



# Télécommunications - TPs | Partie I

## Etude de chaines de transmissions en bande de base

Canon Ayoub | Yahya Zakaria

Département Sciences du Numérique - Première année  
2022-2023

# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Étude de modulateurs bande de base</b>   | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist</b>                     | <b>7</b>  |
| 3.1      | Étude sans canal de propagation . . . . .   | 8         |
| 3.2      | Étude avec canal de propagation sans bruit . . . . .                                      | 9         |
| <b>4</b> | <b>Étude de l'impact du bruit et du filtrage adapté, notion d'efficacité en puissance</b> | <b>10</b> |
| 4.1      | Etude de chaque chaine de transmission . . . . .  | 11        |
| 4.2      | Comparaison des chaines de transmission implantées . . . . .                              | 17        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>18</b> |

# List of Figures

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Tracé du signal généré. . . . .  | 3  |
| 2  | Tracé de la DSP du signal généré. . . . .  | 3  |
| 3  | DSP estimée - DSP théorique. . . . .   | 4  |
| 4  | Tracé du signal généré. . . . .  | 5  |
| 5  | Tracé de la DSP du signal généré. . . . .  | 5  |
| 6  | DSP estimée - DSP théorique. . . . .   | 5  |
| 7  | Tracé du signal généré. . . . .  | 6  |
| 8  | Tracé de la DSP du signal généré. . . . .  | 6  |
| 9  | DSP estimée - DSP théorique. . . . .   | 6  |
| 10 | tracé superposé des DSP des différents signaux générés. . . . .                                    | 7  |
| 11 | Le tracé du signal en sortie du filtre de réception. . . . .                                       | 8  |
| 12 | Le tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission g. . . . .              | 8  |
| 13 | Le tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception. . . . .                          | 8  |
| 14 | Tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission. . . . .                   | 9  |
| 15 | Tracé du diagramme de l'oeil à la sortie du filtre de réception. . . . .                           | 9  |
| 16 | tracé de $ H(f)H_r(f) $ et $ H_c(f) $ . . . . .  | 9  |
| 17 | Tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission. . . . .                   | 10 |
| 18 | Tracé du diagramme de l'oeil à la sortie du filtre de réception. . . . .                           | 10 |
| 19 | tracé de $ H(f)H_r(f) $ et $ H_c(f) $ . . . . .  | 10 |
| 20 | Diagramme de l'oeil. . . . .   | 11 |
| 21 | Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour $E_b/N_0$ différentes. . . . . | 12 |
| 22 | TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de $E_b/N_0$ . . . . .                                    | 12 |
| 23 | Diagramme de l'oeil. . . . .   | 13 |
| 24 | Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour $E_b/N_0$ différentes. . . . . | 14 |
| 25 | TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de $E_b/N_0$ . . . . .                                    | 14 |
| 26 | Diagramme de l'oeil. . . . .   | 15 |
| 27 | Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour $E_b/N_0$ différentes. . . . . | 16 |
| 28 | TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de $E_b/N_0$ . . . . .                                    | 16 |
| 29 | TEBs obtenus pour Chaîne 1 et Chaîne 2. . . . .  | 17 |
| 30 | TEBs obtenus pour Chaîne 1 et Chaîne 3. . . . .  | 17 |

# 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de vous initier à l'étude d'une chaîne de transmission en bande de base, afin que vous soyez capables (via l'étude de quelques cas) :

- D'en évaluer l'efficacité spectrale et l'efficacité en puissance.
- D'identifier les solutions possibles pour l'optimiser en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.
- De comparer des chaînes de transmission en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

## 2 Étude de modulateurs bande de base

Ce premier travail est dédié à l'étude des modulateurs bande de base et, en particulier, à l'identification des éléments ayant un impact sur l'efficacité spectrale obtenue pour la transmission.

Pour cela nous avons implanté plusieurs modulateurs bande de base, en utilisant une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 24000$  Hz pour transmettre un même débit binaire  $R_b = \frac{1}{T_c} = 3000$  bits par seconde.

- Modulateur 1:

– Mapping : symboles binaires à moyenne nulle.

– Filtre de mise en forme rectangulaire de hauteur 1 et de durée égale à la durée symbole.

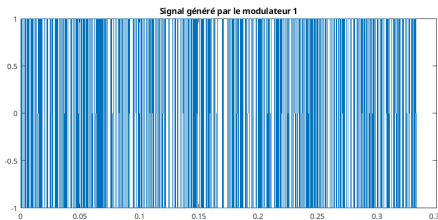


Figure 1: Tracé du signal généré.

**SP du signal généré par le modulateur 1**

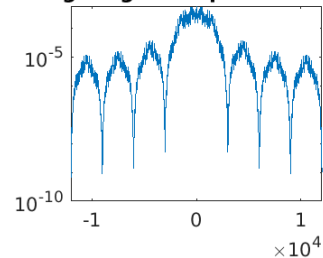


Figure 2: Tracé de la DSP du signal généré.

