TIMS: Álgebra

Sesión 1

Polinomios y sus propiedades

Lic. David Balbuena Cruz
Msc. Wilfredo Morales Lezca
Alicia Pérez Figueredo (AAyudt.)
Juliet Bringas Miranda (AAyudt.)
Pedro Alejandro Rodríguez S.P (AAyudt.)

Licenciatura en Matemática

Curso 2020-2021

Introducción

En la vida cotidiana, ubicamos a la matemática en cualquier rama de la ciencia y disfrutamos de todos los beneficios alcanzados gracias a ella. Aunque no siempre se reflexiona sobre la dedicación y el esfuerzo que hay trasfondo. Por ejemplo, en arquitectura las curvas que forman los cables de un puente se determinan a través de funciones polinomiales (Figura 1)

Figura 1: Puente Golden Gate

La resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios, está entre los problemas más antiguos de la matemática. Algunos polinomios como $f(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna solución (o raíz) que sea un número real. Sin embargo, si nosotros ampliamos el conjunto de las raíces posibles a los números complejos, entonces todo polinomio (no constante) tiene una raíz: ese es el enunciado del **teorema fundamental del álgebra**.

Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta cuarto grado desde el siglo XVI . Pero las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores . Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se ocupa del estudio detallado de las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios. Cabe también señalar que la elegante y práctica notación que usamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

Gracias a los polinomios, es posible desarrollar diferentes cálculos y aproximarse a una función derivable. Química, Física, Economía, Ciencias Sociales, ect, en todas estas ramas están presentes los polinomios en mayor o menor medida. Por ese motivo consideramos importante estudiar a los polinomios y sus propiedades básicas.

En esta sesión usted aprenderá:

- La definición de polinomio
- El papel de la indeterminada
- Algunas clases de polinomios
- Cómo se definen las operaciones aritméticas en este conjunto

Polinomios

El prefijo *poli* significa “muchos” y el sufijo *nomio* alude a la palabra término, por ende *polinomio* significa “muchos términos”. El adjetivo *polinómico*, por su parte, se aplica a los objetos matemáticos que se pueden expresar como polinomios. También podríamos decir que un polinomio es un expresión algebraica compuesta de dos o más *monomios*. Estas definiciones son correctas pero están formuladas desde un punto de vista lingüistico, y nuestro principal interés es definir a los polinomios en el contexto de la Matemática. Así pues:

DEFINICIÓN 1

Llamamos **polinomio** en la variable x de $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$), a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

donde $n \in \mathbb{N}$, y $a_i \in \mathbb{K}$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n$.

Las constantes a_i se llaman **coeficientes**, y en particular a_0 recibe el nombre de **término independiente**. Al mayor valor de i donde $a_i \neq 0$, se le llama **grado** de $p(x)$ y lo denotamos por $\operatorname{gr}(p(x))$. Un caso especial es el grado del **polinomio nulo** $p(x) = 0$, por su forma única decimos que es de grado indefinido. Al coeficiente a_n, con $n = \operatorname{gr}(p(x))$, le llamaremos **coeficiente principal**. Si el coeficiente principal principal a_n es igual a 1, entonces diremos que el polinomio $p(x)$ es **mónico**.

Por último, denotamos por $\mathbb{K}_n[x]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado menor estricto que n.

EJEMPLO 1. El polinomio $p(x) = -3 + x - 4x^2$ es de grado 2, su término independiente es $a_0 = -3$ y el coeficiente principal es $a_2 = -4$. ¿Es $p(x)$ mónico? no, porque su coeficiente principal a_2 es diferente de 1. Por otra parte, $q(x) = 1 + x^{-1} + x^2$ NO es un polinomio pues tiene una variable con exponente negativo.

Los polinomios también pueden clasificarse según sus grados, aunque volvemos a señalar que el polinomio nulo $N(x) = 0$ es de grado indefinido. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según se presenta en el Cuadro 1. Observen que a partir del grado 3 ya es más factible nombrar a los polinomios por su grado específico. De otra forma podría crear confusión a la hora de formular un teorema o una demostración.

