华中科技大学物理学院

量

子

力

学

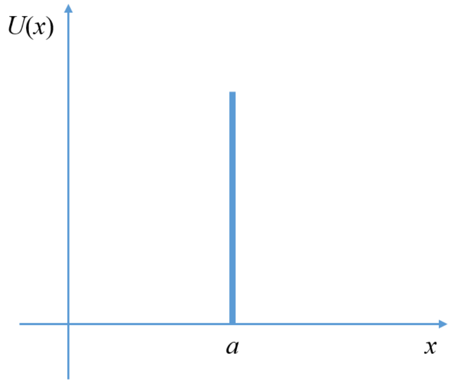
考研真题（部分）汇编

目录

2001 年

1 质量为μ的粒子被限制在一维区域$0 \le x \le a$，$t = 0$时其波函数为

$$\varphi(x, t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$



1.1 求$t = t_0$时的波函数。

1.2 体系在$t = 0$和$t = t_0$时的平均能量是多少？

1.3 $t = t_0$时，于$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$内发现粒子的几率是多少？

2 系统的哈密顿量$\hat{H} = \frac{1}{2I_1}\left(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2\right) + \frac{1}{2I_2}\hat{L}_z^2$,。

2.1 求能量本征值和能量本征函数。

2.2 系统处于能量本征态，求 $\overline{(\Delta L_x)^2}$，$\overline{(\Delta L_z)^2}$ =?

3 设体系受未受微扰作用时只有三个能级：E_{01}、E_{02}、E_{03}，现在受到微扰作用，微扰矩阵元为$\mathrm{H}'_{12} = H'_{21} = a, H'_{11} = H'_{22} = H'_{33} = b, H'_{31} = H'_{32} = c, H'_{13} = H'_{23} = d$，$a$、$b$、$c$、$d$都是实数。假设满足非简并条件，求能量至二级修正值。

4 质量为μ的粒子沿X方向以能量E向$x = 0$处势阶运动。势

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{4}E, & x > 0 \end{cases}$$

问在$x = 0$处被反射的粒子几率有多大？

5 两个质量为μ自旋为$\frac{1}{2}$的全同粒子处于一维无限深势阱$(0 < x < a)$中，忽略自旋相关力，求：

5.1 粒子间无相互作用，用单粒子态和自旋态给出三个最低能态。

5.2 粒子间有相互作用势能$V(x_1 - x_2)$，这可看成微扰，以一阶微扰理论计算第二、第三最低能态的能量，将你的结果保留在积分式。

2002 年

适用专业：理论物理、凝聚态物理、光学、材料物理与化学、物理电子学

1 基本概念题（25 分）

1.1 玻尔在当初建立原子光谱理论时作了哪些基本假设；该理论在解决实际问题时遇到困难，原因何在；德布罗意又是如何解决这些问题的。

1.2 简要说明波函数和它所描写的粒子之间的关系。

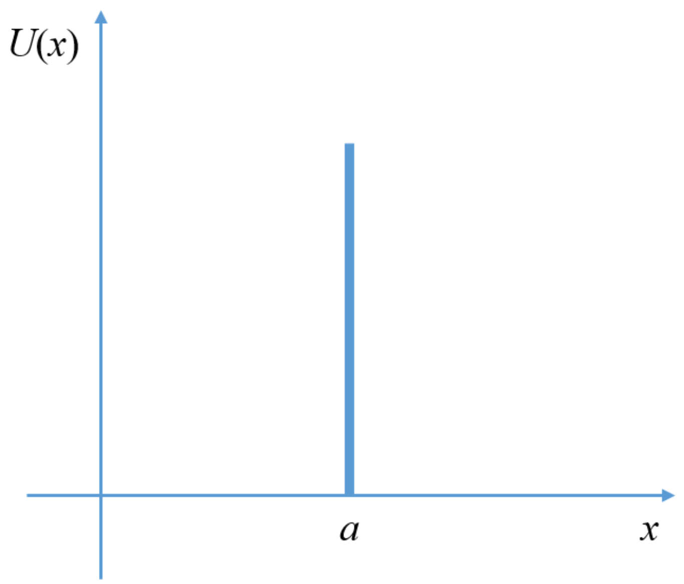
1.3 以能量这个力学量为例，简要说明能量算符和能量之间的关系。

1.4 试问电子是什么？

1.5 非相对论量子力学的理论体系建立在一些基本假设的基础上，试举出二个以上这样的基本假设，并简述之。

2 试设计一实验，从实验角度证明电子具有自旋，并对可能观察到的现象作进一步讨论。（20 分）

3 设质量为μ的粒子在如图所示的一维无限深势阱中运动，求定态 Schrödinger 方程的解。（15 分）



4 转动惯量为I，电偶极矩为$\vec{D}$的空间转子处在均匀的电场$\vec{E}$中，试用微扰法求转子基态能量的二级修正。（15 分）

5 （25 分）

5.1 通过解本征值方程，试证明自旋在任何方向的投影只能有向上和向下两个可能的取向。提示：自旋角动量$\hat{S}$在任意方向$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$上的投影算符为$\hat{\mathrm{S}}_n=\hat{\mathrm{S}}_x\cos\alpha+\hat{\mathrm{S}}_y\cos\beta+\hat{\mathrm{S}}_z\cos\gamma$。

