

RECONSTRUCTION AGNOSTIQUE DE LENTILLES GRAVITATIONNELLES DE TYPE GALAXIE-GALAXIE

par

Alexandre Adam

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)

Département de physique
Université de Montréal

Résumé

Abstract

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Acronymes	viii
Liste des symboles	ix
Remerciements	xi
1 Introduction	1
1.1 Lentilles gravitationnelles	1
1.1.1 Les angles de déflexions	2
1.1.2 L'équation de la lentille	4
1.2 Simulation magnétohydrodynamiques	6
1.2.1 Densité de masse projeté avec lissage adaptif	7
1.3 Apprentissage machine	7
1.3.1 Réseaux de neurones convolutionnels	7
1.3.2 Réseaux de neurones récurrents	7
1.3.3 Auto-encodeur variationnel	7
1.3.4 Transfert de l'apprentissage	7
1.4 Formalisme des problèmes inverses	7

1.5	Contexte scientifique	7
	Bibliographie	8

Liste des tableaux

Liste des figures

1.1	Schéma d'une lentille gravitationnelle.	4
1.2	Carte des galaxies prise par le Sloan Digital Sky Survey telescope montrant le niveau d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers local. Chaque point est coloré par le niveau de densité local.	6

Acronymes

RIM Machine à inférence récurrentielles.

Liste des symboles

$\mathbb{1}_n$ Matrice identité de taille $n \times n$.

À Maman et Julia

Remerciements

Chapitre 1

Introduction

- Paragraphe qui décrit le paradigme dans lequel la recherche se conduit. Donc matière noire, questions sur sa nature, rôle des lentilles gravitationnelles pour révéler cette masse par la distortion
- Mentionner la motivation générale de notre recherche

La recherche présentée dans ce mémoire approche le problème de cartographier la masse gravitationnelle de galaxies-lentilles de façon agnostique. C'est-à-dire que l'on ne suppose pas de modèle analytique simple pour résoudre le problème de reconstruction non-linéaire et mal posé. Plutôt, cette recherche exploite le cadre des machines à inférence récurrentielles (RIM) pour encoder des biais inductifs dans un réseaux de neurones qui vont rendre l'inférence de paramètres dans un espace à très haute dimension efficace et précise.

Avant de décrire ce travail, je vais introduire les concepts et les motivations nécessaires pour contextualiser ma recherche. En premier lieu, je vais décrire le concept de lentille gravitationnelle à la section 1.1. Ensuite, je vais décrire quelques concepts liés à l'extraction de profils de masses provenant de large simulation magnétohydrodynamiques à la section 1.2. Cette section sera suivie d'une introduction rapide à quelques concepts liés à l'apprentissage machine utiles pour ma recherche à la section 1.3. Je vais décrire le formalisme bayésien pour les problèmes inverses qui sous-tend ma recherche à la section 1.4. Finalement, je vais décrire le contexte historique et scientifique qui motive ma recherche à la section 1.5.

1.1 Lentilles gravitationnelles

L'idée des lentilles gravitationnelles est attribuée à Fritz [Zwicky \(1937\)](#) qui, suivant les calculs publiés par [Einstein \(1936\)](#) l'année précédente, est le premier à postuler correctement que l'anneau d'Einstein produit par la déflexion de la lumière d'une source en arrière plan par le champ gravitationnel d'une galaxie (appelée nébuleuse extra-galactique à l'époque) pourrait être observé. Une idée qu'Einstein lui-même considérait improbable. Dans le même article, il articule précisément

les idées qui nous motivent encore aujourd’hui (presque 100 ans plus tard) à étudier ces objets, c’est-à-dire que les lentilles gravitationnelles permettent

- d’imager des galaxies trop lointaine pour que l’on puisse les résoudre avec nos télescopes ;
- de mesurer directement la masse gravitationnelle de ces galaxies.

Pour comprendre ces deux points, et dans l’intérêt de rendre ce manuscrit complet, je vais dériver à partir de principes premier les équations centrales qui nous permettent d’étudier les lentilles gravitationnelles décrites par Zwicky. Des traitements similaires peuvent être trouvé dans les manuels de références de [Meneghetti \(2013\)](#) et [Carroll \(2003\)](#).