Polinomio	Grado	Forma Estándar	Ejemplo
Constante	0	$a_0(\text{con } a_0 \neq 0)$	5
Lineal	1	$a_1x + a_0(\text{con } a_1 \neq 0)$	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0(\text{con } a_2 \neq 0)$	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0(\text{con } a_3 \neq 0)$	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0(\text{con } a_n \neq 0)$	$x^n - 1$

Cuadro 1: Clasificación de los polinomios según sus grados

Respecto a la definición de polinomio, aún nos queda por responder una pregunta:

¿Qué papel juega la indeterminada x?

Cada vez que le asignamos un valor a x, digamos por ejemplo $x = 1$, $x = 1/4$ o $x = \sqrt{2}$ obtenemos que un polinomio $p(x)$ actúa como función y se convierte en otro valor numérico, lo que nos da pie a la próxima definición.

DEFINICIÓN 2

Sea $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$. Los **valores numéricos** de $p(x)$ son los valores que se obtienen al sustituir la variable x por un número.

Observen que para un polinomio cualquiera

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

tenemos que $p(1)$ es la suma de sus coeficientes y $p(0)$ es igual al término independiente.

EJEMPLO 2. Dado el polinomio $p(x) = 2x + 5$, su valor numérico para $x = -1$ es: $p(-1) = 2(-1) + 5 = 3$

Un problema que ha sido estudiando durante años es buscar las x que hacen cero a un polinomio $p(x)$. Dicho de otra forma: dado un polinomio $p(x)$ arbitrario, **cómo podemos encontrar los valores de x tales que** $p(x) = 0$**?** A pesar de ser una pregunta fascinante, la dejaremos pendiente para la próxima sesión.

Polinomio Ordenado y Completo

Puede darse la ocasión en que la notación que hemos usado sea diferente a la de otras bibliografías y clases. A continuación les mostraremos dos definiciones extras que les ayudará a solidificar el concepto de polinomio.

DEFINICIÓN 3

Sea $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$.

- Decimos que $p(x)$ es **ordenado** si los exponentes de la indeterminada x están ordenados de forma creciente o decreciente.
- Por otro lado, diremos que $p(x)$ es **completo** si presenta todos los exponentes de x desde la mayor potencia (la que determina el grado) hasta el cero (término independiente).

Estas dos definiciones no son dependientes. Es decir, podemos encontrar polinomios ordenados que no sean completos y viceversa.

EJEMPLO 3. El polinomio $p(x) = x^5 + 2x - 1$ es ordenado pero no completo, porque las potencias x^4, x^3 y x^2 están ausentes. El polinomio cúbico $x^3 + 12x^2 - x + 2$ es ordenado y completo ya que cumple ambas condiciones. Por útltimo, $r(x) = 2x^3 - 3 + 5x$ no es ordenado ni completo.

Igualdad y Operaciones aritméticas

Tal como hacemos en el conjunto de los número reales o complejos, también es posible realizar operaciones aritméticas en el conjunto de los polinomios (teniendo en cuenta por supuesto las particularidades de este conjunto) En este apartado discutiremos la *igualdad* entre dos polinomios, así como la *adición*, la *multiplicación* y el *producto por un escalar* que se definen en este conjunto.

Igualdad

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios cualesquiera. Decimos que $p(x)$ y $q(x)$ son iguales si y solo si se verifica simultáneamente que:

- Ambos polinomios tienen el mismo grado: $\operatorname{gr}(p(x)) = \operatorname{gr}(q(x))$
- Sus respectivos coeficientes son iguales.

EJEMPLO 4. Los polinomios $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 7x + 1$ y $q(x) = x^3 - x^2 + 7x + 1$ NO son iguales. Ambos tienen el mismo grado y casi todos coeficientes coinciden, sin embargo sus coeficientes principales son diferentes.

