Como evidentemente $F(a)=0$, se tiene que $C=-G(a)$. De modo que $F(b)=G(b)-G(a)$. De esta forma hemos obtenido el importantísimo resultado siguiente:

Si $G(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b. \tag{2}$$

Como $G'(x) = f(x)$, la fórmula anterior puede escribirse también en la forma

$$\int_a^b dG(x) = G(b) - G(a).$$

Todos los razonamientos anteriores los hemos realizado basándonos en la idea de área de una figura geométrica limitada superiormente por el gráfico de $y=f(x)$, para lo cual pedimos que

$f(x)\geq 0$, para $a\leq x\leq b$. Sin embargo, la fórmula (2) tiene sentido para cualquier función $f(x)$, siempre que ella tenga alguna primitiva $G(x)$ y la asumiremos como nuestra **definición de integral**.

La fórmula (2) también brinda un sentido al símbolo

$$\int_a^b f(x)dx,$$

cuando $a\geq b$. En ese caso

$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a) = -\big(G(a)-G(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx$$

Es claro que, en estos casos más generales la integral pierde su interpretación geométrica como área.

En ocasiones, resulta útil operar con integrales de funciones que toman valores complejos. De forma análoga a como procedimos con las derivadas, podemos concebir la integral de una función $f(x)=u(x)+iv(x)$ en la forma

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx\,.}$$

Con esta definición, es evidente que la fórmula (2) es válida también para las funciones con valores complejos. Por supuesto, en este caso la primitiva $G(x)$ será una función que, en general, toma valores complejos.

En este momento el lector no debe tener la menor duda acerca de la importancia práctica de poseer un mínimo de recursos para encontrar primitivas de funciones. Este proceso de cálculo de primitivas ha recibido la denominación de **integración indefinida** en contraposición al de **integración definida** (fórmula (2)) que antes simplemente denominamos integral. Para denotar al conjunto de las primitivas de $f(x)$ se utiliza el símbolo de **integral indefinida**:

$$\int f(x)dx.$$

Así que, si $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, entonces

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Observación. Una consecuencia inmediata de la definición y notación anterior es que

$$\int dF(x) = F(x)+C \quad \text{y} \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x),$$

las cuales indican que las operaciones de diferenciación e integración indefinida son en esencia una la inversa de la otra, solo es preciso señalar el pequeño detalle de la necesidad de añadir una constante arbitraria para incluir en la integral indefinida a todas las primitivas de $dF(x)$.

La tabla de derivadas que aparece en II.3 puede ser utilizada para confeccionar una tabla mínima de primitivas de algunas funciones elementales:

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ \ (a \neq -1)$	5) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	6) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$
3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ \ (a > 0)$	7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$
4) $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	8) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Comprobemos algunas de las igualdades de la tabla:

La igualdad $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a$, justifica 1).

Para justificar 2) debemos considerar dos casos:

Cuando $x>0$, entonces $\ln|x| = \ln x$ y

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Cuando $x<0$, entonces $\ln|x| = \ln(-x)$ y

$$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x}\left(-x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Los ejemplos siguientes muestran cómo puede aplicarse la integral a la resolución de algunos problemas sencillos.

Ejemplo 1. El cálculo del área bajo la curva $y=x^k$, comprendida en el intervalo $0<a\leq x\leq b$ para un exponente k ($k\neq -1$) cualquiera, ahora es una sencilla consecuencia de (2) y el Teorema fundamental del cálculo. El área de la región mostrada en la Fig.5 es igual a

$$\int_a^b x^k dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Observación: En este ejemplo hemos supuesto que $a>0$, pero es natural preguntarse si la integral anterior ¿dará también el área en caso que $a<0$? Consideremos, por ejemplo, $k=3$, $a=-1$ y $b=1$, entonces

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Este resultado no concuerda con el área (no nula) que se muestra en el gráfico de la Fig.13.

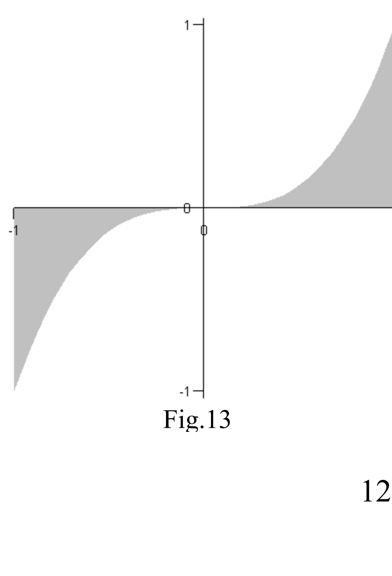

Fig.13

Analicemos con más detalle este ejemplo: la interpretación de $f(x)dx$ como el área de un rectángulo de base dx y altura $f(x)$ **solo tiene sentido** cuando estos números son positivos. De modo que la integral se interpretará como un área solo en el caso que la función integrando no tome valores negativos.

El área mostrada en la Fig.13 podemos calcularla auxiliándonos de la simetría respecto al origen de la curva $y=x^3$:

$$A = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. Calculemos el área A encerrada entre las curvas

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{1+x^2} \text{ (Fig.14).}$$

La figura que nos interesa (región sombreada en gris en la Fig.14) está limitada inferiormente por una curva y no por el eje de abscisas como en la Fig.12, por ello no podemos calcularla utilizando (1). Sin embargo no es difícil advertir que si a A añadimos el área B de la región sombreada en negro, entonces si podemos aplicar (1) y obtenemos

$$A + B = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

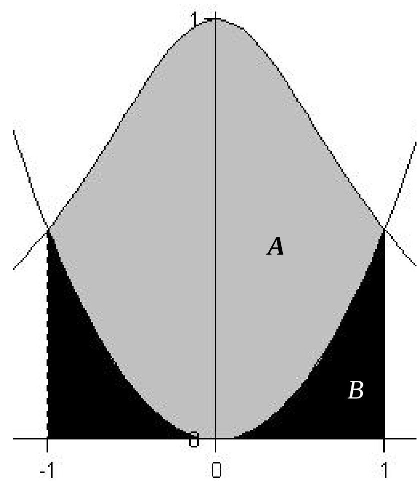

Fig.14

Por otra parte, el área B también puede calcularse mediante (1):

$$B = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx,$$

Así que para A obtenemos

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - B = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx.$$

Para la primera integral, en la tabla encontramos como primitiva a $\arctan x$ y aplicando (2) se tiene que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Fácilmente se comprueba que una primitiva de $x^2/2$ es $x^3/6$, luego

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente se obtiene que:

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 3. Calculemos, utilizando la noción de integral, el área de un círculo de radio R.

Como el círculo es una figura simétrica, basta hallar solamente el área, por ejemplo, del semicírculo superior (Fig.15). La ecuación de la semicircunferencia superior es

$$y=\sqrt{R^2-x^2}, \quad \text{con} \quad |x|\leq R,$$

luego el área A del semicírculo vendrá dada por

$$A=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

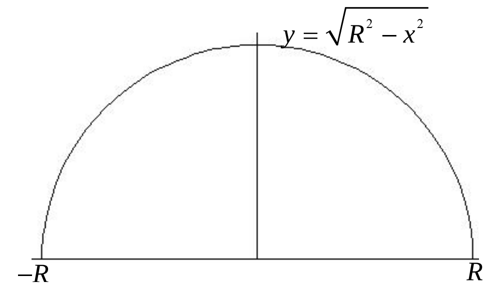

Fig.15

Aquí la dificultad principal radica en encontrar una primitiva de la función $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, más adelante veremos procedimientos que nos permitirán calcular esta primitiva. Sin embargo, también podemos enfocar el problema de una manera diferente. ¿Por qué limitarnos al uso de rectángulos para aproximar una figura? ¿No resultaría más natural, en el caso de un círculo, la utilización de triángulos con vértice en su centro?

Dividamos el círculo mediante rayos que parten del origen de coordenadas y tales que los ángulos entre ellos sean todos iguales a $d\varphi$. Si $d\varphi$ es muy pequeño, los sectores así formados serán muy finos, por lo que su área puede ser aproximada por el área del triángulo de altura R y base igual a la longitud del arco correspondiente al sector, esto es, por $R^2 d\varphi/2$ (Fig.16a). Entonces el área A del círculo será la "suma" de las áreas de todos estos sectores, es decir la integral

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\varphi=\frac{R^2}{2}x\Big|_0^{2\pi}=R^2\pi.$$

Sugerimos al lector que compare el razonamiento anterior con el método utilizado por Kepler.

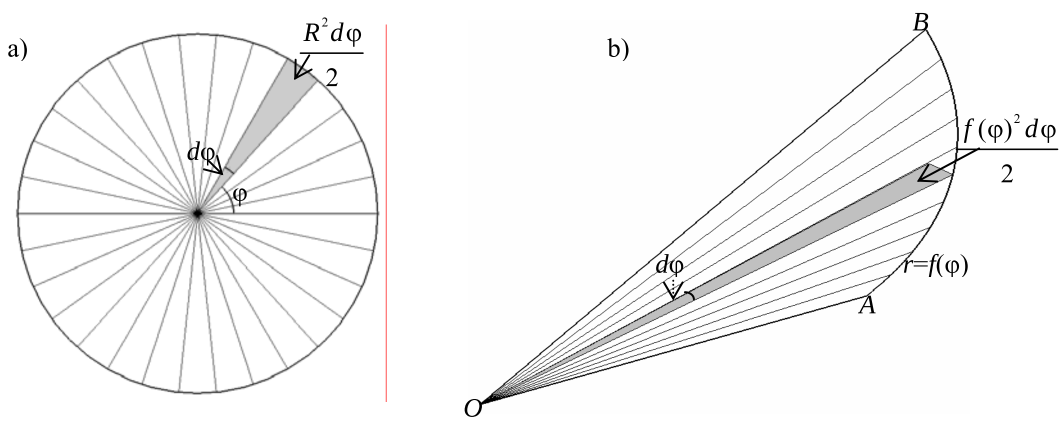

Fig.16

Observemos que un razonamiento análogo puede ser hecho con **figuras limitadas por curvas dadas en coordenadas polares**: Calculemos el área S del sector curvilíneo limitado por la curva en polares $r=f(\varphi)$ con $\alpha\leq\varphi\leq\beta$ y los rayos $\varphi=\alpha$ y $\varphi=\beta$ (Fig.16b). Para calcular S supondremos al sector dividido en finísimos sectores circulares de ángulo infinitesimal $d\varphi$ y radio igual a $f(\varphi)$ (también podría ser en forma de triángulos isósceles estrechos). Cada uno de estos sectores tendrá área igual a

$$\frac{f(\varphi)^2 d\varphi}{2}.$$

Si ahora "sumamos para todos los sectores", obtenemos el resultado siguiente

El área de un sector curvilíneo limitado por la curva $r=f(\varphi)$ y los rayos $\varphi=\alpha$ y $\varphi=\beta$ se calcula mediante la fórmula

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\varphi)^2 d\varphi}{2}.$$

Ejemplo 4. Calculemos el área de la primera espira ($0\le\varphi\le 2\pi$) de la espiral de Arquímedes $r=\sqrt{2}\,\varphi$ (Fig.17).

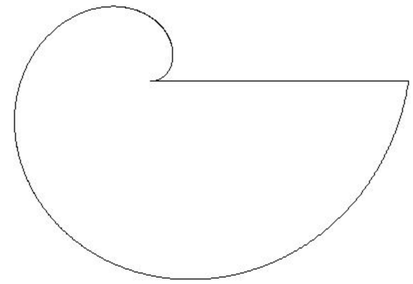

Fig.17

De acuerdo a la fórmula anterior el área pedida viene dada por

$$\int_0^{2\pi}\frac{2\varphi^2 d\varphi}{2}=\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^3}{3}.$$

Ejemplo 5. Veamos como podemos utilizar la integral definida para calcular el volumen de algunos cuerpos. Supongamos que deseamos obtener el volumen de una esfera de radio R. Para ello, consideraremos la esfera constituida por "finos discos" de ancho dx y radio igual a $\sqrt{R^2-x^2}$, donde x varía de $-R$ a R (en la Fig.18 se ha dibujado solo la porción correspondiente al primer octante, es decir, un octavo de esfera y por tanto un cuarto de disco). El volumen del disco correspondiente a la abscisa x es

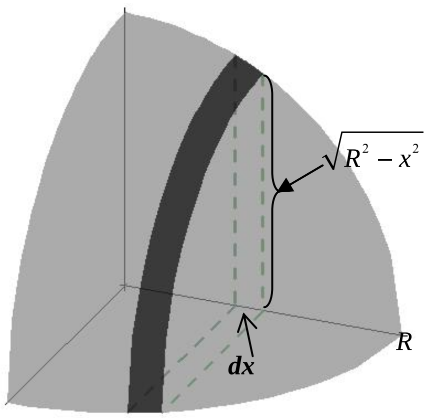

Fig.18

$$\pi\left(R^2-x^2\right)dx.$$

Si ahora "sumamos" para todos los valores posibles de x, encontramos que el volumen V de la esfera viene dado por

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-x^2\right)dx. \qquad (3)$$

Para poder aplicar la fórmula (3), necesitamos conocer una primitiva de la función $f(x)=\pi(R^2-x^2)$, la cual no se encuentra en la tabla mostrada antes. Sin embargo, esta integral puede calcularse muy fácilmente utilizando la denominada **linealidad de la integral** (indefinida y definida).

Propiedad de linealidad de la integral

Si c_1 y c_1 son constantes, entonces se cumplen las igualdades:

$$\int\left(c_1 f(x)+c_2 g(x)\right)dx=c_1\int f(x)dx+c_2\int g(x)dx. \qquad (4)$$

$$\int_a^b\left(c_1 f(x)+c_2 g(x)\right)dx=c_1\int_a^b f(x)dx+c_2\int_a^b g(x)dx. \qquad (5)$$

Para justificar estas relaciones podemos razonar de la forma siguiente:

De las reglas de derivación sabemos que si las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, entonces

$$F'(x)=f(x) \quad \text{y} \quad G'(x)=g(x),$$

por tanto

$$\left(c_1F(x)+c_2G(x)\right)' = c_1 f(x) + c_2 g(x) .$$

Esto significa que la función $c_1F(x)+c_2G(x)$ es una primitiva de $c_1f(x)+c_2g(x)$, lo cual demuestra (4).

Además, haciendo uso de la relación (2), también tiene lugar

$$\int_a^b \left(c_1 f(x)+c_2 g(x)\right)dx = c_1F(x)+c_2G(x)\Big|_a^b = c_1\left[F(b)-F(a)\right]+c_2\left[G(b)-G(a)\right]$$

y, aplicando otra vez (2), se obtiene (5).

Ahora podemos concluir el ejemplo 5. Apliquemos a la integral de (3) la linealidad de la integral definida:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} 1\cdot dx - \pi\int_{-R}^{R} x^2 dx ,$$

de donde, usando (2) y la tabla de primitivas finalmente se obtiene

$$V = \pi R^2\, x\Big|_{-R}^{R} - \pi \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Observemos que la deducción realizada en el caso de la esfera puede llevarse a cabo con cualquier cuerpo limitado por una superficie de revolución. Si $y=f(x)$ es la ecuación de la curva que gira alrededor del eje X para engendrar la superficie, entonces en el razonamiento anterior solo hay que sustituir el valor del radio de los discos finos por $f(x)$ (Fig.19), de modo que se tiene el resultado siguiente

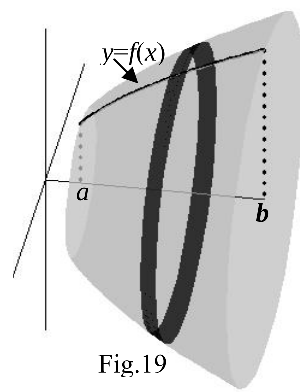

Fig.19

El volumen del cuerpo limitado por la superficie generada por la rotación de $y=f(x)$, $a\le x\le b$, en torno al eje X se expresa mediante la integral $V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$.

