Lecture 2

词法分析

徐 辉
xuh@fudan.edu.cn

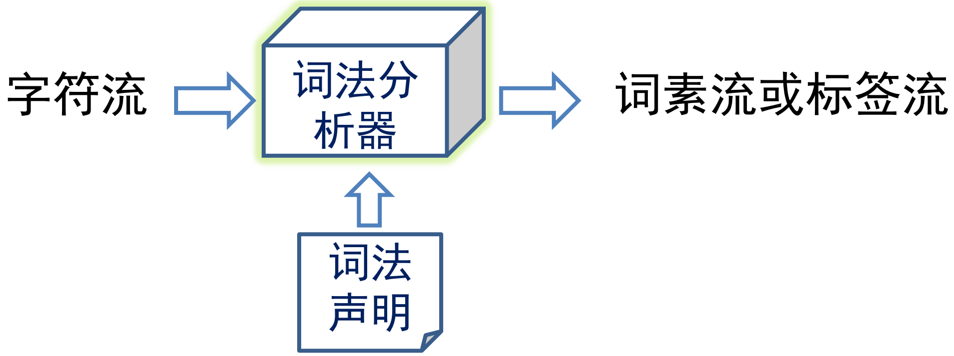
主要内容

- 一、词法定义：正则表达式
- 二、正则语言及其等价性
- 三、词法解析：正则表达式转NFA
- 四、NFA转DFA

一、正则表达式

问题定义

- 词法声明定义了什么是对词法分析器
  - 有效的输入（valid inputs）
  - 及其关联标签类型（token types）



基本概念

- 模式（Pattern）：字符串模式描述，一般用正则表达式
- 词素（Lexeme）：符合某标签模式的字符串实例
- 标签（Token）：由标签类型和属性组成的二元组

标签	模式	词素举例
BINOP	+,-,*,/	+
NUM	任意数据常量	3.1415926

正则表达式（Regular Expression）

- 字母表Σ上的字符串集合，其字符元素的表述方式包括：
  - a：含义为$\{x|x=a\}$
  - $[ab]$：含义为$\{x|x=a \text{ or } x=b\}$
  - $[a-z]$：含义为$\{x|x=a \text{ or} \dots \text{or } x=z\}$
  - $[a-zA-Z]$：含义为$\{x|x=a \text{ or} \dots \text{or } x=z \text{ or} \dots \text{or } x=Z\}$
  - $[\,^\wedge a]$：含义为$\{x|x!=a \text{ and } x\in\Sigma\}$
  - $a?$：含义为$\{x|x=a \text{ or } x=\epsilon\}$
  - .：通配符$\{x|x\in\Sigma\}$
  - ϵ：空

在线测试：https://regex101.com/

正则表达式（Regular Expression）

- 字符元素间以及正则表达式之间的组合方法包括：
  - 选择（union）：$R|S$，含义为$\{x|x \in R\ or\ x \in S\}$
  - 连接（concatenation）：RS，含义为$\{xy|x \in R\ and\ y \in S\}$
  - 闭包（Kleene closure）：R^*，含义为$\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$
    - 正闭包：R^+,含义为$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
    - 更多量化方式：{min, max}，如
      - a{1,10}，表示任意1-10个a组成的字符串。
      - a{10}，表示10个a的组成的字符串。

基本运算法则

- 优先级顺序：
  - 闭包（*）优先级最高
  - 连接符其次
  - 选择符（|） 最低
- 运算法则：
  - 选择符满足交换律（commutative）：$r|s = s|r$，
  - 选择符满足结合律（associative）：$r|(s|t) = (r|s)|t$
  - 连接符满足结合律（associative）：$r(st) = (rs)t$
  - 连接符满足分配律（distributive）：$r(s|t) = rs|rt$
  - 闭包满足幂等率（idempotent）：$r^* = r^{**}$

使用正则表达式声明词法

```
UINT := [0-9]+
UNUM := [0-9]+(.[0-9]+|ε)
```

利用中间变量简化词法声明

```
DIGIT := [0-9]
 UINT := {DIGIT}+
 UNUM := {DIGIT}+(.{DIGIT}+|ε)
```

练习

- 定义无符号数的正则表达式：
  - 支持浮点数和整数，如0.1、123
  - 支持科学计数法表示，如123e2、2.1e-3
    - 指数不能作浮点数，如2.1e-3.1


HOW TO REGEX
STEP 1: OPEN YOUR FAVORITE EDITOR
@GARABATOKID
STEP 2: LET YOUR CAT PLAY ON YOUR KEYBOARD
/^([A-Z0-9_\.-

```
(\(?[0-9])((\+|-|\*|\/)(\(?[0-9])\)?)*
```


Times I have used REGEX
Times I have had to learn REGEX
Corporate needs you to find the differences between this picture and this picture.
They're the same picture.

二、正则语言及其等价性

正则集

- 假设$\Sigma = \{a, b\}$，则
  - $a|b$表示的语言为：{a,b}（称为正则集）
  - $(a|b)(a|b)$表示的语言为：{aa,ab,bb,ba}
  - a^*表示的语言为：{ϵ,a,aa,aaa,…}
  - $(a|b)^*$表示的语言为：{ϵ,a,b,aa,ab,ba,…}
  - $a|a^*b$表示的语言为：{a,aab,aaab,…}

正则语言及其等价性

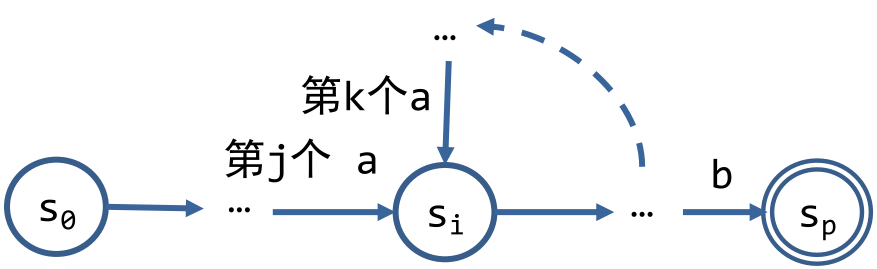
- 正则表达式是一种（表达能力有限的）语言描述方法
- 可用正则表达式描述的语言称为正则语言
- 正则集相等的两个正则表达式等价，如：
  - $a|b = b|a$
  - $(a|b)^* = (a^*|b^*)^*$

练习

- 分析下列正则表达式是否等价？
  - $a^*(a|b)^*a$
  - $\left((\epsilon|a)b^*\right)^*$
  - $b^*(abb^*)^*(a|\epsilon)$

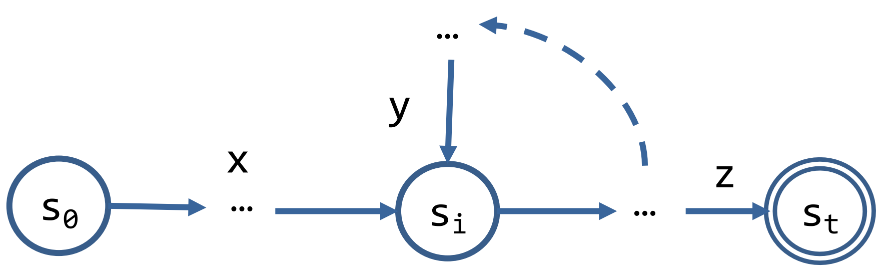
非正则语言

- 不能用正则表达式或有穷自动机表示的语言。
- $L=\{a^nb^n, n>0\}$是不是正则语言？
  - 证明：
    - 假设DFA可识别该语言，其包含p个状态;
    - 假设某词素为$a^qb^q, q>p$。
    - 识别该词素需要经过某状态s_i至少两次，分别对应第j和第k个a;
    - 该DFA可同时接受a^qb^q和$a^{q-k+j}b^q$，推出矛盾。
- 结论：正则语言不能计数



