华中科技大学真题

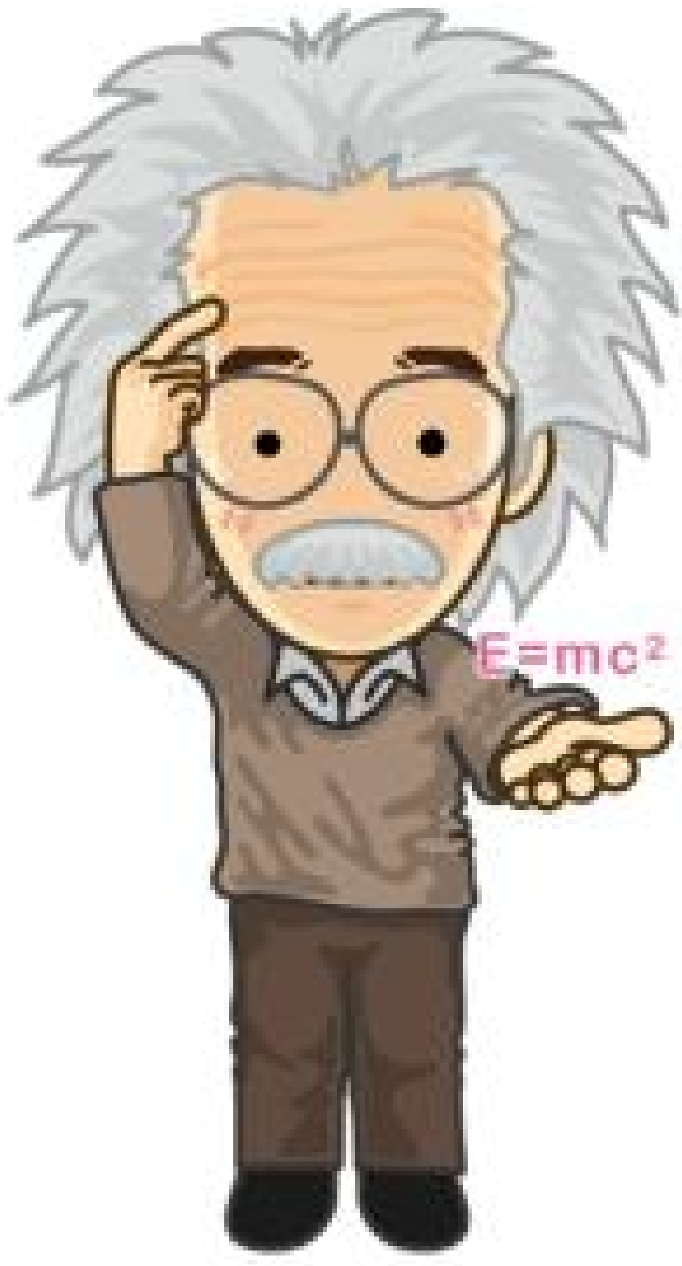
聪明宝宝

（如有错误或想要补充，联系 QQ）

2022 年 1 月 19 日

目 录

第一部分 量子力学



2003 年量子力学真题

基本概念题（25 分）

1、波尔的原子理论实际上是一个半经典理论，简述这里说的“半经典”的含义。

解答:

说“半经典半量子”的原因是因为在这一理论中，除提出定态假设、频率假设和角动量量子化假设外，仍然保留了电子运动轨道的经典概念，描述电子运动的基本方程仍然是牛顿力学的基本方程。

2、20 世纪的一些著名实验触发了从经典物理向量子物理跃变并为这种跃变提供了最初的一批实验事实，将这些实验进行分类并简要说明由这些实验事实所抽象出的一些基本观念。

解答:

这些实验大致可以分为三大类：一类是光的粒子性实验，如黑体辐射、光电效应、康普顿效应，他们证实了光的粒子性，抽象出了“光子”（康普顿正式赋予光子这一名称），从而建立了光具有“波粒二象性”这一概念；另一类是粒子的波动性实验，如电子、中子在晶体表面的衍射、电子的杨氏双缝实验等，他们证实了微观粒子的波动性，抽象出了“实物粒子的波”的概念，从而建立了“物质波”的理论；第三类则是证实了原子中具有量子态的实验，如光谱实验、弗兰克-赫兹实验，从中抽象出了“能级”的概念。

3、“物体以 hν 为能量单位不连续地发射或吸收频率为 ν 的电磁波，但辐射本身作为广布与空间的电磁波其能量是连续分布的”，试问这一说法是否正确？

解答:

不正确，因为

4、简述波函数和他所描写的粒子之间的关系。

5、(1) 如果算符 $\hat{F}$ 表示力学量 F，那么当体系处于 $\hat{F}$ 的本征态 ψ 时，问该力学量是否有确定的值？(2) 如果一组算符有共同的本征函数，且这些共同的本征函数组成完全系，问这组算符中的任何一个是否和其余的算符对易？

6、在 $\hat{S}_z$ 表象中，电子波函数可表示为 $\psi(\vec{r},\hat{S}_z,t)=\psi_1(\vec{r},t)\chi_{\frac{1}{2}}+\psi_2(\vec{r},t)\chi_{\frac{-1}{2}}$，简要说明其物理意义。

7、试判断下列函数中的哪些描述的态是定态？

$(1)\psi(x,t)=u(x)e^{ix-iEt/\hbar}+v(x)e^{-ix-iEt/\hbar}$

$(2)\psi(x,t)=u(x)e^{ix-iE_1t/\hbar}+u(x)e^{-ix-iE_2t/\hbar}$

$(3)\psi(x,t)=u(x)e^{-iEt/\hbar}+u(x)e^{iEt/\hbar}$

第二题（20 分）

1、考虑如下两个算符：$\hat{F}\psi(x)=x^3\psi(x),\hat{G}\psi(x)=x\dfrac{d\psi(x)}{dx}$, 求对易关系 $[\hat{F},\hat{G}]=?$

2、设粒子在宽为 a 的一维无限深势井中运动，求

（1）基态动量的平均值和。

（2）基态动量平方的平均值。

第三题（15 分）

考虑在三维各向同性势 $V(r)=\dfrac{1}{2}m\omega^2r^2$ 下运动的带电荷 +e 的粒子，受正 x 方向的电场 E 的作用，求粒子的定态能量和波函数。

提示：已知在一维现行谐振子中对应于量子数 n 的波函数为

$$\phi_n(x)=(\frac{\alpha}{\pi^{1/2}2^nn!})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}H_n(\alpha x),\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

第四题（25 分）

由角动量算符 $\hat{L}_x$ 和 $\hat{L}_y$ 可定义出两个新算符 $\hat{L}_+$ 和 $\hat{L}_-$，即 $\hat{L}_+=\hat{L}_x+i\hat{L}_y$ 和 $\hat{L}_-=\hat{L}_x-i\hat{L}_y$。

1、分别求下列算符间的对易关系：$[\hat{L}^2,\hat{L}_+],[\hat{L}^2,\hat{L}_-],[\hat{L}_+,\hat{L}_z],[\hat{L}_-,\hat{L}_z]$;

2、已知 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 为 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的共同本正态，相应的本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$, 试通过计算，

（1）证明 $\hat{L}_+Y_{lm}(\theta,\phi)$ 和 $\hat{L}_-Y_{lm}(\theta,\phi)$ 均为 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的本正态。

（2）相应的本征值是多少?

（3）简要说明结果的物理意义。

第五题（25 分）

1、考虑在宽度为 a 的一维无限深方势阱中运动的粒子，受微扰 $H'=a\omega_0\delta(x-\dfrac{a}{2})$ 的作用，ω_0 为常数，试计算近似达到一级修正时的能量修正。

2、在某一选定的一组正交基下哈密顿算符由下列矩阵给出

$$H=\begin{pmatrix}E_1^{(0)}&0&0\\0&E_2^{(0)}&0\\0&0&E_3^{(0)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a&0\\a&0&0\\0&0&a\end{pmatrix}$$

其中 a 为常数且为小量，试用微扰法求能量至二级修正值。

第六题（30 分）

长期以来人们一直认为电子是一种带电的微观粒子，但随着量子力学的诞生，人们对电子又有了新的认识，问最为典型的两种新认识是什么？试设计两个实验以支持两种新认识。

2004 年量子力学真题

第一题（25 分）

计算下列对易关系：

（1）$[\hat{P}_x, e^{\alpha x}](\alpha > 0$ 且为实数$)$

（2）设 $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$，$\hat{L}^2$ 是轨道角动量平方，计算 $[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}]$ 和 $[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}]$。

第二题（25 分）

粒子在宽度为 a 的一维无限深势阱 $u(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \le 0, x \ge a \end{cases}$ 中运动，求：

（1）粒子的能级和归一化波函数；

（2）粒子的动量和坐标的几率分布；

（3）粒子的坐标和动量的平均值和他们的涨落。

第三题（25 分）

厄米算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 满足关系式：$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 = 1$，$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$，求：

（1）在 A 表象中 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的矩阵表示，并求 $\hat{B}$ 的本征函数表达式；

（2）在 B 表象中 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的矩阵表示，并求 $\hat{A}$ 的本征函数表达式；

（3）$\hat{A}$ 表象到 $\hat{B}$ 表象的幺正变换矩阵的表达式。

第四题（25 分）

利用测不准关系 $\overline{(\triangle x)^2} * \overline{(\triangle P_x)^2} \ge \dfrac{\hbar^2}{4}$，估计谐振子的基态能量。

第五题（25 分）

设一微观体系的哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$，其中 $\hat{H}'$ 为微扰。在一个由正交归一函数作为基的表象中，$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$，其中 c 为常数。

（1）求 $\hat{H}$ 的精确本征值；

（2）求 $\hat{H}$ 的准确到二级修正的本征值；

（3）比较（1）和（2）的结果，指出其间关系。

第六题（25 分）

粒子的自旋为 1/2，$\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_y$ 是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符，求：

（1）$A\hat{S}_y + B\hat{S}_z$(A、B 均为实数) 的本征值和归一化波函数；

（2）假设体系处在向上的本正态中，测得 $\hat{S}_y$ 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是多少?

2005 年量子力学真题

第一题（25 分）

对易关系运算：

（1）若算符 $\hat{A},\hat{B}$ 满足条件 $[\hat{A},\hat{B}]=1$，求：$[\hat{A},\hat{B}^n]=?$

（2）算符 $\hat{P}_r=-i\hbar(\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r})$，计算对易关系 $[r,\hat{P}_r]=?$

（3）定义算符：$\hat{a}=(\dfrac{\mu\omega}{2\hbar})^{\frac{1}{2}}(\hat{x}+\dfrac{i}{\mu\omega}\hat{P}_x);\hat{a}^+=(\dfrac{\mu\omega}{2\hbar})^{\frac{1}{2}}(\hat{x}-\dfrac{i}{\mu\omega}\hat{P}_x)$，求：$[\hat{a},\hat{a}^+]=?$

第二题（25 分）

粒子在宽为 a 的一维无限深势阱 $u(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ & x\le 0, x\ge a\end{cases}$ 中运动，求：

（1）粒子的能级和归一化波函数；

（2）若一粒子的状态用波函数 $\psi(x)=\dfrac{4}{\sqrt{a}}\sin(\dfrac{a}{\pi}x)*\cos^2(\dfrac{a}{\pi}x)$ 描述，可该粒子能量可能测量值及相应的几率。

第三题（25 分）

三维谐振子的哈密顿量为：$\hat{H}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\dfrac{m}{2}(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2)$

（1）求其能级与波函数；

（2）若 $\omega_1=\omega_2=\omega_3$，试求能级的简并度。

第四题（25 分）

设体系处于 $\psi=c_1Y_{11}+c_2Y_{20}$，求：

（1）$\hat{L}_z$ 的可能测量值及平均值；

（2）$\hat{L}^2$ 的可能测量值及相应的几率；

（3）$\hat{L}_x$ 及 $\hat{L}_y$ 的可能测量值及相应的几率。

第五题（25 分）

设在 $\hat{H}_0$ 表象中，体系的哈密顿算符可表示为矩阵的形式

$$\hat{H}_0=\begin{pmatrix}E_1^{(0)}+a & b\\ b & E_2^{(0)}+a\end{pmatrix} \tag{1}$$

