

Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων



Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

1η εργασία

Απρίλιος 2022

Θέμα 1

Το δοσμένο σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

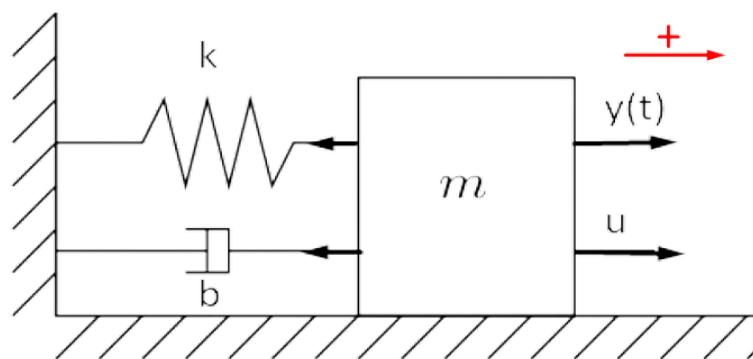


Figure 1: Γραφική απεικόνιση του δοσμένου συστήματος

όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης, k είναι η σταθερά του ελατηρίου, u μια εξωτερική δύναμη και $y(t)$ είναι η μετατόπιση της μάζας m εξαιτίας της δύναμης που εφαρμόζεται πάνω της.

Ζητούμενο α - Γραμμική παραμετροποίηση

Προκειμένου να βρεθεί το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση αυτή της εξωτερικής δύναμης u . Οι δυνάμεις που ασκούν το ελατήριο και ο αποσβεστήρας αντιτίθενται στις δυνάμεις που ασκεί η εξωτερική δύναμη u . Συνεπώς:

$$\Sigma F = m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \ddot{y} \Rightarrow u - ky - b\dot{y} = m \ddot{y} \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{u}{m}$$

Μπορούμε να ενσωματώσουμε όλες τις παραμέτρους της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης σε ένα διάνυσμα θ^*

$$\theta^* = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

και όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου με τις παραγώγους τους με $n = 2$ και $m = 0$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\Delta_{n-1}^T(s)y & \Delta_m^T(s)u \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\Delta_1^T(s)y & \Delta_0^T(s)u \end{bmatrix}^T$$

όπου

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} s^i & s^{i-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$

Πλέον μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση σε πιο συμπαγή μορφή, γραμμική ως προς θ^* :

$$\ddot{y} = \theta^{*T} \Delta \quad (1)$$

Τα διαθέσιμα σήματα προς μέτρηση είναι η είσοδος u και η έξοδος y , ενώ δε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παράγωγοι ανώτερης τάξης της εισόδου και της εξόδου είναι διαθέσιμες προς μέτρηση. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, μπορούμε να φιλτράρουμε τα δύο μέρη της (1) με ένα 2ης τάξης φίλτρο $\Lambda(s)$. Δηλαδή, αφού ξέρουμε την τάξη του μοντέλου, μπορούμε να φτιάξουμε ένα ευσταθές φίλτρο ίδιας τάξης.

Έτσι, επιλέγουμε ένα ευσταθές φίλτρο με αρνητικές πραγματικές ρίζες ρ_1 και ρ_2 (ώστε οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο), διαφορετικές εν γένει, αν και θα μπορούσαν να είναι ίσες:

$$\Lambda(s) = (s - \rho_1)(s - \rho_2) = s^2 - (\rho_1 + \rho_2)s + \rho_1\rho_2 \quad (2)$$

Με την εφαρμογή του φίλτρου στην (1) παίρνουμε:

$$z = \theta^{*T} \zeta \quad (3)$$

όπου

$$z = \frac{1}{\Lambda(s)} y^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y & \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} y & \frac{[1]}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

και επιπλέον

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s) \quad \text{με} \quad \lambda = [-(\rho_1 + \rho_2) \quad \rho_1\rho_2]^T$$

Συνεπώς,

$$z = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y = y - \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \Rightarrow y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \quad (4)$$

Μπορούμε επιπλέον να ορίσουμε για τις παραμέτρους της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}^T \quad \theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

άρα η (3)

$$z = \theta^{*T} \zeta \Rightarrow z = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2$$

με

$$\zeta_1 = \frac{-\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \text{και} \quad \zeta_2 = \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u$$

Τελικά, η (4) θα γίνει:

$$y = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2 - \lambda^T \zeta_1 = \theta_\lambda^T \zeta \quad \text{με} \quad \theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T \Rightarrow$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} + (\rho_1 + \rho_2) & \frac{k}{m} - \rho_1\rho_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T \zeta$$

που αποτελεί και τη γραμμική παραμετροποιημένη μορφή.