Como una aplicación interesante de la fórmula anterior podemos explicar la siguiente afirmación, aparentemente paradójica, realizada por Jacob Bernoulli:

Ejemplo 6. *Existen figuras cuya área es infinita, mientras que el volumen del cuerpo de revolución que generan es finito*.

En efecto, consideremos la región plana (infinita) F limitada por la hipérbola $y=1/x$, la recta $y=1$ y el eje OY (ver Fig.20a)). La región F se extiende ilimitadamente a lo largo del eje Y, pero podemos estimar su área mediante la parte que está situada por debajo de la recta $y=b$ con b bastante grande. Esta última área puede ser calculada mediante la integral

$$\int_1^b \frac{dy}{y} = \log y\Big|_1^b = \log b .$$

Obviamente, cuando b es grande el valor de la integral se hace infinitamente grande. De esta manera, es natural asignar a la región F un "área infinita".

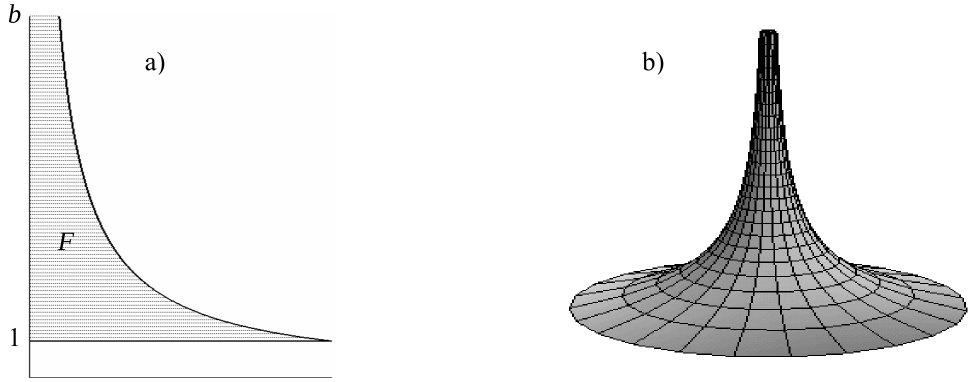

Fig.20

Sea ahora el cuerpo de revolución generado por la figura F al rotar alrededor del eje OY (Fig.20b)). El volumen de este cuerpo de revolución (que también se extiende ilimitadamente en la dirección del eje Y) puede ser aproximado por la integral

$$\int_1^b \pi \frac{dy}{y^2} = -\pi \frac{1}{y}\Big|_1^b = \pi\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

Es evidente que esta cantidad, cuando b se hace muy grande, se acerca tanto como se quiera a π, por lo que es completamente natural asignar a este cuerpo de revolución un volumen finito igual a π.

Veamos otros ejemplos donde se muestra la utilidad de la propiedad de linealidad.

Ejemplo 7. Una primitiva cualquiera de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n+1$:

$$\int\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0\right)dx = a_n\int x^n dx + a_{n-1}\int x^{n-1}dx + ... + a_0\int dx =$$

$$= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + ... + a_0 x + C.$$

Ejemplo 8. Calculemos la integral siguiente:

$$I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx.$$

En este caso una aplicación directa y efectiva de la propiedad de linealidad no es posible. Sin embargo, la manipulación algebraica de las fracciones racionales puede ser de gran ayuda. Primeramente dividamos numerador entre el denominador y escribamos el integrando en la forma

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x},$$

Usando (4), tenemos que

$$I = \int(x+1)dx - \int\frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \frac{x^2}{2} + x - \int\frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}dx.$$

Para calcular esta última integral podemos descomponer la fracción del integrando en fracciones simples. El polinomio del denominador solo tiene ceros reales:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1),$$

por tanto la fracción se descompone en la forma

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

Para calcular las constantes *A*, *B*, y *C*, observamos que ellas deben ser tales que, para todo valor de *x*, se satisfaga la igualdad

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Si hacemos $x=0$, $x=2$, y $x=-1$, se obtiene respectivamente $A=-1$, $B=2/3$, $C=1/3$. Así que la integral pedida es igual a

$$I=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}.$$

Una primitiva de la primera de las integrales anteriores, $\ln|x|$, aparece exactamente en la tabla. Se comprueba fácilmente que las otras dos tienen como primitivas a $\ln|x-2|$ y $\ln|x+1|$ respectivamente. Luego

$$I=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

Ejemplo 9. Queremos calcular la longitud de un arco de la curva dada por la ecuación $y=f(x)$, donde $a\leq x\leq b$. Una forma concreta y muy natural de llevarlo a cabo es:

> Tomar un hilo flexible, colocar un extremo en el punto $A=(a,f(a))$ y situarlo de manera que adquiera la forma de la curva, hasta llegar al punto $B=(b,f(b))$, a continuación se mide la porción de hilo desde *A* hasta *B* (Fig.21).

En el proceso de adaptación del hilo a la curva será necesario, cada cierto tramo, "fijarlo" en algunos puntos. En realidad el hilo solo adoptará la forma de una poligonal y su aproximación a la curva será tanto mejor cuanto más cercanos entre sí estén los puntos de fijación.

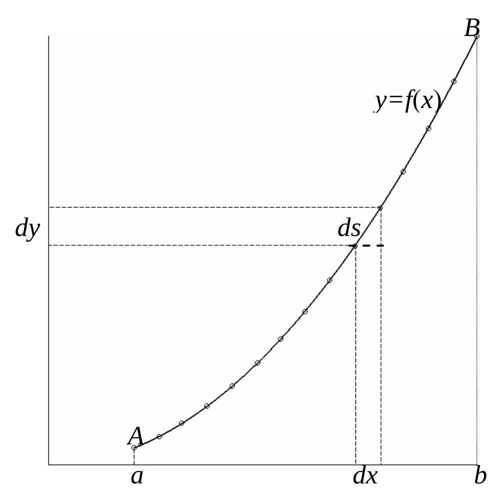

Fig.21

En el procedimiento anterior el hilo en realidad toma la forma de una poligonal con vértices (puntos de fijación) sobre la curva y lo que hacemos es calcular la longitud de esta poligonal. Observemos que esta forma de proceder es enteramente compatible con la concepción de una curva como "una poligonal con infinitos lados de longitud infinitamente pequeña" que introdujimos en II.2.

La longitud de la poligonal se puede calcular como la suma de las longitudes de sus lados. Usando el teorema de Pitágoras, la longitud *ds* de uno de estos lados infinitamente pequeños se expresa en la forma

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Pero $dy=f'(x)dx$, luego

$$ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

y la longitud de la curva será la "suma" de las longitudes de estos infinitos lados, es decir

La longitud L del arco de la curva $y=f(x)$, $a\le x\le b$ viene dada por la fórmula

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,. \tag{6}$$

Por ejemplo si la curva es la parábola $y=\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 1$ entonces

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

y la fórmula (6) se convierte en

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx=\int_0^1\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}+x}\;dx=\left(\frac{4}{9}+x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{13}{9}\right)^{3/2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}\,.$$

En el caso que la curva venga expresada en forma paramétrica, es decir, que las coordenadas x, y están dadas en función de un cierto parámetro t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$, se puede ver fácilmente que la longitud de arco puede calcularse mediante la expresión

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\;dt}\,.$$

Los problemas relacionados con la integración de funciones, desde sus orígenes, estuvieron estrechamente relacionados con la determinación de las magnitudes físicas. Como ilustración veamos dos de estas aplicaciones de la integral.

Ejemplo 10. Supongamos que sobre el eje de abscisas se ha situado un punto material de masa m a una distancia x del origen, entonces se denomina **momento** respecto al origen al producto $m\cdot x$. Si tuviéramos p puntos, con abscisas $x_1,x_2\ldots,x_p$ y masas $m_1,m_2\ldots,m_p$ respectivamente, entonces se considera como **momento del sistema** formado por los p puntos a la suma de los momentos correspondientes a cada uno, es decir, $\sum_{i=1}^{p}m_ix_i$. Se le denomina **centro de masa** del sistema a un punto $\overline{x}$ tal que si consideramos concentrada en él toda la masa del sistema $\sum_{i=1}^{p}m_i$, entonces el momento del sistema se obtiene por el producto $\left(\sum_{i=1}^{p}m_i\right)\overline{x}$. Así que $\overline{x}$ debe satisfacer la relación

$$\left(\sum_{i=1}^{p}m_i\right)\overline{x}=\sum_{i=1}^{p}m_ix_i \qquad \text{o} \qquad \overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{p}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{p}m_i}\,.$$

Supongamos ahora que tengamos una varilla fina, de longitud $b-a$, situada sobre el intervalo $[a,b]$ y que posee una distribución de masa $m(x)$ (Fig.22), queremos encontrar el centro de masa de la varilla. Sigamos un razonamiento similar al de los ejemplos anteriores: dividamos la varilla en pequeñas porciones de longitud *dx*, cada una de las cuales podemos suponer que tiene una masa constante e igual a $m(x)dx$. Entonces, la **masa** de la varilla vendrá dada por la "suma" de las masas de estas porciones, es decir por

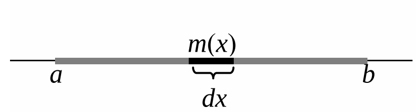

Fig.22

$$\int_a^b m(x)dx\,,$$

el **momento respecto al origen** por la "suma" de los momentos correspondientes

$$\int_a^b xm(x)dx$$

y, por tanto, el **centro de masa** estará situado en el punto de abscisa

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xm(x)dx}{\int_a^b m(x)dx}\,.$$

Ejemplo 11. Cuando una fuerza *F*, de magnitud constante y dirección paralela a una recta (que tomaremos como eje *OX*), desplaza un punto material desde la posición $x=a$ a la posición $x=b$ se define el **trabajo** *T* realizado por *F* como numéricamente igual al producto de la intensidad de dicha fuerza por la longitud del camino recorrido: $T=F(b-a)$. Se quiere encontrar una forma de determinar el trabajo en el caso que la fuerza varíe en dependencia de la posición del punto, es decir $F=F(x)$.

Como ya es habitual, supongamos el intervalo $[a,b]$ constituido por porciones de longitud *dx*, suficientemente pequeñas para poder considerar que en ella la fuerza es constante e igual a su valor en *x* (Fig.23). Entonces el trabajo correspondiente al desplazamiento por el intervalo $[x,x+dx]$ se expresa por

$$F(x)dx\,.$$

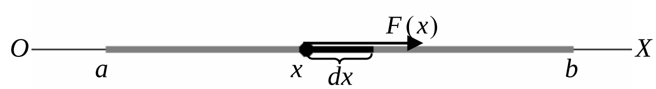

Fig.23

Esto sugiere que el trabajo *T*, realizado por la fuerza $F(x)$ al desplazar el punto material desde $x=a$ hasta $x=b$ se calcule por la integral

$$T = \int_a^b F(x)dx\,.$$

Ejercicios.

1. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \left(3x^3 - 5e^x + 10\operatorname{sen} x\right)dx$, b) $\int_1^2 \frac{(1-x)^2}{x}dx$, c) $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$,

d) $\int_0^1 \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \frac{dx}{x+3}$, e) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$, f) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}dx$,

g) $\int \tanh^2 x dx$, h) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$, i) $\int 3^x \cdot 5^{2x} dx$.

Sugerencias: En g) utiliza las relaciones entre las funciones hiperbólicas (ejerc. compl.7 de I) y en h) la fórmula del coseno del ángulo mitad.

2. Prueba que $\int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$.

3. Calcula el área de la figura limitada por las curvas:

a) $y^2 = 2x+1$ y $x - y - 1 = 0$; b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; c) $y = x^2$ y $y = \frac{x^3}{3}$.

4. Halla el área de la figura comprendida entre la parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a ésta en los puntos (0,–3) y (3,0).

5. Halla el área de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de las abscisas y las curvas $y=\operatorname{sen} x$ y $y=\cos x$.

6. Halla el volumen del cuerpo generado por la revolución alrededor del eje *OX* de la figura limitada por la hipérbola $y=1/x$, las rectas $y=x$ y $x=3$ y el eje *OX*.

7. Consideremos la figura limitada por las parábolas $y=x^2$ y $y^2=x$. Calcula el volumen del cuerpo generado cuando ella gira alrededor del: a) eje *OX*, b) eje *OY*.

8. Halla el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al rotar alrededor del:

a) eje *OX*, b) eje *OY*.

9.Calcula la longitud del arco de cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, cuando $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Un punto material se mueve a lo largo de una recta con una velocidad $v = 2t + 4 cm/s$. Calcula el espacio recorrido en los primeros 10 segundos.

11. Una varilla rectilínea de longitud *L* tiene una distribución de masa dada por $m(x)=kx$, donde *k* es una constante. Calcula la masa total de la varilla y su centro de masa.

12. Arquímedes se propuso y resolvió el problema siguiente:

Encontrar el segmento esférico de mayor volumen posible, dentro de aquellos que tienen la misma área lateral.

Sugerencia. Primero calcula el área lateral del segmento esférico, esto es, de uno de los cuerpos obtenidos de una esfera al ser cortada por un plano.

III.3. Métodos de integración: Cambio de variables e integración por partes

En varios de los problemas expuestos en el Cáp. II y en los ejemplos desarrollados en el epígrafe anterior hemos podido constatar la enorme variedad de problemas que es posible resolver con una combinación acertada de las herramientas del cálculo diferencial e integral. Pero, mientras que para el cálculo de la derivada se tienen un conjunto de reglas que permiten hallar la derivada de cualquier función elemental, para el cálculo de las primitivas solo podemos valernos de estas reglas para "conjeturar" una posible primitiva y comprobar que efectivamente lo es mediante la derivación. Sin dudas esto es una grave limitación para las aplicaciones. El hallazgo de primitivas de funciones elementales es un proceso mucho más complicado que el cálculo de derivadas y, a diferencia de éste, el éxito no está garantizado. Más precisamente, es posible probar, aunque se sale totalmente de los objetivos de este curso, que

Existen funciones elementales que no poseen primitivas que sean una funciones elementales.

A continuación expondremos los dos métodos básicos más usados para el cálculo de integrales, pero, para que estas herramientas resulten realmente eficaces, el lector deberá emplearlas sistemáticamente.

1) Cambio de variables

Supongamos que $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$, es decir, $F'(z)=f(z)$ y consideremos la sustitución $z=g(x)$ que relaciona las variables z y x. De la regla para la derivada de la función compuesta se tiene que

$$\left[F(g(x))\right]'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x).$$

Por lo tanto

$$F(g(x)) \text{ es una primitiva de la función } f(g(x))g'(x),$$

luego

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C=F(z)+C.$$

La expresión anterior también se puede escribir en la forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(z)dz, \quad z=g(x), \tag{1}$$

que es la denominada fórmula del **cambio de variables** o **sustitución** para la integral indefinida.

