

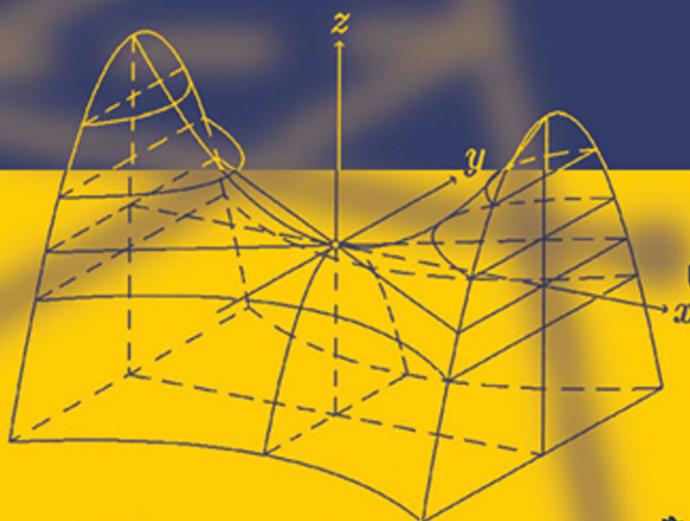
# Dietlinde Lau

# Algebra und

# Diskrete Mathematik 1

Grundbegriffe der Mathematik,  
Algebraische Strukturen 1,  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie,  
Numerische Algebra und Kombinatorik

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot (5, 5, 7) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2004 = 0$$



3., korrigierte  
und erweiterte  
Auflage



Springer

# **Springer-Lehrbuch**

Dietlinde Lau

# Algebra und Diskrete Mathematik 1

Grundbegriffe der Mathematik,  
Algebraische Strukturen 1,  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie,  
Numerische Algebra und Kombinatorik

Dritte, korrigierte und erweiterte Auflage



Prof. Dr. Dietlinde Lau  
Institut für Mathematik  
Universität Rostock  
Ulmenstraße 69, Haus 3  
18057 Rostock  
Deutschland  
[dietlinde.lau@uni-rostock.de](mailto:dietlinde.lau@uni-rostock.de)

ISSN 0937-7433  
ISBN 978-3-642-19442-9 ISBN 978-3-642-19443-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-19443-6  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01, 51Nxx, 65Fxx

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004, 2007, 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

## Vorwort zur dritten Auflage

Die dritte Auflage stimmt bis einschließlich Kapitel 15 im wesentlichen mit der zweiten Auflage überein. Teil III wurde durch ein 20seitiges Kapitel über Kombinatorik ergänzt. Dadurch kam es auch zu Ergänzungen des Teils IV mit den Übungsaufgaben.

Zeitgleich erscheint beim Springer Verlag das

*Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie*

in der zweiten Auflage, in dem die Lösungen der Übungsaufgaben des vorliegenden Buches zu finden sind.

Dank der Hinweise von Leserinnen und Lesern konnte die Zahl der Druckfehler weiter reduziert werden.

Mein besonderer Dank gilt meinen Kollegen Dr. Walter Harnau, Prof. Achill Schürmann und den Diplommathematikern Matthias Böhm und Konrad Sperfeld, die dafür gesorgt haben, daß mein erster Entwurf für das Kombinatorik-Kapitel an einigen Stellen überarbeitet und Schreibfehler korrigiert wurden. Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kolleginnen Susann Dittmer und Heike Schubert, die mir bei der technischen Herstellung des Manuskript (z.B. bei Problemen mit Latex) schnell und effektiv geholfen haben.

Rostock, im Januar 2011

Dietlinde Lau

---

## Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch die Korrektur der inzwischen gefundenen Druckfehler, einigen Umformulierungen sowie Ergänzungen zum Kapitel 1 und den Kapiteln des Teils IV, in dem die Übungsaufgaben zu den Kapiteln I–III zu finden sind.

Dem Wunsch einiger Leser folgend, habe ich in Ergänzung zum vorliegenden Buch ein Buch mit den Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Teil IV geschrieben, das zeitgleich mit der vorliegenden zweiten Auflage beim Springer-Verlag unter dem Titel

*Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie*

erscheint.

Sehr hilfreich beim Überarbeiten der ersten Fassung des vorliegenden Buches waren die Hinweise von Herrn Prof. Dr. L. Berg (Rostock). Besonders dankbar bin ich Herrn Dr. W. Harnau (Dresden), der in den letzten Monaten das gesamte Buch durchgearbeitet hat und dessen Änderungsvorschläge ich fast alle beim Überarbeiten des Buches umgesetzt habe.

Mein Dank gilt natürlich auch allen Lesern, die mir ihre Meinung zur ersten Auflage geschrieben haben und denen ich ebenfalls Hinweise auf Druckfehler und Änderungsvorschläge verdanke.

Rostock, im Juni 2007

Dietlinde Lau

---

## Vorwort zur ersten Auflage

*„Soll ich mich im allgemeinen Sinne über Pädagogik äußern, so will ich folgende Betrachtung vorausschicken: Man kann das pädagogische Problem mathematisch formulieren, indem man die individuellen Qualitäten des Lehrers und seiner  $n$  Schüler als ebensoviele Unbekannte einführt und verlangt, eine Funktion von  $(n+1)$  Variablen  $F(x_0, \dots, x_n)$  unter gegebenen Nebenbedingungen zu einem Maximum zu machen. Ließe sich dieses Problem eines Tages entsprechend den bisher realisierten Fortschritten der psychologischen Wissenschaft direkt mathematisch behandeln, so wäre die (praktische) Pädagogik von da ab eine Wissenschaft, — solange das aber nicht der Fall ist, muß sie als Kunst gelten.“*  
(F. Klein (1849 – 1926) in seinem Vortrag: „Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an Universitäten“)

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die die Autorin für Physik-, Mathematik- und insbesondere Informatikstudenten zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie bzw. im Rahmen eines Grundkurses Mathematik für die Informatikstudenten an der Universität Rostock gehalten hat.

Eingedenk der Probleme, die insbesondere viele Studienanfänger mit dem Fach Mathematik als solches, der Umstellung von der Schulvermittlung des Fachs Mathematik zum (komprimierten) Vorlesungsstil an den Universitäten haben und wegen des Heranführen an die Beweistechniken der Mathematik, wird versucht, die wichtigsten Beweise sehr ausführlich darzustellen und sie durch Beispiele vor- und nachzubereiten. Wert wird außerdem darauf gelegt, Teile der Schulmathematik zu wiederholen und zu ergänzen.

Anliegen des Buches ist es auch, diejenigen Teile des Vorlesungsstoffes, die aus Zeitgründen sehr kurz behandelt werden müssen, zu ergänzen.

Besonders wichtige Teile (meist gewisse Sätze) der einzelnen Kapitel sind schattiert, und Teile, die beim ersten Lesen übergangen werden können bzw. zu den zwar wichtigen, aber in Vorlesungen meist nicht angegebenen Teilen des hier vermittelten Stoffes gehören, sind im Kleindruck angegeben.

Um möglichst eng an der Vorlesungsvermittlung des Stoffes zu sein, sind Definitionen und Sätze unter Verwendung von (platzsparenden) Symbolen — meist aus der mathematischen Logik — formuliert, die eingangs des ersten Kapitels erläutert werden. Für besonders oft auftretende Begriffe werden außerdem — wie in der Vorlesung — Abkürzungen<sup>1</sup> eingeführt.

Es sei darauf verwiesen, daß einzelne Kapitel auch unabhängig von den anderen Kapiteln lesbar sind, so daß man nicht gezwungen ist, zum Verständnis z.B. von Kapitel 3 die beiden vorherigen zu lesen. Die einzelnen Kapitel sind numeriert und sind wiederum in einzelne — mit einer neuen Zählung beginnende — Abschnitte untergliedert. Sätze und Lemmata aus Kapitel  $x$ , Abschnitt  $y$ , werden in der Form  $x.y.i$  fortlaufend numeriert. Das Ende eines Beweises wird durch ■ kenntlich gemacht.

Die Abkürzung ÜA steht für *Übungsaufgabe*. Da sich bekanntlich das Verständnis für Mathematik über das Bearbeiten von Aufgaben vertiefen läßt, sind nicht nur im nachfolgenden Text eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben, sondern zu jedem der Kapitel 1 – 15 findet man in den *Kapiteln 16 – 18* eine Zusammenstellung von Übungsaufgaben, anhand der die Leser testen können, ob sie den behandelten Stoff verstanden haben und ob sie ihn auch anwenden können. Die Anzahl der Aufgaben ist so gewählt, daß genügend Aufgaben für die zur Vorlesung gehörenden wöchentlichen Übungen und Hausaufgaben sowie für das Selbststudium vorhanden sind.

#### Zum Inhalt:

*Kapitel 1* beginnt mit einer Zusammenstellung von mathematischen Begriffen (wie z.B. die Begriffe: *Menge*, *Relation*, *Korrespondenz*, *Abbildung*, *Operation*, *Graph*, ...), die in späteren Kapiteln, aber auch in vielen hier nicht behandelten Gebieten der Mathematik zu den Grundbegriffen gehören.

Dem Anfänger wird erfahrungsgemäß die „Abstraktheit“ dieser Begriffe etwas zu schaffen machen, jedoch ist es — eine langjährige Erfahrung — nur eine Frage der Zeit und der Übung, bis man sich daran gewöhnt hat bzw. man es lernt, den Nutzen dieser Begriffsbildungen zu erkennen. Den Lesern sei gerade für dieses Kapitel die Bearbeitung der Übungsaufgaben aus 16.1 empfohlen, um sich möglichst schnell diesen Begriffsapparat über die Anwendungen zu erschließen.

*Kapitel 2* führt kurz in die — für die Entwicklung der Mathematik der letzten zwei Jahrhunderte sehr wichtige — Denkweise, nämlich der in „algebraischen Strukturen“, ein. Behandelt werden einige Grundlagen aus der Theorie der

---

<sup>1</sup> Eine Liste der verwendeten Symbole und Abkürzungen sowie Hinweise, auf welcher Seite sie eingeführt wurden, findet man ab S. 497.