Ζητούμενο β - Σχεδιασμός αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους m , b , k με μετρήσεις μόνο της μετατόπισης και της εξωτερικής δύναμης που εφαρμόζεται στη μάζα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε γραμμικά παραμετροποιημένα μοντέλα, άρα:

$$y = \theta^T \varphi$$

όπου είναι n έξοδος, θ το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων και φ το διάνυσμα οπισθοδρόμησης. Θεωρούμε το σύνολο Y από N μετρήσεις της εξόδου:

$$Y = [y \quad y(2) \quad \dots \quad y(N)]$$

Έπειτα, δημιουργούμε τον πίνακα Φ , όπου η κάθε στήλη έχει μετρήσεις της ίδιας παραμέτρου και κάθε γραμμή έχει τη N -στή μέτρηση για την τριάδα των παραμέτρων.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να ελαχιστοποιεί το σφάλμα μεταξύ της εκτίμησης και των τιμών του πραγματικού συστήματος, και αυτό θα επιτευχθεί μέσω της εύρεσης καταλλήλου θ που να το κάνει αυτό. Έτσι, ορίζουμε το σφάλμα:

$$e = Y - \Phi\theta$$

και ονομάζουμε θ_0 το προς αναζήτηση θ

$$\theta_0 = \operatorname{argmin}_{\theta} \frac{|e|^2}{2} = \operatorname{argmin}_{\theta} \frac{e^T e}{2}$$

Ας ονομάσουμε V τη συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, $V = \frac{|Y - \Phi\theta|^2}{2}$, ενώ καθώς η V είναι κυρτή συνάρτηση, θα έχει μοναδικό ελάχιστο, που είναι και το ολικό ελάχιστο.

Παραγωγίζοντας, έχουμε:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow (Y - \Phi\theta_0)^T (-\Phi) = 0 \Rightarrow -Y^T \Phi + \theta_0^T \Phi^T \Phi = 0 \Rightarrow \theta_0^T \Phi^T \Phi = Y^T \Phi$$

και εφόσον ο $\Phi^T \Phi$ είναι αντιστρέψιμος

$$\theta_0^T = Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

και ο σχεδιασμός του αλγορίθμου έχει ολοκληρωθεί. Η παραπάνω λύση του συστήματος μας δίνει και το επιθυμητό θ_0 .

Ζητούμενο γ - Προσομοίωση του αλγορίθμου με δοσμένες τιμές

Αρχικά, πρέπει να προσδιορίσουμε του πόλους του φίλτρου ώστε να πάρουμε καλές εκτιμήσεις. Για αυτό, θα φτιάξουμε ένα διάγραμμα με τη χρήση μίας διπλής `for` που να περνάει από κάθε τιμή (αρνητική) και για τους δύο πόλους στο οποίο θα απεικονίζεται το αρνητικό (για λόγους απεικόνισης) άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων όλων των παραμέτρων. Από αυτό το διάγραμμα θα πάρουμε το μέγιστο, το οποίο μας δίνει και τους καλύτερους δυνατούς πόλους προς επιλογή. Είναι προφανές

πως όσο αριστερότερα πάμε σε τιμές πόλων έχουμε χειρότερες εκτιμήσεις. Γι αυτό θα περιορίσουμε το ψάξιμο στην περιοχή από το 0.1 έως το 8, με βήμα 0.1. Μια επιλογή ενός διπλού πόλου, μπορεί επίσης να μας φέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα με πολύ μικρότερες υπολογιστικές απαιτήσεις, οπότε η επιλογή της εύρεσης του πόλου (διπλού ή 2 διαφορετικών) έγκειται στο υπολογιστικό μας budget.

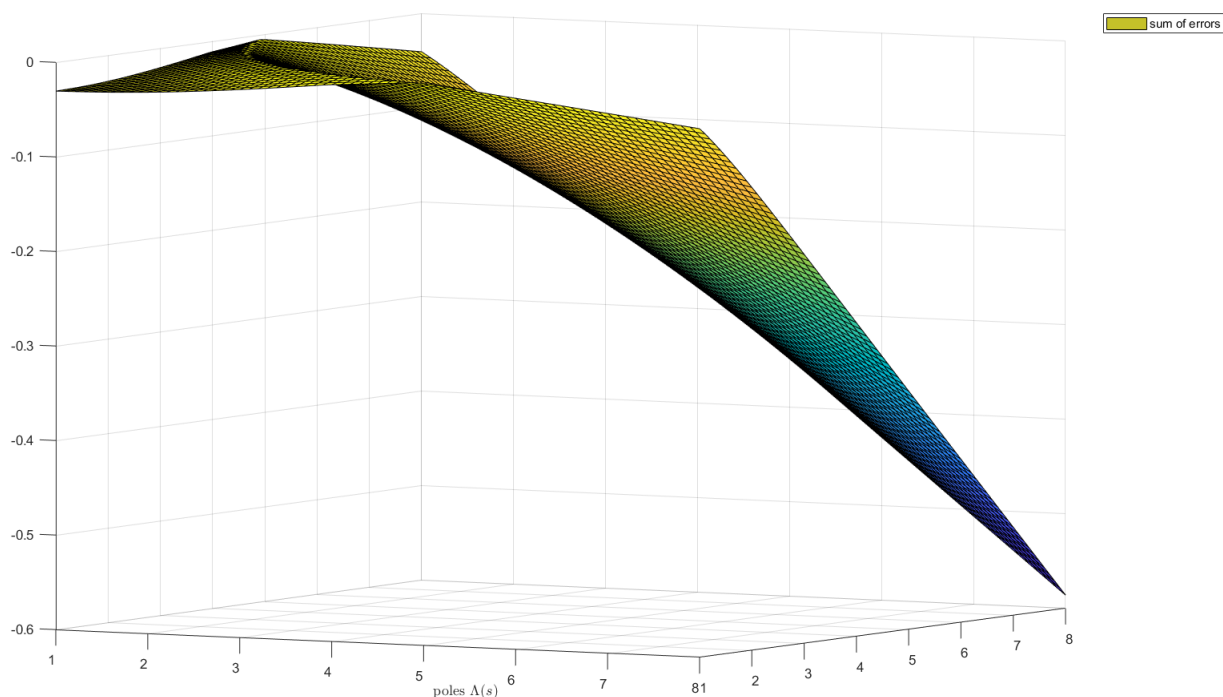


Figure 2: απεικόνισηση απόλυτου ολικού σφάλματος σε σχέση με τους πόλους του φίλτρου

