Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Ejercicios Resueltos 1

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Dada la función $y = x^3 + 2x$ halle el valor del incremento y de su diferencial cuando x varía de 2 a 2,1.

Respuesta

La función es $y = f(x) = x^3 + 2x$, $x = 2$ y $\Delta x = 0{,}1$. Se tiene entonces que el incremento es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2 + 0{,}1) - f(2) = 1{,}461$$

Hallemos el diferencial $dy = f'(x)dx$ en el punto dado

$$dy = (3(2)^2 + 2)(0{,}1) = 1{,}4$$

Ejercicio 2

Calcule los diferenciales de las funciones siguientes

a) $y = x \ln(x)$

b) $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$

Respuesta

Aplicando las reglas de diferenciación se obtienen los diferenciales buscados

a) $y = x \ln(x)$
$dy = (1 + \ln(x))dx$

b) $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$
$dy = \frac{-3x^2}{\sqrt{\pi}}dx$

Ejercicio 3

¿Para qué puntos son paralelas las tangentes a las curvas $y = x^2,\ y = x^3$?

Respuesta

Sean $t_1(x)$ y $t_2(x)$ las pendientes de las rectas tangentes correspondientes a y_1 y a y_2 respectivamente. Derivando las expresiones de y_1 y a y_2 se obtiene que $t_1(x) = 2x$ y $t_2(x) = 3x^2$. Al resolver la ecuación $t_1(x) = t_2(x)$ se obtienen los valores de x para los cuales ambas curvas tienen tangentes paralelas, que son $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{3}$, quedando los puntos $A(0,0)$ (coincidentes) para x_0, $B(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ y $B(\frac{2}{3}, \frac{8}{27})$ para x_1.

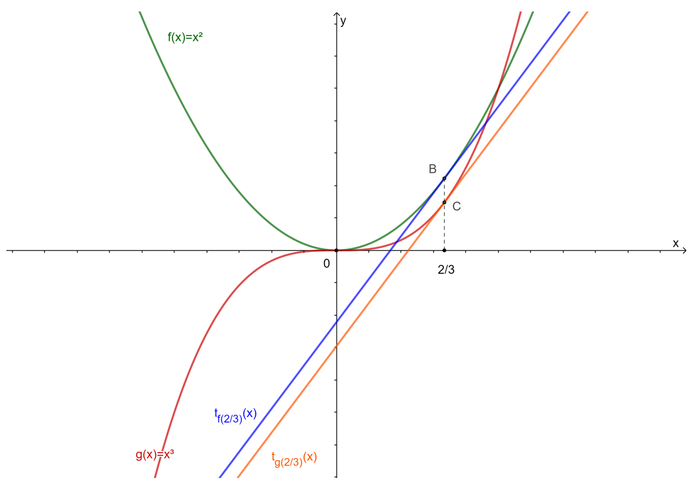

Figura 1: Las funciones y sus rectas tangentes paralelas

Ejercicio 4

Halle la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos indicados:

a) $y = log_a(x),\ a > 0,\ a \neq 1$ en $(1, 0)$

b) $y = \frac{sen^2(x) - 3e^{2x+1}}{x^2+1}$, en $(0, -3e)$.

Respuesta

Para hallar la ecuación de la recta necesitamos la pendiente (obtenida a través de la expresión del diferencial) y un punto de la misma (dado)

a) La recta tangente a $y = f(x) = \log_a x$ en $P(1,0)$ es $y = \frac{x-1}{\ln(a)}$ ya que $f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$ y se tiene que

$$t_{f(1)}(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{x-1}{\ln(a)}.$$

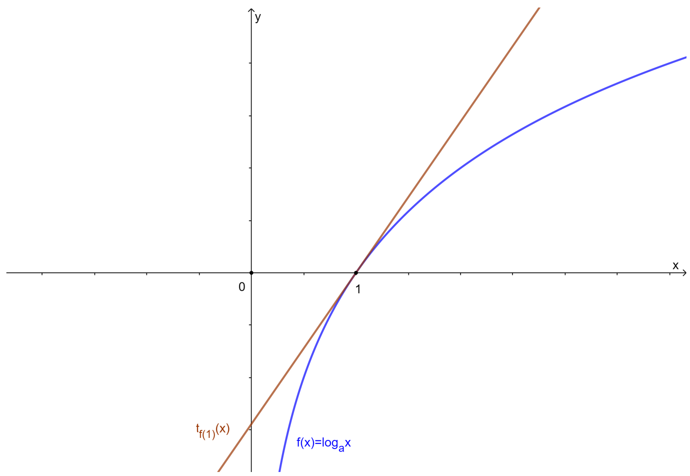

Figura 2: Recta tangente a $y = \log_a x$, con $a > 1$, en $(1,0)$

b) La recta tangente a $y = u(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x) - 3e^{2x+1}}{x^2+1}$ en $P(0,-3e)$es $y = -6ex - 3e$, pues

$$u'(x) = \frac{(x^2+1)(2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 6e^{2x+1}) - 2x(\operatorname{sen}^2(x) - 3e^{2x+1})}{(x^2+1)^2}$$

y

$$t_{u(0)}(x) = u'(0)(x-0) + u(0) = -6ex - 3e.$$

Ejercicio 5

Usando el diferencial calcula aproximadamente $sen(30°1')$.

Respuesta

Cambiemos primeramente el dominio de la función de grados a radianes: $30° = \frac{\pi}{6}$ *rads* y $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi}{180\cdot 60}$ *rads*. Entonces tenemos que hallar $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180\cdot 60}\right)$. Utilizando la fórmula del diferencial se obtiene que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180\cdot 60}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{180\cdot 60}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{180\cdot 60} + \frac{1}{2} \approx 0{,}500252.$$

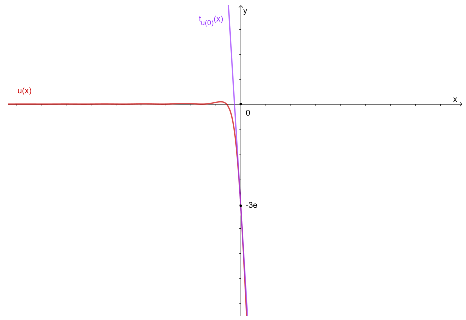

Figura 3: Recta tangente a $y = u(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x) - 3e^{2x+1}}{x^2+1}$ en $(0, -3e)$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.