其中 a，b 为实数，用微扰理论求能级至二级修正，并与严格解比较。

第六题（25 分）

求自旋 $\hat{S}$ 在单位矢量为 $\vec{n}$ 的任意方向上的投影算符 $\hat{S_n}$ 的表达形式，并求在 $\psi_{S_z} = \pm\frac{\hbar}{2}$ 状态中的平均值 $\overline{\hat{S_n}}$，和在上述状态中的 $\hat{S_n}$ 测量值的几率。

2006 年量子力学真题

选择题（30 分）

1. 用 150 伏特的电压加速电子，其德布罗意波长为 1å, 如果用相同的电压加速质子，其德布罗意波长为（ ）

   (A) 23å (B) 2.3å (c) 0.23å (D) 0.023å

2. 已知电子的波函数为 $\psi(r) = Ne^{-\alpha r/a_0}$，则电子几率分布的最可几半径为（ ）

   (A) a_0/α (B) αa_0 (c) a_0/α^2 (D) $\alpha^2 a_0$

3. 已知在某个区域内粒子的波函数为 $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$，（A 和 B 均为实数，且满足 $A > B$）则粒子的几率流密度的大小和方向为（ ）

   (A) $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A^2 - B^2)$, 方向沿 x 轴正向

   (B) $\frac{\hbar k_1}{\mu}(A^2 - B^2)$, 方向沿 x 轴正向

   (C) $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A - B)^2$, 方向沿 x 轴正向

   (D) $\frac{\hbar k_1}{2\mu}(A^2 - B^2)$, 方向沿 x 轴负向

4. 设氢原子处于状态 $\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta.\phi) - \frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{1,-1}(\theta.\phi)$，则氢原子的能量和角动量平方的取值为（ ）

   (A) $-\frac{\mu e_s^2}{8\hbar^2}$, $\sqrt{2}\hbar^2$ (B) $-\frac{\mu e_s^2}{4\hbar^2}, 2\hbar^2$ (c) $-\frac{\mu e_s^2}{8\hbar^2}, 2\hbar^2$ (D) 没有确定值

5. 已知泡利矩阵 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则在自旋态 $\chi_{\frac{1}{2}} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 中，自旋角动量算符 $\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_y$ 的均方差分别为（ ）

   (A) $\frac{\hbar^2}{8}, \frac{\hbar^2}{8}$ (B) $0, \frac{\hbar^2}{4}$ (c) $\frac{\hbar^2}{4}, \frac{\hbar^2}{4}$ (D) $\frac{\hbar^2}{4}, 0$

基本概念题（4*5 分）

1、什么是态叠加原理？用态叠加原理解释电子在晶体表面的衍射现象。

2、写出量子力学的几率守恒定律的微分形式和积分形式。几率流密度与质量流密度有什么关系？和电荷流密度有什么关系？

3、什么是算符的本征值和本征函数？当体系处于波函数 ψ 所描写的某一状态时，测量某个力学量 F 的数值与算符 $\hat{F}$ 的本征值有什么关系？

4、什么是全同性原理？描写全同粒子体系状态的波函数的对称性是否随着时间改变？为什么？

计算与证明（5*20 分）

1、一粒子在一维势阱 $U(x)=\begin{cases} U_0>0 & |x|>a \\ 0 & |x|\le a \end{cases}$ 中运动，求束缚态 $(0<E<U_0)$ 的能级所满足的方程。

2、不通过求解薛定谔方程，证明处于宽度为 a 的一维无限深势阱中的基态粒子的能量与宽度 a 的平方成反比，即 $E_1 \propto a^{-2}$。

3、在薛定谔方程中，如果势能函数由 $U(x)\to U(x)+U_0$，是否会导致波函数发生变化？是否会导致能量的本征值发生变化？如果势能函数由 $U(x)\to U(x+a)$，则是否会导致波函数发生变化？是否会导致能量的本征值发生变化？试加以分析说明。

4、体系未受微扰作用时只有两个能级：E_{01} 和 E_{02}，现在受到微扰 $\hat{H}'$ 的作用，围绕矩阵元 $\hat{H}'_{12}=a$，$\hat{H}'_{21}=b$，$\hat{H}'_{11}=c$，$\hat{H}'_{22}=d$，a，b，c，d 均为实数。假设满足非简并条件，求能量至二级修正值。

5、证明在自旋态 $\chi_{\frac{1}{2}}=\sigma_x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 中，$\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_y$ 的均方差满足测不准关系

2007 年量子力学真题

问答题（4*10 分）

1、什么是波函数的统计解释？量子力学的波函数与声波和光波的主要区别是什么？

2、试写出量子力学中的测不准关系。如果两个算符对易，则这两个算符表示的力学量能否同时取确定值？

3、量子力学如何构建一个力学量算符？当体系处于波函数 $\psi(x)$ 所描述的状态时，测量力学量得到的数值与该力学量的本征值有什么关系？

4、什么是粒子的全同性原理？玻色子和费米子组成的全同粒子体系的波函数的主要不同是什么？

计算与证明题（110 分）

1、在一维无限深势阱中运动的粒子，势阱的宽度为 a，如果粒子的状态由波函数 $\psi(x) = Ax(a-x)$ 描写，求：

（1）粒子到分布在 $(0, \frac{a}{4})$ 区间的几率；（6 分）

（2）粒子在 $(0, a)$ 区间动量的平均值。（6 分）

2、计算下列两定态波函数对应的几率流密度（12 分）

$(1)\psi_1 = \frac{1}{r^2}e^{ikr}$；　$(2)\psi_2 = \frac{1}{r^2}e^{-ikr}$

3、一刚性转子转动惯量为 I，它的能量的经典表达式是 $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I}$，L 为角动量，在下两种情况中求刚性转子的能量本征值：

（1）刚性转子绕一定轴转动；（10 分）

（2）刚性转子绕一固定点转动。（10 分）

4、设氢原子处于状态 $\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2}R_{31}(r)Y_{10}(\theta.\phi) - \frac{\sqrt{3}}{2}R_{31}(r)Y_{1,-1}(\theta.\phi)$，求

（1）氢原子的能量及角动量分量 $\hat{L}_z$ 的可能值；（8 分）

（2）氢原子的能量及角动量分量 $\hat{L}_z$ 的平均值。（8 分）

5、粒子在宽度为 a 的以为无限深方势阱中运动，

（1）证明其在基态的坐标和动量的均方差满足：$\overline{(\triangle x)^2} * \overline{(\triangle P_x)^2} = \frac{\hbar^2}{4}(\frac{\pi^2-6}{3})$。（10 分）

（2）上述结果是否满足测不准关系，为什么？（6 分）

6、转动惯量为 I，电偶极矩为 $\vec{D}$ 的空间转子处在均匀弱电场 $\vec{E}$ 中，基态未受到微扰影响的波函数为 $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$，证明空间转子的基态能量的一级修正为零。（16 分）

7、证明算符 $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$, 所属的本征函数为 $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\chi_\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。（18 分）

2009 年量子力学真题

基本概念（40 分）

1、光照强度在什么情况下，能够使金属表面的自由电子逸出？（5 分）

2、写出德布罗意关系。（5 分）

3、力学量算符 $\hat{F}$ 在其本征态 ϕ 下，是否具有确定值？（5 分）

4、薛定谔方程为什么是线性的？为什么它所确定的状态中，不能含有状态参量？（5 分）

5、波函数和它描写的粒子之间有什么关系？（5 分）

6、波的叠加原理。（5 分）

7、试判断下列函数中的哪些所描述的状态是定态？（10 分）

$$(1)\psi(\vec{r},t) = u(x)e^{ix-iEt/\hbar} + v(x)e^{-ix-iEt/\hbar}$$

$$(2)\psi(\vec{r},t) = u(x)e^{ix-iE_1t/\hbar} + v(x)e^{-ix-iE_2t/\hbar}$$

$$(3)\psi(\vec{r},t) = u(x)e^{-iEt/\hbar} + u(x)e^{iEt/\hbar}$$

第二题（20 分）

已知宽度为 a 的一维无限深势阱（0<x<a）

1、写出能级和本征函数。

2、已知粒子处于 $\phi(x) = \dfrac{4}{\sqrt{a}}\sin\dfrac{\pi x}{a}\cos^2\dfrac{\pi x}{a}$，求粒子能量的平均值。

判断题（40 分）

1、$[x, \hat{P}_x] = i\hbar$

2、问 $\dfrac{d}{dx}$，$i\dfrac{d}{dx}$ 是否为厄米算符？

3、$e^x, \sin x + \cos x$ 是否为 $\dfrac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数，若是，本征值为何？

4、若 $[q, p] = i\hbar$，那么 $[q, p^2 f(q)] =?$

第四题（25 分）

粒子能级为 E_{01}、E_{02}，处于微扰 $H' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 中，求：

1、能量至二级近似；

2、精确解，并将近似解与精确解相比较。

第五题（25 分）

已知粒子 $s=\dfrac{1}{2}$

1、求 $\hat{S}=\hat{S}_x+\hat{S}_y$ 的本征值、本征函数。

2、若 x_α 为最大本征值的本征态，问在该态下，$\hat{S}_z$ 的可能值及相应的几率。

2010 年量子力学真题

填空题（30 分）

略，，，主要为《周世勋量子力学》上内容。

第二题（25 分）

已知宽度为 a 的一维无限深方势阱 (0<x<a)

1、求能量本征值、本征态。

2、坐标几率及最大几率位置。

3、求 $\overline{x}$。

4、求 $(\triangle x)^2$。

5、求 $\overline{P}$。

计算题（25 分）

1、$[\hat{L}_x, \hat{L}_y], [\hat{L}_y, \hat{L}_z], [\hat{L}_z, \hat{L}_x]$

2、$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm], [\hat{L}^2, \hat{L}_z], [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$

3、证明：

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}^2$ 的本征态，并求其本征值。

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征态，并求其本征值。

第四题（20 分）

已知已知宽度为 a 的一维无限深方势阱 (0<x<a)，存在微扰 $\hat{H}' = \frac{V_0}{a}x$，求一级近似下的基态和第一激发态能量。

第五题（20 分）

自旋为 $s = \frac{1}{2}$ 的电子，t=0 时自旋沿正 z 轴方向，若将其置于沿 x 方向的均匀磁场中，求：

1、t 时刻，电子自旋波函数 $\chi(t)$；

2、在 $\chi(t)$ 态下，$\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ 的平均值；

3、在 $\chi(t)$ 态下，$\hat{S}_z$ 测得的值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$ 的几率分别是多少？

（提示：电子自旋与外磁场的作用能 $\hat{H} = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$。

实验（30 分）

要求：画出实验原理图，写出结果及试验分析

1、证明电子波粒二象性

2、设计实验证明电子有自旋且有两个取向。

2011 年量子力学真题

填空题（20 分）

略，，，主要为《周世勋量子力学》上内容。

实验题（40 分）

1、对每个实验简单描述实验细节，说明观测到的效应是“非经典”的，通过对实验结果的分析，说明如何获得量子化信息。（4*5 分）

（1）光电效应。

（2）黑体辐射。

（3）Davisson-Germer 实验。

（4）Stern-Gerlach 实验。

2、考虑一电子束通过含有双缝（其中一缝为 A，另一缝为 B）的挡板到达接收屏，试对下列每种情况粗略画出电子出现在接收屏上的几率随位置的变化，并加以简单分析。（20 分）

（1）A 开 B 关；

（2）A，B 均开；

（3）若将 tern-Gerlach 实验设备连接到双缝上，使得自旋向上的电子通过缝 A，而自旋向下的电子通过缝 B。

（4）通过缝 A 和缝 B 的电子均为自旋向上的电子。

第三题（20 分）

已知宽度为 a 的一维无限深方势阱 (0<x<a)

1、求能量本征值、本征态。

2、坐标几率及最大几率位置。

3、假设在 t=0 时，粒子处在由归一化波函数 $\phi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}(1+\cos\frac{x\pi}{a})\sin\frac{x\pi}{a}$ 所描述的态中，求：（1）$t=t_0$ 时的波函数；（2）$t=t_0$ 时系统的平均能量。

4、$t=t_0$ 时刻，在 $0\le x\le\frac{a}{2}$ 区域内找到粒子的几率。

简答题（20 分）

1、试判断算符 $\frac{d}{dx}$ 和 $i\frac{d}{dx}$ 是否可能表示为力学量算符？即是否为厄米算符？

2、试判断 $x^2, e^x, \sin x+\cos x$ 这三个函数是否是算符 $\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数？若是，相应的本征值是多少？