5.2 在自旋向上的状态中，测量S_{z}有哪些可能的值？这些可能的值各以多大的几率出现？S_{z}的平均值是多少？

2003 年

适用专业：物理系各专业

1 （35 分）

1.1 玻尔的原子理论实际上是一个半经典理论，简述这里所说的“半经典”的含义。

1.2 20 世纪的一些著名实验触发了从经典物理向量子物理的跃变并为这种跃变提供了最初的实验事实，试将这些实验进行分类并简要说明由这些实验事实所抽象出的一些基本概念。

1.3 “物体以$h\nu$为能量单位不连续地发射或吸收频率为ν的电磁波，但辐射本身作为广布于空间的电磁波其能量是连续分布的”，试问这一说法是否正确？

1.4 简述波函数和它所描写的粒子之间的关系。

1.5

1.5.1 如果算符$\hat{F}$表示力学量F，那么当体系处于$\hat{\mathrm{F}}$的本征态ψ时，问该力学量是否有确定的值？

1.5.2 如果一组算符有共同的本征函数，且这些共同的本征函数组成完全系，问这组算符中的任何一个是否和其余的算符对易？

1.6 在$\hat{\mathrm{S}}_z$表象中，电子波函数可表示为

$$\psi\left(\hat{\mathrm{r}}, \hat{S}_z, t\right) = \psi_1(\hat{r}, t)\chi_{\frac{1}{2}} + \psi_2(\hat{r}, t)\chi_{-\frac{1}{2}}$$

简要说明其物理意义。

1.7 试判断下列函数中的哪些所描述的状态是定态？

A. $\psi(\hat{r}, t) = u(x)e^{ix-\frac{iEt}{\hbar}} + v(x)e^{-ix-\frac{iEt}{\hbar}}$

B. $\psi(\hat{r}, t) = u(x)e^{ix-\frac{iE_1t}{\hbar}} + v(x)e^{-ix-\frac{iE_2t}{\hbar}}$

C. $\psi(\hat{r}, t) = u(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + v(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

2 （20 分）

2.1 考虑如下两个算符：

$$\hat{F}\Psi(x) = x^3\Psi(x)$$

$$\hat{\mathrm{G}}\Psi(x) = x\frac{\mathrm{d}\Psi(x)}{\mathrm{dx}}$$

求对易关系$[\hat{\mathrm{F}}, \hat{G}]$ =?

2.2 设粒子在宽为a的一维无限深势阱中运动，求基态动量的平均值和基态动量平方的平均值。

3 考虑在二维各向同性势$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$下运动的带电荷+e的粒子受沿正$x$方向的电场$\vec{E}$的作用，求粒子的定态能量和波函数。已知一维线性谐振子对应于量子数n的波函数为

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi^{\frac{1}{2}}2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2} H_n(\alpha x)$$

其中$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$。（15 分）

4 由角动量算符$\hat{L}_x$和$\hat{L}_y$可定义出两个新算符$\hat{L}_+$和$\hat{L}_-$，即$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$和$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$。

4.1 分别求下列算符间的对易关系：$[\hat{L}^2, \hat{L}_+]$、$[\hat{L}^2, \hat{L}_-]$、$[\hat{L}_+, \hat{L}_z]$、$[\hat{L}_-, \hat{L}_z]$。

4.2 已知$Y_{lm}(\theta, \varphi)$为$\hat{L}^2$和L_z的共同本征态，相应的本征值分别为$l(l+1)\hbar^2$和$m\hbar$。试通过计算

4.2.1 证明$\hat{L}_+ Y_{lm}(\theta, \varphi)$和$\hat{L}_- Y_{lm}(\theta, \varphi)$均为$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$的本征态

4.2.2 相应的本征值为多少？

4.2.3 简要说明结果的物理意义。（25 分）

5 （25 分）

5.1 考虑在宽度为a的一维无限深势阱中运动的粒子，受微扰$H' = a\omega_0\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$的作用，$\omega_0$为常数，求能量的一级修正。

5.2 在某一选定的一组正交基下哈密顿算符由下列矩阵给出

$$H = \begin{bmatrix} E_{10} & 0 & 0 \\ 0 & E_{20} & 0 \\ 0 & 0 & E_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

a为常数且小量，试用微扰法求能量的二级修正。

6 长期以来人们一直认为电子是一种带电的微观粒子，但随着量子力学的诞生，人们对电子又有了新的认识，问最为典型的两种新认识是什么？试设计两个实验以支持这两种新认识。

2004 年

适用专业：光学工程、物理电子学

说明：共 6 道题，每题 25 分，总计 150 分

1 计算下列对易关系：

1.1 $[\hat{p}_x, e^{\alpha x}]$ （$\alpha > 0$ 且为实数）

1.2 设 $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$，$\hat{L}^2$是轨道角动量平方，计算$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm]$和$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$

2 粒子在宽为a的一维无限深势阱

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x \le 0, x \ge a \end{cases}$$