1.1.1 Les angles de déflexions

Un angle de déflexion est la déviation angulaire apparente d’un point lumineux par rapport à sa position originelle si le chemin du photon n’était pas dévié. Pour rendre les dérivations simples, on sépare les coordonnées en une partie parallèle à l’axe de visée de l’observateur (\mathbf{e}_{\parallel}) et une partie perpendiculaire (\mathbf{e}_{\perp}). L’angle de déflexion se calcule entièrement dans la partie perpendiculaire. Sans assumer la nature de cette déflexion, on peut écrire de façon générale

$$\boldsymbol{\alpha} = - \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_{\parallel} d\lambda, \quad (1.1)$$

où λ paramétrise la trajectoire du photon, et \mathbf{x} est un vecteur de position. Le signe moins nous indique qu’on prend la perspective de l’observateur.

Le principe de Fermat stipule que la lumière suit une trajectoires qui extrémise la durée de son parcours entre deux points. C’est un exemple du principe plus général de moindre action développé par Lagrange. C’est pourquoi le principe de Fermat est formalisé dans le langage du calcul des variations, où la variation de la durée T s’écrit

$$\delta T = \delta \int_A^B n(\mathbf{x}(\ell)) \frac{d\ell}{c} = 0. \quad (1.2)$$

n est un indice de réfraction et ℓ est un élément de longueur sur la trajectoire. Pour déterminer l’indice de réfraction du champ gravitationnel d’une galaxie, on utilise le formalisme de la relativité générale. On fait l’approximation que le potentiel Φ de cet galaxie est celui d’un gas parfait, c’est à dire qu’il satisfait une équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.3)$$

Dans la limite où ce potentiel est faible $\frac{2\Phi}{c^2} \ll 1$, la métrique $g_{\mu\nu}$ est décrite par une expansion au premier ordre autour de la métrique de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \approx \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\mathbf{x}^2. \quad (1.4)$$

Puisqu'un photon suit une géodésique de l'espace-temps $ds^2 = 0$, on peut déterminer n en réarrangeant l'équation (1.4)

$$n = c \left(\frac{\|d\mathbf{x}\|}{dt} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (1.5)$$

On peut alors résoudre l'équation (1.2) en réintroduisant le paramètre de la trajectoire λ

$$d\ell = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right\| d\lambda. \quad (1.6)$$

La trajectoire $\mathbf{x}(\lambda)$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (1.7)$$

où $\mathcal{L} = n(\mathbf{x})\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}$. On a donc

$$\frac{d}{d\lambda} n \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} - \|\dot{\mathbf{x}}\| \nabla n = 0, \quad (1.8)$$

Puisque le choix du paramètre λ est libre, on peut le choisir tel que $\|\dot{\mathbf{x}}\| = 1$ en tout point de la trajectoire. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} n \dot{\mathbf{x}} - \nabla n &= 0 \\ \implies n \ddot{\mathbf{x}} + (\nabla n \cdot \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} - \nabla n &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

À ce point de la dérivation, on utilise l'approximation de Born. C'est-à-dire qu'on approxime la trajectoire du photon comme une ligne droite sur l'axe de visée \mathbf{e}_{\parallel} . Cette approximation est justifiée dans le contexte des lentilles gravitationnelles, puisque les angles de déflexion sont généralement de l'ordre de l'arcseconde ou plus petit. Comme, le vecteur $\dot{\mathbf{x}}$ est tangent à la trajectoire du photon, on obtient

$$\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_{\parallel} = \frac{1}{n} \nabla_{\perp} n = \nabla_{\perp} \log n \approx -\frac{2}{c^2} \nabla_{\perp} \Phi \quad (1.10)$$

On note que le facteur 2 introduit dans l'équation (1.10) est un effet qui vient de la relativité générale. Ce facteur corrige la solution que l'on aurait obtenu avec une dérivation newtonienne.

On introduit le paramètre d'impact ξ qui est la distance perpendiculaire entre la position d'origine du photon sur le plan de la lentille et l'axe de visé (voir la figure 1.1). Dans le cas où le potentiel est généré par une masse M ponctuelle, c.-à-d. qu'on suppose $\rho = M\delta^3(\mathbf{x})$ où δ est la fonction delta de Dirac, alors le potentiel qui satisfait l'équation de Poisson est la fonction de Green $\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{\xi^2 + z^2}}$, où z est la coordonnée sur l'axe de visée. On a finalement

$$\alpha(\xi) = \frac{2GM}{c^2} \xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\xi^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \xi \quad (1.11)$$

