Introducción al Análisis Matemático

Tema 1

Ejercicios Resueltos 2

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Usa el polinomio de interpolación para demostrar las fórmulas:

a) $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

Respuesta

a) Como el polinomio es de grado 2, usemos los 3 puntos $(0;0)$, $(1;1)$ y $(2;3)$.

y_n		
0	Δy_n	
1	1	$\Delta^2 y_n$
3	2	1

Escribiendo la fórmula del polinomio de interpolación queda:

$$p(x)=0+x+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$$

b) Como el polinomio es de grado 3, usemos los 4 puntos $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;5)$ y $(3;14)$.

y_n			
0	Δy_n		
1	1	$\Delta^2 y_n$	
5	4	3	$\Delta^3 y_n$
14	9	5	2

Escribiendo la fórmula del polinomio de interpolación queda:

$$p(x)=0+x+3\frac{x(x-1)}{2}+2\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$$

Ejercicio 2

Pruebe que las diferencias de orden n correspondientes a puntos (con abscisa equidistantes) situados sobre el gráfico de un polinomio de interpolación de grado n son siempre constantes.

Respuesta

Supongamos que no es cierto. Es decir, existe un término diferente que ocupa la segunda posición:

$$\Delta_0^n = a, \Delta_1^n = b, \Delta_2^n = \Delta_3^n, \ldots = a$$

En el próximo paso se obtendría $\Delta_0^{n+1} = b - a \neq 0$, y por tanto el polinomio tendría al menos grado $n+1$ lo que contradice las hipótesis.
Para el caso en que el término diferente ocupa la posición k-ésima, basta con realizar $k-1$ diferencias más, llegando a la misma conclusión.

Ejercicio 3

Se conoce que los números tetraédricos (P_n) tienen la forma siguiente:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$$

donde T_k es el $k-$ésimo número triangular y

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Halle un polinomio que interpole los puntos de la forma

$$(n, P_n), \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Respuesta

Se tiene que

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}.$$

Se conoce la siguiente relación

$$\Delta^{k+1} y_n = \Delta^k y_{n+1} - \Delta^k y_n \quad \forall n, k \geq 0; \;\; n, k \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Hallemos Δy_n para $n \in \mathbb{N}$.

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Hallemos $\Delta^2 y_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\
&= \frac{[(n+1)+1][(n+1)+2]}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+3)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+2)}{2}(n+3-(n+1)) \\
&= n+2.
\end{aligned}$$

Hallemos $\Delta^3 y_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_n &= \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n \\
&= [(n+1)+2] - (n+2) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Delta^k y_n = 0 \quad \forall k \geq 4, \ n \geq 0,$$

es decir, el polinomio de interpolación tiene grado 3.

La expresión del polinomio de interpolación es

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}\Delta^3 y_0. \quad (0.2)$$

Hallemos y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ y $\Delta^3 y_0$.

x_n	y_n			
1	1	Δy_n		
2	4	3	$\Delta^2 y_n$	
3	10	6	3	$\Delta^3 y_n$
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Sustituyendo en (0.2) los valores $y_0 = 1$, $\Delta y_0 = 3$, $\Delta^2 y_0 = 3$ y $\Delta^3 y_0 = 1$ se llega al polinomio

$$p(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{6}$$

y se satisface que

$$P_{n-2} = p(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \quad n \geq 3$$

como se había visto en la conferencia 1 del tema 1.

Ejercicio 4

Halla una expresión del polinomio de grado mínimo que interpola los puntos de la forma:

$$\left(n,\ 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 4\cdot 5 + \ldots + (-1)^{n+1} n(n+1)\right).$$

a) Para n impar.

b) Para n par.

c) ¿Existirá un polinomio que interpole los puntos anteriores cuando n es un número natural cualquiera? En caso afirmativo, hállelo. En caso negativo, justifique su respuesta.

Respuesta

En [1] se brinda la siguiente fórmula para el polinomio de interpolación que contiene los puntos (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n-1$ tales que $x_i = x_0 + ih$ (de abscisas equidistantes, con distancia h):

$$p(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n y_0 \tag{0.3}$$

a) Sea $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$ (impar).

Por (0.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\
&= \sum_{i=1}^{2(k+1)-1} (-1)^{i+1} i(i+1) - \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} i(i+1) \\
&= (-1)^{2k+2}(2k+1)(2k+2) + (-1)^{2k+1}(2k+1)(2k+1) \\
&= 2(2k+1).
\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = 2[2(k+1)+1] - 2(2k+1) = 4.$$

De lo anterior se tiene que

$$\Delta^m y_n = 0 \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},\ m \geq 3 \text{ y para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tomemos los puntos $(1,2),\ (3,8),\ (5,18)$, los cuales son suficientes para calcular

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 8 - 2 = 6$$

y

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - \Delta y_0 = (18-8) - 6 = 4.$$

Al evaluar en la fórmula del polinomio de interpolación (0.3) (con $h = 2$) se tiene que este es

$$p(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}.$$

b) Sea $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ (par)

