Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Conferencia 2

Primitiva. Fórmula fundamental del cálculo. Propiedades de la integral.

"En matemáticas no se deben despreciar ni los errores más diminutos."

Isaac Newton

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

1. Introducción

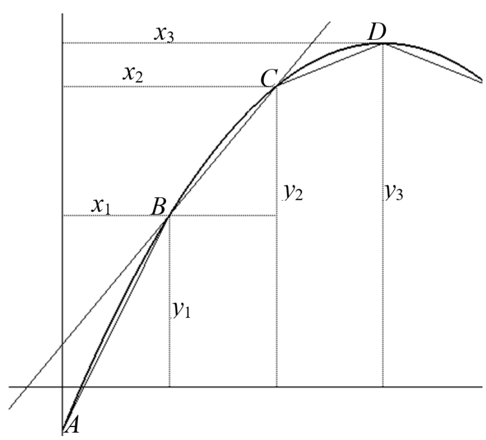
En esta conferencia entenderemos qué es una función primitiva, estudiaremos la Fórmula Fundamental del Cálculo, así como las deducciones que se hicieron para su obtención. También veremos algunas propiedades de las integrales, el cálculo de áreas de regiones expresadas en coordenadas polares y cómo calcular volúmenes de cuerpos de revolución.

2. La Fórmula Fundamental del Cálculo

El problema de la determinación de áreas, volúmenes y algunas magnitudes físicas constituyó una tarea sumamente difícil mientras solo se poseían los métodos descritos anteriormente. Este tipo de métodos obligaban a la repetición de construcciones semejantes en cada problema particular lo que, además de bastante trabajo, requería de la posesión de ciertas dotes imaginativas. La situación va a cambiar radicalmente cuando, tanto Leibniz como Newton, encuentren la relación existente entre este tipo de problemas y el problema de la diferenciación de funciones. Veamos en qué consiste esa relación y cómo la justificaron los fundadores del Cálculo.

Para Leibniz: La clave fundamental del nuevo método era la concepción de una curva como un polígono de infinitos lados, la longitud de los cuales era infinitamente pequeña.

Supongamos que el polígono $ABCD$ aproxima la curva y tiene sus vértices sobre ella. Entonces, dicho polígono da lugar a dos sucesiones de variables: las abscisas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y las ordenadas $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de los vértices.



Si escogemos la poligonal de modo que las abscisas de sus vértices difieran en una unidad (que puede ser muy pequeña), entonces la suma de las ordenadas da una aproximación del área bajo la curva, es decir de su cuadratura. Una primera aproximación del área bajo la curva es $\sum(x_{i+1} - x_i)y_i$

Por otra parte, en el cociente de la diferencia de las ordenadas sucesivas y las abscisas sucesivas

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

es la pendiente de la secante correspondiente y, por tanto, constituye una aproximación de la pendiente de la tangente en los puntos de la curva. Aproximaciones que mejoran cuando las diferencias entre abscisas consecutivas se toman cada vez más pequeñas.

Así resuelven respectivamente los problemas de cuadraturas y tangentes, suponiendo que el polígono tiene "infinitos lados infinitamente pequeños".

De esta forma **Leibniz interpretó el procedimiento para las cuadraturas como una sumación y la determinación de la tangente lo asoció al cálculo de diferencias.** Por otra parte, Leibniz observó que si para una sucesión de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ se hallan las sumas $y_1, y_1+y_2, y_1+y_2+y_3, \ldots$, entonces la primera sucesión puede recuperarse simplemente mediante la diferencia de dos términos consecutivos de la segunda.

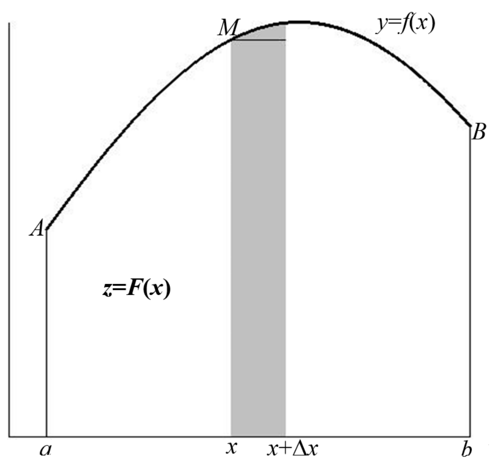
Recíprocamente, si a partir de la sucesión original se calculan las diferencias sucesivas $y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots$ y seguidamente estas diferencias se suman, también se regresa a la sucesión original.

