

# On line εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων - Μέθοδος Κλίσης - Μέθοδος Lyapunov



## Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

2η εργασία

Απρίλιος 2022

### Θέμα 1

Έχοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

όπου  $x$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u$  είναι η είσοδος και  $a > 0$ ,  $b$  σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι τις οποίες Θέλουμε να εκτιμήσουμε on line. Η απαίτηση για  $a > 0$  πηγάζει από την απαίτηση ευστάθειας του συστήματος κατά την έννοια BIBO, δηλαδή αν βάλω μία φραγμένη είσοδο, θα πάρω μία φραγμένη έξοδο.

Ζητείται ο σχεδιασμός ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων βασισμένο στη μέθοδο κλίσης και η προσομοίωση τη λειτουργίας του.

### Μαθηματική ανάλυση

Το σύστημα είναι αρχικά δοσμένο σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, όμως, η μέθοδος κλίσης εφαρμόζεται σε γραμμικά παραμετροποιημένο σύστημα, δηλαδή της μορφής:

$$y = \theta^* \varphi$$

Έτσι, χρειάζεται αρχικά να παραμετροποιήσουμε το σύστημα, χρησιμοποιώντας ένα ευσταθές φίλτρο πρώτης τάξης (όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης),  $\Lambda(s) = s + a_m$ .

Έστω  $a_m > 0$ ,

$$\dot{x} = a_m x - a_m x - ax + bu \Rightarrow \dot{x} + a_m x = (a_m - a)x + bu$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$sx + a_m x = (a_m - a)x + bu \Rightarrow x(s + a_m) = (a_m - a)x + bu \Rightarrow x = \frac{a_m - a}{s + a_m}x + \frac{b}{s + a_m}u$$

έστω

$$\theta^* = [(a_m - a) \quad b]^T \quad (1)$$

και

$$\varphi = \left[ \frac{1}{s + a_m}x \quad \frac{1}{s + a_m}u \right]^T \quad (2)$$

Συνεπώς:

$$y = x = \theta^{*T} \varphi \quad (3)$$

άρα πλέον το σύστημα είναι γραμμικά παραμετροποιημένο.

Έπειτα φτιάχνουμε το σύστημα αναγνώρισης στη μορφή που είναι το μοντέλο:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \varphi \quad (4)$$

όπου  $\hat{\theta}$  είναι η εκτίμηση του  $\theta$  και  $\hat{x}$  είναι η εκτίμηση του  $x$ , το  $\varphi$  είναι ένα γνωστό διάνυσμα. Σχηματίζουμε το σφάλμα εξόδου/αναγνώρισης:

$$e = x - \hat{x} = x - \hat{\theta}^T \varphi = (\theta^* - \hat{\theta})^T \varphi \Rightarrow e = -\tilde{\theta}^T \varphi \quad (5)$$

όπου  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$  είναι το παραμετρικό σφάλμα.

Ορίζουμε τη συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \varphi)^2}{2}$$

Η μέθοδος της μέγιστης καθόδου έχει τη γενική μορφή:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K$$

Επομένως, το διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης  $K(\hat{\theta})$

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(x - \hat{\theta}^T \varphi) \varphi = -e \varphi$$

άρα

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \varphi$$

όπου το  $e$  είναι μετρήσιμο μέγεθος, όπως το ορίσαμε πριν, το  $\gamma$  είναι μία θετική σταθερά που χρειάζεται να την επιλέξουμε τυπικά μέσω μίας διαδικασίας σφάλματος, και το διάνυσμα  $\varphi$  είναι αυτό που ορίσαμε παραπάνω και έχεις δύο συνιστώσες, τις:

$$\varphi_1 = \frac{1}{s + a_m} x \quad \text{και} \quad \varphi_2 = \frac{1}{s + a_m} u$$

ενώ περνώντας στο πεδίο του χρόνου εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε:

$$\dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, \quad \varphi_2(0) = 0$$

Τελικά, οι εξισώσεις που θα υλοποιήσουμε θα είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1, & \gamma > 0, \quad \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2, & \gamma > 0, \quad \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, & \varphi_1(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, & \varphi_2(0) = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης μπορούμε να παράξουμε την εκτίμηση σε πραγματικό χρόνο.

Ταυτόχρονα με το παραπάνω σύστημα, κατά την προσομοίωση θα λύνουμε και την διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = -ax + bu$ ,  $x(0) = 0$ , η οποία μας δίνει τα δεδομένα εξόδου του συστήματος που μας είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό των άγνωστων παραμέτρων.

Τελικά, οι εκτιμήσεις θα προκύψουν ως εξής:

$$\hat{a} = a_m - \hat{\theta}_1 \quad \text{και} \quad \hat{b} = \hat{\theta}_2$$

Προκειμένου να εγγυηθούμε την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης μπορούμε να επικαλεστούμε το  $\Theta$ . Λαμβάνοντας με συνάρτηση  $V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2}$ , όπου  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ . Αυτή η συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη και έχει παράγωγο αρνητικά ημιορισμένη. Δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το  $\tilde{\theta}$ . LaSalle γιατί εφαρμόζεται μόνο σε χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Μπορούμε, ωστόσο, μέσω μίας τυποποιημένης διαδικασίας (σελ. 50 από τις σημειώσεις του κ. Ροβιθάκη) και χρήσης του λήμματος Barbalat, να δείξουμε ότι όλα τα μεγέθη που κυκλοφορούν στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα, και ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Άρα, το σύστημα εκτίμησης είναι όντως ευσταθές.

## Προσομοίωση

Αρχικά, θα πρέπει να αναζητήσουμε τις κατάλληλες παραμέτρους  $a_m$  και  $\gamma$  προκειμένου να πετύχουμε καλύτερη συμπεριφορά και εκτίμηση των παραμέτρων. Για να γίνει αυτό για να εκτελέσουμε παραμετρική ανάλυση. Είναι, ωστόσο, σαφές ότι οι τιμές που μπορούμε να δοκιμάσουμε είναι πεπερασμένες και θα αρκεστούμε σε κάποια αντιπροσωπευτικά παραδείγματα σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος τιμών. Σε αυτή την εργασία η διαδικασία σχεδίασης γίνεται πειραματικά, με βάση την πρακτική δοκιμής και σφάλματος (trial and error).

Η σχεδίαση του συστήματός, σε κάθε περίπτωση, έχει να κάνει με τις απαιτήσεις που έχουμε. Συνήθως ενδιαφερόμαστε για την ταχύτητα εκτίμησης (δηλαδή ταχύτητα σύγκλισης της απόκρισης του συστήματος αναγνώρισης στην απαιτούμενη τιμή).

### α) Σταθερή είσοδος $u = 3$

Ξεκινάμε κρατώντας το  $a_m = 1$  και αλλάζοντας τις τιμές του  $\gamma$  όπως φαίνονται παρακάτω.

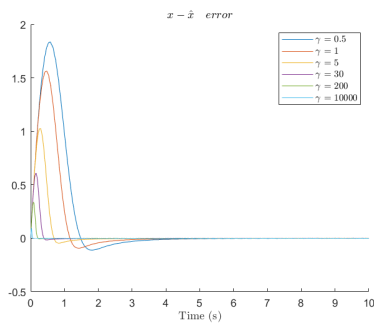


Figure 1: σφάλμα  $x - \hat{x}$

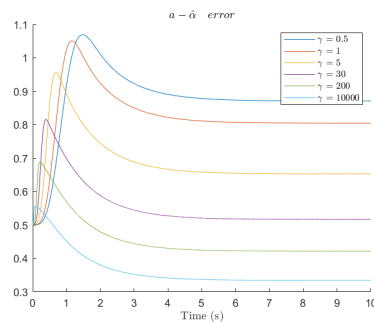


Figure 2: σφάλμα  $a - \hat{a}$

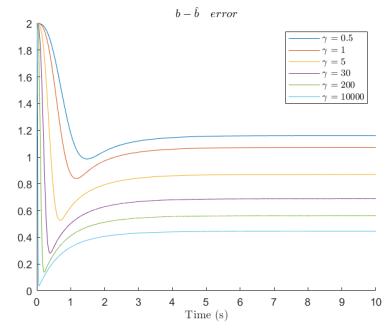


Figure 3: σφάλμα  $b - \hat{b}$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνουμε το  $\gamma$ , τόσο οι εκτιμήσεις συγκλίνουν πιο γρήγορα προς το 0. Είναι, βέβαια, φανερό πως τα σφάλματα των εκτιμήσεων  $a$  και  $b$  δε μηδενίζονται για κανένα  $\gamma$ .

Θα επιλέξουμε  $\gamma = 200$  (για υπολογιστικούς λόγους όχι 1000) και θα συνεχίσουμε στην παραμετρική ανάλυση ως προς  $a_m$ .

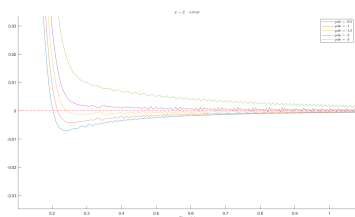


Figure 4: σφάλμα  $x - \hat{x}$

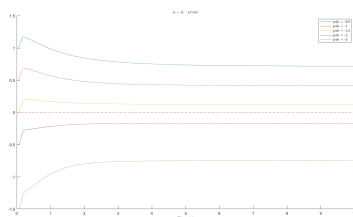


Figure 5: σφάλμα  $a - \hat{a}$

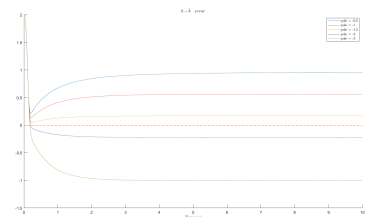


Figure 6: σφάλμα  $b - \hat{b}$

Με βάση την παραμετρική ανάλυση, οι δύο καλύτερες επιλογές είναι ο πόλος στο -1.5 ή στο -2, αν και ο πόλος στο -1.5 φαίνεται να είναι λίγο καλύτερος.

