Institut de Formation et de Recherche en Informatique

Master GL/SI/IM

Année Académique : 2024 – 2025
Travaux Dirigés (2): Mathématiques pour l'Informatique
Periode : Octobre 2024

Exercice I.

1. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

2. Résoudre le même système en utilisant la méthode de Cramer.

3. Retrouver le résultat en utilisant, dans le diagramme suivant, des opérations matricielles de lignes jusqu'à produire la matrice identité à l'extreme gauche et la solution à l'extreme droite!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Cette technique traduit implicitement la méthode du pivôt de Gauss dans laquelle les inconnues ne sont pas visibles.

Exercice II.

1. Trouver techniquement l'inverse de la matrice carrée suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Retrouver l'inverse de A, en faisant dans le diagramme suivant, des opérations matricielles de lignes jusqu'à produire la matrice identité à gauche et puis récupérer la matrice inverse de A droite!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Trouver techniquement chacune des inverses des matrices carrées suivantes.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Etant donné trois nomdres réels x_0, x_1 et x_2, déterminer de façon pratique les déterminants de Vandermonde suivants:

$$V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}. \qquad V(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}.$$

<u>Exercice</u> III.

Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y - z &= -2 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 6. \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode du pivôt de Gauss.
2. En utilisant une méthode matricielle.

<u>Exercice</u> IV.

Résoudre de façon efficace les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 6 \\ x + 2y + z &= -6 \\ x + y + 2z &= 12. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z &= -1 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= -6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 12 \\ x + 2y + z &= -6 \\ x + y + 2z &= 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= -3. \end{cases}$$

Exercice V.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est une matrice nilpotente, c'est-à-dire, qu'il existe un entier nature k tel que $A^k = 0$.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice VI.
Pour tout réel s, on pose

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver A_0.

2. Calculer le produit matriciel $A_s A_t$ pour tous réels s et t.

3. En déduire l'expression de $(A_s)^{-1}$ en fonction de s.

Exercice VII.
On considère le matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, posons

$$E_{1,1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{3,1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{1,3}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer AP, PA, $E_{1,1}(a)A$, $AE_{1,1}(a)$, $E_{1,3}(a)A$, $AE_{1,3}(a)$, $E_{3,1}(a)A$ et $AE_{3,1}(a)$.

(ii) Interpretez les résultats en termes d'opérations élémentaires sur les colonnes ou les ou les lignes.

Exercice VIII.

Considérons les données incomplètes suivantes obtenues après un certain audit :

Facture No.1

Article	Quantité	Prix Unitaire	**Total**
A	5	?	
B	10	?	
C	2	?	
			1,280 USD

Facture No.2

Article	Quantité	Prix Unitaire	**Total**
A	10	?	
B	2	?	
C	1	?	
			1,660 USD

Facture No.3

Article	Quantité	Prix Unitaire	**Total**
A	1	?	
B	1	?	
C	5	?	
			635 USD

Aidez l'auditeur à trouver les prix manquants.