# Examen final Algebra I Curso 2010-2011

① Diga V o F Justificando su respuesta.

a) ___ El número que resulta de las operaciones

$$\frac{16 \operatorname{cis}\frac{17\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{(i-\sqrt{3})^4}$$

posee raíces cuartas que no son raíces cuadradas.

b) ___ La Irreducibilidad de un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$ en $\mathbb{Q}[x]$ se caracteriza por la no existencia de raíces en $\mathbb{Q}$.

c) ___ El resultado de $\dfrac{\operatorname{mcd}(p(x), p'(x))}{p(x)}$ puede expresarse como suma de la misma cantidad de factores simples en $\mathbb{C}[x]$ como raíces complejas diferentes tiene $p(x)$.

d) ___ Sea $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{array}\right)$ la matriz ampliada de un SEL tal que para ciertos valores de $a, b, c$ dicho SEL es resoluble por Cramer.

② · Sea $f(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 3ax + b$ ∧ $g(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + a$.

Demuestre que los únicos valores para que mcd $(f(x), g(x))$ tenga grado 3 son · $a=4$ ∧ $b=8$.

2.1) Para dichos valores descomponga totalmente $f(x)$ en factores irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ ∧ $\mathbb{C}[x]$.

③ · ~~Rango~~ Analice el rango de la matriz · $\begin{pmatrix} -1 & a & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & b \\ a & a & b+2 \end{pmatrix}$ para los valores reales de los parámetros $a$ ∧ $b$.

a) Considere que dicha matriz es la matriz del SEL $AX=B$ donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ∧ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5a+6b+3 \end{pmatrix}$

Bajo qué condiciones de $a$ ∧ $b$ · dicho SEL tendrá solución.

b) ¿Podrá ser única la solución?

(1) a) V

$$\frac{16 \operatorname{cis} \frac{17\pi}{3} \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2 \operatorname{cis} \cdot \frac{5\pi}{6}\right)^4} = \frac{16 \operatorname{cis} \frac{16\pi}{3}.}{16 \operatorname{cis} \cdot \frac{20\pi}{6}} = \operatorname{cis} 2\pi = 1$$

raices cuadrades de 1 $\longrightarrow$ $\operatorname{cis} \pi$ a $\operatorname{cis} 2\pi$.

raices cuartas de 1 $\longrightarrow$ $\operatorname{cis} \pi$, $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{cis} 2\pi$.

b) F

$p(x) = (x^2+1)(x^2+2) \Rightarrow p(x) \in Q[x]$ : $p(x)$ R $Q[x]$ a no posee raices en $Q$.

c) $\frac{\text{mcd}\,(p(x), p'(x))}{p(x)}.$ $= \frac{\cancel{(x-\alpha)^{k-1}}}{(x-\alpha)^{k} \cdots (x-\alpha_n)}$ $- \frac{A}{x-\alpha} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Det} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$\Rightarrow$ SEL resol. por Cramer $\Leftrightarrow$ $a \neq b \neq c$.

$$\cancel{x^5} - 2x^4 + 8x^2 - 3ax + b \quad \Big| \; 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + a$$

$$\cancel{x^5} - \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}ax \qquad \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$-\frac{5}{2}\cancel{x^4} + 2x^3 + \cancel{5x^2} - \frac{7}{2}ax + b$$

$$\frac{5}{2}\cancel{x^4} + \frac{5}{4}x^3 - \cancel{5x^2} + \frac{15}{2}x + \frac{5}{4}a$$

$$\frac{13}{4}x^3 + \left(\frac{15-7a}{2}\right)x + \frac{4b+5a}{4}$$

ch.

$$\frac{-52-60+7a}{13}$$

$$-\frac{(112-7a)}{13}$$

$$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + a \quad \Big| \; \frac{13}{4}x^3 + \left(\frac{15-7a}{2}\right)x + \frac{4b+5a}{4}$$

$$-\cancel{2x^4} - 4\frac{(15-7a)}{13}x^2 - 2\frac{(4b+5a)}{13}x \qquad \frac{8}{13}x + \frac{4}{13}$$

$$\cancel{x^3} - \left(\frac{112-28a}{13}\right)x^2 + \left(\frac{78-8b-10a}{13}\right)x + a$$

$$-\cancel{x^3} - \frac{2(15-7a)}{13}x - \frac{4b+5a}{13}$$

$$-\frac{(112-28a)}{13}x^2 + \left(\frac{48-8b+4a}{13}\right)x + \frac{8a-4b}{13}$$