Σχετικά με το  $a_m$ , λόγω του  $\theta$  και των μηδενικών αρχικών συνθηκών του, η εκτίμηση του  $a$  θα ξεκινάει πάντα από το  $a_m$ . Δηλαδή, το  $\hat{\theta}$  προσπαθεί να πλησιάζει το  $\theta$  και όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του  $a_m$ , τόσο πιο μεγάλο θα είναι το χρονικό διάστημα της προσέγγισης. Οπότε γνωρίζοντας ότι  $a = 1.5$ , για  $a_m = 1.5$  θα έχουμε  $\theta = 0$  και επειδή είπαμε  $\hat{\theta}_1(0) = 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $a_m = 1.5$  είναι η καλύτερη επιλογή. Σε ένα πραγματικό σύστημα δε θα γνωρίζουμε τις παραμέτρους, οπότε δεν έχει

νόημα η προηγούμενη ανάλυση. Θα έπρεπε με την τεχνική trial and error, να βρούμε για ποια τιμή του πόλου συγκλίνει πιο γρήγορα η εκτίμηση. Σημείωση: προφανώς  $a_m = -$  πόλος, όπως χρησιμοποιείται στον κώδικα, άρα ο πόλος θα είναι πάντα αρνητικός και το  $a_m$  πάντα θετικό, για να ικανοποιείται η απαραίτητη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος.

Με βάση τις δύο παραπάνω παραμετρικές επιλογές, παίρνουμε τα εξής τελικά αποτελέσματα και σφάλματα για την έξοδο  $x$  και τις παραμέτρους  $a$  και  $b$ :

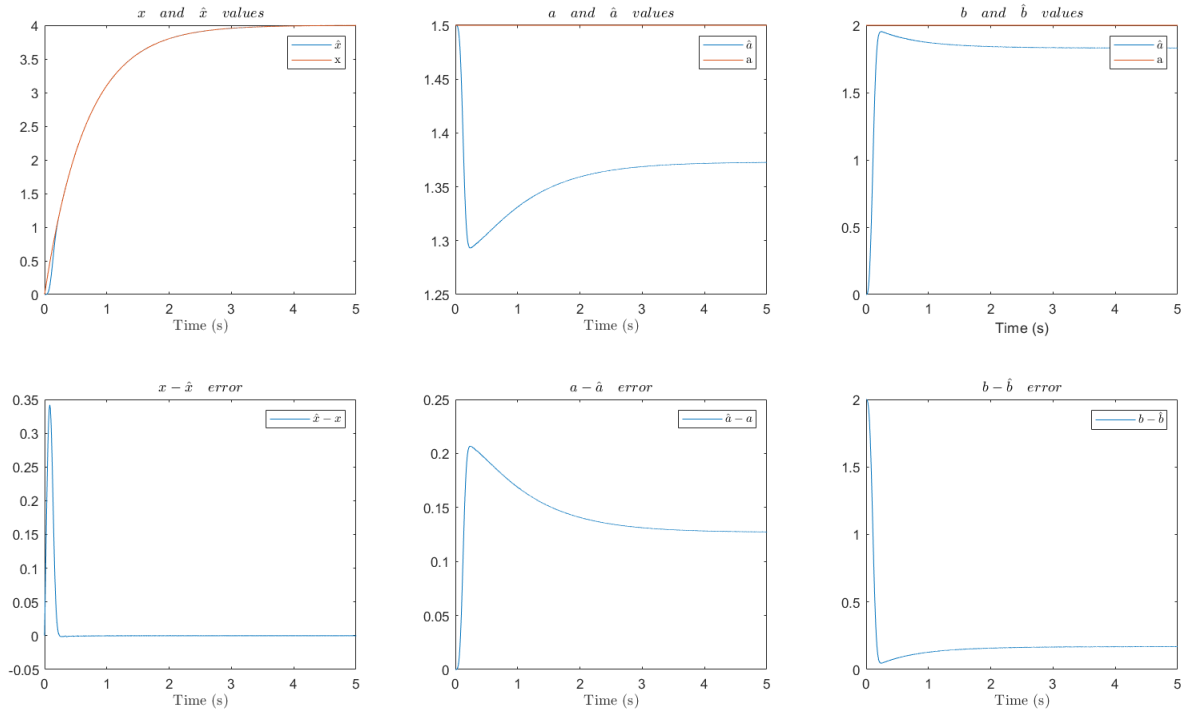


Figure 7: Τελικά αποτελέσματα

Παρατηρούμε φυσικά πως ενώ η έξοδος  $x$  εκτιμάται σωστά, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων  $a$  και  $b$  δεν είναι αντίστοιχα καλές, καθώς το σφάλμα των εκτιμήσεων από τις πραγματικές τιμές είναι αρκετά μεγάλο (αν και μικρότερο σε σχέση με την επιλογή άλλων παραμέτρων).

Αυτό το αποτέλεσμα, ωστόσο, δεν είναι παράξενο, ήταν αναμενόμενο, όπως θα σχολιαστεί στο τέλος και του δεύτερου σκέλους του ερωτήματος.

## β) Συνημιτονοειδής είσοδος $u = 3\cos(2t)$

Με παρόμοιο τρόπο, συνεχίζουμε στην περίπτωση της συνεμιτονοειδούς εισόδου.

Ξεκινώντας με  $a_m = 1$ , κάνουμε παραμετρική ανάλυση ως προς το  $\gamma$ . Δοκιμάζουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές σε ένα μεγάλο εύρος. Η επιλογή των τιμών είναι τυχαία ώστε να αναδεικνύονται, κατά το δυνατόν, οι ιδιότητες του συστήματος, και σίγουρα δεν επιλέγονται ομοιόμορφα καταναμημένες.

Με λίγη προσεκτική παρατήρηση μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η καλύτερη τιμή είναι το  $\gamma = 5$ , που μας δίνει πολύ καλά αποτελέσματα και στα 3 γραφήματα σε πολύ καλό χρόνο. Επομένως, επιλέγουμε αυτή. Σαφέστατα, αν ψάξουμε περισσότερο θα βρούμε ακόμα καλύτερο  $\gamma$ , ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι στόχος μας η βελτιστοποίηση ως προς  $\gamma$ .

Ακόμη, αν επιλέξουμε ένα πολύ μικρό  $\gamma$ , θα έχουμε μια αργή σύγκλιση του  $x$ , ενώ για μεγάλες τιμές του  $\gamma$  θα έχουμε αργή σύγκλιση στις παραμέτρους  $a$  και  $b$ .

Κρατώντας την επιλογή για  $\gamma = 5$ , συνεχίζουμε στην επιλογή του  $a_m$ .

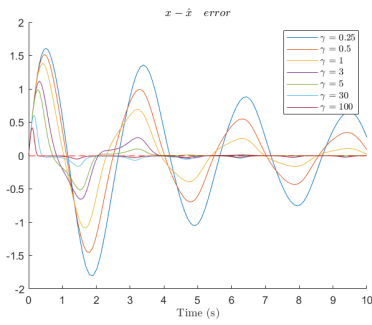


Figure 8: σφάλμα  $x - \hat{x}$

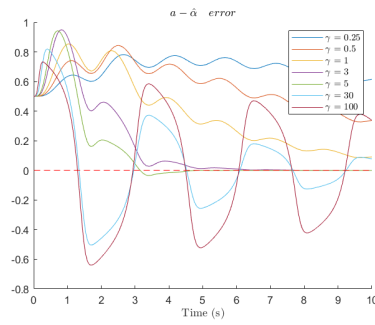


Figure 9: σφάλμα  $a - \hat{a}$

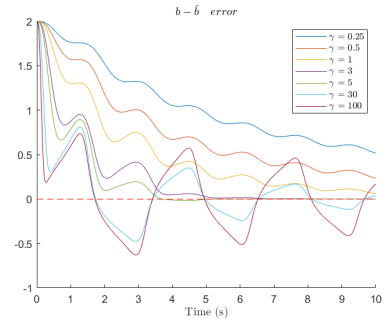


Figure 10: σφάλμα  $b - \hat{b}$

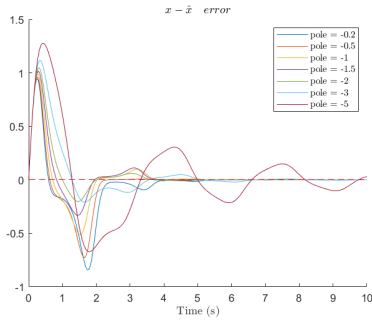


Figure 11: σφάλμα  $x - \hat{x}$

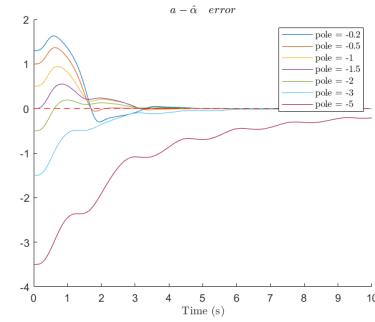


Figure 12: σφάλμα  $a - \hat{a}$

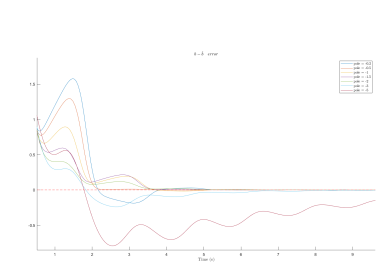


Figure 13: σφάλμα  $b - \hat{b}$

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε πως έχουμε καλά αποτελέσματα όταν  $a_m = 0.5$  ή πόλος  $= -0.5$ .

Παρακάτω βλέπουμε όλα τα ζητούμενα γραφήματα.