正则语言的泵引理（Pumping Lemma）

- 词素数量有限的语言一定是正则语言。
- 词素数量无穷多的语言是否为正则语言？
- 某语言$L(r)$是正则语言的必要条件：
  - 任意长度超过p（泵长）的句子都可以被分解为xyz的形式
  - 其中x和z可为空，
  - 子句y被重复任意次（如$xyyz$）后得到的句子仍属于该语言。



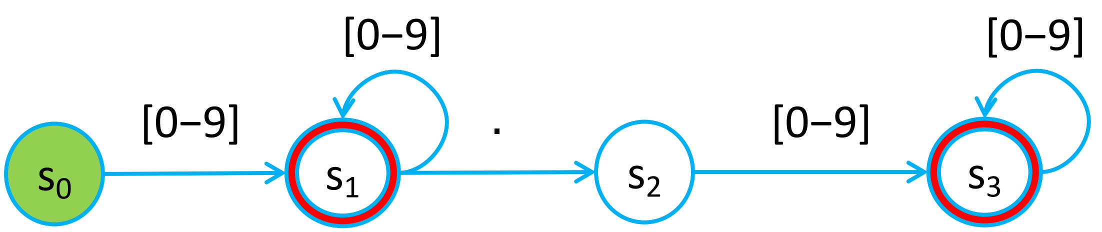
正则表达式能否识别四则运算？

- 表达能力受限，不能处理括号匹配问题：$(^*)^*$
  - {1*(2+3), (1+2)*3, …}
    - 如(\(?[0-9])((\+|-|*|\/)(\(?[0-9])\)?)*
    - 可导致单词流被错误接收：
      - $(1*(2+3)$
      - $(1*(2+(3)$

三、正则表达式转NFA

有穷自动机（Finite State Automaton）

- 识别无符号浮点数的FSA：
  - 字符集：$\sum = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.\}$
  - 状态集：$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$
  - 初始状态：$S_0 = s_0$
  - 接受状态：$S_{acc} = \{s_1, s_3\}$
  - 状态转移关系：$\Delta = \left\{ \begin{matrix} s_0 \xrightarrow{[0-9]} s_1, s_1 \xrightarrow{[0-9]} s_1, s_1 \xrightarrow{.} s_2 \\ s_2 \xrightarrow{[0-9]} s_3, s_3 \xrightarrow{[0-9]} s_3 \end{matrix} \right\}$

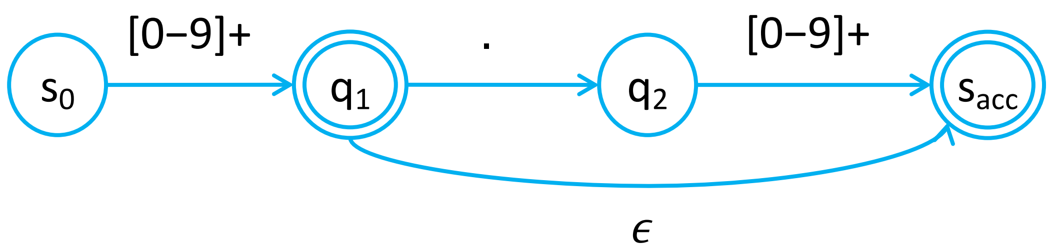


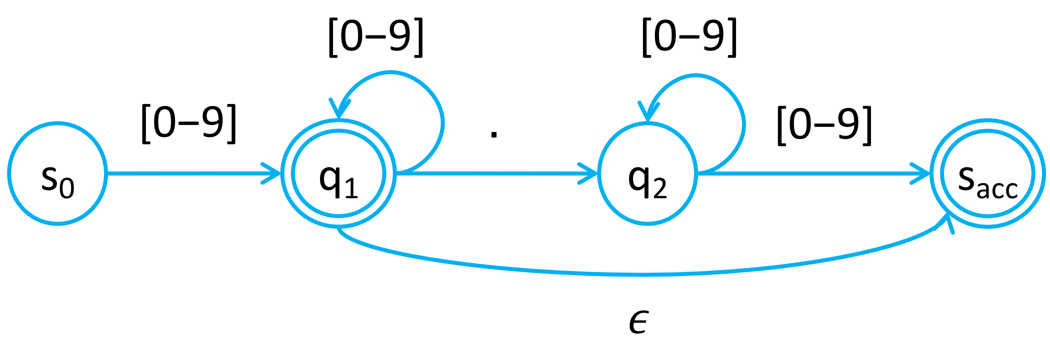
FSA接受字符串的条件

- 假设$\sum^*$是所有由属于$\sum$的元素组成的有限长度序列的集合(包含空字符串ϵ)，如1.23，
- FSA接受字符串$w = x_1 x_2 \dots x_k \in \Sigma^*$的充要条件是:
  - 存在序列$s_{t_0} s_{t_1} \dots s_{t_n} \in S$，其中$s_{t_0}$是初始状态，$s_{t_n} \in S_{acc}$
  - 并且$\forall s_{t_{i-1}}, x_i, s_{t_i}, (s_{t_{i-1}}, x_i, s_{t_i}) \in \Delta$
  - 即$\delta\Big(\dots \delta\Big(\delta\big(s_{t_0}, x_1\big), x_2\Big) \dots, x_n\Big) \in S_{acc}$
- FSA拒绝字符串的充要条件是：
  - 在某一状态（$s_{t_i} \notin S_{acc}$）无匹配的状态转移规则
  - 转移至拒绝状态s_{rej}

如何将正则表达式转换为FA?

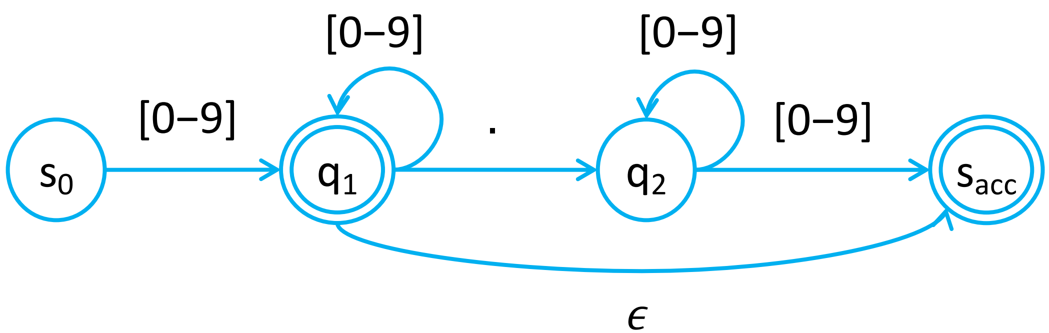
- 如何构造正则表达式 $[0\text{-}9]^{+}((.[0\text{-}9]^{+})|\epsilon)$对应的FA？