中运动，求：

2.1 粒子的能级和归一化波函数；

2.2 粒子的动量和坐标的分布几率；

2.3 粒子的坐标和动量的平均值和他们的涨落。

3 厄米算符 $\hat{A}$与$\hat{B}$满足关系式：

$$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 = 1$$

$$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$$

求：

3.1 在A表象中$\hat{A}$与$\hat{B}$的矩阵表示，并求$\hat{B}$的本征函数表达式；

3.2 在B表象中$\hat{A}$与$\hat{B}$的矩阵表示，并求$\hat{A}$的本征函数表达式；

3.3 $\hat{A}$表象到 $\hat{B}$表象的幺正变换矩阵的表达式。

4 利用测不准关系$\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p_x)^2} \ge \frac{\hbar^2}{4}$估计谐振子的基态能量。

5 设一微观体系的哈密顿量$H = H_0 + H'$，其中H'为微扰。在一个由正交归一函数作为基的表象中

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

其中 c 为常数，

5.1 求$\hat{H}$的精确本征值；

5.2 求$\hat{H}$的准确到微扰的二级修正的本征值；

5.3 比较 5.1 和 5.2 的结果，指出其间关系。

6 粒子的自旋为$\frac{1}{2}$，$\hat{s}_y$和$\hat{s}_z$是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符。求：

6.1 $A\hat{s}_y + B\hat{s}_z$（A、B 均为实数）的本征值和归一化波函数；

6.2 假设体系处在向上的本征态中，测得$\hat{s}_y$得到$\frac{\hbar}{2}$的几率是多少？

2005 年

适用专业：光学工程、物理电子学、光电信息工程

说明：共 6 道题，每题 25 分，总计 150 分

1 对易关系运算

1.1 若算符 $\hat{A},\hat{B}$满足条件$[\hat{A},\hat{B}]=1$，求：$[\hat{A},\hat{B}^n]=?$ （其中n为正整数）。

1.2 算符 $\hat{p}_r=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$，计算对易关系$[r,\hat{p}_r]=?$

1.3 定义算符：$\hat{a}=\left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}+\frac{i}{\mu\omega}\hat{p}_x\right)$; $\hat{a}^\dagger=\left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}-\frac{i}{\mu\omega}\hat{p}_x\right)$，求：$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=?$

2 粒子在宽为 a 的一维无限深势阱

$$u(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x\le 0, x\ge a\end{cases}$$

中运动，求：

2.1 粒子的能级和归一化波函数；

2.2 若一粒子的状态用波函数

$$\psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

描述，求该粒子能量可能测量值及相应的几率。

3 三维谐振子的哈密顿量为：

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{m}{2}(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2)$$

3.1 求其能级与波函数；

3.2 若$\omega_1=\omega_2=\omega_3$，试求能级的简并度。

4 设体系处于$\psi=c_1Y_{11}+c_2Y_{20}$，求：

4.1 $\hat{L}_z$的可能测量值及平均值；

4.2 $\hat{L}^2$的可能测量值及相应的几率；

4.3 $\hat{L}_x$及$\hat{L}_y$的可能测量值及相应的几率。

5 设在H_0表象中，体系的哈密顿算符可表示为矩阵的形式

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} E_1^{(0)}+a & b \\ b & E_2^{(0)}+a \end{bmatrix}$$

（a、b为实数），用微扰理论求能级至二级修正，并与严格解比较。

6 求自旋$\hat{s}$在单位矢量为$\vec{n}$的任意方向上的投影算符$\hat{s}_n$的显式表达形式，并求在$\psi_{s_z=\pm\frac{\hbar}{2}}$状态中的平均值$\bar{s}_n$，和在上述状态中的$s_n$测量值的几率。

2006 年

适用专业：理论物理、凝聚态物理、光学、材料物理与化学

1 选择题（共 5 题，每题 6 分）

1.1. 用 150 伏特的电压加速电子，其德布罗意波长为 1Å，如果用相同的电压加速质子，其德布罗意波长为

A. 23 Å

B. 2.3 Å

C. 0.23 Å

D. 0.023Å

1.2. 已知电子的波函数为$\psi(r) = Ne^{-\frac{\alpha r}{a_0}}$，则电子几率分布的最可几半径为

A. $\frac{a_0}{\alpha}$

B. αa_0

C. $\frac{a_0}{\alpha^2}$

D. $\alpha^2 a_0$

1.3. 已知在某个区域内粒子的波函数为$\psi(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$，（A 和 B 均为实数，且满足 A>B）则粒子的几率流密度的大小和方向为

A. $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A^2 - B^2)$，方向沿x轴正向

B. $\frac{\hbar k_1}{\mu}(A^2 - B^2)$，方向沿x轴正向；

C. $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A - B)^2$方向沿x轴正向；

D. $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A^2 - B^2)$方向沿x轴负向。

1.4. 设氢原子处于状态$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3}R_{21}(r)Y_{1,-1}(\theta,\phi)$，则氢原子能量和角动量平方的均取值为

A. $-\frac{\mu e_s^4}{8\hbar^2}, \sqrt{2}\hbar^2$；

B. $-\frac{\mu e_s^4}{4\hbar^2}, 2\hbar^2$；

C. $-\frac{\mu e_s^4}{8\hbar^2}, 2\hbar^2$；

D. 没有确定值。

1.5. 已知泡利矩阵为$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，则自旋态$\chi_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$中，自旋角动量$\hat{s}_x$和$\hat{s}_y$的均方偏差为