3、算符 $[\hat{F},\hat{G}]$ 满足 $\hat{F}\psi(x)=x^3\psi(x),\hat{G}\psi(x)=x\frac{d\psi(x)}{dx}$，其中 $\psi(x)$ 为任意函数，求 $[\hat{F},\hat{G}]=?$

4、（1）试推导出 $\hat{L}_z$ 和 x 以及 $\hat{L}_x$ 和 $\hat{L}_y$ 对易关系。

（2）试求当粒子处于 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 态时的角动量 x 分量的平均值为多少？

计算题（25 分）

1、一维无限深势阱 (0<x<a) 中粒子受到微扰 $\hat{H}'(x)=\begin{cases}2\lambda\frac{x}{a} & 0<x<\frac{a}{2}\\ 2\lambda(1-\frac{x}{a}) & \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$ 的作用，求基态能量一级修正。

2、设在 H^0 表象中，哈密顿算符 $\hat{H}$ 的矩阵为 $\hat{H}=\begin{pmatrix}E_1^{(0)}+a & b\\ b & E_2^0+a\end{pmatrix}$，其中 a，b 为实数，使用微扰论求能量修正值（到二级近似），严格求解与微扰论计算值比较。

第六题（25 分）

通过解本征值方程试证明自旋在任何方向的投影只能有向上和向下两个可能的取向。提示：自旋角动量在任意方向 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 上的投影算符为

$$\hat{S}_n=\hat{S}_x\cos\alpha+\hat{S}_y\cos\beta+\hat{S}_z\cos\gamma$$

1、在这些 $\hat{S}_n$ 的本征态中，测量 $\hat{S}_z$ 有哪些可能值？

2、这些可能值各以多大的几率出现？

3、$\hat{S}_z$ 的平均值是多少？

2012 年量子力学真题

简答题（30 分）

1、波尔在当初建立原子光谱理论时做了哪些基本假设？该理论在解决实际问题时遇到困难，原因何在？德布罗意又是如何解决这些问题的？

2、什么是波函数的统计解释？简要说明波函数和它所描述的粒子之间的关系。

3、用量子力学的角度说明电子的意义。

4、以能量这个力学量为例，简要说明能量算符和能量之间的关系

5、非相对论量子力学建立在一些基本假设上，试说出其中两个基本假定，并简要说明之。

6、什么是定态，并判断下面哪个是定态：

$$(1)\psi(\vec{r},t)=u(x)e^{ix-iEt/\hbar}+v(x)e^{-ix-iEt/\hbar}$$

$$(2)\psi(\vec{r},t)=u(x)e^{ix-iE_1t/\hbar}+v(x)e^{-ix-iE_2t/\hbar}$$

$$(3)\psi(\vec{r},t)=u(x)e^{-iEt/\hbar}+u(x)e^{iEt/\hbar}$$

实验题（20 分）

试设计一实验，从实验角度证明电子具有自旋，并对可能观察到的现象作进一步讨论。

证明题（20 分）

1、证明：（1）$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z$；（2）$Y_{lm}$ 中，$\overline{L_x}=\overline{L_y}=0$

2、已知 $\hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y$，$\hat{L}^2$ 是轨道角动量平方，计算 $[\hat{L}^2,\hat{L}_\pm],[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]$。

第四题（20 分）

粒子在宽为 a 的一维无限深势阱中运动（0<x<a），求：

（1）粒子的能级和归一化波函数；

（2）粒子的动量和坐标的分布几率。

第五题（20 分）

设一微观体系的哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$，其中 $\hat{H}'$ 为微扰。在一个由正交归一函数作为基的表象中，$\hat{H}_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\hat{H}'=\begin{pmatrix}0&c&0\\c&0&0\\0&0&c\end{pmatrix}$，其中 c 为常数。

（1）求 $\hat{H}$ 的精确本征值；

（2）用微扰法求 $\hat{H}$ 二级修正的本征值；

（3）比较两种结果。

第六题（20 分）

粒子在自旋为 1/2，$\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_z$ 是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符，求：

（1）$A\hat{S}_y + B\hat{S}_z$（A、B 均为实数）的本征值和归一化波函数；

（2）假设体系处在向上的本征态中，测得 $\hat{S}_y$ 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是多少？

2013 年量子力学真题

简答题（30 分）

1、$\psi(x)$，$|\psi(x)|^2$ 的含义。

2、波函数的几个条件。

3、名词解释：

（1）基态，束缚态，简并态，偶宇称态，散射态，态密度。

（2）定态，守恒量，好量子数。

（3）斯塔克效应，简单塞曼效应，复杂塞曼效应，光谱精细结构。

4、可测量值用什么算符表示，为什么用厄米算符表示力学量算符？

证明题（20 分）

1、束缚态能级非简并，波函数为实函数。

2、Y_{lm} 中，$\overline{L_x} = \overline{L_y} = 0$。

计算题（5*20 分）

1、$\hat{H} = \frac{1}{2I_1}(\hat{L}_x^{\ 2} + \hat{L}_y^{\ 2} + \frac{1}{2}\hat{L}_z^{\ 2}) + \frac{1}{2I_2}\hat{L}_z^{\ 2}$，做适当变换，求本征值和本征函数。

2、一维线性谐振子波函数 $\psi_n(x)$，求：

（1）坐标和动量的涨落？

（2）是否满足测不准关系？

3、在宽为 a 的一维无限深势阱中，$\phi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}(1 + \cos\frac{x\pi}{a})\sin\frac{x\pi}{a}$，求：

（1）$t = t_0$ 时的波函数；

（2）$t = 0$ 和 $t = t_0$ 时的平均能量；

（3）$t = t_0$ 时，在 $0 \sim \frac{a}{2}$ 内发现粒子的概率；

（4）波函数在能量中的表示。

4、已知体系的哈密顿量为 $\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 3 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$ $(c < 1)$，

（1）求精确解；

（2）用微扰法求二级近似解；

（3）比较两种结果。

5、质量为 ν，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子，在宽为 a 的势阱中；

（1）不计粒子的相互作用，用单粒子态和自旋态给出三个最低能态。

（2）有相互作用 $V(|x_1 - x_2|)$，用一阶微扰求第一，二激发态能量。（可保留积分式）

2014 年量子力学真题

填空题

略，，，主要为《周世勋量子力学》课本内容

实验题

考虑一电子束通过含有双缝（其中一缝为 A，另一缝为 B）的挡板到达接收屏，试对下列每种情况粗略画出电子出现在接收屏上的几率随位置的变化，并加以简单分析。(20 分)

（1）A 开 B 关；

（2）A，B 均开；

（3）若将 tern-Gerlach 实验设备连接到双缝上，使得自旋向上的电子通过缝 A，而自旋向下的电子通过缝 B。

（4）通过缝 A 和缝 B 的电子均为自旋向上的电子。

第三题

在宽度为 a 的一维无限深方势阱中（0<x<a）

（1）求粒子的能级和波函数

（2）求坐标几率分布 $\overline{(\triangle x)^2}$

（3）假设粒子处在由下列波函数 $\psi(x)=\dfrac{4}{\sqrt{a}}\sin\dfrac{2x}{a}\cos^2(\dfrac{2x}{a})$ 所描述的态中，求粒子能量的可能值及相应的概率。

证明题

1、证明 $[x,\hat{P}_x]=i\hbar$

2、推导 $[\hat{L}_z,x],[\hat{L}_y,\hat{L}_z]$ 对易式的结果。

3、判断算符 $\dfrac{d}{dx}$ 和 $i\dfrac{d}{dx}$ 是否为力学量算符。

4、证明函数 $\phi(x,y,z)=x+y+z$ 是 $\hat{L}^2$ 本征值为 $2\hbar^2$ 的本征函数

第五题

设在 H^0 表象中，哈密顿算符 $\hat{H}$ 的矩阵为 $\hat{H}=\begin{pmatrix} E_1^{(0)}+a & b \\ b & E_2^{(0)}+a \end{pmatrix}$，其中 a，b 为实数，使用微扰论求能量修正值（到二级近似），严格求解与微扰论计算值比较。

第六题

粒子的自旋为 1/2，$\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_y$ 是自旋在 y 轴和 z 轴上的分量算符，求：

（1）$A\hat{S}_y + B\hat{S}_z$(A、B 均为实数) 的本征值和归一化波函数；

（2）假设体系处在向上的本正态中，测得 $\hat{S}_y$ 得到 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的几率是多少?

（3）若 χ_α 是最大本征值的本征态，问在该态下，$\hat{S}_z$ 的可能值及相应几率。

2015 年量子力学真题

注：15 年真题回忆版有两个，下面包含两个版本内容

简答题

1、简述黑体辐射及普朗克的量子化假说。

2、简述光电效应及爱因斯坦的量子假说。

3、简述微观粒子的波粒二象性及德布罗意关系。

4、判断一个状态是否是定态，什么是定态，定态波函数的形式。

5、简述态叠加原理。

6、为什么薛定谔方程是线性的，且不含状态参量？（周世勋课本原话）

7、波函数的统计解释，以及波函数应该满足什么条件？

8、写出一般情况下的薛定谔方程及定态薛定谔方程。

9、在什么情况下力学量有确定值？当体系处于任意波函数所描述的状态时，测得力学量的值如何？

10、在什么情况下一组算符是彼此对易的？

11、什么是厄米算符，为什么力学量是厄米算符？

12、证明在任意状态下力学量的平均值是实数。（也有可能是填空）

13、在什么情况下，两个力学量不能同时有确定值？如果两个力学量能够同时确定，他们的涨落乘积如何？

14、20 世纪的一些著名实验触发了从经典向量子物理的跃迁，并为这种跃迁提供了最初的实验事实，试将这些实验进行分类并简要说明这些实验所抽象出来的一些基本概念。（阎元红量子力学导学后面简答题有解释）

15、简述五大基本假设中的波函数假设。

16、证明两个宏观世界量子现象可忽略的例子：

（1）m=5g 的子弹以 $v = 10m/s$ 的速度射向距离 5cm 的 1cm 厚的墙透射率。

（2）体重为 50kg 的运动员以 10m/s 速度奔跑时的德布罗意波长。

实验题

1、设计实验证明电子具有波动性（画图）。

2、设计实验证明电子具有自旋（画图）。

第三题

已知宽度为 a 的一维无限深势阱中（$0<x<a$）

1、求解波函数和能级。

2、求解动量平均值和坐标平局值。

3、若波函数为 $\psi(x) = x$ 求解能量处于 E_1 的几率。

4、存在 $V = \frac{v_0}{2}x$ 的微扰时，求解基态能量和第一激发态能量的一级修正值。

第四题

1、试判断算符 $\frac{d}{dx}$ 和 $i\frac{d}{dx}$ 是否可能表示为力学量算符？即是否为厄米算符？

2、试判断 $x^2, e^x, \sin x + \cos x$ 这三个函数是否是算符 $\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数？若是，相应的本征值是多少？

3、证明：

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}^2$ 的本征态，并求其本征值。

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征态，并求其本征值。

4、若 $[q, p] = i\hbar$，那么 $[q, p^2 f(q)] =?$

5、设 t=0 时，粒子的状态为 $\psi(x) = A[sin^2 kx + \frac{1}{2}\cos kx]$，求此时粒子的平均动量和平均动能。

6、证明 $\psi_1 = y + iz, \psi_2 = z + ix, \psi_3 = x + iy$ 分别是 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ 本征值为 $\hbar$ 的本征态。

第五题

已知粒子的哈密顿量为 $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & a & 0 \\ a & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 + a \end{pmatrix}$,

1、求精确解。

2、若 a 极小，用微扰法求解能量至二级修正值，并与精确解比较。

第六题

假设 $\hat{S_n}$ 是自旋角动量在 $\hat{n}$ 方向的投影算符，$\hat{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为任意方向的单位矢量。

1、通过解 $\hat{S_n}$ 的本征值方程，试证明自旋角动量在空间任意方向上的投影可能取值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$。

2、分别求出 $\hat{S_x}$ 的本征值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$ 对应的本征函数。

3、在 $\hat{S_n}$ 处于本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 对应的本正态中；测量 $\hat{S_z}$ 有哪些可能值及相对应的概率，$\hat{S_z}$ 的平均值是多少？

2016 年量子力学真题

简答题

1、简述德布罗意关系。

2、简述波尔量子假设。

3、简要说明波函数和他描述的粒子之间的关系。

4、以能量力学量为例说明能量算符和能量之间的关系。

5、电子是什么?