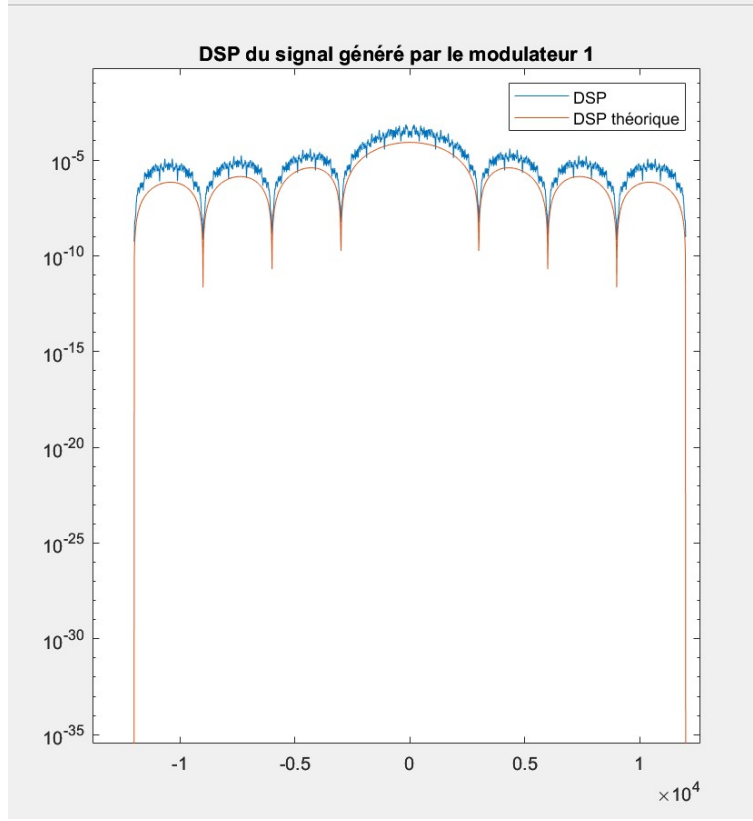


Figure 3: DSP estimée - DSP théorique.

Pour calculer la DSP théorique on utilise l'expression générale de la densité spectrale d'un signal de communication numérique en bande de base :

$$S_x(f) = \sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} + 2\sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} \sum_{k=1}^{\infty} R[R_a(k)e^{2j\pi f k T_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_{k=1}^{\infty} |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

Or puisque le mapping est à moyenne nulle,

$$m_a = E(a_k) = 0$$

Et

$$\sigma_a^2 = E(|a_k - m_a|^2) = E(|a_k|^2) = P(a_k = 1) \times (|+1|^2) + P(a_k = -1) \times (|-1|^2) = 1$$

On a également  $R_a(k) = 0$  car les symboles sont indépendants.

Ainsi,  $S_x(f) = |H(f)|^2/T_s$  avec  $h(t) = \Pi_{T_s/2}(t - T_s/2)$ . Donc,

$$S_x(f) = \frac{T_s}{4} \text{sinc}^2(\pi f T_s)$$

- Modulateur 2:
  - Mapping : symboles 4-aires à moyenne nulle.
  - Filtre de mise en forme : rectangulaire de hauteur 1 et de durée égale à la durée symbole.

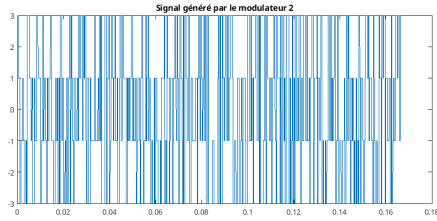


Figure 4: Tracé du signal généré.

**SP du signal généré par le modulateur 2**

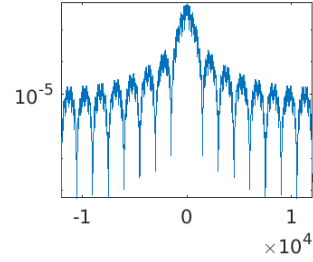


Figure 5: Tracé de la DSP du signal généré.

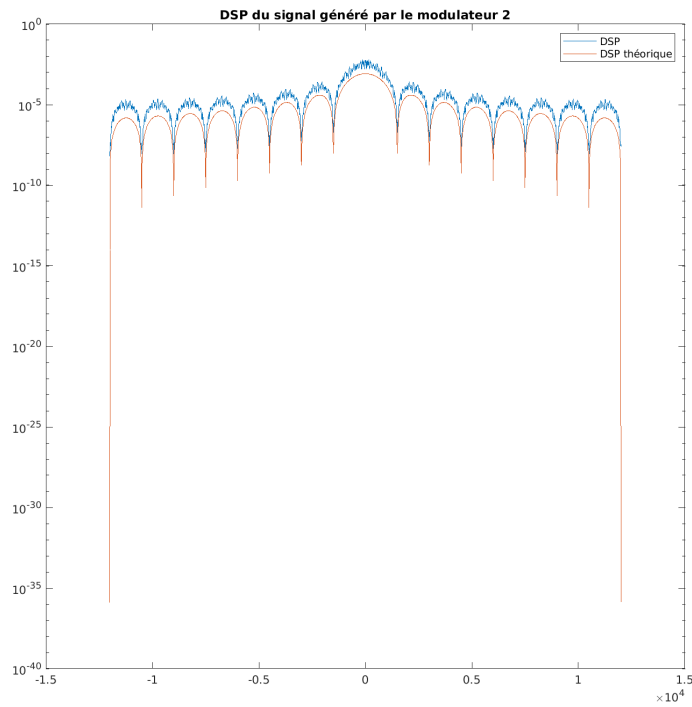


Figure 6: DSP estimée - DSP théorique.

Pour calculer la DSP théorique on utilise l'expression générale de la densité spectrale d'un signal de communication numérique en bande de base :

$$S_x(f) = \sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} + 2\sigma_a^2 \frac{|H(f)|^2}{T_s} \sum_{k=1}^{\infty} R[R_a(k)e^{2j\pi f k T_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_{k=1}^{\infty} |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

Or puisque le mapping est à moyenne nulle,

$$m_a = E(a_k) = 0$$

Et

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= E(|a_k - m_a|^2) = E(|a_k|^2) = P(a_k = 1) \times (|+1|^2) + P(a_k = -1) \times (|-1|^2) + P(a_k = -3) \times (|-3|^2) \\ &\quad + P(a_k = 3) \times (|+3|^2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

On a également  $R_a(k) = 0$  car les symboles sont indépendants.