Esta observación y la interpretación establecida en el párrafo anterior le permitió advertir que **los problemas de la cuadratura de una curva y del hallazgo de su tangente son uno el inverso del otro.**

Las ideas concebidas por Newton las describiremos utilizando un lenguaje más contemporáneo.

Newton imagina una curva $y = f(x)$ (supondremos $f(x) \geq 0$) descrita por el movimiento del punto M desde un punto inicial $A = (a, f(a))$ hasta $B = (b, f(b))$.

Entonces el segmento de recta Mx barrerá el área de la figura $abBA$, esto es, el área comprendida entre el eje X y el gráfico de la función cuando la variable x se mueve entre los valores $x = a$ y $x = b$.



El área de la porción con base en el intervalo $[a, x]$, es decir $axMA$, depende de la variable x, será natural denotarla por $z = F(x)$. Si la variable x se incrementa en Δx, entonces el área se incrementará en $F(x+\Delta x)-F(x)$, pero esta área sombreada en oscuro puede ser aproximadamente cuando Δx es muy pequeño por el área del rectángulo en base Δx y altura $y = f(x)$.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0$$

$$\Longrightarrow \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x), \quad \Delta x \to 0.$$

De modo que el área determinada por $y = f(x)$ puede realizarse mediante el hallazgo de una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, resultado que se conoce como

Teorema 1 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Si $F(x)$ representa el área de la figura $axMA$, entonces $F'(x) = f(x)$.*

La notación actual la debemos a Leibniz, quien aprovechó la analogía establecida con las operaciones aritméticas de suma y diferencia. Por ello designó con una letra S alargada al valor del área, esto es a "la suma de las áreas infinitesimales $f(x)dx$". Este símbolo evolucionó rápidamente transformándose en la notación actual para la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde la función $f(x)$ se denomina **integrando** y los valores a y b se llaman **límites de integración** (inferior y superior).

Si concebimos la figura $abBA$ formada por una cantidad "infinitamente grande"de bandas rectangulares con base dx y cuya área es igual a $f(x)dx$, entonces el área total será la "suma"de todas estás áreas infinitesimales, esto es

$$\acute{A}rea\ (abBA) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ahora se presenta el problema ¿cómo calcular $\int\limits_a^b f(x)dx$?

El teorema fundamental del cálculo nos indica que el área de $axMA$ se calcula por $\int_a^x f(t)dt = F(x)$, por lo que $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ en la figura 2.

Supongamos que $G(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x)+C$, para alguna constante C. Como evidentemente $F(a) = 0$, se tiene que $C = -G(a)$. De modo que $F(b) = G(b)-G(a)$. De esta forma hemos obtenido el importantísimo resultado siguiente:

Si G es una primitiva cualquiera de $y = f(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b .$$

Todos los razonamientos anteriores los hemos realizado basándonos en la idea de área de una figura geométrica limitada superiormente por el gráfico de $y = f(x)$, para lo cual pedimos que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Sin embargo, la fórmula obtenida

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

tiene sentido para cualquier función $f(x)$ que tenga alguna primitiva $G(x)$ en $[a, b]$. y la asumiremos como nuestra definición de integral. La fórmula también tiene sentido para $a \geq b$. En ese caso

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = -(G(a) - G(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

Es claro que, en estos casos más generales la integral pierde su interpretación geométrica como área.

En ocasiones, resulta útil operar con integrales de funciones que toman valores complejos. De forma análoga a como procedimos con las derivadas, podemos concebir la integral de una función $f(x) = u(x) + iv(x)$, $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en la forma

$$\int_a^b (u(x) + iv(x))dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

Con esta definición, es evidente que la fórmula anterior es válida también para las funciones con valores complejos. Por supuesto, en este caso la primitiva será una función que, en general, toma valores complejos.

