Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Ejercicios Resueltos 1

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

MATCOM
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

Introducción

Presentamos a continuación una colección de Ejercicios Resueltos. Esperamos que sean provechosos para usted. Le proponemos que piense en vías de solución alternativas.

Colectivo de la asignatura

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Aplica la idea de Fermat para calcular el área limitada por la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ y el eje X con x entre 0 y a.

Respuesta

El área buscada viene dada por la integral

$$A = \int_0^a e^x dx = e^x|_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1.$$

Ejercicio 2

Se quiere calcular el volumen de un cono circular recto con base de radio r y altura h. En la figura 1 hemos considerado al cono aproximado mediante un cuerpo constituido por la yuxtaposición de cilindros circulares rectos de altura $\frac{h}{n}$.

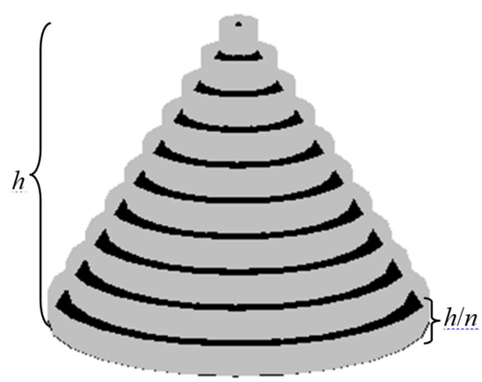

Figura 1: Aproximación de un cono de altura h y radio r

a) Prueba que el volumen del cuerpo aproximante es

$$\frac{\pi h r^2}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right).$$

b) Argumenta la fórmula para el volumen del cono:

$$V=\frac{\pi h r^2}{3}$$

Respuesta

a) La figura 2 muestra frontalmente el cono con los cilindros aproximantes.

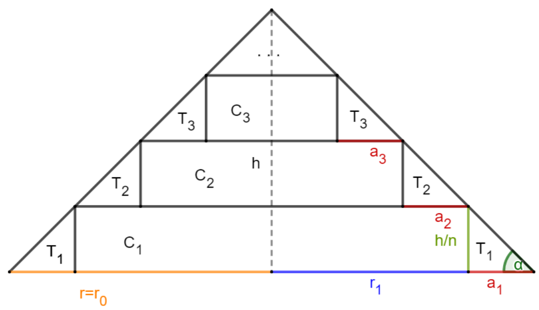

Figura 2: Cono y cilindros aproximantes

Por simetría podemos trabajar solo con la parte derecha de la figura. Podemos ver la sección $i-$ésima del cono (determinada por el $i-$ésimo cilindro aproximante C_i). Sea T_i el triángulo de la figura anterior. El ángulo α aparece en todos los T_i por ser C_i un cilindro (sus bases son paralelas). Se cumple entonces que

$$\tan\alpha=\frac{\frac{h}{n}}{a_i}$$

donde h es la altura del cono, n es la cantidad de cilindros aproximantes y a_i es el cateto de T_i que es adyacente a la base inferior de C_i. Pero $\tan\alpha=\frac{h}{r}$, de modo que

$$\frac{h}{r}=\frac{\frac{h}{n}}{a_i}$$

$$a_i=\frac{\frac{h}{n}}{\frac{h}{r}}$$

$$a_i=\frac{r}{n}$$

Ahora, r_i es el radio de C_i; hallemos una expresión para r_i:

$$r = r_0 = r_1 + a_1 = r_1 + \frac{r}{n} \Longrightarrow r_1 = r - \frac{r}{n} = r\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$r_1 = r_2 + a_2 = r_2 + \frac{r}{n} \Longrightarrow r_2 = r_1 - \frac{r}{n} = r - \frac{r}{n} - \frac{r}{n} = r - \frac{2r}{n} = r\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Por inducción se puede probar que

$$r_i = r\left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Entonces el volumen del cilindro C_i es

$$V(C_i) = \pi r_i^2 \left(\frac{h}{n}\right) = \pi r^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \frac{h}{n}$$

por lo que el volumen aproximante, para n cilindros, es

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} V(C_i) = \frac{\pi r^2 h}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2.$$

Hallemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= [n] - \left[\frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] + \left[\frac{1}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right] \\
&= \frac{n}{3} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$V_n = \frac{\pi r^2 h}{n}\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{\pi r^2 h}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right).$$

b) Cuando $n \to +\infty$ entonces la expresión V_n se acerca a

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes

a) $\displaystyle\int (3x^3 - e^x + 10\operatorname{sen} x)dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

Respuesta

a) $\displaystyle\int (3x^3 - e^x + 10\sin x)dx \overset{(1)}{=} 3\int x^3 dx - \int e^x dx + 10\int \sin x dx = 3\frac{x^4}{4} - e^x - 10\cos x + C.$

En (1) se utilizó la linealidad de la integral.

b) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{x^4 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x^2-1)} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)(x-1)}.$

Aplicando el método de las fracciones simples se tiene que:

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)},$$

de donde:

$$I = \int \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\right) dx = -\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

por la linealidad de la integral. Resolviendo de manera independiente cada integral se concluye que

$$I = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

e)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(2x)+1}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(2x)}{2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&\overset{(2)}{=} \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{2} \cdot \frac{dt}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos t dt + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{4}(\sin t|_0^{\pi}) + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Halla el área de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de las abscisas y las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$.

Respuesta

Analicemos primeramente las soluciones de la ecuación $\cos x = \operatorname{sen} x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para esto consideremos la ecuación $\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ y analicemos cuáles de sus soluciones lo son también de la ecuación planteada inicialmente.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \operatorname{sen}^2 x \\
\cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \\
2\cos^2 x - 1 &= 0 \\
(\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones $\cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como estamos buscando soluciones en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ solo se toma $x = \frac{\pi}{4}$. Entonces las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ se cortan en el punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

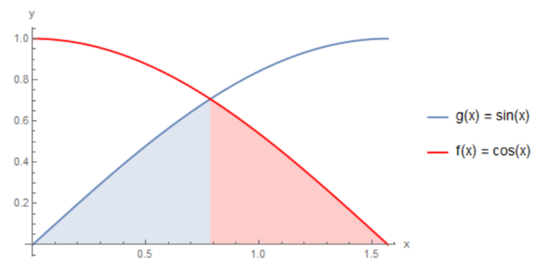

Figura 3: Gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$

Como se muestra en la figura 3, la región que debemos estudiar está acotada inferiormente por el eje OX y superiormente por $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y por $y = \cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que el área de esta región viene dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 - \sqrt{2}.$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.