Ainsi,  $S_x(f) = \frac{5|H(f)|^2}{T_s}$  avec  $h(t) = \Pi_{T_s/2}(t - T_s/2)$ . Donc,

$$S_x(f) = \frac{5T_s}{4} \text{sinc}^2(\pi f T_s)$$

• Modulateur 3:

- Mapping : symboles binaires à moyenne nulle.
- Filtre de mise en forme : racine de cosinus surélevé.

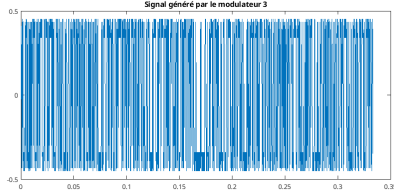


Figure 7: Tracé du signal généré.

**SP du signal généré par le modulateur 3**

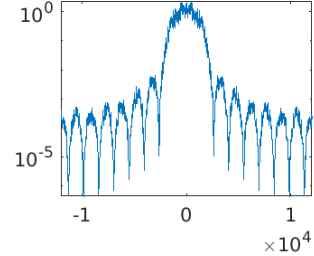


Figure 8: Tracé de la DSP du signal généré.

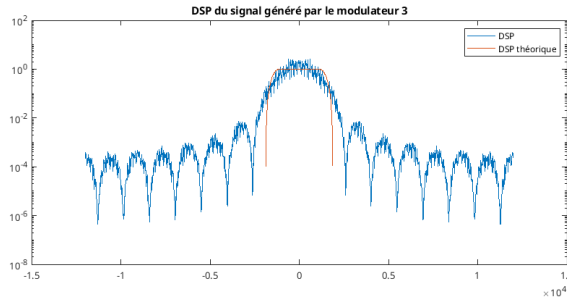


Figure 9: DSP estimée - DSP théorique.

## Comparaison des modulateurs implantés :

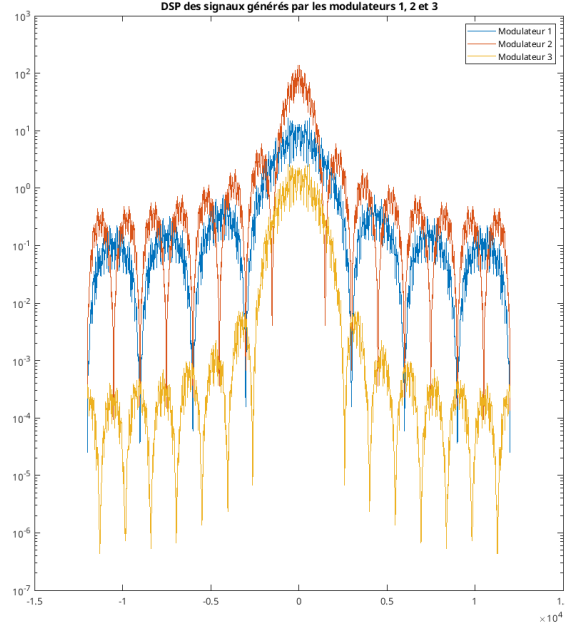


Figure 10: tracé superposé des DSP des différents signaux générés.

Afin de comparer trois modulateurs différents, nous calculons leur efficacité spectrale de transmission en utilisant la formule suivante :

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{R_s * \log_2(M)}{k * R_s} = \frac{\log_2(M)}{k},$$

où  $B$  est la largeur de bande,  $R_b$  est le débit binaire,  $R_s$  est le débit symbole,  $M$  est l'ordre de modulation, et  $k$  est un coefficient tel que  $B = k * R_s$ .

- Pour le premier modulateur, nous avons  $B = 3000Hz = R_{s1}$  et  $\log_2(M) = 1$ , donc  $k = 1$  et  $\eta_1 = 1$ .
- Pour le deuxième modulateur, nous avons  $B = 1500Hz = R_{s2}$  et  $\log_2(M) = 2$ , donc  $k = 1$  et  $\eta_2 = 2$ .
- Pour le troisième modulateur, nous avons  $B = 2250Hz = 0,75 * R_{s3}$  et  $\log_2(M) = 1$ , donc  $k = 0,75$  et  $\eta_3 = 1/0,75 = 0,33$ .

Par conséquent, le deuxième modulateur, qui correspond au mapping 4-aire à moyenne nulle, est le plus efficace spectralement, suivi du troisième modulateur, puis du premier.

Pour augmenter l'efficacité spectrale de puissance, les paramètres à prendre en compte sont l'ordre de modulation  $M$  et le coefficient  $k$ . En effet, à  $M$  fixé, le modulateur ayant un filtre de mise en forme bien localisé en fréquence (c'est-à-dire un  $k$  plus petit et donc une largeur de bande plus petite) est le plus efficace. Et à  $k$  fixé, le modulateur ayant un  $M$  plus grand est le plus efficace spectralement.

## 3 Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist

Nous avons implanté ici une chaîne de transmission en bande de base sans bruit en se focalisant sur les interférences entre symboles : leur impact sur la transmission et l'influence du respect ou du non

respect du critère de Nyquist. La fréquence d'échantillonnage choisit  $F_e = 24000Hz$  pour transmettre un débit binaire  $R_b = \frac{1}{T_c} = 3000$  bits par seconde. On considérera un mapping binaire à moyenne nulle. Le filtre de mise en forme et le filtre de réception auront les mêmes réponses impulsionnelles rectangulaires de durées égales à la durée symbole et de hauteur 1.