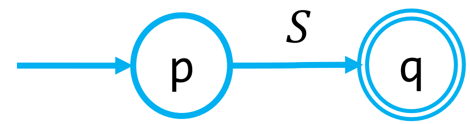
DFA和NFA

- 确定型有穷自动机（Deterministic FSA）
  - 对于FSA的任意一个状态和输入字符，最多只有一条状态转移边
- 非确定型有穷自动机（Nondeterministic FSA）
  - 对于FSA的任意一个状态和输入字符，可能存在多条状态转移边

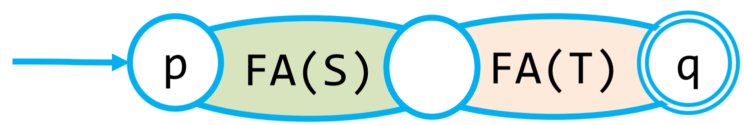


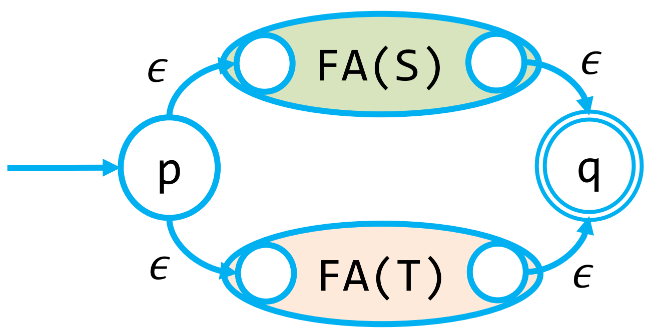
Thompson构造法：McNaughton–Yamada–Thompson

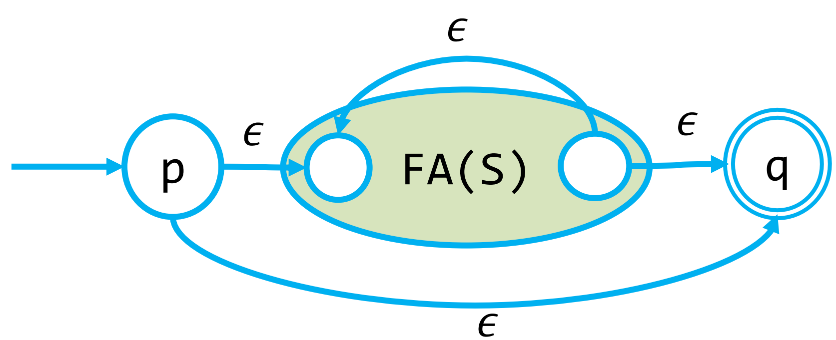
- 将正则表达式递归展开为子表达式（只有一个符号）
  - 语法解析树



- 构造子表达式的NFA
- 根据关系对子表达式的NFA进行合并