Observación. La notación usada para la integral proporciona un recurso muy cómodo para recordar la fórmula anterior: el paso de la primera integral a la segunda se realiza simplemente sustituyendo $g(x)$ por la nueva variable z y $g'(x)dx$ por su diferencial dz. También podemos ver (1) como una transformación de la segunda integral en la primera, para ello concebimos a la variable de integración z como una función de la variable x, entonces z se sustituye por $g(x)$ mientras que en lugar de dz se coloca $g'(x)dx$.

La definición dada para la integral definida ((2) de III.2) indica que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F(g(b))-F(g(a))$$

y también

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz = F(g(b)) - F(g(a)),$$

lo que justifica la fórmula de cambio de variables para la integral definida:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz. \qquad (2)$$

Ilustremos en algunos ejemplos sencillos la aplicación de las fórmulas (1) y (2).

Ejemplo 1. Calculemos la integral

$$\int e^{-3x+5}dx.$$

La sustitución $z=g(x)=-3x+5$, produce $dz=-3\,dx$, luego se tiene

$$\int e^{-3x+5}dx = \int \frac{1}{-3}e^z dz = -\frac{1}{3}\int e^z dz = -\frac{e^z}{3} + C = -\frac{e^{-3x+5}}{3} + C.$$

Procediendo de la misma forma que en este ejemplo, se puede verificar fácilmente que:
Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(ax+b)/a$, es una primitiva de $f(ax+b)$, donde a, b constantes, $a \neq 0$.

Ejemplo 2. En la integral $\int x\cos x^2 dx$, observamos que multiplicando y dividiendo por la constante 2, podemos aplicar la fórmula (1) con $z=x^2$, $dz=2x\,dx$:

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 \left(2xdx\right) = \frac{1}{2}\int \cos z dz = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C.$$

Ejemplo 3. Calculemos $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. En la tabla de III.2 aparece $\operatorname{arcsen} x$ como una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pero

$$\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}},$$

luego el cambio de variables $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $dz = \frac{dx}{\sqrt{3}}$ permite calcular la integral dada:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

¡Obsérvese como cambian los límites de integración!

Ejemplo 4. Calculemos la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8-x^3}.$$

El integrando es una fracción racional y, a semejanza del ejemplo 8 de III.2, podemos pensar en descomponerla en fracciones simples. En este caso

$$\frac{1}{8-x^3}=-\frac{1}{12}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{12}\frac{x+4}{x^2+2x+4}.$$

La primera de las fracciones simples se integra inmediatamente:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|\Big|_{-1}^{1}=-\ln 3.$$

Sin embargo, la segunda fracción ofrece mayor dificultad. Escribámosla en la forma

$$\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+4}+\frac{3}{(x+1)^2+3},$$

entonces

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx+3\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+3}=\frac{1}{2}I_1+3I_2.$$

Para calcular I_1 hagamos el cambio de variables $z=x^2+2x+4$, entonces $dz=(2x+2)dx$, luego

$$I_1=\int_{3}^{7}\frac{dz}{z}=\ln\frac{7}{3}.$$

De forma semejante al ejemplo anterior, la integral I_2 la escribimos como

$$I_2=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

la que puede calcularse fácilmente con el cambio de variables $z=\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$:

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{2/\sqrt{3}}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

De modo que hemos obtenido

$$I=\frac{1}{12}\ln 3+\frac{1}{24}\ln\frac{7}{3}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{24}\ln 3+\frac{1}{24}\ln 7+\frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Observación. El ejemplo anterior muestra un procedimiento estándar para integrar una fracción racional: Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador (fracción impropia) se realiza la división algebraica para escribir la fracción dada como la suma de un polinomio y una fracción propia. A continuación la fracción propia se descompone en fracciones simples. Por tanto, todo lo que se necesita es ser capaces de integrar cualquier fracción simple. En el ejemplo mostramos cómo integrar las fracciones de las formas:

$$\frac{1}{x-a}\ \text{y}\ \frac{1}{ax^2+bx+c},\quad b^2-4ac<0.$$

También son muy fáciles de integrar las del tipo:

$$\frac{1}{(x-a)^k}, \quad k=2,3,\ldots.$$

Solo tenemos pendiente indicar la forma de integrar las fracciones correspondientes a raíces complejas múltiples del denominador:

$$\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}, \quad b^2-4ac<0, \quad k=2,3,\ldots,$$

lo cual haremos en el ejemplo 12.

Ejemplo 5. En la integral

$$I=\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$$

pueden eliminarse los radicales si hacemos el cambio de variables $z=\sqrt[6]{1+x}$. En efecto, se tiene

$$\sqrt{1+x}=z^3, \quad \sqrt[3]{1+x}=z^2, \quad x=z^6-1 \quad \text{y} \quad dx=6z^5dz,$$

luego

$$I=\int\frac{\left(z^6-1\right)^2+z^3}{z^2}6z^5dt=6\int z^3\left(z^{12}-2z^6+z^3+1\right)dz.$$

Esta última integral (de un polinomio) se calcula fácilmente:

$$I=\frac{3z^{16}}{8}-\frac{6z^{10}}{5}+\frac{6z^7}{7}+\frac{3z^4}{2}+C.$$

Regresando a la variable original *x*, finalmente se tiene que

$$I=\frac{3(1+x)^{8/3}}{8}-\frac{6(1+x)^{5/3}}{5}+\frac{6(1+x)^{7/6}}{7}+\frac{3(1+x)^{2/3}}{2}+C.$$

En los ejemplos anteriores hemos sustituido una función de la variable de integración *x* por una nueva variable *z*, es decir, hemos aplicado la fórmula (1) de izquierda a derecha. Veamos cómo puede utilizarse (1) aplicada de derecha a izquierda.

Ejemplo 6. Calculemos $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$. En la tabla no encontramos ninguna integral que tenga algún parecido a la dada, por lo que resulta bastante más difícil idear la forma de calcularla. Sin embargo, en este tipo de radicales a veces resulta efectiva la sustitución de la variable de integración *x* por una función conveniente de una nueva variable. Por ejemplo, con la sustitución $x=\operatorname{sen} t$ obtenemos

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-(\operatorname{sen} t)^2}=\cos t \quad \text{y} \quad dx=\cos t\,dt,$$

luego, en virtud de la fórmula (2), podemos escribir

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt.$$

Esta última integral está propuesta en el ejerc.1 de III.2 y vale π/4. Luego

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

2) Integración por partes

Este método está basado en la interpretación de la fórmula de la derivada de un producto desde el punto de vista de las primitivas. Se sabe que

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

por tanto, $f(x)g(x)$ es una primitiva de la función suma $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. De modo que

$$\int \left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]dx = f(x)g(x)+C.$$

De donde, usando la linealidad de la integral, se tiene que

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)+C$$

o equivalentemente

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \qquad (3)$$

Observaciones. 1) En la igualdad anterior no colocamos la constante *C*, pero asumimos que la igualdad es válida cuando, en ambos miembros, se seleccionan primitivas adecuadas.

2) Es común que la fórmula (3) se escriba haciendo uso solo de los diferenciales: si $u=f(x)$ y $v=g(x)$, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (3a)$$

Las igualdades (3) y (3a) se conocen como **fórmula de integración por partes** para **la integral indefinida** y en ellas el cálculo de la integral de la función $f(x)g'(x)$ es reemplazado por el de $f'(x)g(x)$. Con una selección adecuada de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, esta fórmula, en muchas ocasiones, permite transformar una integral con primitiva completamente desconocida en una cuya primitiva o bien se conoce o resulta más fácil de calcular.

Para **la integral definida**, evidentemente, la **fórmula de integración por partes** adquiere la forma

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \qquad (4)$$

o

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (4a)$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 7. Calculemos $\int xe^x dx$.

Seleccionemos en (3)

$$f(x)=x \quad \text{y} \quad g'(x)=e^x,$$

entonces

$$f'(x)=1 \text{ y } g(x)=e^x,$$

de donde es inmediato que

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C\ .$$

Observemos que la selección $f(x)=e^x$ y $g'(x)=x$ produciría $f'(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}$ y la aplicación de (3) obligaría al cálculo de la integral

$$\frac{1}{2}\int x^2e^x dx\,,$$

la cual se ve aún más complicada que la propuesta.

Ejemplo 8. Calculemos ahora la integral $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$.

De forma análoga al ejemplo anterior, podemos escoger $f(x)=x^2$, $g'(x)=\operatorname{sen} x$, entonces $f'(x)=2x$ y $g(x)=-\cos x$ y aplicando la fórmula (4), tenemos que

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx = \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx\ .$$

Aunque la integral en el segundo miembro no es conocida, podemos notar que una nueva aplicación de (4) la reduce a una integral inmediata. En efecto,

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -2\,,$$

luego

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx = \pi^2 - 4\ .$$

La idea utilizada en estos ejemplos puede ser generalizada:

Para calcular integrales con integrandos de la forma $P(x)e^x$, $P(x)\operatorname{sen} x$, $P(x)\cos x$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado *n*, basta aplicar la fórmula (3) o (4) *n* veces.

Consideremos otros ejemplos donde el método de integración por partes resulta útil:

Ejemplo 9. En la integral $\int \ln x dx$ apliquemos (3a) tomando $u=\ln x$ y $dv=dx$. Entonces $du=dx/x$ y $v=x$, luego

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C\ .$$

Análogamente puede procederse con la integral de otras funciones elementales como, por ejemplo las funciones trigonométricas inversas o combinaciones de ellas con potencias de la variable.

Ejemplo 10. Calculemos la integral $\int_0^1 x\arctan x\,dx$. De forma semejante al ejemplo anterior, seleccionemos u=arctan$x$ y dv=xdx, entonces $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Así que

$$\int_0^1 x\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

La última integral se puede calcular simplemente transformando la fracción del integrando:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 1 - \left(\arctan x\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Finalmente obtenemos

$$\int_0^1 x\arctan x\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 11. Calculemos la integral

$$I_n = \int \cos^n x dx, \text{ donde } n=2,3,\ldots.$$

Escribamos I_n en la forma

$$I_n = \int \cos x \cos^{n-1} x dx.$$

Apliquemos a esta integral el método de integración por partes con la selección u=$\cos^{n-1}x$ y dv=$\cos xdx$, entonces

$$I_n = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x dx,$$

que, usando la identidad trigonométrica fundamental, se transforma en

$$I_n = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\left[\int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^n x dx\right] = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

De este modo obtenemos una relación recurrente entre I_n e I_{n-2}:

$$I_n = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}}{n}.$$

Esta relación permite calcular I_n para toda n. En efecto, sabemos que

$$I_0 = x + C \quad \text{e} \quad I_1 = \operatorname{sen} x + C,$$

entonces

$$I_2 = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + C, \quad I_4 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x + 3I_2}{4}, \quad I_6 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x + 5I_4}{6}, \ldots$$

$$I_3 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{3} + C, \quad I_5 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x + 4I_3}{5}, \quad I_7 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^6 x + 6I_5}{7}, \ldots$$

Ejemplo 12. Calculemos la integral

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x,$$

el cambio de variables $x = \tan t$, $dx = \sec^2 t$ transforma la integral J en:

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sec^4 t} = \int_0^{\pi/4} \cos^4 t dt,$$

la cual es una integral definida que tiene como integrando una potencia del coseno. De forma análoga al ejemplo anterior, pero aplicando la fórmula de integración por partes para la integral definida, obtenemos:

$$J = \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x \Big|_0^{\pi/4}}{4} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}.$$

Observación. El integrando en J es una fracción simple con ceros del denominador complejos múltiples, precisamente el tipo de fracción simple que nos faltaba saber cómo integrar. Aunque hemos considerado un caso particular (los ceros $\pm i$ son triples), el método seguido puede ser aplicado a ceros complejos cualesquiera y de multiplicidad arbitraria. Consideramos que el lector, haciendo uso de su imaginación y otros recursos que le hemos brindado, debiera ser capaz de esta generalización.

Ejemplo 13. Apliquemos la integración por partes a $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$, considerando, por ejemplo,

$$f(x) = e^{ax} \text{ y } g'(x) = \cos bx,$$

se tiene $f'(x) = ae^{ax}$ y $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} bx}{b}$, de donde

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx.$$

Si a la integral en la igualdad anterior le volvemos a aplicar la integración por partes tomando $f(x) = e^{ax}$ y $g'(x) = \operatorname{sen} bx$, se obtiene

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\left[-e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\, dx\right],$$

lo cual es una ecuación en I

$$I=\frac{e^{ax}}{b^2}\left(b\operatorname{sen}bx+a\cos bx\right)-\frac{a^2}{b^2}I\ ,$$

luego

$$I=\frac{e^{ax}\left(b\operatorname{sen}bx+a\cos bx\right)}{a^2+b^2}\,.$$

De la misma forma puede ser calculada la integral $\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx$. Sin embargo, la fórmula de Euler (7, de I.7) nos permite encontrar de forma simultánea estas dos integrales. Por una parte,

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\text{, (ejerc. 2 de III.2)}$$

que, separando en partes real e imaginaria, se transforma en

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{e^{ax}\left(a\cos bx+b\operatorname{sen}bx\right)}{a^2+b^2}+i\frac{e^{ax}\left(a\operatorname{sen}bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}\,.$$

Pero también

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\int e^{ax}\cos bx\,dx+i\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx\ ,$$

luego igualando las partes reales e imaginarias de las dos expresiones se obtiene la integral I y además

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx=\frac{e^{ax}\left(a\operatorname{sen}bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}\,.$$

Ejercicios

1. Calcula las integrales siguientes utilizando cambios de variables adecuados:

a) $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$, b) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$, c) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3x\cos x\,dx$,

d) $\int\tan x\,dx$, e) $\int_0^1\frac{\arctan^2x}{1+x^2}dx$, f) $\int\frac{\operatorname{senh}2x}{\sqrt[3]{1+\operatorname{senh}^2x}}dx$

2. Calcula las integrales siguientes utilizando el método de integración por partes:

a) $\int x\operatorname{sen}ax\,dx$, b) $\int_0^1\left(x^2+2x-5\right)e^x\,dx$, c) $\int\arccos x\,dx$,

d) $\int_0^1 x^2\arctan x\,dx$, e) $\int_0^1\ln\left(x^2+1\right)dx$, f) $\int\ln^2x\,dx$, g) $\int\cos\left(\ln x\right)dx$.

3. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, b) $\int_0^1\frac{x-1}{x^2-x-1}dx$, c) $\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}dx$,

d) $\int\left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$, e) $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$, f) $\int\sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}dx$,

g) $\int x\operatorname{sen}^2 x dx$, h) $\int\cos\ln x dx$, g) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$,

i) $\int\frac{x^4}{1-x^4}dx$, j) $\int_1^e\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$, k) $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$.

4. a) Prueba que

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}\cdot e^{-inx}dx=\begin{cases}0, & \text{si } m\neq n\\ 2\pi, & \text{si } m=n\end{cases}, \quad m,n=1,2,\ldots.$$

b) Usando a), calcula las integrales

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx, \qquad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx\,dx, \qquad \int_0^{2\pi}\cos mx\operatorname{sen} nx\,dx.$$

5. Calcula el área limitada por las curvas cerradas:

a) $y^2=x^2-x^4$, b) $y^2=\left(1-x^2\right)^3$.

6. Calcula el área de la figura limitada por el eje de abscisas y las curvas $y=\operatorname{arcsen} x$ y $y=\arccos x$.

7. Halla las áreas de las figuras limitadas por las curvas en coordenadas polares:

a) $\rho=a\operatorname{sen}2\theta$, b) $\rho=a\cos 5\theta$.