### 3.1 Étude sans canal de propagation

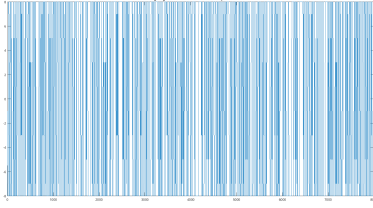


Figure 11: Le tracé du signal en sortie du filtre de réception.

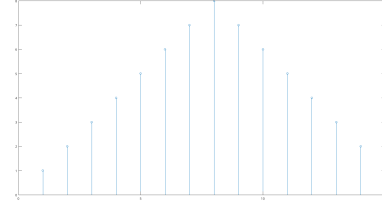


Figure 12: Le tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission  $g$ .

1) En convoluant les deux réponses rectangulaires de durée  $T_s$  et de hauteur 1, on obtient un triangle de durée  $2T_s$  et de hauteur  $T_s$ , conformément à la théorie. Ainsi, la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission  $g(t) = h(t)h_r(t)$  est vérifiée.

Il est possible de trouver l'instant optimal  $n_0$  pour échantillonner sans interférence entre les symboles  $n_0 + mN_s$  à partir de la réponse impulsionnelle  $g$  de la chaîne de transmission. Cet instant optimal est choisi d'après le critère de Nyquist de sorte que  $g(n_0) \neq 0$  et que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $g(n_0 + kN_s) = 0$ .

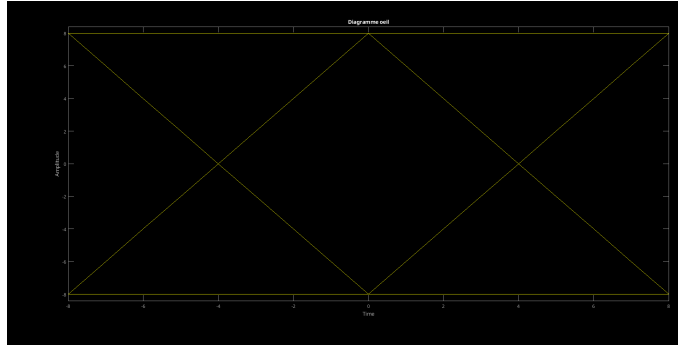


Figure 13: Le tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception.

Comme nous n'avons que deux symboles au niveau du diagramme de l'oeil, nous devons trouver un point où il n'y a que deux valeurs possibles. S'il y a plusieurs points possibles, nous choisissons celui qui présente la plus grande différence de valeurs afin d'éviter les interférences. Dans ce cas, nous choisissons  $n_0 = 8$ .

2) Lorsque nous échantillonons avec  $n_0$  optimal, le TEB est nul, ce qui est normal car il n'y a pas de canal de propagation. Si nous avions utilisé  $n_0 = 3$  qui n'est pas l'instant optimal, nous aurions eu un TEB non nul. Cela est dû au terme d'interférence qui ne sera pas nul comme le montre la formule suivante :

$$z(t_0 + mT_s) = a_m \times g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k \times g(t_0 + (m - k)T_s) + w(t_0 + mT_s)$$



### 3.2 Étude avec canal de propagation sans bruit

Pour  $BW = 8000 \text{ Hz}$  :

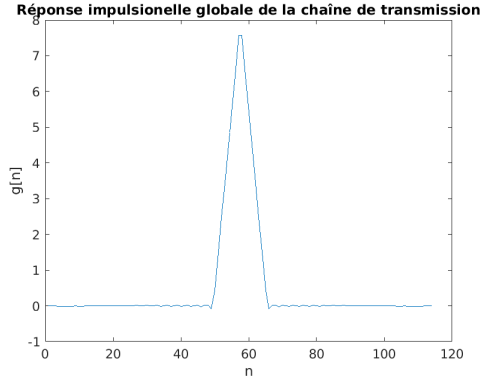


Figure 14: Tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission.

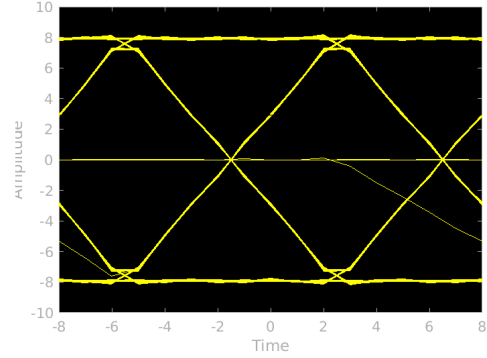


Figure 15: Tracé du diagramme de l'oeil à la sortie du filtre de réception.

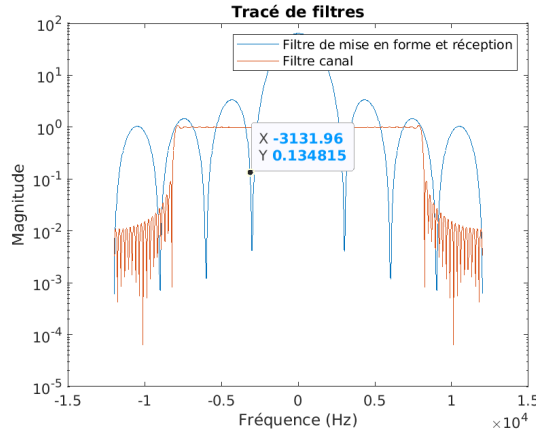


Figure 16: tracé de  $|H(f)H_r(f)|$  et  $|H_c(f)|$ .

