Master GL/SI/IM

Année Académique :	2024 – 2025
Travaux Dirigés (1):	Mathématiques pour l'Informatique
Période :	Octobre 2024

Exercice I.

Lesquelles des assertions suivantes sont des propositions logiques ?

1. Le mot "informatique" est un néologisme créé par contraction des mots "information" et "automatique" et utilisé pour la première fois par l'allemand Karl Steinbuch.
2. "La biométrie permet d'identifier ou d'authentifier un individu grâce à ses caractéristiques uniques".
3. "Il existe un autre groupe de caractéristiques biométriques en dehors de la biométrie morphologique, de la biométrie comportementale et de la biométrie biologique".
4. "En 1823, le medécin et anatomiste Chèque Johan Evangelista Purkinje a révélé qu'une empreinte digitale pourrait de façon presque absolue identifier une personne".
5. "En 2014, l'Iranienne Maryam Mirzakhani est la première femme mathématicienne à recevoir la médaille Fields".
6. "Jusqu'à présent, l'Iranienne Maryam Mirzakhani est la seule femme à recevoir la médaille Fields".
7. "En Août 2010, D. A. Spielman a reçu le prix Rolf Nevanlinna pour ses travaux sur l'analyse lisse de la Programmation Linéaire, des algorithmes pour les codages basés sur les graphes, et pour les applications de la théorie des graphes au calcul numérique".
8. "Un domaine dans lequel il y a eu une interaction fructueuse entre les mathematiques et les algorithmes, est celui des preuves vérifiables en probabilité (probabilistically checkable proofs - PCP) qui émane de la théorie des cordes, de l'algèbre, ainsi que de la cryptographie et des algorithmes".
9. "Charles Babbage a beaucoup investi dans le perfectionnement d'une calculatrice qui a présagé l'ordinateur programmable".
10. "Une machine peut faire le travail de cinquante personnes ordinaires, mais aucune machine ne peut faire le travail d'une personne extraordinaire".

11. “Le plus ancien algorithme de la programmation linéaire est l’algorithme du simplexe”.

12. “Le plus puissant explosif n’est ni la toluène, ni la bombe atomique, mais l’idée humaine”.

13. “Les mathématiques ne sont pas difficiles”.

14. “L’informatique est incontournable dans la vie”.

15. “L’invention du téléphone par Bell Alexander Graham a eu lieu suite à la surdité de sa mère et de son épouse, et puis ses expériences sur les appareils d’écoute”.

16. “Marconi Guliemo a inventé la première ligne radio-téléphonique à micro-ondes entre des villes”.

17. “La reconnaissance des formes et des images commence par un pixel de l’image d’un objet à reconnaitre”.

18. “Certains phenomènes physiques peuvent avoir à la fois des représentations continue (topologique) et discrète (digitale)”.

19. “L’informatique va continuer à se développer, à moins que la science des matériaux décline”.

20. “L’os de Lebombo est le plus vieux objet mathématique au monde”.

Exercice II.

1. Trouver la valeur de vérité de chacune des propositions (logiques) suivantes:

   a) P : “Pour tout entier naturel n, le nombre de Fermat $F_n = (2)^{2^n} + 1$ est un nombre premier.”

   b) Q : “Il exite un entier naturel n pour lequel $(2)^{2^n} - 1$ est un nombre premier.”

   c) R : “Pour tout nombre premier p, le nombre de Mersenne $M_p = 2^p - 1$ est un nombre premier.”

2. On considère la proposition suivante: $\mathcal{C}$ “ Si Codjo a une temperature supérieure ou égale à 38, alors il est malade”.

   a) Donner la négation et la contraposée de $\mathcal{C}$.

   b) Exprimer littéralement $\mathcal{C}$ de cinq autres façons différentes et équivalentes.

3. Pour chacune des formes propositionnelles $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ et $U(x)$, déterminer l’ensemble des entiers relatifs x pour lesquels elles sont valides.

   a) $P(x)$: “ $|x| = 1$ ”.

   b) $Q(x)$: “ $x^2 = -1$ or $x^2 = 2$ ”.

c) $R(x)$: " $x^2 = 1.$ ".

d) $S(x)$: " $|x| + x = 0.$ ".

e) $T(x)$: " $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ ".

f) $U(x)$: " $x^2 + (x-1)^2 = 25.$ ".

<u>Exercice III.</u>

Considérons les ensembles suivants :

$$\mathcal{M} = \{\text{Apple, Asus, Acer, Compaq, Dell, HP, Lenovo, Medion, Toshiba}\}$$

$$\mathcal{Y} = \{1966,\ 1976,\ 1982,\ 1983,\ 1985,\ 1989,\ 1991,\ 2003,\ 2017\},$$

et posons

$$\mathcal{A} = \{\text{Dell, Lenovo}\}, \quad \mathcal{B} = \{1991, 2003\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\text{Apple}, 2017\}.$$

1. Dire si chacun des ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ ou non. *(Utiliser les symboles mathématiques).*

2. Dire si chacun des ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ ou non.

3. Que pouvez-vous dire d'autre des ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{Y}$?

4. Donner les différences d'ensembles: $\mathcal{M}\backslash\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\backslash\mathcal{M}$, $\mathcal{M}\backslash\mathcal{B}$, $\mathcal{M}\backslash\mathcal{C}$ et $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{C}$.

5. Donner la différence symétrique $\mathcal{M}\Delta\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}$ et C, aussi notée $\mathcal{M} \oplus \mathcal{C}$.

6. (i) Résoudre dans $\mathscr{P}(\mathcal{M})$ l'équation $\mathcal{A} \cup X = \mathcal{M}$ où X est l'inconnue.
   (ii) Résoudre dans $\mathscr{P}(\mathcal{M})$ l'équation d'inconnue Z: $\mathcal{A} \cap Z = \mathcal{A}$.

7. Que pouvez-vous dire de deux ensembles ayant même ensemble de parties. Justifier la réponse.

8. Definir en compréhension le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M} \times \mathcal{Y}$:

$$\mathscr{L} = \Big\{(\text{Apple}, 1976),\ (\text{Acer}, 1976),\ (\text{Asus}, 1989),\ (\text{Compaq}, 1982),\ (\text{Dell}, 1989)\Big\}$$

$$\bigcup \Big\{(\text{HP}, 1966),\ (\text{Lenovo}, 1984),\ (\text{Medion}, 1983),\ (\text{Toshiba}, 1985)\Big\}.$$

9. Comparer les trois sous-ensembles de $\mathcal{M} \times \mathcal{Y}$ suivants:

$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}, \quad (\overline{\mathcal{A}} \times \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{B}}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}$$

où la barre désigne le complémentaire.