8. Consideremos la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli: $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$. Halla su área y la porción de ella que está dentro de la circunferencia $x^2+y^2=a^2/2$.

Sugerencia: Utiliza las coordenadas polares.

9. Halla el volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la figura limitada por la curva $y=\arccos x$ y cuya base es el intervalo [0,1].

10. Sea F la figura limitada por la curva $y=e^x$, la recta $x=e$ y los ejes coordenados. Halla el volumen del cuerpo generado por F al girar alrededor de: a) el eje OX, b) el eje OY.

11. Calcula la longitud del arco de la curva $y=\cosh x$, comprendido entre $x=0$ y $x=b$.

12. Halla la longitud del arco de la curva $y=\ln x$, para $0<a\leq x\leq b$.

13. Explica las paradojas siguientes:

a) Como

$$\int\operatorname{sen} x\cos x dx=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \quad \text{y} \quad \int\operatorname{sen} x\cos x dx=-\frac{\cos^2 x}{2},$$

entonces, ¡$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=0$!

b) Ya que $\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{dx}{-x}$, entonces $\ln x=\ln(-x)$, lo que significa que $x=-x$ y por tanto ¡1=−1!

14. a) Demuestra que si $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} t dt$, entonces $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$,

b) Calcula I_n,

c) Prueba que $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$.

15. Cuando una partícula cae por la acción de la gravedad en el seno de un fluido viscoso, se mueve con una aceleración dada por $a = \frac{dv}{dt} = g - kv$, donde v es la velocidad, k una constante y g es la aceleración de la gravedad.

a) Determina la velocidad y la posición de la partícula en función del tiempo sabiendo que está ubicada en el origen de coordenadas y parte de su posición de reposo.

b) Durante el movimiento de la partícula, el fluido ejerce sobre la partícula una fuerza, que es tangente a su trayectoria, se opone al movimiento y está dada por $f=-kv$ $f = -kv$, donde k es una constante y v la velocidad del fluido. Determina el trabajo realizado por esta fuerza.

16. La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, contando con la resistencia del aire, se expresa por la fórmula

$$v = C \tan\left(-\frac{g}{C} t + \arctan \frac{v_0}{C} \right),$$

donde g es la aceleración de la gravedad y C una constante. Halla la altura máxima a la que se eleva el cuerpo.

III.4. Resolución de problemas históricos con el cálculo de integrales

En II.4 formulamos y analizamos dos problemas históricos, la isócrona de Leibniz y la tractriz de Huygens, que no pudimos culminar por no tener las técnicas adecuadas para el cálculo de primitivas. En este epígrafe completaremos la solución de estos problemas y analizaremos otros dos también de carácter histórico.

Problema de la isócrona de Leibniz. Para completar la solución de este problema solo faltaba calcular

$$I = \int -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}\, dy .$$

Haciendo el cambio de variables $z = -1 - \frac{2gy}{b^2}$, $dz = -\frac{2g}{b^2} dy$, se obtiene

$$I = \frac{b^2}{2g} \int \sqrt{z}\, dz = \frac{b^2}{3g} z^{3/2} + C = \frac{b^2}{3g} \left(-1 - \frac{2gy}{b^2} \right)^{3/2} + C .$$

De modo que la isócrona satisface la ecuación

$$x = \frac{b^2}{3g} \left(-1 - \frac{2gy}{b^2} \right)^{3/2} .$$

Problema de la tractriz.

En II.4 llegamos a que la ecuación de la tractriz se podía escribir en la forma

$$x=-\int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy\,.$$

Calculemos esta integral, realizando la sustitución

$$t=\sqrt{a^2-y^2}\,,\qquad y^2=a^2-t^2\,,\qquad ydy=-tdt\,,$$

luego

$$-\int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy=\int\frac{t^2}{a^2-t^2}dt=-\int\left(1-\frac{a^2}{a^2-t^2}\right)dt$$

$$=-t+\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{a-t}+\frac{1}{a+t}\right)dt=-t+\frac{a}{2}\ln\frac{a+t}{a-t}+C\,.$$

Regresando a la variable y y simplificando, se obtiene

$$x=-\int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy=-\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+C\,.$$

En Fig.II.17, hemos situado los ejes coordenados de modo que el móvil parte del punto (0,*a*), luego $C=0$ y la ecuación de la tractriz es

$$x=-\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,.$$

Problema de la catenaria.

A fines del siglo XVII aún estaba sin resolver completamente un problema interesante y antiguo:

> *Encontrar la forma que toma una cuerda (o cadena) perfectamente flexible y homogénea por la acción sólo de su peso, si ella es fijada en sus extremos* (Fig.24).

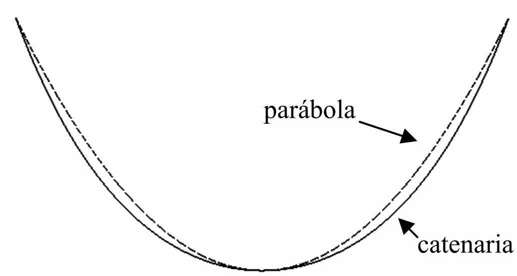

Fig.24

La forma que toma la cuerda o cadena tiene un gran parecido con una parábola y precisamente ésta fue la primera conjetura formulada por varios matemáticos entre ellos **Galileo Galilei**. Sin embargo, con solo 17 años Huygens había conseguido demostrar que la curva no era una parábola, utilizando razonamientos de tipo físicos, pero no pudo determinar cuál era precisamente la curva buscada.

Esto motivó que Jacob Bernoulli propusiera a los matemáticos este problema como un reto al uso del recién creado cálculo diferencial. El problema fue resuelto por varios matemáticos y la curva solución se denominó *catenaria*, del vocablo latino *catena* que significa cadena.

Veamos una solución de este problema:

Situemos el origen de coordenadas en la parte inferior de la curva (cuerda) y consideremos la porción de la misma comprendida entre el origen *O* y un punto *P* variable (ver Fig.25). Sobre esta porción actúan la fuerza G que es tangente en P, la fuerza horizontal F, que es independiente de P (depende solo de la parte izquierda de la cadena) y el peso variable W de la porción de curva OP.

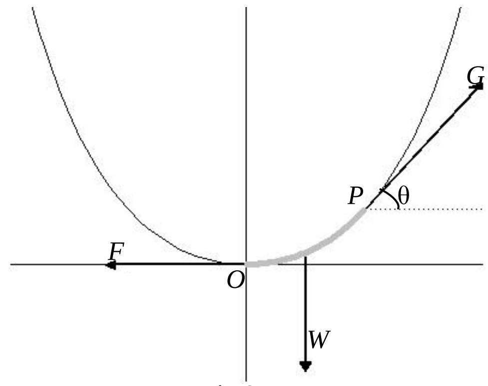

Fig.25

Como la parte OP de la cuerda está en equilibrio, todas las fuerzas que actúan sobre ella horizontalmente hacia la derecha y las que lo hacen hacia la izquierda deben ser iguales en magnitud. También todas las fuerzas que actúan verticalmente hacia arriba y las que lo hacen hacia abajo deben tener la misma magnitud. De aquí que $G\cos\theta = F$, $G\operatorname{sen}\theta = W$, luego $\tan\theta = W/F$. Pero

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx},$$

así que

$$dy = \frac{W}{F}dx .$$

Como hemos supuesto que la cadena es homogénea el peso de cada parte de ella es proporcional a la longitud de esa parte, es decir hay una constante k (dependiente sólo de la naturaleza de la cuerda) tal que $W = k \cdot s$, donde s denota la longitud del arco OP (que varía con el punto P). De modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{F} = \frac{ks}{F} = \frac{s}{a},$$

donde $a = \dfrac{F}{k}$ es una constante.

Así que la curva debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

Para encontrar la curva que satisface la relación anterior, derivemos esta igualdad respecto a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx},$$

pero sabemos que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$

Si denotamos $z = \dfrac{dy}{dx}$, entonces la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + z^2},$$

de donde

$$dx = \frac{adz}{\sqrt{1+z^2}} \qquad \text{o} \qquad x = a\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

La sustitución $z = \operatorname{senh} t$, $dz = \cosh t\, dt$, convierte esta última integral en

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dt\,,$$

luego,

$$x = a \operatorname{arg\,senh} z + C \qquad \text{o} \qquad z = \operatorname{senh}\frac{x-C}{a}.$$

El punto (0,0) es un mínimo de la curva, así que debe cumplirse la condición $z(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$, luego $C = 0$.

Como $z = \frac{dy}{dx}$, se tiene que

$$y = \int \operatorname{senh}\frac{x}{a}dx = a\cosh\frac{x}{a} + C\,,$$

pero hemos tomado la curva que pasa por (0,0), por tanto $C = -a$ y finalmente la ecuación de la catenaria con el vértice en el origen es

$$y = a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right).$$

Problema de la braquistócrona.

Al final del trabajo donde Johann Bernoulli expone la solución del problema de la catenaria, propone un nuevo problema:

> *Dados dos puntos A y B en un plano vertical, encontrar el camino AMB por el que una partícula móvil M, descendiendo por su propio peso, iría de A a B en el menor tiempo posible*. (Ver Fig.26)

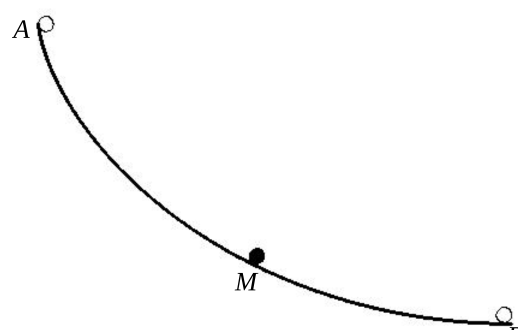

Fig.26

Galileo había demostrado que el movimiento de un punto material que va desde *A* hasta *B* era más rápido a través de un arco de circunferencia que según la línea recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Para ello Galileo se apoyó en su conocida ley de la caída de los graves: $v = \sqrt{2gy}$, donde *v* es la velocidad de descenso del móvil, *y* su altura y *g* una constante debida a la acción de la fuerza gravitatoria.

La curva solución al problema fue denominada *braquistócrona* (en su origen griego el vocablo significa *tiempo mínimo*) y resultó una curva muy bien conocida y apreciada por los matemáticos: *la cicloide* (II.1, ejerc.5). Este problema, además de Johann Bernoulli, lo resolvieron Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital y un autor inglés "anónimo". Sin embargo, Johann no tuvo dificultad en reconocer que el autor era Isaac Newton y lo expresó con una frase histórica: *por las garras se conoce al león*. Veamos la solución propuesta por Johann Bernoulli.

El método de Johann consistió en establecer una analogía óptica y utilizar tanto la ley de Galileo, como el resultado de Fermat que aparece en el ejemplo II.7. Para ello consideró que la trayectoria que debe seguir el móvil es la misma que seguiría un rayo de luz en un medio con una densidad tal que la velocidad del rayo se corresponda con la brindada por la ley fundamental de Galileo.

Dividamos el medio en un número finito de capas (suficientemente finas) suponiendo que en cada capa la densidad es constante y cambia bruscamente de una capa a otra (ver Fig.27). De este modo, en cada capa, la trayectoria debe corresponder a un pequeño segmento de recta y obtendríamos así una trayectoria poligonal. Cuando el número de capas se hace infinitamente grande (y su grosor infinitamente pequeño), esta poligonal se convertirá en la curva buscada.

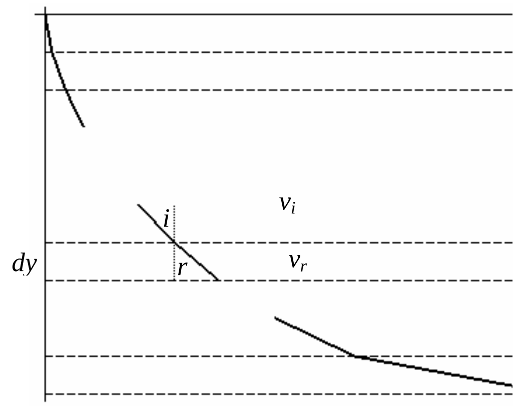

Fig.27

Denotemos por v_i y v_r respectivamente las velocidades de incidencia (capa superior) y de refracción (capa inferior) del rayo de luz y por i y r los ángulos de incidencia y refracción. Entonces, en virtud del resultado del ejemplo II.7, se cumple

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen} r}{v_r}.$$

Cuando las capas horizontales se hacen cada vez más finas, los lados de la poligonal adquieren una dirección próxima a la tangente a la curva. De modo que, la relación entre el ángulo u que forma la tangente a la curva con la vertical (Fig.28) y la velocidad v se mantiene constante, esto es

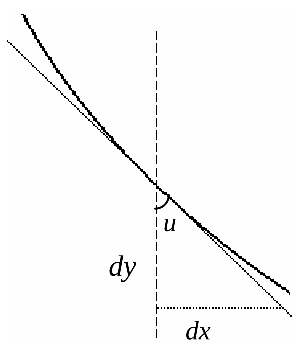

Fig.28

$$\frac{\operatorname{sen} u}{v} = c = const.$$

Pero la velocidad está determinada de acuerdo a la ley de Galileo $v = \sqrt{2gy}$, luego

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{y}} = k\,, \qquad (1)$$

donde k es una constante.

Del triángulo rectángulo mostrado en la Fig.28, vemos que

$$\operatorname{sen} u = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\,,$$

y sustituyendo en (1) obtenemos

$$\frac{dx}{\sqrt{y}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = k\,.$$

Transformaciones algebraicas simples nos conducen a la ecuación diferencial

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = a\,,$$

donde a es cierta constante.

Esta ecuación puede rescribirse como

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{a-y}{y}}\,,$$

o en forma equivalente

$$\int\frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{a-y}}=\int dx\,.$$

En la integral de la izquierda hagamos el cambio de variables

$$y=a\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}\,,\quad dy=a\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\,,$$

entonces

$$\sqrt{a-y}=\sqrt{a-a\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}=\sqrt{a}\cos\frac{t}{2}\,.$$

Luego la integral se convierte en

$$\int\frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{a-y}}=\int a\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int(1-\cos t)dt\,,$$

de esta forma se obtiene que

$$x=\frac{a}{2}(t-\mathrm{sen}\,t)+C\,,\qquad y=a\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}=\frac{a}{2}(1-\cos t)\,.$$

Si, como es usual, asumimos que el punto inicial es el origen, se obtiene $C=0$. Y de esta forma llegamos a las ecuaciones paramétricas de la cicloide cuyo círculo generador tiene radio $a/2$:

$$x=\frac{a}{2}(t-\mathrm{sen}\,t)\,,\quad y=\frac{a}{2}(1-\cos t)\,.$$

Ejercicios

1. a) Determina la curva del menor tiempo de descenso cuando en lugar de la ley de Galileo se supone que la velocidad de la caída es proporcional a la altura.

b) Resuelve el mismo problema cuando la velocidad de descenso es proporcional a la raíz cúbica de la altura.

2. En el primer cuadrante, halla la curva que pasa por el punto (1,1) y tal que el segmento de tangente comprendido entre los ejes coordenados es dividido por el punto de tangencia en la relación $m:n$, $m\neq n$, contando desde el eje OX.

3. Halla una curva $y=f(x)>0$ (f con derivada para todo valor de x), tal que para cualquier $a>0$ se cumple que el volumen del cuerpo obtenido por la rotación de la figura limitada por la curva, el eje de abscisas y la recta $x=a$ es igual a $\lambda\pi a f^2(a)$.