και τελικά οι επιλογές για τους πόλους μας είναι: $p_1 = 4.5$ και $p_2 = 1.3$.

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους πόλους στο φίλτρο, παίρνουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις για τις παραμέτρους του συστήματος:

$k_{Estimated} = 1.497165595882330$

$b_{Estimated} = 0.298119997980567$

$m_{Estimated} = 10.000026798813353$

Τα οποία είναι πράγματι πολύ κοντά στις δοσμένες τιμές, που είναι και το επιθυμητό.

Θέμα 2

Το δοσμένο κύκλωμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

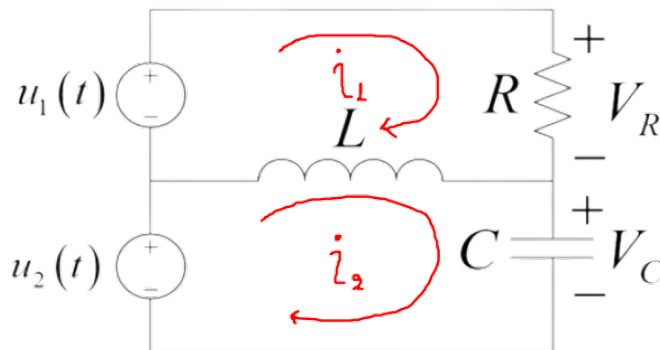


Figure 3: Γραφική απεικόνιση του δοσμένου κυκλώματος

όπου $u_1(t) = 3\sin(2t)$ V και $u_2(t) = 2$. Μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις V_R , V_C στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

Ζητούμενο α - Εκτίμηση πίνακα μεταφοράς με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Αρχικά είναι απαραίτητη η κυκλωματική ανάλυση του δοσμένου κυκλώματος ώστε να μπορέσουμε να βρούμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος.

Μία από τις μεθόδους που μπορούμε να εφαρμόσουμε για την κυκλωματική ανάλυση είναι η μέθοδος των βρόχων, όπου για καθένα από τους δύο βρόχους ορίζουμε από ένα ρεύμα, δεξιόστροφης φοράς. Φυσικά, από τον κλάδο του πηνίου περνάνε και τα δύο ρεύματα, και μάλιστα με αντίθετα πρόσημα κάθε στιγμή. Παίρνουμε τα εξής:

$$u_1 = I_1 R + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} = V_R + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} \quad (5)$$

$$u_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt + L \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt} = V_C + L \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη, έχουμε:

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C \quad (7)$$

βρίσκουμε τα ρεύματα συναρτήσει των τάσεων στα άκρα των στοιχείων:

$$i_1 = \frac{V_R}{R}$$
$$i_2 = C \frac{dV_C}{dt}$$

μετά την αντικατάσταση των ρευμάτων:

$$u_1 = V_R + \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - LC \frac{d^2 V_C}{dt^2}$$
$$u_2 = V_C + LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt}$$

αντικαθιστώντας στις 2 παραπάνω εξισώσεις τη σχέση (7), ώστε να πάρω ξεχωριστά κάθε είσοδο συναρτήσει των δύο εισόδων:

$$\ddot{V}_C = -\frac{\dot{V}_C}{RC} - \frac{V_C}{LC} + \frac{\dot{u}_1}{RC} + \frac{u_2}{LC} + \frac{\dot{u}_2}{RC} \quad (8)$$

$$\ddot{V}_R = \frac{u_1}{LC} - \frac{V_R}{LC} - \frac{\dot{V}_R}{RC} + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 \quad (9)$$

Για να βρεθεί ο πίνακα μεταφοράς πρέπει να εφαρμοστεί ο M/Σ Laplace, θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες μηδενικές. Έχουμε, λοιπόν, τα εξής:

$$s^2 V_C = -\frac{s V_C}{RC} - \frac{V_C}{LC} + \frac{s u_1}{RC} + \frac{u_2}{LC} + \frac{s u_2}{RC} \quad (10)$$

$$s^2 V_R = \frac{u_1}{LC} - \frac{V_R}{LC} - \frac{s V_R}{RC} + s^2 u_1 + s^2 u_2 \quad (11)$$

και τελικά:

$$\begin{bmatrix} V_C \\ V_R \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

και

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \frac{\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix}$$