6、简述量子力学五大基本假设。

7、写出几率守恒定律的积分和微分形式。

8、波函数的统计解释。

9、测不准关系。

第二题

1、用测不准关系估算谐振子的基态能量。

2、设体系处于 $\psi(x)=c_1Y_{11}+c_2Y_{20}$ 中，求 $\hat{L}_z$ 的可能取值及平均值，$\hat{L}^2$ 的可能取值及平均值.

第三题

在宽度为 a 的一维无限深方势阱中（0<x<a）

（1）求粒子的能级和波函数

（2）求坐标几率分布 $\overline{(\triangle x)^2}$

（3）假设粒子处在由下列波函数 $\psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{2x}{a}\cos^2(\frac{2x}{a})$ 所描述的态中，求粒子能量的可能值及相应的概率。

实验题

考虑一电子束通过含有双缝（其中一缝为 A，另一缝为 B）的挡板到达接收屏，试对下列每种情况粗略画出电子出现在接收屏上的几率随位置的变化，并加以简单分析。(20 分)

（1）A 开 B 关;

（2）A，B 均开;

（3）若将 tern-Gerlach 实验设备连接到双缝上，使得自旋向上的电子通过缝 A，而自旋向下的电子通过缝 B。

（4）通过缝 A 和缝 B 的电子均为自旋向上的电子。

证明题

1、证明 $[x, \hat{P}_x] = i\hbar$

2、推导 $[\hat{L}_z, x], [\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ 对易式的结果。

3、判断算符 $\dfrac{d}{dx}$ 和 $i\dfrac{d}{dx}$ 是否为力学量算符。

4、$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm], [\hat{L}^2, \hat{L}_z], [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$

5、证明：

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}^2$ 的本征态，并求其本征值。

$\hat{L}_\pm \mid l_m >$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征态，并求其本征值。

第六题

一维无限深势阱 (0<x<a) 中粒子

1、受到微扰 $\hat{H}'(x) = \begin{cases} 2\lambda\dfrac{x}{a} & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ 2\lambda(1-\dfrac{x}{a}) & \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$ 的作用，求基态能量二级修正。

2、存在 $V = \dfrac{v_0}{2}x$ 的微扰时，求解基态能量和第一激发态能量的一级修正值。

第七题

1、证明 $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = i$。

2、求在 $\chi_{\frac{1}{2}}(\hat{S}_z)$ 中，$\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_y$ 的测不准关系为?

3、假设 $\hat{S}_n$ 是自旋角动量在 $\hat{n}$ 方向的投影算符，$\hat{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为任意方向的单位矢量。

(1) 求其本征值及对应的本征函数.

(2) 在这些本征态中测量 $\hat{S}_z$ 有哪些可能值及相对应的概率，$\hat{S}_z$ 的平均值是多少?

2017 年量子力学真题

填空题

1、普朗克的量子化假设揭示了微观粒子的（ ）特性，爱因斯坦的量子化假设揭示了光子的（ ），德布罗意假设揭示了微观粒子具有（ ）。

2、对于能量为 E，动量为 P 的微观粒子，反应其波动性质的频率 ν 和波长 λ 可表示为（ ）。

3、氢原子电子能为 $E_n = -\dfrac{13.6eV}{n^2}$，问 n=5 能级跃迁到到 n=4 能级时，发出光子能量为（ ），频率为（ ）。

4、波函数在空间中某一点的（ ）与它在该点找到粒子的（ ）成正比，波函数在整个空间中满足（ ）三个条件。

5、按照量子力学中的态叠加原理，如果 ψ_1, ψ_2 是这个体系的可能状态，则（ ）也是体系的可能状态。

6、写出含时薛定谔方程。

7、试判断下列函数中的哪些描述的态是定态?

$(1)\psi(x,t) = u(x)e^{ix-iEt/\hbar} + v(x)e^{-ix-iEt/\hbar}$

$(2)\psi(x,t) = u(x)e^{ix-iE_1t/\hbar} + u(x)e^{-ix-iE_2t/\hbar}$

$(3)\psi(x,t) = u(x)e^{-iEt/\hbar} + u(x)e^{iEt/\hbar}$

8、当体系处于算符 $\hat{F}$ 的本征态时，测量力学量 $\hat{F}$ 所得到的值必定是（ ），当体系处在任意波函数 ψ 描述的态时，测量力学量 $\hat{F}$ 所得到的值必定是（ ）。

9、什么是简并态?

10、如果一组算符有共同本征态系，且本征态构成完备系，则这组算符任意一个算符和其他算符（ ）。

11、任意态 ψ 下，力学量 $\hat{F}$ 的平均值为（ ）。

12、一维运动的粒子，坐标和动量算符满足的对易关系式为（ ），这两个力学量之间的测不准关系为（ ）。

简答题

1、简述力学量算符为什么是线性厄米算符。

2、简述（1）光电效应，（2）戴维逊-革末实验，（3）斯特恩-盖拉赫实验，三个实验分别得出什么量子化信息。

实验题

1、一束电子束通过挡板的 A,B 双缝到达接收屏，若分别以 ϕ_A 和 $\phi(B)$ 表示通过 A,B 双缝到达接收屏上的电子状态，对以下情况，试分别写出电子出现在接收屏上的几率密度。

（1）关掉 A 缝或关掉 B 缝；

（2）两缝同时打开；

（3）自旋向上的电子通过 A 缝，自旋向下的电子通过 B 缝；

（4）通过 A，B 缝的均为自旋向上的电子。

2、实验表明，$\hat{H}$ 原子光谱由一系列分立的谱线组成，在强磁场中谱线进一步分别，试对此解释说明。

第四题

在宽为 a 的一维无限深势阱中，$\phi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}(1+\cos\frac{x\pi}{a})\sin\frac{x\pi}{a}$，求：

（1）$t=t_0$ 时的波函数；

（2）$t=0$ 和 $t=t_0$ 时的平均能量；

（3）$t=t_0$ 时，在 $0\sim\frac{a}{2}$ 内发现粒子的概率；

（4）波函数在能量中的表示。

第五题

设氢原子的状态为 $\psi=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi)\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\phi)\end{pmatrix}$,

（1）求轨道角动量 z 分量 $\hat{L}_z$ 和自旋角动量 z 分量 $\hat{S}_z$ 的平均值；

（2）求总磁矩 $\hat{\vec{M}}=\frac{e}{2\mu}\hat{\vec{L}}-\frac{e}{\mu}\hat{\vec{S}}$ 的 z 分量平均值。

证明题

1、问 $\psi(x,y,z)$ 是否是 $\hat{L}^2$ 的本征函数？若是，本征值是多少？

2、证明关系式 $\hat{\vec{L}}\times\hat{\vec{r}}+\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{L}}=2i\hbar\hat{\vec{r}}$

第七题

已知 $\hat{H}_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 微扰为 $\hat{H}'=\begin{pmatrix}0&2\lambda&0\\2\lambda&\lambda&3\lambda\\0&3\lambda&2\lambda\end{pmatrix}$. 用微扰法求能量二级修正。

第八题

已知自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子

（1）求 $\hat{a}=\hat{S}_x+\hat{S}_y$ 的本征值及本征函数

（2）设 χ_1 是 $\hat{a}$ 最大本征值的本征态，当处于 χ_1 时，测 $\hat{S}_z$ 的可能取值及几率。

2018 年量子力学真题

基本概念题

1、普朗克、爱因斯坦和德布罗意分别提出了何种量子化条件。

2、写出德布罗意关系并简述物理意义。

3、体重为 50kg 的运动员以 10m/s 的速度跑动，其德布罗意波长为?

4、一束电子束通过挡板的 A,B 双缝到达接收屏，若分别以 ϕ_A 和 $\phi(B)$ 表示通过 A,B 双缝到达接收屏上的电子状态，对以下情况，试分别写出电子出现在接收屏上的几率密度。

（1）关掉 A 缝或关掉 B 缝；

（2）两缝同时打开；

（3）自旋向上的电子通过 A 缝，自旋向下的电子通过 B 缝；

（4）通过 A，B 缝的均为自旋向上的电子。

5、对于能量为 E 的定态波函数是什么形式，写出定态薛定谔方程。

6、为什么薛定谔方程是线性的且不包含状态参量。

7、简述正常塞曼效应，复杂塞曼效应。

8、什么是厄米算符，厄米算符的本征值有什么特点?

9、什么情况下两个力学量能同时有确定值，写出测不准关系。

10、为什么力学量必须是线性厄米算符。

第二题

在宽度为 a 的一维无限深方势阱中（0<x<a）

（1）求粒子的能级和波函数

（2）求坐标几率分布 $\overline{(\Delta x)^2}$

（3）假设粒子处在由下列波函数 $\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{2x}{a}\cos^2(\frac{2x}{a})$ 所描述的态中，求粒子能量的可能值及相应的概率。

证明题

1、一维束缚态 $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 0$。

2、证明 $\hat{L}_z, \hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_y$，及 $\hat{L}_y, \hat{L}_z = i\hbar\hat{L}_x$。

3、已知 $[q,p] = i\hbar$，求 $[q, p^2 f(q)]$

第四题

设氢原子的状态为 $\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$, 求轨道角动量 z 分量 $\hat{L}_z$ 和自旋角动量 z 分量 $\hat{S}_z$ 的平均值;

第五题

转动惯量为 I，电偶极矩为 D 的空间转子处在均匀弱磁场中，试用微扰法求转子基态能量的二级修正。

第六题

已知粒子的自旋 $s = \frac{1}{2}$

（1）求 $\hat{S} = \hat{S}_x + \hat{S}_y$ 的本征值本征函数;

（2）设 χ_1 是 $\hat{a}$ 最大本征值的本征态，当处于 χ_1 时，测 $\hat{S}_z$ 的可能取值及几率。

2020 年量子力学真题

填空题

略，，，主要为《周世勋量子力学》课本内容

实验题

1、设计实验证明电子具有波动性（画图）。

2、设计实验证明电子具有自旋（画图）。

简答题

1、简述正常塞曼效应和反常塞曼效应。

2、简述波尔三个基本假设。

3、证明在定态下，一切力学量（不显含 t，但不管是否是守恒量）的平均值和测量值概率分布都不随时间变化。

4、求 $[\hat{L}_x, \hat{P}^2]$

第四题

在宽度为 a 的一维无限深势阱中，假设在 t=0 时，粒子处在由归一化波函数 $\phi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}(1+\cos\frac{x\pi}{a})\sin\frac{x\pi}{a}$ 所描述的态中，求：

（1）$t=t_0$ 时的波函数；

（2）$t=t_0$ 时系统的平均能量。

第五题

在 Q 表象中单粒子体系的哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$，其中 $\hat{H}_0=E_0\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}, \hat{H}'=\epsilon\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，其中 E_0 为正实数，$|\epsilon|\ll E_0$

（1）忽略微扰求出 $\hat{H}_0$ 的本征值和本征态；

（2）考虑微扰，求体系基态的二级近似能量。

第六题

假设 $\hat{S}_n$ 是自旋角动量在 $\hat{n}$ 方向的投影算符，$\hat{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为任意方向的单位矢量。

1、通过解 $\hat{S}_n$ 的本征值方程，试证明自旋角动量在空间任意方向上的投影可能取值为 $\frac{\hbar}{2}$。

2、分别求出 $\hat{S}_x$ 的本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 对应的本征函数。

3、在 $\hat{S}_n$ 处于本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 对应的本正态中；测量 $\hat{S}_z$ 有哪些可能值及相对应的概率，$\hat{S}_z$ 的平均值是多少?