4. Encuentra una curva dada en coordenadas polares por la ecuación $r=r(\theta)$, para la cual el área S del sector acotado por la curva y los rayos $\theta=0$ y $\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ satisface la relación $S=br^n(\alpha)$, $n>2$.

5. Encuentra la curva $y=f(x)$ tal que la longitud del arco que une los puntos $A=(0,a)$ y $M=(x,f(x))$ es k veces la pendiente de la tangente en el punto M.

Fórmula de Taylor con resto en forma integral.

En II.6 encontramos una manera de representar una función mediante una serie de potencias, la denominada serie de Taylor, cuyas sumas parciales constituían una forma de aproximación para la función. Sin embargo, este método presentaba la dificultad de no brindar un medio de estimación del error cometido en tal aproximación. Johann Bernoulli también llegó a esta representación en serie, pero lo hizo de manera completamente diferente a Taylor: utilizó un método equivalente a la aplicación reiterada de la fórmula de integración por partes. Más de un siglo después, el matemático francés Augustin Louis Cauchy advirtió que el método de Bernoulli no solo conducía a la serie, sino que, además podía ser usado en la determinación de una fórmula que sirviera para estimar el error que se comete cuando se consideran solo un número finito de términos de la serie, es decir el polinomio de Taylor. Veamos cuál es esta fórmula y algunas aplicaciones que de ella podemos hacer.

Consideremos un número x fijo de este intervalo, entonces usando la definición (fórmula (2) de III.2) de integral definida, se tiene que

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a),$$

o lo que es lo mismo

$$f(x) = f(a) - \int_a^x f'(t)d\left(x-t\right),$$

donde hemos usado la igualdad $-d(x-t)=dt$, aquí el símbolo d se refiere a diferenciación respecto a la variable de integración t.

Apliquemos a la integral anterior la fórmula de integración por partes con $u=f'(t)$ y $v=(x-t)$:

$$f(x) = f(a) + \left(x-t\right) f'(t)\Big|_a^x + \int_a^x \left(x-t\right) f''(t)dt = f(a) + \left(x-a\right) f'(a) + \int_a^x \left(x-t\right) f''(t)dt .$$

Integremos por partes nuevamente, esta vez considerando

$$dv = d\left[-\frac{\left(x-t\right)^2}{2}\right] = \left(x-t\right)dt$$

y llegamos a

$$f(x) = f(a) + \left(x-a\right) f'(a) + \frac{\left(x-a\right)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \frac{\left(x-t\right)^2}{2} f'''(t)dt .$$

Repitiendo k veces este procedimiento obtenemos la representación

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(x-a\right)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{\left(x-t\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt . \qquad (1)$$

(Hemos supuesto que tanto la función $f(x)$ como todas sus derivadas hasta el orden $n+1$ están bien definidas en un intervalo que contiene al punto a.)

Para la escritura abreviada del polinomio de Taylor en la expresión anterior hemos utilizado el convenio

$$0!=1, \qquad f^{(0)}(x)=f(x).$$

La fórmula (1) indica que si sustituimos a la función $f(x)$ por el polinomio de Taylor

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a),$$

el error que se comete viene dado por la diferencia

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt,$$

que se denomina **resto** de la serie de Taylor. La relación (1) se llama **fórmula de Taylor con resto**.

El error cometido al aproximar una función por su polinomio de Taylor no lo conoceremos de forma exacta, pero sí podemos estimar cuál es su peor comportamiento, esto es, cuál es el error máximo que pudiera cometerse con esta aproximación. Para ello es necesario **acotar** a $r_n(x)$, es decir encontrar algún número *M* tal que, para los valores de *x* que nos interesan se cumple

$$|r_n(x)|\le M\ ,$$

así podremos garantizar que el error cometido (por exceso o por defecto) no sobrepasa en valor absoluto al número *M*.

La expresión encontrada para el resto está dada mediante una integral, de modo que, para ser capaces de acotar ese resto, será conveniente tener propiedades de la integral que involucren desigualdades:

Propiedad 1. Supongamos que $f(x)\ge 0\ (>0)$ para $a\le x\le b$, entonces, usando la interpretación de la integral como área, resulta evidente que

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0(>0).$$

Propiedad 2. Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que satisfacen $f(x)\le g(x)$, para $a\le x\le b$, entonces $g(x)-f(x)\ge 0$. Usando la propiedad anterior y la linealidad de la integral obtenemos

$$0\le\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx,$$

lo cual significa que

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

Observación. Notemos que también en esta segunda propiedad, si consideraramos la desigualdad estricta < entre las funciones, se obtendría la correspondiente desigualdad estricta entre las integrales.

Ejemplo 1. Apliquemos la fórmula (1) a la función $f(x)=e^x$ con $a=0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt .$$

Luego, si aproximamos a la función $f(x)=e^x$ por el polinomio

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} ,$$

el error que se comete viene dado por

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt . \tag{2}$$

Para acotar el error supongamos, por ejemplo, que $0 \leq x \leq 1$, entonces también $0 \leq t \leq x \leq 1$, por lo que $0 \leq e^t \leq 3$, luego el integrando en (2) satisface la doble desigualdad

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq 3 \frac{(x-t)^n}{n!} .$$

Por las propiedad anteriores

$$0 \leq r_n(x) \leq 3 \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt ,$$

por tanto

$$0 \leq r_n(x) \leq 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} .$$

Esto permite afirmar, por ejemplo para $n=10$, que

$$r_n(x) \leq 3 \frac{1}{11!} = 0{,}75156 \cdot 10^{-7} < 10^{-7} .$$

Ejemplo 2. Calculemos cuál es el error máximo que puede cometerse en la aproximación usada en II.5:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \text{ con } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} .$$

Como todas las derivadas de orden par de la función seno en el origen son nulas, podemos considerar que estamos trabajando con el polinomio de Taylor de grado 6, de modo que el error se expresa por

$$r_6(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \operatorname{sen}^{(7)} t dt .$$

Pero del ejemplo 3 de II.5

$$\operatorname{sen}^{(7)} t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{7\pi}{2} \right),$$

luego $-1 \leq \operatorname{sen}^{(7)} t \leq 1$. Finalmente aplicando la propiedad 2:

$$-\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt \le r_6(x) \le \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt\,.$$

Esto significa que

$$|r_6(x)| \le \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt = \frac{x^7}{7!} \le \frac{\pi^7}{4^7\cdot 7!} < 0{,}00004\,.$$

La fórmula de Taylor con resto no solo es útil en la valoración del error que se comete al truncar la serie de Taylor, sino que tiene aplicaciones diversas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3. En el ejemplo anterior vimos que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}\operatorname{sen}\left(t+\frac{7\pi}{2}\right)dt\,.$$

pero

$$\operatorname{sen}\left(t+\frac{7\pi}{2}\right) = -\cos t \le 0\,,$$

para $0\le t\le x\le \pi/2$. De modo que la función integrando en la expresión del resto es negativa y, por tanto

$$\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}\operatorname{sen}\left(t+\frac{7\pi}{2}\right)dt \le 0\,.$$

Lo anterior prueba la desigualdad

$$\operatorname{sen} x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\text{, para } 0\le x\le \pi/2.$$

En realidad la desigualdad anterior es válida para todo $x\ge 0$.

Observación. En este ejemplo aplicamos la fórmula de Taylor a la función seno, para encontrar y probar una relación de desigualdad con su polinomio de Taylor de grado 5. Es claro que con un procedimiento semejante pueden encontrarse y demostrarse otras desigualdades para la función seno y desigualdades del mismo tipo para otras funciones (ver ejerc.4).

Ejemplo 4. Consideremos una función $y=f(x)$, tal que su gráfico sea convexo hacia abajo en (a,b), es decir, cuya segunda derivada en los puntos de ese intervalo sea positiva. En la Fig.29 de II.5 podemos observar que la curva está situada totalmente por encima de cualquiera de sus rectas tangentes trazadas en puntos del intervalo (a,b). Demostremos esta propiedad, haciendo uso de la fórmula de Taylor.

Sea x_0 un punto de (a,b) y escribamos la fórmula de Taylor de $f(x)$ con $n=1$ en x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f'(x_0) + r_1(x), \quad r_1(x) = \int_{x_0}^x (x-t)\,f''(t)dt\,,\ a\le x\le b.$$

Como la ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en x_0 es

$$y = f(x_0) + (x-x_0)\,f'(x_0)\,,$$

entonces solo debemos verificar que, para x en el intervalo (a,b), se cumple

$$f(x)-\left(f(x_0)+\left(x-x_0\right)f'(x_0)\right)\geq 0,$$

esto es, que el resto $r_1(x)$ es positivo para $a\leq x\leq b$.

Cuando $x_0\leq x$, entonces $x_0\leq t\leq x$ y es evidente que el integrando es positivo, luego, por la propiedad 1, también lo será la integral.

Cuando $x\leq x_0$, escribamos el resto en la forma

$$r_1(x)=-\int_x^{x_0}\left(x-t\right)f''(t)dt.$$

Ahora es claro que el integrando es negativo y, por tanto el resto será positivo. Esto completa la demostración de que el resto es positivo. El lector puede, sin dificultad alguna, probar un resultado análogo para las funciones convexas hacia arriba.

Veamos ahora una aplicación completamente diferente de la fórmula de Taylor.

Ejemplo 5. Probemos que **el número *e*** no puede escribirse como una fracción irreducible, es decir, **no es un número racional**.

Retomemos la fórmula de Taylor con resto utilizada en el ejemplo 1:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),\ \text{donde}\ \ r_n(x)=\int_0^x\frac{\left(x-t\right)^n}{n!}e^t dt.$$

En particular, si $x=1$, obtenemos

$$e=2+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}+r_n,\ \text{donde}\ \ r_n=r_n(1)=\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^n}{n!}e^t dt$$

Supongamos que se cumpliera

$$e=\frac{p}{q},$$

para algún par de enteros p y q primos entre sí. Como $2<e<3$ (ejerc.2, I.5), entonces es claro que podemos suponer $p\geq 1$ y $q\geq 2$.

Como n puede tomar cualquier valor entero positivo, consideremos $n=q$, entonces se deberá cumplir la igualdad

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{q!}+r_q.$$

Multipliquemos la igualdad anterior por $q!$, entonces

$$\frac{pq!}{q}=p\left(q-1\right)!=\left(2q!+\frac{q!}{2}+...+\frac{q!}{q!}\right)+r_q\cdot q!\ .$$

En esta última igualdad el miembro izquierdo y la cantidad que está entre paréntesis son números enteros, por tanto, también deberá ser entero el producto $r_q\cdot q!$.

Por otra parte, es evidente que

$$\frac{2\left(1-t\right)^q}{q!}<\frac{\left(1-t\right)^q}{q!}e^t<\frac{3\left(1-t\right)^q}{q!},$$

luego

$$\frac{2}{q!}\int_0^1 (1-t)^q\,dt < r_q < \frac{3}{q!}\int_0^1 (1-t)^q\,dt$$

de donde sigue inmediatamente que

$$\frac{2}{q+1} < r_q \cdot q! < \frac{3}{q+1}.$$

Como $q \geq 2$, esto significa que $0 < r_q \cdot q! < 1$, lo cual es una contradicción con su condición de entero. Esta contradicción prueba la irracionalidad de e.

Ejercicios

1. Usando la fórmula (1) con $n=3$ calcula aproximadamente $\operatorname{sen} 18°$ y acota el error cometido.

2. Determina el grado del polinomio de Taylor que permite calcular:

a) $\cos 9°$, con error $<10^{-5}$, b) $\sqrt{5}$, con error $<10^{-4}$.

3. a) Usando la propiedad 2 prueba la desigualdad siguiente:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

b) Prueba que si $|f(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$, entonces se cumple

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$

4. a) Prueba que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones:

$$f(a)=g(a),\ f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a),\ \text{para } k=1,2,\ldots,n-1 \text{ y } f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x),\ x>a,$$

entonces $f(x)>g(x)$, $x>a$.

b) Prueba las desigualdades siguientes:

i) $x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$, $x \geq 0$, ii) $\tan x \geq x+\dfrac{x^3}{3}$, $0 \leq x < \pi/2$.

5. a) Demuestra que $\operatorname{senh} x \geq \operatorname{sen} x$, cuando $x \geq 0$. ¿Qué ocurre si $x \leq 0$?

b) Analiza los puntos de extremo relativo de la función $f(x)=\cosh x+\cos x$.

6. Haciendo uso de la propiedad 2 demuestra las desigualdades siguientes:

a) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{5}$, b) $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x} \leq \ln 3$,

c) $1-\dfrac{1}{n} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^n}dx \leq 1$, d) $\dfrac{4}{9}(e-1) \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx \leq \frac{1}{2}(e-1)$.

III.5. Cálculo aproximado de integrales

La resolución de problemas mediante la integración está estrechamente relacionada con la posibilidad de efectuar el cálculo de las integrales que en ellos aparecen. En un inicio eran muy pocas las funciones a las cuales se le podía encontrar una primitiva y esto motivó que el mismo Newton ya se refiriera al uso de métodos aproximados. Más tarde, con la introducción de las funciones elementales, se amplió grandemente el espectro de las funciones a las cuales se les podía hallar una primitiva, se clasificaron las integrales según el tipo de la función integrando y se desarrollaron ingeniosos procedimientos específicos para cada tipo. Sin embargo, siempre existieron funciones, importantes para la resolución de problemas relativamente simples, cuyas primitivas no podían ser encontradas de forma exacta. Esto motivó el desarrollo persistente de los métodos aproximados para el cálculo de integrales. Expondremos brevemente las ideas básicas de algunos de estos métodos.

Desarrollos en serie

Uno de los métodos más utilizados para enfrentar las integrales de funciones para las cuales no se conocía primitiva fue el de desarrollar los integrandos en forma de serie y después integrar esta serie término a término. La serie así obtenida se consideraba que representaba la integral buscada y, por tanto, sus sumas parciales constituían aproximaciones de la integral. Esta forma de proceder fue usada sin remordimientos hasta el siglo XIX, cuando fue objeto de análisis bajo una perspectiva matemática diferente. Nosotros nos limitaremos a usarla en algunos casos sencillos, cuya validez será demostrada en cursos más avanzados.

Ejemplo 1. Calculemos la longitud de una elipse de semiejes 1 y $0<b<1$:

$$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{. (Fig.29)}$$

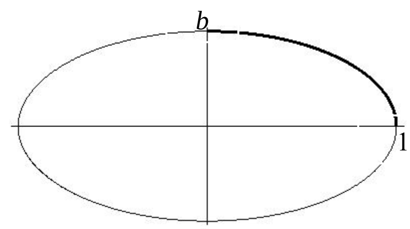

Fig.29

La elipse puede darse en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x=\cos t\,,\ y=b\,\mathrm{sen}\,t\,,\ 0\le t\le 2\pi\,.$$

Pero la simetría de la curva permite afirmar que su longitud total es cuatro veces la del arco correspondiente al primer cuadrante, esto es

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\;dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\mathrm{sen}^2\,t+b^2\cos^2 t}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(1-b^2\right)\cos^2 t}\,dt\,. \qquad (1)$$

No existe ninguna función elemental cuya derivada sea $\sqrt{1-\left(1-b^2\right)\cos^2 t}$ [1], por lo que esta integral no puede calcularse por simple evaluación de una primitiva. ¿Qué podemos hacer? En el transcurso de este epígrafe veremos tres formas diferentes de encontrar un valor aproximado de esta integral.