*Halbgruppen, Gruppen, Ringe, Körper, Verbände und Booleschen Algebren.* Sie dienen außerdem als erste Vorbereitung auf Methoden und Denkweisen in der Theoretischen Informatik. Eine Fortsetzung findet dieses Kapitel im Teil III von Band 2, wo u.a. auch weitere Eigenschaften von Körpern hergeleitet werden und Anwendungen der Körpertheorie (z.B. in der Codierungstheorie) gezeigt werden.

Der in den *Kapiteln 3 – 11* behandelte Stoff wird allgemein zur sogenannten *Linearen Algebra und analytischen Geometrie* gerechnet und ist nach soviel „Abstrakten“ in den ersten beiden Kapiteln eine Art „Erholung“. Anwendungen dieser Teile der Mathematik sind entweder sofort oder leichter erkennbar. Da ein erster Schwerpunkt unserer Überlegungen *Lösungsmethoden und Lösbarkeitskriterien für beliebige lineare Gleichungssysteme* sind, werden im *Kapitel 3* zunächst Hilfsmittel dazu — nämlich die *Determinanten und Matrizen* — vorgestellt und ihre Eigenschaften ermittelt. Die anschließende Untersuchung der linearen Gleichungssysteme ist dann sehr einfach und — spart man einmal den rein numerischen Aspekt (wie Rundungsfehler u.ä.) bei der Behandlung von Gleichungssystemen aus, mit denen wir uns später befassen werden — für die nachfolgenden Kapitel ausreichend behandelt. Es sei hier bereits darauf verwiesen, daß die Matrizen und Determinanten auch Anwendungen haben, die weit über die hier behandelten hinausgehen.

Mit den im *Kapitel 4* eingeführten *Vektorraumbegriff* wird einer der grundlegenden und Verbindungen schaffender Begriff aus der Algebra, Analysis, Geometrie und mathematischen Physik behandelt. So lassen sich z.B. die Anschauungsebene bzw. der Anschauungsraum, in denen man Geometrie betreiben kann, mit Hilfe des Vektorraumbegriffs einheitlich beschreiben und zu sogenannten *affinen Punkträumen* verallgemeinern, was im *Kapitel 5* gezeigt wird. Wir beginnen in diesem Abschnitt auch mit der Wiederholung geometrischer Grundaufgaben.

Besonders wichtig und interessant sind *Vektorräume mit Skalarprodukt*, die im Mittelpunkt des *Kapitels 6* stehen.

Auch hier soll die Leistungsfähigkeit der neuen Begriffen zunächst anhand von Anwendungen in der Geometrie — genauer bei der Behandlung der *euklidischen* und *unitären affinen Punkträume* — im *Kapitel 7* erläutert werden.

In Vorbereitung auf Kapitel 9 behandeln wir im *Kapitel 8* die sogenannten *Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von Matrizen*. Auch hier behandeln wir Begriffe und Sätze, die nicht nur in der Linearen Algebra eine Rolle spielen. Es sei hier schon angemerkt, daß für das Verständnis von Kapitel 9 nur die Aussagen über die Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von symmetrische Matrizen aus Kapitel 8 benötigt werden. Die Ergebnisse über Normalformen für beliebige Matrizen (u.a. die Jordansche Normalform) werden im Kapitel 10 verwendet.

Im *Kapitel 9* geht es u.a. um die Frage, welche geometrischen Objekte durch Gleichungen, in denen (grob gesagt) die Variablen höchstens im Quadrat vor-

kommen, beschrieben werden können. Das hierbei entwickelte Verfahren — die sogenannte *Hauptachsentransformation* — wird es uns ermöglichen, ausgehend von gewissen Gleichungen, die Bedingungen für die Koordinaten gewisser geometrischer Objekte angeben — durch reines Rechnen — Lage und Typ dieser Objekte zu erfassen. Eingesetzt werden dabei auch viele in vorherigen Kapitel eingeführten Hilfsmittel (wie z.B. die Matrizen), durch die unsere durchzuführenden Überlegungen und Rechnungen erst übersichtlich und durchschaubarer werden.

Mit den Kapiteln 3 – 9 (mit Ausnahme gewisser Aussagen über Normalformen von Matrizen) haben wir einen gewissen Grundstandard, den man auch in vielen anderen Büchern über Lineare Algebra und analytischer Geometrie findet, behandelt.

Um den Leser den Einstieg in weiterführende Literatur<sup>2</sup> zu ermöglichen, sind in den *Kapiteln 10 und 11* Begriffe und Sätze zusammengestellt, die in meist für Mathematiker geschriebenen Büchern viel früher eingeführt werden, um den hier in den Kapitel 3 – 9 behandelten Stoff allgemeiner zu erarbeiten. Konkret geht es im *Kapitel 10* um Eigenschaften sogenannter *lineare Abbildungen* zwischen Vektorräumen und im *Kapitel 11* um Eigenschaften *affiner Abbildungen* zwischen Punktträumen. Da in der Vorlesung meist nicht viel Zeit ist, den Inhalt von Kapitel 10 und 11 sowie den von gewissen Teilen von Kapitel 8 ausführlich zu behandeln, seien diese Kapitel den Lesern insbesondere für das Selbststudium empfohlen.

Der Inhalt der *Kapitel 12 – 14* wird üblicherweise der *Numerischen Mathematik* zugeordnet. Unter Numerischer Mathematik bzw. unter *Numerik* versteht man diejenigen Teile der Mathematik, in denen mathematische Größen aus gegebenen Zahlen auch zahlenmäßig berechnet werden. Insbesondere beschäftigt sich die Numerik mit dem Aufstellen von Rechenvorschriften, nach denen aus Eingangsdaten, die oft mit (bekannten) Fehlern behaftet sind, die gewünschten Ausgangsdaten mit abschätzbarer Genauigkeit berechnet werden. Die Numerik setzt in der Regel dort ein, wo ein Problem (z.B. der Algebra oder Analysis) als gelöst angesehen werden kann, weil z.B. die Existenz einer Lösung nachgewiesen oder ein Lösungsalgorithmus (möglicherweise aus unendlich vielen Schritten bestehend) gefunden wurde. Bei der konkreten Ermittlung der Lösung eines Problems ergeben sich dann aber eine Reihe von Schwierigkeiten, die numerische Verfahren erfordern. Welche Schwierigkeiten dies sind und welche Lösungsansätze es zum Beheben dieser Schwierigkeiten gibt, wird im *Kapitel 12* erläutert.

Im *Kapitel 13* geht es um Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen. Grundlage fast aller angegebenen Verfahren ist dabei der sogenannte *Banachsche Fixpunktsatz*.

---

<sup>2</sup> Damit ist nicht nur Literatur zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie, sondern auch Literatur zur Funktionalanalysis gemeint.

*Kapitel 14* setzt unsere Untersuchungen zu linearen Gleichungssystemen (kurz: LGS), die jeweils nur genau eine Lösung besitzen, fort. Es wird erläutert, warum für LGS mit sogenannter *schlechter Kondition* unsere Lösungsverfahren aus Kapitel 3 beim praktischen Rechnen (auf dem Computer oder per Hand) i.w. unbrauchbar sind und Näherungsverfahren für das Lösen solcher LGS entwickelt, die nicht nur für schlecht konditionierte LGS geeignet sind.

Im kurzen *Kapitel 15* über *Interpolation* wird (unter Verwendung von zwei Ergebnissen aus Kapitel 3) das Interpolationsproblem mit Polynomen gelöst. Anwenden lassen sich die hierbei erzielten Resultate z.B. bei der numerischen Integration.

Die in den Kapiteln 13 – 15 vorgestellten Verfahren gehören bereits zur angewandten Mathematik. Mehr über die Anwendungen der in diesem Band zusammengestellten mathematischen Gebiete sowie eine Fortsetzung der Theorie findet der Leser dann im *Band 2*, der aus den Teilen

- Lineare Optimierung
- Graphen und Algorithmen
- Algebraische Strukturen und Allgemeine Algebra mit Anwendungen

besteht.

Große Teile der im Band 2 behandelten Gebiete rechnet man zur sogenannten **Diskreten Mathematik**. Das Wort „diskret“ steht hierbei natürlich nicht für „verschwiegen“ oder „unauffällig“, sondern charakterisiert Teilbereiche der Mathematik, die sich vorrangig mit endlichen Mengen beschäftigen. Dies geschieht zwar in fast jedem Teilbereich der Mathematik, jedoch hat die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung dazu geführt, daß früher (wegen des großen „Rechenaufwandes“) nicht praktikable Algorithmen inzwischen ihre Anwendungen und Verbesserungen erfahren haben. Seit einigen Jahren ist es deshalb üblich, Gebiete der Mathematik, die gewisse Anwendungen in der Informatik besitzen oder die sich durch den enormen Aufschwung der elektronischen Datenverarbeitung entwickelten, unter dem Oberbegriff „Diskrete Mathematik“ zusammenzufassen. Inzwischen ist die Diskrete Mathematik mit ihren Kernbereichen *Kombinatorik*, *Graphentheorie*, *Algorithmentheorie*, *Optimierung und Theorie der diskreten Strukturen* eine Grundlagenwissenschaft für Mathematiker und Informatiker. Anliegen von Band 2 wird es sein – aufbauend auf Band 1 – für ausgewählte Gebiete der Diskreten Mathematik dies nachzuweisen. Insbesondere soll gezeigt werden, wie effektiv sich der vorher behandelte „mathematische Apparat“ beim Lösen der verschiedensten — insbesondere auch praktischen — Aufgaben einsetzen läßt.

Nicht versäumen möchte ich es, mich bei Herrn Dipl.-Math. Hans-Christian Pahlig zu bedanken, der die erste L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Fassung des vorliegenden Buches aus einer — von der Verfasserin von einigen Jahren auf dem PC 1715 geschriebenen — alten Computervariante entwickelt hat, wobei insbesondere von ihm sämtliche Zeichnungen neu entworfen und programmiert wurden.