Nous avons ajouté un filtre de canal de largeur  $BW = 8000 \text{ Hz}$  à notre chaîne de transmission, mais celle-ci est encore sans bruit provenant du canal. La chaîne de transmission sans ce filtre satisfait le critère de Nyquist. Afin de respecter le critère de Nyquist dans ce cas, la bande passante du canal doit être supérieure à la fréquence maximale  $f_{\max}$ , ce qui est confirmé par la représentation en fréquence des filtres (figure 16). Bien que la réponse impulsionnelle globale soit similaire à celle sans le filtre de canal (un triangle), sa durée a été réduite. Le diagramme de l'oeil montre qu'il est possible d'échantillonner sans trop d'interférences en choisissant  $n_0 = 8$ , où le terme d'interférence est nul et le TEB est nul.

Pour  $BW = 1000 \text{ Hz}$  :

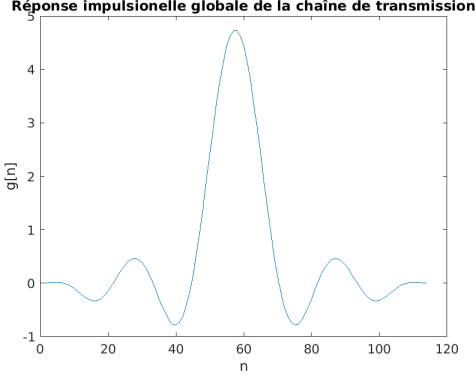


Figure 17: Tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission.

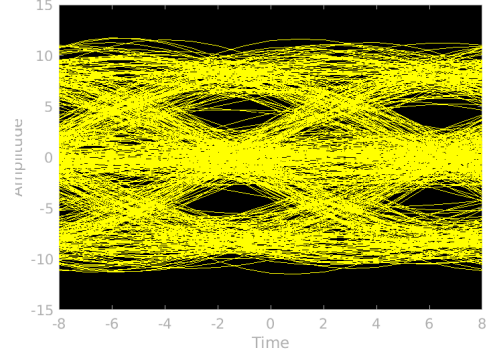


Figure 18: Tracé du diagramme de l'oeil à la sortie du filtre de réception.

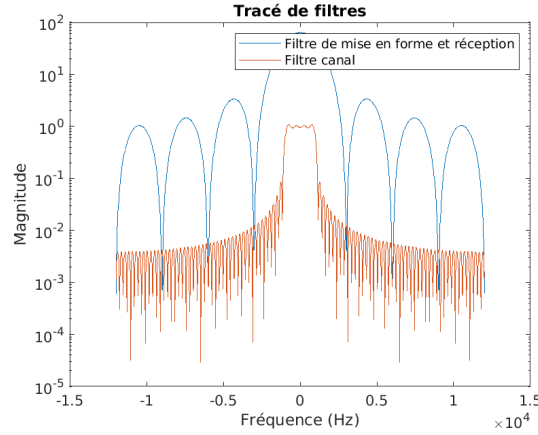


Figure 19: tracé de  $|H(f)H_r(f)|$  et  $|H_c(f)|$ .

Le diagramme de l'oeil montre clairement que le critère de Nyquist n'est pas respecté dans ce cas. En effet, le filtre de canal avec une largeur de bande  $BW = 1000 \text{ Hz}$  ne permet pas de respecter le critère de Nyquist, contrairement à ce qui se passe lorsqu'on n'a pas de filtre de canal. La réponse impulsionnelle globale est modifiée par la présence du filtre de canal, ce qui peut être vu sur la représentation des filtres en fréquence. En conséquence, il y a une interférence entre les symboles, ce qui entraîne un terme d'interférence non nul, et par conséquent, le TEB est non nul.

#### 4 Étude de l'impact du bruit et du filtrage adapté, notion d'efficacité en puissance

Cette dernière partie va être dédiée à l'étude du bruit dans la chaîne de transmission numérique : impact du bruit introduit par le canal sur la transmission, influence du filtrage adapté, calcul et estimation du taux d'erreur binaire (TEB) pour comparer les chaînes de transmission en termes d'efficacité en puissance.

## 4.1 Etude de chaque chaine de transmission

### Chaîne 1

#### 1. Sans bruit :

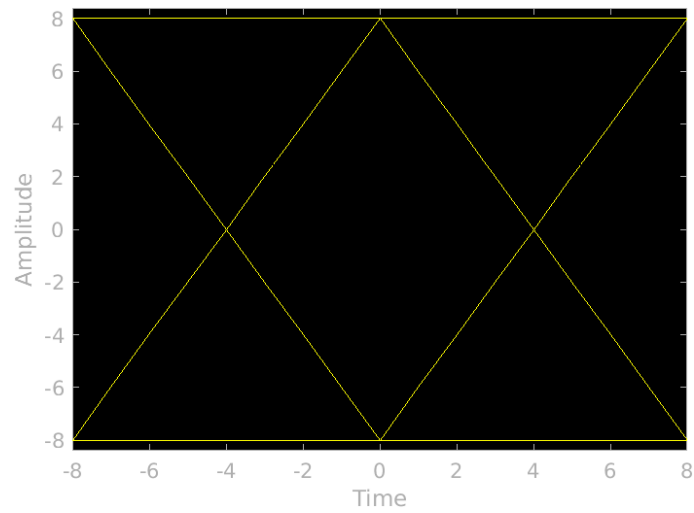


Figure 20: Diagramme de l'oeil.

#### 2. Avec bruit :

a)

Le bruit dans le diagramme de l'œil augmente à mesure que le rapport signal sur bruit  $E_b/N_0$  diminue (figure 21). Lorsque ce rapport devient trop faible, il devient difficile de déterminer l'instant optimal d'échantillonnage à partir du diagramme de l'œil.