A. $\frac{\hbar^2}{8}$，$\frac{\hbar^2}{8}$;

B. 0，$\frac{\hbar^2}{4}$;

C. $\frac{\hbar^2}{4}$，$\frac{\hbar^2}{4}$;

D. $\frac{\hbar^2}{4}$，0。

2 基本概念题（共 4 题，每题 5 分）

2.1 什么是态叠加原理？用态叠加原理解释电子在晶体表面的衍射现象。

2.2 写出量子力学的几率守恒定律的微分形式和积分形式。几率流密度与质量流密度有什么关系？和电荷流密度有什么关系？

2.3 什么是算符的本征值和本征函数？当体系处于波函数Ψ所描写的某一状态时，测量某个力学量 F 的数值与算符$\hat{\mathrm{F}}$的本征值有什么关系？

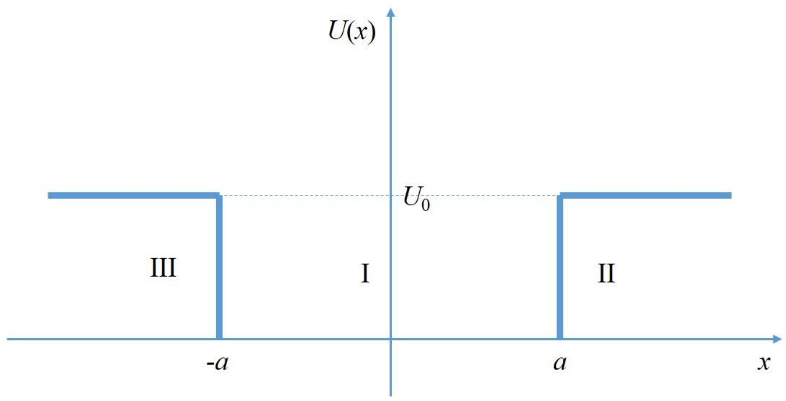
2.4 什么是全同性原理？描写全同粒子体系状态的博偶函数的对称性是否随时间改变？为什么？

3 计算与证明题（共 5 分，每题 20 分）

3.1 一粒子在一维势阱

$$U(x)=\begin{cases}U_0>0, & |x|>a\\ 0, & |x|\le a\end{cases}$$

中运动，求束缚态（$0<E<U_0$）的能级所满足的方程。



3.2 不通过求解薛定谔方程，证明处于宽度为a的一维无限深势阱中的基态粒子的能量与宽度a的平方成反比，即$E_1 \propto a^{-2}$。

3.3 薛定谔方程中，如果势能函数由$U(x) \to U(x) + U_0$，是否会导致波函数发生变化？是否会导致能量的本征值发生变化？如果势能函数由$U(x) \to U(x+a)$则是否会导致波函数发生变化？是否会导致能量本征值发生变化？试加以分析说明。

3.4 体系未受微扰作用时只有两个能级：E_{01}和E_{02}，现在受到微扰$\hat{H}'$的作用，微扰矩阵元为$H'_{12} = a$，$H'_{21} = b$，$H'_{11} = c$，$H'_{22} = d$，a、b、c、d 均为实数，假设满足非简并条件，求能量至二级修正值。

2006 年

适用专业：物理电子学、光学工程、光电信息工程

一、填空题（25 分，每空 1 分）

1 按照 Born 的统计诠释，描述单粒子量子体系的波函数$\psi(r)$常称为概率波，$|\psi(r)|^2$表示概率密度，其意义是：$|\psi(r)|^2\Delta x\Delta y\Delta z$表示在$r$处的体积元$\Delta x\Delta y\Delta z$中找到粒子的（ ）。$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(r)|^2dr=1$称为波函数的（ ），其物理意义是在全空间找到粒子的（ ）。

2 力学量A的本征态为ψ_n，相应的本征值为$a_n, n=1,2,\cdots$。如果体系处于状态$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2$，则测量A所得的结果为a_1或a_2，其出现概率分别为（ ）。

3 若对应于力学量A的本征值A_n，有两个本征函数，则称A对应本征值A_n是（ ）。

4 设有一组彼此对易且函数独立的厄米算符$A(A_1,A_2,\cdots)$，它们的共同本征函数记为$|k\rangle$。设给定 k 后就能够确定体系的一个可能状态，则称$A(A_1,A_2,\cdots)$构成体系的一组（ ）。

5 不含的 Schrödinger 方程为$H\psi=E\psi$，称为体系的能量本征方程。其中E称为体系的（ ），对应的波函数称为体系的（ ）。

6 所有可观测量对应的算符均为（ ）算符。

7 微粒的粒子性（E,p）与波动性的关系（ν,λ或ω,k）为$E=$（ ），$p=$（ ）。

8 $\hat{F}$为力学量F的算符，则在量子态ψ下，力学量F的平均值的表达式为：（ ）。

9 $\hat{\mathrm{P}}$为宇称算符，若$\hat{\mathrm{P}}\psi(x)=-\psi(x)$，则称$\psi$具有（ ）宇称。

10 算符$\hat{\mathrm{A}}$与$\hat{\mathrm{B}}$的对易式$[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]=$（ ）。