3. Aplicaciones de la integración

3.1. Búsqueda de primitivas: primeras herramientas

No cabe duda entonces de la importancia práctica de poseer un mínimo de recursos para encontrar primitivas de funciones. Este proceso de cálculo de primitivas ha recibido la denominación de **integración indefinida** en contraposición al de integración definida que antes simplemente denominamos **integral**.

Para denotar al conjunto de las primitivas de $f(x)$ se utiliza el símbolo de integral indefinida $\int f(x)dx = F(x) + C$ donde F es una primitiva cualquiera y C una constante arbitraria, de este modo, la integral indefinida es una familia de funciones, todas diferenciadas por una constante.

Las operaciones de diferenciación e integración indefinida son esencialmente una inversa de la otra.

$$\begin{array}{rcll}
\int x^\alpha dx &=& \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \forall x, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \\
\int c dx &=& cx + C & c \in \mathbb{R} \text{ constante} \\
\int \frac{1}{x} dx &=& \ln|x| + C & \\
\int a^x dx &=& \frac{a^x}{\ln a} + C & a > 0, a \neq 1 \\
\int \text{sen} x dx &=& -\cos x + C &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\int \cos x dx &=& \text{sen} x + C & \\
\int \sec^2 x dx &=& \tan x + C & \\
\int \csc^2 x dx &=& -\cot x + C & \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &=& \text{arcsen} x + C & x \in (-1,1) \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &=& \arctan x + C &
\end{array}$$

3.2. Cálculo de áreas

Ej 1.

$$\int_a^b x^k dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

Sin embargo, observemos que $\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$. *La suma de las regiones sombreadas en* $x < 0$ *y* $x > 0$ *es claramente distinta de cero. Sucede entonces que la integración nos devuelve negativa el área de la curva cuando esta es negativa, es decir cuando* $f(x) < 0$. *Por lo que en estos casos. Para poder determinar el área que hay entre la curva y el eje*

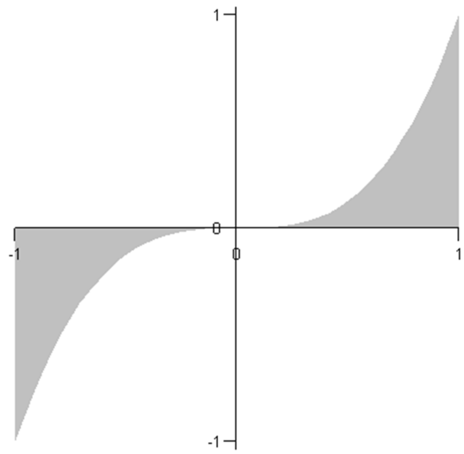


Figura 1: Región determinada por el gráfico de $f(x) = x^3$ y el eje OX

X, debemos sumar atendiendo el signo, es decir $A = \int\limits_0^1 x^3 dx - \int\limits_{-1}^0 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^0 = \frac{1}{2}$.

Ej 2. *Hallemos el área de la región limitada superiormente por la curva* $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *e inferiormente por la curva* $y = g(x) = \frac{x^2}{2}$.

Para representar geométricamente esta región basta tener en cuenta que ambas curvas se cortan en puntos con abscisas $x = -1$ y $x = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \frac{1}{1+x^2} \\ x^2 + x^4 &= 2 \\ x^4 + x^2 - 2 &= 0 \\ (x^2-1)(x^2+2) &= 0 \\ (x+1)(x-1)(x^2+2) &= 0. \end{aligned}$$

Ambas funciones son, además, positivas en el intervalo $[-1, 1]$, es decir,

$$f(x) > 0, \; g(x) > 0, \; x \in [-1, 1].$$

Entonces el área buscada es

$$A = C - B$$

donde

$$C = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

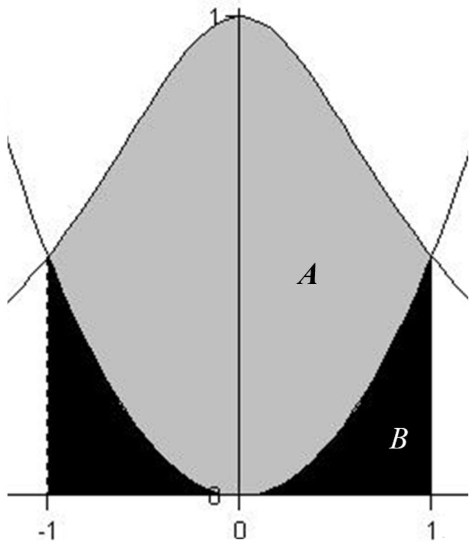


Figura 2: Región delimitada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y por $g(x) = \frac{x^2}{2}$

y

$$B = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = 2 \int_{0}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