Adición

Sean los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m &= \textstyle\sum_{j=0}^{m} b_jx^j \end{aligned}$$

de grados n y m respectivamente. Para sumar $p(x)$ y $q(x)$, solo es necesario sumar algebraicamente sus términos y reducir aquellos que sean semejantes. Dicho de otra forma, sumar dos polinomios consiste en sumar los coeficientes de los términos del mismo grado.

EJEMPLO 5. Sean $p(x) = 2x^3 - 3 + 5x$ y $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

1. Primero ordenamos los polinomios si no lo están:

   $$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 5x - 3 \\ q(x) &= -2x^3 - 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

   entonces $p(x) + q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (-2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. Luego agrupamos los monomios del mismo grado.

   $p(x) + q(x) = (2x^3 - 2x^3) - 3x^2 + (5x + 4x) - 3$

3. Finalmente adicionamos los monomios semejantes.

   $p(x) + q(x) = -3x^2 + 9x–3$

Al sumar dos polinomios cualesquiera $p(x)$ y $q(x)$ es posible que algunos términos se cancelen, entonces podemos decir que el resultado de la suma será un polinomio $s(x)$ tal que $\operatorname{gr}(s(x)) \leq \max(m; n)$. Simbólicamente esto sería

$$s(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{j=0}^{m} b_jx^j = \sum_{k=0}^{\max(m;n)} (a_k + b_k)x^k$$

Retomemos el Ejemplo 5; aquí los coeficientes principales de $p(x)$ y $q(x)$ se cancelan mutuamente cuando realizamos la suma, dando como resultado un polinomio $s(x) = -3x^2 + 9x–3$ que es de menor grado.

Ahora les mostraremos algunas propiedades que cumple la adición de polinomios.

PROPOSICIÓN 1

- *La adición es una ley interna.* Es decir, la suma de dos polinomios en $\mathbb{K}[x]$ será otro polinomio de $\mathbb{K}[x]$:

$$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x], \;\; p(x) + q(x) \in \mathbb{K}[x]$$

- *Asociatividad*: $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$
- *Conmutatividad*: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$,
- *Elemento neutro*: Para todo $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tenemos que

$$p(x) + 0 = p(x)$$

  o sea, el polinomio nulo $N(x) = 0$ es el neutro para la suma de este conjunto.
- *Elemento opuesto*: Para todo $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tenemos que

$$p(x) - p(x) = p(x) + (-p(x)) = 0$$

  Dicho de otra forma, para cada polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ existe su opuesto y es precisamente $-p(x)$.

Producto por un escalar

Multiplicar un polinomio por un escalar es incluso más sencillo que la suma. Sea $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ (recordemos que $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) El producto de α por $p(x)$ no es más que la multiplicación de α por cada uno de los coeficientes de $p(x)$.

$$\begin{aligned}
\alpha p(x) &= \alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \\
\alpha p(x) &= \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 x + \alpha \cdot a_2 x^2 + \cdots + \alpha \cdot a_n x^n \\
\alpha p(x) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha \cdot a_i x^i
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6. La multiplicación de 3 por $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ es:

$$3p(x) = 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 2 = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 2$$

Multiplicación

La multiplicación entre polinomios no es que sea más difícil que sus hermanas *la suma* y el *producto por un escalar*, pero explicar de forma simbólica esta operación sí puede resultar un tanto engorroso. Por lo tanto primero veremos un caso particular y luego mostraremos con un ejemplo cómo funciona la multiplicación entre dos polinomios cualesquiera.

