Institut de Formation et de Recherche en Informatique

# Master GL/SI/IM

| | |
|---|---|
| **Année Académique :** | 2024 – 2025 |
| **Travaux Dirigés (3):** | Mathématiques pour l'Informatique |
| **Periode :** | Novembre 2024 |

## <u>Exercice</u> I.

1. On pose

$$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \qquad B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

$$\mathscr{G} = \Big\{(0,\ 0);\ (1,\ 2);\ (2,\ 4);\ (3,\ 6);\ (4,\ 8)\Big\} \qquad \mathscr{P} = \Big\{(1,\ 0);\ (2,\ 1);\ (3,\ 2);\ (4,\ 3)\Big\}$$

$$\Gamma = \Big\{(1,\ 0);\ (1,\ 20)\Big\}.$$

   i) - Justifier que $\mathscr{G}$ est une relation de $A$ vers $B$.
   - Représenter son diagramme sagittal.
   - Existe-il une autre représentation de $\mathscr{G}$ ?
   - Définir $\mathscr{G}$ en compréhension, si possible. C'est-à-dire, donner à quelle condition un élément quelconque $x \in A$ est en relation avec un élément quelconque $y \in B$.

   ii) - Justifier que $\mathscr{P}$ est une relation de $A$ vers $B$.
   - Définir $\mathscr{P}$ en compréhension, si possible.

   iii) $\Gamma$ est-elle une relation de $A$ vers $B$ ?

2. On pose

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

$$\Delta = \Big\{(1,\ 1);\ (2,\ 2);\ (3,\ 3);\ (4,\ 4);\ (5,\ 5);\ \Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D} = \Big\{(1,\ 6);\ (2,\ 6);\ (3,\ 6);\ (6,\ 6)\Big\}.$$

   i) - Justifier que $\Delta$ est une relation dans $E$.
   - Représenter son diagramme de Venn.
   - Définir $\Delta$ en compréhension, si possible.

ii) - Justifier que $\mathscr{D}$ est une relation dans $E$.
- Représenter son diagramme de Venn.
- Définir $\mathscr{D}$ en compréhension, si possible.

**Exercice II.**
Considérons l'ensemble suivant:

$E = \{\text{nigeria, botswana, brésil, grande} - \text{bretagne, tchad, france, ghana, senegal, usa, australie}\}$

et puis définissons une relation $\mathcal{C}$ dans $E$ par la règle "... est dans le même continent que ... ". Par exemples, ghana $\mathcal{C}$ tchad.

1. Vérifier que $\mathcal{C}$ est une relation déquivalence dans $E$.
2. Donner l'ensemble quotient de $E$; c'est-à-dire l'ensemble de toutes les classes d'équivalence of $E$.

**Exercice III.**
Considérons l'ensemble suivant:

$$C_1 = \{\text{cameroun, tchad, ghana, nigeria, senegal}\}$$

and

$$C_2 = \{\text{Benin, cameroun, tchad, ghana, nigeria, senegal}\}.$$

Definir une relation $\mathcal{R}_1$ dans $C_1$ par la relation ' ... a même frontière que ou est égal à ... " et une relation $\mathcal{R}_2$ dans $C_2$ par la même règle. Par exemple; nigeria $\mathcal{R}_1$ nigeria,

1. Vérifier que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence dans $C_1$.
2. Donner l'ensemble quotient de $C_1$; c'est-à-dire l'ensemble de toutes les classes d'équivalence of $E$.
3. $\mathcal{R}_2$ est-elle une relation d'équivalence.

**Exercice IV.**
Considérons $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$.

1. On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\preceq$ telle que pour tous éléments $x = (x_1\,,\ x_2)$ et $y = (y_1\,,\ y_2)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$x \preceq y \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \leqslant & y_1 \\ x_2 & \leqslant & y_2 \end{array}\right. .$$

   Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre partiel.

2. (Ordre lexicographique)
   On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\preceq$ telle que pour tous éléments $x = (x_1\,,\ x_2)$ et $y = (y_1\,,\ y_2)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$x \preceq y \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < y_1 \ \text{ou bien} \ \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & \leqslant & y_2 \end{array}\right. .$$

   Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre total.

3. Comparer dans $\left(\mathbb{R}^2 \quad \preceq\right)$, les couples suivants :

$$(1,\, 0); \quad (0,\, 1); \quad (1,\, 1) \;\text{ et }\; (2,\, 0)\,.$$

**<u>Exercice</u> V.**

1. On considére dans l'ensemble $A = \{-3,\, -2,\, -1,\, 1,\, 2\}$, la relation $\mathcal{S}$ définie par

$$\forall\,(x,y) \in A^2, \qquad x\,\mathcal{S}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad xy \geqslant 0.$$

   i) Dessiner le diagramme de $\mathcal{S}$.

   ii) $\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence?
   Si oui, préciser la classe de 1, celle de $-1$ et puis celle de $-3$.

   iii) Si on remplace l'ensemble $A$ par $A' = A \cup \{0\}$ et l'on considère sur $A'$ la même règle $\mathcal{S}$, a-t-on (toujours) une relation d'équivalence?