  - 选择：$S|T$
  - 连接：ST
  - 闭包：S^*

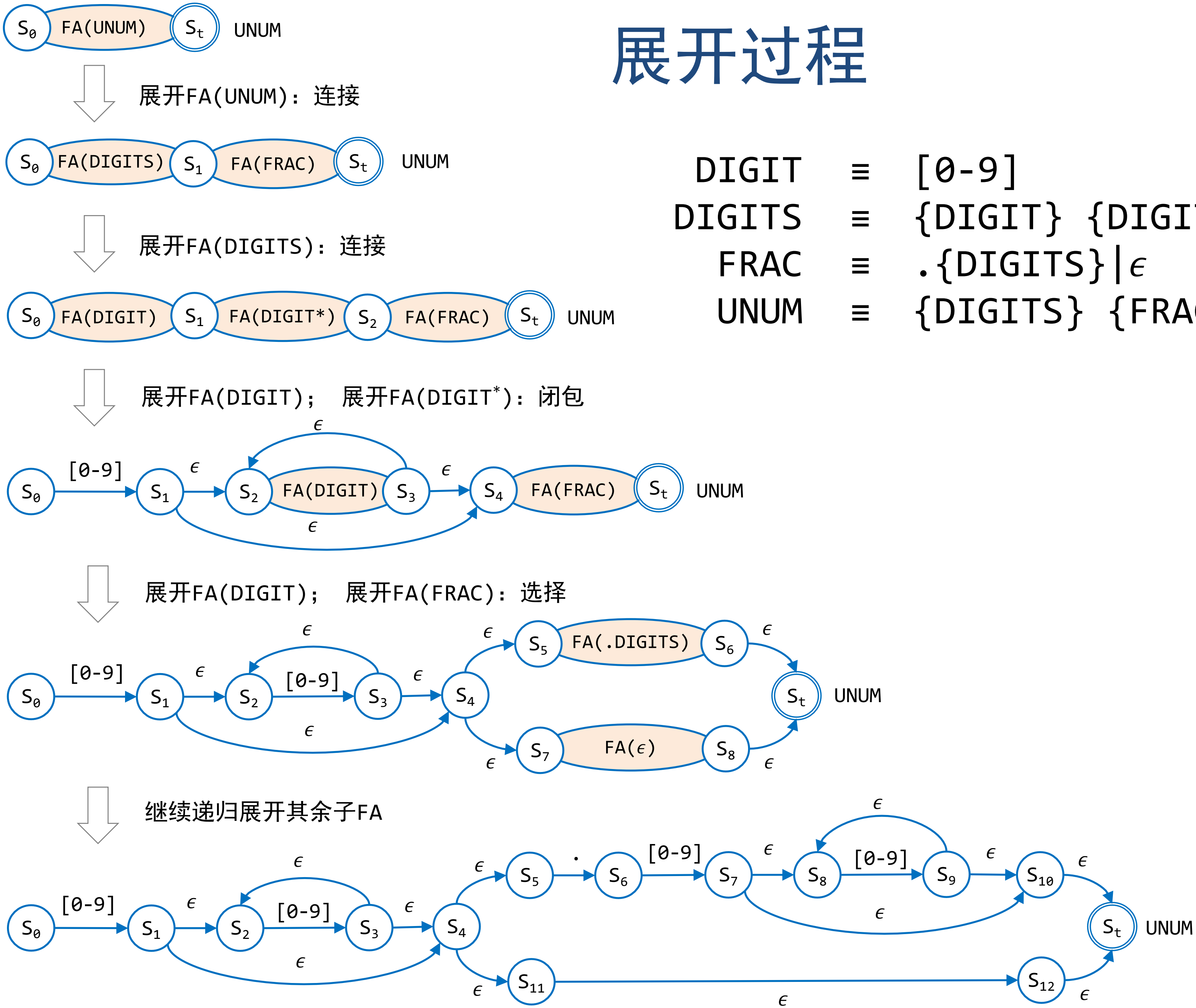






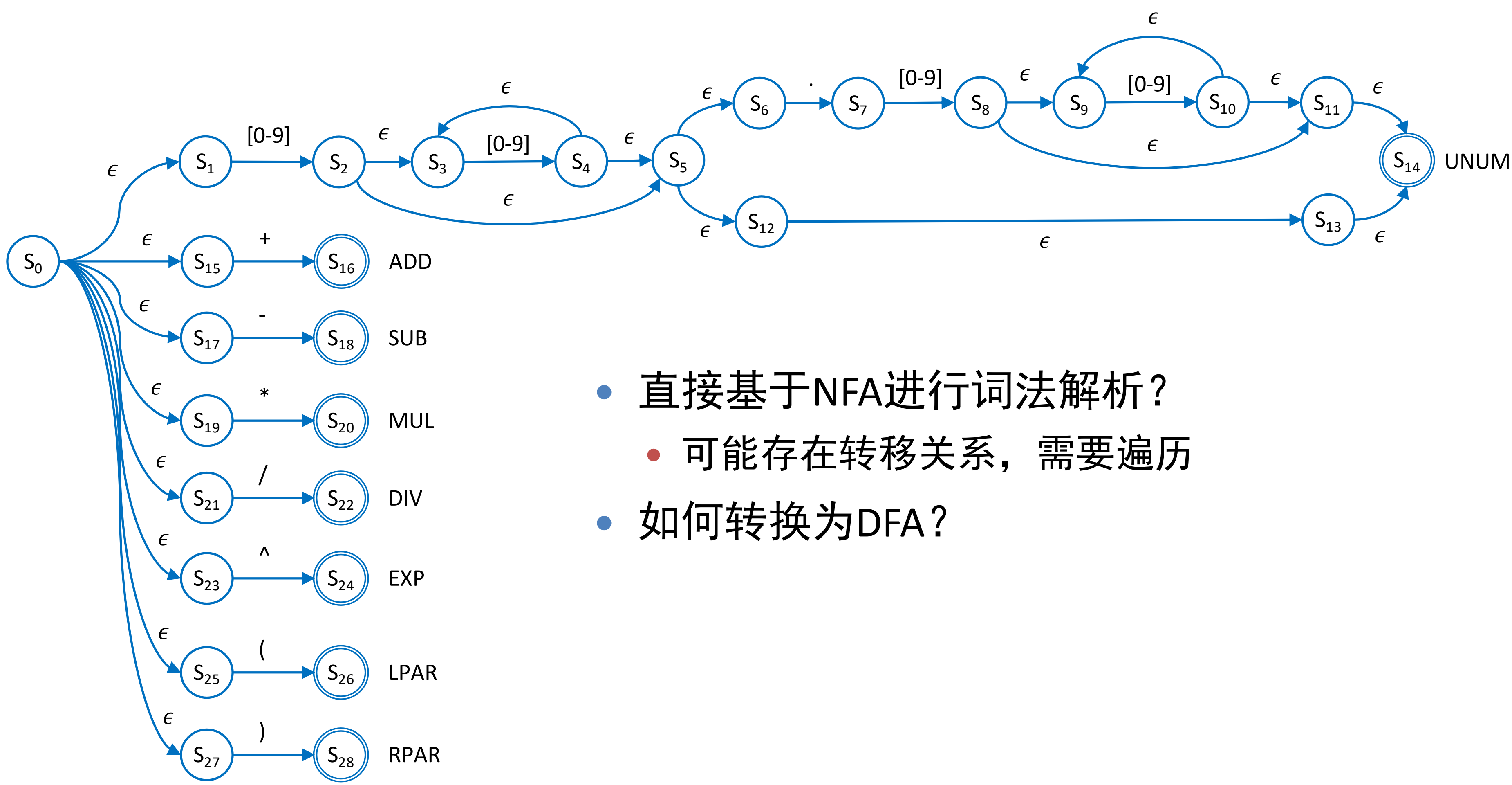
展开过程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DIGIT} &\equiv [0\text{-}9] \\
\mathrm{DIGITS} &\equiv \{\mathrm{DIGIT}\}\ \{\mathrm{DIGIT}\}^* \\
\mathrm{FRAC} &\equiv .\{\mathrm{DIGITS}\} \mid \epsilon \\
\mathrm{UNUM} &\equiv \{\mathrm{DIGITS}\}\ \{\mathrm{FRAC}\}
\end{aligned}
$$



