

# RECONSTRUCTION AGNOSTIQUE DE LENTILLES GRAVITATIONNELLES DE TYPE GALAXIE-GALAXIE

par

Alexandre Adam

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)

Département de physique  
Université de Montréal



## Résumé

## Abstract

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Acronymes</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>ix</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Lentilles gravitationnelles . . . . .	1
1.2 Simulation magnétohydrodynamiques . . . . .	1
1.2.1 Densité de masse projeté avec lissage adaptif . . . . .	2
1.3 Apprentissage machine . . . . .	2
1.3.1 Réseaux de neurones convolutionnels . . . . .	2
1.3.2 Réseaux de neurones récurrents . . . . .	2
1.3.3 Auto-encodeur variationnel . . . . .	2
1.3.4 Transfert de l'apprentissage . . . . .	2
1.4 Formalisme des problèmes inverses . . . . .	2
1.5 Contexte scientifique . . . . .	2
<b>Bibliographie</b>	<b>3</b>

A	L'équation de la lentille	4
B	Distance du diamètre angulaire	8

# Liste des tableaux

# Liste des figures

A.1 Schéma d'une lentille gravitationnelle. . . . .	7
---	---



# Acronymes

**RIM** Machine à inférence récurrentielles.

# Liste des symboles

$\mathbb{1}_n$  Matrice identité de taille  $n \times n$ .

À Maman et Julia

## Remerciements

# Chapitre 1

## Introduction

La recherche présentée dans ce mémoire approche le problème de cartographier la masse gravitationnelle de galaxies-lentilles de façon agnostique. C'est-à-dire que l'on ne suppose pas de modèle analytique simple pour résoudre le problème de reconstruction non-linéaire et mal posé. Plutôt, cette recherche exploite le cadre des machines à inférence récurrentielles (RIM) pour encoder des biais inductifs dans un réseaux de neurones qui vont rendre l'inférence de paramètres dans un espace à très haute dimension efficace et précise.

### 1.1 Lentilles gravitationnelles

L'idée des lentilles gravitationnelles est attribuée a Fritz [Zwicky \(1937\)](#) qui, suivant les calculs publié par [Einstein \(1936\)](#) l'année précédente, est le premier à postuler correctement que l'anneau d'Einstein produit par la déflexion de la lumière d'une source en arrière plan par le champ gravitationnel d'une galaxie (appelée nébuleuse extra-galactique à l'époque) pourrait être observé. Une idée qu'Einstein lui-même considérait improbable. Dans le même article, il articule précisément les idées qui nous motivent encore aujourd'hui (presque 100 ans plus tard) à étudier ces objets, c'est-à-dire que les lentilles gravitationnelles permettent

- d'imager des galaxies trop lointaine pour que l'on puisse les résoudre avec nos télescopes ;
- de mesurer directement la masse gravitationnelle de ces galaxies.

### 1.2 Simulation magnétohydrodynamiques

Les détails de ces simulations tombent en dehors du cadre de cette thèse, toutefois on peut noter que plusieurs simulations de haute qualité sont maintenant capable de reproduire plusieurs observables de l'Univers d'aujourd'hui ( $z = 0$ ). Ainsi, on peut utiliser ces simulations pour créer des profils de masses autrement inaccessible par des observations qui sont basées uniquement sur le

champ électromagnétique de l'Univers.

Introduire SPL, main equation.

- Devrait être courte, mais établir le ground work pour SPL
- Décrire généralement les éléments intéressants d'Illustris, et comment en général ce genre de simulations sont pertinentes pour notre travail -> realistic mass models.

### **1.2.1 Densité de masse projeté avec lissage adaptif**

Introduire les concepts nécessaires pour justifié notre utilisation de lissage adaptif pour réduire les erreurs sur les angles de déflexions.

## **1.3 Apprentissage machine**

### **1.3.1 Réseaux de neurones convolutionnels**

Mentionner les travaux de Courville et les avancées récentes.

### **1.3.2 Réseaux de neurones récurrents**

Mentionner les résultats importants concernant Turing machines. Mentionner les détails d'un GRU convolutifs.

### **1.3.3 Auto-encodeur variationnel**

Inclure ici l'appendice de l'article en plus ou moins de détail.

### **1.3.4 Transfert de l'apprentissage**

Introduction générale. Inclure ici l'appendice de l'article ?

## **1.4 Formalisme des problèmes inverses**

## **1.5 Contexte scientifique**

This is a symbol  $\mathbb{1}_n$ .

