Introducción al Análisis Matemático

Tema 2

Conferencia 5

Análisis de gráficos de funciones. Fórmula y serie de Taylor.

"El arte es la ciencia de la belleza, las matemáticas son la ciencia de la verdad."

Oscar Wilde

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

1. Introducción

En esta conferencia veremos algunos elementos relacionados con el estudio de los gráficos de funciones. También estudiaremos la fórmula y la serie de Taylor, herramienta clave para el Análisis Matemático. Recomendamos complementar la lectura con el epígrafe II.6 de [1].

2. Análisis de gráficos de funciones

***Ejemplo* 2.1.** *Analicemos el comportamiento de la función $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$ y tracemos aproximadamente la gráfica.*

$$Dom\ f:\ \{x \in \mathbb{R}:\ x \neq 0\}$$

Analicemos la imagen de la función $y = f(x)$. Para esto, consideremos las soluciones de la ecuación $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= k \\ \frac{x^2+1}{x} &= k \\ x^2 + 1 &= kx \\ x^2 - kx + 1 &= 0. \end{aligned}$$

El discriminante (D) de la ecuación anterior es $D = k^2 - 4 = (k+2)(k-2)$; para que la ecuación tenga solución entonces tiene que ser $D \geq 0$, por lo que la ecuación $f(x) = k$ no tiene solución para $k \in (-2, 2)$, de modo que

$$Img\ f:\ \{y \in \mathbb{R}:\ y \notin (-2, 2)\}.$$

La función $y = f(x)$ es impar, es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas:

$$f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Por el análisis que se hizo de Dom f y de Im f se concluye que la función no tiene interceptos con los ejes de coordenadas. Se puede observar, además, que:

- $x \longrightarrow 0^- \Longrightarrow f(x) \longrightarrow -\infty$
- $x \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow f(x) \longrightarrow +\infty$
- $x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) \longrightarrow \pm\infty$

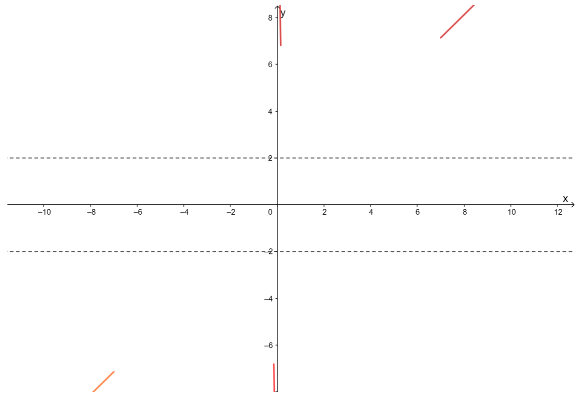

Figura 1: Esbozo de $y = f(x)$ en una vecindad de $x = 0$ y en $\pm\infty$

Gráficamente lo anterior se puede plasmar en la Figura 1

Analicemos ahora la monotonía y los extremos de $y = f(x)$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

haciendo el análisis de signo de f' se tiene que

- f *crece en* $(-\text{ínf}, -1) \cup (1, +\text{ínf})$
- f *decrece en* $(-1, 1)$

de donde se obtiene que $x = -1$ es un máximo local y que $x = 1$ es un mínimo local.

Analicemos ahora la convexidad y las inflexiones.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

haciendo el análisis de signo de f'' se tiene que

- f *es convexa hacia arriba en* $(-\infty, 0)$
- f *es convexa hacia abajo en* $(0, +\infty)$.

Alrededor de $x = 0$ existe un cambio de la convexidad de f, pero como $0 \notin Dom\ f$ entonces $x = 0$ no es un punto de inflexión.

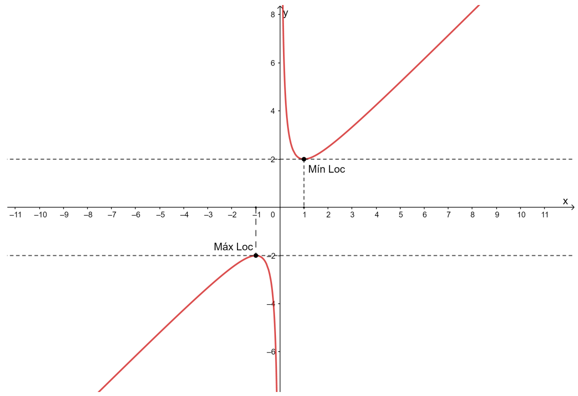

Figura 2: Gráfico de $y = f(x)$

Ejemplo 2.2. *Analicemos el comportamiento de la función $y = g(x) = e^{-x^2}$ y tracemos aproximadamente la gráfica.*

$$Dom\ g = \mathbb{R}.$$

$$Im\ g = (0, 1].$$

La función $y = g(x)$ es par, es decir, es simétrica respecto al eje OY:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x).$$

Analizando $Im\ g$ se concluye que no hay interceptos con el eje OX. El intercepto con el eje OY se tiene en el punto $(0, 1)$.