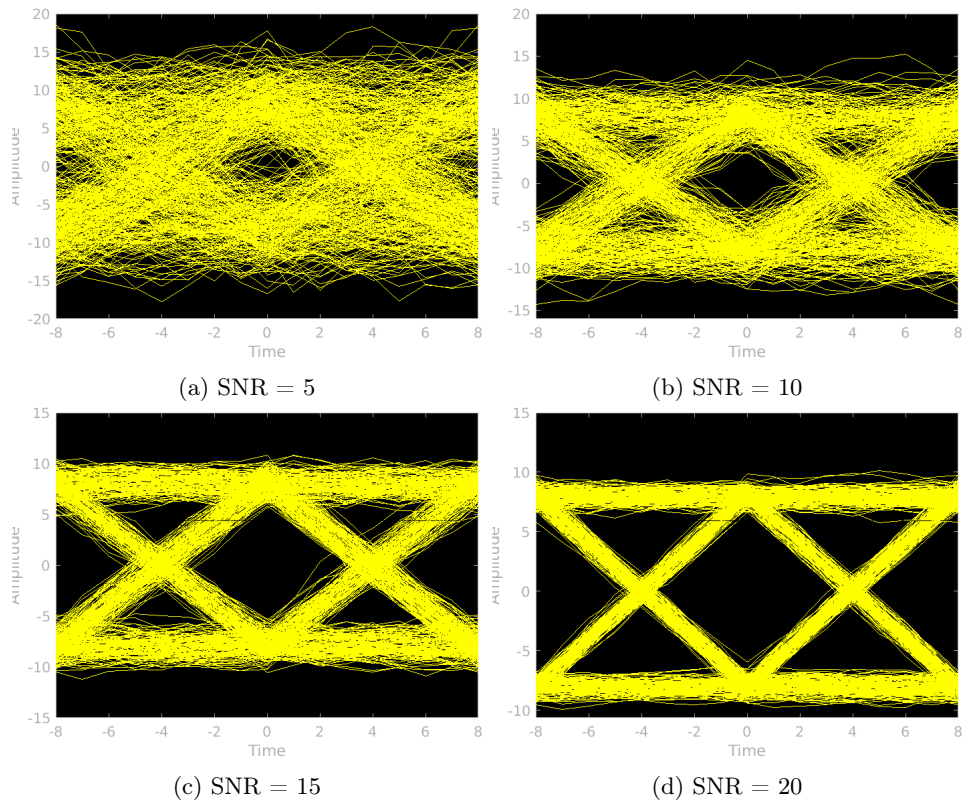


Figure 21: Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour  $E_b/N_0$  différentes.

b)

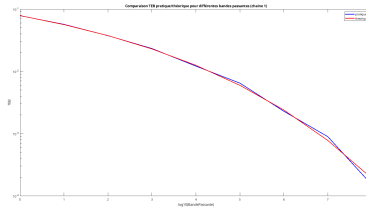


Figure 22: TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de  $E_b/N_0$ .

Il s'agit d'un filtre de réception : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1 donc pour calculer TEB théorique il suffit d'utiliser la formule du cours ce qui nous donne :

$$TEB = Q(\sqrt{2 \frac{E_s}{N_0}})$$

## Chaine 2

### 1. Sans bruit :

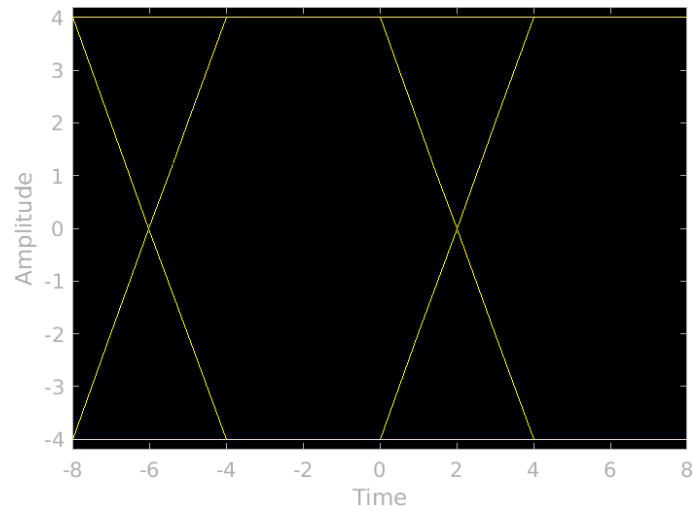


Figure 23: Diagramme de l'oeil.

### 2. Avec bruit :

a)

Le bruit dans le diagramme de l'œil augmente à mesure que le rapport signal sur bruit  $E_b/N_0$  diminue (figure 24). Lorsque ce rapport devient trop faible, il devient difficile de déterminer l'instant optimal d'échantillonnage à partir du diagramme de l'œil.