2022 年量子力学真题

填空题

1. 普朗克的黑体辐射实验提出了 ______。

2. 爱因斯坦的光电效应提出了 ______。

3. 戴维孙-革末的电子衍射实验证明了 ______。

4. 斯特恩盖拉赫实验说明了 ______。

5. 据德布罗意关系，已知能量 E 和动量 P，求 $\nu =$______,$\lambda =$______。一运动员体重 60kg，10s 跑完 100m，求他的德布罗意波长 ______。

6. 若 ψ_1 ψ_2 $\psi_3 ... \psi_n$ 为系统的态，则 $\psi(r)$ 可表示为 ______, 出现 ψ_n 的几率为 ______。

7. 若系统可以被波函数 $\psi(r,t)$ 描述，则在 $\vec{r}$ 处观测到粒子的几率与 ______ 成正比。

8. 波函数的性质 ______、______、______。

9. 由于我们建立的是描写波函数随时进变化的方程，因此他必须是波函数应满足的含有对时间微商的微分方程，此外这方程还应满足两个条件：(1)______;(2)______。

10. 已知质量为 μ, 势能为 $u(r,t)$，则薛定谔方程为 ______。

11. 定态是 ______, 定态的波函数形式 ______, 已知势能为 $u(r,t)$，则薛定谔方程为 ______。

12. 体系的量子态用希尔伯特空间的 ______ 描述，力学量算符为 ______ 算符，力学量的本征值为 ______。

13. 存在力学量完全集 $\{\psi_n\}$ 有 $F\psi_n = f_n\psi_n, \psi_r = \sum c_n\psi_n$, 其中 $c_n =$______，观测力学量算符得到的结果比为 ______, 相应的几率为 ______，平均值为 ______。

14. 两个物理量同时拥有确定值的条件为 ______，其测不准关系为 ______。

15. 力学量可以用矩阵来表示，力学量在自身表象下为 ______ 矩阵，算符 $\hat{F}$ 在自身表象下本征值为 f，变换到另一表象中，新表象下的本征值为 ______。

16. 过渡金属的 d 电子能级，不考虑自旋拥有无重兼并，兼并源于 ______, 可用 ______ 消除兼并。

实验题

1、晶体电子衍射是以经过电压 V 加速了的电子束入射到晶体上产生的一种现象，若要产生波长和晶体中相邻原子间距 (0.1nm) 相当的电子波，则需要多高的电压加速电子。

2、假设入射电子束是能量为 E，动量为 P 的自由电子束，试分别写出入射到晶体之前和之后的电子波函数。

3. 晶体是由大量原子周期性排布而形成的，晶体对电子的散射实际上是晶体中各个原子对入射波的散射，试通过理论分析和基于可能观察到的现象，论证基于电子衍射现象可以证实电子具有波动性

(为简单起见，可只考虑晶体中两个原子对电子的散射)。

4. 除晶体的电子衍射实验现象可以证实电子具有波动性外，你还可以设计什么样的实验来证明电子的波动性，简述你的设计思路和理论依据。

计算题

一、考虑在 $[0,a]$ 一维无限深势阱中运动的粒子，

1. 试求粒子能量的本征值和相应的本征函数。
2. 试求坐标的几率分布和坐标的量子涨落 $\overline{(\triangle x)^2}$
3. 若 $t=0$ 时刻粒子处在状态 $\phi(x,t=0)=\frac{2}{\sqrt{a}}(1+\cos\frac{2\pi x}{a})\sin\frac{\pi x}{a}$

(1) 试求粒子能量的可能取值和相应的几率；

(2) 试写出 $t>0$ 时刻的粒子状态波函数；

(3) 试求出任意时刻粒子能量的可能观测值，相应的几率及平均值。

二、1. 如果一维运动的粒子分别处在 (1) 由 $\psi_1(x,t)=\psi(x)e^{iEt/\hbar}+\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ 和 (2) 由 $\psi_2(x,t)=u(x)e^{i(x-Et/\hbar)}+v(x)e^{-i(x+Et/\hbar)}$ 所描述的状态中，问粒子状态是否为定态，给出理由。

2. 试证明：定态时不显含时间的力学量的取值几率以及平均值不随时间变化而变化。

3. 对一维运动的粒子，其哈密顿算符为 $\vec{H}=\frac{(\hat{P})^2}{2m}+V(x)$，试求对易关系 $[x,\hat{H}]=?$ 和 $[\hat{P},\hat{H}]=?$

4. 如果一维运动的粒子处在 (1) 由 $\psi(x)$ 所描述的状态中和 (2) 由 $\psi(x)e^{ik_0x}$ 所描述的状态中，其中 $\psi(x)$ 为归一化的实函数，k_0 为实数，试求两种情况下，粒子动量的平均值。

5. 对于处在任意自旋态上 $\chi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 下的电子，试证明：如果 $|a|^2=|b|^2$，则在 z 方向的自旋角动量 $\hat{S}_z$ 的平均值必为 0。

6. 对于一维运动的粒子，若处在束缚态，则必有 $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx=0$, 试证明之。

三、对于一维空间运动的线性谐振子，其哈密顿算符为 $\vec{H}=\frac{(\hat{P})^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，在基态时，线性谐振子的基态能量为 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$, 相应的基态波函数为 $\psi_0(x)=(\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$,

1. 经典谐振子的基态能量为 0，而量子谐振子的基态能量为 $\frac{1}{2}\hbar\omega$，试定性解释经典和量子基态能差别的原因，并基于测不准关系试估算量子谐振子的基态能量；

2. 试写出动量表象中的哈密顿算符和基态波函数的表达式；

3. 假设谐振子是携带电荷 q 的谐振子，若将其置于场强为 E 的均匀电场中，试求基态能量和基态波函数。

四、考虑一个自旋量子数为 $\frac{1}{2}$ 的电子，在 σ_z 的表象中，其自旋量子态可表示为归一化的列矩阵 $\psi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,

1. 求 σ_x、σ_y 和 σ_z 三个力学量在 ψ 态中的平均值；

2. 考虑一矢量 $\vec{m} = m_x\vec{e_x} + m_y\vec{e_y} + m_z\vec{e_z}$，其中 m_i $(i = x, y, z)$ 为非零实常数，$\vec{e_i}$ $(i = x, y, z)$ 为沿 i 方向的单位矢量，试求力学量算符 $\vec{m}\cdot\hat{\sigma}$ 的本征值；

3. 如果将电子置于 $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ 的均匀磁场中，试求体系的能量和相应的本征函数；

4. 如果将电子置于 $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$ 的均匀磁场中, 假设 $B_x \ll B_z$, 试用微扰法求体系的近似能量 (至二级修正) 和相应的近似本征函数 (至一级修正)。

(提示：磁场下哈密顿算符为 $\hat{H} = \dfrac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$)

第二部分 数学

2002 年数学真题

填空题（10*5 分）

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x-\dfrac{1}{e^x-1})=$______。

2、若 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ 在 x=0 处可导，则 A=______，$f'(0)=$______。

3、曲线 $e^y+\sin(xy)=1$ 在 (0,0) 点的切线方程为 ______。

4、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+x^{10}}+\cos^5 x)dx=$______。

5、微分方程 $xdy+(\ln x-1-\ln y)ydx=0$ 的通解是 ______。

6、设 L 是 xoy 平面上沿顺时针方向绕行的简单闭曲线，且 $\oint_L(x-2y)dx+(4x+3y)dy=-9$，则 L 所围成的平面闭区域所围成的面积等于 ______。

7、设 σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则积分 $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$______。

8、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数为 ______。

9、将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则系数 $a_2=$______。

10、若 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______。

解答题（10*10 分）

1、设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\int_0^t\dfrac{1}{1+u^4}du\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

2、证明 $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$，其中 $f(x)$ 在 [-1,1] 连续。

3、设 f(x) 在 [a,b] 上连续，(a,b) 内可导，证明，存在 $\xi\subset(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=2(\xi-a)\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}.$$

4、求 $x^2+y^2\geq x,x^2+y^2\leq 2x,z\leq\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z\geq 0$ 公共部分的体积。

5、若 $A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $|2AA^*|$。

6、证明：方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 \cdots + a_5 = 0$。

7、将二次型 $f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准型。

8、设 $V_{环}$ 为圆 $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ $(a > R)$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积，$V_{柱}$ 是半径为 R，高度为 $2\pi a$ 的圆柱体的体积，证明 $V_{环} = V_{柱}$。

9、证明：

（1）$(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^n \sin(x + \frac{n\pi}{4})$.

（2）$(\sqrt{2})^n \sin(x + \frac{n\pi}{4}) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i sin(x + \frac{i\pi}{2})$.

10、(1) 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$，$0 \le \theta \le 2\pi$ 的曲率为 $K(\theta)$；　（2）证明：椭圆恰有四个顶点（其中曲率 $K(\theta)$ 取得极小值的点为顶点）。

2003 年数学真题

填空题（5*4 分）

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-1})^x=$________。

2、设 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的 $\frac{1}{4}$ 圆弧，则 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$________。

3、设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为 ________。

4、设 A 为三阶方阵，$|A|=2$，则 $||A|A^*|=$　。

5、若 $\beta=[0,K,K^2]^T$ 能被 $\alpha_1=[1+K,1,1]^T,\alpha_2=[1,1+K,1]^T,\alpha_3=[1,1,1+K]^T$ 唯一线性表示，则 K________。

选择题（5*4 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f[f(x)]=(\quad)$

(A) $\begin{cases}2+x, & x<-1;\\ 1, & x\geq -1.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}1+x, & x<-1;\\ 1, & x\geq -1.\end{cases}$

(c) $\begin{cases}1, & x<-1;\\ 2+x, & x\geq -1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}1, & x<-1;\\ 1+x, & x\geq -1.\end{cases}$

2. 设 $F(x)$ 是 $\frac{\ln x}{x}$ 的一个原函数，则 $dF(sinx)=(\quad)$

(A) $\frac{\ln\sin x}{\sin x}dx$　　(B) $-\frac{\ln\sin x}{\sin x}\sin xdx$

(c) $\frac{\ln\sin x}{\sin x}\cos xdx$　　(D) $-\frac{\ln\sin x}{\sin x}\cos xdx$

3. $y''-6y'+9y=0$ 的通解为 $(\quad)$

(A) $c_1e^{3x}+c_2$　　(B) $e^{3x}(c_1+c_2x)$

(c) $e^x(c_1+c_2x)$　　(D) $e^x\dot{x}(c_1+c_2x)$

4. 设 $Z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $(\quad)$

(A) 在 (x_0,y_0) 处不存在偏导数　　(B) 在 (x_0,y_0) 处偏导数连续

(c) 在 (x_0,y_0) 处偏导数不连续　　(D) 在 (x_0,y_0) 处不存在极限

5. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r<n$，且 $AX=b$ 有解，则其一定有

(A) $n-r$ 个线性无关的解　　(B) r 个线性无关的解

(c) $n-r+2$ 个线性无关的解　　(D) $n-r+1$ 个线性无关的解

计算题（10*10 分）

1、设 $\begin{cases} x = g'(t) \\ y = tg'(t) - g(t) \end{cases}$ 其中 $g(t)$ 的二阶导数存在且 $g''(t) \neq 0$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$。

2、求 $\int_{-2}^{2} max(x, x^2)dx$。

3、计算 $\int \dfrac{1}{1+e^x}dx$。

4、求解初值问题

$$\begin{cases} (x - \sin y)dy - \tan y dx = 0 \\ y\,|_{x=0} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

5、设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6、计算 $\iint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz+(z-x+y)dxdy$，S：曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面

7、求由 $(a, b, c > 0)\dfrac{a}{x} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界均匀物体对原点的转动惯量。

8、讨论 a, b 为和值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

有唯一解，有无穷多解，无解，当有无穷多解时，求出方程组的全体解。

9、设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0$，求 A^{-1}，若 $g(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 7$，且 $g(A) = 0$，问 $A + 5I$ 是否可逆？若可逆，试求其逆。

10、设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$，求 x 和 y 的值

证明题（2*5 分）

1、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$0 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{1+x^2}$，证明存在 $\xi > 0$，使 $f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$。

2、设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^3 - 3A^2 + 5A - 3I = 0$，证明 A 正定。

2004 年数学真题

填空题（5*4 分）

1、设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ a, & x=0.\end{cases}$，则 a=________。

2、$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$ 的第一类间断点为 ________。

3、$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^n}{n\ln^2 n}x^{2n-1}$ 的收敛域为 ________。

4、$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}$ =________。$(a_i\neq 0, i=1,2,3,4)$

5、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$，B 为三阶方阵，且满足 $A^2-AB=I$，则 $r(AB-BA+A)=$________。

选择题（5*4 分）

1. 设 $G(x)$ 是 $g(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数，则 $g(x)+G(x)$ 在 (a,b) 上（ ）

(A) 为初等函数　　(B) 可导

(c) 连续　　(D) 存在原函数

2. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)<0, f''(x)<0, \triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$，则当 $\triangle x<0$ 时有（ ）

(A) $\triangle y>dy>0$　　(B) $\triangle y<dy<0$

(c) $dy>\triangle y>0$　　(D) $dy<\triangle y<0$

3. 设曲线积分 $\int\dfrac{-2xf(x)}{1+x^2}ydx+f(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 连续且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$( )