Primeramente veamos un enfoque donde la idea fundamental radica en utilizar la serie del binomio (I.5) correspondiente a la función

$$f(u)=\sqrt{1-u}\,,\quad \text{donde } u=\alpha\cos^2 t \ \text{ y } \ \alpha=1-b^2\,.$$

[1] La demostración de esta afirmación está muy lejos de ser elemental y solo se encontró a mediados del siglo XIX. No obstante, desde principios del siglo XVIII las integrales de este tipo se usaron con el nombre de *integrales elípticas*.

Como $0<b<1$, entonces se cumplirá $0<\alpha<1$ y $0<u<1$. La serie del binomio nos permite escribir

$$\sqrt{1-u}=1-\frac{u}{2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}u^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}u^3\ldots,$$

luego

$$\sqrt{1-\alpha\cos^2 t}=1-\frac{\alpha\cos^2 t}{2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\alpha^2\cos^4 t-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3\cos^6 t\ldots,$$

y por tanto

$$L=4\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\alpha\cos^2 t}{2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\alpha^2\cos^4 t-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3\cos^6 t-\ldots\right)dt\,.$$

Pero (III.3, ejerc.13)

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t dt=\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)},$$

por lo que

$$L=2\pi\left(1-\alpha\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3-\ldots\right),\tag{2}$$

que permite realizar un cálculo aproximado de dicha longitud.

Analicemos lo que ocurre para los valores extremos de α. Si $\alpha=0$ y por tanto, $b=1$ se trataría de una circunferencia de radio 1 y en este caso el valor que se obtiene es exactamente $L=2\pi$. Para $\alpha=1$ el semieje vertical sería de longitud cero, esto puede interpretarse como que la elipse se convierte en el segmento que une los puntos (–1,0) y (1,0) recorrido dos veces (una correspondiente a la parte superior y otra a la inferior de la elipse) y por tanto la longitud es 4. Este valor se obtiene si en la integral (1) colocamos directamente el valor $b=0$, sin embargo la aproximación que ofrece la serie (2) es, en este último caso, extremadamente lenta.

Acotación de la integral.

En el epígrafe anterior vimos que la fórmula de Taylor con resto permite encontrar relaciones de desigualdad entre la función y sus polinomios de Taylor. En ocasiones, estas desigualdades pueden ser una herramienta muy útil para aproximar una integral. La esencia del método consiste en encerrar el valor de la integral entre dos números que difieran poco entre sí. Veamos dos ejemplos de este procedimiento:

Ejemplo 2. Consideraremos nuevamente la integral del ejemplo anterior

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha\cos^2 t}\,dt,$$

que expresa la cuarta parte de la longitud de la elipse.

En lugar del desarrollo en serie de la función $f(u)=\sqrt{1-u}$, $u=\alpha\cos^2 t$, utilizaremos su fórmula de Taylor con resto:

$$\sqrt{1-u}=1-\frac{u}{2}-\frac{1}{8}u^2+r_2(u),\tag{3}$$

donde

$$r_2(u) = \int_0^u \frac{(u-z)^2}{2} f'''(z)dz .$$

Pero

$$f'''(u) = -\frac{3}{8}(1-u)^{-5/2} ,$$

luego

$$r_2(u) = -\frac{3}{16}\int_0^u (u-z)^2 (1-z)^{-5/2}\, dz . \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4), obtenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\alpha\cos^2 t}{2} - \frac{\alpha^2\cos^4 t}{8}\right) dt + \Delta = J + \Delta ,$$

donde $\Delta = \int_0^{\pi/2} r_2(\alpha\cos^2 t)dt$. El valor de la integral J lo podemos calcular (III.3 ejerc.), no así Δ, por tanto este último debemos acotarlo. Para lograr una acotación de Δ, es conveniente primero estimar $r_2(u)$:

Evidentemente $z \le u \le \alpha$, por tanto

$$1 \le (1-z)^{-5/2} \le (1-\alpha)^{-5/2} ,$$

entonces

$$-\frac{3}{16}(1-\alpha)^{-5/2}\int_0^u (u-z)^2\, dz \le r_2(u) \le -\frac{3}{16}\int_0^u (u-z)^2\, dz ,$$

lo que nos proporciona para $r_2(u)$ la acotación siguiente:

$$-\frac{(1-\alpha)^{-5/2}}{16}u^3 \le r_2(u) \le -\frac{u^3}{16} .$$

Usando las desigualdades anteriores obtenemos para Δ:

$$-\frac{\alpha^3(1-\alpha)^{-5/2}}{16}\int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt \le \Delta \le -\frac{\alpha^3}{16}\int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt$$

Pero

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt = \frac{5\pi}{32} ,$$

luego

$$-\frac{5\pi\alpha^3(1-\alpha)^{-5/2}}{512} \le \Delta \le -\frac{5\pi\alpha^3}{512} .$$

y

$$J-\frac{5\pi\alpha^3\left(1-\alpha\right)^{-5/2}}{512}\le I\le J-\frac{5\pi\alpha^3}{512}.$$

Es claro que el mejor valor de I que podemos tomar a partir de esta expresión es el punto medio del intervalo cuyos extremos son

$$J-\frac{5\pi\alpha^3\left(1-\alpha\right)^{-5/2}}{512}\quad \text{y}\quad J-\frac{5\pi\alpha^3}{512},$$

esto es

$$I\approx J-\frac{5\pi\alpha^3\left[1+\left(1-\alpha\right)^{-5/2}\right]}{1024}$$

y el error cometido no supera a la semilongitud de dicho intervalo: $\dfrac{5\pi\alpha^3\left[1+\left(1-\alpha\right)^{-5/2}\right]}{1024}$. Por ejemplo si α=0,25, entonces

$$I\approx 1{,}4677799\qquad \text{y}\qquad \frac{5\pi\alpha^3\left[1+\left(1-\alpha\right)^{-5/2}\right]}{1024}=\frac{5\pi}{65536}=0{,}0002397.$$

Ejemplo 3.Calculemos aproximadamente la integral

$$I=\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx.$$

De la fórmula de Taylor para la función seno (ejemplo 3 de III.4) se puede demostrar la desigualdad:

$$t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}<\operatorname{sen}t<t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}.$$

Colocando $t=\sqrt{x}$, obtenemos

$$x-\frac{x^{3/2}}{3!}+\frac{x^{5/2}}{5!}-\frac{x^{7/2}}{7!}<\operatorname{sen}\sqrt{x}<x-\frac{x^{3/2}}{3!}+\frac{x^{5/2}}{5!},$$

integrando esta doble desigualdad, obtenemos inmediatamente la estimación

$$J-\Delta<\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx<J,$$

donde

$$J=\int_0^1\left(x-\frac{x^{3/2}}{3!}+\frac{x^{5/2}}{5!}\right)dx=\frac{253}{420}\quad \text{y}\quad \Delta=\int_0^1\frac{x^{7/2}}{7!}dx=\frac{2}{9\cdot 7!}=\frac{1}{22680}.$$

Si tomamos como aproximación de J:

$$J\approx\frac{253}{420}-\frac{\Delta}{2}=\frac{253}{420}-\frac{1}{9\cdot 7!}=0{,}6023589,$$

el error, en valor absoluto, que se comete por esta aproximaciones menor que

$$\frac{\Delta}{2} < 0,0000221.$$

¿Podrías calcular el valor exacto de esta integral?

Métodos Numéricos. Una forma muy utilizada en el cálculo aproximado de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es mediante la realización de una subdivisión del intervalo $[a,b]$ en N partes iguales y en cada uno de estos subintervalos (de longitud pequeña) se sustituye la función por otra fácil de integrar, por ejemplo por un polinomio. De este modo la integral quedará aproximada por la suma de los valores de las integrales de las funciones aproximantes. Por supuesto, el proceso anterior debe ser tal que el error que se cometa no sea muy grande. Una forma de aproximar una función por un polinomio en un intervalo, es mediante el uso de los polinomios de interpolación. Describamos las ideas básicas de este tipo de procedimiento mediante el estudio de dos casos particulares: el método de los trapecios y el método de Simpson.

Método de los trapecios. Dividamos el intervalo $[a,b]$ mediante los puntos equidistantes:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b,$$

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}.$$

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ sustituimos el tramo de la función $y=f(x)$ por el segmento de recta que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$. Notemos que la sustitución de un arco de la curva por el segmento de recta secante, es equivalente a interpolar la función $f(x)$, por el polinomio (de primer grado) que pasa por los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ (ver Fig.30).

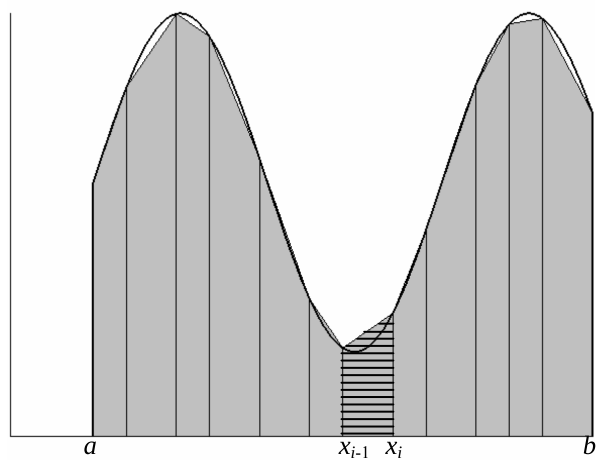

Fig.30

De esta forma la integral $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ se aproxima por el área del trapecio correspondiente (aparece rayado en la Fig.30), esto es,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}. \tag{5}$$

Finalmente la integral en todo el intervalo $[a,b]$ la aproximamos por la suma de las áreas de todos estos trapecios y obtenemos la fórmula denominada *de los trapecios*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} h\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2}\right). \tag{6}$$

Como en todo cálculo aproximado, una cuestión sumamente importante es poder determinar el error máximo que se puede cometer al sustituir el verdadero valor (desconocido) por el valor estimado. Así que el problema es, conocida la función y el intervalo de integración, encontrar una expresión que permita valorar, en dependencia de N, el error que se comete.

Supongamos que la función f tiene derivada de orden dos en los puntos del intervalo $[a,b]$. Consideremos primeramente el error en que se incurre cuando realizamos la aproximación (5). Para simplificar la notación, supongamos que el intervalo es $[0,h]$, entonces la aproximación adquiere la forma

$$\int_0^h f(x)dx \approx h\frac{f(0)+f(h)}{2}$$

y el error E cometido viene dado por

$$E = \int_0^h f(x)dx - h\frac{f(0)+f(h)}{2}.$$

Sea la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

entonces:

$$F(0)=0,\ \ F'(x)=f(x),\ \ F''(x)=f'(x),\ \ F'''(x)=f''(x) \ \ \text{y}$$

$$E = F(h) - \frac{h}{2}\left[f(0)+f(h)\right]. \tag{7}$$

Escribamos la fórmula de Taylor con resto, en potencias de x, para las funciones $F(x)$ y $f(x)$:

$$F(x) = \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 f''(t)dt,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \int_0^x (x-t) f''(t)dt.$$

Sustituyendo estos desarrollos en (7), obtenemos

$$E = F(h) - \frac{h}{2}\left[f(0)+f(h)\right] = \frac{1}{2}\int_0^h \left[(h-t)^2 - h(h-t)\right] f''(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^h \left(t^2 - ht\right) f''(t)dt.$$

Supongamos que la función $f(x)$ es tal que $\left|f''(x)\right| \le M$, $0 \le x \le h$, entonces (ver III.4 ejerc.3)

$$\left|E\right| \le \frac{M}{2}\int_0^h \left(ht - t^2\right)dt = \frac{Mh^3}{12}.$$

La expresión anterior nos brinda una acotación para el error que se comete en un intervalo de longitud h. Pero, para obtener la aproximación de la fórmula de los trapecios (6), el intervalo $[a,b]$ se ha dividido en N intervalos cada uno de longitud h, luego el error total E que se comete al aplicar (6) es la suma de los errores E_i cometidos al aplicar la aproximación (5) en cada uno de ellos. Si suponemos que la desigualdad $\left|f''(x)\right| \le M$ se cumple para todo x de $[a,b]$, entonces

$$|E| \leq \sum_{i=1}^{N} |E_i| \leq N \frac{Mh^3}{12},$$

Como $h = \dfrac{b-a}{N}$, la desigualdad anterior se convierte en

$$\boxed{|E| \leq \frac{M(b-a)^3}{12N^2},}$$

la cual brinda una manera sencilla de estimar el error máximo posible.

Ejemplo 4. Retomemos el cálculo de la longitud de la elipse analizado en los ejemplos 1 y 2 y calculemos, usando el método de los trapecios, la longitud de la elipse de semiejes 1 y b=0,5. Entonces $\alpha = 1 - b^2 = 0{,}75$ y la integral que se debe considerar es

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0{,}75\cos^2 t}\,dt.$$

En este caso

$$f(x) = \sqrt{1 - 0{,}75\cos^2 x},$$

luego

$$f''(x) = \frac{3}{4}\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-0{,}75\cos^2 x}} - \frac{9}{64}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\sqrt{\left(1-0{,}75\cos^2 x\right)^3}},$$

por tanto

$$|f''(x)| \leq \frac{21}{8}.$$

De modo que, si el intervalo $[0, \pi/2]$ se divide en N partes iguales, el error que se comete es

$$|E| \leq \frac{21(\pi/2)^3}{12\cdot 8N^2} = \frac{0{,}8478279}{N^2}.$$

Por ejemplo, si se divide el intervalo en N=20 partes, entonces el error que se comete al aplicar (6) es menor o igual que 0,00212 y el valor aproximado es:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}75\cos^2 t}\,dt \approx \frac{\pi}{80}\left[\frac{3}{2} + 2\sum_{k=1}^{19}\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{k\pi}{40}\right)}\right] = 1{,}21105.$$

En el método de los trapecios hemos sustituido, en cada subintervalo, la función por un polinomio de primer grado. Con el fin de mejorar la aproximación, podemos pensar en utilizar polinomios de grado superior, por ejemplo podríamos auxiliarnos de un polinomio de interpolación de grado 2, 3, 4, …, pero entonces, en cada subintervalo se necesita tener 3, 4, 5, … valores de la función. Veamos con detalle cómo podemos proceder para hacer uso del polinomio de interpolación de grado dos.

Método de Simpson. Supongamos que efectuamos un número par $N=2n$ de divisiones del intervalo $[a,b]$ y, para calcular el polinomio de interpolación, consideremos estos intervalos de dos en dos. Así por ejemplo, en los dos primeros intervalos tendremos los puntos x_0, x_1, x_2, donde $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$. El polinomio que interpola a $f(x)$ en esos tres puntos tiene la forma (ver I.2):

$$p(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\cdot h^2}\Delta^2 y_0 ,$$

donde $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$.