De modo que

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

También se puede calcular

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

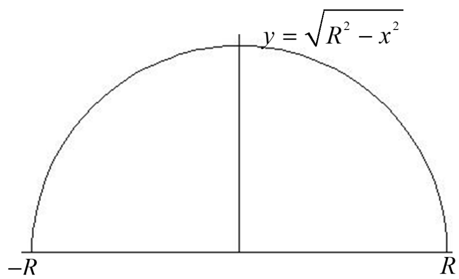
3.2.1. Regiones delimitadas por funciones expresadas en coordenadas polares

Ej 3. *Calculemos, utilizando la noción de integral, el área de un círculo de radio r. Como el círculo es una figura simétrica, basta hallar solamente el área, por ejemplo, del semicírculo superior o del primer cuadrante, y luego multiplicar por dos o por cuatro respectivamente. La ecuación de la semicircunferencia superior es*

$$x^2 + y^2 = r^2 \implies y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego el área A del círculo vendrá dada por

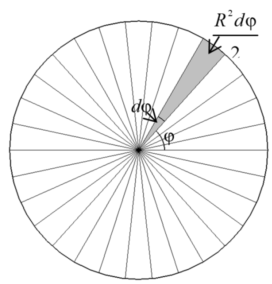
$$A = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

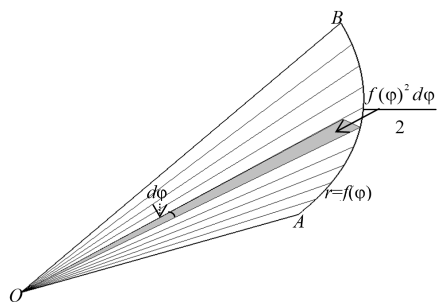


En calcular esta expresión tenemos la mayor dificultad que luego veremos como resolver.

Sin embargo, también podemos enfocar el problema de una manera diferente. Aproximemos la figura, pero no con rectángulos sino con triángulos con vértices en el centro, lo cual resulta más natural.

Dividamos el círculo mediante rayos que parten del origen de coordenadas y tales que los ángulos entre ellos sean todos iguales a $d\theta$.





Si $d\theta$ es muy pequeño, los sectores así formados serán muy finos, por lo que su área puede ser aproximada por el área del triángulo de altura R y base igual a la longitud del arco correspondiente al sector, esto es, $A_\Delta = \frac{r^2 d\theta}{2}$.

Entonces el área A del círculo será la "suma"de las áreas de todos estos sectores, es decir la integral

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{r^2\theta}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2}2\pi = \pi r^2.$$

Observemos que un razonamiento análogo puede ser hecho con figuras limitadas por curvas dadas en coordenadas polares. Para calcular el área S del sector curvilíneo limitado por la curva en polares $r = f(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Supondremos al sector dividido en finísimos sectores circulares de ángulo infinitesimal $d\theta$ y radio igual a $f(\theta)$ (también podría ser en forma de triángulos isósceles estrechos). Cada uno de estos sectores tendrá área igual a $\frac{f(\theta)^2 d\theta}{2}$.

Si ahora "sumamos para todos los sectores", obtenemos el resultado siguiente

> El área de un sector curvilíneo limitado por la curva $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se calcula mediante la fórmula
>
> $$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f^2(\theta)}{2} d\theta.$$

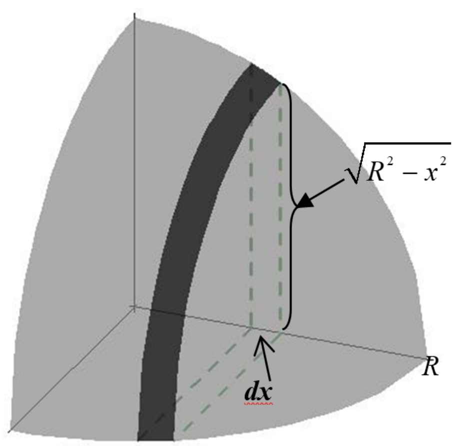
Ver Ejemplo 4 página 200 LT, donde se calcula el área de la espiral de Arquímedes.