Por (0.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\
&= \sum_{i=1}^{2(k+1)} (-1)^{i+1} i(i+1) - \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} i(i+1) \\
&= (-1)^{2k+3}(2k+2)(2k+3) + (-1)^{2k+2}(2k+1)(2k+2) \\
&= -4k - 4.
\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = [-4(k+1) - 4] - (-4k - 4) = -4.$$

De lo anterior se tiene que

$$\Delta^m y_n = 0 \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},\ m \geq 3 \text{ y para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tomemos los puntos $(2,-4),\ (4,-12),\ (6,-24)$, los cuales son suficientes para calcular

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = -12 - (-4) = -8$$

y

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - \Delta y_0 = (-24 - (-12)) - (-8) = -12 - (-8) = -4.$$

Al evaluar en la fórmula del polinomio de interpolación (0.3) (con $h = 2$) se tiene que este es

$$p(x) = -\frac{x^2}{2} - x.$$

c) - ***Vía 1***

Analicemos el comportamiento de $\Delta^k y_n$.

- ∘
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (-1)^n (n+1)(n+2) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

- ∘
$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (-1)^{n+1}(n+2)(2n+4) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Probemos por inducción completa que

$$\Delta^k y_n = \begin{cases} (-1)^n p(n) & \text{si} \quad k \text{ es impar} \\ \\ (-1)^{n+1} p(n) & \text{si} \quad k \text{ es par} \end{cases}$$

donde $p \in \mathbb{Z}_+[x]$ (este es el conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes en $\mathbb{Z}_+$), $gr(p) = 2,\ n \in \mathbb{N}$.

Hemos visto que para $k = 1$ y $k = 2$ se cumple lo anterior (*inicio de inducción*). Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ se cumple (*hipótesis*), veremos entonces que también ocurre para $k + 1$ (*tesis*).

Demostración: Supongamos que k es impar, entonces

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} y_n &= \Delta^k y_{n+1} - \Delta^k y_n = (-1)^{n+1} p_1(n) - (-1)^n p_2(n) \\ &= (-1)^{n+1}[p_1(n) + p_2(n)] = (-1)^{n+1} p_3(n) \end{aligned}$$

donde $p_j \in \mathbb{Z}_+[x],\ gr(p_j) = 2,\ j \in \{1, 2, 3\},\ n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que k es par, entonces

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} y_n &= \Delta^k y_{n+1} - \Delta^k y_n = (-1)^{n+2} p_1(n) - (-1)^{n+1} p_2(n) \\ &= (-1)^n [p_1(n) + p_2(n)] = (-1)^{n+1} p_3(n) \end{aligned}$$

donde $p_j \in \mathbb{Z}_+[x],\ gr(p_j) = 2,\ j \in \{1, 2, 3\},\ n \in \mathbb{N}$.

De este modo se concluye que el polinomio de interpolación buscado no existe porque no existe $\hat{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta^k y_n = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},\ k > \hat{k}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

es decir, tendría "grado infinito"(por lo que no es un polinomio).

- ***Vía 2***

Supongamos que existe un polinomio p que interpole los puntos del tipo

$$(n, \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i(i+1)).$$

Nótese que $y_{2k} < 0$ y $y_{2k-1} > 0$, entonces entre $x = 2k - 1$ y $\hat{x} = 2k$ existe una raíz de p debido al razonamiento siguiente:

si tenemos una función polinómica f, cuyo gráfico no tiene "huecos" ni "saltos" (nos da una idea de *continuidad*), y en un punto a_1 esta función es positiva $f(a_1) > 0$ ($f(a_1) < 0$), es decir, su gráfico se encuentra por encima (debajo) del eje OX y en otro punto b_1 esta función es negativa $f(b_1) < 0$ ($f(b_1) > 0$), es decir, su gráfico se encuentra por debajo (encima) del eje OX, entonces se infiere que el gráfico debe cortar al eje OX en algún punto intermedio entre los valores de a_1 y b_1 anteriormente mencionados, digamos $c_1 \in (a_1, b_1)$ (sin pérdida de generalidad suponemos que $a_1 < b_1$, pues en otro caso sería análogo), o lo que es lo mismo: $f(c_1) = 0$, por lo que el polinomio se escribe

$$f(x) = (x - c_1)g_1(x)$$

donde $g_1(x)$ es un polinomio con grado $gr(f) - 1$; si lo anterior ocurre nuevamente para otros valores a_2, b_2, entonces existe $c_2 \in (a_2, b_2)$ tal que $f(c_2) = 0$ y

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)g_2(x)$$

con $g_2(x)$ polinomio tal que $gr(g_2) = gr(f) - 2$; y así sucesivamente, llegando a que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \dots$$

por lo que $f(x)$ es un polinomio de grado infinito, pero esto es imposible por definición de polinomio, de modo que hemos llegado a una **contradicción**, por lo que no puede existir un polinomio que interpole los puntos de esa forma.

En el razonamiento expuesto anteriormente aparecen relacionados el primer teorema de Bolzano ya que los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$ (se verá en el curso de *Funciones de una Variable Real*) y el Teorema Fundamental del Álgebra (se verá en el curso *Introducción al Álgebra*).

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.