#### XIV Vorwort zur ersten Auflage

Meinen Rostocker Kollegen Herrn Prof. Dr. R. Knörr, Herrn Dr. F. Leitenberger und Frau Dr. K. Mahrhold gilt mein Dank für die kritische Durchsicht einzelner Kapitel und einiger Änderungs- und Ergänzungsvorschläge.

Bei den Mitarbeitern des Springer-Verlages möchte ich mich für die sehr angenehme Zusammenarbeit bedanken.

Rostock, im November 2003

Dietlinde Lau

---

# Inhaltsverzeichnis

---

## Teil I Grundbegriffe der Mathematik und Algebraische Strukturen

---

<b>1</b>	<b>Mathematische Grundbegriffe</b>	3
1.1	Logische Zeichen	3
1.2	Elemente der Mengenlehre	4
1.3	Relationen	15
1.4	Korrespondenzen, Abbildungen und Verknüpfungen	21
1.5	Mächtigkeiten, Kardinalzahlen	27
1.6	Boolesche Funktionen und Prädikate	35
1.7	Graphen	51
<b>2</b>	<b>Klassische algebraische Strukturen</b>	59
2.1	Halbgruppen	60
2.2	Gruppen	66
2.3	Ringe und Körper	82
2.4	Verbände und Boolesche Algebren	93

---

## Teil II Lineare Algebra und analytische Geometrie

---

<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizen</b>	107
3.1	Determinanten	108
3.2	Matrizen	126
3.3	Rang von Matrizen	139
3.4	Lösbarkeitskriterien und Lösungsverfahren für LGS	143
<b>4</b>	<b>Vektorräume über einem Körper <math>K</math></b>	157
4.1	Die Definition eines Vektorraums über $K$ , Beispiele	157
4.2	Untervektorräume	161
4.3	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	164
4.4	Basen	166

## XVI Inhaltsverzeichnis

4.5	Lineare Unabhängigkeit und Basen über einem Untervektorraum . . . . .	174
4.6	Dimensionssätze, Isomorphie . . . . .	178
4.7	Koordinaten, Basistransformationen . . . . .	180
4.8	Anwendungen für Vektoren aus $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$ . . . . .	183
<b>5</b>	<b>Affine Räume . . . . .</b>	<b>189</b>
5.1	Die Definition eines affinen Raumes, Beispiele . . . . .	189
5.2	Koordinaten und Koordinatensysteme . . . . .	191
5.3	Affine Unterräume . . . . .	192
5.4	Schnitt und Verbindung affiner Räume . . . . .	196
5.5	Parallele affine Unterräume . . . . .	197
<b>6</b>	<b>Vektorräume mit Skalarprodukt (unitäre und euklidische VRe) . . . . .</b>	<b>199</b>
6.1	Das Skalarprodukt in $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$ . . . . .	199
6.2	Das Skalarprodukt in Vektorräumen über den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ . . . . .	210
6.3	Norm (Betrag) von Vektoren . . . . .	218
6.4	Winkel zwischen Vektoren (in euklidischen Vektorräumen) . . . . .	221
6.5	Orthogonalität . . . . .	221
6.6	Das Vektorprodukt . . . . .	231
<b>7</b>	<b>Euklidische und unitäre affine Punkträume . . . . .</b>	<b>241</b>
7.1	Abstandsmessung . . . . .	241
7.2	Winkel- und Volumenmessung in euklidischen Punktträumen . . . . .	244
7.3	Koordinatentransformationen in kartesischen Koordinatensystemen . . . . .	245
<b>8</b>	<b>Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von Matrizen . . . . .</b>	<b>253</b>
8.1	Motivation, Grundbegriffe . . . . .	253
8.2	Eigenwerte von Matrizen und Nullstellen von Polynomen . . . . .	259
8.3	Verallgemeinerte Eigenräume . . . . .	270
8.4	Überführung von symmetrischen Matrizen in Diagonalgestalt . . . . .	279
8.5	Jordansche Normalformen . . . . .	282
<b>9</b>	<b>Hyperflächen 2. Ordnung . . . . .</b>	<b>297</b>
9.1	Grundbegriffe . . . . .	297
9.2	Hauptachsentransformation (Beweis von Satz 9.1.1) . . . . .	300
9.3	Klassifikation der Kurven 2. Ordnung . . . . .	316
9.4	Klassifikation der Flächen 2. Ordnung . . . . .	323

<b>10 Lineare Abbildungen</b>	329
10.1 Allgemeines über lineare Abbildungen	329
10.2 Adjungierte Abbildungen	339
10.3 Normale Abbildungen	341
10.4 Selbstadjungierte und antiselbstadjungierte Abbildungen	344
10.5 Unitäre und orthogonale Abbildungen, Isometrien	345
10.6 Normalformen linearer Abbildungen	346
10.7 Gruppen aus linearen Abbildungen	348
<b>11 Affine Abbildungen</b>	351
11.1 Allgemeines über affine Abbildungen	351
11.2 Gruppen gewisser affiner Abbildungen	354
11.3 Einige Invarianten affiner Abbildungen	355

### Teil III Numerische Algebra und Kombinatorik

<b>12 Einführung in die Numerische Mathematik</b>	361
12.1 Fehlertypen	362
12.2 Fehlerfortpflanzung bei differenzierbaren Funktionen	363
12.3 Maschinenzahlen, Rundungsfehler	366
12.4 Intervallarithmetik	368
<b>13 Gleichungsauflösung</b>	373
13.1 Problemstellung, geometrische Deutung	373
13.2 Der Banachsche Fixpunktsatz	375
13.3 Das Newton-Verfahren, die Regula falsi	379
13.4 Polynomgleichungen	384
13.4.1 Abschätzungen für Polynomnullstellen	384
13.4.2 Das Horner-Schema und das zweizeilige Horner-Schema	385
13.4.3 Verfahren zur Nullstellenberechnung von $p_m$	388
<b>14 Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung</b>	391
14.1 Der Gauß-Algorithmus (mit Pivotisierung)	392
14.2 Vektor- und Matrixnormen	394
14.3 Die Kondition von LGS	397
14.4 Elementare Iterationsverfahren	400
14.4.1 Das Jacobi-Verfahren	400
14.4.2 Das Gauß-Seidel-Verfahren	403
14.4.3 Konvergenzbedingungen	405
14.5 Projektionsverfahren	407
14.5.1 Grundidee der Projektionsverfahren	407
14.5.2 Projektion auf Hyperebenen	409
14.5.3 Gradientenverfahren	410

<b>15 Interpolation .....</b>	415
15.1 Einführung .....	415
15.2 Interpolation mit Polynomen .....	416
<b>16 Grundlagen der Kombinatorik .....</b>	421
16.1 Grundregeln des Abzählens .....	422
16.2 Permutationen, Kombinationen und Variationen .....	422
16.2.1 Permutationen (Anordnungen) von $M$ .....	422
16.2.2 Permutationen mit Wiederholung .....	423
16.2.3 Variationen mit Wiederholung .....	423
16.2.4 Variationen ohne Wiederholung .....	424
16.2.5 Kombinationen ohne Wiederholung .....	424
16.2.6 Kombinationen mit Wiederholung .....	425
16.2.7 Einige Beispiele für Anwendungen obiger Formeln .....	426
16.3 Das Prinzip der Inklusion-Exklusion .....	428
16.4 Mächtigkeiten von einigen Abbildungsmengen .....	431
16.5 Lineare Rekursionsgleichungen .....	432

---

## Teil IV Übungsaufgaben

---

<b>17 Übungsaufgaben zum Teil I .....</b>	443
17.1 Aufgaben zum Kapitel 1 .....	443
17.2 Aufgaben zum Kapitel 2 .....	454
<b>18 Übungsaufgaben zum Teil II .....</b>	461
18.1 Aufgaben zum Kapitel 3 .....	461
18.2 Aufgaben zum Kapitel 4 .....	466
18.3 Aufgaben zum Kapitel 5 .....	468
18.4 Aufgaben zum Kapitel 6 .....	469
18.5 Aufgaben zum Kapitel 7 .....	472
18.6 Aufgaben zum Kapitel 8 .....	473
18.7 Aufgaben zum Kapitel 9 .....	475
18.8 Aufgaben zum Kapitel 10 .....	477
18.9 Aufgaben zum Kapitel 11 .....	478
<b>19 Übungsaufgaben zum Teil III .....</b>	481
19.1 Aufgaben zum Kapitel 12 .....	481
19.2 Aufgaben zum Kapitel 13 .....	482
19.3 Aufgaben zum Kapitel 14 .....	483
19.4 Aufgaben zum Kapitel 15 .....	485
19.5 Aufgaben zum Kapitel 16 .....	487
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	491

<b>Glossar</b> .....	497
<b>Index</b> .....	503

## **Teil I**

---

# **Grundbegriffe der Mathematik und Algebraische Strukturen**

---

## Mathematische Grundbegriffe

### 1.1 Logische Zeichen

In vielen mathematischen Gebieten hat es sich als zweckmäßig erwiesen, bestimmte Formulierungen durch Verwendung *logischer Zeichen* zu formalisieren. Nachfolgend sind die von uns verwendeten wichtigsten Symbole in einer Tabelle zusammengefaßt:

Zeichen	Lesart
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$\Rightarrow$	wenn - dann; daraus folgt
$\iff$	genau dann, wenn
$:=$	definitionsgleich
$\iff$	definitionsgemäß äquivalent
$\exists$	es existiert (mindestens) ein
$\exists!$	es existiert genau ein
$\forall$	für alle

Das Zeichen  $:=$  benutzen wir, um z.B. die Bezeichnung  $A$  durch eine Formel  $\varphi$  zu erklären, wobei dann  $A := \varphi$  geschrieben wird. Wird  $A$  dagegen durch einen umgangssprachlichen Satz  $S$ , der entweder wahr oder falsch ist, erklärt, schreiben wir  $A \iff S$ .