Εμείς θα πρέπει ουσιαστικά να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους $1/LC$ και $1/RC$, με βάση οποιαδήποτε από τις δύο προκύπτουσες διαφορικές. Επιλέγουμε να δουλέψουμε με την πρώτη, ωστόσο όμοια μπορούμε να δουλέψουμε και με τη δεύτερη, αλλά πρέπει να επιλέξουμε μία. Χρειάζεται να φέρουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή:

$$y = \theta_\lambda^{*T} \zeta \quad (12)$$

με

$$\theta_\lambda^* = \left[\frac{1}{RC} + (\rho_1 + \rho_2) \quad \frac{1}{LC} - \rho_1 \rho_2 \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \right]^T$$

και

$$\zeta = \left[\frac{[-s \quad 1]}{\Lambda(s)} y \quad \frac{[s \quad 1]}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{[s \quad 1]}{\Lambda(s)} u_2 \right]$$

ενώ το φίλτρο είναι ευσταθές δεύτερης τάξης, όπως και στο θέμα 1. Έτσι το διάνυσμα προς εκτίμηση θα είναι το:

$$\theta^* = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \right]^T$$

το οποίο θα γίνει με τη χρήση του αλγορίθμου των ελάχιστων τετραγώνων, όπως ακριβώς περιγράφηκε και στο θέμα 1.

Αρχικά, έχει ενδιαφέρον να διερευνήσουμε τις τιμές που παίρνουν οι έξοδοι με βάση το δοσμένο αρχείο ν.ρ. Ειδικά αν ορίσουμε μία αρκετά σχετικά μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας, π.χ. ανά 0.01 s θα πάρουμε τις εξής εξόδους στα παρακάτω σχήματα.

για $T = 0.0001$ s έχω μία πολύ καλύτερη αναλυτικότητα.

για $T = 0.000001$ s και δε χρειάζεται πλέον αν πάω πιο κάτω.

Οι διακυμάνσεις που βλέπουμε στην αρχή του χρόνου οφείλονται στο μεταβατικό φαινόμενο που πρέπει να συντελεστεί στο κύκλωμα στο ξεκίνημα της λειτουργίας του, προκειμένου να μπορέσει μετά αν πάει στη μόνιμη κατάσταση, όπου και θα λειτουργεί σωστά. Γι αυτό, από το περίπου τα 2.5 s και έπειτα