Cette solution se généralise naturellement à un profil de masse quelconque en assumant qu'il s'exprime comme une somme d'éléments de masses $dm = \Sigma d^2\xi'$ où $\Sigma = \int \rho dz$ est une densité surfacique

de masse. L'angle de déflexion total mesuré à un point ξ est alors une convolution sur tout le plan de la lentille (mince) puisque l'équation (1.11) dépend linéairement de la masse M :

$$\alpha(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\xi') \frac{\xi - \xi'}{\|\xi - \xi'\|^2} d^2\xi' \quad (1.12)$$

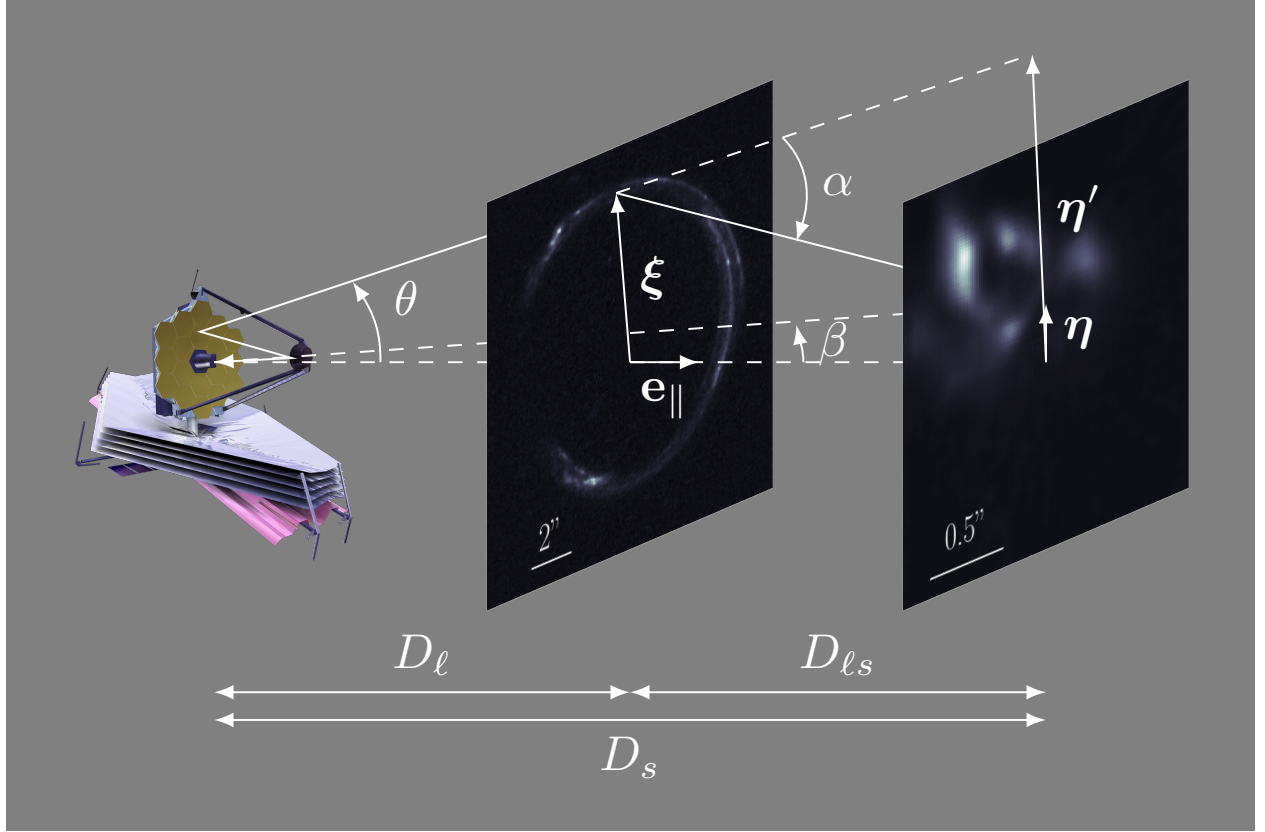


FIGURE 1.1: Schéma d'une lentille gravitationnelle.

1.1.2 L'équation de la lentille

Pour faire une image du plan source, on doit retrouver la position angulaire d'un point lumineux à la source β à partir de sa position angulaire observée θ et de nos connaissances sur la déflexion α . On assume que les distances D_ℓ , D_s et $D_{\ell s}$ sont beaucoup plus grandes que les distances perpendiculaires ξ ou η (voir figure 1.1). Pour les objets qui nous intéressent, les distances parallèles à l'axe de visée sont généralement de l'ordre du Gpc, alors que les distances perpendiculaires sont généralement de l'ordre du kpc, soit 6 ordres de grandeurs de différences. Ainsi, on peut faire l'argument géométrique

$$\begin{aligned}
D_s \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\eta}' \\
D_s \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\eta} \\
D_{\ell s} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\eta}' - \boldsymbol{\eta} \\
\implies D_s \boldsymbol{\beta} &= D_s \boldsymbol{\theta} - D_{\ell s} \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

C'est l'équation maîtresse qui nous permet de tracer les rayons lumineux d'une source vers un détecteur fictif dans nos simulations.