Um Klammern zu sparen, schreiben wir anstelle von  $\exists x(E)$  (gelesen: „Es existiert ein  $x$  mit der Eigenschaft  $E$ “) kurz  $\exists x : E$ . Entsprechendes sei für Formeln, die das Zeichen  $\forall$  enthalten, vereinbart. Außerdem steht  $\forall x \exists y : \dots$  für  $\forall x (\exists y \dots)$ , usw.

Erste Anwendungen obiger Zeichen folgen im nächsten Abschnitt, so daß wir hier auf Beispiele verzichten können. Die mathematische Theorie zu diesen Zeichen ist Gegenstand der sogenannten *Aussagenlogik* und *Prädikatenlogik*, von denen wir Teile im Abschnitt 1.6 behandeln werden.

## 1.2 Elemente der Mengenlehre

Wir beginnen mit der Einführung des Mengenbegriffs nach dessen Begründer Georg Cantor<sup>1</sup>:

**„Definition“** Eine **Menge** ist jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Das Wort Definition steht hier in Anführungszeichen, da der zu erklärende Begriff *Menge* mittels weiterer, undefinierter Begriffe (z.B. Objekt) erläutert wird. Unter einer echten Definition versteht man dagegen die Erklärung eines neuen Begriffs aus bereits definierten Begriffen. Wir werden weiter unten sehen, daß die obige Definition sehr schnell zu Unklarheiten und sogar zu logischen Widersprüchen (!) führt. Man hat deshalb versucht (bzw. man versucht immer noch), den Mengenbegriff exakter zu fassen. Das ist jedoch letztlich unmöglich, denn irgendwelche Begriffe muß man undefiniert lassen, um die erste Definition einer Theorie angeben zu können. Es ist jedoch gelungen<sup>2</sup>, den Mengenbegriff so einzuführen, daß zumindest bis heute keine logischen Widersprüche herleitbar waren. Dieser exakte Weg der Begründung der Mengenlehre kann hier jedoch aus Platzgründen nicht angegeben werden. Wir bleiben also bei der obigen naiven „Definition“, müssen jedoch beim Umgang damit vorsichtig sein. Warum das so ist, wird nach der Angabe einiger Vereinbarungen und Bezeichnungen an zwei Beispielen erläutert.

Zunächst einige **Vereinbarungen**:

---

<sup>1</sup> Georg Cantor (1845–1918). Er schrieb von 1875 bis 1884 grundlegende Arbeiten zur Mengenlehre und legte damit das Fundament für das moderne Verständnis vom Wesen der Mathematik.

Wer mehr über Cantor und die später noch erwähnten Mathematikern wissen möchte, sei auf [Mes 73], [Wuß-A 89] oder [Wuß 2008] verwiesen. Einen ersten Überblick über die Geschichte der Mathematik mit vielen Verweisen auf weitere Literatur findet man in [Wuß 89]. Historische Anmerkungen zu den in diesem Band behandelten Teilgebieten der Mathematik, die über eine Kurzübersicht hinausgehen, entnehme man [Alt 2003], [Scr-S 2003] und [Bri 83].

<sup>2</sup> Siehe z.B. [Ass 75].

- Bezeichnungen für Mengen: große Buchstaben;  
 Bezeichnungen für die Elemente der Mengen: kleine Buchstaben;  
 Kurzschreibweise für „ $x$  ist Element von  $M$ “:  $x \in M$ ;  
 Kurzschreibweise für „ $x$  ist nicht Element von  $M$ “:  $x \notin M$ .

Eine Menge  $M$  kann man (u.a.) auf drei Arten angeben:

(1.) Durch eine (unmißverständliche) verbale Formulierung.

**Beispiel**  $M$  sei die Menge aller im Jahre 2000 an der Rostocker Universität immatrikulierten Studenten.

(2.) Durch Aufzählen (falls möglich) der Elemente  $a_1, a_2, \dots$  der Menge  $M$ .  
 Wir schreiben:  $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ .

(3.) Durch eine charakteristische Eigenschaft  $E$  für Objekte aus einer Grundgesamtheit  $G$ , die genau den Elementen von  $M$  zukommen soll.

Wir schreiben:  $M := \{x \mid x \in G \text{ erfüllt } E\}$  oder

$$M := \{x \in G \mid x \text{ erfüllt } E\}.$$

**Beispiel**  $G := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(die Menge der natürlichen Zahlen),

$$M := \{x \in G \mid *x \text{ ist eine gerade Zahl}\}.$$

Nun zwei Beispiele zur Erläuterung der Schwierigkeiten mit dem oben definierten Mengenbegriff.

Erstes **Beispiel**

Ist

$$A := \underbrace{\dots \{ \{ \{ \{ \{ \{ a \} \} \} \} \} \} \} \} \dots}_{\substack{\text{unendlich} \\ \text{viele} \\ \text{Klammern}}}$$

eine Menge?

Diese Frage ist nach obiger Definition einer Menge nicht zu beantworten. Wer  $A$  als Menge akzeptieren will (er muß es nicht!), der hat als nächstes zu klären, ob  $A \in A$  gilt.

Zweites **Beispiel**

Sei  $M := \{x \mid x \text{ Menge} \wedge x \notin x\}$ , d.h.,  $M$  ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.  $M$  ist nach obiger „Definition“ offensichtlich eine Menge. Jedoch

aus  $M \in M$  folgt  $M \notin M$  und

aus  $M \notin M$  folgt  $M \in M$ .

Zitat aus [Lid-P 82]:

„Wie man sich dreht und wendet: es geht nicht – es bleibt uns nur der Strick!“

Das obige zweite Beispiel heißt nach Bertrand Russell (1872–1970) **Russellsches Paradoxon**, obwohl es nicht nur paradox ist, sondern in eine logische Sackgasse führt.

Halten wir also fest:

*Vorsicht bei zu großzügiger Mengenbildung! Man vermeide unendlich viele Klammern (d.h., man bilde nur in endlich vielen Schritten aus bekannten Mengen neue Mengen) und definiere nicht so global, wie etwa „ $M$  sei die Menge aller Mengen“!*

Besonders häufig auftretende Mengen erhalten von uns besondere **Bezeichnungen** und Namen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{Menge der natürlichen Zahlen}$$

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \quad \text{Menge der Primzahlen}$$

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} \quad \text{Menge der ganzen Zahlen}$$

$$\mathbb{Q} := \{x \mid \exists a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{N} : x = \frac{a}{b}\} \quad \text{Menge der rationalen Zahlen}$$

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist ein (endlicher oder unendlicher) Dezimalbruch}\} \quad \text{Menge der reellen Zahlen}$$

$$\mathbb{C} := \{x \mid \exists a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : x = a + bi \wedge i^2 = -1\} \quad \text{Menge der komplexen Zahlen}$$

(Ausführlich wird  $\mathbb{C}$  im Abschnitt 2.3 behandelt.)

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X^+ := \{x \in X \mid x > 0\} \text{ für } X \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

$$X_0^+ := \{x \in X \mid x \geq 0\} \text{ für } X \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Auf eine exakte Definition der Zahlenmengen  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  wollen wir an dieser Stelle verzichten und uns mit der naiven Vorstellung begnügen, daß man sich die reellen Zahlen geometrisch als Punkte auf einer Geraden vorstellen kann, wobei  $\mathbb{Q}$  die Gerade noch nicht, jedoch  $\mathbb{R}$  diese Gerade „ausfüllt“.

Die üblichen Rechenregeln für die Zahlenmengen  $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  setzen wir nachfolgend als bekannt voraus. Als spezielle Eigenschaft von  $\mathbb{N}$  (bzw.  $\mathbb{N}_0$ ) sei le-

diglich genannt, daß jede Menge natürlicher Zahlen, die aus mindestens einem Element besteht, ein kleinstes Element enthält. Mit Hilfe dieser Eigenschaft läßt sich nun ein wichtiges Beweisverfahren, die sogenannte **vollständige Induktion**, begründen.

**Satz 1.2.1** *Sei  $A(n)$  eine Aussage über alle natürlichen Zahlen  $n \geq a$  ( $a$  dabei aus  $\mathbb{N}$  und fest gewählt).  $A(n)$  ist für alle  $n \geq a$  richtig, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

- (I)  *$A(a)$  ist richtig.*
- (II) *Aus der Annahme der Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n$  mit  $a \leq n \leq k$  folgt stets die Gültigkeit von  $A(k+1)$ .*

*Beweis.*<sup>3</sup> Angenommen, (I) und (II) sind erfüllt, jedoch gilt  $A(n)$  nicht für alle  $n \geq a$ . Dann gibt es ein kleinstes  $b$ , für das  $A(b)$  falsch ist, wobei  $b > a$  (wegen (I)). Folglich ist  $A(b-1)$  richtig und  $b-1 \geq a$ . Das ist jedoch ein Widerspruch zu (II). ■

(I) aus obigem Satz wird **Induktionsanfang** und (II) **Induktionsschritt** genannt, wobei die in (II) getroffene Annahme oft auch **Induktionsvoraussetzung** und die Begründung für (II) **Induktionsbeweis** heißt.

Man beachte, daß in (II) keine Aussage über die Begründung, mit der man von  $A(n)$  für  $a \leq n \leq k$  zu  $A(k+1)$  gelangt, gemacht wird. Diese Begründung kann also im Prinzip für jedes  $n$  eine andere sein; das Versagen einer Beweisidee für gewisses  $k$  läßt also keinen Schluß auf das Versagen der vollständigen Induktion bei einer konkreten Aufgabenstellung zu. Außerdem kann es möglich sein, daß eine bestimmte Beweisidee beim Induktionsschritt die Richtigkeit der Behauptung für paarweise verschiedene Zahlen  $n \leq k$  erfordert. In diesem Fall ist der Induktionsanfang (I) nicht nur für eine Zahl, sondern entsprechend für mehrere Zahlen durchzuführen. Ein Beispiel dazu findet man in der ÜA A.1.8, (h).