# Bibliographie

- S. Carroll. *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003. ISBN 0805387323.
- A. Einstein. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, 84(2188) :506–507, 1936. doi : 10.1126/science.84.2188.506. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.84.2188.506>.
- M. Meneghetti. *Introduction to Gravitational Lensing*. Springer Cham, 2013. doi : 10.1007/978-3-030-73582-1.
- F. Zwicky. Nebulae as gravitational lenses. *Phys. Rev.*, 51 :290–290, Feb 1937. doi : 10.1103/PhysRev.51.290. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.290>.

## Annexe A

# L'équation de la lentille

Dans cette section, je dérive les équations centrales qui nous permettent d'étudier les lentilles gravitationnelles de type galaxie-galaxie. Des traitements similaires peuvent être trouvés dans les manuels de références de [Meneghetti \(2013\)](#) et [Carroll \(2003\)](#).

Supposons qu'un photon est sur une trajectoire parallèle à l'axe de visée  $\mathbf{e}_{\parallel}$  d'un observateur sur Terre. Supposons de plus qu'un champ gravitationnel  $\Phi$  a pour effet de courber la trajectoire de ce photon entre son point d'origine  $A$  et son point d'arrivée  $B$ . On définit l'angle de déviation comme la déviation totale de cette trajectoire dans la direction perpendiculaire à l'axe de visée de l'observateur. Selon nos suppositions, cette déviation s'écrit

$$\boldsymbol{\alpha} = - \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_{\parallel} d\lambda, \quad (\text{A.1})$$

où  $\lambda$  paramétrise la trajectoire du photon, et  $\mathbf{x}$  est la position du photon. Le signe négatif nous indique qu'on prend la perspective de l'observateur.

Pour résoudre l'intégrale (A.1), on doit déterminer la forme de la trajectoire des photons dans un champ gravitationnel caractérisé par un indice de réfraction  $n$ . Le principe de Fermat stipule que la lumière suit une trajectoire qui extrêmise la durée du parcours entre deux points. Dans le langage du calcul des variations, la variation de la durée  $T$  s'écrit

$$\delta T = \delta \int_A^B n(\mathbf{x}(\ell)) \frac{d\ell}{c} = 0, \quad (\text{A.2})$$

où  $\ell$  est un élément de longueur sur la trajectoire. Pour déterminer l'indice de réfraction du champ gravitationnel d'une galaxie, on doit utiliser le formalisme de la relativité générale. Selon le principe d'équivalence (fort), l'effet d'un champ gravitationnel est localement indistinguable d'une accélération causée par la courbure de l'espace-temps décrit par une métrique  $g_{\mu\nu}$ . La trajectoire d'un photon se trouve alors en cherchant les géodésiques de cet espace-temps. On fait l'approximation que le potentiel  $\Phi$  d'une galaxie est celui d'un gas parfait, c'est-à-dire qu'il satisfait une équation



de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{A.3})$$

Dans la limite où ce potentiel est faible  $\frac{2\Phi}{c^2} \ll 1$ , la métrique  $g_{\mu\nu}$  est décrite par une expansion au premier ordre autour de la métrique de Minkowsky  $\eta_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \approx \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\mathbf{x}^2. \quad (\text{A.4})$$

Ici, j'ai choisit arbitrairement la signature  $(+, -, -, -)$  pour la métrique. Puisqu'un photon suit une géodésique de l'espace-temps  $ds^2 = 0$ , on peut déterminer  $n$  en réarrangeant l'équation (A.4)

$$n = c \left( \frac{\|d\mathbf{x}\|}{dt} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (\text{A.5})$$

En réécrivant l'élément de longueur  $d\ell$  en terme du paramètre de la trajectoire  $\lambda$

$$d\ell = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right\| d\lambda, \quad (\text{A.6})$$

on peut réécrire l'équation (A.2) sous la forme

$$\delta \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} n(\mathbf{x}) \|\dot{\mathbf{x}}\| d\lambda = 0. \quad (\text{A.7})$$

Par correspondance avec la fonctionnelle de l'action  $J(x) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathcal{L}(\lambda, x, \dot{x}) d\lambda$  on trouve que le lagrangien de la trajectoire s'écrit

$$\mathcal{L} = n(\mathbf{x}) \sqrt{\dot{x}^2}. \quad (\text{A.8})$$

La trajectoire qui satisfait (A.2) est une solution des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (\text{A.9})$$

On a donc

$$\frac{d}{d\lambda} n \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} - \|\dot{\mathbf{x}}\| \nabla n = 0, \quad (\text{A.10})$$

Puisque le choix du paramètres  $\lambda$  est libre, on peut le choisir tel que  $\|\dot{\mathbf{x}}\| = 1$  en tout point de la trajectoire. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} n \dot{\mathbf{x}} - \nabla n = 0 \\ \implies & n \ddot{\mathbf{x}} + (\nabla n \cdot \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} - \nabla n = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