Dans les équations précédentes, on a assumé qu'une longueur physique et l'angle qui sous-tend cette longueur à une certaine distance D sont reliés géométriquement dans un espace euclidien (plat). Or, étant donné les distances cosmologiques (Gpc) parcouru par les photons avant la capture par nos détecteurs, on doit tenir compte du phénomène de l'expansion de l'Univers et en général de sa courbure pour déterminer les distances perpendiculaires réelles. C'est pourquoi on utilise plutôt le concept de distance du diamètre angulaire (de l'anglais *angular diameter distance*) lorsqu'on manipule l'équation de la lentille. On commence par définir cette distance par la relation euclidienne entre une longueur ℓ et un angle observé θ :

$$D \equiv \frac{\ell}{\theta} \tag{1.14}$$

On doit maintenant déterminer comment ℓ et θ se comportent en fonction de la distance. Pour se faire, on doit faire certaines suppositions par rapport à notre Univers. Mon traitement s'inspire des dérivations qu'on peut trouver dans les textes de références de [Dodelson \(2003\)](#), [Carroll \(2003\)](#), [Rindler \(2006\)](#) et [Weinberg \(2008\)](#).

Il est généralement plaisant de commencer cette dérivation en statuant le postulat de Copernic : *il n'existe aucun point de vue privilégié dans l'Univers*. Dans un sens, ce postulat nous encourage à se mettre dans la peau d'un être conscient observant le ciel à partir d'une autre planète, où même d'une autre galaxie. Cet observateur devrait être en mesure de parvenir aux mêmes conclusions que nous sur la structure générale de l'Univers. Il est tout à fait raisonnable de protester que l'environnement proche de cet observateur soit bien différent du notre. Mais, en portant ses observations à grande échelle où les différences locales entre différentes galaxies ou systèmes planétaires disparaissent dans une agrégation statistiques, alors les conclusions de cet observateur devrait s'accorder avec nos conclusions.

Ceci nous mène à postuler le principe cosmologique : *l'Univers est spatialement homogène et localement isotrope*.