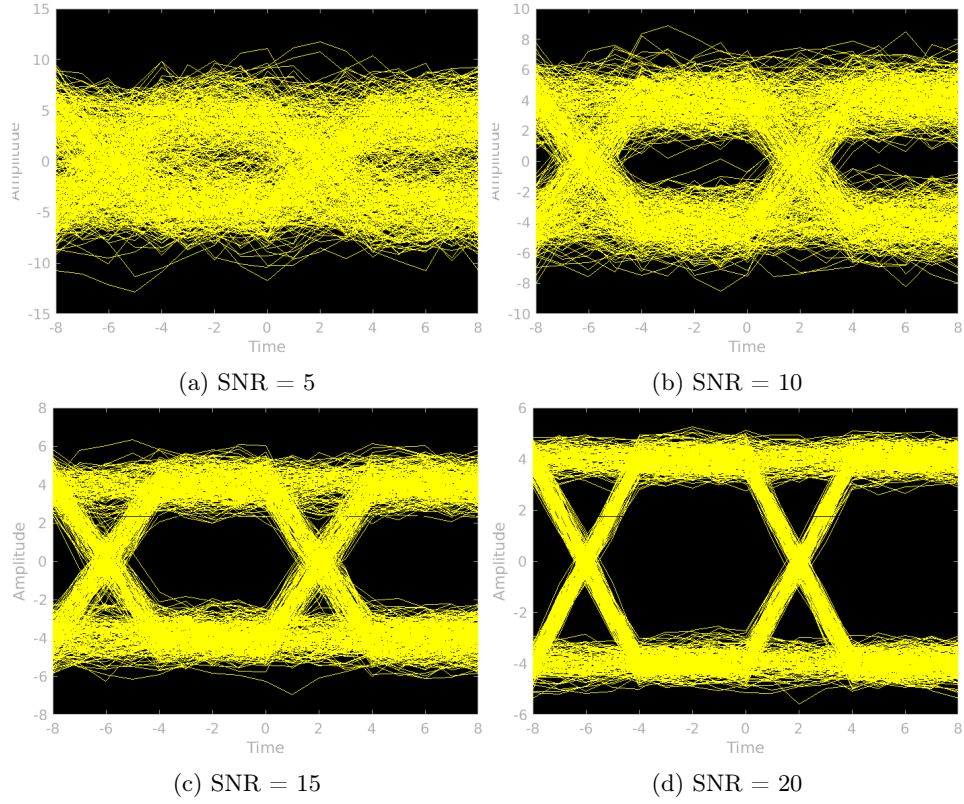


Figure 24: Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour  $E_b/N_0$  différentes.

b)

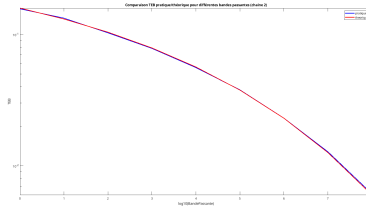


Figure 25: TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de  $E_b/N_0$ .

Calculons TEB théorique dans ce cas. On sait que :

$$\begin{aligned}
 T_{EB} &= P(ack = -1 \mid ak = 1) \times P(ak = 1) + P(ack = 1 \mid ak = -1) \times P(ak = -1) \\
 &= \frac{1}{2}P(\omega_k > \frac{T_s}{2}) + \frac{1}{2}P(\omega_k < -\frac{T_s}{2}) \\
 &= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_\omega}\right)
 \end{aligned}$$

On a encore :

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(f)|^2 S_n(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \times T_s = \frac{N_0 T_s}{4}$$

De plus, on a :

$$E_b = E_s = P_r \times T_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(f) df \times T_s = \int_{-\infty}^{\infty} |H_e(f)|^2 \times \frac{1}{T_s} df \times T_s = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = T_s$$

Donc,

$$T_{EB} = Q \left( \sqrt{\frac{T_s}{N_0}} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

### Chaine 3

#### 1. Sans bruit :

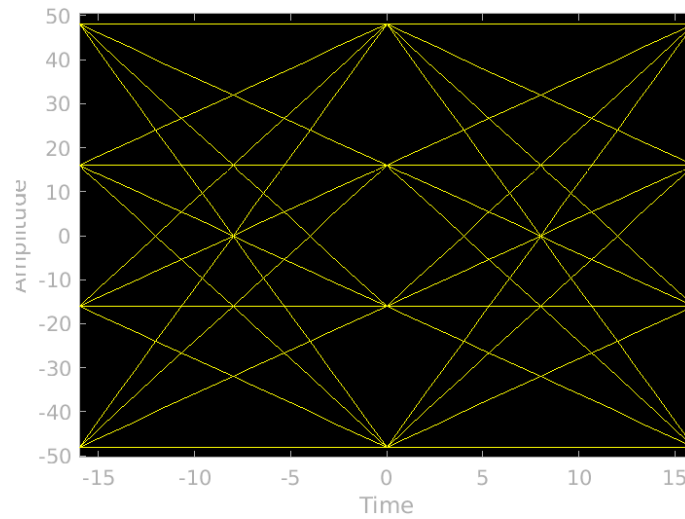


Figure 26: Diagramme de l'oeil.

#### 2. Avec bruit :

a)

Le bruit dans le diagramme de l'œil augmente à mesure que le rapport signal sur bruit  $E_b/N_0$  diminue (figure 27). Lorsque ce rapport devient trop faible, il devient difficile de déterminer l'instant optimal d'échantillonnage à partir du diagramme de l'œil.