Consideremos entonces la aproximación

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\left(y_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\cdot h^2}\Delta^2 y_0 \right)dx .$$

Para calcular la integral anterior realicemos el cambio de variables $x=x_0+th$, con lo cual

$$x - x_0 = th, \qquad x - x_1 = (t-1)h, \qquad dx = hdt,$$

luego

$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx = \int_0^2 \left(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \right)hdt = h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{3} \right) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Aplicando el resultado obtenido a las restantes parejas de subintervalos, obtenemos finalmente la aproximación

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}),$$

o

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \right). \tag{8}$$

Con un procedimiento semejante se pueden utilizar polinomios de interpolación de grados superiores. Si por ejemplo, queremos utilizar el de grado 3, debemos considerar $N=3n$ e interpolar utilizando tres subintervalos consecutivos. En ese caso obtenemos la llamada *regla* 3/8 *de Newton*, cuya deducción proponemos al lector:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + f(x_{3n}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{3i}) + 3\sum_{i=1}^{n} f(x_{3i-1}) + 3\sum_{i=1}^{n} f(x_{3i-2}) \right). \tag{9}$$

Observación. Para las fórmulas (8) y (9) también pueden deducirse expresiones que permiten acotar el error que se comete (ver ejerc.4)

Ejemplo 5. En la tabla de Fig.31 se muestra el cálculo aproximado de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

por los tres métodos considerados.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,785398163397$$

N	Trapecios	Simpson	Newton(3/8)
6	0,784240766617	0,785397945234	0,785395862445
12	0,785108811711	0,785398160076	0,785398148469
18	0,785269562588	0,785398163105	0,785398162085
24	0,785325825437	0,785398163345	0,785398163163

Fig.31

Observación. Notemos que el cálculo aproximado de integrales puede resultar un recurso para encontrar aproximaciones del número π. Análogamente pudiera ser usado para el cálculo de logaritmos mediante la aproximación de integrales que produzcan estos valores.

Ejercicios

1. Calcula aproximadamente $\ln 2$ a partir de la igualdad

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Compara el resultado que se obtiene con los métodos de los trapecios y de Simpson.

2. Calcula aproximadamente:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$,

usando los métodos de los trapecios y de Simpson con $N=6$. Analiza el error máximo que se comete con la fórmula de los trapecios.

3. Prueba que:

a) La fórmula de Simpson es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual a tres.

b) Si una fórmula de integración aproximada es del tipo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx p_0 f(x_0) + p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2),$$

donde $x_j = x_0 + jh,\ j = 1,2$ y es exacta para todo polinomio de grado menor o igual a 2, entonces ésta es la fórmula de Simpson, esto es $p_0 = p_2 = h/3$, $p_1 = 4h/3$.

4. Prueba que el error E que se comete en la fórmula de Simpson (8) satisface la acotación:

$$|E| \le \frac{M\left(b-a\right)^5}{2880n^4}.$$

5. Justifica la regla 3/8 de Newton (fórmula (9)).

6. Calcula aproximadamente

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx,$$

Utilizando: a) el método de los trapecios, b) el método de Simpson. Estima el error que se comete.

7. Para la integral J encontrar una acotación de la forma $J_1<J<J_2$, de modo que J_2-J_1 sea menor que ε, si:

a) $\displaystyle J = \int_{10}^{11} e^{-1/x}dx$, $\varepsilon=0{,}01$; b) $\displaystyle J = \int_{4\pi}^{4\pi+0{,}1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Ejercicios Complementarios

1. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$, c) $\int (3x-5)^{10}dx$

d) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$, e) $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$, f) $\int_1^e \ln^4 x dx$,

g), $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ h), $\int \frac{3^x+1}{3^x-1}dx$ i) $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$,

j) $\int_0^a \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx,\ |a|<1$, k) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$, l) $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$,

m) $\int_0^\pi (x\cos x)^2\,dx$, n) $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$, ñ) $\int \operatorname{sen} x\cosh x dx$,

o) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\operatorname{sen} x dx$, p) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x dx$.

2. Halla una curva $y=f(x)$ tal que

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+6}{\sqrt{x}}$$

y pase por el punto (1,3).

3. Halla una curva $y=f(x)$ tal que $f''(x)=xe^x+2x+3$ y sea tangente a la recta $y=2x+3$ en el punto (0,3).

4. Halla las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y=\int_0^{2x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, b) $y=\int_{x^2}^1 (\ln t)^{10}\,dt$, c) $\int_{1/x}^{1/\sqrt{x}} \cos t^2 dt$.

5. Halla las abscisas de los puntos de extremo y de inflexión del gráfico $y=F(x)$, donde

$$F(x)=\int_0^x (t-1)^3(t-2)^4\,dt\,.$$

6. Prueba las igualdades siguientes:

a) $\int_0^1 (1-x)^m x^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$, $m,n=1,2,3,\ldots.$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\operatorname{sen} nx dx=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$, $n=1,2,3,\ldots.$

7. Prueba las desigualdades siguientes:

a) $1-\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int_0^1 e^{-x^n}dx<1, \quad n>1$, b) $1<\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$,

c) $1<\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx<1{,}1$.

8. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n en x, calcula

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx .$$

Sugerencia: Utiliza la fórmula de Taylor.

9. Prueba que las funciones $2\arctan(e^x)$, $\arctan(\operatorname{senh} x)$, y $2\arctan\left(\tanh\dfrac{x}{2}\right)$ son primitivas de la función $\dfrac{1}{\cosh x}$. ¿Cómo están relacionadas las funciones anteriores?

10. ¿Para cual valor de k el área de la figura acotada por la parábola $y=x^2+px+q$ y la recta $y=kx+b$ será mínima (p,q,b constantes, $b\geq q$)?

11. Prueba que el área de la figura acotada por las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$ y la catenaria $y=\cosh(x/c)$ es proporcional a la longitud de este arco.

12. Encontrar el área de la figura acotada por el arco de cicloide

$$x=a(t-\operatorname{sen} t), \quad y=a(1-\cos t), \quad 0\leq t\leq 2\pi .$$

13. Halla el área de la figura limitada por la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$.

14. Calcula el área de la figura limitada por la curva $y=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, el eje de abscisas y por dos rectas paralelas al eje de ordenadas que pasan por los puntos extremos de la función.

15. Encuentra el área limitada por las curvas

$$x^2+y^2=6, \ x^2+y^2=2x+2y, \ (x^2+y^2\leq 6).$$

16. Calcula la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^3=x^2$ situado dentro del círculo $x^2+y^2\leq 6$.

16. Halla el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de las abscisas y por las curvas $y=\ln(\cos x)$, $y=\ln(\operatorname{sen} x)$.

17. Prueba que el arco de la parábola $y=x^2/2p$ correspondiente al intervalo $0\leq x\leq a$ tiene la misma longitud que el arco de la espiral $r=p\varphi$ correspondiente al intervalo $0\leq r\leq a$.

18. Halla la longitud de la curva dada por la ecuación

$$y=\int_{-\pi/2}^{x}\sqrt{\cos x}\,dx, \quad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}.$$

19. Consideremos la hipérbola equilátera $x^2-y^2=1$ y denotemos $O(0,0)$, $A(1,0)$, $P(x,y)$ $P'(x,-y)$ y sea u el área del sector curvilíneo $OPAP'$. Prueba que $x=\cosh u$ y $y=\operatorname{senh} u$.

20. Sea $p>1$, $1/p+1/q=1$. Prueba, usando la interpretación de la integral como área, que para todo $a>0$ y $b>0$ se cumple la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Además, la igualdad tiene lugar solo cuando $b = a^{p-1}$.

21. Napier fundamentó su noción de logaritmo en la idea geométrica siguiente: Dados un segmento $AB = 10^7$ y una semirrecta CD (Fig.32). El punto P parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad que decrece proporcionalmente a su distancia hasta B. Otro punto Q se mueve desde C en dirección a D con velocidad uniforme 10^7, que coincide con la velocidad inicial del punto P. Napier llama a la distancia CQ el logaritmo de la distancia PB. Denota $PB = x$ y $CQ = y$ y verifica que $y = \text{Nlog}\, x = 10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right)$. Es decir, salvo un cambio de escala, Napier definió lo que hoy denominaríamos logaritmo en base $1/e$.

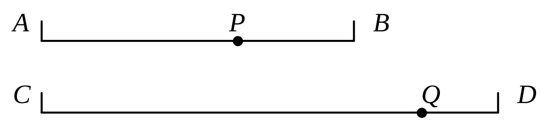

Fig.32

22. Una partícula se mueve sobre el eje OX animada de una aceleración $a(t) = 6t - 12$ m/s^2. Se sabe que en el instante inicial, $t_0 = 0$, la partícula se encuentra en reposo y en el origen de coordenadas.

a) Determina la velocidad y la posición de la partícula como función del tiempo.

b) ¿Dónde se encontrará la partícula en reposo?

c) ¿Cuándo se encontrará la partícula en el origen de coordenadas?

d) ¿Dónde se encuentra la partícula y en qué sentido se mueve cuando su aceleración sea nula?

Nota. Se define la aceleración en un instante t como $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

23. Un tubo fino se dobla en forma de circunferencia de radio R y sus extremos se sueldan para formar un aro. Calcula la masa del aro si su densidad lineal está dada por $\delta(s) = k \operatorname{sen}(s/2R)$. Se ha denotado por s a la longitud del arco medido desde el punto $(R, 0)$.

24. Considera un sistema formado por un resorte y una partícula fija a un extremo de éste. La partícula se separa de su posición de equilibrio y el resorte se estira una longitud A, se suelta la partícula y, según se observa, ella comienza a oscilar (Fig.33). Se sabe que la aceleración adquirida por la partícula bajo la acción del resorte es $a = -kx$, donde x es la abscisa de la partícula medida a partir de su posición de equilibrio:

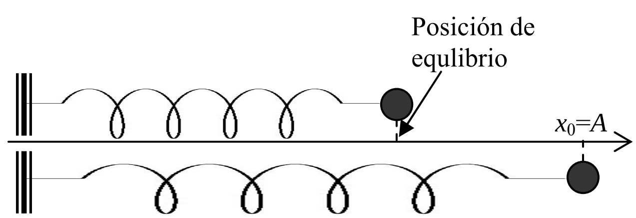

Fig.33

a) Determina la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.

b) ¿Dónde se encontrará la partícula en reposo y cuándo su velocidad será máxima?

25. Sea $y = f(x)$ una curva que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ a lo largo de la cual se mueve una partícula de masa unitaria bajo la acción de una fuerza variable F. Encuentra una fórmula integral que permita hallar el trabajo realizado por F al desplazar la partícula desde A hasta B.

NOTAS BIOGRÁFICAS

Abel, Niels Henrik (1802-1829) Matemático noruego de procedencia humilde. Estudió matemáticas de forma autodidacta y en la universidad de Cristianía, la actual Oslo. Su probado talento le ganó una beca de estudios por varios centros científicos europeos (1825-27). A su regreso a Noruega tuvo que trabajar dando clases privadas para ayudar a la familia en precaria situación económica. No obstante su enfermedad y corta vida, resolvió varios problemas difíciles del álgebra y el análisis matemático. Sus ideas abrieron la vía para el estudio de las estructuras algebraicas. En vida no fue justamente reconocido su mérito y postmorten (1830) le otorgaron el premio de la Academia de Ciencias de París por la creación de la teoría de funciones elípticas.

Arquímedes de Siracusa (c.285-212 a. C.) Sin duda el más famoso, prolífico e ingenioso de los sabios antiguos. Estudió en Alejandría y son populares sus hazañas como ingeniero militar y civil en su ciudad natal de Siracusa. Dejó su huella en la matemática, la mecánica, la física y la astronomía. En matemática creó una metodología eficaz para la medida de magnitudes geométricas y mecánicas. Introdujo varias curvas mecánicas para la resolución de diversos problemas. Su habilidad para los cálculos exactos o aproximados es objeto de leyendas. Conjugó como pocos en la historia de las ciencias, teoría y práctica, matemática y mecánica.

María Gaetana Agnesi (1718-1799) provenía de una familia milanesa acomodada y su padre se preocupó por proporcionarle tutores que supieron cultivar su talento natural, en especial para los idiomas y la matemática. En 1748 publicó el *Tratado de Análisis para el uso de la juventud italiana* que fue muy elogiado. En 1750 le fue ofrecido el puesto honorario de conferencista en la Universidad de Bologna y fue invitada para aceptar la cátedra de matemática. Sin embargo, después de la muerte de su padre, ocurrida en 1752, Agnesi decidió dedicarse por entero al trabajo de caridad en el cual gastó toda su fortuna muriendo en la miseria.

Bernoulli, Jacob (1654-1705) es el primero de una dinastía de geómetras ilustrados. Estudió teología en su ciudad natal Basilea. Aplicó las ideas de Leibniz en el estudio de las curvas, la sumación de series infinitas, en la mecánica y en el cálculo de probabilidades. Promovió el uso del cálculo de diferenciales y particularmente fueron exitosas sus charlas con el padre de Leonhard Euler y su hermano Johann. La Universidad de Basilea lo aceptó como catedrático de matemáticas aunque le molestaran algunas de sus opiniones liberales sobre el dogma cristiano. Era de un temperamento irascible, voluntarioso, agresivo y muy susceptible. Nunca pudo aceptar que su brillante hermano menor Johann lo pudiera aventajar como geómetra.

Bernoulli, Johann (1667-1748). Nació y estudió en Basilea, donde recibió su doctorado en Medicina. Su hermano mayor Jacob lo adentró en los misterios del nuevo cálculo. Desde 1695 fue profesor de matemáticas en la universidad de Groninga en Holanda. En 1705 regresó a Basilea donde se hizo cargo de la cátedra de matemáticas, vacante a la muerte de su hermano Jacob. Con su entusiasmo por el nuevo cálculo convenció a muchos para que se dedicaran a su desarrollo, particularmente a Leonhard Euler, al marqués de L’Hospital y a tres de sus cuatro hijos varones. Fueron tantos sus partidarios como sus adversarios en los múltiples desafíos en que se vio envuelto, la mayoría retos que el mismo lanzó a la comunidad científica. Su temperamento, su fanfarronería y su arrogancia le propiciaron la enemistad con varios de sus colegas. Su producción matemática es extensa, pero se destaca su correspondencia científica que consiste en unas 2 500 cartas donde aparecen múltiples ideas originales.

Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857) Fue un alumno destacado de la Escuela Politécnica de París. Durante varios años mientras trabajaba como ingeniero investigaba con perseverancia en temas de matemática. En 1815 fue designado profesor asistente de análisis en la Escuela Politécnica y al año siguiente ganó el Gran Premio de la Academia Francesa por un trabajo sobre ondas. En 1816, tras la restauración de los Borbones, ganó un puesto en la Academia de Ciencias. Cauchy fue un fanático religioso, muy arrogante y esta actitud le causó muchos problemas. En las nuevas condiciones políticas en Francia se exigía hacer un juramento de lealtad, a lo cual Cauchy se negó, por lo que perdió todas sus ocupaciones. En 1831 se exilió voluntariamente y viajó a Turín, más tarde a Praga. Finalmente retornó a París en 1838 y recuperó su puesto en la Academia, no así los de profesor, por estar sujetos al juramento. Estas posiciones las recuperó en 1848. Tiene trabajos en prácticamente todas las ramas de las matemáticas de su época. Se recogen 789 trabajos científicos de su autoría, sus obras completas fueron publicadas en 27 volúmenes. Después de Euler debe ser el más productivo geómetra de todos los tiempos.

Cavalieri, Bonaventura (1598-1647) monje y matemático italiano cuya excelente preparación cultural le permitió leer a los matemáticos antiguos: Arquímedes, Apolonio, Papus. Conoció a Galileo, quien durante algún tiempo fue su consejero científico. Ocupó la cátedra de matemática en la Universidad de Bologna. Desarrolló profundamente el método de los indivisibles para el cálculo de áreas y volúmenes. Sus trabajos ejercieron una gran influencia en la formación del cálculo infinitesimal.