À ce point de la dérivation, on utilise l'approximation de Born. C'est-à-dire qu'on approxime la trajectoire du photon comme une ligne droite sur l'axe de visée  $\mathbf{e}_\parallel$ . Cette approximation est justifiée dans le contexte des lentilles gravitationnelles de type galaxie-galaxie, puisque les angles

de déviation sont généralement de l'ordre de l'arcseconde ou plus petit. Comme, le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  est tangent à la trajectoire du photon, on obtient

$$\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_{\parallel} = \frac{1}{n} \nabla_{\perp} n = \nabla_{\perp} \log n \approx -\frac{2}{c^2} \nabla_{\perp} \Phi \quad (\text{A.12})$$

On note que le facteur 2 qui apparaît dans l'équation (A.12) est un effet qui vient de la relativité générale. Ce facteur corrige la solution que l'on aurait obtenu avec une dérivation classique (newtonienne).

On est maintenant en mesure de calculer l'angle de déviation. J'introduit le paramètre d'impact  $\xi$  qui est la distance perpendiculaire entre la position d'origine du photon sur le plan de la lentille et l'axe de visé. Cette distance peut être interprétée à l'aide du schéma dans la Figure A.1. Dans le cas où le potentiel est généré par une masse  $M$  ponctuelle, c.-à-d. qu'on suppose  $\rho = M\delta^3(\mathbf{x})$  où  $\delta$  est la fonction delta de Dirac, alors le potentiel qui satisfait l'équation de Poisson est la fonction de Green  $\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{\xi^2 + z^2}}$ , où  $z$  est la coordonnée sur l'axe de visée. L'équation (A.1) se réécrit finalement

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= -\frac{2GM}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(\xi^2 + z^2)^{1/2}} dz \\ &= \frac{2GM}{c^2} \xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ \implies \alpha(\xi) &= \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \xi \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Cette solution se généralise naturellement à un profil de masse quelconque en assumant qu'il s'exprime comme une somme d'éléments de masses  $dm = \Sigma d^2\xi'$  où  $\Sigma = \int \rho dz$  est une densité surfacique de masse. L'angle de déviation total mesuré à un point  $\xi$  est alors une convolution sur tout le plan de la lentille (mince) puisque l'équation (A.13) dépend linéairement de la masse  $M$  :

$$\alpha(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\xi') \frac{\xi - \xi'}{\|\xi - \xi'\|^2} d^2\xi' \quad (\text{A.14})$$

Cette déviation nous permet alors de relier le plan de la lentille et le plan de la source. Pour ce faire, on doit retrouver la position angulaire d'un point lumineux à la source  $\beta$  à partir de sa position angulaire observée  $\theta$  et de nos connaissances sur la déviation  $\alpha$ . On assume que les distances  $D_{\ell}$ ,  $D_s$  et  $D_{\ell s}$  sont beaucoup plus grandes que les distances perpendiculaires  $\xi$  ou  $\eta$  (voir figure A.1). Pour les objets qui nous intéressent, les distances parallèles à l'axe de visée sont généralement de l'ordre du Gpc, alors que les distances perpendiculaires sont généralement de l'ordre du kpc, soit 6

ordres de grandeurs de différences. Ainsi, on peut faire l'argument géométrique

$$\begin{aligned}
D_s \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\eta}' \\
D_s \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\eta} \\
D_{\ell s} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\eta}' - \boldsymbol{\eta} \\
\implies D_s \boldsymbol{\beta} &= D_s \boldsymbol{\theta} - D_{\ell s} \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

C'est l'équation maîtresse qui nous permet de tracer les rayons lumineux d'une source vers un détecteur fictif dans nos simulations.

Lorsqu'on étudie des images, il est généralement plus utile de travailler directement à partir du système de coordonnées angulaires  $\boldsymbol{\theta}$  plutôt que des dimensions physiques  $\boldsymbol{\xi}$  qui requièrent une caractérisation précise de la distance entre l'observateur et la lentille  $\boldsymbol{\xi} = D_\ell \boldsymbol{\theta}$ . On peut absorber cette distances dans un préfacteur qui rend les expressions (A.14) et (A.15) adimensionnelles. On introduit la densité critique

$$\Sigma_c = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_{\ell s} D_\ell} \tag{A.16}$$

et la convergence  $\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_c}$ , de sortes qu'on obtient l'angle réduit