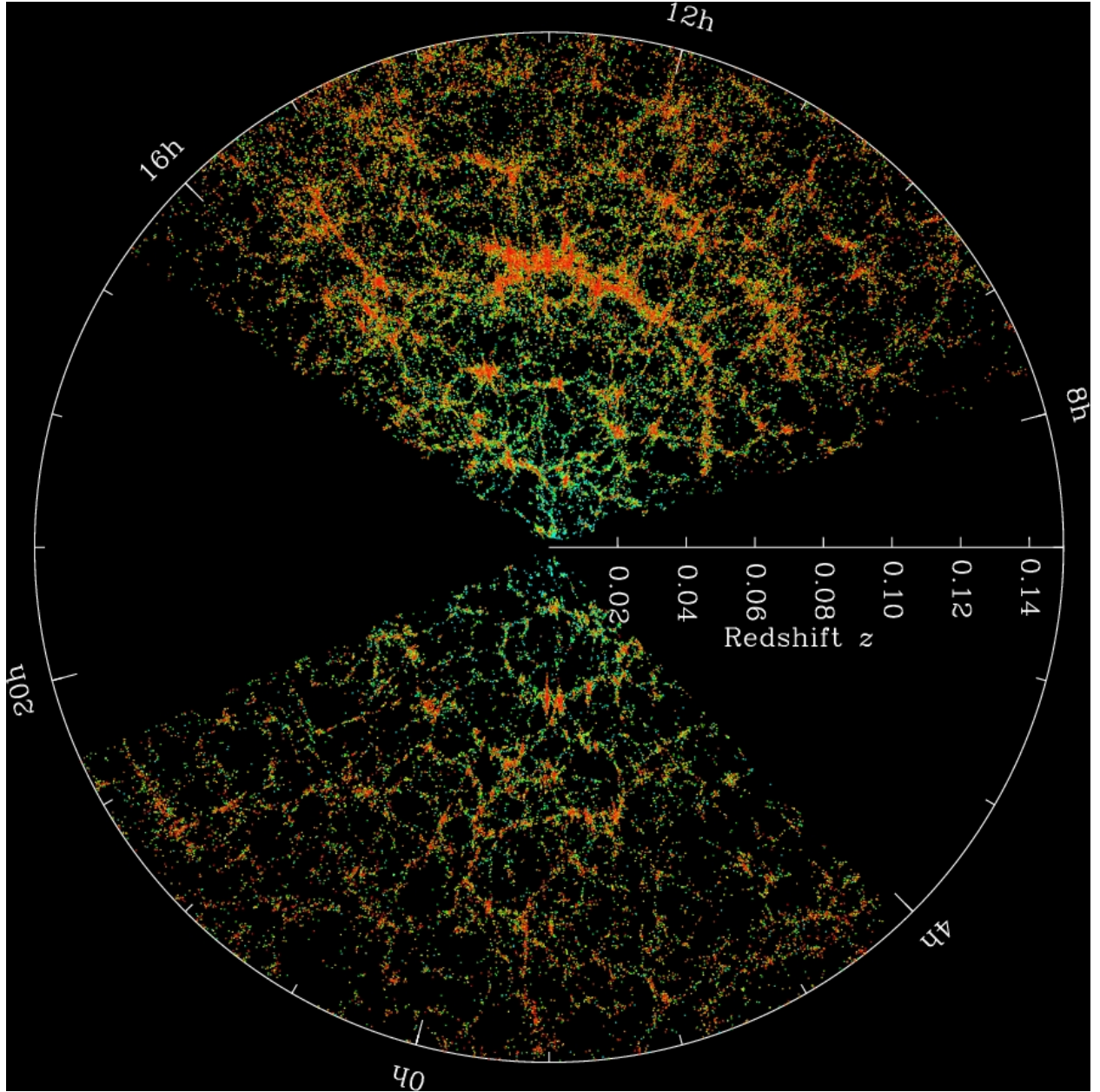


FIGURE 1.2: Carte des galaxies prise par le Sloan Digital Sky Survey telescope montrant le niveau d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers local. Chaque point est coloré par le niveau de densité local.

1.2 Simulation magnétohydrodynamiques

Les détails de ces simulations tombent en dehors du cadre de cette thèse, toutefois on peut noter que plusieurs simulations de haute qualité sont maintenant capable de reproduire plusieurs observables de l'Univers d'aujourd'hui ($z = 0$). Ainsi, on peut utiliser ces simulations pour créer des profils de masses autrement inaccessible par des observations qui sont basées uniquement sur le

champ électromagnétique de l'Univers.

Introduire SPL, main equation.

- Devrait être courte, mais établir le ground work pour SPL
- Décrire généralement les éléments intéressants d'Illustris, et comment en général ce genre de simulations sont pertinentes pour notre travail -> realistic mass models.

1.2.1 Densité de masse projeté avec lissage adaptif

Introduire les concepts nécessaires pour justifié notre utilisation de lissage adaptif pour réduire les erreurs sur les angles de déflexions.

1.3 Apprentissage machine

1.3.1 Réseaux de neurones convolutionnels

Mentionner les travaux de Courville et les avancées récentes.

1.3.2 Réseaux de neurones récurrents

Mentionner les résultats importants concernant Turing machines. Mentionner les détails d'un GRU convolutifs.

1.3.3 Auto-encodeur variationnel

Inclure ici l'appendice de l'article en plus ou moins de détail.

1.3.4 Transfert de l'apprentissage

Introduction générale. Inclure ici l'appendice de l'article ?

1.4 Formalisme des problèmes inverses

1.5 Contexte scientifique

This is a symbol $\mathbb{1}_n$.

Bibliographie

- S. Carroll. *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003. ISBN 0805387323.
- S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. ISBN 978-0122191411.
- A. Einstein. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, 84(2188) :506–507, 1936. doi : 10.1126/science.84.2188.506. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.84.2188.506>.
- M. Meneghetti. *Introduction to Gravitational Lensing*. Springer Cham, 2013. doi : 10.1007/978-3-030-73582-1.
- W. Rindler. *Relativity : Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0198567325.
- S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. ISBN 978-0-19-852682-7.
- F. Zwicky. Nebulae as gravitational lenses. *Phys. Rev.*, 51 :290–290, Feb 1937. doi : 10.1103/PhysRev.51.290. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.290>.