$\boxed{\text{Задача 1}}$ $\mathcal{L} = \sum\limits_{i=1}^{\ell} (y_i - \tilde{y})^2 \to \min\limits_{\tilde{y}}$

Решение:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{y}} = -2 \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - \tilde{y}) \Rightarrow \tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} y_i}{\ell} := \langle y \rangle$$

Ответ: $\langle y \rangle$

$\boxed{\text{Задача 3}}$ (второго номера нет :))

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \ell$: МНК ; $\tilde{x}, \tilde{y}$ - выборочные средние

Решение: $\mathcal{L} = \sum\limits_{i=1}^{m} (y_i - a x_i - b)^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i (y_i - a x_i - b) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = -2 \sum\limits_{i=1}^{m} (y_i - a x_i - b) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m} = a \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} + b$$

$$\langle y \rangle = a \langle x \rangle + b$$

Обобщим на случай многомерной регрессии:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{y} = X \vec{a} \text{ - гиперплоскость} \\ \vec{y}_0 = X_0 \vec{a} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{a} = (X_0^T X_0)^{-1} X_0^T \vec{y}_0$$

Ответ.

$\boxed{\text{Задача 4}}$

Показать, что $(1) \overset{\text{см. усл.}}{\Longleftrightarrow} (2)$

Решение: 1) $\exists\ X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ Тогда:

$$(\vec{x}_1 - \langle \vec{x}_1 \rangle \vec{e}, \dots, \vec{x}_m - \langle \vec{x}_m \rangle \vec{e})$$

$$(X^T X) = (\vec{x}_i^{\,T} - \langle \vec{x}_i \rangle \vec{e}^{\,T})(\vec{x}_i - \langle \vec{x}_i \rangle \vec{e}) =$$

$= n \operatorname{cov}(x_1, \dots, x_m)$; где $X \in \mathrm{Mat}_{n \times m}$ (не обяз. квадратная)

2) $X = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_m}) \to (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_m}, \vec{e}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X^T X = \begin{pmatrix} \vec{x_1}^T \\ \vdots \\ \vec{x_m}^T \\ \vec{e}^T \end{pmatrix} (\vec{x_1} \dots \vec{x_m}\, \vec{e}) = \begin{pmatrix} \vec{x_i}^T \vec{x_i} & \vec{x_i}^T \vec{e} \\ \vec{e}^T \vec{x_i} & \vec{e}^T \vec{e} \end{pmatrix} \to$$

$$\to (\vec{x_i}^T \vec{x_i})$$

$\boxed{\text{Задача 6}}$

Решение: Пусть $X \in Mat_{n \times m}$

НУО $n < m$

$X\vec{\omega} = \vec{y}$ недоопределена

$\|\vec{\omega}\|_2^2 = \vec{\omega}^T \vec{\omega}$

Хотим найти $\min\limits_{X\vec{\omega} = \vec{y}} \|\omega\|_2^2 = \langle\vec{\omega}\rangle$

$rg\, X = m$. Рассмотрим ф-ию: $L = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\vec{\omega} + \vec{a}^T(X\vec{\omega} - \vec{y})$

где $\vec{a} \in Mat_{m \times 1}$ (вектор с высотой m)

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}} = \vec{\omega} + X^T \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega} + X^T \vec{a} = \vec{0} \\ X\vec{\omega} = \vec{y} \end{cases}$$

Предположим что $\vec{a} = \langle\vec{a}\rangle$ доставляет extr. Тогда

$$\begin{cases} \langle\vec{\omega}\rangle = -X^T \langle\vec{a}\rangle \\ X\langle\vec{\omega}\rangle = \vec{y} \end{cases} \Rightarrow -XX^T\langle\vec{a}\rangle = \vec{y} \Rightarrow \{\det X \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \langle\vec{a}\rangle = -(XX^T)^{-1}\vec{y} \Rightarrow \langle\vec{\omega}\rangle = \underbrace{X^T(XX^T)^{-1}}_{\text{псевдообратное}}\vec{y}$$

Показали

$\boxed{\text{Задача 8}}$ $\tilde{y} \sim \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\det A} \exp\left[\frac{(\tilde{y}-y)^T A (\tilde{y}-y)}{2}\right]$