11 算符$\hat{\mathrm{A}}$与$\hat{\mathrm{B}}$的不确定度关系的表达式为（ ）。

12 电子自旋角动量在空间任何方向的投影只能有（ ）数值，这是根据（ ）确定的。

13 若在初始时刻（$t=0$）体系处于某一个能量本征态$\psi(\vec{r},0)=\psi_E(\vec{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$的波函数所描述的态称为（ ）。

14 $(\hat{l}^2,l_z)$的共同本征函数是（ ）。

15 氢原子的能级公式是（ ），其简并度为（ ）。

16 对一维谐振子，初始时刻它处于基态（$n=0$），受到电场的微扰作用后，它只能跃迁到第一激发态（$n=1$），而不能跃迁到其它激发态（$n>1$），这样，称一维谐振子向$n>1$，这样，称一维谐振子向$n>1$的激发态的跃迁为（ ）跃迁。换句话说，只有$\Delta n=1$的跃迁能发生，这称为跃迁的（ ）。

17 设某一原子体系具有n个定态，对应的能级为E_n，若电子处于态n的时间为Δt，则能级E_n的宽度为（　）。

18 波粒二象性指的是粒子同时具有（　）。

19 若$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$，且$E_n$不简并，则$\psi_n$可以构成正交归一完备集。对任意量子态$\psi$，依据（　）原理，有$\psi = \sum_n a_n\psi_n$，其中$a_n$为常数。

二、简答题（25 分，每小题 5 分）

1 什么是光吸收与受激辐射的半经典理论。

2 简述吸收、受激辐射和自发辐射三种跃迁过程。

3 简述正常 Zeeman 效应。

4 简述关于电子自旋的 Stern-Gerlach 实验及其物理意义。

5 扫描隧穿显微镜的工作原理是隧穿效应，简述什么是隧穿效应。

三、给定(θ,φ)方向单位矢量$\vec{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$，求$\sigma_n = \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$的本征矢和本征态$\phi = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$。（20 分）

四、二维谐振子势$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y y^2$，设$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$，求能级的分布和简并度。（20 分）

五、设粒子（能量$E > 0$）从左入射，碰到图 1 所示的势阱，求透射系数和反射系数。提示：粒子流密度定义：$j = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$。（20 分）

六、力学量A和B对易。A 的本征值为A_n，是非简并的。求证：$\hat{A}$和$\hat{B}$一定有共同本征态。（20 分）

七、一维运动粒子的状态是

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda^{\frac{3}{2}}xe^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中$\lambda > 0$，求粒子位置和动量的测不准关系$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p)^2}$。提示：

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2; \overline{(\Delta p)^2} = \overline{p^2} - \bar{p}^2; \hat{p} = -i\hbar\nabla; \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda^2}$$

（20 分）

2007 年

适用专业：物理学、材料物理与化学、材料学、纳米科学与技术、科学技术哲学

一、问答题（共 4 题，每题 10 分）

1 什么是波函数的统计诠释？量子力学的波函数与声波和光波的主要区别是什么？

2 试写出量子力学中的测不准关系。如果两个算符不对易，则这两个算符表示的力学量能否同时取确定值？

3 量子力学如何构造一个力学量的算符？当体系处于波函数$\psi(x)$所描写的状态时，测量力学量得到的数值与该力学量的本征值有什么关系？

4 什么是粒子的全同性原理？玻色子和费米子组成的全同粒子的波函数的主要不同是什么？

二、计算题与证明题（共 7 题，110 分）

1 在一维无限深势阱中运动的粒子，势阱的宽度为a，如果粒子的状态由波函数$\psi(x) = Ax(a-x)$描写，求

1.1 粒子分布在$\left(0,\frac{a}{4}\right)$区间的几率；（6 分）

1.2 粒子在$(0,a)$区间动量的平均值。（6 分）

2 计算下列两定态波函数对应的几率流密度（12 分）

2.1 $\psi_1 = \frac{1}{r^2}e^{ikr}$；

2.2 $\psi_2 = \frac{1}{r^2}e^{-ikr}$。

3 一刚性转子转动惯量为I，它的能量的经典表达式是$H = \frac{L^2}{2I}$，L为角动量，在一下两种情况中秋刚性转子的能量本征值：

3.1 粒子绕一固定轴转动；（10 分）

3.2 粒子绕一固定点转动。（10 分）

4 设氢原子处于状态$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}R_{31}(r)Y_{11}(\theta,\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}R_{31}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$，求：

4.1 氢原子的能量及角动量分量L_z的可能值；（8 分）

4.2 氢原子的能量及角动量分量L_z的平均值，（8 分）

5 粒子在宽度为a的一维无限深势阱中运动。

5.1 证明其基态的坐标和动量的均方偏差满足：$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p)^2}=\frac{\hbar^2}{4}\frac{\pi^2-6}{3}$；（10 分）

5.2 上述结果是否满足测不准关系，为什么？（6 分）

6 转动惯量为I，电偶极矩为$\vec{D}$的空间转子处在均匀弱电场$\vec{E}$中，基态未受到微扰影响的波函数为$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$，证明空间转子的计算转子基态能量的一级修正为零。（16 分）

7 证明算符$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$的本征值为$\pm\frac{\hbar}{2}$,所属的本征函数为$\chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,$\chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。（18 分）