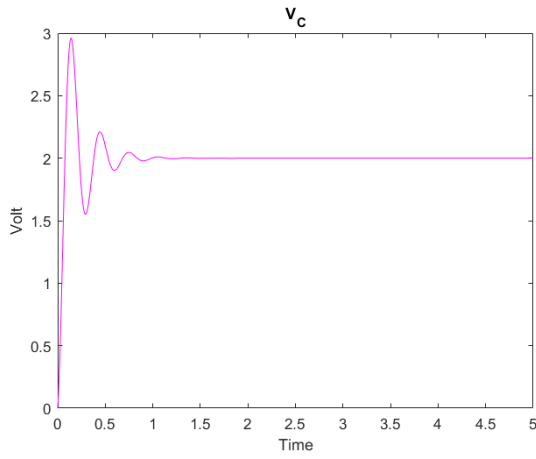


Figure 4: $V_C, T = 0.01s$

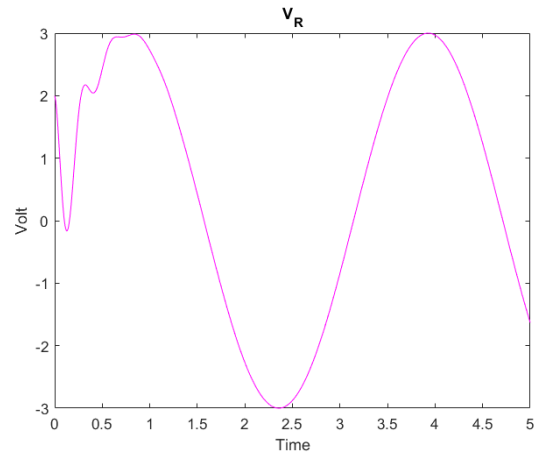


Figure 5: $V_R, T = 0.01s$

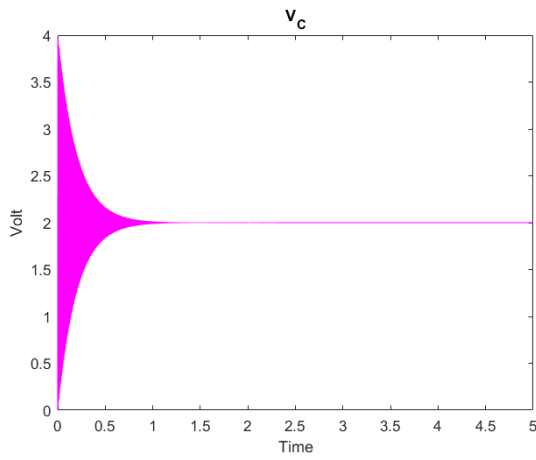


Figure 6: $V_C, T = 0.0001s$

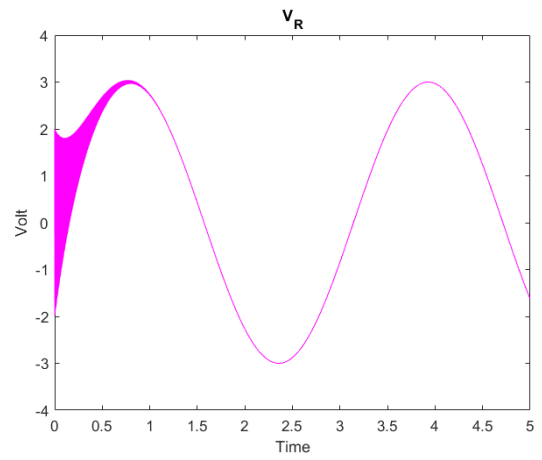


Figure 7: $V_R, T = 0.0001s$

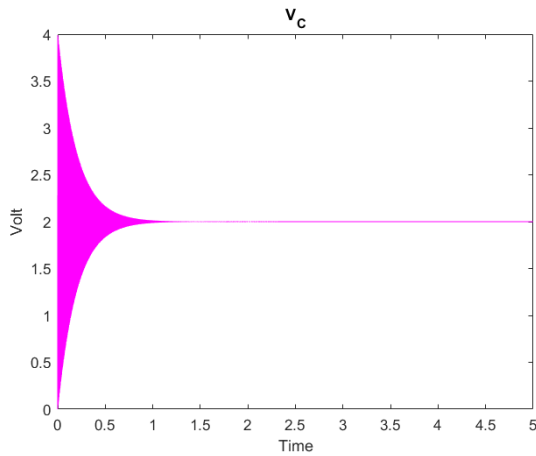


Figure 8: $V_C, T = 0.000001s$

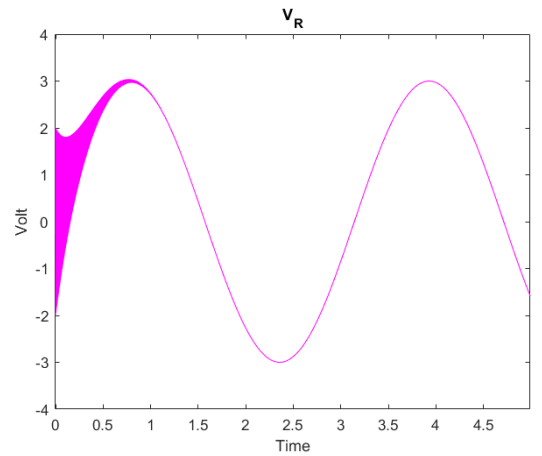


Figure 9: $V_R, T = 0.000001s$

φτάνει στη μόνιμη κατάσταση και η λειτουργία του σταθεροποιείται, άρα δε χρειάζεται να απεικονί-
σουμε τις εξόδους για μεγαλύτερες χρονικές στιγμές, αφού οι γραφικές παραστάσεις θα παραμείνουν
όμοιας μορφής.

Στη συνέχεια θα πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους που θα βάλουμε στο φίλτρο. Σε αυτή την
περίπτωση θα επιλέξουμε να βάλουμε ένα διπλό πόλο, καθαρά για λόγους υπολογιστικής ευκολίας.
Βέβαια, θα μπορούσαμε με μία διπλή for να βελτιστοποιήσουμε τα σημεία των πόλων, όπως ακριβώς
έγινε στο θέμα 1. Παρόλα, αυτά και με έναν διπλό πόλο θα μπορέσουμε να έχουμε ικανοποιητικά

αποτελέσματα, και για αυτό δεν έχουμε πρόβλημα στο να το κάνουμε έτσι.

Ένα αρχικό μέτρο σύγκρισης των τιμών των πόλων μπορεί να είναι η τιμή όπου οι παράμετροι προς εκτίμηση σταθεροποιούνται. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί πως δεν υπάρχει κάποιος προκαθορισμένος τρόπος που να μας δείχνει με ποιον τρόπο πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους, και έτσι θα συγκρίνουμε τις διάφορες επιλογές με βάση τα αποτελέσματα ορισμένων προσομοιώσεων και σφαλμάτων που ορίζουμε ότι θέλουμε να ελαχιστοποιούνται.

Σημείωση: σε όσες προσομοιώσεις θα ακολουθήσουν θα θεωρείται ότι χρησιμοποιούμε $T = 0.000001$ s, εκτός αν δηλωθεί διαφορετικά.