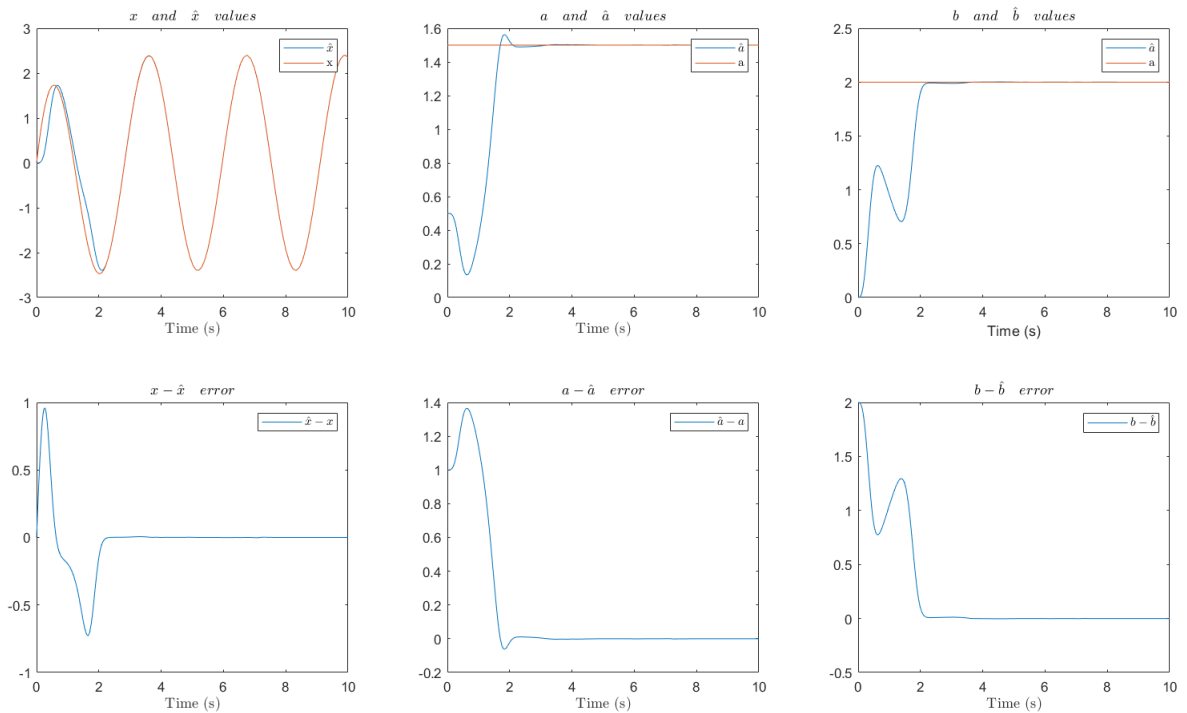


Figure 14: Τελικά αποτελέσματα

Από την παραπάνω ανάλυση καθίσταται σαφές ότι τα δύο παραδείγματα παρουσιάζουν βασικές δι-

αφορές. Αυτή η διαφορά θα έπρεπε να είναι αναμενόμενη με βάση την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Παρατηρούμε ότι η Συνθήκη Επιμέρουςας Διέγερσης,

$$a_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq a_0 I \quad (6)$$

ισχύει για κάθε  $t \geq 0$ , για  $a_1, a_0, T_0 > 0$  και  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας. Αυτή η συνθήκη ισχύει και για τις δύο εισόδους. Η σημασία της συνθήκης αυτής στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι η ενέργεια του σήματος θα πρέπει να είναι τέτοια που να ενεργοποιεί με επιμέμοντα τρόπο το σύστημα ώστε να μπορέσει να εμφανίσει την κρυμμένη πληροφορία  $\theta^*$ . Το πρόβλημα με τη σταθερή είσοδο είναι ότι είναι ικανή τάξης 1 και όχι 2, όπως είναι η δεύτερη είσοδος. Άρα, η σταθερή είσοδος δεν είναι ικανά πλούσια τάξης 2, οπότε για να πάρω τις σωστές εκτιμήσεις των παραμέτρων θα πρέπει να ρυθμίσω σωστά (tuning) το  $\gamma$  και το  $a_m$ . Από την άλλη, η δεύτερη είσοδος είναι ικανή να βρίσκει τιμές των παραμέτρων όχι για κάποιο συγκεκριμένο  $\gamma$ .

Μετά από αρκετό ψάξιμο βάζοντας τις τιμές  $\gamma = 34$  και  $a_m = 1.9$ , δηλαδή πόλος στο -1.9, όντως θα συγκλίνουν και μάλιστα πολύ γρήγορα στις παραμέτρους προς εκτίμηση.

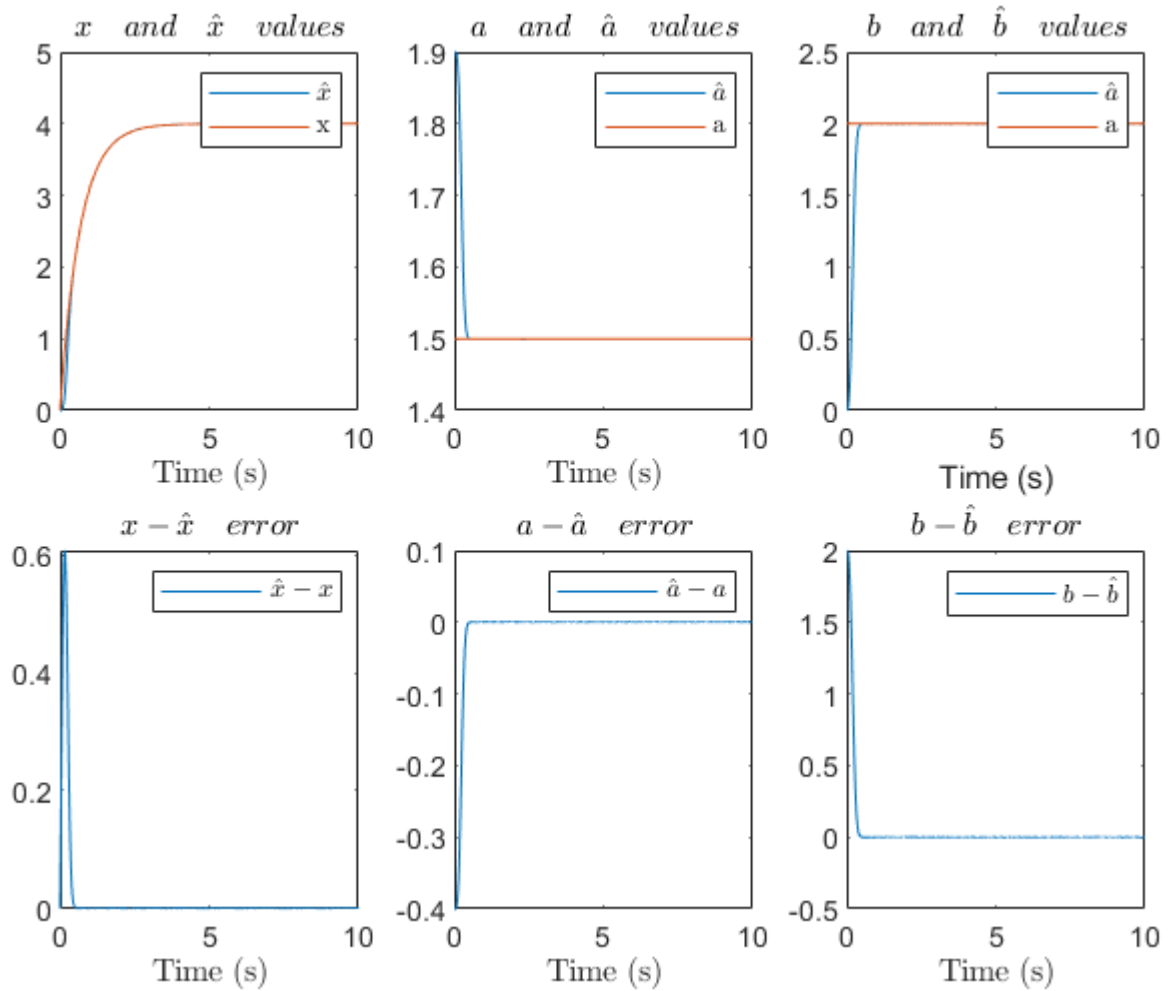


Figure 15: Σύγκλιση τις παραμέτρους προς εκτίμηση με σταθερή είσοδο

## Θέμα 2

### Μαθηματική ανάλυση

Η μέθοδος Lyapunov εφαρμόζεται σε συστήματα εκφρασμένα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, δηλαδή στη μορφή που μας δόθηκε το σύστημα.

Η γενική ιδέα είναι η εξής:

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη από ένα απλό σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u \quad (7)$$

με  $\theta_1^* > 0$  για να είναι ευσταθές το σύστημα, και  $\theta_2^* \neq 0$  για να διασφαλίσουμε την ύπαρξη του καναλιού της εισόδου.

Ακόμη,  $y = x$  και υποθέτουμε επίσης ότι  $u \in L_\infty \iff |u(t)| \leq M$ . Το ζητούμενο είναι να βρούμε τα  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$ .

Χρειαζόμαστε ένα σύστημα αναγνώρισης (identification system) που να παίρνει την ίδια είσοδο με το σύστημά μας και να έχει έξοδο  $\hat{x}$ . Ορίζουμε το σφάλμα  $e = x - \hat{x}$ , το οποίο τροφοδοτούμε σε ένα σύστημα εκτίμησης (αλγόριθμος) για να κάνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, βάσει των οποίων μπορεί να χρειαστεί να τροποποιήσω το σύστημα αναγνώρισης. Προφανώς το σύστημα αναγνώρισης θα πρέπει να περιέχει μόνον μετρήσιμες ποσότητες.

Στην περίπτωση της μεθόδου Lyapunov, μπορούμε να υιοθετήσουμε εκ νέου δύο τοπολογίες.

