Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Ejercicios Resueltos 2

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Halle el cociente incremental para $y = 2x^3 - x^2 + 1$ en $x_0 = 1$. Analice a qué se aproxima este cociente cuando el incremento se hace infinitamente pequeño.

Respuesta

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(1) &= \frac{]2(1+\Delta x)^3 - (1+\Delta x)^2 + 1] -]2(1)^3 - (1)^2 + 1]}{\Delta x} \\
&= 2(\Delta x)^2 + 5\Delta x + 4 \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 4 = f'(1).
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Calcule las derivadas de las funciones siguientes e indique para qué valores es válida la expresión obtenida:

a) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

b) $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $y = \arctan(x^5 - 3x^4)$.

Respuesta

a) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}} \Rightarrow y' = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{x(1+\sqrt{2x})^2}, \quad x > 0.$

b) $y = e^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ para $x \in \mathbb{R}$.

c) $y = \arctan(x^5 - 3x^4) \Rightarrow y' = \dfrac{5x^4 - 12x^3}{1 + (x^5 - 3x^4)^2}$,
$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ x : 1 + (x^5 - 3x^4)^2 = 0 \right\}$.

Ejercicio 3

Calcula las derivadas de las función hiperbólica $y = \operatorname{senh} x$ y de su inversa $y = arcsenhx$.

Respuesta

La derivada buscada es

$$y = \operatorname{senh} x \Rightarrow y' = \cosh x$$

Para las inversas se utiliza la propiedad de la derivada de la función inversa

$$y = arcsenhx \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh(arcsinh(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ejercicio 4

Demuestre que la función $y = xe^{-x}$ satisfacen la ecuación diferencial ordinaria

$$xy' = (1-x)y.$$

Respuesta

$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x}(1-x)$ que satisfacen $xy' = (1-x)y$.

Ejercicio 5

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable, calcule la primera y segunda derivada de g en las situaciones siguientes:

a) $g(x) = f(x^2)$.

b) $g(x) = f(f(x))$.

c) $g(x) = \ln^2 f(x^2 + 1)$.

Respuesta

a) $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2) \Rightarrow g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$.

b) $g(x) = f(f(x))$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g'(x) = f'(x)f'(f(x)) \\
&\Rightarrow g''(x) = f'(f(x))f''(x) + (f'(x))^2 f''(f(x))
\end{aligned}$$

c) $g(x) = \ln^2 f(x^2 + 1)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g'(x) = \frac{4xf'(x^2+1)\ln f(x^2+1)}{f(x^2+1)} \\
&\Rightarrow g''(x) = \frac{1}{h(x)^2}(-8x^2\left(-1 + \ln\left[h(x)\right]\right) f'\left[1+x^2\right]^2 + 4h(x)\ln\left[h(x)\right]\left(f'\left[1+x^2\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2x^2 f''\left[1+x^2\right]\right))
\end{aligned}$$

Siendo $h(x) = f(x^2 + 1)$.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.