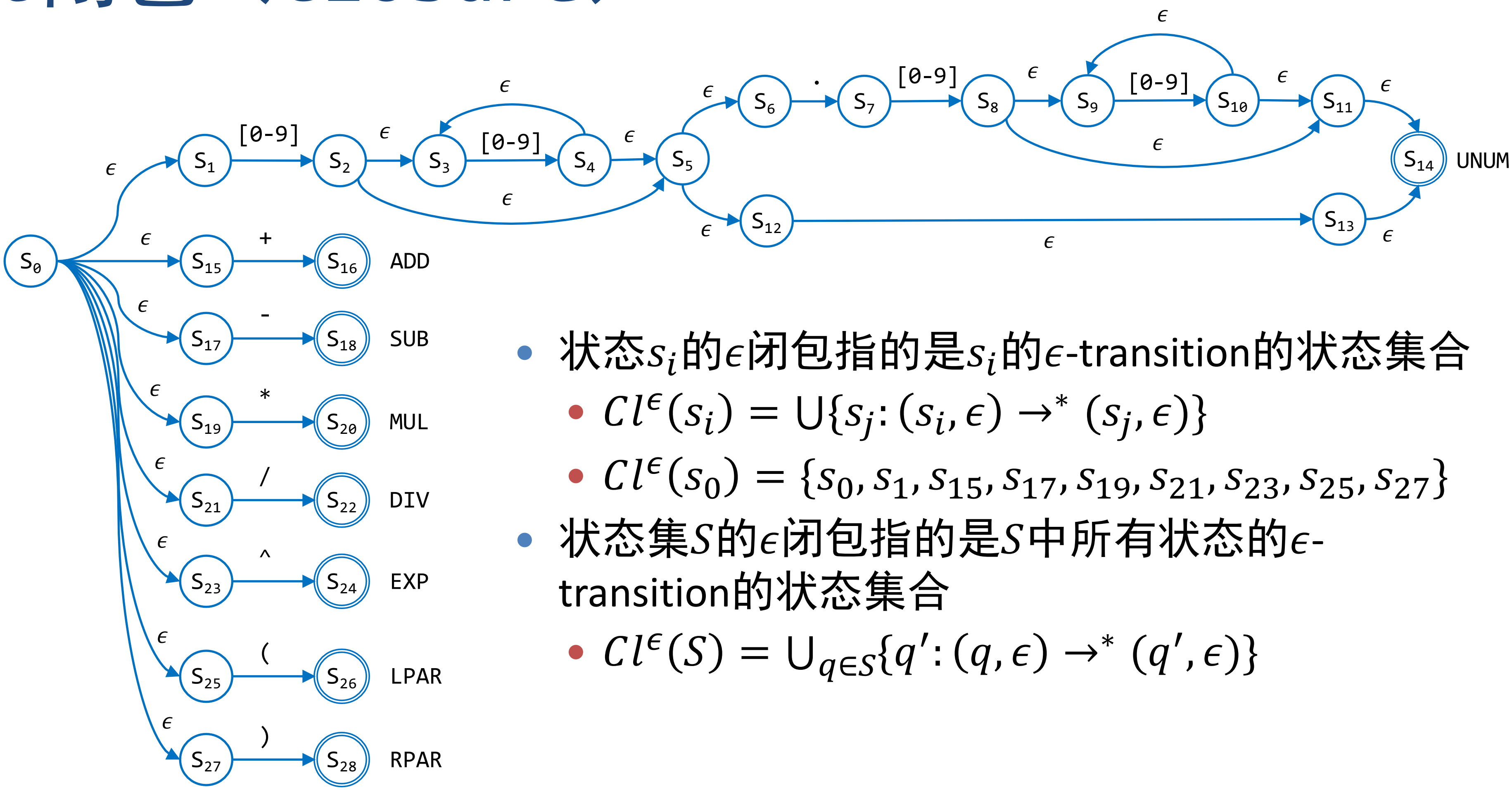
如何使用一个NFA表示多个正则表达式？

- 使用ϵ转移将多个正则表达式的NFA合并为一个NFA



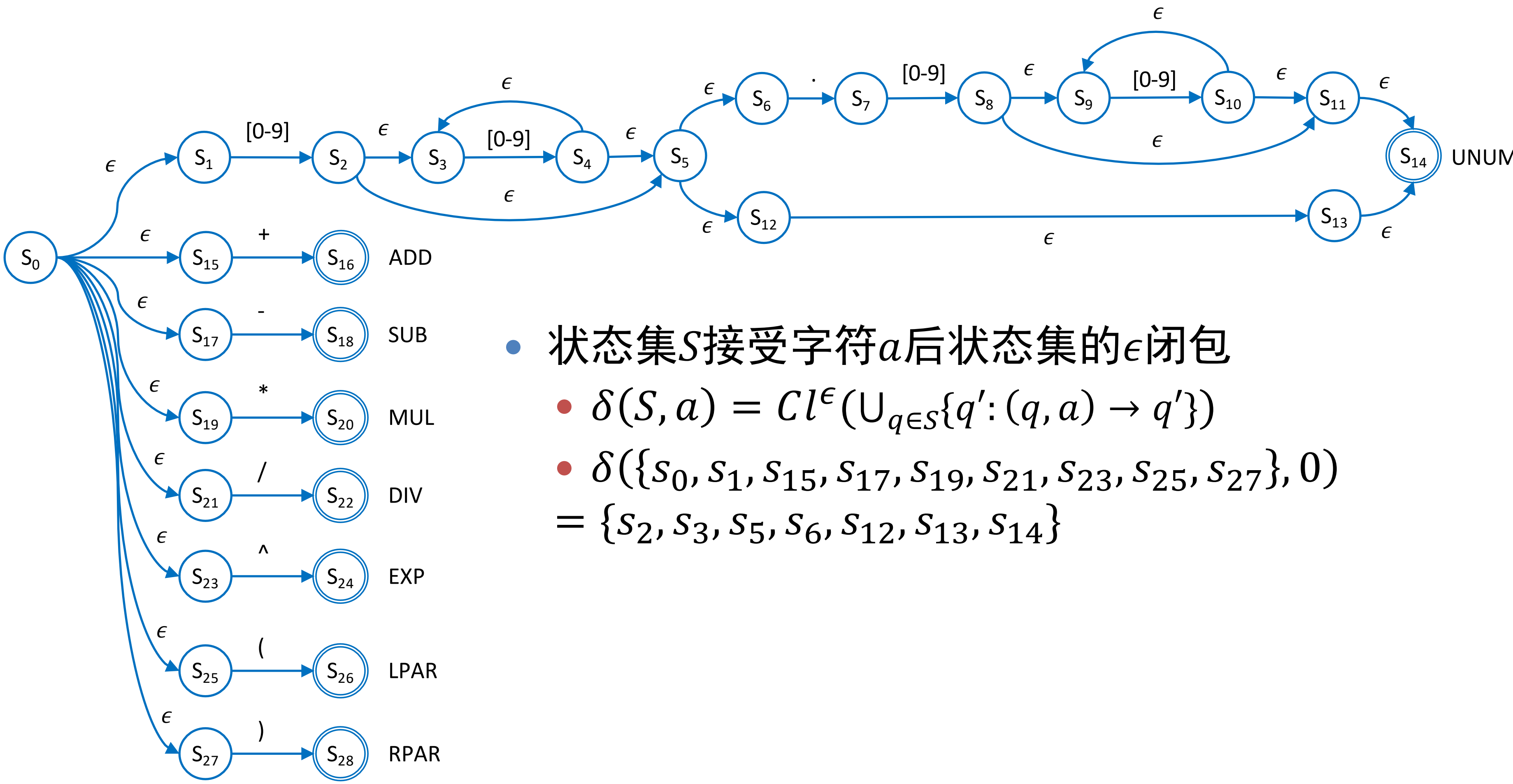
- 直接基于NFA进行词法解析？
  - 可能存在转移关系，需要遍历
- 如何转换为DFA？

ϵ闭包（closure）



- 状态s_i的ϵ闭包指的是s_i的ϵ-transition的状态集合
  - $Cl^\epsilon(s_i) = \cup\{s_j: (s_i, \epsilon) \to^* (s_j, \epsilon)\}$
  - $Cl^\epsilon(s_0) = \{s_0, s_1, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}$
- 状态集S的ϵ闭包指的是S中所有状态的ϵ-transition的状态集合
  - $Cl^\epsilon(S) = \cup_{q \in S}\{q': (q, \epsilon) \to^* (q', \epsilon)\}$

a-transition



- 状态集S接受字符a后状态集的ϵ闭包
  - $\delta(S,a) = Cl^{\epsilon}(\cup_{q\in S}\{q' : (q,a) \to q'\})$
  - $\delta(\{s_0, s_1, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}, 0)$
  $= \{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$