### Παράλληλη δομή

Με βάση την τοπολογία του συστήματος, θα η προηγούμενη εξίσωση θα πάρει τη μορφή:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Για το σύστημα σφάλματος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} e = x - \hat{x} &\Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u \\ \dot{e} &= -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u + \theta_1^* \hat{x} - \theta_1^* \hat{x} \\ \dot{e} &= -\theta_1^* (x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*) \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u \end{aligned}$$

ενώ ορίζω τα παραμετρικά σφάλματα:

$$\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^* \quad \text{και} \quad \tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$$

άρα

$$\dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

Παρατηρούμε πως αυτό το σύστημα δεν είναι υλοποιήσιμο, καθώς περιέχει άγνωστους όρους.

Επιλέγω την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2$$

με  $\gamma_1 > 0$  και  $\gamma_2 > 0$ . Η συνάρτηση Lyapunov θα πρέπει να μηδενίζεται στα σημεία ισορροπίας, δηλαδή όταν  $x = \hat{x}$ ,  $\hat{\theta}_1 = \theta_1^*$ ,  $\hat{\theta}_2 = \theta_2^*$ . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 \\ \dot{V} &= e(-\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 = -\theta_1^* e^2 + \tilde{\theta}_1 (e\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{\theta}}_1) - \tilde{\theta}_2 (eu - \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\theta}}_2) \end{aligned}$$

επιλέγοντας



$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, & \gamma_1 > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, \end{cases}$$

καταλήγουμε στη:

$$\dot{V} = -\theta_1^* e^2 \leq 0 \quad (8)$$

Και επιπλέον με βάση το λήμμα Barbalat, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι όλα τα σήματα που κυκλοφορούν στον κλειστό βρόχο του συστήματος αναγνώρισης είναι φραγμένα.

Δηλαδή, για ομοιόμορφα φραγμένες εισόδους  $u \in L_\infty$ , ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος  $\hat{x}$  της παράλληλης δομής συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει στην έξοδο  $x$  του πραγματικού συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων αυτών θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Τελικά, οι εξισώσεις που θα πρέπει να επιλύουμε είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, & \gamma_1 > 0, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, & \hat{x}(0) = 0 \end{cases}$$

και οι εκτιμήσεις μας θα είναι:  $\hat{a} = \hat{\theta}_1$  και  $\hat{b} = \hat{\theta}_2$

## Μεικτή δομή

Με βάση την τοπολογία του συστήματος, θα έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

επιλέγοντας  $\theta_m$  για να εγγυηθώ ότι το σύστημα σφάλματος θα είναι ευσταθές.

Για το σύστημα σφάλματος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u - \theta_m (x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*) x - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u - \theta_m e \end{aligned}$$

ενώ ορίζω τα παραμετρικά σφάλματα:

$$\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^* \quad \text{και} \quad \tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$$

άρα

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u$$

Παρατηρούμε πως αυτό το σύστημα δεν είναι υλοποιήσιμο, καθώς περιέχει άγνωστους όρους. Το παραπάνω σύστημα είναι μόνο για ανάλυση.

Επιλέγω την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2$$

με  $\gamma_1 > 0$  και  $\gamma_2 > 0$ . Η συνάρτηση Lyapunov θα πρέπει να μηδενίζεται στα σημεία ισορροπίας, δηλαδή όταν  $x = \hat{x}, \hat{\theta}_1 = \theta_1^*, \hat{\theta}_2 = \theta_2^*$ . Έχουμε ότι:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 = e(-\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1 e x - \tilde{\theta}_2 e u + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2$$

επιλέγοντας

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x, & \gamma_1 > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, \end{cases}$$

καταλήγουμε στη:

$$\dot{V} = -\theta_m^* e^2 \leq 0 \quad (9)$$

Και επιπλέον με βάση το λήμμα Barbalat, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι όλα τα σήματα που κυκλοφορούν στον κλειστό βρόχο του συστήματος αναγνώρισης είναι φραγμένα.

Δηλαδή, για ομοιόμορφα φραγμένες εισόδους  $u \in L_\infty$ , ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων  $\dot{\hat{\theta}}_1, \dot{\hat{\theta}}_2$  εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος  $\hat{x}$  της παράλληλης δομής συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει στην έξοδο  $x$  του πραγματικού συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων αυτών θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Τελικά, οι εξισώσεις που θα πρέπει να επιλύουμε είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x, & \gamma_1 > 0, \quad \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, \quad \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x}), & \hat{x}(0) = 0 \end{cases}$$

και οι εκτιμήσεις μας θα είναι:  $\hat{a} = \hat{\theta}_1$  και  $\hat{b} = \hat{\theta}_2$

## Θόρυβος

Η διαφοροποίηση των δύο συστημάτων υπάρχει στην περίπτωση που εμφανίζεται θόρυβος στην έξοδο του συστήματος, και αντί για  $x$  έχουμε  $x + n$ .

Ο θόρυβος που προστίθεται είναι στη μέτρηση της εξόδου  $x$ , έτσι θα τον προσθέσουμε στις εξισώσεις μας μόνο μετά την πραγματική επίλυση του  $x$  δηλαδή στον ορισμό του σφάλματος. Έτσι, ο θόρυβος θα εμφανίζεται μόνο μετά την πραγματική τιμή και όχι στην εκτίμηση του  $x$ .

Για την παράλληλη τοπολογία είχαμε ότι:

$$\dot{e} = -\theta_1 e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u \quad (10)$$

και

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, & \gamma_1 > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, \end{cases}$$

άρα έχουμε ότι:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1 (x - \hat{x}) \hat{x} = -\gamma_1 x \hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2$$

αν βάλουμε  $x' = x + n$  θα πάρουμε

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x} (x + n - \hat{x}) = -\gamma_1 x \hat{x} - \gamma_1 n \hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2$$

Αντίστοιχα, για τη μεικτή τοπολογία θα έχουμε:

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u \quad (11)$$

και

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x, & \gamma_1 > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0, \end{cases}$$

άρα έχουμε ότι:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x = -\gamma_1 (x - \hat{x}) x = -\gamma_1 x^2 + \gamma_1 x \hat{x}$$

αν βάλουμε  $x' = x + n$  θα πάρουμε

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 (x + n)^2 + \gamma_1 \hat{x} (x + n) = \gamma_1 x \hat{x} + \gamma_1 n \hat{x} - \gamma_1 (x + n)^2$$

Σημείωση: το  $\hat{x}$  δεν έχει θόρυβο, καθώς το φτιάχνουμε εμείς στον υπολογιστή.

Συμπερασματικά, σε ό,τι έχει να κάνει με την ευρωστία ως προς τον θόρυβο στην έξοδο του πραγματικού συστήματος, η παράλληλη δομή αναμένεται να έχει καλύτερη συμπεριφορά γιατί χρησιμοποιεί σήματα που είναι «περισσότερο αθόρυβα», αν κοιτάξουμε τις τάξεις μεγέθους που εμφανίζεται ο θόρυβος. Περιμένουμε στις προσομοιώσεις τα αποτελέσματα παρουσία θορύβου να είναι καλύτερα με την παράλληλη δομή.

## Προσομοίωση

### Παράλληλη τοπολογία

Αρχικά, καλούμαστε να επιλέξουμε τις παραμέτρους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ . Για λόγους ευκολίας των υπολογισμών τους επιλέγουμε να είναι ίσοι. Θα εκτελέσουμε παραμετρική ανάλυση παίρνοντας ορισμένες τιμές  $\gamma$ , όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα. Για τη συγκεκριμένη παραμετρική ανάλυση θα θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος είναι μηδενικός.

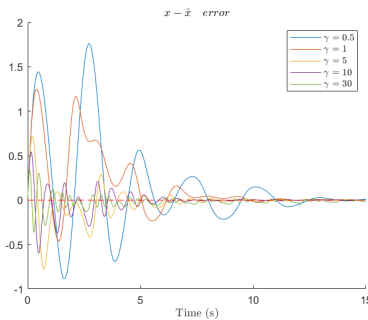


Figure 16: σφάλμα  $x - \hat{x}$

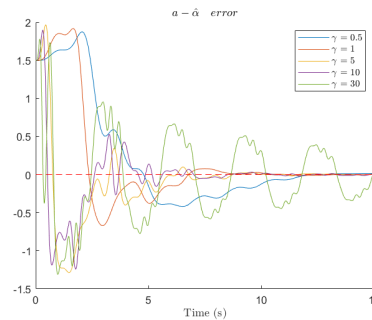


Figure 17: σφάλμα  $a - \hat{a}$

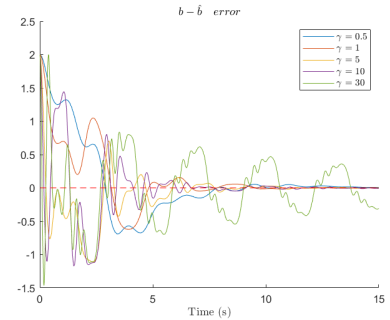


Figure 18: σφάλμα  $b - \hat{b}$

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε πως μία καλή επιλογή είναι η  $\gamma = 5$ , αν και όχι με ιδιαίτερη σαφήνεια, ωστόσο δε χρειάζεται να αφιερώσουμε παραπάνω χρόνο για τη βελτιστοποίησή της.

Πράγματι, αν κάνουμε την ίδια ανάλυση με θόρυβο (έχουμε βγάλει ο  $\gamma = 30$  για λόγους απεικόνισης, γιατί είχε μεγάλες ταλαντώσεις), παρατηρούμε πως το  $\gamma = 5$  είναι όντως μία καλή επιλογή.

Παρουσία του δοσμένου θορύβου έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για τις ζητούμενες τιμές. Σε αντιδιαστολή με αυτό, στην επόμενη εικόνα βλέπουμε τα αποτελέσματα απουσία θορύβου.