Si $x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) \longrightarrow 0$.

Analicemos ahora la monotonía y los extremos de $y = g(x)$.

$$g'(x) = -2xe^{-x^2},$$

haciendo el análisis de signo de g' se tiene que

- *g crece en $(-\inf, 0)$*
- *g decrece en $(0, +\infty)$*

de donde se obtiene que $x = 0$ es un máximo local.

Analicemos ahora la convexidad y las inflexiones.

$$g''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 2(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)e^{-x^2},$$

haciendo el análisis de signo de g'' se tiene que

- $g''(x) \geq 0$ *en* $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- $g''(x) \leq 0$ *en* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

por lo que

- g *es convexa hacia abajo en* $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *y en* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.
- g *es convexa hacia arriba en* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Alrededor de $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ *existe un cambio de la convexidad de* g*; como* $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \in Dom\ g$ *entonces* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ *y* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ *son puntos de inflexión de* g.

En la Figura 3 se puede observar el gráfico de $y = g(x)$.

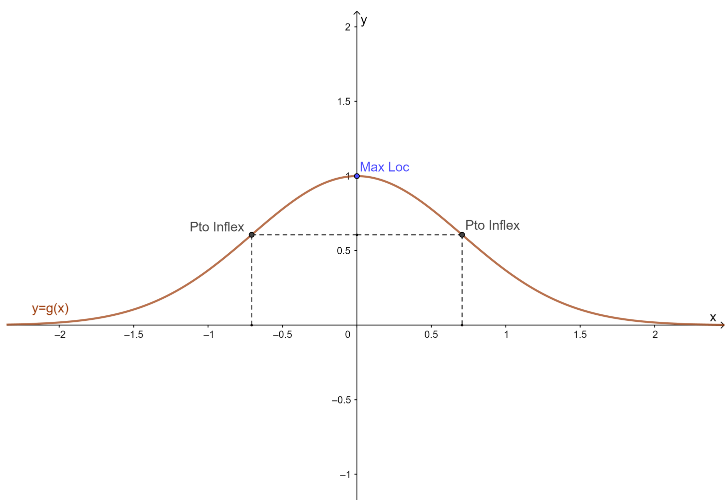

Figura 3: Gráfico de $y = g(x)$

3. La fórmula de Taylor

La obra maestra de Taylor, *Métodos directo e inverso de los incrementos*, se publicó postmorten en 1715 y la proposición 7 contiene la hoy denominada **fórmula de Taylor** para la representación de una función por una serie de potencias formada a través de sus derivadas (o fluxiones en el lenguaje newtoniano).

La idea usada por Taylor para llegar a lafórmula está basada en el polinomio de interpolación empleado por su maestro Newton en introducido en el tema I del curso. Dada la función $y = f(x)$ consideremos una cantidad finita de puntos

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \Delta x,\ x_2 = x_0 + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = x_0 + n\Delta x$$

y sus correspondientes imágenes

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(x_n),$$

el polinomio de interpolación que pasa a través de estos puntos es:

$$p(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}.$$

Supongamos Δx muy pequeño, entonces, los puntos x_i $i = 1, 2, \ldots$ prácticamente coincidirán con x_0. Analicemos en qué se convierten los cocientes incrementales

$$\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k},\ k = 1, \ldots, n$$

cuando $\Delta x \to 0$.

Ya sabemos que

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0).$$

El cociente con la segunda diferencia es

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right],$$

pero

$$\frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f((x_0 + \Delta x) + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \approx f'(x_0 + \Delta x)$$

para Δx infinitesimal.

Luego

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \approx \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \approx f''(x_0)$$

siempre que se considere el incremento Δx muy pequeño.

Similarmente puede razonarse con los restantes cocientes incrementales, en los cuales aparecen las diferencias de orden tres, cuatro, etc. y se obtiene:

$$\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} \approx f^{(k)}(x),\ \Delta x \to 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

De este modo el polinomio de interpolación $p(x)$ se convierte en el llamado *polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$ en el punto x_0*:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (3.2)$$

cuyo grado n está dado por la cantidad de puntos y, por tanto, de derivadas sucesivas que se hayan considerado. Por supuesto, para que (3.2) tenga sentido, debemos suponer que la función $f(x)$ y todas sus derivadas hasta el orden n están bien definidas en el punto x_0.

3.1. Interpretación geométrica del polinomio de Taylor

Analicemos el polinomio de Taylor de una función $y = f(x)$ para varios valores de n.

- Para $n = 1$:

  $$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  coincide con la ordenada de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto M de abscisa x_0.

- Para $n = 2$:

  $$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

  coincide con la ordenada de la parábola que pasa por M y posee la misma tangente que la curva $y = f(x)$.

Una interpretación análoga puede realizarse con los polinomios de grado superior. En la Figura 4 se observa como, en la medida que se toman polinomios de Taylor de grado mayor, la aproximación a la función es cada vez mejor.