2009 年

1 概念题

1.1 光照射在什么情况下，能使金属表面有自由电子逸出？

1.2 写出德布罗意关系式。

1.3 力学量算符$\hat{F}$在其本征态ψ下，是否具有确定值

1.4 对于薛定谔方程，为什么说是线性的？为什么它所确定的状态中，不能含有状态参量？

1.5 波函数和它描写的粒子之间有什么关系？

1.6 简述态的叠加原理。

1.7 下面属于定态的是？

A. $\psi(\hat{\mathrm{r}},t)=u(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}+v(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$；

B. $\psi(\hat{\mathrm{r}},t)=u(x)e^{ix-\frac{iE_1t}{\hbar}}+v(x)e^{-ix-\frac{iE_2t}{\hbar}}$；

C. $\psi(\hat{\mathrm{r}},t)=u(x)e^{ix-\frac{iEt}{\hbar}}+v(x)e^{-ix-\frac{iEt}{\hbar}}$。

2 一维无限深势阱（$0<x<a$）中，求：

2.1 能级的本征函数；

2.2 粒子处于$\psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}$，求粒子能量平均值。

3 判断题

3.1 $[x,p_x]=i\hbar$。

3.2 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$，$\frac{\mathrm{id}}{\mathrm{dx}}$是否为厄米算符？

3.3 e^x，x^2，$\sin x+\cos x$是否为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}$的本征函数，若是，求本征值。

3.4 $[q,p]=i\hbar$，$q,p^2f(q)=?$

4 粒子能级为E_{01}，E_{02}，处于微扰$H'=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$中，求：

4.1 能量至二级近似；

4.2 精确解。

5 粒子的自旋为$\frac{1}{2}$，$\hat{s}_y$和$\hat{s}_z$是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符。求：

5.1 $A\hat{s}_y + B\hat{s}_z$（A、B 均为实数）的本征值和归一化波函数；

5.2 假设体系处在向上的本征态中，测得$\hat{s}_y$得到$\frac{\hbar}{2}$的几率是多少？

5.3 若χ_α为最大本征值的本征态，问在该态下，$\hat{s}_z$的可能值及相应几率。

2010 年

（部分）

1 一维无限深势阱（$0 < x < a$）求下列物理量：

1.1 本征值、本征态；

1.2 坐标几率及坐标几率最大位置；

以及能级为 1 时的

1.3 $\langle x\rangle$；

1.4 $\langle \Delta x\rangle^2$；

1.5 $\langle p\rangle$。

3 算符计算

3.1 $[L_x, L_y] = ?$; $[L_y, L_z] = ?$; $[L_Z, L_x] = ?$

3.2 $[L^2, L_z] = ?$; $[L^2, L_z] = ?$; $[L_z, L_\pm] = ?$

3.3 证明$L_\pm|l,m\rangle$是L^2的本征态并求其本征值；$L_\pm|l,m\rangle$是L_z的本征态并求其本征值。

4 一维无限深势阱有微扰$V(x) = V_0\frac{x}{a}$，（$0 < x < a$）。求一级近似基态和第一激发态时的能量。

5 自旋$s = \frac{1}{2}$的电子，$t = 0$时自旋沿 z 正方向，若将其置于沿 x 方向的均匀磁场中，求：

5.1 T时刻，电子自旋波函数$\chi(t)$；

5.2 在$\chi(t)$态下，$\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$的平均值；

5.3 在$\chi(t)$态下S_z测得均值为$\pm\frac{\hbar}{2}$的几率分别是多少？

提示：电子自旋与外磁场的作用能$\hat{H} = -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$

6 实验

6.1 设计实验证明电子具有波粒二象性，画出实验原理图，写出实验的结果和实验分析。

6.2 设计实验证明电子自旋具有两个方向，画出实验原理图，写出实验结果和实验分析。

2012 年

2 粒子在宽为a的一维无限深势阱

$$u(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x\le 0, x\ge a\end{cases}$$

中运动，求：

2.1 粒子的能级和归一化波函数；

2.2 粒子的动量和坐标的分布几率。

3 证明

3.1 角动量算符的对易关系$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{L}_z$；

3.2 对于$\hat{L}_z$的本征态，L_x和L_y的平均值为 0。

4 设一微观体系的哈密顿量$H=H_0+H'$，其中H'为微扰。在由一组正交归一函数作为基的表象中

$$H_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$H'=\begin{bmatrix}0 & c & 0\\ c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

其中 c 为常数。

4.1 求H的精确本征值；

4.2 求H的准确到微扰的二级修正的本征值；

4.3 比较 4.1 和 4.2 的结果，指出其间关系。

5 粒子的自旋为$\frac{1}{2}$，$\hat{s}_y$和$\hat{s}_z$是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符。求：

5.1 $A\hat{s}_y+B\hat{s}_z$（A、B 均为实数）的本征值和归一化波函数；

5.2 假设体系处在向上的本征态中，测得$\hat{s}_y$得到$\frac{\hbar}{2}$的几率是多少？

6 设 $\hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y$，$\hat{L}^2$是轨道角动量平方，计算$\left[\hat{L}^2,\hat{L}_\pm\right]$和$\left[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm\right]$