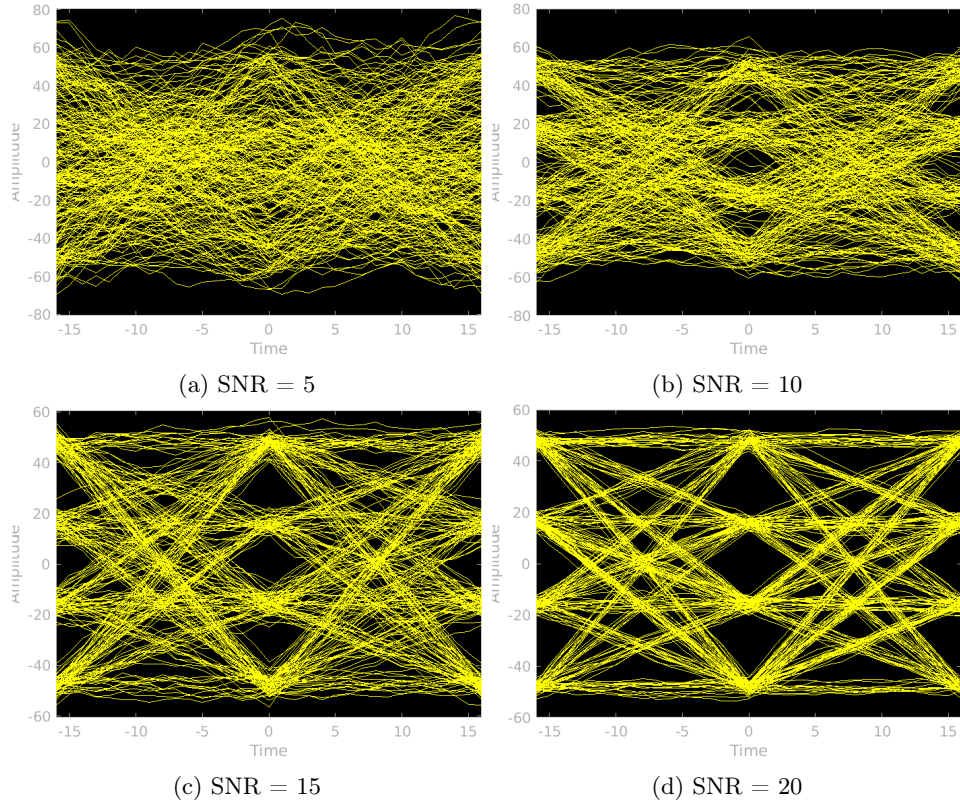


Figure 27: Tracés du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour  $E_b/N_0$  différentes.

b)

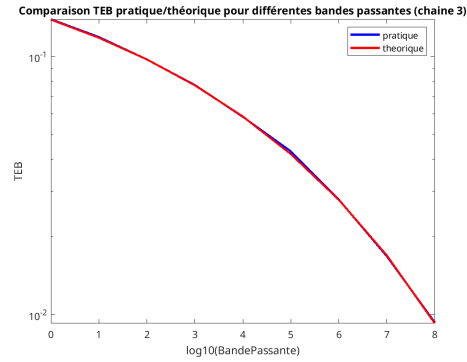


Figure 28: TEB obtenu et TEB théoriques en fonction de  $E_b/N_0$ .

Il s'agit d'un filtre de réception : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1 donc pour calculer TEB théorique il suffit d'utiliser la formule du cours ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 TEB &= \left( \frac{M-1}{M \log_2(M)} \right) Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}} \right) \\
 &= \frac{3}{4} Q \left( \sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_b}{N_0}} \right)
 \end{aligned}$$



## 4.2 Comparaison des chaines de transmission implantées

1)

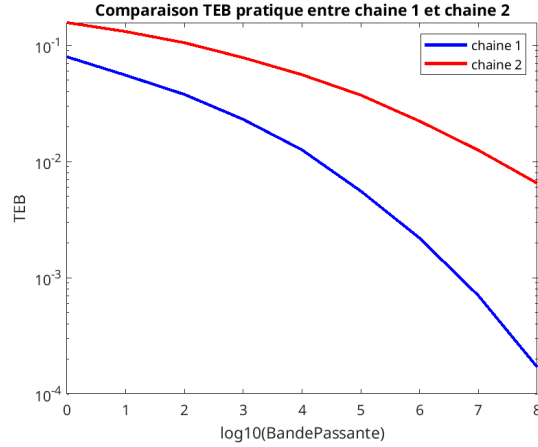


Figure 29: TEBs obtenus pour Chaîne 1 et Chaîne 2.

2) Il est observé que pour atteindre un  $TEB_0$  identique, l'émetteur doit fournir une puissance plus élevée dans la chaîne 2 que dans la chaîne 1. Cela indique clairement que la chaîne 2 est moins efficace en termes de puissance que la chaîne 1. Étant donné que seul le filtre de réception diffère entre les deux chaînes, il en découle que l'utilisation du filtre approprié permet d'améliorer l'efficacité en puissance.

3)

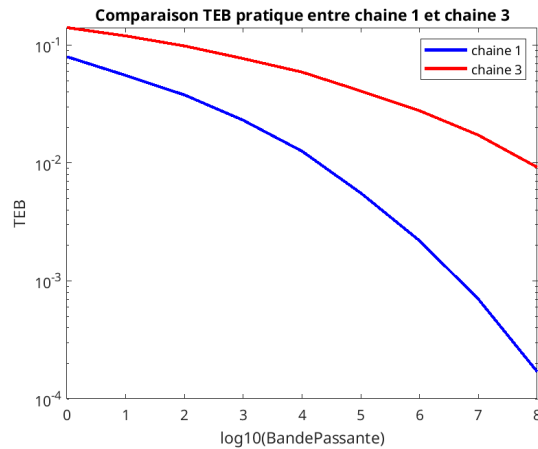


Figure 30: TEBs obtenus pour Chaîne 1 et Chaîne 3.

4) En augmentant le nombre de bits dans un symbole, il est nécessaire de donner une puissance plus élevée à l'émetteur pour atteindre un même  $TEB_0$ . Ainsi, on peut remarquer que la chaîne 3 présente une baisse d'efficacité en puissance par rapport à la chaîne 1. Étant donné que la seule différence entre ces deux chaînes est l'ordre de modulation, on peut en déduire que l'augmentation du nombre de bits dans un symbole entraîne une perte d'efficacité en puissance.

## 5 Conclusion

Au terme de cette étude sur les chaînes de transmission en bande de base, nous avons exploré différentes méthodes pour évaluer et optimiser l'efficacité spectrale et l'efficacité en puissance. Nous avons identifié les facteurs clés influençant la performance et les compromis nécessaires pour atteindre un équilibre optimal entre ces deux aspects. En examinant les techniques de modulation, de codage et de filtrage, nous avons acquis une meilleure compréhension des défis auxquels les ingénieurs en télécommunications sont confrontés pour développer des systèmes de communication performants et efficaces.