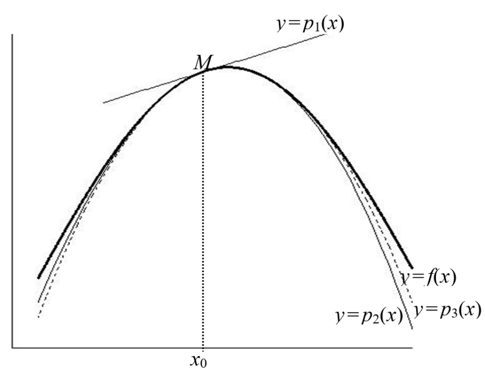

Figura 4: Polinomios de Taylor de $y = f(x)$ de distintos órdenes en x_0

3.2. Serie de Taylor

Es natural pensar que cuanto mayor sea el grado tanto mejor será la aproximación del polinomio de Taylor a la función $f(x)$, razonamiento que justifica la representación en serie:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (3.3)$$

al menos para puntos x que estén bastante próximos a x_0. La representación anterior tiene sentido solo cuando la serie del miembro derecho sea convergente y la función $f(x)$ tenga derivada de cualquier orden en el punto x_0. La expresión (3.3) fue la fórmula a la que llegó Taylor, pero hemos utilizado la notación actual, popularizada por Lagrange a fines del siglo XVIII.

Cuando $x_0 = 0$ al desarrollo anterior frecuentemente se le denomina **fórmula de Maclaurin** (nunca fue la intención de Maclaurin privar a Taylor del reconocimiento). La forma en que Maclaurin llega a la fórmula es diferente a la introducida por Taylor y escrupulosamente señala que este teorema se encuentra en el "Methodus incrementorum"del Dr. Taylor.

3.2.1. Serie de Taylor de una función polinómica

En el caso particular cuando la función $y = f(x)$ es polinómica de grado n, todas las derivadas de orden superior a n serán idénticamente nulas y sus polinomios de Taylor correspondiente a esos valores de n coincidirán totalmente con $f(x)$. En ese caso la serie de Taylor solo tendrá un número finito de términos.

3.2.2. Serie de Taylor de una función no polinómica

Para una función no polinómica, cuando se realiza la aproximación $f(x) = p_n(x)$ y se comete un error, dado por la diferencia

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Este error se hace cada vez más pequeño en la medida que n crece.

Es fácil comprobar que todas las series de potencias que usamos en el tema I como representantes de la funciones elementales coinciden con sus correspondientes series de Taylor. La comprobación por diferentes vías de (3.3) para las funciones elementales provocó que la serie de Taylor fuera considerada como válida para cualquier función por más de 100 años, hasta que Augustin Louis Cauchy (1789-1857) encontró un ejemplo de una función cuya serie de Taylor converge, pero no tiene por suma los valores de la función, es decir la fórmula (3.3) no tiene lugar. Hoy se conocen muchos ejemplos de funciones para las cuales la fórmula de Taylor no es válida, aunque resulta correcta para la mayoría de las funciones que aparecen en las aplicaciones elementales del cálculo. A una función cuya serie de Taylor converge a los correspondientes valores de la función se le llama **función analítica**, por ser el tipo de función que por muchos años fue el objeto principal de estudio del Análisis Infinitesimal.

***Ejemplo* 3.1.** *Sea la función $y = f(x) = e^x$. Se conoce que*

$$f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1.$$

Por (3.3) se tiene que

$$f(x) = e^0 + e^0 x + e^0 \frac{x^2}{2!} + \cdots + e^0 \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

es decir,

$$y = f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

***Ejemplo* 3.2.** *Sea la función $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \\ y''' &= -\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ y^{iv} &= \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{4\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

de manera general

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ n \in \mathbb{N}$$

(Pruebe lo anterior por Inducción Completa).

Entonces

$$f^{(n)}(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{k-1} & si \quad n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & si \quad n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

De modo que

$$y = f(x) = \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(0) + (\operatorname{sen}(x))'|_{x=0} \frac{x}{1!} + (\operatorname{sen}(x))''|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \cdots + (\operatorname{sen}(x))^{(n)}|_{x=0} \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Es decir,

$$y = f(x) = \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Análogamente se obtiene

$$y = f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

***Ejemplo* 3.3.** *Veamos ahora la representación en serie de Taylor para* $y = f(x) = \ln(1+x)$ *alrededor de* $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+x} \Longrightarrow y'(0) = 1\\
y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Longrightarrow y''(0) = -1\\
y''' &= \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow y'''(0) = 2\\
y^{iv} &= -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4} \Longrightarrow y^{iv}(0) = -2\cdot 3\\
y^{v} &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} \Longrightarrow y^{v}(0) = 2\cdot 3\cdot 4
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

(Pruebe lo anterior por Inducción Completa).

Entonces

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Otras representaciones en serie:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right)$$

Referencias

[1] Valdés, C. (2017) *Introdución al Análisis Matemático*. Universidad de La Habana.