2013 年

1 简答题

1.1 $\Psi(x)$是用来描述什么的，$|\Psi(x)|^2$的含义是什么？

1.2 波函数的几个条件是什么？

1.3 简述基态、束缚态、简并态、偶宇称态、散射态、态密度的含义。

1.4 算符是什么？可测量量用什么算符表示？为什么用算符表示力学量？

1.5 简述定态的含义。简述守恒量及守恒量的性质。什么是好量子数？

1.6 什么是斯塔克效应、简单塞曼效应、复杂塞曼效应、光谱精细结构？

2 证明题

2.1 一维束缚态能级非简并，且其波函数可取为实数。

2.2 Y_{lm}中，$\bar{L}_x = \bar{L}_y = 0$

3 计算题

3.1 $H = \frac{1}{2I_1}\left(L_x^2 + L_y^2 + \frac{1}{2}L_z^2\right) + \frac{1}{2I_2}L_z^2$，通过适当变换，求系统本征值和本征函数。

3.2 一维线性谐振子$\Psi_n(x)$，求坐标和动量的涨落，并验证其是否满足测不准关系。

3.3 在宽为 a 的一维无限深势阱中，$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5\mathrm{a}}}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$，求

3.3.1 $t = t_0$时的波函数

3.3.2 $t = 0$和$\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$时的平均能量

3.3.3 $t = t_0$时，在$\left(0, \frac{a}{2}\right)$内发现粒子的概率

3.3.4 波函数在能量表象中的表示。

3.4 系统哈密顿量表示为

$$H = H_0 + H' = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 3 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{bmatrix}, c \ll 1$$

3.4.1 求能量精确解

3.4.2 用微扰法求二级近似解

3.4.3 比较两种结果

3.5 质量为μ，自旋为$\frac{1}{2}$的全同粒子在宽为a的势阱中运动。求：

3.5.1 不计粒子的相互作用，用单粒子态和自旋态给出三个最低能级；

3.5.2 有相互作用$\mathrm{V}(|x_1 - x_2|)$，用一阶微扰求第二、第三最低态能量。（可以保留积分形式）

2014 年

1 基础知识与填空题

2 一电子束经双缝挡板到达接受屏，对下列的情况粗略画出电子出现在接受屏上的几率随位置的变化，并分析

2.1 A 开 B 关；

2.2 A 和 B 均开；

2.3 若将斯特恩-盖拉赫设备接到双缝上，使得自旋向上的电子通过电子缝 A 而自旋向下的电子通过电子缝 B；

2.4 通过缝 A 和缝 B 的电子均为自旋向上的电子。

3 在$0 < x < a$的一维无限深势阱中

3.1 求粒子的能级和波函数。

3.2 求坐标几率分布 $\overline{(\Delta x)^2}$。

3.3 假设粒子处在由下列波函数$\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}$所描述的态中，求该粒子能量可能测量值及相应的几率。

4 证明题

4.1 证明$[x, \hat{p}_x] = i\hbar$

4.2 计算$\left[\hat{L}_z, \hat{x}\right], \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right]$

4.3 判断算符$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$，$\frac{\mathrm{id}}{\mathrm{dx}}$是否为力学量算符

4.4 证明函数$\psi(x, y, z) = x + y + z$是$\hat{\mathrm{L}}^2$本征值为$2\hbar^2$的本征函数。

5 设在H表象中，哈密顿算符H的矩阵为$H = \begin{bmatrix} Z_1 + a & b \\ b & Z_2 + b \end{bmatrix}$，$a$，$b$ 为实数。求

5.1 精确解

5.2 用微扰论求能级至二级微扰修正解，并与精确解比较。

6 粒子的自旋为$\frac{1}{2}$，$\hat{s}_y$和$\hat{s}_z$是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符。求：

6.1 $A\hat{s}_y + B\hat{s}_z$（A、B 均为实数）的本征值和归一化波函数；

6.2 假设体系处在向上的本征态中，测得$\hat{s}_y$得到$\frac{\hbar}{2}$的几率是多少？

6.3 若χ_α为最大本征值的本征态，问在该态下，$\hat{S}_z$的可能值及相应几率。

2015 年

1 基本概念

1.1 黑体辐射及普朗克的能量量子假说

1.2 光电效应及爱因斯坦的光量子假说

1.3 微观粒子波粒二象性及德布罗意关系

1.4 判断一个状态是否处于定态，什么是定态，定态波函数的形式

1.5 态叠加原理

1.6 为什么薛定谔方程不含状态参量

1.7 德布罗意粒子的波函数形式

1.8 波函数的统计诠释及波函数应满足的条件

1.9 一般情况下的薛定谔方程，定态薛定谔方程

1.10 针对一些典型情况，通过计算说明宏观世界里量子现象的可以忽略的

1.11 在什么情况下力学量有确定的值？当体系处于任意波函数所描述的态时，测得力学量的值如何？

1.12 在什么情况下一组算符是彼此相互对易的？

1.13 什么是厄米算符？什么样的算符可以表示力学量算符？

1.14 在任意态中力学量的平均值是多少？

1.15 在什么情况下，两个力学量的值不能同时有确定值？

1.16 如果两个力学量不能同时有确定值，测不准关系如何？

2 实验题

2.1 设计实验证明实物粒子具有波粒二象性，写出实验过程并画出原理图，写出实验结果并 2.2 作相关分析。

2.3 设计实验证明电子具有自旋并作相关分析。

3 在一维无限深势阱中，$0 < x < a$。

3.1 求解波函数与能级；

3.2 求解动量平均值和坐标平均值；

3.3 若波函数为$\psi(x)=x$，求解能量处于E_1的几率；

3.4 给定微扰$V=\frac{V_0x}{2}$，运用一级修正理论求解基态能量和第一激发态能量。

4

4.1 若$[q,p]=i\hbar$，试求$[q,p^2f(q)]=$?