Die vollständige Induktion wird von uns vorrangig als Beweishilfsmittel Verwendung finden. Sie kann jedoch auch bei der sogenannten rekursiven Definition bzw. rekursiven Konstruktion von Objekten herangezogen werden:

Man definiert von  $n$  ( $\in \mathbb{N}$ ) abhängige Objekte  $Ob(n)$ , indem man zuerst  $Ob(1)$  angibt und dann ein Verfahren, mit dem man  $Ob(n+1)$  aus  $Ob(n)$  (bzw.  $Ob(k)$  mit  $k \leq n$ ) erhalten kann. Wegen Satz 1.2.1 ist damit  $Ob(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert.

---

<sup>3</sup> Dies ist unser erstes Beispiel für einen sogenannten **indirekten Beweis**. Wir nehmen an, daß bei den gegebenen Voraussetzungen die Behauptung falsch ist, und zeigen, daß sich hieraus ein Widerspruch ergibt. Geht man davon aus, daß eine Behauptung entweder wahr oder falsch ist, folgt hieraus die Richtigkeit der Behauptung.

Der folgende Satz mit Eigenschaften von Primzahlen ist den meisten Lesern sicher aus der Schule her bekannt. Sein Beweis dient hier zur Erläuterung der bisher eingeführten Beweistypen (vollständige Induktion und indirekter Beweis). Wir werden später sehen, daß Primzahlen wichtige Anwendungen besitzen.

### Satz 1.2.2

- (a) Jede natürliche Zahl  $n$  mit  $n \geq 2$  läßt sich auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}, \quad (1.1)$$

wobei  $p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{P}$  mit  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ .

- (b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

*Beweis.* (a): Wir beginnen mit dem Beweis der Existenz von (1.1) durch vollständige Induktion über  $n \geq 2$ .

(I)  $n = 2$ . Da 2 eine Primzahl ist, gilt offenbar (1.1) für  $n = 2$ .

(II)  $k - 1 \rightarrow k$ . Angenommen, für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $2 \leq n \leq k - 1$  ist (1.1) richtig. Für  $n = k$  sind zwei Fälle möglich:

Fall 1:  $k \in \mathbb{P}$ .

Dann gilt offenbar (1.1).

Fall 2:  $k \notin \mathbb{P}$ .

In diesem Fall existieren Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $k = a \cdot b$ ,  $1 < a < k$  und  $1 < b < k$ . Für  $a$  und  $b$  existieren laut Annahme Darstellungen in Form von Produkten aus Primzahlpotenzen. Wegen  $k = a \cdot b$  besitzt dann auch  $k$  eine Darstellung als Produkt von Primzahlpotenzen.

Die Eindeutigkeit der Darstellung (1.1) läßt sich durch einen indirekten Beweis zeigen. Angenommen, für eine gewisse natürliche Zahl  $n$  existieren zwei verschiedene Darstellungen der im Satz angegebenen Art. Durch Division von gemeinsamen Potenzen gelangt man dann zu einem Widerspruch (ausführlich: ÜA).

(b): Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, die mit  $p_1, p_2, \dots, p_t$  bezeichnet seien, wobei  $p_1 < p_2 < \dots < p_t$  gelte. Wir betrachten die natürliche Zahl

$$n := 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_t.$$

Nach (a) existieren gewisse  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{N}_0$  mit

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}.$$

Da  $n > 1$ , ist mindestens ein  $\alpha_i$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  von 0 verschieden. Aus obigen Darstellungen von  $n$  folgt dann, daß  $p_i$  sowohl ein Teiler von  $n$  als auch von  $n - 1$  ist, d.h., es existieren  $u, v \in \mathbb{N}$  mit  $n = p_i \cdot u$  und  $n - 1 = p_i \cdot v$ . Folglich gilt auch  $p_i \cdot (u - v) = 1$ , was wegen  $p_i > 1$  und  $p_i, u, v \in \mathbb{N}$  nicht sein

kann. Also war unsere Annahme falsch und damit die Behauptung richtig. ■

Wir kommen nun zu den Grundbegriffen bzw. wichtigen Begriffen der Mengenlehre.

### Definitionen

- Die Menge, die aus gar keinem Element besteht, heißt **leere Menge** und wird mit  $\emptyset$  bezeichnet, d.h., z.B.

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}.$$

- $A$  und  $B$  seien Mengen.

$A \subseteq B$  („ $A$  ist Teilmenge von  $B$ “ bzw. „ $B$  ist Obermenge von  $A$ “)

$$\iff \forall x \in A : x \in B.$$

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

$$A \neq B \iff \neg(A = B).$$

$$A \subset B \text{ („}A \text{ ist echte Teilmenge von } B\text{“)} \iff A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Außerdem gilt für beliebige Mengen  $A, B, C$ :

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C.$$

Man beachte:

$$\{a\} \notin \{a\}, \text{ aber } \{a\} \subseteq \{a\} \text{ und } a \in \{a\}.$$

$$\{\{a\}\} \neq \{a\}.$$

**Definition** Sei  $A$  eine Menge. Die Menge

$$\mathfrak{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

aller Teilmengen von  $A$  heißt **Potenzmenge** von  $A$ .

**Beispiel**  $A = \{0, 1\}$ ,

$$\mathfrak{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

**Satz 1.2.3** Sei  $M$  eine endliche, nichtleere Menge und bezeichne  $|M|$  die Anzahl ihrer Elemente. Dann gilt

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

*Beweis.* ÜA A.1.11. ■

Die Aussage von Satz 1.2.3 motiviert auch folgende übliche Bezeichnung für die Potenzmenge einer Menge  $M$ :

$$2^M.$$

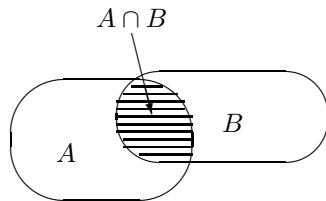
Für beliebige Mengen  $A, B$  kann man folgende vier

### Mengenoperationen

definieren, die wir uns mittels sogenannter **Venn<sup>4</sup>-Diagramme (Eulersche<sup>5</sup> Kreise)** veranschaulichen:

- **Durchschnitt von  $A$  und  $B$ :**

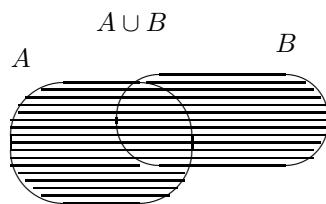
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



Falls  $A \cap B = \emptyset$ , nennen wir  $A$  und  $B$  **disjunkt**.

- **Vereinigung von  $A$  und  $B$ :**

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



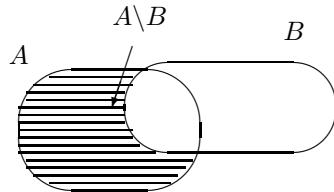
- **Differenz von  $A$  und  $B$ :**

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

---

<sup>4</sup> John Venn (1834–1923), englischer Philosoph.

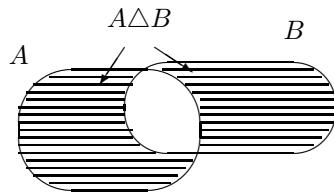
<sup>5</sup> Leonhard Euler (1701–1783), schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph. Schrieb entscheidende Beiträge zu fast allen damaligen Gebieten der Mathematik, Physik und Astronomie. Verfasser hervorragender Lehrbücher. Einige von ihm eingeführte Begriffe und Bezeichnungen werden noch heute verwendet.



Bei einer fixierten Grundmenge  $G$  und  $A \subseteq G$  bezeichnen wir  $G \setminus A$  auch mit  $\overline{A}$  und nennen diese Menge das **Komplement** von  $A$  (bez.  $G$ ).

- **Symmetrische Differenz von  $A$  und  $B$ :**

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Zusammenfassend geben wir die oben definierten Mengenoperationen noch in Form von Tabellen an, die man zum späteren Nachweis von Rechenregeln für diese Operationen heranziehen kann. Dazu schreiben wir die vier möglichen Fälle für ein beliebiges  $x$ :

- $x \notin A$  und  $x \notin B$
- $x \notin A$  und  $x \in B$
- $x \in A$  und  $x \notin B$
- $x \in A$  und  $x \in B$

kurz durch

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

auf.

Eine vollständige Charakterisierung der Mengen  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  und  $A \Delta B$  liefert dann die nachfolgende Tabelle, in der eine 0 oder 1 in der entsprechenden Spalte unter  $A \cap B, \dots$  angibt, ob im jeweiligen Fall  $x$  zu dieser Menge nicht gehört oder gehört:

$A$	$B$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$	$A \Delta B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Allgemeiner kann man für Mengen  $A_i$  ( $i$  aus einer Indexmenge) Durchschnitte und Vereinigungen durch

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\} \text{ und}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

definieren. Auch üblich sind die Schreibweisen

$$\bigcap_{A \in S} A \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{A \in S} A,$$

wobei  $S$  ein Mengensystem (z.B.  $S := \{A_i \mid i \in I\}$ ) bezeichnet.

Eine weitere Beschreibung für die Menge  $\bigcap_{A \in S} A$  (bzw.  $\bigcup_{A \in S} A$ ) ist

$$\bigcap \{A \mid A \in S\} \quad (\bigcup \{A \mid A \in S\}).$$

Im nachfolgenden Satz fassen wir wesentliche Eigenschaften der oben definierten Mengen zusammen.