2. On considére dans l'ensemble $B = \{1,\, 2,\, 4,\, 6\}$, la relation $\mathcal{D}$ définie par

$$\forall\,(x,y) \in B^2, \qquad x\,\mathcal{D}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est un diviseur de } y.$$

   i) Dessiner le diagramme de $\mathcal{D}$.

   ii) Vérifier que $\mathcal{D}$ est une relation d'ordre et représenter son diagramme de Hasse.
   Cet ordre est-il total ?
   $(B,\, \mathcal{D})$ possède t-il un minimum? des éléments maximaux?

   iii) Si on remplace l'ensemble $B$ par $B' = B \cup \{0\}$ et l'on considère sur $B'$ la même règle $\mathcal{D}$, a-t-on (toujours) une relation d'ordre? Si oui ya-t-il un maximum $(B',\, \mathcal{D})$

**<u>Exercice</u> VI.**

1. Lesquelles des relations ci-dessous sont des fonctions ?

2. Parmi ces fonctions, lesquelles sont des applications ?

i) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$

ii) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 + 1 = 0.$

iii) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad |x| - y = 0.$

iv) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 7.$

v) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{N} \text{ tel que } qx = y.$

**Exercise VII.**

1. Lesquelles des relations suivantes sont des relations d'équivalence? On précisera si possible les classes d'équivalence.

   i)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*, \qquad x\,\mathcal{S}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad xy > 0.$$

   ii)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{S}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad xy \geqslant 0.$$

   iii)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{M}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

   iv)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{E}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x = y.$$

   v)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x + y = 0.$$

2. Lesquelles des relations suivantes sont des relations d'ordre? On précisera si possible si l'ordre est total.

   i)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{E}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x = y.$$

   ii)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{I}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x \leqslant y.$$

   iii)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x < y.$$

   iv)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 \leqslant y^2.$$

   v)
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad\Longleftrightarrow\quad |x| \leqslant |y|.$$

**Exercice VIII.**

Soit Sgn la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\{-1,\, 0,\, 1\}$ par

$$\operatorname{Sgn}(x) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \;\;0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\ \;\;1 & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

1. Trouver $\operatorname{Sgn}(10)$, $\operatorname{Sgn}(-100)$ et $\operatorname{Sgn}(0)$.

2. Justifier que Sgn est une application.

3. Montrer que
   $$\operatorname{Sgn}(x) \cdot x \;=\; |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$



IFERL - UAC

*Remarque.* L'application Sgn est définie de telle sorte que $\mathrm{Sgn}(x) \cdot x = |x|$ pour tout nombre réel $x$. Dans certains contextes, n'importe quel élément de $[-1,\, 1]$ peut être choisi comme $\mathrm{Sgn}(0)$.

**Exercice IX.**
Soit $\mathcal{F}$ la relation définie de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ par:

$$\text{Pour all } x,\, y \in \mathbb{N}, \qquad x\,\mathcal{F}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4x^2 + 4x - 1 \;=\; 0.$$

1. Trouver $m,\, n,\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$1\,\mathcal{F}\,m, \qquad 4\,\mathcal{F}\,n \quad \text{et} \quad p\,\mathcal{F}\,11.$$

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une application.

**Exercice X.** Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble universerl $E$. La fonction caractéristique $1_A$ ou $\chi_A$ de $A$ est la fonction définie de $E$ vers $\{0,\, 1\}$ par

$$\chi_A(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in A\,, \\[2ex] 0 & \text{if} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

1. Posons $E = \{-2,\, 0,\, 2,\, 3\}$ and $A = \{0,\, 2\}$.
   i) Trouver $\chi_A(-2)$, $\chi_A(0)$, $\chi_A(2)$ et $\chi_A(3)$.
   ii) Dessiner le diagramme de $\chi_A$.
   iii) Comparer $\chi_A^{-1}(0)$, l'image réciproque de 0 par $\chi_A$, et le complémentaire de $A$ dans $E$.
2. Quelle est la fonction caractéristique de $\varnothing$ ?
3. Quelle est la fonction caractéristique de l'ensemble plein $E$ ?