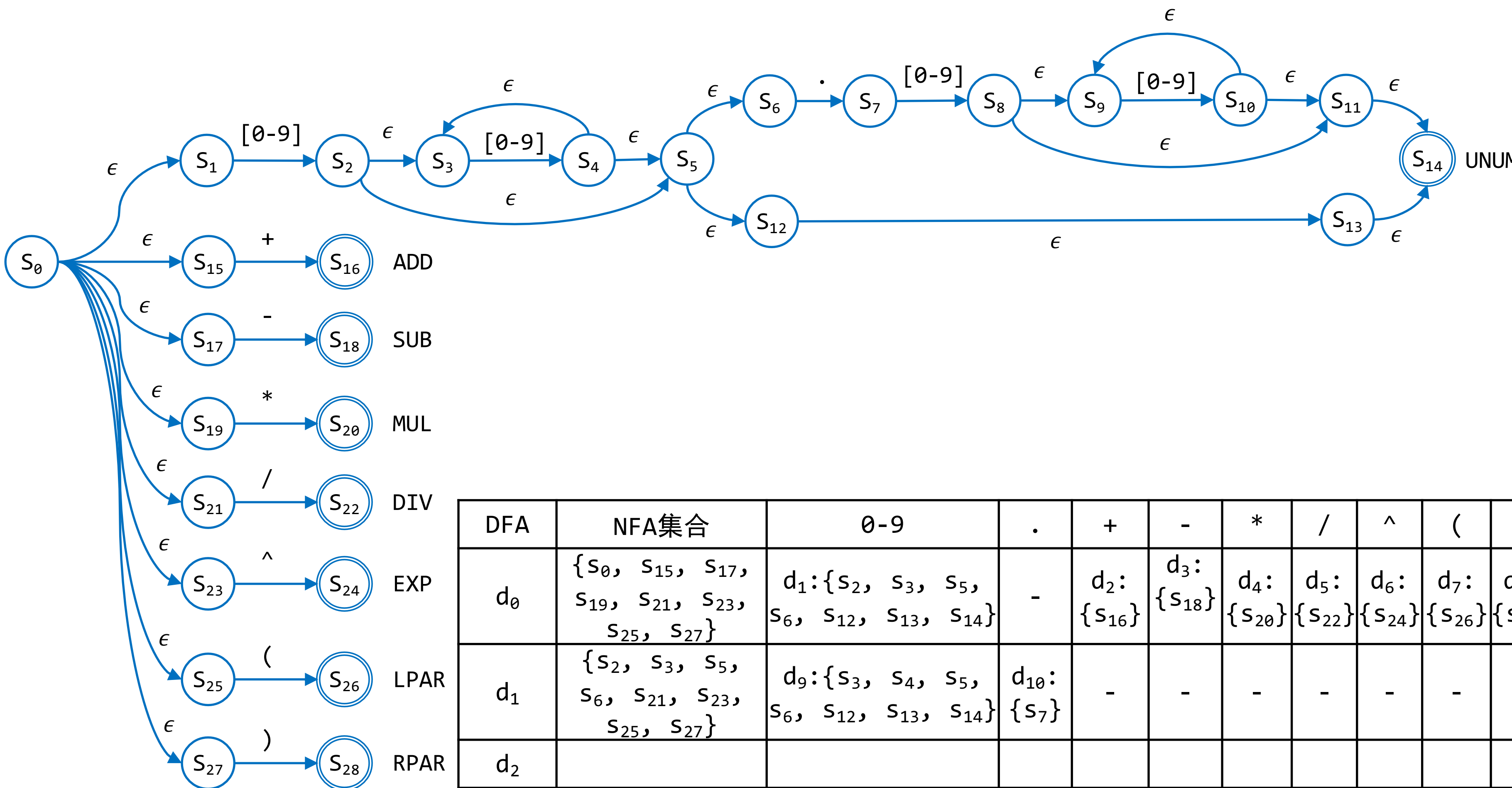
四、NFA转DFA

NFA转换为DFA：子集构造法 Powerset Construction

- 给定一个字符集Σ上的NFA $(N, \Delta, n_0, N_{acc})$，它对应的可接受同一语言的DFA $(D, \Delta', d_0, D_{acc})$定义如下：
  - D中的所有状态d_i都是N的一个子集，$D \subseteq 2^N$
  - $d_0 = Cl^{\epsilon}(n_0)$ //d_i均为ϵ闭包
  - $\Delta' = \{d_i \times c \times d_j\}, \forall n_j \in d_j, \exists n_i \in d_i \ \& \ c \in \Sigma, \text{ s.t. } (n_i, c, n_j) \in \Delta\}$
  - $D_{acc} = \{d_i \subseteq D \mid d_i \cap N_{acc} \neq \emptyset\}$

```
d0 = eclosure(n0);
D = d0; //保存得到的状态
worklist ={d0}; //待检验的状态
While (worklist!=null) do:
   worklist.remove(d);
   for each c in alphabets do:
      t = trans(d,c)
      if D.find(t) = null then:
         worklist.add(t);
         D.add(t);
```

构造过程

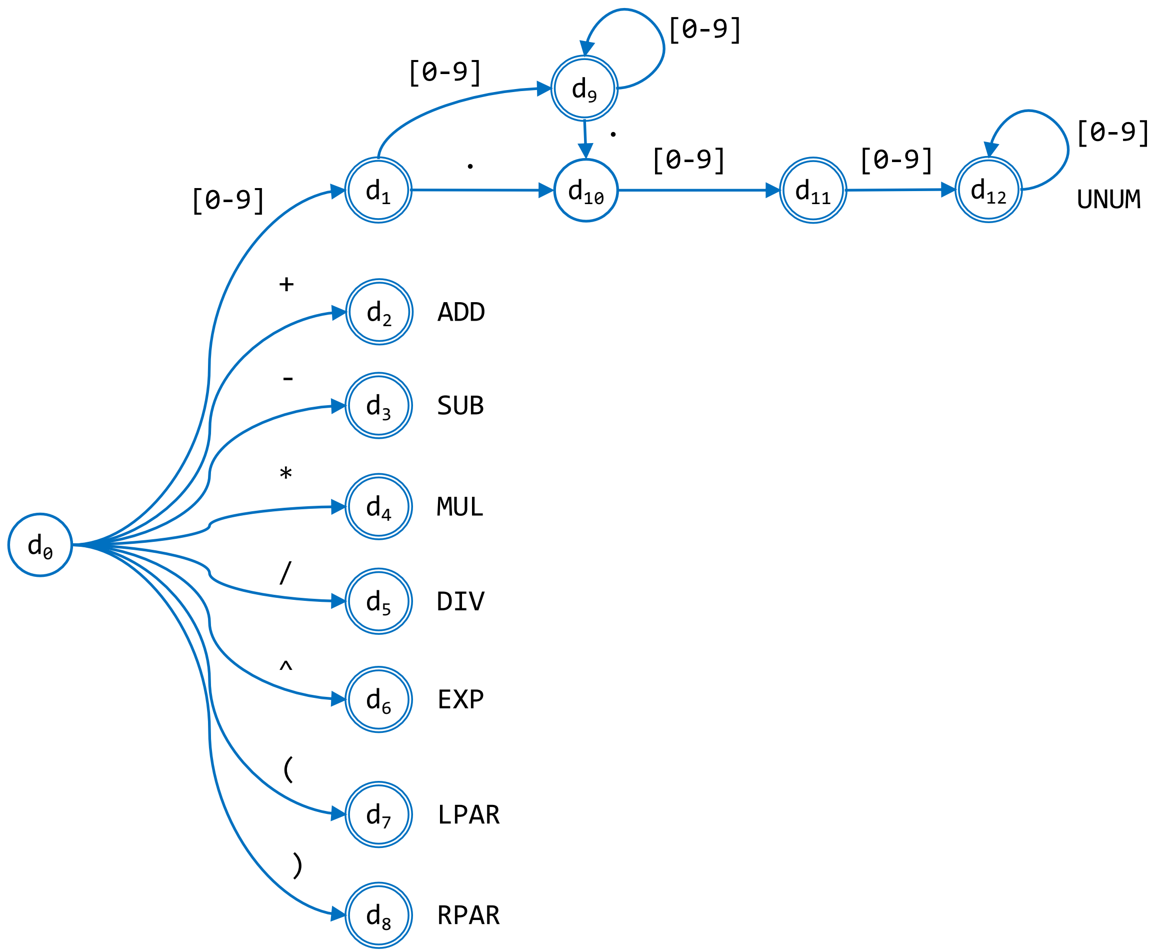


DFA	NFA集合	0-9	.	+	-	*	/	^	(	)
d_0	$\{s_0, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}$	d_1:$\{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	-	d_2: $\{s_{16}\}$	d_3: $\{s_{18}\}$	d_4: $\{s_{20}\}$	d_5: $\{s_{22}\}$	d_6: $\{s_{24}\}$	d_7: $\{s_{26}\}$	d_8: $\{s_{28}\}$
d_1	$\{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}$	d_9:$\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_{10}: $\{s_7\}$	-	-	-	-	-	-	-
d_2										
。。。										