Θα δοκιμάσουμε αρχικά να αλλάξουμε την κυκλική συχνότητα  $f$ . Για λόγους απεικόνισης δοκιμάζουμε πρώτα τις συχνότητες 0.5, 1, 2 και έπειτα για 10, 50, 200 Hz.

Για τιμές πλάτους 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5.

Βλέπουμε ότι για αυτές τις συχνότητες έχουμε επικάλυψη των κυματομορφών στο πεδίο του χρόνου. Για πολύ μεγάλα πλάτη, παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων  $a$  και  $b$  αποκλίνουν από τις πραγματικές τιμές.

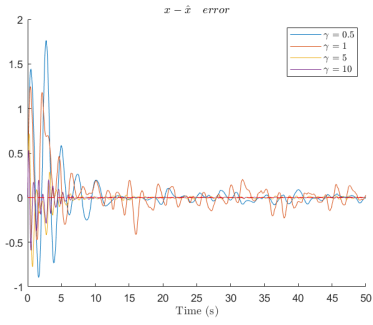


Figure 19: σφάλμα  $x - \hat{x}$

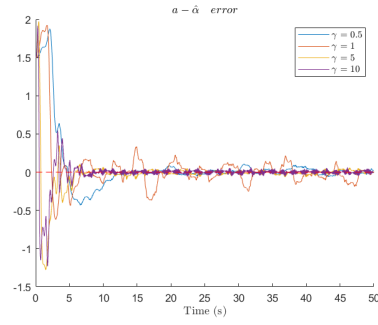


Figure 20: σφάλμα  $a - \hat{a}$

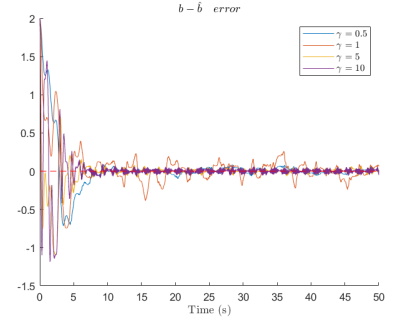


Figure 21: σφάλμα  $b - \hat{b}$

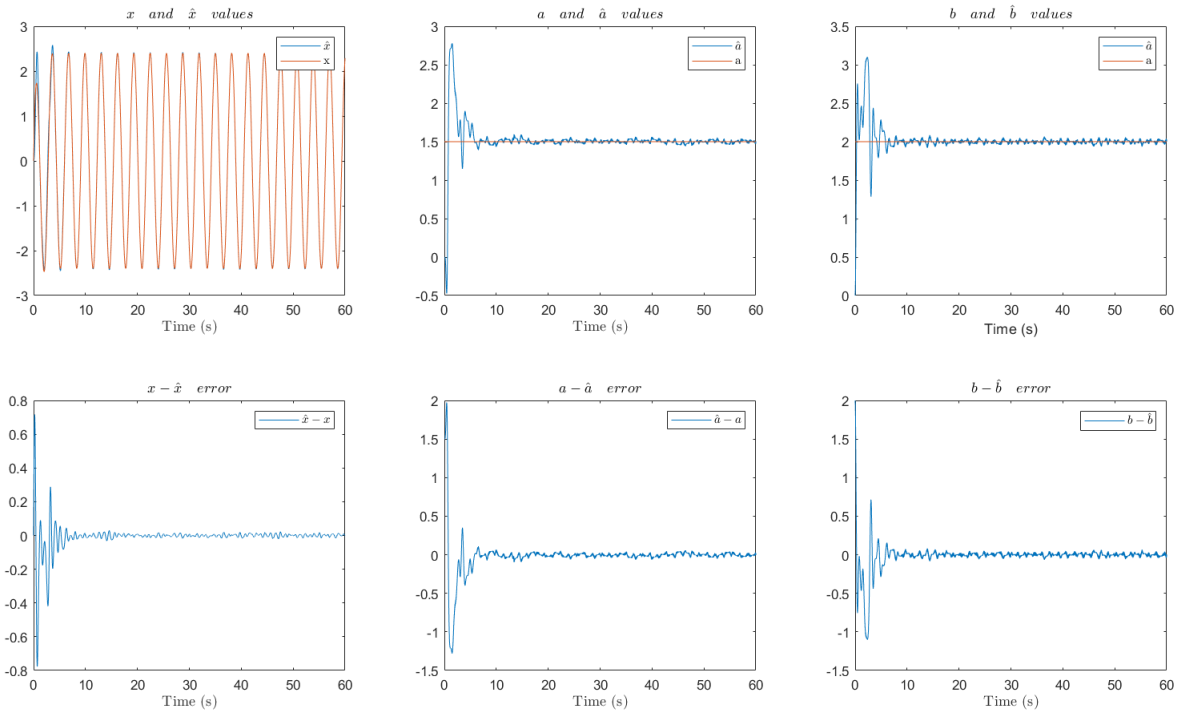


Figure 22: Τελικά αποτελέσματα με τον δοσμένο θόρυβο

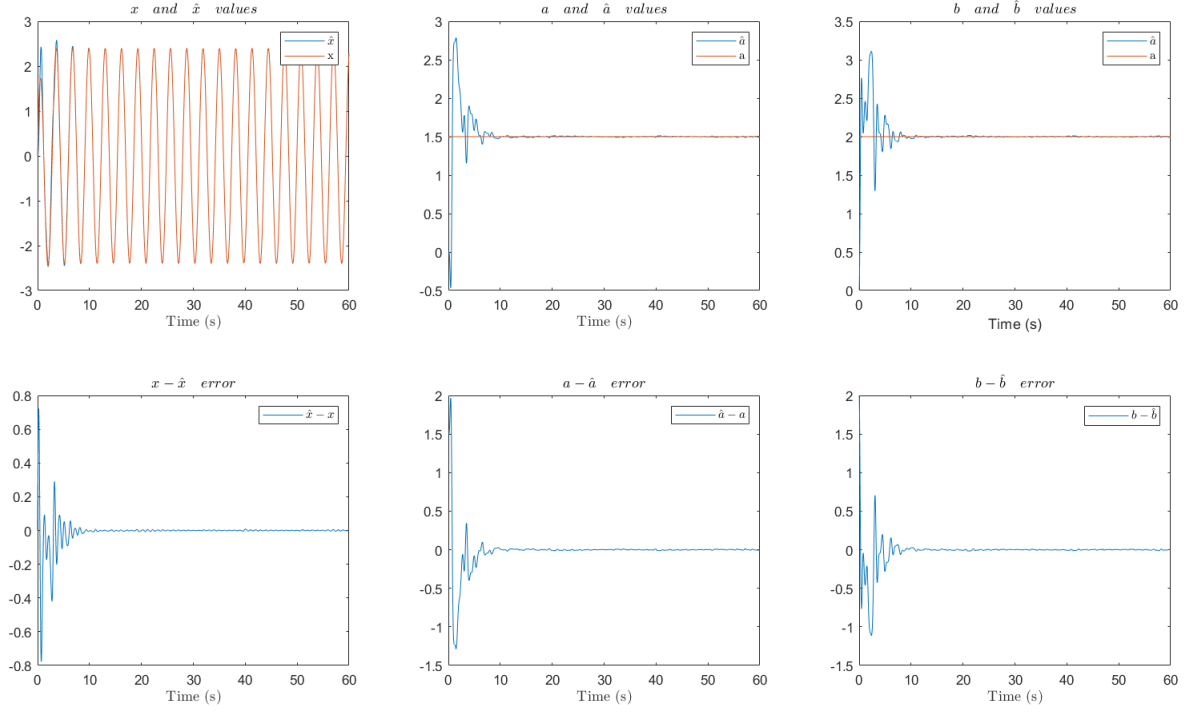


Figure 23: Τελικά αποτελέσματα χωρίς τον δοσμένο θόρυβο

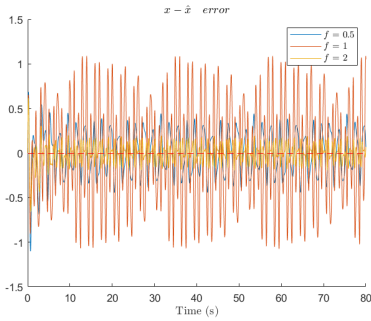


Figure 24: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

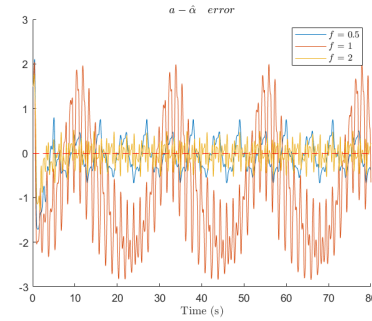


Figure 25: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

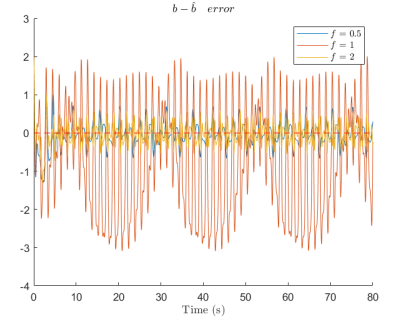


Figure 26: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

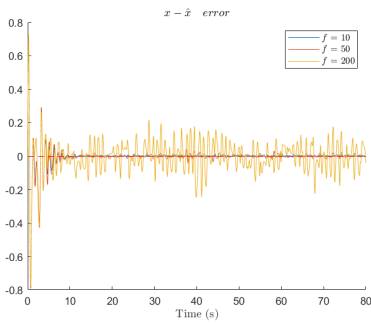


Figure 27: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

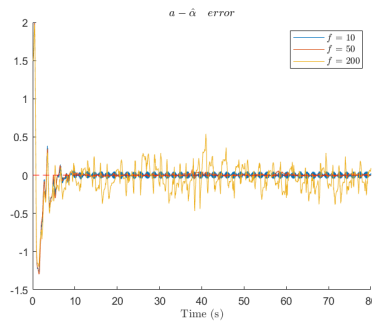


Figure 28: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

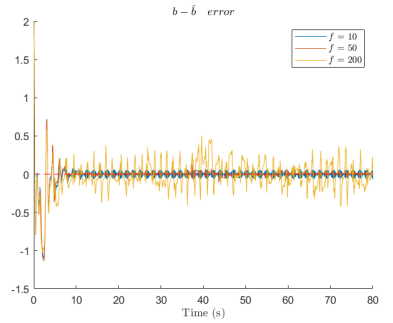


Figure 29: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

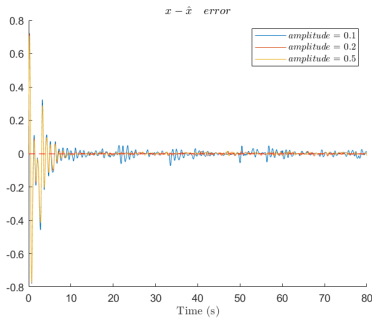


Figure 30: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

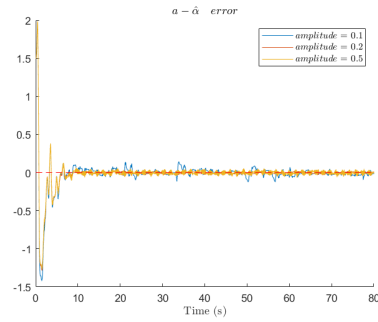


Figure 31: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