3.3. Volumen de cuerpos de revolución

Ej 4. *Veamos como podemos utilizar la integral definida para calcular el volumen de algunos cuerpos.*

Supongamos que deseamos obtener el volumen de una esfera de radio R. Para ello, consideraremos la esfera constituida por "finos discos"de ancho dx y radio igual a $\sqrt{R^2 - x^2}$, donde $-R \leq x \leq R$ (en la figura se ha dibujado solo la porción correspondiente al primer octante, es decir, un octavo de esfera y por tanto un cuarto de disco). El volumen del disco correspondiente a la abscisa x es

$$\pi(R^2 - x^2)dx = \pi\sqrt{R_2 - x^2}^2 dx.$$



Si ahora "sumamos"para todos los valores posibles de x, encontramos que el volumen V de la esfera viene dado por

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx$$

Para poder aplicar esta fórmula, necesitamos conocer una primitiva de la función $f(x) = \pi(R^2 - x^2)$, la cual no se encuentra en la tabla mostrada antes. Sin embargo, esta integral puede calcularse muy fácilmente utilizando la denominada linealidad de la integral (indefinida y definida).

Propiedad 1 (Propiedad de linealidad de la integral). *Si c_1 y c_2 son constantes, entonces se cumplen las igualdades:*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Para justificar estas relaciones podemos razonar de la forma siguiente: Si las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, entonces para todo $x \in [a, b]$ se tiene $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Lo que implica que $(c_1F(x) + c_2G(x))' = c_1 f(x)+c_2g(x)$. Por lo que $c_1F(x)+c_2G(x)$ es una primitiva de $c_1 f(x)+c_2g(x)$. Luego haciendo uso del teorema fundamental tenemos que

$$\int_a^b (c_1 f(x)+c_2 g(x))dx = c_1F(b)+c_2G(b)-c_1F(a)-c_2G(a) = c_1 \int_a^b f(x)dx+c_2 \int_a^b g(x)dx$$

Ahora podemos concluir el ejemplo 5. Apliquemos a la integral del volumen la linealidad de la integral definida:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \pi \left(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Observemos que la deducción realizada en el caso de la esfera puede llevarse a cabo con cualquier cuerpo limitado por una superficie de revolución.

Si $y = f(x)$ es la ecuación de la curva que gira alrededor del eje X para engendrar la superficie, entonces en el razonamiento anterior solo hay que sustituir el valor del radio de los discos finos por $f(x)$, de modo que se tiene el resultado siguiente,

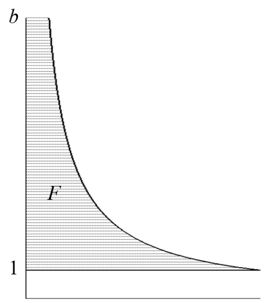
El volumen del cuerpo limitado por la superficie generada por la rotación de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje X se expresa mediante la integral

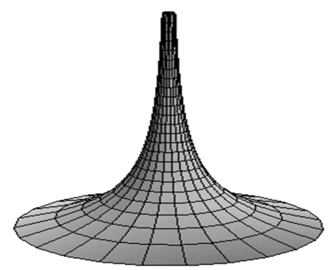
$$\int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

Como una aplicación interesante de la fórmula anterior podemos explicar la siguiente afirmación, aparentemente paradójica, realizada por Jacob Bernoulli.

Ej 5. *Existen figuras cuya área es infinita, mientras que el volumen del cuerpo de revolución que generan es finito. En efecto, consideremos la región plana (infinita) F limitada por la hipérbola $y = 1/x$, la recta $y = 1$ y el eje OY, ver Figura. La región F se extiende ilimitadamente a lo largo del eje Y, pero podemos estimar su área mediante la parte que está situada por debajo de la recta $y = b$ con b bastante grande. Esta última área puede ser calculada mediante la integral*

$$A = \int_1^b \frac{dy}{y} = \ln y|_1^b = \ln b \to \infty, \quad b \to \infty.$$