$$-\frac{(8b+10a)}{13} + 6$$

$$\frac{-(8b+10a)+78}{13}$$

$$\frac{78-8b-10a}{13} + \frac{14a-30}{13}$$

$$\frac{\quad}{13}$$

$\Rightarrow$ gr mcd $= 3 \Leftrightarrow$

$$112 - 28a = 0$$
$$-8b + 48 + 4a = 0$$
$$-4b \quad + 8a = 0$$

$\Leftrightarrow a = 4 \wedge b = 8.$

a) Sea wed $= \frac{13}{4}x^3 + \left(\frac{15-7a}{2}\right)x + \frac{46+5a}{2}$ $/\cdot 4$.

$= 13x^3 + (30-14a)x + 46+5a$ . $/ : 13$.

$= x^3 - 2x + 4$ .

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x + 4 \; (g(x))$ : gr $g(x) = 2$.

$f(x) = (x+2)(x^2-2x+2) \cdot g(x)$ .

Sea $\cancel{x^5} - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8 \quad | \; x^3 - 2x + 4$ .

$\qquad x^2 - 2x + 2$ .

$-\cancel{x^5} + 2x^3 - 4x^2$

$-\cancel{2x^4} + 2x^3 + \cancel{4x^2} - 12x + 8$ .

$\cancel{2x^4} - \cancel{4x^2} + 8x$

$2x^3 - 4x + 8$

$-2x^3 + 4x - 8$

$0$ .

$\Rightarrow \quad f(x) = (x+2)(x^2-2x+2)^2$ . $\longrightarrow \mathbb{R}[x]$.

Sea $x^2 - 2x + 2 \Rightarrow D = 4 - 8 = -4 = 4i^2$.

$\Rightarrow x = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x+2)(x-(1-i))^2(x-(1+i))^2 \longrightarrow \mathbb{C}[x]$

(5)
$$\begin{pmatrix} -1 & a & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & b \\ a & a & b+2 \end{pmatrix}$$

$$M_3'.\quad \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -2b \qquad \overset{M_3''}{\begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 0 & 2 & b \\ a & a & b+2 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & a(a+1) & 3a+b+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & b \\ a(a+1) & 3a+b+2 \end{vmatrix}$$

$$= 6a + 2b + 4 - ab(a+1)$$

si $b=0 \Rightarrow M_3' = 0 \Rightarrow rg = 2$.

si $b=0 \Rightarrow M_3'' \neq 0 \Rightarrow rg = 3$.

si $b=0$.

$$Det = 6a+4$$

$$\Rightarrow Det = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

Luego.

$rg\ A = 2 \Leftrightarrow b=0 \wedge a=-\frac{2}{3}$. $\vee\ b \neq 0$

$rg\ B = 3 \Leftrightarrow b \neq 0 \vee a \neq -\frac{2}{3} \wedge b = 0$

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 3 & 1 \\ 0 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & b & 3 \\ a & a & b+2 & 5a+6b+3 \end{array}\right)$$

Sea $\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Sea $\begin{vmatrix} -1 & a & 3 & 1 \\ 0 & 2 & b & 3 \\ 0 & a & b & 3 \\ a & a & b+2 & 5a+6b+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 & 1 \\ 0 & 2 & b & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & a & b+2 & 5a+6b+3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ a & b+2 & 5a+6b+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 3a+b+2 & 6a+6b+3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & 3 \\ 3a+b+2 & 6a+6b+3 \end{vmatrix} = 6ab+6b^2+\cancel{3b}-9a-\cancel{3b}-6$.

$= 6ab+6b^2-9a-6$

$\cancel{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxx}}$

$= a(6b-9)+6b^2-6$.

Luego para que SEL tenga

Sol $\Rightarrow rg\bar{A}=3 \iff \text{Det}\,\bar{A} \neq 0$

$\iff$

$0 = a(6b-9)+6b^2-6$.

$\iff$

$\Rightarrow$

$a \neq \dfrac{2(1-b)(1+b)}{(2b-3)}$

$a \neq \dfrac{\cancel{6}(1-b^2)}{\cancel{3}(2b-3)}$. $\Rightarrow rg\,\bar{A} = 4$

$a = \dfrac{2(1-b)^2}{2b-3} \Rightarrow rg\,\bar{A} = 3$