Manipulation des Structures Linéaires et Arborescentes en Fonctionnel

Selma BELKADI   Kheireddine OUNNOUGHI   Ryan TAUCH

Sorbonne Université

Méthodes d'Addition des Polynômes

Méthode Naïve

Principe

Additionner les polynômes un par un de manière séquentielle.

Étapes

- Transformer chaque arbre en polynôme.
- Additionner le premier polynôme avec le deuxième.
- Répéter avec le résultat et le polynôme suivant.
- Continuer jusqu'à obtenir un seul polynôme.

Méthode Fusion

Principe

Regrouper tous les arbres en un seul, puis transformer cet arbre en polynôme.

Étapes

- Combiner tous les arbres dans un nœud unique `Add`.
- Convertir le résultat en polynôme.
- Simplifier les termes en les combinant.

Méthode "Diviser pour régner"

Principe

Implémenter une approche "diviser pour régner" **naïve**.

Étapes

- Diviser la liste en deux sous-listes.
- Calculer les polynômes des deux moitiés récursivement.
- Additionner les résultats.

Méthodes de Multiplication des Polynômes

Méthode Naïve

Principe

Convertir les arbres en une liste de polynômes, puis multiplier successivement les termes.

Étapes

- Transformer chaque arbre en polynôme.
- Multiplier le premier polynôme avec le deuxième.
- Répéter avec le résultat et le polynôme suivant.
- Continuer jusqu'à obtenir un seul polynôme.

Méthode Fusion

Principe

Fusionner les arbres en un seul, puis multiplier les polynômes.

Étapes

- Réunir les arbres sous un nœud `Mul`.
- Convertir le résultat en polynôme.
- Simplifier les termnes en les combinant.

Méthode "Diviser pour Régner"

Principe

Diviser la liste des arbres en deux parties, calculer le produits de chacune puis combiner les résultats.

Étapes

- Diviser la liste en deux sous-listes.
- Calculer les polynômes des deux moitiés récursivement et les multiplier.
- Combiner les résultats.

Algorithme de Karatsuba [Karatsuba(1962)]

Principe

Diviser les polynômes en deux parties et calculer 3 produits pour réduire les opérations.

Étapes

- Diviser les polynômes : $A(x) = A_1 x^{n/2} + A_0,\ B(x) = B_1 x^{n/2} + B_0$
- Calculer 3 produits :

$$P1 = A_1 B_1,\ \ P2 = A_0 B_0, P3 = (A_1 + A_0)(B_1 + B_0)$$

- Combiner les résultats :

$$A(x) \times B(x) = P_1 x^n + (P_3 - P_1 - P_2) x^{n/2} + P_2$$

Transformé de Fourier Rapide (FFT) [Cooley and Tukey(1965)]

Principe

Utilise la FFT pour transformer les polynômes en domaine fréquentiel, où leur multiplication devient plus rapide.

Étapes

- Transformer les polynômes en vecteurs de coefficients.
- Appliquer la FFT pour obtenir leur représentation fréquentielle.
- Multiplier les résultats dans le domaine fréquentiel.
- Utiliser l'IFFT pour revenir aux coefficients du produit.

Expérimentations

Comparaison des stratégies d'addition

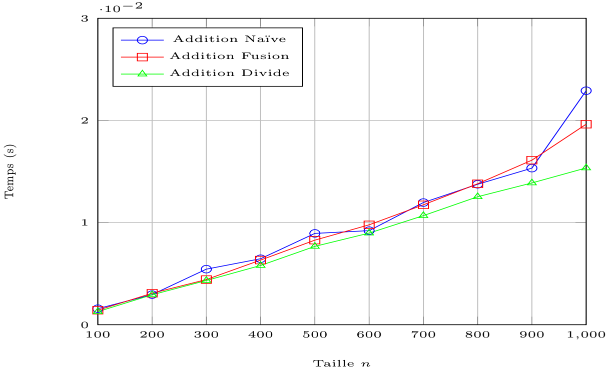

Figure: Performances des méthodes d'addition

Moyennes pour les additions

Opération	**Naïve**	**Fusion**	**Divide**
Addition	0.70082s	0.58028s	**0.56653s**

Table: Temps moyens pour les additions (10 répétitions)

Comparaison des stratégies de multiplication

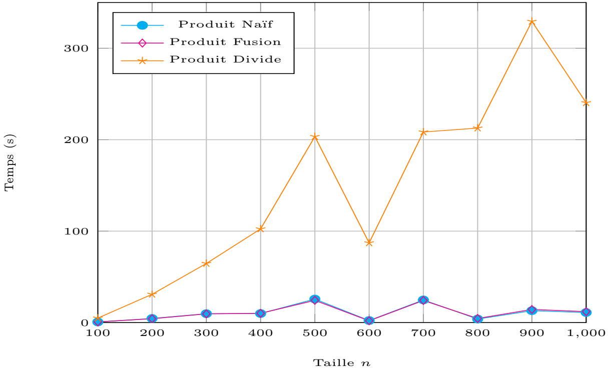

Figure: Performances des méthodes de multiplication

Moyennes pour les multiplications

Opération	**Naïve**	**Fusion**	**Divide**
Produit	4.04708s	**4.00111s**	4.38365s

Table: Temps moyens pour les multiplications (10 répétitions)

J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965. doi: 10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1.

A. A. Karatsuba. Multiplication of large numbers. *Soviet Physics Doklady*, 7:595–596, 1962.