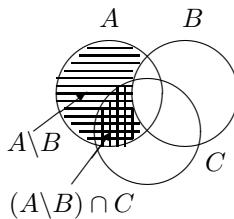
**Satz 1.2.4** Für beliebige Teilmengen  $A, B, C$  eines Grundbereichs  $G$  gilt:

- (a)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$  *(Assoziativgesetze)*
- (b)  $A \cap B = B \cap A$   
 $A \cup B = B \cup A$   
 $A \Delta B = B \Delta A$  *(Kommutativgesetze)*
- (c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  *(Distributivgesetze)*
- (d)  $A \cup A = A$   
 $A \cap A = A$  *(Idempotenzgesetze)*
- (e)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$   
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$   
 $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$   
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- (f)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$   
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  *(Morgansche Gesetze)*
- (g)  $\overline{\overline{A}} = A.$

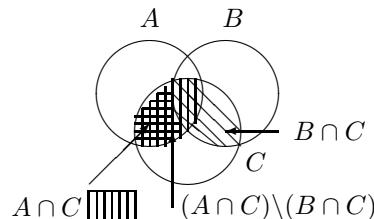
*Beweis.* Wir wollen hier nur  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$  beweisen. Die Begründungen für die anderen Aussagen verlaufen analog.

Zunächst eine Veranschaulichung unserer Behauptung durch ein Venn-Diagramm:

linke Seite der Gleichung:



rechte Seite der Gleichung:



Diese Veranschaulichung läßt vermuten, daß unsere Behauptung richtig ist. Sie ist jedoch kein Beweis! Nachfolgend werden zwei Beweise angegeben. Im ersten Beweis wird gezeigt, daß  $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \cap C) \setminus (B \cap C)$  und  $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap C$  gilt, woraus sich nach der Definition der Gleichheit von zwei Mengen die Behauptung  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$  ergibt.

$(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \cap C) \setminus (B \cap C)$  folgt aus

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap C &\implies x \in A \setminus B \wedge x \in C \\ &\implies (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in C \\ &\implies x \in A \cap C \wedge x \notin B \cap C \\ &\implies x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

$(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap C$  folgt aus

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) &\implies x \in A \cap C \wedge x \notin B \cap C \\
&\implies (x \in A \wedge x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\implies x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \\
&\implies x \in A \setminus B \wedge x \in C \\
&\implies x \in (A \setminus B) \cap C.
\end{aligned}$$

Ein weiterer Beweis wird durch die folgende Tabelle erbracht, indem – die oben vereinbarte Codierung benutzend – für die möglichen 8 Fälle der Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit eines beliebigen Elements  $x$  zu den Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  aufgeschrieben wird, welche Zugehörigkeit/Nichtzugehörigkeit von  $x$  zu den in der ersten Zeile angegebenen Mengen sich hieraus ergibt. Die Gleichheit der unterstrichenen Spalten liefert die Behauptung.

$A$	$B$	$C$	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	<u>0</u>	1	1	<u>0</u>

**Definitionen** Seien  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen. Die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen  $A, B$ .

Die Elemente  $(a, b)$  von  $A \times B$  nennt man **geordnete Paare**, wobei

$$(a, b) = (c, d) : \iff (a = c \wedge b = d).$$

Allgemeiner:

Seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nichtleere Mengen.

Die Menge

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n &= \bigotimes_{i=1}^n A_i \text{ (oder } = \prod_{i=1}^n A_i) \\ &:= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \in A_i\} \end{aligned}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Die Elemente von  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  nennt man (geordnete)  **$n$ -Tupel**, wobei

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) : \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i = b_i.$$

Weiter seien  $A^1 := A$ ,  $A^2 := A \times A$ ,  $A^3 := A \times A \times A, \dots$ .

Man beachte, daß  $A \times (A \times A) = A \times A^2 \neq A^3$  ist.

Falls  $A_i = \emptyset$  für ein gewisses  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sei  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \emptyset$ .

**Beispiel** Wählt man  $A = \{0, 1\}$  und  $B = \{\emptyset, a\}$ , so gilt

$$A \times B = \{(0, \emptyset), (1, \emptyset), (0, a), (1, a)\},$$

$$A^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \{0, 1\}\} \text{ und}$$

$$A \times A^2 = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A^2\}.$$

**Satz 1.2.5** Für beliebige nichtleere endliche Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gilt:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

*Beweis.* ÜA 1.1.12. ■

### 1.3 Relationen

Zwischen den Elementen einer Menge können gewisse Beziehungen („Relationen“) wie z.B. „ $<$ “, „teilt“, „ist Summe von“, u.ä. bestehen. Exakt (und ziemlich abstrakt) läßt sich so etwas mathematisch mit Hilfe des folgenden Begriffes beschreiben:

**Definition** Es sei  $A$  eine nichtleere Menge und  $k \in \mathbb{N}$ .

$R$  heißt  $k$ -stellige ( $k$ -äre) **Relation in  $A$**  : $\iff R \subseteq A^k$ .

**Beispiel** Sei  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Relationen in  $A$  sind dann

$$\begin{aligned} R_1 &:= \emptyset, \\ R_2 &:= \{(a, a) \mid a \in A\}, \\ R_3 &:= \{(a, b) \in A^2 \mid a|b\} \\ &= R_2 \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}, \\ R_4 &:= \{(a, b, c) \in A^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\} = \{(3, 4, 5), (4, 3, 5)\}. \end{aligned}$$

Besonders wichtig sind zweistellige Relationen  $R$  in  $A$ , die auch

#### binäre Relationen

genannt werden, und mit denen wir uns im weiteren beschäftigen wollen. Als Schreibweise für  $(a, b) \in R$  ( $\subseteq A^2$ ) ist bei binären Relationen auch üblich:

$$aRb.$$

Mögliche Eigenschaften binärer Relationen  $R$  in  $A$  sind:

$R$ reflexiv	$\iff \forall a \in A : (a, a) \in R;$
$R$ irreflexiv	$\iff \forall a \in A : (a, a) \notin R;$
$R$ symmetrisch	$\iff \forall a, b \in A : (a, b) \in R \implies (b, a) \in R;$
$R$ antisymmetrisch	$\iff \forall a, b \in A : ((a, b) \in R \implies (b, a) \notin R \vee a = b);$
$R$ asymmetrisch	$\iff \forall a, b \in A : (a, b) \in R \implies (b, a) \notin R;$
$R$ transitiv	$\iff \forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \implies (a, c) \in R;$
$R$ linear	$\iff \forall a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

Man beachte, daß die leere Menge stets die obigen Bedingungen der Form ...  $\implies$  ... erfüllt. Außerdem bedeutet die Schreibweise  $(a, b)$  nicht automatisch, daß  $a \neq b$  ist. Damit ist z.B. die Relation  $\{(x, x) \mid x \in A\}$  nicht nur eine reflexive, sondern auch eine transitive, symmetrische und antisymmetrische Relation in  $A$ .

Eine lineare Relation ist offensichtlich auch reflexiv.

Mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnungen kann man gewisse Klassen von Relationen einführen:

### Definitionen

$R$  heißt **reflexive teilweise Ordnung auf  $A$**

: $\iff R$  ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch;

$R$  heißt **lineare Ordnung (totale Ordnung)**

: $\iff R$  ist transitiv, antisymmetrisch und linear;

$R$  heißt **irreflexive teilweise Ordnung auf  $A$**

: $\iff R$  ist irreflexiv und transitiv;

$R$  heißt **Äquivalenzrelation auf  $A$**

: $\iff R$  ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Einige **Bemerkungen** und **Beispiele** zu den **Ordnungsrelationen** (kurz **Ordnungen** genannt):

Ordnungen sind Verallgemeinerungen der üblichen „ $\leq$ “- bzw. „ $<$ “-Beziehung von reellen Zahlen. Bekanntlich gilt:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} a \leq a & (\text{d.h., } \leq \text{ ist reflexiv}) \\ a \leq b \implies (\neg(b < a) \vee a = b) & (\text{d.h., } \leq \text{ ist antisymmetrisch}) \\ (a \leq b \wedge b \leq c) \implies a \leq c & (\text{d.h., } \leq \text{ ist transitiv}) \\ a < b \implies a \neq b & (\text{d.h., } < \text{ ist irreflexiv}) \\ (a < b \wedge b < c) \implies a < c & (\text{d.h., } < \text{ ist transitiv}) \\ a \leq b \vee b \leq a & (\text{d.h., } \leq \text{ ist linear}). \end{array}$$

Allgemein kann man Ordnungen in einer Menge  $A$  als Festlegungen einer „Rangfolge“ von Elementen der Menge  $A$  auffassen, wobei Ordnungen nicht unbedingt linear sein müssen, d.h., nicht für jedes Paar von Elementen aus  $A$  muß festgelegt sein, welches vom „größeren Rang“ ist. Gilt für eine Ordnung  $R$  in  $A$  und gewissen Elementen  $a, b \in A$ , daß  $(a, b) \notin R$  und  $(b, a) \notin R$  ist, so nennt man die Elemente  $a$  und  $b$  bezüglich  $R$  **unvergleichbar**.

Dazu ein **Beispiel**

Sei  $A := \mathfrak{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . Die Relation

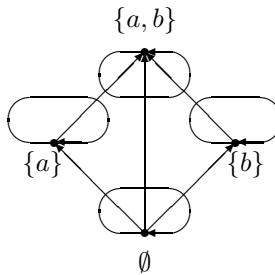
$$\begin{aligned} R := & \{(X, Y) \in A \times A \mid X \subseteq Y\} \\ = & \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{a, b\}), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{a, b\}), \\ & (\{b\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, b\})\} \end{aligned}$$

ist offenbar eine reflexive teilweise Ordnung.

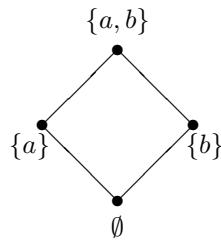
Indem man sich die Elemente von  $A$  durch Punkte symbolisiert und zeichnet, falls  $(X, Y)$  zu  $R$  gehört, kann man sich  $R$  wie folgt veranschaulichen:

$Y$



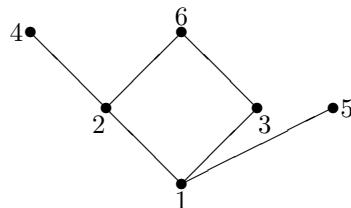


Verzichtet man auf diejenigen Pfeile, die sich aus der Transitivität und Reflexivität ergeben und vereinbart man, die „größeren“ Elemente oberhalb der „kleineren“ Elementen anzurichten, so genügt zur Veranschaulichung der Relation  $R$  folgende Zeichnung:



Eine solche Darstellung einer reflexiven teilweisen Ordnung nennt man **Hasse<sup>6</sup>-Diagramm**.