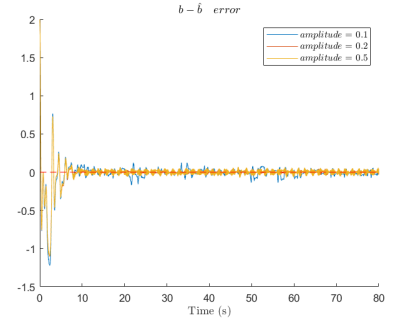


Figure 32: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

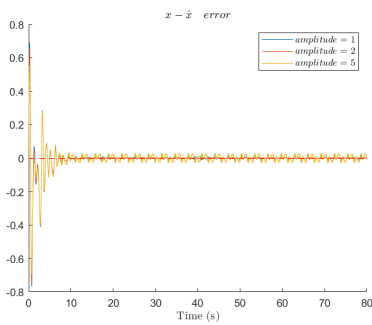


Figure 33: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

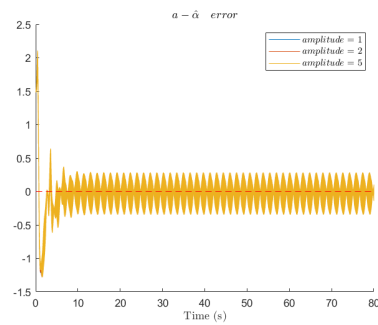


Figure 34: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

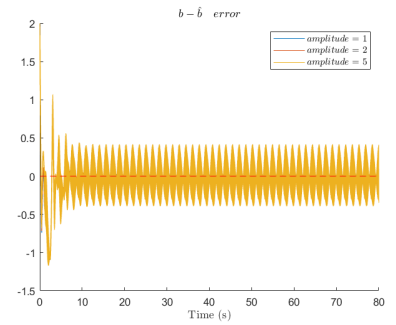


Figure 35: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

## Μεικτή τοπολογία

Για τη μεικτή τοπολογία θα επιλέξουμε να κρατήσουμε τα  $\gamma$  αρχικά ίδια με την παράλληλη. Ωστόσο, έπειτα από την πρώτη προσομοίωση δαπιστώνεται ότι για  $\gamma = 5$  έχουμε αρκετές μικρές σε πλάτος ταλαντώσεις, οπότε θα επιλέξουμε  $\gamma = 1$  και για τα δύο  $\gamma$ , για να τις εξαλείψουμε.

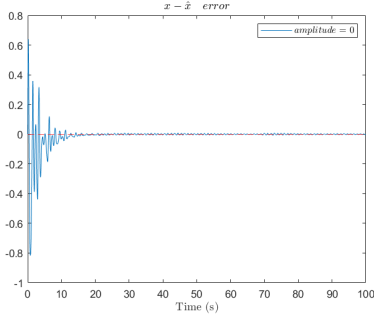


Figure 36: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με  $\gamma = 5$

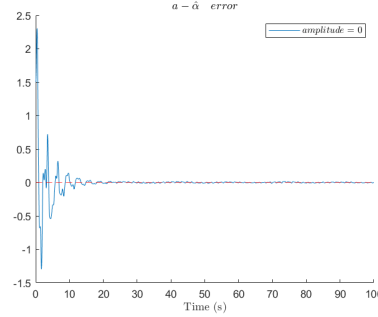


Figure 37: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με  $\gamma = 5$

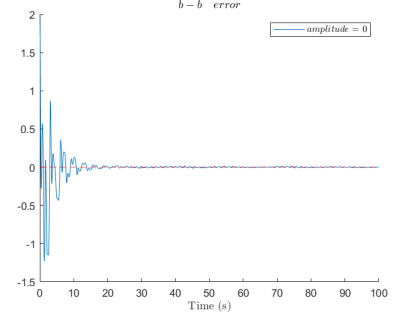


Figure 38: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με  $\gamma = 5$

Όσο για την επιλογή του  $\theta_m$  παρατηρούμε ότι στο 0.5 έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

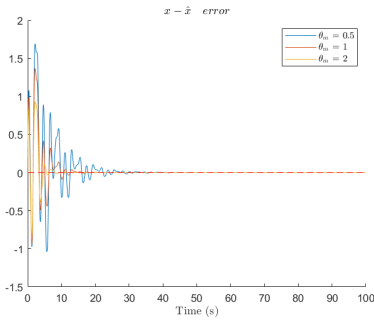


Figure 39: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με  $\gamma = 5$

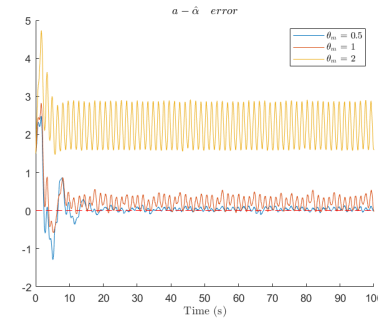


Figure 40: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με  $\gamma = 5$

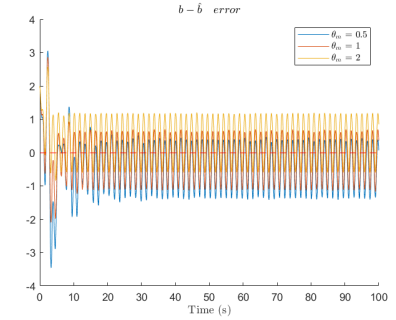


Figure 41: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με  $\gamma = 5$

Για τις παραπάνω επιλεγμένες παραμέτρους έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για μη μηδενικό και μηδενικό θόρυβο αντίστοιχα.

