Introducción al Análisis Matemático

Tema 3

Clase Práctica 2

Licenciatura en Matemática

Curso 2022

Al estudiante:

Bienvenido a la primera Clase Práctica del segundo tema del curso *Introducción al Análisis Matemático*. Los siguientes ejercicios pueden ser abordados con los conocimientos adquiridos en las conferencias 3.3 y 3.4. ¡Éxitos!

Colectivo de la asignatura

EJERCICIOS

PARTE I

Ejercicio 1.

Calcula la longitud del arco de cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, cuando $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicio 2.

Un punto material se mueve a lo largo de una recta con una velocidad $v = 2t+4 \; cm/s$. Calcula el espacio recorrido en los primeros 10 segundos.

Ejercicio 3.

Una varilla rectilínea de longitud L tiene una distribución de masa dada por

$$m(x) = k \; x,$$

donde k es una constante. Calcula la masa total de la varilla y su centro de masa.

PARTE II

Ejercicio 4.

Calcula las integrales siguientes utilizando cambios de variables adecuados:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sinh 2x}{\sqrt[3]{1+\sinh^2 x}} dx$

Ejercicio 5.

Calcula las integrales siguientes utilizando el método de integración por partes:

a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(ax)\ dx$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^{1} (x^2+2x-5)e^x\ dx$

c) $\displaystyle\int \ln^2 x\ dx$

d) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ dx$

Ejercicio 6.

Calcula las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-1}{x^2-x-1} dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1} e^{\sqrt{x}}\ dx$

f) $\displaystyle\int x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\ dx$

Ejercicio 7.

a) Pruebe que

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \neq n \\ 2\pi, & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

siendo $m, n \in \mathbb{N}$

b) Usando a), calcule las integrales

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx$

iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx$

Ejercicio 8.

Calcula el área de la figura limitada por el eje de abscisas y las curvas $y = \arcsin x$ y $y = \arccos x$.

Ejercicio 9.

Consideremos la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Halla su área y la porción de ella que está dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Sugerencia: Utiliza las coordenadas polares.

Ejercicio 10.

Halla el volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la figura limitada por la curva $\arccos x$ y cuya base es el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 11.

Explica las paradojas siguientes:

a) Como

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \; dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \text{ y } \int \operatorname{sen} x \cos x \; dx = -\frac{\cos^2 x}{x}$$

entonces

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0.$$

b) Ya que

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{dx}{(-x)}$$

entonces

$$\ln(x) = \ln(-x)$$

lo que significa que $-x = x$ y que, por tanto,

$$1 = -1.$$

Ejercicio 12.

La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v0, contando con la resistencia del aire, se expresa por la fórmula

$$v = C \tan\left(-\frac{g}{C}t + \arctan\frac{v_0}{C}\right),$$

donde g es la aceleración de la gravedad y C una constante. Halla la altura máxima a la que se eleva el cuerpo.