Obviamente, cuando b es grande el valor de la integral se hace infinitamente grande. De esta manera, es natural asignar a la región F un "área infinita". Sea ahora el cuerpo de revolución generado por la figura F al rotar alrededor del eje OY, en la figura. El volumen de este cuerpo de revolución (que también se extiende ilimitadamente en la dirección del eje Y) puede ser aproximado por la integral

$$\int_1^b \pi \frac{dy}{y^2} = \int_1^b \pi y^{-2} dy = -\frac{\pi}{y}\bigg|_1^b = \pi - \frac{\pi}{b} \to \pi, \quad b \to \infty$$

Es evidente que esta cantidad, cuando b se hace muy grande, se acerca tanto como se quiera a π, por lo que es completamente natural asignar a este cuerpo de revolución un volumen finito igual a π.

3.4. Longitud de arco de una curva

Un problema a resolver es el cálculo de la longitud de arco de la curva dada por la ecuación $y = f(x)$ donde $a \leq x \leq b$. Una forma concreta y muy natural de llevaro a cabo es:

Tomar un hilo flexible, colocar un extremo en el punto $A = (a, f(a))$ y situarlo de manera que adquiera la forma de la curva, hasta llegar al punto $B = (b, f(b))$, a continuación se mide la porción de hilo desde A hasta B (Figura 3).

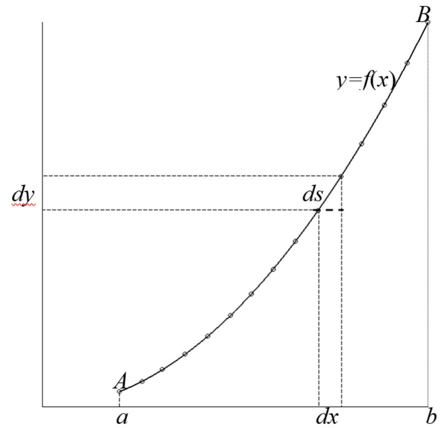


Figura 3: Longitud de arco de una curva

En el proceso de adaptación del hilo a la curva será necesario, cada cierto tramo, "fijarlo" en algunos puntos. En realidad el hilo solo adoptará la forma de una poligonal y su aproximación a la curva será tanto mejor cuanto más cercanos entre sí estén los puntos de fijación.

En el procedimiento anterior el hilo en realidad toma la forma de una poligonal con vértices (puntos de fijación) sobre la curva y lo que hacemos es calcular la longitud de esta poligonal. Observemos que esta forma de proceder es enteramente compatible con la concepción de una curva como "una poligonal con infinitos lados de longitud infinitamente pequeña"que introdujimos en tema anterior.

La longitud de la poligonal se puede calcular como la suma de las longitudes de sus lados. Usando el teorema de Pitágoras, la longitud ds de uno de estos lados infinitamente pequeños se expresa en la forma

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Pero $dy = f'(x)dx$, luego

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

y la longitud de la curva será la "suma"de las longitudes de estos infinitos lados, es decir

La longitud L del arco de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ viene dada por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

***Ejemplo* 3.1.** *Si la curva es la parábola* $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}},\ 0 \leq x \leq 1,$ *entonces*

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$\Downarrow$$
$$[f'(x)]^2 = \frac{9}{4}x.$$

Por tanto, la longitud de arco es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx.$$

Ahora, ¿cómo se calcula la integral anterior?

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4+9x}{4}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+9x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{9\left(\frac{4}{9}+x\right)}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{4}{9}+x}dx.$$

Notemos que $\sqrt{\frac{4}{9}+x}$ *es muy parecida a* $\sqrt{x}$ *y se sabe que*

$$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Notemos, además, que si se hace

$$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{1}{2}},$$

de modo que $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{3}{2}}$ *es una primitiva de* $\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{1}{2}}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} L = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{4}{9}+x}dx &\overset{(*)}{=} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}+0\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{13}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{13\sqrt{13}-8}{27}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

En $(*)$ *se utilizó el Teorema Fundamental del Cálculo.*

Recomendamos el estudio de los ejemplos 10 y 11 de [1] (páginas 207 y 208) en el que se aplica la integración para la determinación de magnitudes físicas como la masa (centro de masa) y el trabajo.

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.