$\tilde{y}_i \sim \mathcal{N}(y_i, s_i^2)$ — на этот раз

$y = (y_i, \dots, y_\ell)^T \quad \tilde{y} = (\tilde{y}_i, \dots, \tilde{y}_\ell)^T$

Решение:

1) Замена: $\tilde{y} - y = Sz \Rightarrow \tilde{y} \sim \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\det A} \exp\left[\frac{(Sz)^T A Sz}{2}\right]$

где S диагонализует A, т.е. $S^T A S = B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_\ell)$; $\det B = \det A$

Выполним утверждение: $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^\ell} \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \exp\left[-\frac{z^T z}{2}\right] d^\ell z = \prod_{j=1}^{\ell} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z_j^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz_j =$

$= 1$

2) $\tilde{y}$ — гауссовский вектор $\Leftrightarrow \exists M \in Mat_{\ell \times \ell}\ \exists \eta = (\eta_1, \dots, \eta_\ell)^T\ \exists d \in \mathbb{R}^\ell$: $\tilde{y} = M\eta + d$ и $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$M^T M = A \Rightarrow S^T M^T M S = B \Rightarrow M = (\mathrm{diag}\sqrt{b_i}\, S)^{-1}$

$$\langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = \mathrm{cov}(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j) = \mathrm{cov}(M_i^k \alpha_k, M_j^\ell \alpha_\ell) =$$

$$= M_i^k M_j^\ell \delta_{k\ell} = M_i^k M_j^k = (MM^T)_{ij} \overset{+\text{спектр. разл.}}{=} A^{-1}_{ij}$$

3) $\tilde{w}_\alpha = Q_{\alpha i} \tilde{y}_i$, где $Q = (X^T X^{-1}) X^T \Rightarrow \langle\langle \tilde{w}_\alpha, \tilde{w}_\beta \rangle\rangle =$

$$= Q_{\alpha i} Q_{\beta j} \langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = Q_{\alpha i} Q_{\beta i} A^{-1}_{ij} \sim Q^\alpha_i (A^{-1})^i_j Q^j_\beta =$$

$$= (Q A^{-1} Q^T)^\alpha_\beta$$

4) $A = \mathrm{diag}(A_1 \ldots A_\ell) \Rightarrow A^{-1} = \mathrm{diag}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\ell) := \Sigma;\ \Sigma_{ii} = s_i^2$

$\tilde{w}_\alpha = Q_{\alpha i} Q_{\beta i} \Sigma_{ii}$

Рассмотрим: $\tilde{y} = w_1 x + w_0$

Используя задачу 4. Введем $X = (\vec{x}, \vec{e})$, где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_\ell)^T$; $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$(X^T X^{-1}) = \frac{1}{\ell \operatorname{var} x} \begin{pmatrix} 1 & -\vec{x} \\ -\vec{x} & \vec{x}^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\ell \operatorname{var} x} \begin{pmatrix} 1 & -\vec{x} \\ -\vec{x} & \vec{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_\ell \\ 1 & \ldots & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell \operatorname{var} x} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x_1 - \langle x \rangle & x_2 - \langle x \rangle & \ldots & x_\ell - \langle x \rangle \\ \langle x^2 \rangle - x_1 \langle x \rangle & \ldots & & \langle x^2 \rangle - x_\ell \langle x \rangle \end{pmatrix} \Rightarrow (Q \Sigma Q^T)^1_1 = \operatorname{var} w_1 =$$

$$= \frac{1}{\ell^2 \operatorname{var}^2 x} \sum_{i=1}^{\ell} s_i^2 (x_i - \langle x \rangle)^2$$

$$\underset{\operatorname{var} w_2}{\underset{\parallel}{(Q \Sigma Q^T)^2_2}} = \frac{1}{\ell^2 \operatorname{var}^2 x} \sum_{i=1}^{\ell} s_i^2 (\langle x^2 \rangle - x_i \langle x \rangle)^2$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{y}_i = \sqrt{\operatorname{var} \tilde{y}_i} = s_i$$

$$\operatorname{var} w_1 = \frac{s^2}{\ell \operatorname{var} x}; \quad \operatorname{var} w_2 = \frac{s^2 \langle x \rangle^2}{\operatorname{var} x}$$