So gehört z.B. zum Hasse-Diagramm



die Relation

$$\begin{aligned} & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \\ & \quad (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\} \\ & (= \{(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 \mid a \text{ teilt } b\}). \end{aligned}$$

Ein **Beispiel** für eine irreflexive teilweise Ordnung ist

$$\{(X, Y) \in (\mathfrak{P}(A))^2 \mid X \subset Y\}.$$

---

<sup>6</sup> Helmut Hasse (1898–1979), deutscher Mathematiker.

Auch für solche Relationen kann man Hasse-Diagramme vereinbaren, wobei die Irreflexivität extra anzugeben ist.

Es sei noch bemerkt, daß man anstelle von  $(a, b) \in R$  ( $R$  sei Ordnungsrelation) auch oft

$$\begin{aligned} a \leq_R b, & \text{ falls } R \text{ reflexiv, und} \\ a <_R b, & \text{ falls } R \text{ irreflexiv ist,} \end{aligned}$$

schreibt.

Weitere Begriffe und Bezeichnungen zu den Ordnungsrelationen führen wir später an den Stellen ein, wo sie benötigt werden. Wer mehr über die Ordnungstheorie wissen möchte, dem sei [Ern 82] empfohlen.

Weiter mit

### Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen sind „verallgemeinerte Gleichheiten“, da „=“ (definiert für Elemente einer gewissen Menge  $A$ ) folgende Eigenschaften besitzt:

$\forall a, b, c \in A$ :

$$\begin{aligned} a = a & \quad (\text{d.h., } = \text{ ist reflexiv}) \\ a = b \implies b = a & \quad (\text{d.h., } = \text{ ist symmetrisch}) \\ (a = b \wedge b = c) \implies a = c & \quad (\text{d.h., } = \text{ ist transitiv}). \end{aligned}$$

Auf jeder Menge  $A$  kann man stets zwei sogenannte **triviale Äquivalenzrelationen** definieren:

$$\begin{aligned} R_0 &:= \{(a, a) \mid a \in A\} \text{ und} \\ R_1 &:= A \times A. \end{aligned}$$

Ein nicht-triviales Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , die man als Menge aller Brüche auffassen kann, ist

$$\{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid a \cdot d = b \cdot c\},$$

die bekannte Gleichheit von Brüchen.

Zur näheren Beschreibung von Äquivalenzrelationen benötigen wir die Begriffe *Äquivalenzklasse* und *Zerlegung*, die als nächstes definiert werden sollen.

**Definition** Sei  $a \in A$  und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ . Die Menge

$$[a]_R := \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$$

(kurz nur mit  $[a]$  bezeichnet)

heißt **Äquivalenzklasse** von  $a$  (bez.  $R$ ).

**Einige Beispiele**

Für die trivialen Äquivalenzrelationen  $R_0$  und  $R_1$  auf einer Menge  $A$  und für jedes Element  $a \in A$  gilt:

$$[a]_{R_0} = \{a\} \text{ und } [a]_{R_1} = A.$$

Falls  $A := \{0, 1, 2, 3\}$  und

$$R := \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 1), (1, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 3), (3, 1)\},$$

haben wir

$$[0]_R = \{0, 1, 3\} = [1]_R = [3]_R \text{ sowie } [2]_R = \{2\}.$$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen sind zusammengefaßt im

**Satz 1.3.1** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $A$ . Dann ist

- (1)  $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$ ;
- und für beliebige  $a, b \in A$  gilt:
- (2)  $[a]_R = [b]_R \iff (a, b) \in R$ ;
- (3)  $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \vee [a]_R = [b]_R$ .

*Beweis.* (1) gilt, da  $a \in [a]_R$  für jedes  $a \in A$ .

(2): „ $\implies$ “: Sei  $[a] = [b]$ . Dann ist  $b \in [a]$  und folglich  $(a, b) \in R$ .

„ $\impliedby$ “: Sei  $(a, b) \in R$ . Aus der Symmetrie von  $R$  ergibt sich hieraus auch  $(b, a) \in R$ .

Wir zeigen  $[b] \subseteq [a]$ . Bezeichne  $x$  ein beliebiges Element aus  $[b]$ . Dann gilt  $(b, x) \in R$ . Wegen  $(a, b) \in R$  und der Transitivität von  $R$  ergibt sich hieraus  $(a, x) \in R$ , d.h.,  $x \in [a]$ . Also gilt  $[b] \subseteq [a]$ .

Analog zeigt man  $[a] \subseteq [b]$ . Folglich haben wir  $[a] = [b]$ .

(3): Angenommen, es existieren  $a, b \in A$  mit  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$  und  $[a] \neq [b]$ . Dann gibt es ein  $c$ , das sowohl zu  $[a]$  als auch zu  $[b]$  gehört, d.h., es gilt  $(a, c) \in R$  und  $(b, c) \in R$ . Wegen der Symmetrie von  $R$  haben wir  $(c, b) \in R$  und (wegen der Transitivität von  $R$ )  $(a, b) \in R$ . Nach (2) gilt dann  $[a] = [b]$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

**Definition** Sei  $A$  eine nichtleere Menge. Nichtleere Mengen  $A_i$  ( $i \in I$ ) nennt man eine **Zerlegung (Partition, Klasseneinteilung)** der Menge  $A$ , wenn

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \wedge \quad (\forall i, j \in I : A_i = A_j \vee A_i \cap A_j = \emptyset)$$

gilt. Man sagt „ $A$  ist die **disjunkte Vereinigung der Mengen  $A_i$** “. Eine Zerlegung wird manchmal auch in der Form

$$Z := \{A_i \mid i \in I\}$$

angegeben, und die Elemente der Menge  $Z$  nennt man **Blocks**.

### Beispiele

Nach Satz 1.3.1, (1), (3) bilden die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf  $A$  eine Zerlegung der Menge  $A$ .

Betrachtet man speziell die Äquivalenzrelation

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,2), (2,0)\}$$

auf  $A = \{0, 1, 2\}$ , so ist die zu  $R$  gehörende Zerlegung der Menge  $A$ :

$$A_1 = \{0, 2\}, A_2 = \{1\}.$$

Mit Hilfe von  $A_1, A_2$  kann man auch wieder zur Relation  $R$  gelangen, indem man

$$\{(a,b) \in A^2 \mid \{a,b\} \subseteq A_1 \vee \{a,b\} \subseteq A_2\} (= R)$$

bildet, womit man von  $R$  zu einer Zerlegung und von dieser Zerlegung wieder zu  $R$  gelangen kann. Allgemein gilt der

### Satz 1.3.2 (Hauptsatz über Äquivalenzrelationen)

Sei  $A$  eine nichtleere Menge. Dann gilt:

- (1) Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ , so bilden die Äquivalenzklassen  $[a]_R$  ( $a \in A$ ) eine Zerlegung von  $A$ .
- (2) Die Mengen  $A_i$  ( $i \in I$ ) mögen eine Zerlegung  $Z$  von  $A$  bilden. Dann ist die Relation

$$R_Z := \{(a,b) \in A^2 \mid \exists i \in I : \{a,b\} \subseteq A_i\}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $A$ .

Besteht die Zerlegung  $Z$  speziell aus den Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation  $R$ , so ist  $R_Z = R$ .

*Beweis.* (1) folgt aus Satz 1.3.1.

(2): Wegen  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist  $R_Z$  reflexiv.  $R_Z$  ist symmetrisch, da  $\{a,b\} = \{b,a\}$ .  $R_Z$  ist auch transitiv, da für beliebige  $a, b, c$  aus  $A$  nach den Eigenschaften einer Zerlegung gilt:

$$\begin{aligned} ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) &\implies \exists i, j \in I : \underbrace{\{a,b\} \subseteq A_i \wedge \{b,c\} \subseteq A_j}_{\implies A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies A_i = A_j} \\ &\implies \{a,c\} \subseteq A_i \implies (a,c) \in R_Z. \end{aligned}$$

Folglich ist  $R_Z$  eine Äquivalenzrelation, die nach Konstruktion wieder mit  $R$  übereinstimmt, falls die Zerlegung aus den Äquivalenzklassen von  $R$  besteht. ■

Der eben bewiesene Satz gibt uns die Möglichkeit, Äquivalenzrelationen mittels Zerlegungen zu definieren bzw. Zerlegungen durch Äquivalenzrelationen. Sehr oft macht man beim Anwenden dieser Begriffe deshalb keinen Unterschied zwischen Äquivalenzrelationen und ihren zugehörigen Zerlegungen.

Der nachfolgende Begriff wird im Kapitel 2 und im Band 2 benötigt.

**Definition** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $A$ . Die Menge

$$A/R := \{[a]_R \mid a \in A\}$$

(die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation  $R$ )

heißt **Faktormenge von  $A$  nach  $R$** .