4.2 设$t=0$时，粒子以状态为$\psi(x)=A(\sin^2kx+\frac{1}{2}\cos kx)$，求此时粒子的平均动量和平均动能。

4.3 证明$L_\pm|l,m\rangle$是L^2的本征态并求其本征值；$L_\pm|l,m\rangle$是$\mathrm{L_z}$的本征态并求其本征值。

4.4 判断$e^x,x^2,\sin x+\cos x$是否为算符$\frac{d^2}{dx^2}$的本征函数，若是，求其他本征值。

5 设一微观体系的哈密顿量$H=H_0+H'$，其中H'为微扰，在一个由正交归一函数作为基矢的表象中，$H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，$H'=\begin{bmatrix}0&c&0\\c&0&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，其中$c$为常数。

5.1 求H的精确本征值；

5.2 求H的精确到微扰的二级修正的本征值；

5.3 比较 1 和 2 的结果，指出其间关系。

6

6.1 通过解释本征值方程试证明，自旋在任何方向的投影只有向上和向下两个可能的取向。提示：自旋角动量$\vec{S}$在任意方向$\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$上的投影算符为$\hat{S}_n=\hat{S}_x\cos\alpha+\hat{S}_y\cos\beta+\hat{S}_z\cos\gamma$。

6.2 在自旋向上的状态中，测量$\vec{S}_\mathrm{z}$有哪些可能的值？这些可能的值各以多大的几率出现？$\vec{S}_\mathrm{z}$的平均值是多少？

实验题&基本概念题汇编（部分）

1 玻尔在当初建立原子光谱理论时作了哪些基本假设？该理论在解决实际问题时遇到困难，原因何在？德布罗意又是如何解决这些问题的？

2 简要说明波函数和它所描写的粒子之间的关系。

3 以能量这个力学量为例，简要说明能量算符和能量之间的关系。

4 电子是什么？

5 量子力学的基本假设有哪些？简述之。

6 设计一个实验，从实验角度证明电子具有自旋，并对可能观察到的现象作进一步讨论。

7 玻尔的原子理论实际上是一个半经典理论，简述这里所说的“半经典”。

8 20 世纪的一些著名实验触发了从经典物理向量子物理跃变并为这种跃变提供了最初的实验事实，试将这些实验进行分类并简要说明这些实验事实抽象出的一些基本概念。

9 “物体以$h\nu$为能量单位不连续地发射或吸收频率为ν的电磁波，但辐射本身作为广布于空间的电磁波其能量是连续分布的”，试问这一说法是否正确？

10 如果算符$\hat{F}$表示力学量F，那么当体系处于$\hat{F}$的本征态ψ时，问该力学量是否有确定值？如果这组算符中有共同的本征函数，且这些共同本征函数组成完全集，问这组算符中的任何一个是否和其余的对易？

11 在S_z表象中，电子波函数可表示为$\psi(r,s_z,t)=\varphi_1(\vec{r},t)\chi_{\frac{1}{2}}+\varphi_2(\vec{r},t)\chi_{\frac{1}{2}}$,，简要说明其物理意义。

12 什么是态叠加原理？用态叠加原理解释电子在晶体表面的衍射现象。

13 写出量子力学中的几率守恒定律的微分形式和积分形式。几率流密度与质量流密度有什么关系？和电荷流密度有什么关系？

14 什么是算符的本征值和本征函数？当体系处于波函数ψ所描写的某一状态时，测量某个力学量F的数值与算符下的本征值有什么关系？

15 什么是全同性原理？描写全同粒子体系状态的波函数的对称性是否随时间改变？为什么？

16 什么是波函数的统计解释？量子力学的波函数与声波和光波的主要区别的什么？

17 写出量子力学中的测不准关系。如果两个算符不对易，则这两个算符表示的力学量能否同时有确定值？

18 量子力学如何构造一个力学量算符？当体系处于波函数$\psi(x)$所描写的状态时，测量力学

量得到的数值与该力学量的本征值有什么关系？

19 什么是粒子的全同性原理？玻色子和费米子组成的全同粒子体系的波函数主要区别在哪里？

20 什么是定态？判断下列哪些是定态。

A. $\psi(\hat{r},t)=u(x)e^{ix-\frac{iEt}{\hbar}}+v(x)e^{-ix-\frac{iEt}{\hbar}}$；

B. $\psi(\hat{r},t)=u(x)e^{ix-\frac{iE_1t}{\hbar}}+v(x)e^{-ix-\frac{iE_2t}{\hbar}}$；

C. $\psi(\hat{r},t)=u(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}+v(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$。

21 对下列每个实验简单描述实验细节，说明观测到的效应是经典的，通过对实验结果的分析说明如何获得量子化的信息。（1）光电效应；（2）黑体辐射；（3）戴维孙-革末（Davidson - Germer）电子衍射实验。