结果

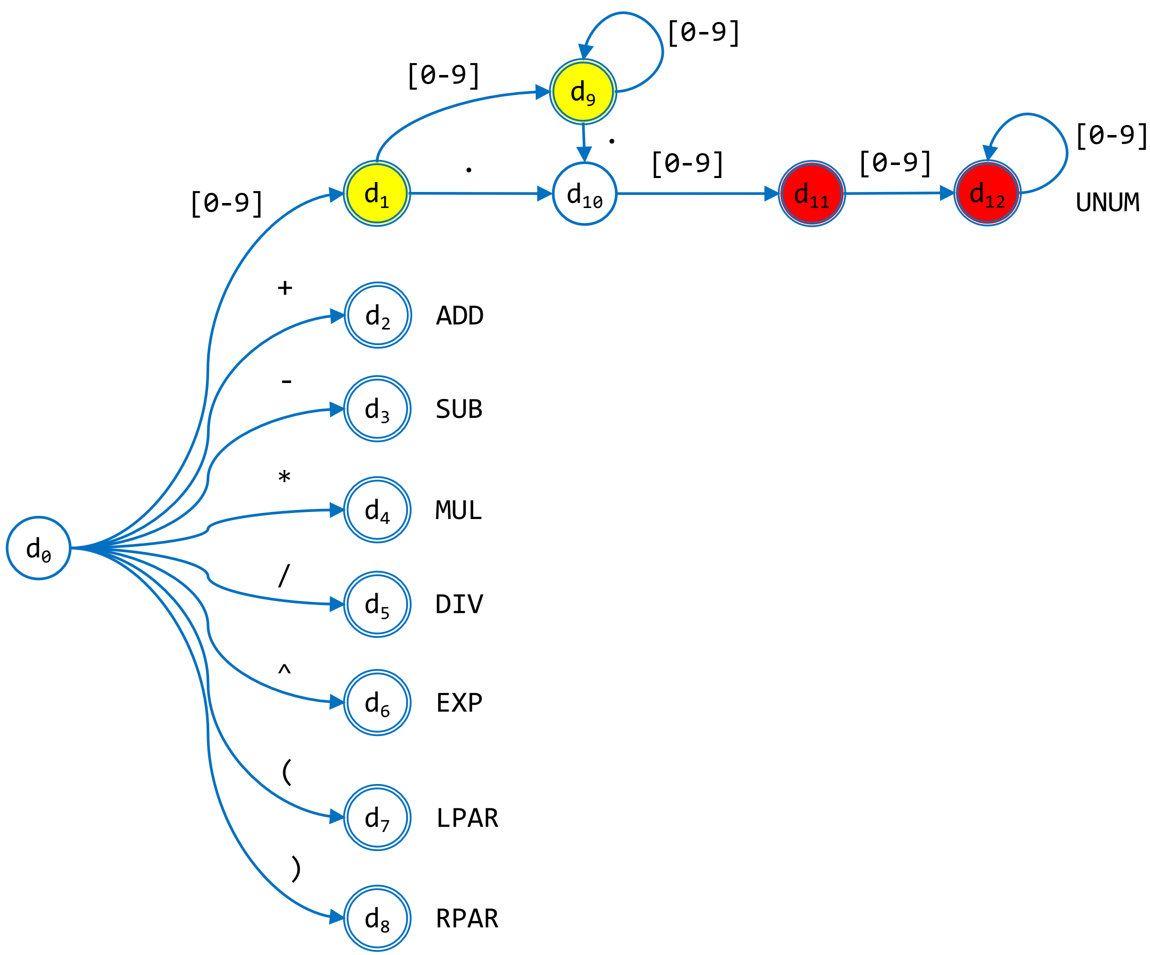
DFA 状态	NFA 状态集合	0-9	.	+	-	*	/	^	(	)
d_0	$\{s_0, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}$	d_1: $\{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	-	d_2: $\{s_{16}\}$	d_3: $\{s_{18}\}$	d_4: $\{s_{20}\}$	d_5: $\{s_{22}\}$	d_6: $\{s_{24}\}$	d_7: $\{s_{26}\}$	d_8: $\{s_{28}\}$
d_1	$\{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_9: $\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_{10}: $\{s_7\}$	-	-	-	-	-	-	-
d_2	$\{s_{16}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_3	$\{s_{18}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_4	$\{s_{20}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_5	$\{s_{22}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_6	$\{s_{24}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_7	$\{s_{26}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_8	$\{s_{28}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_9	$\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_9	d_{10}	-	-	-	-	-	-	-
d_{10}	$\{s_7\}$	d_{11}: $\{s_8, s_9, s_{11}, s_{14}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-
d_{11}	$\{s_8, s_9, s_{11}, s_{14}\}$	d_{12}: $\{s_9, s_{10}, s_{11}, s_{14}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-
d_{12}	$\{s_9, s_1 0, s_{11}, s_{14}\}$	d_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-

转换DFA结果

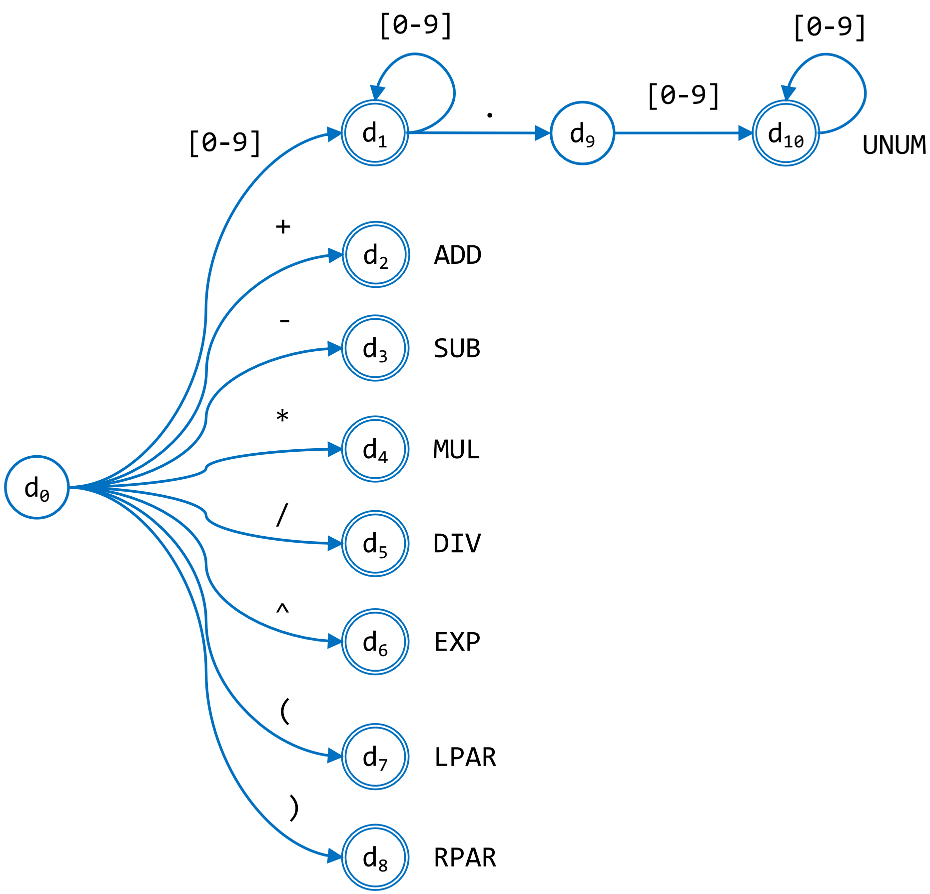

[0-9]
[0-9]
[0-9]
.
.
[0-9]
[0-9]
[0-9]
UNUM
d_0
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
d_8
d_9
d_{10}
d_{11}
d_{12}
+
-
*
/
^
(
)
ADD
SUB
MUL
DIV
EXP
LPAR
RPAR