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'\|} d^2 \boldsymbol{\theta}' \tag{A.17}$$

qui satisfait

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.18}$$

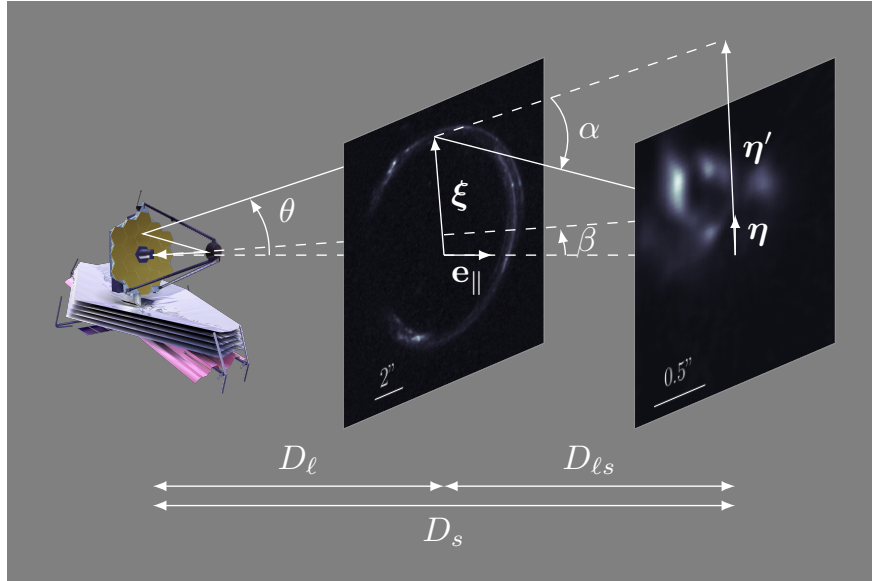


FIGURE A.1: Schéma d'une lentille gravitationnelle.

## Annexe B

# Distance du diamètre angulaire

Étant donné les distances de l'ordre du Gpc entre une lentille gravitationnelles et un observateur situé dans la Voie Lactée (sur Terre par exemple), on doit tenir compte du phénomène de l'expansion de l'Univers et en général de sa courbure pour déterminer la trajectoire réelle des photons. C'est pourquoi on utilise plutôt le concept de distance du diamètre angulaire (de l'anglais *angular diameter distance*) lorsqu'on mesure les distances le long de l'axe de visée. Cette distance est défini par la relation euclidienne entre une longueur  $\ell$  et un angle observé  $\theta$  :

$$D \equiv \frac{\ell}{\theta} \quad (\text{B.1})$$

Pour un espace euclidien (plat et statique), les distances  $D$  et  $\ell$  sont toujours décrites par la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ , ce peut importe la distance qui sépare l'observateur à l'objet de taille  $\ell$ . Pour un Univers en expansion et possiblement courbe, on doit changer la définition de  $D$  et  $\ell$  pour satisfaire la relation (B.1), cruciale à la dérivation de l'équation de la lentille.

On part du principe cosmologique, qui stipule que l'Univers est homogène et isotrope.

$$ds^2 = cdt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (\text{B.2})$$

où  $k \in \{-1, 0, 1\}$  est le paramètre de la courbure et  $(r, \theta, \phi)$  sont les coordonnées comobiles sphériques.

Redshift

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (\text{B.3})$$

null geodesic

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{(1 - kr^2)}} \quad (\text{B.4})$$

and light emitted a wavelength away is emitted at  $t'_e = t_e = \delta t_e$  et  $t'_o = t_o + \delta t_o$ .

$$\int_{t'_e}^{t'_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{(1 - kr^2)}} \quad (\text{B.5})$$

Implication from  $\delta t_e$  and  $\delta t_o$  small is

$$\frac{\delta t_o}{a_o} = \frac{\delta t}{a} \quad (\text{B.6})$$

Since  $\delta t = 1/\nu_e$  et  $\delta t_o = 1/\nu_o$  then  $\nu_e a = \nu_o a_o$

$$1 + z = \frac{a_o}{a} \quad (\text{B.7})$$

La première équation de Friedmann, de la composante 00 des équations d'Einstein

$$\frac{\dot{a}^{2+kc^2}}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} \quad (\text{B.8})$$

La seconde, de la trace de la composante spatiale

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (\text{B.9})$$

En terme des paramètres cosmologiques, on a  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$  et  $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \quad (\text{B.10})$$

déterminé en terme de  $p = w\rho c^2$  ( $w = 0$  is dust,  $w = \frac{1}{3}$  is radiation,  $w = -1$  is  $\Lambda$ ).  $\Omega_k = 1 - \Omega_0 = 1 - \Omega_M - \Omega_R - \Omega_\Lambda$ . In a flat Universe,  $\Omega_k = 0$ .