(A) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(B) $\dfrac{1}{x^2}$

(c) $1+x^2$　　(D) x^2

4. n 阶方阵 A 与 B 相似的一个充分条件是（ ）

(A) $trA=trB$

(B) A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\lambda_i\neq\lambda_j,(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$

(C) $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

(D) $r(A)=r(B)$

5. A 是 $m\times n$ 矩阵 $(m\neq n), AX=0$ 只有零解的充分必要条件是（　）

(A) $m>n$　　(B) $m<n$

(c) A 的 n 个列向量线性无关　　(D) A 的 m 个行向量线性无关

计算题（10*10 分）

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\cot x}$。

2、设 $z=f(\phi(x)-y,x+\psi(y))$，其中 f 具有二阶偏导数，ϕ 和 ψ 可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、设 $f(x)=(x-a)^n\phi(x)$，$\phi(x)$ 在 a 的邻域内有 n-1 阶连续导数，求 $f^{(n)}(a)$。

4、一个月产 300 桶原油的油井，在 3 年后将要枯竭，预计从现在开始 t 个月后，原油价格将是每桶 $p(t)=18+0.3\sqrt{t}$（美元），设原油一生产出就被售出，问：从这口井可以得到多少美元的收入？

5、在曲线 $y=x^2$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围面积为 $\dfrac{1}{12}$，求切点 A 的坐标及此切线方程。另对 $y=x^2(0\le x\le 1), y=1$ 和 $x=0$ 围成的平面图形 D 绕 $x=1$ 旋转而成的旋转体，求其体积。

6、求曲线积分 $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$，若从 x 轴正向看去，这圆周取逆时针方向。

7、将函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2; \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 2<x<4. \end{cases}$，在 $(0,4)$ 上展开为余弦函数。

8、$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$能否对角化？若可以对角化，求 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

9、设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，有 $A^*X=A^{-1}-4X$，求 X（A^* 为 A 的伴随矩阵）

10、求 t，使 $x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 正定。

证明题（2*5 分）

1、设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$，$(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n})=6\pi$。

2、设 A 为 n 阶方阵，$A^TA=I,|A|<0$，证明：$|I+A|=0$。另若 $A^k=0$，问 I-A 是否可逆？何故？

2005 年数学真题

选择题（4*4 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，以下无穷小量中与 x^2 同阶的无穷小量是（ ）

   (A) $\ln\cos x$ (B) $x+x^2$ (c) $(1-x)^2-1$ (D) $\ln(1+\sin x)^2$

2. 微分方程 $y''+y'=e^x+1$ 的一个特解的待定形式为（ ）

   (A) $y^*=C_1+C_2e^x$ (B) $y^*=C_1x+C_2xe^x$

   (c) $y^*=C_1x+C_2e^x$ (D) $y^*=C_1+C_2xe^x$

3. 如果 ，则成为 的一个原函数的是（ ）

   (A) $2\cos x$ (B) $2\sin 2x$ (c) $x-\sin 2x$ (D) $x-\cos 2x$

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$。则三条直线 $a_ix+b_iy+c_iz=0$ $(a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3)$ 交于一点的充分必要条件是（ ）

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

   (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

   (C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$

   (D) α_1,α_2 线性无关且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

填空题（6*4 分）

1、行列式 $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 5x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^3 的系数为 ________。

2、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围为 ________。

3、曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的斜渐近线方程为 ________。

4、逐次积分 $I=\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$ 在更换积分次序后的形式为 $I=$________。

5、设 $u=xy-z^2$，则 u 在点 $(2,-1,1)$ 处的方向导数最大值是 ________。

6、微分方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的通解为 ________。

计算题（10*10 分）

1、设变量 x,y,z 满足方程 $z=f(x,y)$ 以及 $F(x,y,z)=0$ （其中 f，F 均可微），求 $\dfrac{dz}{dx}$。

2、在椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 的第一卦限部分上求一点 M，使得椭球面在该点的切平面在三个坐标面上的截距的平方和最小。

3、平面 xOy 上由 y 轴，直线 $y=H\ (H>0)$ 和抛物线 $y=\dfrac{H}{R^2}x^2\ (0\le x\le R)$ 所围成的平面图形 D 绕 Oy 轴旋转，使用积分方法计算所构成的旋转体的体积 V。

4、一质量均匀，密度为 μ 的链条挂在垂直墙壁的钉子上，启动时，一端离钉子 8m，另一端离钉子 12m，若不计钉子对链条的摩擦力，取 $g=10m/s^2$，求链条划过钉子所需要的时间。

5、计算 $I=\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$，其中 L 是逆时针指向的封闭圆周 $x^2+y^2=1$。

6、设曲面 S 是球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=2z$ 的上侧 $(z\ge 1)$ 和圆锥面 $S_2: x^2+y^2=z$ 的下侧 $(0\le z\ge 1)$ 共同组成，计算 $I=\iint\limits_S xdzdx+z^2dxdy$。

7、将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 在区间 $[0,\pi]$ 上展开为正弦级数。

8、讨论矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 是否可能相似对角化，为什么？如果可以的话，求与其相似的对角矩阵。

9、设 $A=[a_{ij}]$ 为三阶实矩阵，且满足 $a_{11}\ne 0$ 及 $a_{ij}=A_{ij}\ (1\le i,j\le 3)$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，计算矩阵 A 的行列式 $|A|$

10、a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$ 有解或无解？在有解时求出相应的解。

证明题（2*5 分）

1、设 $A, A-I$ 都是 n 阶正定矩阵，其中 I 为单位矩阵，证明 $I-A^{-1}$ 为正定矩阵.

2、设函数 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负单调增函数，$b=f(b)>0, 0\le x_0\le b, X_{n+1}=f(X_n)\ (n=0,1,2\cdots)$，证明数列 $[X_n]$ 收敛。

2006 年数学真题

选择题（4*5 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{1+e^{1/x}}{2+e^{1/x}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　）

   (A) 连续点　(B) 可去间断点　(c) 跳跃间断点　(D) 第二类间断点

2. 设微分方程 $y'+p(x)y=0$ 有一个解 $y=\cos 2x$，则对于初始条件 $y(0)=2$，该方程的特解是（　）

   (A) $2\cos 2x$　(B) $1+\cos 2x$　(c) $2+\sin 2x$　(D) $2\cos x$

3. 二元函数 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点 $O(0,0)$ 处（　）

   (A) 偏导数不存在且不连续　(B) 连续，但是偏导数不存在

   (c) 偏导存在，但是不连续　(D) 连续且偏导存在，但不可微

4. 设 A 为三阶方阵，方程组 AX=0 的解空间维数为 2，则（　）

   (A) AX=0 的解都是 $A^*X=0$ 的解

   (B) $A^*X=0$ 的解都是 AX=0 的解

   (C) 方程组 $A^*X=0$ 的解空间维数为 1

   (D) 方程组 $A^*X=0$ 的解空间维数为 2

填空题（6*5 分）

1、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}$，$I$ 为三阶单位矩阵，则 $|A^{-1}+I|$=________。

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 x=________。

3、定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$________。

4、逐次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 在更换积分次序后的形式为 $I=$________。

5、空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}z=3x^2+y^2\\ z=1-x^2\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程为 ________。

6、微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 ________。

计算题（10*10 分）

1、设三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的自变量满足方程 $g(x^2, e^y, z) = 0$ 和 $y = x^3$，其中 g 具有连续偏导数，求 $\dfrac{du}{dx}$。

2、假设金属板上点 (x, y) 的温度为 $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$，一直蚂蚁在板上沿着圆周 $x^2 + y^2 = 25$ 移动，它所遇到的最高温度和最低温度分别是多少？

3、判断矢量场 $F = 2xe^y + ze^x, x^2e^y, e^x$ 是否为梯度场，如果不是，说明理由；若果是，求出其势函数 u。

4、三个半径均为 R 的圆柱体的对称轴两两正交于同一点。使用重积分计算这三个圆柱体的交集 Ω（指重叠部分）的体积值 V。

5、计算 $I = \int_L xdy - ydx$，其中 L 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (z \geq 0)$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = x$ 的交线，从 z 轴正向向下看，L 取逆时针方向。

6、证明：（1）数列 x_n 收敛的充分必要条件为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 收敛；

（2）数列 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2 \cdots)$ 是收敛数列.

7、张三与李四参加秋季田径运动会的百米赛，分在同一小组，成绩都是 12 秒。使用数学方法计算：在比赛中的某一时刻他们的速度相同。

8、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 C 和对角矩阵 Λ，使得矩阵 $C^TAC = \Lambda$。

9、计算方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$ 的通解。

10、已知三个向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ 的秩依次为 3,3,4，试分析向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, -\alpha_4\}$ 的秩的大小。

2007 年数学真题

选择题（4*5 分）

1. 设函数 $f(x-2)=x^2-1, g(f(x))=\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $g(3)=($　$)$

(A) -3　　(B) 1　　(c) 0　　(D) -2

2. 设正向级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。则 (　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

3. 与空间曲线 $C:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在 t=0 所对应的点的切矢量垂直的矢量是 (　)

(A) $\{1,1,-1\}$　　(B) $\{1,1,1\}$

(c) $\{1,-1,1\}$　　(D) $\{3,2,1\}$

4. 设非零矩阵 A 为 n 阶方阵，其秩为 $r(A)<n$，下列选项中不正确的是 (　)

(A) 行列式 $|A|=0$

(B) 方程组 $A^*X=0$ 有非零解

(C) 伴随矩阵 A^* 的秩为 $n-r(A)$

(D) 伴随矩阵 A^* 的秩为 0 或 1

填空题（6*5 分）

1、设向量组 α,β,γ 线性无关，向量组 $\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma, 3\gamma+\alpha$ 线性相关，则 $k=$________。

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，则参数 a 和 b 分别等于 ________。

3、函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}((2+x)e^{1/x}-x)=$________。

4、设 $f(x,y)=x^3y+\dfrac{\sin\pi y}{x^2+y^2}$，则偏导数 $f_x'(2,1)=$________

5、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n}x^{2n}, |x|<1$ 的和函数 $S(x)=$________

6、设椭圆 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的长为 a，则 $\int_L(3x^2+2xy+4y^2)ds=$________。

计算题（10*10 分）

1、研究数列 $x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$ 的敛散性。

2、判定数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 的敛散性。

3、设参变量函数为 $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

4、求微分方程 $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 的解。

5、设有质量为 m 的非均匀球体 $T : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$，其上任意一点 $M(x, y, z)$ 的密度与该点到球心的距离成正比，计算球体关于其直径的转动惯量。

6、假设地球赤道是一个圆周，对于该圆周上的点的连续函数，例如温度函数，证明：在这个赤道内必有一条直径，它的两个端点的温度相同。

7、计算线积分 $I = \int_L (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$，其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$，从 z 轴正向看，L 的方向取逆时针方向。

8、四阶矩阵 A 满足 $A^2 = 4E$，E 为单位矩阵。已知 $|A| < 0$，求矩阵 A 的伴随矩阵的一个正的特征值。

9、若二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2_1x_3$ 是正定的，求 t。

10、已知方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 中的列向量 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$。如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，求解线性方程组 $AX = \beta$

2008 年数学真题

填空题（5*4 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+4^n+6^n)^{\frac{1}{n}}=$________。

2、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+x^{99})\sin^2 x dx=$________。

3、设 A 为三阶方阵，$|A|=2$，则 $\|A^*|A|=$________。

4、$|A_{5\times5}=2$，则 A^* 的秩 $r(A^*)=$________。

5、设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r=3,n=5$，且 $AX=b$ 有解，则其线性无关的解的个数为 ________。

选择题（5*4 分）

1. 设 $\phi(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & x\geq 0\end{cases}$,$\psi(x)=\begin{cases} \sin x & x\geq 1 \\ 0 & x<1\end{cases}$ 则 $\psi(\phi(x))$ 为（ ）

(A) $\begin{cases} \sin x^2 & x\leq -1 \\ 0 & -1<x<0 \\ \sin 1 & x\geq 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases} \sin x^2 & x\leq -1 \\ 1 & -1<x<0 \\ 0 & x\geq 0\end{cases}$

(c) $\begin{cases} \sin 1 & x\leq -1 \\ 0 & -1<x<0 \\ \sin x^2 & x\geq 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases} \sin x^2 & x\leq -1 \\ \sin 1 & -1<x<0 \\ 0 & x\geq 0\end{cases}$

2. $y''-6y'+9y=0$ 的通解形式为（ ）

(A) $c_1x^2+c_2xe^{3x}$　(B) $e^{3x}(c_1+c_2x)$

(c) $c_1e^{3x}+c_2$　(D) $c_1xe^{3x}+c_2$

3. 设 $f'(\ln x)=1+x,x>0$，则 $f(x)=($ $)$

(A) $\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$　(B) $x+\frac{x^2}{2}$

(c) $x+e^x+c$　(D) $\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+c$

4. 设 A,B 为 n 阶方阵，且 $r(A)=r(B)$，则（ ）

(A) $r(A-B)=0$　(B) $r(A^{-1})=r(B^{-1})$

(c) $r(A\vdots B)=2n$　(D) $r(A\vdots B)\leq n$

5. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵的充要条件为（ ）

(A) 所有 K 级子式 $>0,K=1,2,\cdots,n$　(B) A 的全体特征值 ≥ 0

(c) A^{-1} 为正定矩阵　(D) $r(A)=n$

计算题（10*10 分）

1、设 $\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{\xi}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$ ，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

2、求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

3、求微分方程 $(x+1)y'-\alpha y=e^x(x+1)^{\alpha+1}$ 的通解，其中 $\alpha\neq 0$ 为常数。

4、计算 $\int\frac{1}{1+e^x}dx$。

5、设某种商品的单价为 P，售出的商品数量 Q 可表示为 $Q=\frac{a}{b+P}-c$，其中 a,b,c 均为正常数，且 $a>bc$

(1) 求销售额随 P 变化的增减区间；

（2）要使销售额最大，商品单价 P 应取何值?

