Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Clase Práctica 3

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Al estudiante:

Bienvenido a la Clase Práctica 3 del Tema 2 del curso *Introducción al Análisis Matemático*. Los siguientes ejercicios pueden ser abordados con los conocimientos adquiridos en la conferencia correspondiente. ¡Esperamos que le vaya bien!

Colectivo de la asignatura

EJERCICIOS

Ejercicio 1.

Usando la fórmula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \tag{1}$$

con $n = 3$ calcula aproximadamente $\operatorname{sen}(18^\circ)$ y acota el error cometido.

Ejercicio 2.

Determina el grado del polinomio de Taylor que permite calcular:

a) $\cos(9^\circ)$, con error $< 10^{-5}$.

b) $\sqrt{5}$ con error $< 10^{-4}$.

Ejercicio 3.

a) Usando la **Propiedad 2** (página 236 de [1] formato físico, página 153 de [1] formato digital) prueba la desigualdad siguiente

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

b) Prueba que si $|f(x)| \leq M,\ x \in [a, b]$ entonces se cumple

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a).$$

Ejercicio 4.

a) Prueba que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones:
$f(a) = g(a),\ f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ y $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x),\ x > a$
entonces

$$f(x) > g(x),\ x > a.$$

b) Prueba las desigualdades siguientes:

i) $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3},\ x \geq 0.$

ii) $\tan x \geq x + \dfrac{x^3}{3},\ 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}.$

Ejercicio 5.

a) Demuestra que

$$\sinh x \geq \sin x,\ x \geq 0.$$

¿Qué ocurre si $x \leq 0$?

b) Analiza los puntos de extremo relativo de la función $f(x) = \cosh x - \cos x$.

Ejercicio 6.

Haciendo uso de la **Propiedad 2** (mencionada en el ejercicio 3) demuestra las desigualdades siguientes:

a) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{5}$

b) $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{x} \leq \ln 3$

c) $1 - \dfrac{1}{n} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^n} dx \leq 1$

d) $\dfrac{4}{9}(e-1) \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx \leq \frac{1}{2}(e-1).$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.