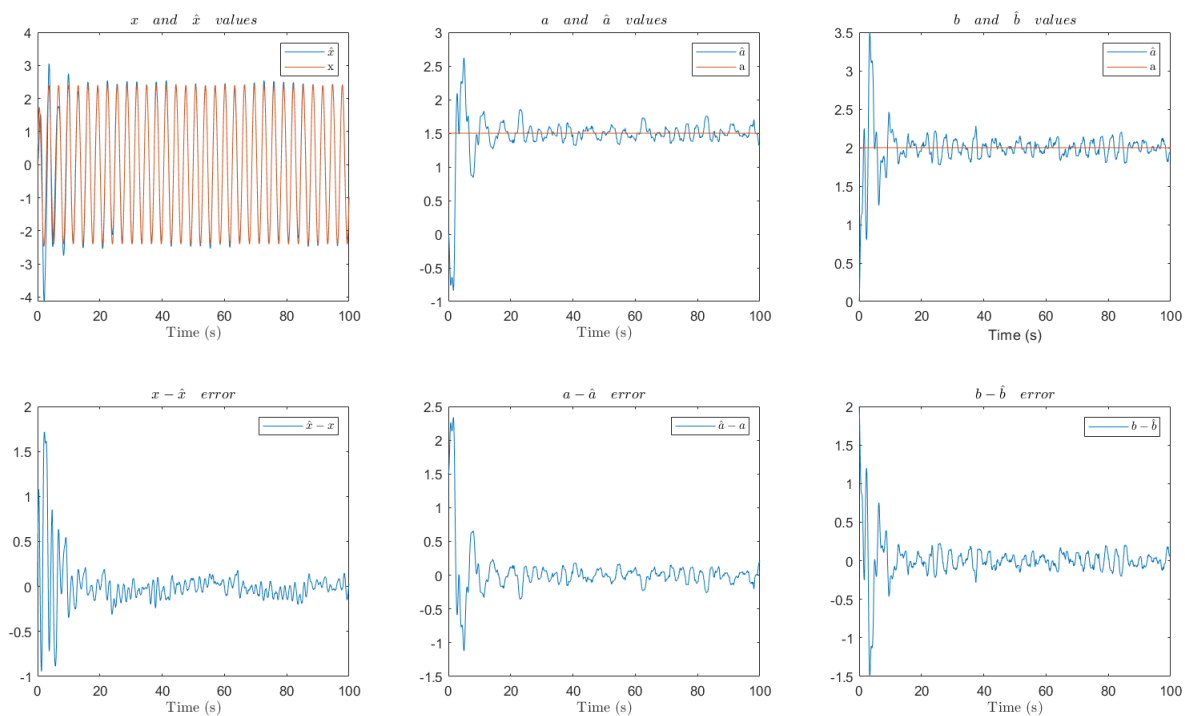


Figure 42: Τελικά αποτελέσματα με θόρυβο

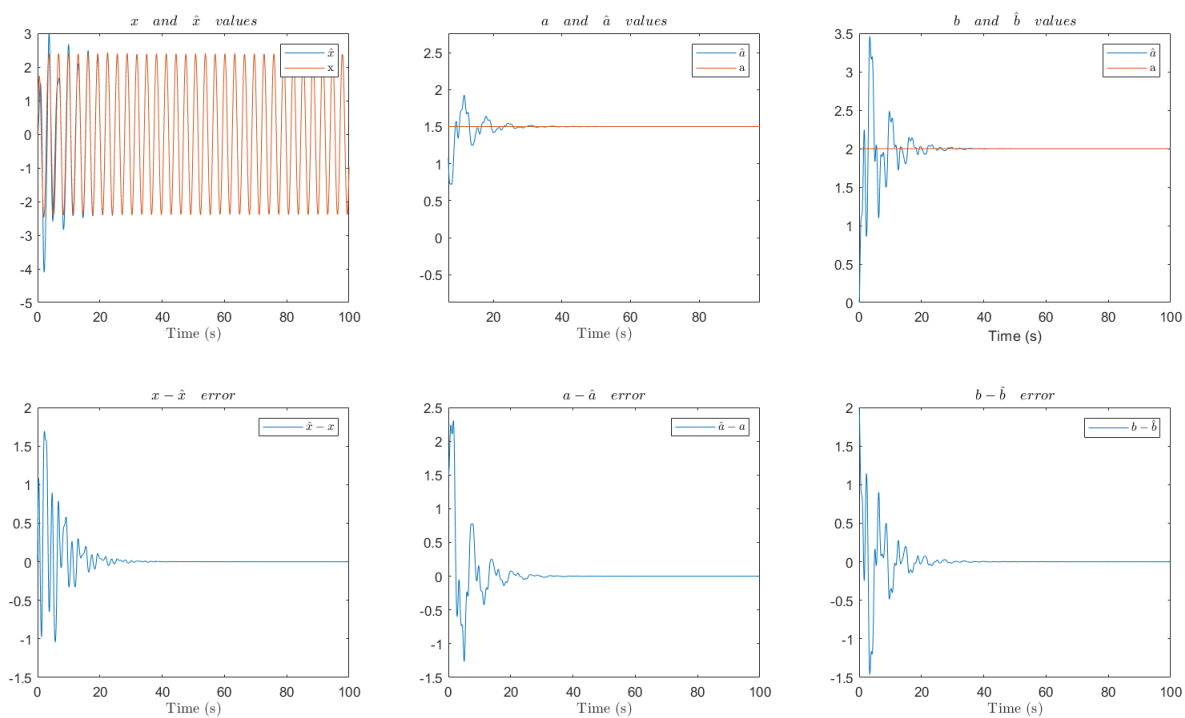


Figure 43: Τελικά αποτελέσματα χωρίς θόρυβο



Θα δοκιμάσουμε αρχικά να αλλάξουμε την κυκλική συχνότητα  $f$ . Για λόγους απεικόνισης δοκιμάζουμε πρώτα τις συχνότητες 0.5, 1, 2.

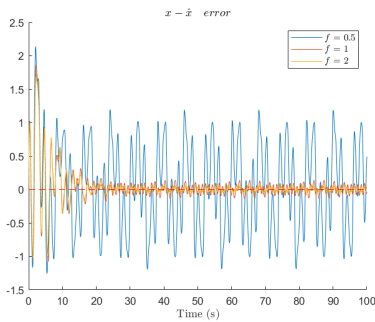


Figure 44: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

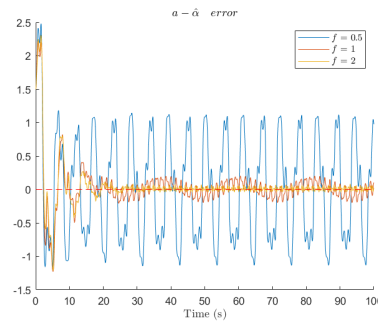


Figure 45: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

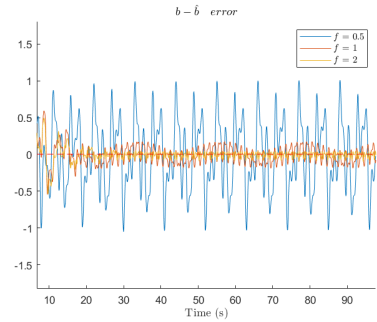


Figure 46: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

Και έπειτα για 10, 50, 200 Hz.

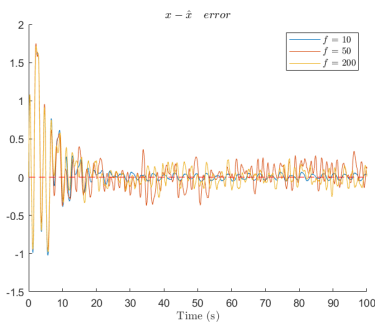


Figure 47: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

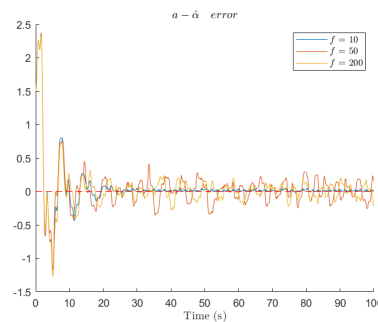


Figure 48: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

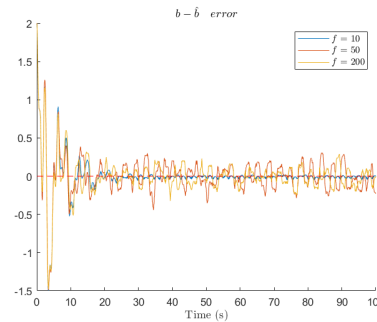


Figure 49: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή συχνότητας θορύβου

Για τιμές πλάτους 0.1, 0.2, 0.5.

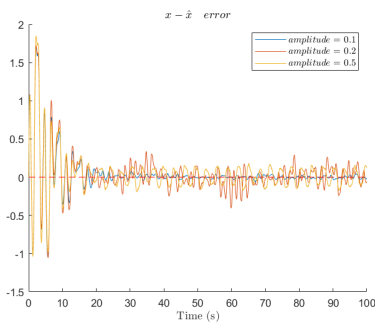


Figure 50: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

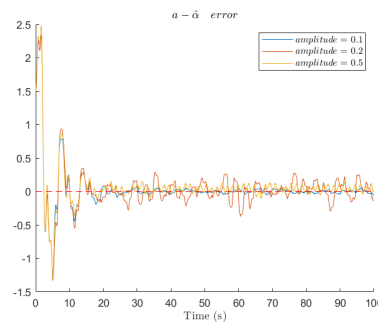


Figure 51: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

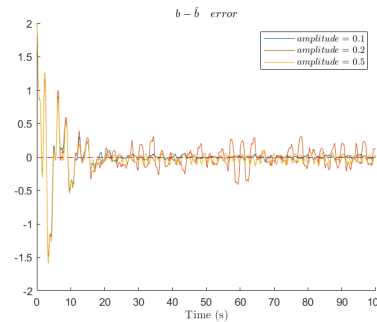


Figure 52: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

για πλάτη 1, 2, 5. Βλέπουμε ότι για αυτές τις συχνότητες έχουμε επικάλυψη των κυματομορφών στο πεδίο του χρόνου. Για πολύ μεγάλα πλάτη, παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων  $a$  και  $b$  αποκλίνουν από τις πραγματικές τιμές.

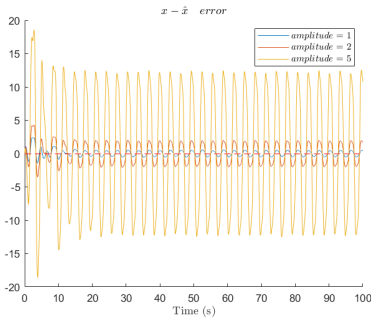


Figure 53: σφάλμα  $x - \hat{x}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

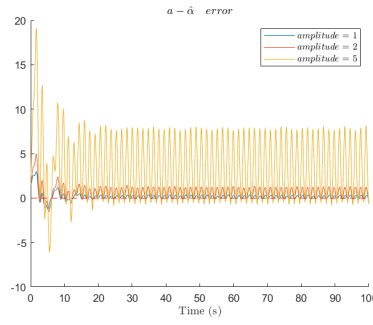


Figure 54: σφάλμα  $a - \hat{a}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

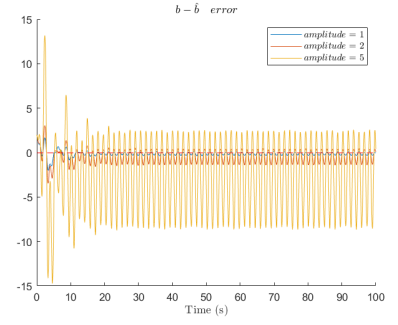


Figure 55: σφάλμα  $b - \hat{b}$  με αλλαγή πλάτους θορύβου

Συγκρίνοντας τελικά τις δύο τοπολογίες, είναι αρκετά φανερό πως για διακυμάνσεις και της συχνότητας και του πλάτους στην παράλληλη τοπολογία παίρνουμε εν γένει καλύτερα αποτελέσματα. Όσο μεγαλώνει το πλάτος του θορύβου, παρατηρούμε και στις δύο περιπτώσεις ότι έντονες και συχνότερες διακυμάνσεις στα σφάλματα, και ειδικά στην εκτίμηση των παραμέτρων  $a$  και  $b$ . Ακόμη, στην παράλληλη τοπολογία γενικά έχουμε μικρότερα πλάτη διακυμάνσεων λόγω του θορύβου που υπάρχει. Συνεπώς, οι προσομοιώσεις μπορούν να επιβεβαιώσουν τα αποτελέσματα της θεωρητικής μας ανάλυσης.