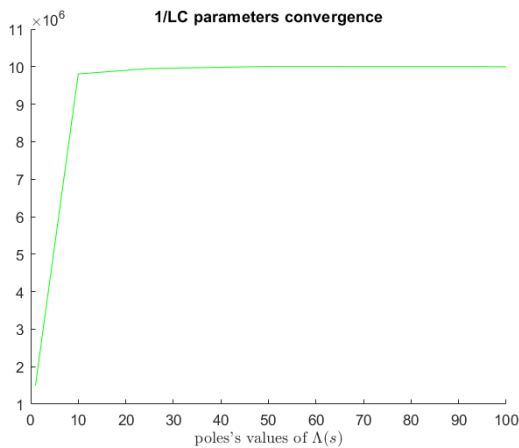


Figure 10: σύγκλιση των 2 παραμέτρων 1_{LC}

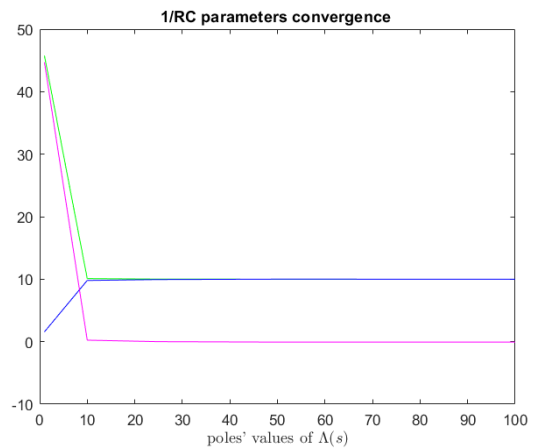


Figure 11: σύγκλιση των 3 παραμέτρων 1_{RC}

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι αρχίζουν να συγκλίνουν στην τελική τους τιμή από πόλους στο -20, ενώ για πόλους στο -50 έχουν σταθεροποιηθεί πλήρως. Από αυτό καταλαβαίνουμε και καλύτερη επιλογή είναι να επιλέξουμε πόλους στο -50 ή πιο μετά. Ας σημειωθεί πως στο διάγραμμα των LC οι δύο παράμετροι πέφτουν η μία ακριβώς πάνω στην άλλη και γι αυτό βλέπουμε μόνο μία γραμμή.

Στις επόμενες γραφικές θα απεικονιστούν τα απόλυτα σφάλματα των εξόδων του ν.ρ αρχείου και των εξόδων με βάση τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε με τη διαφορική εξίσωση του συστήματος και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

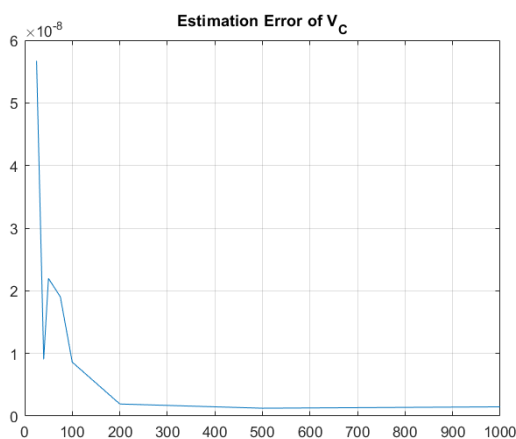


Figure 12: απόλυτο σφάλμα για την V_C

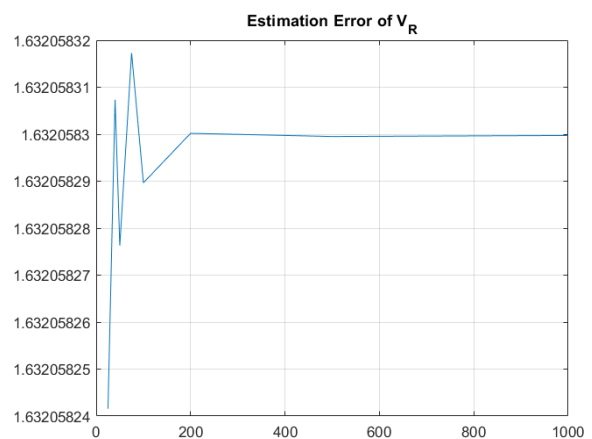


Figure 13: απόλυτο σφάλμα για την V_R

Για $T = 0.001$ s έχουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα παρακάτω.

Για $T = 0.01$ s έχουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα παρακάτω.

Από όλα τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε αρχικά πως όσο χειροτερεύουμε τον ρυθμό δειγματοληψίας, τόσο μεγαλώνουν τα σφάλματα, κάτι που είναι λογικό.

Παρατηρούμε ότι όταν έχουμε καλή δειγματοληψία, τα σφάλματα κινούνται σε χαμηλά επίπεδα έτσι

