Tema I
Espacios y subespacios vectoriales

Conferencia 3:
Dependencia e independencia lineal de un sistema de vectores.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Sumario:

- ✓ Sistema linealmente dependiente
- ✓ Sistema linealmente independiente
- ✓ Caracterización de un sistema linealmente independiente

Bibliografía

Álgebra. Tomo I. Págs. 51-60.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Ejemplo 1: $E=\mathbb{R}_4[x] \quad S=\left(x^2+1,\, x+1,\, x^2-x\right)$

$$L[S]=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_4[x]\,/\,\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R},\ p(x)=\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x+1)+\alpha_3(x^2-x)\right\}$$

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 1 & -1 & -b+d \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -b-c+d \end{array}\right)$$

Condiciones de compatibilidad

$$L[S]=\left\{ax^3+bx^2+cx+d\,/\,a=0\wedge -b-c+d=0, b, c, d\in\mathbb{R}\right\}$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

¿Existirá algún vector en el sistema que no aporte información?

¿Existirá algún vector del sistema que se pueda obtener a partir del resto?

Para el ejemplo anterior:

$$x^2 - x = 1(x^2 + 1) - 1(x + 1)$$

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Definición: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S=(v_1,\ldots,v_n)$ un sistema de vectores de E. Se dice que S es **linealmente dependiente (l.d.)** si $\exists v_j = \sum_{i\neq j} \alpha_i v_i$, en caso contrario se dice que el sistema es **linealmente independiente(l.i.).**

Sistema de vectores

$$\Downarrow$$

hay dos posibilidades mutuamente excluyentes

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Ejemplos:

2. En $E=\mathbb{R}^4$ el sistema $S=\big((1,2,3,0),(0,-1,1,1),(2,5,5,-1)\big)$ es l.d.

3. En $E=\mathbb{R}^5$ el sistema $S=\left(e_1,e_3,e_4,e_2\right)$ es l.i.

4. En $E=\mathbb{K}_n[x]$ consideremos el sistema:

$$S=(1,x,x^2,\dots,x^{n-1}),$$ el cuál es l.i.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

En el caso de **sistemas infinitos** la definición es perfectamente válida

Un $(v_i)_{i\in I}$ *sistema es l.d. si uno de sus vectores se puede expresar como c.l. de los demás*

Ejemplos:

5. En $E=\mathbb{K}[x]$ el sistema $S=(1,x,x^2,...,x^n,\ldots)$ es l.i.

La definición no es un buen método de cálculo

$S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ si S es ld $\Rightarrow \exists v_j = \sum_{i\neq j} \alpha_i v_i$

$$\Rightarrow v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

$$0_E = -v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que es v_1.

La expresión anterior se puede reducir a un SEL homogéneo, si el sistema es CI entonces es l.d.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Propiedades de los sistemas dependientes e independientes

1. Todo sistema que contenga un (sub)sistema ld es ld.
2. Todo subsistema de un sistema li es li.
3. Un sistema formado por un único vector es li si y solo si este no es el vector nulo. (pendiente a demostrar)
4. Todo sistema que contenga al vector nulo es ld.
5. Dos vectores forman un sistema ld si y solo si son proporcionales.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

La definición no es un buen método de cálculo.

Teorema: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}, S=(v_1,...,v_n)$ un sistema de vectores de E; S es **linealmente independiente** si y solo si la combinación lineal que da como resultado el vector nulo es la trivial.

Demostración:

Supongamos que $S=(v_1,...,v_n)$ es l.i.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1\ldots n$$

$(\Rightarrow)$ Asumamos que $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow \lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_{n-1} v_{n-1}$

$$\Rightarrow v_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1}$$

contradicción

Nota: La demostración es válida incluso para una familia infinita de vectores

La definición no es un buen método de cálculo.

Teorema: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S=(v_1,\ldots,v_n)$ un sistema de vectores de E; S es **linealmente independiente** si y solo si la combinación lineal que da como resultado el vector nulo es la trivial.

Demostración:

Supongamos que $S=(v_1,\ldots,v_n)$ es l.i.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1\ldots n$$

$(\Leftarrow)$ Asumamos que uno de los vectores es c.l. del resto

$$\Rightarrow v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_n v_n \ \Rightarrow -v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

contradicción

Nota: La demostración es válida incluso para una familia infinita de vectores

Ejemplos:

6. $E = \mathbb{R}[x] \quad S = \left(x^2 + 1, x + 1, x^2 - x \right)$ ¿Es l.i. o l.d.?

$$0 = \alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(x^2 - x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |A| = 0 \quad (f_3 = f_1 + f_2) \\ \Rightarrow \text{rg}(A) < 3 \Rightarrow \text{CI} \\ \Rightarrow S \text{ es ld} \end{array}$$

7. $E = \mathbb{C}^2\text{–}\mathbb{R}$

$$S = \{(1+i, 0), (0, 1+i), (1, i)\}$$

$$(0,0) = \alpha(1+i, 0) + \beta(0, 1+i) + \gamma(1, i)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \\ \Rightarrow \text{CD} \\ \Rightarrow S \text{ es l.i.} \end{array}$$

Propiedades de los sistemas dependientes e independientes

1. Todo sistema que contenga un (sub)sistema l.d. es l.d.
2. Todo subsistema de un sistema l.i. es l.i.
3. Un sistema formado por un único vector es l.i. si y solo si este no es el vector nulo.
4. Todo sistema que contenga al vector nulo es l.d.
5. Dos vectores forman un sistema l.d. si y solo si son proporcionales.

Teorema: Sea $S=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ un sistema de n vectores del espacio $\mathbb{K}^n$. El sistema es l.i. si y solo si la matriz A, cuyas columnas están formadas por las componentes de $v_1,\ldots,v_n$, tiene determinante no nulo.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.

Estudio individual

¿Para que valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ se puede escribir el vector $v = (1, k, -2)$ como combinación lineal de los vectores:

$$a_1 = (3, -2, 0);\ a_2 = (2, -5, -1);$$

a) ¿Qué interpretación geométrica se puede dar en ese caso?

b) Seleccione un valor de k para que el sistema de vectores v, a_1, a_2 sea l.i.

c) Para el valor hallado en el inciso anterior, encuentre el s.e.v. $L[v, a_1, a_2]$.

Prof. Wilfredo Morales Lezca wilfre@matcom.uh.cu.