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Sea $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ y $q(x) = a^* x^m$ un monomio de grado m tal que $a^* \in \mathbb{K}$. Para multiplicar $q(x)$ por $p(x)$ solo es necesario usar la ley distributiva con todos lo términos de $p(x)$; o sea, multiplicar $q(x)$ por cada uno de los términos de $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= a^* x^m (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ p(x)q(x) &= a^* x^m \cdot (a_0) + a^* x^m \cdot (a_1 x) + \cdots + a^* x^m \cdot (a_n x^n) \\ p(x)q(x) &= a^* a_0 x^m + a^* a_1 x^{m+1} + \cdots + a^* a_n x^{m+n} \end{aligned} \tag{1}$$

EJEMPLO 7. Sean $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y $q(x) = 3x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= 3x^2(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \\ p(x)q(x) &= 3x^2(2x^3) - 3x^2(3x^2) + 3x^2(4x) - 3x^2(2) \\ p(x)q(x) &= 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

Aquí surge una duda: Cómo se afecta el grado de $p(x)$ al multiplicarlo por $a^* x^m$? Si nos fijamos bien en el Ejemplo 7, podemos ver que las potencias de $p(x)$ solo aumentan con la multiplicación (y los mismo ocurre si consideramos cualquier otro monomio). Es más, las potencias aumentan proporcionalemente al grado de $q(x)$. Entonces podemos decir que $p(x)q(x)$ da como resultado un polinomio $s(x)$ tal que $\mathrm{gr}\,(s(x)) = \mathrm{gr}\,(p(x)) + \mathrm{gr}\,(q(x))$.

Multiplicación de polinomios

Esta vez consideremos dos polinomios cualesquiera. Por ejemplo, sean $p(x) = x^3 + 3x - 1$ y $q(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Para multiplicar $p(x)$ con $q(x)$ lo primero que haremos es usar la ley distributiva varias veces con $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5) \\ &= {\color{red}(x^3 + 3x - 1)}(2x^2) - {\color{red}(x^3 + 3x - 1)}(4x) + {\color{red}(x^3 + 3x - 1)}5 \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, aplicamos la fórmula (1) en cada uno de los factores de (2)

$$p(x)q(x) = (2x^5 + 6x^3 - 2x^2) + (-4x^4 - 12x^2 + 4x) + (5x^3 + 15x - 5)$$

Finalmente sumamos los polinomios que obtenemos y llegamos a la multiplicación de $p(x)$ con $q(x)$

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= 2x^5 - 4x^4 + (6x^3 + 5x^3) + (-2x^2 - 12x^2) + (4x + 15x) - 5 \\ &= 2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5 \end{aligned}$$

Pues así es como se multiplican dos polinomios. Al igual que la suma, la multiplicación cumple unas cuantas propiedades a las que tenemos que darles un vistazo.

PROPOSICIÓN 2

- *La multiplicación es una ley interna*. Es decir, cualesquieran sean $p(x), q(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ tenemos que $p(x) \cdot q(x) \in \mathbb{K}_n[x]$,
- *Asociatividad*: $[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$,
- *Conmutatividad*: $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$,
- *Distributividad respecto a la adición*: $p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$,
- *Neutro de la multiplicación*: Para todo $p(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ se cumple

  $$p(x) \cdot 1 = p(x)$$

  o sea, el polinomio $U(x) = 1$ es neutro para la multiplicación.

OBSERVACIONES 1.

- Puede verse que $gr[p(x)q(x)] = gr[p(x)] + gr[q(x)]$. De aquí sale que un polinomio posee inverso para el producto si y sólo si es un polinomio constante.
- Notemos que hay una gran analogía entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{K}_n[x]$.

Los únicos polinomios inversibles son las constantes non nulas porque si $p(x)q(x) = 1$,

$$0 = \operatorname{gr}(1) = \operatorname{gr}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{gr} p(x) + \operatorname{gr} q(x),$$

y por eso $p(x)$ y $q(x)$ son constantes.