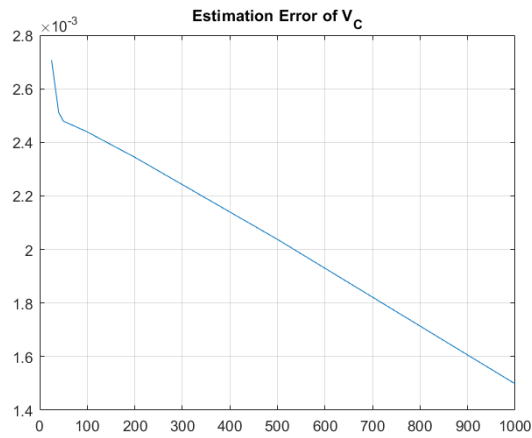


Figure 14: απόλυτο σφάλμα σε $T = 0.001$ s για την V_C

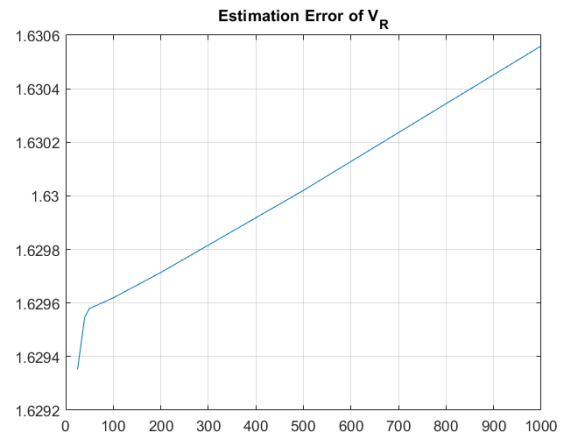


Figure 15: απόλυτο σφάλμα σε $T = 0.001$ s για την V_R

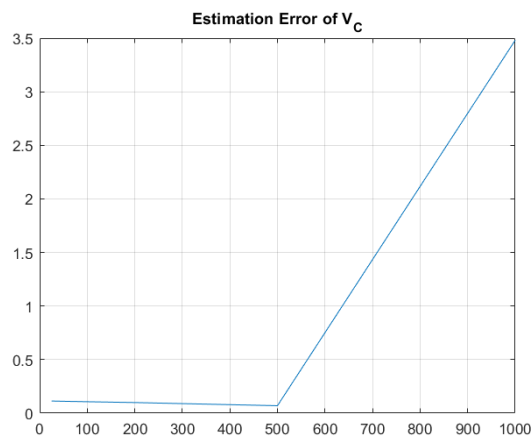


Figure 16: απόλυτο σφάλμα σε $T = 0.01$ s για την V_C

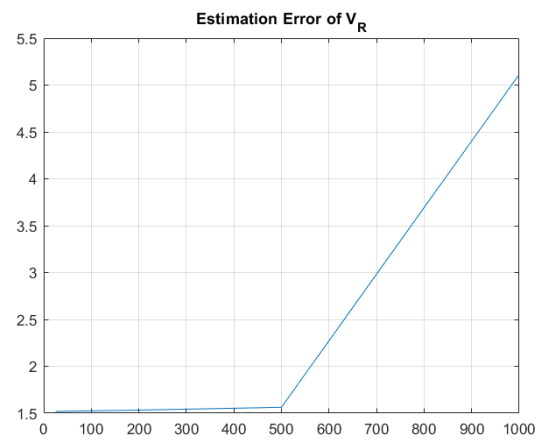


Figure 17: απόλυτο σφάλμα σε $T = 0.01$ s για την V_R

και αλλιώς, συνεπώς θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το -50 ή και το -200 για πόλους, και θα συνεχίσουμε βρίσκοντας τις εκτιμήσεις και για τα δύο αυτά ζεύγη πόλων.

Τέλος, για διπλούς πόλους στο -50 και -200 παίρνουμε τα παρακάτω σφάλματα. Παρατηρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση το σφάλμα τείνει πάντα στο 0.

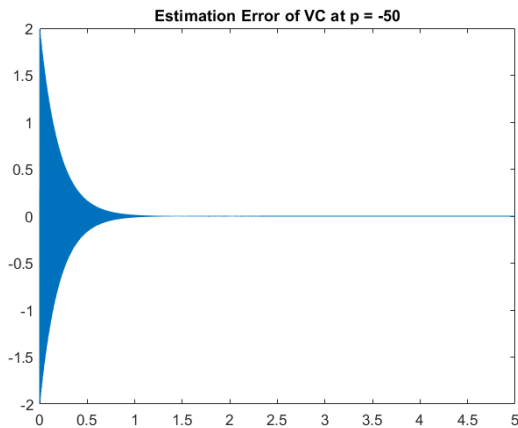


Figure 18: σφάλμα για την V_C , poles@ -50

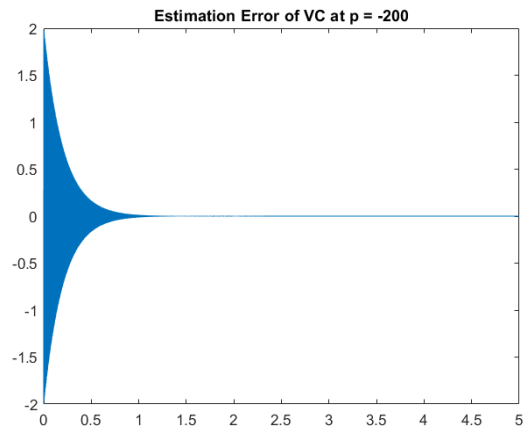


Figure 19: σφάλμα για την V_R , poles@ -200

Επιπλέον, για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$\frac{1}{RC} = 9.999397013337770$$

$$\frac{1}{LC} = 1.000548006643132e + 07$$

ενώ για τη δεύτερη,

$$\frac{1}{RC} = 9.999713350075922$$

$$\frac{1}{LC} = 1.000000918305803e + 07$$

Άρα, στην πράξη η επιλογή των πόλων δεν είναι και τόσο καταδικαστική προς το αποτέλεσμα, και άρα μπορούμε να κάνουμε πολλές καλές επιλογές.

Τέλος, παρατηρούμε πω με απλή τοποθέτηση/αντικατάσταση των τιμών στον πίνακα μεταφοράς, τον γνωρίζουμε πλέον ολόκληρο, και το ζητούμενο έχει ολοκληρωθεί.