DFA优化思路：合并同类项

- 对于两个同类型节点d_i和d_j，可以合并的条件是：
  - $\forall c \in \Sigma, \delta(d_i, c) = \delta(d_j, c)$



优化结果



[0-9]
[0-9]
.
[0-9]
[0-9]
d0
d1
d9
d10
UNUM
+
d2
ADD
-
d3
SUB
*
d4
MUL
/
d5
DIV
^
d6
EXP
(
d7
LPAR
)
d8
RPAR

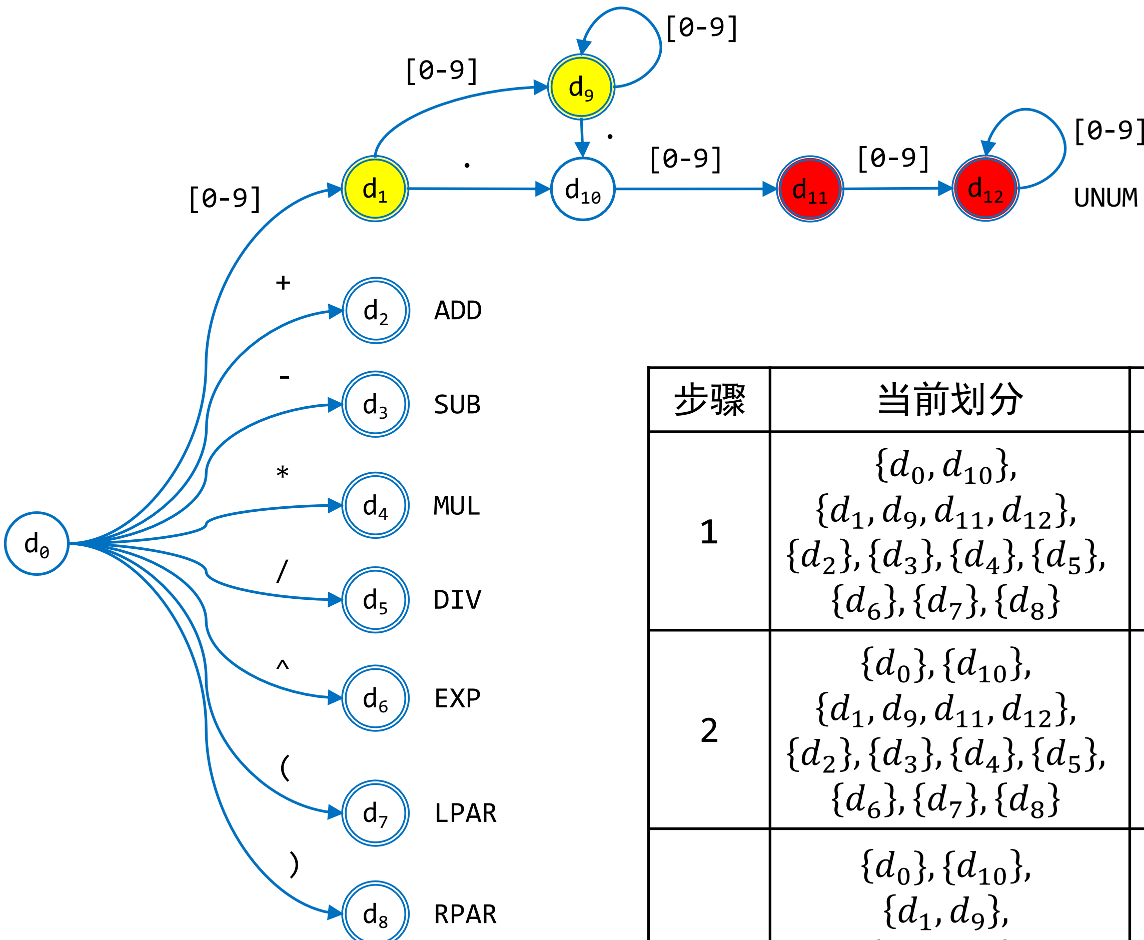
DFA优化思路：Hopcroft分割算法

```
将DFA的状态集合D划分为两个子集：接受
状态Dac和普通状态D\Dac。
D = {Dac, D\Dac};
S = {}
While (S!=D) do:
   S = D;
   D = {};
   foreach si ∈ S do:
      D = D ∪ Split (si)

Split(s) {
   foreach c in Σ
      if c splits s into {s1, s2}
         return {s1, s2}
   return s
}
```

- 两个节点s_i和s_j不用split的条件是：
  - $\forall c \in \Sigma, \delta(s_i, c) = \delta(s_j, c)$
- 如果不同的接受状态分别对应不同标签应如何改进算法？

Hopcroft分割算法应用示例



步骤	当前划分	集合	字符	Split
1	$\{d_0, d_{10}\}$, $\{d_1, d_9, d_{11}, d_{12}\}$, $\{d_2\}, \{d_3\}, \{d_4\}, \{d_5\}$, $\{d_6\}, \{d_7\}, \{d_8\}$	$\{d_0, d_{10}\}$	+	$\{d_0\}, \{d_{10}\}$
2	$\{d_0\}, \{d_{10}\}$, $\{d_1, d_9, d_{11}, d_{12}\}$, $\{d_2\}, \{d_3\}, \{d_4\}, \{d_5\}$, $\{d_6\}, \{d_7\}, \{d_8\}$	$\{d_1, d_9, d_{11}, d_{12}\}$	.	$\{d_1, d_9\}$, $\{d_{11}, d_{12}\}$
3	$\{d_0\}, \{d_{10}\}$, $\{d_1, d_9\}$, $\{d_{11}, d_{12}\}$, $\{d_2\}, \{d_3\}, \{d_4\}, \{d_5\}$, $\{d_6\}, \{d_7\}, \{d_8\}$			

NFA/DFA复杂度分析

- 对于正则表达式r来说，如采用Thompson构造法，
  - NFA状态数$\leq |2r|$，边数$\leq |4r|$
  - 解析单个词素x的时间复杂度为$O(|x| \times |r|)$。
- 如果转化为DFA：
  - 对应DFA的状态数$\leq |2^{|2r|}|$个
  - 解析单个词素的时间复杂度为$O(|x|)$。
- 结论：
  - NFA构造较快，但运行效率低；
  - DFA构造耗时，但运行效率高。

练习

- 使用Thompson算法将下列正则表达式转化为NFA；
- 应用子集构造法将NFA转化为DFA；
- 化简上一步得到的DFA。

```
IDENFIFIER := [a-z]([a-z]|[0-9])*

     DIGIT := [0-9]
    DIGITS := {DIGIT} {DIGIT}*
  FRACTION := .{DIGITS}|ϵ
  EXPONENT := (e(+|-|ϵ){DIGITS})|ϵ
      UNUM := {DIGITS} {FRACTION} {EXPONENT}
```