Álgebra II

CP10: Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Lic. David Balbuena Cruz

Ejercicios

1. Encuentre el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

   (a) La aplicación lineal f de K^4 en K^3 que tiene por matriz en las bases canónicas de dichos espacios a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) La aplicación lineal $T : (\mathbb{C}^2[x],\ \mathbb{R}) \to (M_2(\mathbb{R}),\ \mathbb{R})$ tales que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x+i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad T(1+i+(1+i)x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (c) El endomorfismo de $M^2(K)$ definido por $u(M) = AM - MA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (d) $f : W \to F$ definida por $f(x) = g(x)$ para todo $x \in W$ donde $g : E \to F$ es una aplicación lineal.

2. Encuentre, si es posible, un endomorfismo del $\mathbb{R}$-espacio $\mathbb{C}^2$ tal que:

   (a) su imagen sea el subespacio generado por $(1, i)$ y $(i, 1)$.

   (b) su núcleo sea el conjunto de los pares (x, y) con x, y reales.

   (c) su núcleo sea el subespacio constituido por los vectores de la forma $(mi, p+qi)$ donde $m, p, q \in \mathbb{R}$ y que transforme al vector $(2-i, 1)$ en $(2, 3)$ y al vector $(1, 1)$ en sí mismo.

(d) Su imagen sea $\mathbb{R}^2$ y su núcleo sea el subespacio generado por $(1, i)$ y $(i, 1)$.

3. Sea

$$\begin{pmatrix} k & 1 & k-1 & 0 \\ k & 0 & -2 & k+1 \\ k & 2 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo T de K^4 respecto a la base

$$B = \{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,2); (0,0,2,3)\}$$

Determine cómo debe ser tomado el valor del parámetro k de forma tal que:

(a) T posea como núcleo el subespacio constituido por los vectores de la forma $(x, 0, z, t)$ donde $x - 6z + 4t = 0$

(b) T posea como imagen el espacio generado por los vectores $(1, 0, 4, 7)$, $(-1, -2, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$