Ζητούμενο β - Επίδραση outliers

Γνωρίζουμε και από άλλες εφαρμογές πως η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων επηρεάζεται σε πολύ σημαντικό βαθμό από την ποιότητα των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν και ακόμα και από την τάξη μεγέθους αυτών. Αυτό συμβαίνει γιατί η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει ισοδύναμα όλες τις τιμές. Συνεπώς, τιμές οι οποίες συμπεριλαμβάνουν θόρυβο, μπορούν ανάλογα την τάξη μεγέθους τους, να δημιουργήσουν σημαντική απόκλιση στην εκτίμηση των παραμέτρων. Για να διαπιστώσουμε αυτήν την επίδραση, εισάγουμε σε τρεις τυχαίες χρονικές στιγμές των δεδομένων V_C , τις τιμές 10000, 4000 και 35000. Θα πάρουμε στους δύο πόλους στο -200 για την εκπόνηση του παρακάτω πειράματος.

Θα δοκιμάσουμε και με outliers ίσα με 100, 100, 100 και με την τυπική περίοδο δειγματοληψίας. Σε χαμηλότερους ρυθμούς δειγματοληψίας, πιθανόν το αποτέλεσμα να επηρεάζεται άμεσα και από τον ρυθμό αυτής.

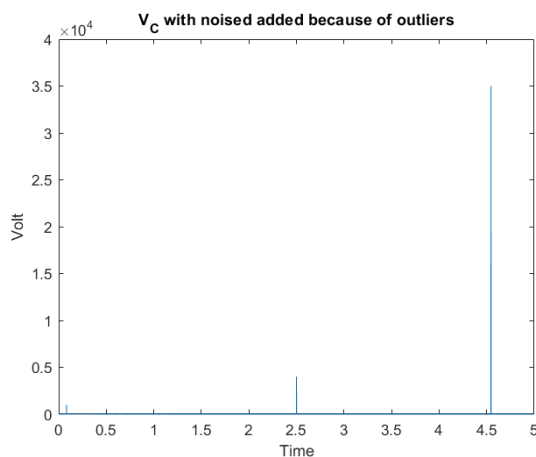


Figure 20: μεγάλες τιμές outliers

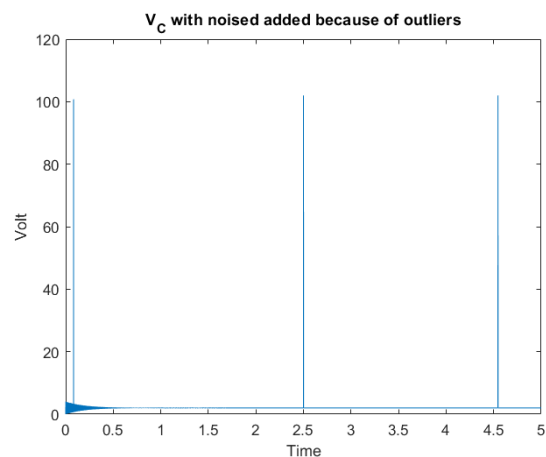


Figure 21: μικρές τιμές outliers

Επιπλέον, για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων στην περίπτωση με τα μεγάλα outliers έχουμε ότι

$$\frac{1}{RC} = 99.811452943232624$$

$$\frac{1}{LC} = 2.629682477373181e + 03$$

ενώ για μικρά outliers,

$$\frac{1}{RC} = 19.692342451672104$$

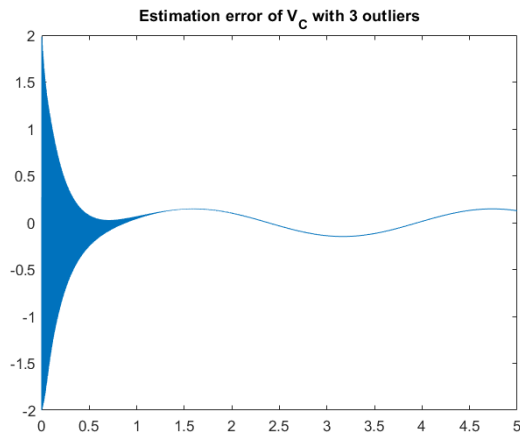


Figure 22: μεγάλες τιμές outliers

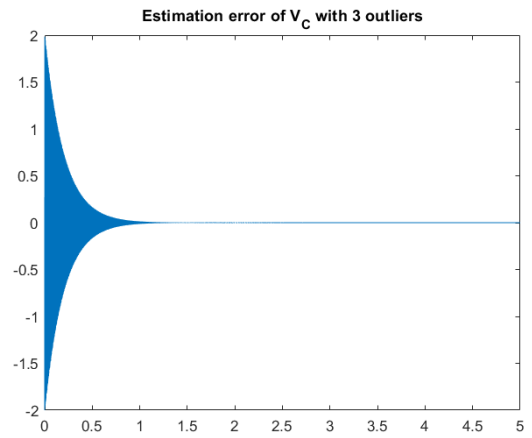


Figure 23: μικρές τιμές outliers

$$\frac{1}{LC} = 3.938707571263477e + 05$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι σαφέστατο πως τα outliers επηρεάζουν καθοριστικά τις εκτιμήσεις μας, ειδικά αν είναι μεγαλύτερης τάξης, και οδηγούν σε βαρύτατα σφάλματα. Γι αυτό, πριν χρησιμοποιήσουμε κάποια δεδομένα, είναι πολύ χρήσιμο να τα τσεκάρουμε για outliers, εφόσον μπορούν να καθορίσουν τόσο σημαντικά το τελικό καλό ή κακό μας αποτέλεσμα.