Лабораторная работа №7
Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4 порядка

Цель работы Изучить и применить методы Рунге-Кутты 4 порядка для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений
.

Теоретическая часть

Рассмотрим задачу Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \qquad u\big|_{t=t_0} = u_0 .$$

Для численного решения этого уравнения зададим сетку $\{t_k = t_0 + k\tau,\ k = 0, 1, \ldots, N\}$ с постоянным шагом τ. На этой сетке определим сеточные функции $y_k = u(t_k)$, $f_k = f(t_k, u_k)$.

Метод Рунге-Кутта позволяет строить схемы различного порядка точности. Наиболее известной и широко используемой на практике является схема Рунге-Кутта четвертого порядка точности:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Численный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n)$$

является частным вариантом метода Рунге-Кутта первого порядка точности.

Метод Рунге-Кутта легко обобщается на системы уравнений путем формальной замены скалярных величин $u,\ f(t,u)$ на векторы $\mathbf{u}, \mathbf{f}(t,\mathbf{u})$. Для системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t,\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$$

расчетные формулы имеют вид:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_1\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_2\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + \tau, \mathbf{y}_n + \tau\mathbf{k}_3)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\tau}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

В частности, для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u(t), v(t)) \\ \dfrac{dv}{dt} = g(t, u(t), v(t)) \end{cases}$$

развернутая запись формул схемы Рунге-Кутта имеет вид:

$$k_1 = f(t_n, y_n, z_n), \qquad q_1 = g(t_n, y_n, z_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1, z_n + \frac{\tau}{2}q_1\right), \qquad q_2 = g\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1, z_n + \frac{\tau}{2}q_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2, z_n + \frac{\tau}{2}q_2\right), \qquad q_3 = g\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2, z_n + \frac{\tau}{2}q_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_3, z_n + \tau q_3), \qquad q_4 = g(t_n + \tau, y_n + \tau k_3, z_n + \tau q_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad z_{n+1} = z_n + \frac{\tau}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Здесь через y, z обозначены приближенные сеточные функции, соответствующие функциям $u(t), v(t)$ соответственно.

Шаг интегрирования в методах Эйлера и Рунге-Кутта следует выбирать достаточно малым, чтобы обеспечить устойчивость и требуемую точность расчета.

Априорные оценки точности для выбора шага τ на деле не используются по следующим причинам. Во-первых, они чрезвычайно громоздки и включают производные, которые до начала расчета не известны, во- вторых, эти оценки являются мажорантными и могут во много раз превосходить фактическую ошибку расчета.

Поэтому основным практическим приемом является *апостериорная оценка точности*. Для ее получения расчет проводят на двух сетках с шагом τ и $k\tau, k > 1$, затем применяют правило Рунге. Если численные решения на двух сетках обозначить через $y(t;\tau)$ и $y(t;k\tau)$, то погрешность решения на сетке с меньшим шагом оценивается по формуле

$$\delta(t;\tau) \approx \frac{y(t;\tau) - y(t;k\tau)}{k^p - 1},$$

где p - порядок точности схемы.

Задание

1. Согласно своему варианту (приложение 1) решить систему дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и методом Эйлера. Требуемая точность 0,001.
2. Определите функции, входящие в правую часть системы уравнений.
3. Задайте исходные данные для решения задачи Коши.
4. Используя ранжированные переменные, составьте программу численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта и методом Эйлера.
5. Вычислите решение методами Рунге-Кутта и Эйлера.
6. Сравните полученные решения, изобразив их на одном графике.

Приложение 1.

Вариант 1 $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1),\ y(0)=1,$ $x \in [0;1,8].$	Вариант 2 $xy' - 2y = x^3,\ y(1)=1,\ x \in [1;1,6].$
Вариант 3 $(1+x^2)y' - y = 1,\ y(0)=1,$ $x \in [0;0,55].$	Вариант 4 $y' - y = e^{2x},\ y(0)=0,$ $x \in [0;0,55].$
Вариант 5 $y' + y\cos x = \sin x \cos x,$ $y(0)=1,\ x \in [0;0,6].$	Вариант 6 $y' = e^{2x} + y,\ y(0)=0,$ $x \in [0;1,2].$
Вариант 7 $xy' + y = 3,\ y(1)=0,$ $x \in [1;1,55].$	Вариант 8 $y' + y = 3x - 2,\ y(1)=1,$ $x \in [1;1,65].$
Вариант 9 $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$ $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right].$	Вариант 10 $y' + y\mathrm{tg}x = \cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},$ $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right].$
Вариант 11 $xy' + y = \sqrt{x},\ y(1)=1,$ $x \in [1;1,7].$	Вариант 12 $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0)=1,$ $x \in [0;0,6].$

Вариант 13 $y' - y\,\mathrm{ctg}x = 2x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$.	Вариант 14 $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$, $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.
Вариант 15 $y' + y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right),\ y(1) = 1$, $x \in [1;1,6]$.	Вариант 16 $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$, $x \in [1;1,55]$.
Вариант 17 $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0) = \frac{2}{3}$, $x \in [0;1,6]$.	Вариант18 $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1$, $x \in [1;2,5]$.
Вариант 19 $(x+2)y' + y = x^3,\ y(1) = 2$, $x \in [1;2,3]$.	Вариант 20 $y' + 3x^2 y = x^3 e^{-x^3}$, $y(0) = 1$, $x \in [0;0,7]$.
Вариант 21 $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2}$, $x \in [-1;0]$.	Вариант 22 $y' - y = 1 - e^x,\ y(1) = 1$, $x \in [1;1,6]$.
Вариант 23 $xy' = e^x - y,\ y(1) = e$, $x \in [1;2,3]$.	Вариант 24 $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x},\ y(1) = 0$, $x \in [1;1,8]$.
Вариант 25 $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x},\ y(1) = 0$, $x \in [1;1,55]$.	Вариант 26 $y' - \frac{2y}{x} = 1 + \frac{1}{x},\ y(1) = 1$, $x \in [1;2,4]$.