6、设 $A=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1}

7、设 $A=\begin{bmatrix} 3&0&1\\ 2&-1&0\\ 1&2&1 \end{bmatrix}$，且 $AB+I=A^2-B$，其中 I 为三阶单位矩阵，求 B。

8、求非退化线性变换将 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 化为标准型，并求其秩，正惯性系数，负惯性系数。

9、讨论 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1\\ 3x_1-x_2-3x_3=2\\ 2x_1+x_2+ax_3=b \end{cases}$ 有唯一解，有无穷多解，无解，当有无穷多解时，求出方程组的全体解。

10、$\alpha_1=[2,1,3]^T,\alpha_2=[3,2,-5]^T,\alpha_3=[1,1,1]^T$ 是否为三维向量空间的一个基底？若是，求 $\alpha=[6,2,-7]^T$ 在该基底下的坐标。

证明题（10*10 分）

1、设 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续，在 (0,1) 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$，证明至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$。

2、设 $A=\begin{bmatrix} a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22} \end{bmatrix}$ 可逆且 $a_{11}+a_{22}=0$，问 A 是否可对角化？若可对角化给出证明，若不可对角化试举出反例。

2009 年数学真题

（回忆版中含有概率论，不确定是否真题，当练习题用）

填空题

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=$ ________。

2、已知函数 $f(x)=x^6+3x^4+x+9$，则 $f^{(6)}(x)=$ ________。

3、交换二次积分次序：$\int_1^2 dx\int_0^{4-x} f(x,y)dy=$ ________。

4、若向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(2,2,4),\alpha_3=(1,3,t)$ 线性相关，则 t=________。

5、矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ 的秩等于 ________。

6、设 A,B 为 3 阶方阵，$det(A)=3,det(B)=-2$，则 $det(-2A^TB^{-1})=$ ________。

7、$xy''+2x^2y^2+x^3y=x^4+1$ 是 ________ 阶的微分方程。

8、已知 $y=1,y=x,y=x^2$ 是某二阶非其次线性方程的三个解，则该方程的通解为 ________。

(回忆题中 9，10 题为概率题，此处不做整理)

选择题

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，其单调递增区间为 (　　)。

   (A) $(-\infty,0]$　　(B) $[0,+\infty)$　　(c) $(-\infty,+\infty)$　　(D) $(-2,2)$

2. 函数 $f(x)=e^{-e^2}$ 的原函数是 (　　)。

   (A) e^{-x^2}　　(B) $-2xe^{-x^2}$

   (c) 不存在　　(D) 存在但无法用初等函数表达出来

3. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积为 ________。

   (A) πab　　(B) πa^2b　　(c) πab^2　　(D) $\dfrac{1}{2}\pi ab$

4. 反常积分 $\int_0^\infty \dfrac{1}{x^p}dx$ 在 (　　) 下收敛。

   (A) $p\le 1$　　(B) $p\ge 1$　　(c) $p>1$　　(D) $p<1$

5. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ =(　　)。

   (A) 0　　(B) 1

   (c) 不存在　　(D) 存在但无法计算出来

6. 由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的立体图形在 xOy 平面上的投影可表示为 (　)。

(A) $x^2+y^2\le 1$　　(B) $fczax^2+y^2\le 1z=0$

(c) $x^2+y^2=1$　　(D) $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 (　) 线性相关。

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(c) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

8. 若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_2+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 存在基础解系，则 λ =(　)。

(A) 2　　(B) 3　　(c) 4　　(D) 5

9. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 是 (　)。

(A) 正定的　　(B) 负定的　　(c) 不定的　　(D) 半正定的

(回忆题中 10 题为概率题，此处不做整理)

计算题

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$。

2、计算 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x,x=-1,y=1$ 所围成的平面闭区域。

3、求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值及所有特征向量。

2010 年数学真题

（回忆版中含有概率论，不确定是否真题，当练习题用
且题目与 04 年题目一样）

填空题

1、设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，则 A=________。

2、$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$ 的第一类间断点为 ________。

3、$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^n}{n\ln^2 n}x^{2n-1}$ 的收敛域为 ________。

4、$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}$ =________。$(a_i\neq 0, i=1,2,3,4)$

5、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&4&5\end{bmatrix}$，B 为三阶方阵，且满足 $A^2-AB=I$，则 $r(AB-BA+\Lambda)=$ ________。

选择题

1. 设 $G(x)$ 是 $g(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数，则 $g(x)+G(x)$ 在 (a,b) 上（　）

(A) 为初等函数　　(B) 可导

(c) 连续　　(D) 存在原函数

2. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)<0, f''(x)<0, \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则当 $\Delta x<0$ 时有（　）

(A) $\Delta y>dy>0$　　(B) $\Delta y<dy<0$

(c) $dy>\Delta y>0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

3. 设曲线积分 $\int\dfrac{-2xf(x)}{1+x^2}ydx+f(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 连续且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$(　)

(A) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(B) $\dfrac{1}{x^2}$

(c) $1+x^2$　　(D) x^2

(回忆题中 4，5 题为概率题，此处不做整理)

计算题

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\cot x}$。

2、设 $z=f(\phi(x)-y,x+\psi(y))$，其中 f 具有二阶偏导数，ϕ 和 ψ 可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、设 $f(x)=(x-a)^n\phi(x)$，$\phi(x)$ 在 a 的邻域内有 n-1 阶连续导数，求 $f^{(n)}(a)$。

4、一个月产 300 桶原油的油井，在 3 年后将要枯竭，预计从现在开始 t 个月后，原油价格将是每桶 $p(t)=18+0.3\sqrt{t}$（美元），设原油一生产出就被售出，问：从这口井可以得到多少美元的收入？

5、在曲线 $y=x^2$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围面积为 $\dfrac{1}{12}$，求切点 A 的坐标及此切线方程。另对 $y=x^2(0\le x\le 1), y=1$ 和 $x=0$ 围成的平面图形 D 绕 $x=1$ 旋转而成的旋转体，求其体积。

6、求曲线积分 $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$，若从 x 轴正向看去，这圆周取逆时针方向。

7、将函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2; \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 2<x<4. \end{cases}$，在 $(0,4)$ 上展开为余弦函数。

8、设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，有 $A^*X=A^{-1}-4X$，求 X（A^* 为 A 的伴随矩阵）

2014 年数学真题

填空题

1、极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}=$________。

2、$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}=$________。

3、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

4、设 $z=xy\ln(x+y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}=$________。

5、设 $y=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (　)

(A) 无穷大量　　(B) 有界量但非无穷小量

(c) 无穷大量　　(D) 无界但非无穷大量

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ 等于 (　)

(A) $f(x)$　　(B) $f(x)dx$　　(c) $f(x)+c$　　(D) $f'(x)dx$

3. 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 (　)

(A) 点 x_0 处取得极大值　　(B) 点 x_0 某邻域内单调增加

(c) 点 x_0 处取得极小值　　(D) 点 x_0 某邻域内单调减少

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 (　)

(A) (-3,3)　　(B) (-2,4)　　(c) (-4,2)　　(D) (-2,2)

5. 直线 $L:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi:4x-2y-2z=3$ 的关系是 (　)

(A) 平行　　(B) 直线 L 在平面 π 上

(c) 垂直相交　　(D) 相交但不垂直

计算题

1、求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间和极值。

2、求定积分 $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$。

3、设 $f(x)=\ln(1+x)^x$, 求 $f^{(30)}(x)$。

4、设 $z=f(xy)$，其中 f 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

5、证明不等式：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$。

6、设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$。

7、将函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数，并求出收敛区间。

证明题

1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶连续可导，$f(a)=0$，证明：$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2dx$。

证明:

$f(x)=\int_a^x f'(t)dt$

$f^2(x)=[\int_a^x f'(t)dt]^2$

$\leq \int_a^x 1^2dt\times\int_a^x [f'(t)]^2dt=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt$ （柯西积分不等式）

两边分别对 x 积分，积分区间 (a,b)，得到：

$\int_a^b f^2(x)dx \leq \int_a^b \{(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt\}dx$

对等式右边处理：

$$\begin{aligned}\int_a^b \{(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt\}dx &= \int_a^b \{\int_a^x [f'(t)]^2dt\}d\frac{(x-a)^2}{2}\\ &= \{\frac{(x-a)^2}{2}\int_a^x [f'(t)]^2dt\}\mid_a^b - \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}[f'(x)]^2dx\\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx - \int_a^b [f'(x)]^2\frac{(x-a)^2}{2}dx\end{aligned}$$

证毕

2、设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0, \max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x)=2$，证明：$\min\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x)\leq -16$

证明:

设最大值点为 $x=a$，

$\because$ 最大值为 2，两端为 0

$\therefore$ 最大值点在区间内部，并且为极大值

$\therefore f(a)=2, f'(a)=0$

$f(x)$ 在 a 点的泰勒展开为 $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi),\quad \xi\subseteq[a,x]$

$$=2+\frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi),\quad \xi\subset[1,2]$$

$$\therefore \begin{cases} f(0) = 2 + \dfrac{a^2}{2} f''(\xi_1) = 0 & \xi \subset [1,a], \\ f(1) = 2 + \dfrac{(1-a)^2}{2} f''(\xi_2) = 0. & \xi \subset [a,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f''(\xi_1) = -\dfrac{4}{a^2} & \xi \subset [1,a], \\ f''(\xi_2) = -\dfrac{4}{(1-a)^2} & \xi \subset [a,1] \end{cases}$$

$\therefore$ 当 0<a<1/2 时，存在 ξ_1，使得 $f''(\xi_1) < -16$;

当 1/2<a<1 时，存在 ξ_1，使得 $f''(\xi_2) < -16$;

当 a=1/2 时，存在 ξ_1,ξ_2，使得 $f''(\xi_1) = f''(\xi_1) = -16$

总结得，一定存在 $x \subset [0,1]$ 使得 $f''(x) \leq -16$

证毕

2015 年数学真题

选择题（4*5 分）

1. 函数 $f(x,y)=y^2+\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处（ ）

(A) 连续，但是偏导数都不存在

(B) 对 y 的偏导数存在，对 x 的偏导数不存在

(C) 沿任何方向的导数都不存在

(D) 偏导数存在但是不可微

2. 函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi\le x<0 \\ \pi-x & 0\le x\le\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶展开在 $x=-2\pi$ 处值为（ ）

(A) 1 (B) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (D) 2π

3. 设函数 $u=xy^2z^3$，则 $div(grad\ u)|_{(1,1,1)}$=( )

(A) 4 (B) 6 (c) 8 (D) 0

4. 设向量组 $\alpha=(1,2,3),\beta=(3,-1,2),\gamma=(2,3,a)$ 线性相关，则 a=( )