## Θέμα 3

### Μαθηματική ανάλυση

Έχουμε το γραμμικό MIMO σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

όπου  $A \leq 0$ , δηλαδή αρνητικά ημιορισμένος,  $x, u$  μετρήσιμα και  $u \in L_\infty$  και συνεπώς  $x \in L_\infty$ . Θα χρησιμοποιήσουμε παράλληλη δομή συστήματος αναγνώρισης.

Έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (12)$$

με  $\hat{x}$  την εκτίμηση του  $x$ ,  $\hat{A}, \hat{B}$  εκτιμήσεις των πινάκων  $A, B$  αντίστοιχα. Ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης  $e = x - \hat{x}$  και έχουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u$$

$$\dot{e} = A\hat{x} - A\hat{x} - (\hat{A} - A)\hat{x} - (\hat{B} - B)u$$

ορίζοντας τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{A} = \hat{A} - A$  και  $\tilde{B} = \hat{B} - B$  έχουμε:

$$\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{x} - \tilde{B}u$$

έχουμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\}$$

Σημείωση: θα μπορούσαμε να έχουμε και πίνακες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  μέσα στα trace, και είναι θέμα επιλογής του σχεδιαστή. Εμείς για λόγους ευκολίας, δεν θα εισαγάγουμε αυτούς του πίνακες στην ανάλυση.

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\} = e^T Ae - e^T \tilde{A}\hat{x} - e^T \tilde{B}u + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\}$$

εφόσον ισχύουν ότι  $\dot{\tilde{B}} = \dot{\hat{B}} - \dot{B} = \dot{\hat{B}}$  και  $\dot{\tilde{A}} = \dot{\hat{A}} - \dot{A} = \dot{\hat{A}}$  Με βάση τις ιδιότητες που ισχύουν για το trace, ή ίχνος πίνακα, έχουμε:

$$e^T \tilde{A}\hat{x} = \text{tr}\{\tilde{A}\hat{x}e^T\}$$

$$\text{tr}\{e\hat{x}^T \tilde{A}^T\} = \text{tr}\{\tilde{A}^T e\hat{x}^T\}$$

$$e^T \tilde{B}u = \text{tr}\{\tilde{B}ue^T\}$$

$$\text{tr}\{eu^T \tilde{B}^T\} = \text{tr}\{\tilde{B}^T eu^T\}$$

και έτσι θα πάρουμε:

$$\dot{V} = e^T Ae + \text{tr}\{-\tilde{A}^T e\hat{x}^T - \tilde{B}^T eu^T + \tilde{A}^T \dot{\hat{A}} + \tilde{B}^T \dot{\hat{B}}\}$$

και έτσι επιλέγω:

$$\dot{\hat{A}} = e\hat{x}^T \quad \text{ή} \quad \dot{\hat{A}} = \gamma_1 e\hat{x}^T$$

και

$$\dot{\hat{B}} = eu^T \quad \text{ή} \quad \dot{\hat{B}} = \gamma_2 eu^T$$

και τελικά θα έχουμε:

$$\dot{V} = e^T Ae \leq 0 \quad \text{εφόσον} \quad A \leq 0$$

Συνεπώς,

$$\tilde{A}, \tilde{B} \in L_\infty$$

επειδή  $e \in L_\infty$  και ταυτόχρονα  $e \in L_2$  τότε με βάση το λήμμα του Barbalat:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{A}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{B}}(t) = 0$$

Έχουμε λοιπόν εξασφαλίσει την ευστάθεια και τη σύγκλιση της εκτίμησης στην πραγματική έξοδο για ομοιόμορφη και φραγμένη είσοδο.

Το σύστημα που θα πρέπει να επιλύσουμε κατά την προσομοίωση είναι το εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, & \hat{x}(0) = [0 \ 0]^T \\ \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = [0 \ 0]^T \\ \dot{\hat{A}} = \gamma_1 e \hat{x}^T, & \hat{A}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u^T, & \hat{B}(0) = [0 \ 0]^T \end{cases}$$

## Προσομοίωση

Με βάση τον παραπάνω σχεδιασμό παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα.

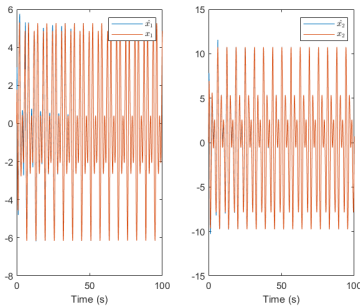


Figure 56:  $x$  και  $\hat{x}$

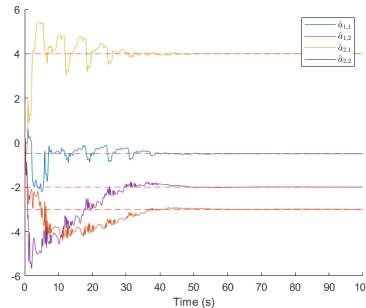


Figure 57:  $a$  και  $\hat{a}$

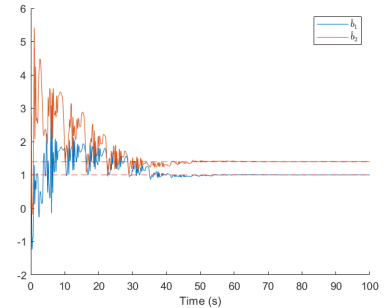


Figure 58:  $b$  και  $\hat{b}$

Τέλος, για τα σφάλματα έχουμε:

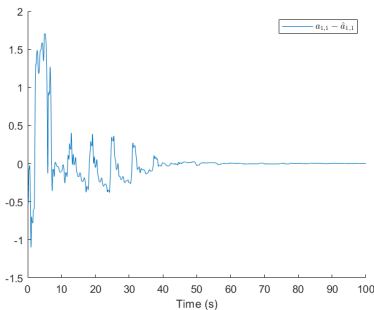


Figure 59: σφάλμα για το  $a_{1,1}$

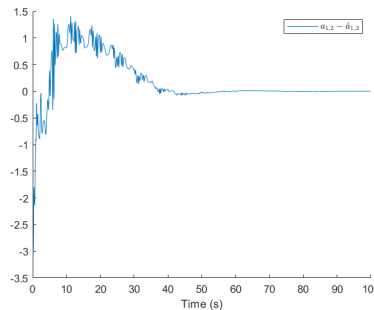


Figure 60: σφάλμα για το  $a_{1,2}$

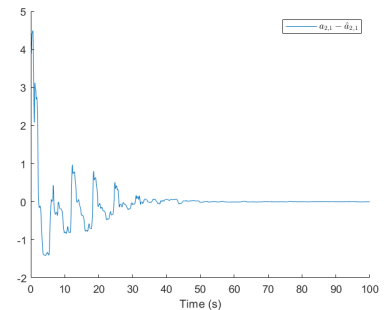


Figure 61: σφάλμα για το  $a_{2,1}$

Από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων συμπεραίνουμε ότι η σχεδίαση είναι επιτυχημένη, καθώς οι παράμετροι εκτιμούνται σωστά έχοντας πολύ μικρά σφάλματα και σε ικανοποιητικό και πεπερασμένο χρόνο.

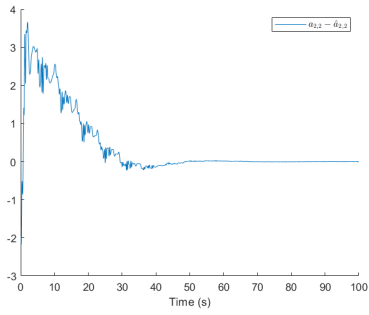


Figure 62: σφάλμα για το  $a_{2,2}$

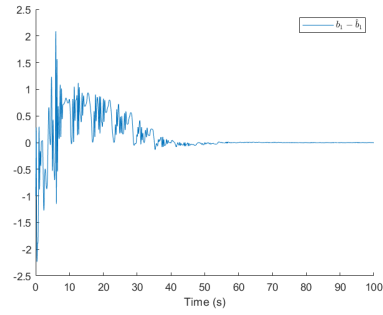


Figure 63: σφάλμα για το  $b_1$

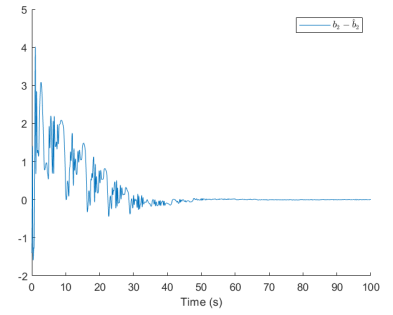


Figure 64: σφάλμα για το  $b_2$

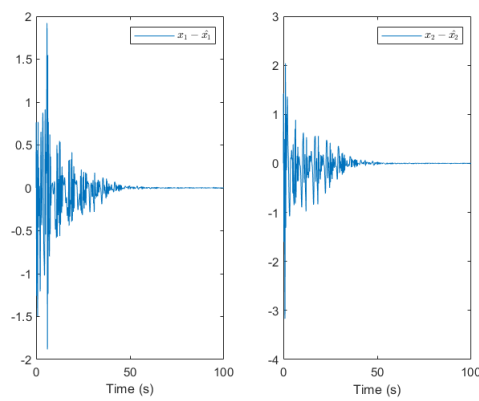


Figure 65: σφάλματα για τις εξόδους  $x$

Σημείωση για τα διαγράμματα: για να εμφανίσετε τα διαγράμματα της αναφοράς θα πρέπει ενδεχομένως να κάνετε `uncomment` κάποια σημεία του κώδικα μαζί με τις απαραίτητες απλές λειτουργικές αλλαγές. Καθώς ο όγκος των διαγραμμάτων είναι μεγάλος, δεν υπάρχουν όλα αυτούσια στον κώδικα καθώς θα τον αύξαναν σε σημαντικό βαθμό, κάτι που προτιμήθηκε να αποφευχθεί.