**Exercice XI.** (La relation de congruence modulo 2).
Considérons la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{Z}$ comme suit:

$$\text{Pour tout} \quad (m,\, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad m\,\mathcal{R}\,n \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \text{ divise } m - n\,.$$

1. L'élément 4 est-il en relation avec 0 par $\mathcal{R}$ ? (i.e., Avons-nous $4\,\mathcal{R}\,0$ ?).
   Avons-nous $2\,\mathcal{R}\,6$ ? $3\,\mathcal{R}\,(-3)$ ? $5\,\mathcal{R}\,2$ ? $2017\,\mathcal{R}\,1$ ?
2. Donner six entiers qui sont en relation avec 1 par $\mathcal{R}$.
3. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. **C'est la relation de congruence modulo** 2.
   Nous écrivons alors:

$$4 \equiv 0 \bmod 2 \qquad \text{qui se lit} \quad \text{“4 est congru à 0 modulo 2''}.$$

   De même

$$-1 \equiv 1 \bmod 2, \qquad -2 \equiv 0 \bmod 2, \qquad 2013 \equiv 1 \bmod 2, \quad \text{etc...}$$

   Maintenant, trouver les classes d'équivalence $\dot{0}$ et $\dot{1}$ de 0 et 1 respectivement.

4. L'ensemble des classes d'équivalence de la congruence modulo 2 est noté $\mathbb{Z}_2$. Il est aussi appélé l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ sur $2\mathbb{Z}$ et peut être aussi noté $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ .

   Montrer que
$$\mathbb{Z}_2 \ = \ \{\dot{0},\ \dot{1}\} \ = \ \{[0],\ [1]\}$$
   sur lequel est bien définie l'addition modulaire et la multiplication modulaires comme suit:
$$[m] + [n] \ = \ [m+n] \qquad \text{et} \qquad [m] \times [n] \ = \ [m \times n] \,.$$
   Remplissez alors les tabeaux suivants d'operations dans $\mathbb{Z}_2$.

| $+$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ |
|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | |
| $\dot{1}$ | | |

| $\times$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ |
|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | |
| $\dot{1}$ | | |

**<u>Exercice XII</u>.** (La relation de congruence modulo $n$).
Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
On dit qu'un entier relatif $a$ est congru à $b$ modulo $n$, si $n$ divise $a - b$.

1. Remplissez convenablement les pointillés suivants par l'un des nombres 0, 1 and 2.
$$9 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 3, \qquad -1 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 3, \qquad 10 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 3.$$
   Donner en description l'ensemble quotient $\mathbb{Z}_3$ .

2. Remplissez convenablement les pointillés suivants par l'un des nombres 0, 1, 2 and 3.

   $2013 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 4, \qquad -4 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 4, \qquad 10 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 4, \qquad 19 \equiv \ \ldots \ \text{mod } 4.$

   Décrivez $\mathbb{Z}_4$ .

3. Remplissez alors les tabeaux suivants d'operations dans $\mathbb{Z}_3$.

| $+$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | | |
| $\dot{1}$ | | | |
| $\dot{2}$ | | | |

| $\times$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | | |
| $\dot{1}$ | | | |
| $\dot{2}$ | | | |

4. Remplissez alors les tabeaux suivants d'operations dans $\mathbb{Z}_4$.

| $+$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ | $\dot{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | | | |
| $\dot{1}$ | | | | |
| $\dot{2}$ | | | | |
| $\dot{3}$ | | | | |

| $\times$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ | $\dot{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dot{0}$ | | | | |
| $\dot{1}$ | | | | |
| $\dot{2}$ | | | | |
| $\dot{3}$ | | | | |

**Résumé.** *Congruence / Equivalence modulaire.*
Etant dnné un entier naturel $n \geqslant 2$, on dit par définition qu' "un entier relatif $a$ est *congru* à un entier relatif $b$ *modulo* $n$" et on écrit $a \equiv b \pmod{n}$, quand $n$ divise $a-b$ (i.e., $a-b$ est un multiple de $n$ ou encore $a-b \in n\mathbb{Z}$).
En d'autres termes:

$$\forall\ (a,\, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad a \equiv b \pmod{n} \quad \Longleftrightarrow \quad n\,|_{(a-b)}.$$

Le <u>reste de $a$ modulo $n$</u> est le reste de la division eucldienne de $a$ par $n$ et est noté $a \bmod n$.

1. Soient $a,\, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 2$ un entier naturel.
   Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

   **i.** $n\,|_{(a-b)}$.

   **ii.** $a \equiv b \pmod{n}$

   **iii.** $a = b + kn$ pour un certain entier entier relatif $k$.

   **iv.** $a$ et $b$ ont le même reste (positif ou nul) dans leurs divisions euclidiennes par $n$.

   **v.** $(a \bmod n) = (b \bmod n)$.

2. On montre que la congruence modulo $n \in \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

3. Etant donné $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $n$ est noté $\mathbb{Z}_n$ ou encore $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ .

   Décrire en extension $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, and more generally $\mathbb{Z}_n$ and say what allows Modular Arithmetics.

**<u>Exercice</u> XIII.**
Le 05 décembre 2023 est un Mardi.
Quel sera le jour de la semaine dans 100 jours ?
Dans 1.000 jours?