(A) 1 (B) 2 (c) 4 (D) 5

填空题（6*5 分）

1、函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\sin x}{cx})^{\frac{1}{1-\cos x}}$ =________。

2、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sin t \\ y=\ln\cos t \end{cases}$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$ 所确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}$ =________。

3、函数 $u=x^2+y^2-3xz+z^4$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 $\vec{n}=(1,2,2)$ 方向的方向导数为 ________。

4、曲面 $x^2+ye^z-\ln(z+1)=0$ 在点 $M(1,1,0)$ 处的切面方程为 ________。

5、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;$AB+I=A^2$ 则 B=________。

6、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 正定，则 a 应满足 ________。

计算题（10*10 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数，且 $f''(x)<0$，证明：$\int_a^b f(x)dx \le f(\frac{a+b}{2})(b-a)$。

2、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $f(x)$。

3、设二阶连续可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$ 且 $f'(x)-x\int_0^1 f(tx)dt-2e^{-x}=0$，求 $f(x)$。

4、设 $z=f(xg(y),x-y)+yg(\frac{x}{y})$ 其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5、设曲线 L 是 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上从点 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$ 的圆弧，求 $I=\int_L \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+1}}dx+(2x+3y^2\sqrt{x^2+1})dy$。

6、设 D 为由直线 $y=0,y=1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 围成的区域，求 $I=\iint\limits_D x^2ydxdy$。

7、已知函数 $u=\ln(xyz^3)$，在第一卦限球面：$x^2+y^2+z^2=5r^2\quad x,y,z,r>0$

(1) 求函数在 u 的条件极大；　(2) 由 (1) 证明对任意实数 a,b,c>0，存在 $abc^3\le 27(\frac{a+b+c}{5})^5$

8、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ b & c & 0\end{bmatrix}$，

(1)a,b,c 满足何关系时，A 是可逆矩阵；

(2)a,b,c 为何值时，A 为对称矩阵；

(3)a,b,c 为何值时，A 为正交矩阵。

9、设方程组 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 7 & -4 & 11\end{bmatrix}X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ a\end{pmatrix}$ 有无穷多解，求 a 与通解。

10、用正交变换 $x=cy$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3-2x_1x_3$ 化为标准型并求矩阵 C。

2016 年数学真题

选择题（4*5 分）

1. 设 $f'(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{|x|}=1, f'(0)=0$，则（ ）

   (A) $f(0)$ 是极大值

   (B) $f(0)$ 是极小值

   (C) $(0,f(0))$ 是拐点

   (D) $f(0)$ 不是极值，$(0,f(0))$ 也不是拐点

2. $x^2\tan x$ 是 $f(x)$ 原函数，则 $\int xf'(x)dx$ 是（ ）

   (A) $x^2+x^2\tan x+C$ (B) $x^3+x^2\tan x+C$

   (c) $\dfrac{x^3}{\cos x}+x^2\tan x+C$ (D) $\dfrac{x^3}{\cos^2 x}+x^2\tan x+C$

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，下列一定发散的是（ ）

   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列线性相关的是（ ）

   (A) $(\alpha_1+\alpha_2)$ $(\alpha_2+\alpha_3)$ $(\alpha_3+\alpha_4)$ $(\alpha_4+\alpha_1)$

   (B) $(\alpha_1-\alpha_2)$ $(\alpha_2-\alpha_3)$ $(\alpha_3-\alpha_4)$ $(\alpha_4-\alpha_1)$

   (C) $(\alpha_1-\alpha_2)$ $(\alpha_2+\alpha_3)$ $(\alpha_3+\alpha_4)$ $(\alpha_4-\alpha_1)$

   (D) $(\alpha_1+\alpha_2)$ $(\alpha_2-\alpha_3)$ $(\alpha_3+\alpha_4)$ $(\alpha_4-\alpha_1)$

填空题（6*5 分）

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cos[2\pi e(n!)]=$________。

2、求函数 $f(x,y)=x^{2\tan y}+\arctan\dfrac{y-e}{\sqrt{x}}$ 在点 $(1,e)$ 处的全微分 ________。

3、求 $\begin{cases}2x+xy-z=0\\ z=\dfrac{x^2}{2}+y^2\end{cases}$ 在点 $(0,2,4)$ 处切线方程 ________。

4、若将 $f(x)=\pi-x\ (0\le x\le\pi)$ 展成正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 则 $b_4=$________。

5、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 正交标准基，则向量 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 与 $\beta=\alpha_2+2\alpha_3$ 的夹角为 ________。

6、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&t&1\\ t&2&0\\ 1&0&1-t\end{bmatrix}$ 正定，t 的范围是 ________。

计算题

1、设 $f(x)=\begin{cases} x\cdot arccot\ x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(1) 讨论 $f'(x)$ 在 x=0 处连续性；

(2) 求 $f''(0)$。

2、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 可微，且 $f(a)=0, f(b)=1$，证明：存在 ϵ,η，使得 $\dfrac{1}{f'(\epsilon)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$，且 $\epsilon\neq\eta$。

3、$f''(x)<0$，n 为自然数，证明 $\int_0^1 f(x^n)dx\leq f(\dfrac{1}{n+1})$

4、椭球面 $S=2x^2+2y^2+z^2$，上一点，使得 $f(x,y,z)$ 在该点的 $\vec{n}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大，并求出最大方向导数。

5、设 L 为逆时针圆周 $(x-1)^2+y^2=a^2$ $(a>1)$ 求 $I=\int_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$。

6、计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2zdydz+zy^2dzdx-(x+y-1)z^2dxdy$ 其中 S 是 $z=1-x^2-y^2$ $(0\leq z\leq 1)$ 上侧。

7、$f(x)$ 满足 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)dt=x^2+e^x-f(x)$，求 $f(x)$

8、三维向量 $\vec{a}$ 在基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下的坐标为 $[1,2,1]^T$，求 $\vec{a}$ 在基底 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2)$ 下的坐标。

9、线性方程 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-1 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$，求 a 取何值时：

(1) 方程有唯一解；

(2) 方程有无穷多解；

(2) 方程无解。

10、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2x_3+ax_3^2$ 可用正交变换 $x=Cy$ 化成标准型 $2y_1^2+by_2^2-y_3^2$，求参数 a,b 及矩阵 C。

2017 年数学真题

（回忆版题目不全，且题目乱，看附图）

填空题

选择题

计算题

1、设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在原点可微。

2、讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性。

证明题

11. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在原点处可微

12. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性

13. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，满足 $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$，$\forall x\in[0,1]$

证明：$\int_0^1 f^2(t)\,dt \geq \frac{1-x^2}{2}$，$\forall x\in[0,1]$　证明：$\int_0^1 f^2(t)\,dt\geq\frac{1}{3}$

14. 设 $h>0$，函数 $f(x)$ 在 $U(a;h)$ 上具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$，

$f(x)$ 在 $U(a;h)$ 上的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}$

15. 设 $z=f(g(x)-y,\ x+h(y))$，其中 f 具有二阶偏导数，g 和 h 可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

16. 在过 $P(2,1,3)$ 的所有平面中，求出与三个坐标平面所围成的立体体积最小的那个平面的方程

17. 计算 $I=\iint\limits_S\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧

18. 设 R^3 中的两组基为：$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$
$\beta_1=(0,0,-1)^T$，$\beta_2=(1,-1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,0)^T$，⑴. 求从基

向量组 $\alpha_1=(1+\lambda,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1+\lambda,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1+\lambda)^T$ 的秩为2，则____

2018 年数学真题

选择题

1. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{\sin x}} & x\neq\pi \\ 0 & x=\pi \end{cases}$ 在 $x=\pi$ 处（　）。

(A) 左连续　　(B) 右连续

(c) 连续　　(D) 为第一类间断点

2. 级数 a_n 收敛，下列哪项绝对收敛（　）。

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}a_n$　　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}a_n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n(1+n)}$　　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

3. 已知 $y''+y=\sin x$，判断哪项是 y^* 初始解的形式（　）

(A) $y^*=a\sin x$　　(B) $y^*=a\sin x+b\cos x$

(c) $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$　　(D) $y^*=ax\sin x$

(回忆版 4，5 题没有)

填空题

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=$________。

2、求 $y=x+e^x$ 的斜渐近线 ________。

3、计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$。

4、略，，，（参数方程求切线）

5、略，，，（已知两矩阵，求乘积的秩）

计算题

1、$f(x)=\frac{\sin x\ln|x|}{|x-1|}$，求函数的间断点及其类型。

2、$f(x)\neq 0(0<x<1)$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，$[0,1]$ 内连续，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

3、已知 $Z=e^{\frac{x}{y}}\ln\frac{y}{x}$，求 Z'_x,Z'_y 及 dz。

4、已知 $y=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^x e^{-t^2}dx$，讨论函数零点。

5、已知 $V: z\sqrt{x^2+y^2}, z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域，求 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$。

6、求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数。

7、已知 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 所截下部分，取下侧方向，求 $I=\iint\limits_S(1+x^2)dydz+(1-2x)zdxdy$。

8、已知 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\alpha_1=[1\ 4\ 0\ 2]^T,\alpha_2=[2\ 7\ 1\ 3]T,\alpha_3=[0\ 1\ \ -1\ a]T,\beta=[3\ 10\ b\ 4]^T$，$AX=\beta$

(1)a,b 取何值时有解；

(2) 取何值时无解。

9、$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+2x_3+2x_4+6x_5=6 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+3x_4-x_5=4 \end{cases}$，求方程通解。

10、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 可化成标准型 $f=y_1^2+2y_2^2$，求参数 a,b，及变换矩阵 C。

2020 年数学真题

选择题

1. 微分方程 $y''+4y=x\cos 2x$ 的特解形式为（　）

(A) $y''=x[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$ (B) $y''=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$

(c) $y''=x(ax\sin 2x+b\cos 2x)$ (D) $y''=x(ax+b)\cos 2x$

2. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)$. 则下列选项正确的是（　）

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(c) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\mid x\mid+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　）

(A) $f_x'(0,0)$ 存在,$f_y'(0,0)$ 不存在 (B) 沿任何方向的方向导数存在

(c) $f_x'(0,0)$ 不存在,$f_y'(0,0)$ 存在 (D) 连续

4. 关于函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点类型（　）

(A) 没有间断点

(B) 一个第一类间断点，一个第二类间断点

(C) 两个第一类间断点

(D) 两个第二类间断点

5. 对 $m\times n$ 型非线性齐次方程组 $Ax=b$，设 $r(A)=r$，则下列正确的是（　）

(A) 若 $r=m$，则方程组 $Ax=b$ 有解

(B) 若 $r=n$，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解

(C) 若 $m=n$，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解

(D) 若 $r<n$，则方程组 $Ax=b$ 有无穷多解

填空题

1、设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\mid_{(1,0)}=$________。

2、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数为 ________。

3、函数 $u=xe^yz^2$ 在 $M_0(1,0,1)$ 沿方向 $\vec{k}(0,0,1)$ 的方向导数为 ________。

4、交换二次积分的积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=$ ________。

5、设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2+4A+2I=0$，则 $(A+I)^{-1}=$ ________。

计算题

1、证明：当 $x>0$ 时，$e^{x+\frac{1}{2}x^2}>(1+x)^{1+x}$。

2、求 $\sin x$ 与 x 轴围成的平面图形 $(x\in[0,\pi])$ 绕 x 轴旋转一周所造成的旋转体的侧面面积。

3、设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内存在四阶导数，且 $|f^{(4)}(x)\le M$，M 是常数。又因为 $x_1=x_0-h$ 和 $x_2=x_0+h$ 是该邻域内关于 x_0 对称的两点，试证明 $|f''(x_0)-\dfrac{f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)}{h^2}\le\dfrac{M}{12}h^2$。

4、设 $z=f(xg(y),x-y)+yg(\frac{x}{y})$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，g 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5、计算线积分 $I=\int_L\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为由点 $A(-1,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $C(-1,2)$ 的路径，$\overset{\frown}{AB}$ 为下半圆周，$\overline{BC}$ 为直线 $C(-1,2)$。

6、设 ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，求三重积分 $\iiint\limits_{\omega}(x+z)dV$。

7、设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，并满足 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$，

(1) 证明 A 和对角矩阵相似；

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

8、设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$，a,b 为何值时，方程组

(1) 有唯一解；

(2) 无解；

(3) 有无穷多解，并求通解。