Ejercicios Propuestos

1. Diga si las siguientes expresiones, son o no polinomios. En caso afirmativo señale grado, termino independiente, si es mónico, si es completo y el conjunto más reducido al que pertenece según sus coeficientes. Diga si es un monomio, binomio o trinomio.

   a) $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$

   b) $\sqrt{x} + 7x^2 + 2$

   c) $1 - i + x^4$

   d) $\frac{2}{x^2} - x - 7$

e) $x^3 + x^5 + 2ix^2$

f) $x - 2x^{-3} + 8$

g) $x^3 - x - \dfrac{7}{2}$

2. Escribe en lenguaje algebraico, de ser posible:

   a) Un polinomio ordenado con término independiente nulo.

   b) Un polinomio no ordenado y completo.

   c) Un polinomio que pertenece a $\mathbb{C}[x]$ pero no a $\mathbb{R}[x]$

   d) Un polinomio completo sin término independiente.

   e) Un polinomio de grado 4, completo y con coeficientes impares.

   f) Un polinomio que cumpla dos de las condiciones.

   g) Un polinomio que cumpla tres de las condiciones.

   h) Un polinomio que cumpla cuatro de las condiciones.

3. Determina los valores de a, b, c, d para que $P(x) = Q(x)$

   a) $P(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 + 5x + 2$
   $Q(x) = (c + d)x^4 + (b + c)x^3 + (a + b)x + a.$

   b) $P(x) = ax^4 + dx^3 + (b - c)x^2 + cx + 2a$
   $Q(x) = ix^4 + (1 - i)x^3 + 2x^2 - x + 2i.$

4. Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$, $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$, $R(x) = 2x^4 - 2x - 2$ calcular:

   a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

   b) $P(x) + 2Q(x) - R(x)$

   c) $Q(x) + R(x) - P(x)$

   d) De cada uno de los polinomios reultantes determine: grado, coeficiente principal, término independiente, si es mónico, si es completo.

5. Realiza las siguientes multiplicaciones

   a) $(x^4 - 2x^2 + 2)(x^2 - 2x + 3)$

   b) $(3x^2 - 5x)(2x^3 + 4x^2 - x + 2)$

   c) $(ix^2 + (3 - i)x + 6)(3x^4 + (3 - i)x^3 + 4x - 2i)$

   d) De cada uno de los polinomios reultantes determine: grado, coeficiente principal, término independiente, si es mónico, si es completo.

e) ¿Cuál(es) de los elementos, del inciso anterior, podría(n) determinarse sin realizar la operación? Justifique.

6. Si el polinomio: $P(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + 9x^2 - 5x$ es nulo, hallar $(a+b)$

7. Para $m, n \in \mathbb{R}$, hallar $m+n$, sabiendo que: $i - 3 + 13x = m(x+1+i) + n(3+2i-x)$

8. Si $Q(x) = x^2 - 1$; $Q(x+2) = x^2 + ax + b$ entonces calcule ab.

9. Determinar el valor de n de modo que $M(x)$ sea un monomio de primer grado

$$M(x) = \sqrt{\frac{x^{n-1}\sqrt{x^n}}{\sqrt[6]{x^{5n-4}}}}$$

.

10. Si $F\left(\dfrac{x-2}{x-5}\right) = x^3 - x^2 + x - 1$. Calcular $F(4)$.

11. Si el grado de la expresión reducida equivalente a: $N(x) = \sqrt[n]{x^3\sqrt{x^8}}$ es uno. Halle entonces el grado de: $M(x) = \underbrace{x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \cdots}_{n\ \textit{términos}}$.

12. Tres términos consecutivos de un polinomio ordenado y completo en forma descendente están representados por: $P(x) = \cdots + x^{a+b+1} - x^{2a-1} + 3bx^{3b-1} + \cdots$

ANEXOS

La siguiente tabla, resume algunos resultados de multiplicaciones frecuentes. Conocer la forma que presentan dichas identidades puede ser muy útil, en cualquier situación problémica que requiera su huso. Estos productos están determinados por las siguientes identidades algebraicas.

Nombre de la identidad	**Desarrollo**
Trinomio cuadrado perfecto	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Trinomio al cuadrado	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
Binomio al Cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Suma de Cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de Cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Trinomio al Cubo	$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$ $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$
Producto de multiplicar binomios con un término común	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$
Identidades de LEGENDRE	$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
Identidad de ARGAND	$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$