De Moivre, **Abraham** (París, 1667-Londres, 1754) pasó 5 años en una academia de religión protestante en Sedán y estudió después lógica en Saumur. Con la expulsión de los hugonotes, el protestante De Moivre emigró a Inglaterra en 1685. Se convirtió en tutor privado de matemáticas y esperó largamente para ocupar una cátedra de matemáticas, pero siendo extranjero estaba en seria desventaja. Fue elegido miembro de la Royal Society desde 1697. A pesar de la eminencia científica de De Moivre, sus resultados más importantes no fueron reconocidos por sus contemporáneos y murió en la pobreza.

Euler, Leonhard (Basilea, 1707-San Petersburgo, 1783) Estudió matemática elemental con su padre y otros profesores particulares como Johann Bernoulli. Su vida la podemos dividir en cuatro etapas: 1ª. Formación general en Basilea (hasta 1727). 2ª. Experiencia profesional en Rusia (1727-1741) 3ª. Madurez científica en Berlín (1741-1766) y 4ª. Vejez productiva en San Petersburgo (1766-1783). Es el más productivo de todos los matemáticos. Su ***Opera Omnia*** tendrá 87 vols. con cerca de 900 trabajos en todas las ramas de las ciencias matemáticas, puras y aplicadas; escribió un promedio de unas 800 pags. anuales. Tuvo 13 hijos (solo sobrevivieron la infancia 5) y 26 nietos a quienes les leía la Biblia y les hacía juguetes mecánicos y títeres para su entretenimiento. Fue quien ganó más premios de la Academia de Ciencias de París con 13. Poco después de su llegada a San Petersburgo, con poco más de 60 años, queda completamente ciego, pero en este período produce casi la mitad de toda su monumental obra con la ayuda de sus hijos y de otros miembros de la academia. Paradójicamente una de las obras que culmina estando ciego es su ***Dióptrica*** en tres tomos. Fue miembro de casi todas las Academias de Ciencia y sociedades científicas de su época.

Fermat, Pierre (1601-1665) Estudió derecho en la universidad de Toulouse, ciudad donde pasó el resto de su vida, ganándose una reputación de excelente abogado. Fue consejero del Parlamento y tuvo oportunidad de dedicarse a sus aficiones principales, la lectura y la resolución de problemas matemáticos. En vida no publicó casi nada sobre matemática, sólo sus innumerables cartas a los sabios de la época, como Pascal, Roberval, Descartes, Huygens, Wallis, Cavalieri y Torricelli, entre otros muchos, sirvieron como prueba de su sagacidad y consagración, que le valieron ser considerado "el gran geómetra" del siglo XVII. Son célebres sus trabajos sobre teoría de números, geometría y cálculo de magnitudes. Su hijo Samuel recopiló sus manuscritos matemáticos y en 1679, 14 años después de su muerte, logró al fin su publicación.

Galilei, Galileo (1564-1642) Nació y estudió en la universidad de Pisa, donde fue profesor antes de pasar a la Universidad de Padua. En 1610 recibió invitación de los Médicis en Florencia, para ejercer como matemático de la corte. Fue miembro fundador de la *Academia de los Linces* en Roma. Escribió varios trabajos sobre ingeniería militar, además de sus famosos trabajos sobre mecánica y astronomía. En 1632 fueron publicados sus *Diálogos sobre los dos principales sistemas del mundo* (el de Tolomeo y el de Copérnico), que le llevaron ante la Inquisición. Galileo fue obligado a abjurar de la teoría copernicana y se le prohibió publicar algo más. Consiguió que en Holanda le publicaran sus *Discursos y demostraciones matemáticas, sobre dos nuevas ciencias* (1638), donde argumentó en contra de la física de Aristóteles y abrió el camino para la dinámica newtoniana.

Gauss, **Carl Friedrich** (1777-1855) Estudió en la Universidad de Gotinga matemáticas y filología. A los 19 años resuelve el problema clásico de cuáles polígonos regulares pueden construirse con regla y compás decidiéndose definitivamente por la matemática. También a partir de ese momento comienza a llevar su *Diario* científico donde a lo largo de muchos años anotaría sus resultados más importantes. Entre los 19 y 21 años escribió su primer libro *Disquisiciones aritméticas*, que convirtió a la teoría de números en una ciencia unificada y sistemática. En 1807 obtuvo la cátedra de Astronomía en la Universidad de Gotinga y la dirección de su observatorio astronómico, permaneciendo en esos cargos hasta el final de su vida. Los intereses de Gauss en la matemática fueron extraordinariamente amplios y en todas las ramas que trabajó dejó una huella indeleble. Sin embargo, su influencia en sus contemporáneos se vio limitada, ya que Gauss publicó poco y tardíamente, no tenía discípulos directos y su correspondencia con los colegas matemáticos era mínima. Después de su muerte, por iniciativa del Rey de Hannover, fueron acuñadas monedas en las que se le calificaba *Príncipe de los matemáticos*, apelativo que hasta hoy permanece vinculado a su nombre.

Halley, **Edmund** (1656-1742) Astrónomo, geofísico y matemático inglés. Desde 1720 fue director del Observatorio de Greenwich. Fue amigo de Newton y se encargó de la primera edición de sus *Principios de Filosofía Natural*. Tradujo numerosas obras de los matemáticos clásicos griegos. Realizó aportes en aritmética, geometría y cálculo de probabilidades. En 1705 predijo la aparición para 1758 del cometa que actualmente lleva su nombre.

Huygens, Christian (1629-1695) nació en una familia holandesa importante. Estudió filosofía en la Universidad de Leyden y fue diplomático. Sus ocupaciones le permitieron establecer relaciones y posteriormente mantener correspondencia con varios científicos europeos. Realizó varios descubrimientos en astronomía, entre ellos estableció la verdadera forma de los anillos de Saturno. Construyó varios relojes de péndulo con el objetivo de determinar la longitud geográfica en el mar. Su tratado sobre los relojes de péndulo constituyó una obra clave en el desarrollo de las nuevas ideas científicas. Participó en la organización de la Academia de Ciencias de París y ejerció como su primer presidente. Huygens influyó en la dedicación a las Ciencias Matemáticas de varios eruditos, entre ellos Leibniz y Jacob Bernoulli.

Kepler, Johann (1572-1630) nació en una pueblo pequeño de sólo unos 200 habitantes en Württemberg. El padre era un soldado mercenario que abandonó a seis hijos muy pequeños. Su infancia y adolescencia fueron difíciles, pero la madre consiguió le dieran una beca para estudiar en la universidad de Tubinga, donde recibió una formación excelente en matemática y astronomía. En 1596 escribió su primera obra donde argumentaba matemáticamente la teoría heliocéntrica de Copérnico. Trabajó con el astrónomo Tycho Brahe en Praga y tras la muerte de este, en 1601, se convirtió en *Matemático Imperial*. En 1609 aparece su *Nueva Astronomía* donde expone dos de las leyes universales del movimiento de los planetas y en 1619 publica la tercera en su *Armonía de los Mundos.* Sus ideas originales sobre la medida de áreas y volúmenes las hizo imprimir entre 1615 y 1616; su lenguaje claro y su escritura en alemán ayudó a su popularidad. Los últimos años de su vida los pasó protegiendo a la madre acusada de brujería y a la vez defendiéndose de los ataques religiosos contra las “herejías” científicas de su astronomía. Murió en la pobreza tras las amarguras por la falta de reconocimiento.

Lagrange, Joseph Louis (1736-1813) nació en Turín de una familia de ascendencia gala. Estudió en la Universidad y desde los 17 años fue profesor en la escuela de artillería de Turín. Junto a sus alumnos en Turín creó una sociedad científica que pronto se convirtió en una Academia de Ciencias. Cuando Euler regresó a San Petersburgo, Federico El Grande le otorgó la plaza en la Academia de Ciencias de Berlín y de 1766 a 1787 fue su Presidente. A la muerte de Federico, fue invitado por Louis XVI a París donde permaneció de 1787 hasta su muerte. Fue profesor de la Escuela Normal primero y desde 1797 de la Escuela Politécnica. Tenía una amplísima cultura matemática y sus obras tocan temas disímiles de la mecánica, la geometría, la teoría de ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, la teoría de funciones analíticas, el álgebra, la teoría de números, la astronomía y de otros dominios del saber. Tuvo un papel importante en el perfeccionamiento de la educación en época de Napoleón, que lo premió por toda su labor científica en Francia.

Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646-1716) nació en Leipzig y allí estudió filosofía y derecho. Se interesó por casi todo el saber de su tiempo. En 1671 retomó una idea de Pascal y construyó una máquina de calcular. En el curso de este trabajo se interesó por el estudio formal de los algoritmos y de ahí surgió su idea de crear un algoritmo universal para la solución de cualquier tipo de problema. Durante su estancia en París, entre 1672 y 1676, como embajador del duque de Hannover se relacionó con Huygens quien le dio a conocer los trabajos matemáticos contemporáneos. Se cree que ya a fines del 73 obtuvo sus primeros resultados originales del cálculo con diferenciales. A partir de 1676 y hasta su muerte en 1716 fue bibliotecario y asesor jurídico del Duque de Hannover. Sistematizó el uso de muchos términos matemáticos que todavía hoy usamos como función, diferencial, ecuación diferencial, algoritmo, abscisa, ordenada y otros. También publicó obras sobre Pedagogía, Paleontología, Biología, Derecho, Política y Lingüística. La polémica sobre la prioridad del cálculo lo afectó terriblemente. Murió casi en la miseria y se dice que su sirviente fue el único que despidió a este ilustrísimo pensador.

L'Hôpital, **Guillaume-François-Antoine Marqués de** (1661-1704) de origen aristocrático, fue oficial del ejército durante su juventud, pero abandonó la carrera militar debido a problemas con la visión. Fue un matemático competente que realizó trabajos en análisis matemático y geometría. Muy impresionado por las posibilidades que el nuevo cálculo de Leibniz ofrecía y el conocimiento que del mismo tenía el joven Johann Bernoulli, lo contrató como su maestro. Utilizando como base las notas de las clases y otras informaciones brindadas por su maestro, L'Hôpital publicó (sin que apareciera explícitamente como autor) el primer libro en la historia sobre análisis infinitesimal.

Maclaurin, Colin (1698-1746) matemático escocés. Comenzó sus estudios a la edad de 11 años en la Universidad de Glasgow. Al año siguiente, a través de una copia de los *Elementos* de Euclides, se adentró en el mundo de la matemática. A los 14 años Maclaurin recibió su primer título universitario para lo cual defendió una tesis en la cual desarrollaba las teorías de Newton, algo conocido por pocos en la época. Entre 1717 y 1722, trabajó como profesor de matemáticas en la Universidad de Aberdeen. Entre 1722 y 1726 vivió en Francia y desde 1726 fue profesor en la Universidad de Edinburgo. Maclaurin fue un gran defensor de las ideas matemáticas y físicas de Newton. Fue elegido miembro de la Royal Society durante una visita a Londres. Luchó por ampliar la Medical Society of Edinburgh de modo que incluyera otras ramas del conocimiento. Después de su muerte, esta sociedad se convirtió en la Royal Society of Edinburgh. Dos años después de su muerte se publicó un tratado de álgebra suyo, que fue bastante popular.

Napier, John (1550-1617) nació y vivió en Escocia, donde con el título de Barón de Murchiston administraba sus extensas propiedades. Tuvo una participación activa en los acontecimientos políticos y religiosos de su época. Se ocupó en probar que el Papa era el Anticristo, pero su entretenimiento preferido era el estudio de las Ciencias Matemáticas. Dedicó una parte importante de su vida a inventar los logaritmos y confeccionar las tablas correspondientes. Su obra principal *Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos,* se publicó en 1614. Aplicó los logaritmos a la trigonometría tanto plana como esférica. En su *Rabdología* publicada en 1617 introdujo otras invenciones para ayudar a los cálculos de extracción de raíces y usar fórmulas de trigonometría esférica.

Newton, Isaac (1643-1727) es uno de los más célebres matemáticos, que además dejó su impronta en la mecánica, la astronomía, la alquimia y ante todo, en la física. Tuvo desdichas y penurias en su niñez, no obstante, consiguió recibir una formación adecuada. Fue titular de la cátedra Lucasiana en 1669, miembro de la Royal Society desde 1672 y su Presidente desde 1703. Además desde 1669 fue el Director de la poderosa *Casa de la Moneda*. En 1705 recibió un título nobiliario y a su muerte, se le despidió con un sepelio nacional suntuoso en la Abadía de Westminster. Su obra más influyente *Principios matemáticos de la filosofía natural* fue publicada a mediados de 1687. Hoy no existen dudas acerca de la prioridad de Newton en la concepción del *Nuevo Cálculo*. No obstante, ha sido confirmado que Leibniz no sólo se le adelantó en la publicación de una versión independiente, sino que su exposición fue la más eficaz y rotunda. A pesar de la antipatía que provocaron su neurastenia y sus acciones abominables, los méritos de Newton como científico moderno son indiscutibles.

Roberval, Gilles Personne de (1602-1675) Desarrolló sus conocimientos matemáticos de manera autodidacta. Llegó a ser profesor de matemáticas en el Collège de France desde 1634. Obtuvo resultados importantes sobre mecánica, astronomía y física. Desarrolló el método de los indivisibles, los infinitesimales y los métodos cinemáticos para el cálculo de cuadraturas, cubaturas y hallazgo de tangentes. Inventó varios instrumentos astronómicos y las llamadas "pesas de Roberval". Desde 1666 fue miembro de la Academia de Ciencias de Paris.

Stevin, Simon (1548-1620) Matemático e ingeniero holandés que en su juventud trabajó como calculista. Enseñó en la Universidad de Leyden y trabajo como ingeniero militar. Realizó importantes aportes a la mecánica. En su obra *La Décima* expuso sus ideas sobre el uso de las fracciones decimales, aún desconocidas en Europa. Estudió la existencia de las raíces de las ecuaciones, considerando el caso de raíces negativas, también propuso métodos para su cálculo aproximado.

Taylor, Brook (1685-1731) Matemático y filósofo inglés. Miembro de la Royal Society y su secretario desde 1724. Poseía una amplia cultura matemática y sus trabajos fundamentales son en análisis matemático, mecánica y balística. En 1712 encontró el desarrollo de una función en serie de potencias que actualmente lleva su nombre, aunque otros desarrollos semejantes eran conocidos por sus contemporáneos. Su gran afición por la música lo motivó a estudiar matemáticamente el problema de la vibración de una cuerda, para lo cual desarrolló el método de las diferencias finitas.

Wallis, John (1616-1703) matemático inglés uno de los fundadores de la Royal Society. Se graduó en teología en la Universidad de Cambridge, por lo que la matemática la estudió en forma autodidacta. Desde 1649 profesor de geometría en la Universidad de Oxford. Es el primer matemático inglés en interesarse por el análisis infinitesimal. Su obra fundamental, *Aritmética del Infinito*, desempeño un papel importante en la prehistoria del cálculo integral, desarrollando de manera original el método de los indivisibles de Cavalieri. Realizó importantes contribuciones a la geometría, la aritmética y los cálculos aproximados. Introdujo el símbolo ∞ y algunos términos actuales de la matemática como mantisa, interpolación. No proporcionó ninguna demostración de sus numerosos e importantísimos resultados, las cuales fueron realizadas posteriormente. Ejerció influencia en Barrow y Newton.