Abschließend noch ein wichtiges **Beispiel** für eine Äquivalenzrelation auf der Menge der ganzen Zahlen, die sogenannte **Kongruenz modulo  $n$** : Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\equiv_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ teilt } a - b\}.$$

Für „ $n$  teilt  $x$ “ schreiben wir nachfolgend  $n|x$ . Offenbar gilt:

$(a, b) \in \equiv_n \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} \exists r \in \mathbb{N}_0 : a = x \cdot n + r \wedge b = y \cdot n + r \wedge 0 \leq r \leq n-1$ . Anstelle von  $(a, b) \in \equiv_n$  benutzen wir auch die Schreibweisen

$$a \equiv_n b \text{ bzw.}$$

$$a = b \pmod{n} \text{ (gesprochen: „}a \text{ kongruent } b \text{ modulo } n\text{“).}$$

Man prüft nun leicht nach (ÜA A.1.36), daß  $\equiv_n$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\mathbb{Z}$  ist. Für die Äquivalenzklassen dieser Relation gilt:

$$\begin{aligned} [0] &= \{0, n, -n, 2 \cdot n, -2 \cdot n, 3 \cdot n, -3 \cdot n, \dots\}, \\ [1] &= \{1, n+1, -n+1, 2 \cdot n+1, -2 \cdot n+1, \dots\}, \\ [2] &= \{2, n+2, -n+2, 2 \cdot n+2, -2 \cdot n+2, \dots\}, \\ &\vdots \\ [n-1] &= \{n-1, n+n-1, -n+n-1, 2 \cdot n+n-1, -2 \cdot n+n-1, \dots\}, \\ [n] &= [0], \\ [n+1] &= [1], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Faktormenge von  $\mathbb{Z}$  nach  $\equiv_n$  ist damit

$$\{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\},$$

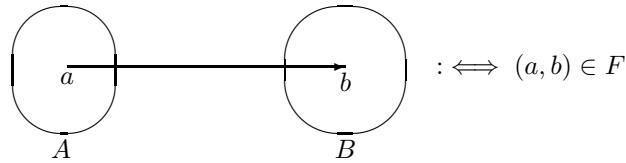
die wir üblicherweise kurz mit  $\mathbb{Z}_n$  bezeichnen wollen.

## 1.4 Korrespondenzen, Abbildungen und Verknüpfungen

**Definition** Es seien  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen.

$F$  heißt **Korrespondenz aus  $A$  in  $B$** : $\iff F \subseteq A \times B$ .

Zwecks geometrischer Veranschaulichung von Korrespondenzen vereinbaren wir:



### Beispiele

- (1.) Binäre Relationen sind Korrespondenzen ( $A = B$ ).
- (2.) Für  $A = \{0, 1, 2\}$  und  $B = \{a, b\}$  ist z.B.  $F = \{(0, a), (0, b), (1, b)\}$  eine Korrespondenz aus  $A$  in  $B$ .

**Definitionen** Sei  $F \subseteq A \times B$  eine Korrespondenz. Dann heißt

- $D(F) := \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in F\}$  der **Definitionsbereich** von  $F$ ,
- $W(F) := \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in F\}$  der **Wertebereich** von  $F$ .

Man sagt:

- $F$  ist eine Korrespondenz **aus**  $A$  **in**  $B$   $\iff D(F) \subseteq A \wedge W(F) \subseteq B$ ,
- $F$  ist eine Korrespondenz **aus**  $A$  **auf**  $B$   $\iff D(F) \subseteq A \wedge W(F) = B$ ,
- $F$  ist eine Korrespondenz **von**  $A$  **in**  $B$   $\iff D(F) = A \wedge W(F) \subseteq B$ ,
- $F$  ist eine Korrespondenz **von**  $A$  **auf**  $B$   $\iff D(F) = A \wedge W(F) = B$ .

Aus vorgegebenen Korrespondenzen lassen sich neue Korrespondenzen bilden. Dazu zwei

### Definitionen

- Für die Korrespondenz  $F \subseteq A \times B$  sei

$$F^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in F\}$$

die zu  $F$  **inverse Korrespondenz (Umkehrkorrespondenz)** aus  $B$  **in**  $A$ .

- Seien  $F \subseteq A \times B$  und  $G \subseteq B \times C$ . Dann heißt die Menge

$$F \square G := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G\}$$

**Verkettung (Produkt, Hintereinanderausführung)** von  $F$  und  $G$ .

### Beispiele

- (1.) Seien  $F = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 3)\}$  und  $G = \{(0, 2), (1, 1)\}$ . Dann gilt  $F^{-1} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 2), (3, 2)\}$  und  $F \square G = \{(0, 2), (0, 1), (2, 2)\}$ .
- (2.) Für  $F = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$  und  $G = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$  gilt  $F \square G = \{(x, \sin(x^2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

**Satz 1.4.1** Seien  $F \subseteq A \times B$ ,  $G \subseteq B \times C$  und  $H \subseteq C \times D$  Korrespondenzen. Dann gilt:

$$(1) \quad F \square (G \square H) = (F \square G) \square H;$$

$$(2) \quad (F \square G)^{-1} = G^{-1} \square F^{-1}.^7$$

*Beweis.* (1) ergibt sich aus folgenden Äquivalenzen, die für beliebiges  $a \in A$  und  $d \in D$  gelten:

$$\begin{aligned} (a, d) \in F \square (G \square H) &\iff \exists b \in B : (a, b) \in F \wedge (b, d) \in G \square H \\ &\iff \exists b \in B \exists c \in C : (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G \wedge (c, d) \in H \\ &\iff \exists c \in C : (a, c) \in F \square G \wedge (c, d) \in H \\ &\iff (a, d) \in (F \square G) \square H. \end{aligned}$$

(2) folgt aus

$$\begin{aligned} (c, a) \in (F \square G)^{-1} &\iff (a, c) \in F \square G \\ &\iff \exists b \in B : (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G \\ &\iff \exists b \in B : (b, a) \in F^{-1} \wedge (c, b) \in G^{-1} \\ &\iff (c, a) \in G^{-1} \square F^{-1}. \end{aligned}$$

■

Jetzt zu den (für die folgenden Abschnitte) wichtigen speziellen Korrespondenzen.

**Definition** Eine Korrespondenz  $f$  von  $A$  in  $B$  heißt (eindeutige) **Abbildung** (oder **Funktion** oder **Operator**) : $\iff \forall a \in A \exists! b \in B : (a, b) \in f$  ( $\iff ((D(f) = A) \wedge (\forall a \in A : (a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c))$ ).

Zur Bezeichnung von Abbildungen verwenden wir meist kleine Buchstaben. In der Regel werden wir Abbildungen  $f$  von  $A$  in  $B$  nicht als gewisse Teilmengen von  $A \times B$  angeben, sondern folgende Schreibweise verwenden:

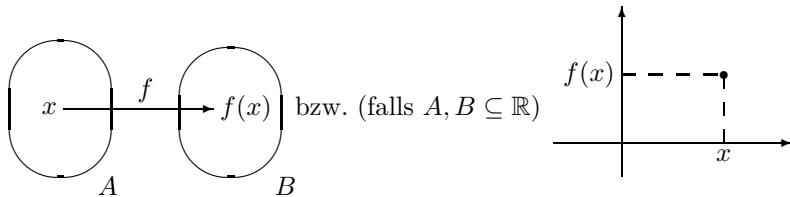
$$f : A \longrightarrow B, a \mapsto b = f(a).$$

$(a \mapsto b = f(a)$  steht für „ $(a, b) \in f$ “ und anstelle von  $b$  schreiben wir  $f(a)$ .) Daneben gibt es eine Reihe von anderen Möglichkeiten der Darstellung von Abbildungen, die je nach Art der Abbildung bzw. der Mengen  $A$  und  $B$  Verwendung finden. Wir nennen die drei wichtigsten:

- die analytische Darstellung (Funktionsgleichung):  
Die Abbildung  $f$  wird mit Hilfe von Formeln über einem Variablenalphabet und gewissen Symbolen beschrieben.  
z.B.  $f(x) = x^3 + 7x - 8$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) oder  $f(x) = \sin x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

<sup>7</sup> Entspricht einer Erfahrung aus dem täglichen Leben: Man zieht zuerst Strümpfe, dann Schuhe an. Das Ausziehen (das inverse Vorgehen) geschieht umgekehrt!

- die geometrische Darstellung:



- die tabellarische Darstellung:

$x$	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$a$	$b = f(a)$
$\vdots$	$\vdots$

**Beispiel** Es sei  $A = \mathbb{N}$  und  $B = \mathbb{R}$ . Dann ist  $f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = \sqrt{a}\}$  eine Abbildung, die man auch in der Form  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \sqrt{a}$  angeben kann.

**Definitionen** Es sei  $f : A \longrightarrow B$  eine Abbildung,  $A_0 \subseteq A$ ,  $B_0 \subseteq B$  und  $b \in B$ . Dann sei

- $f(A_0) := \{f(a) \mid a \in A_0\}$  („Bild“ von  $A_0$ ),
- $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$  („Urbild“ von  $b$ ),
- $f^{-1}(B_0) := \{a \in A \mid f(a) \in B_0\}$  („Urbild“ von  $B_0$ ),
- $f|_{A_0} := \{(a, f(a)) \mid a \in A_0\}$  bzw.  $f|_{A_0}$  sei die durch

$$f|_{A_0} : A_0 \longrightarrow B, a \mapsto f(a)$$

definierte Abbildung, die **Einschränkung** (oder **Beschränkung** oder **Restriktion**) von  $f$  auf  $A_0$  genannt wird.

Die Bezeichnungen aus den folgenden Definitionen werden wir nachfolgend oft benutzen.

**Definitionen** Es seien  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen und  $f : A \longrightarrow B$  eine Abbildung. Dann heißt

- die Abbildung  $\text{id}_{;A} : A \longrightarrow A, a \mapsto a$  die **identische Abbildung** von  $A$  auf  $A$ ;
- $f$  **injektiv** (oder eine **Injektion** oder **eineindeutig** oder **1-1-Abbildung**) : $\iff \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ ;

- $f$  surjektiv (oder eine **Surjektion**): $\iff W(f) = B$ ;
- $f$  bijektiv (oder eine **Bijektion**) : $\iff f$  ist injektiv und surjektiv.

**Satz 1.4.2** Seien  $f (\subseteq A \times B)$  und  $g (\subseteq B \times C)$  Abbildungen. Dann gilt

- (1)  $f \square g$  ist eine Abbildung  
( $f \square g : A \longrightarrow C, x \mapsto g(f(x))$ );
- (2)  $f, g$  injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv)  $\implies$   
 $f \square g$  injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv).

*Beweis.* (1): Angenommen,  $f \square g$  ist keine Abbildung. Dann gibt es gewisse  $a, c, c'$  mit  $c \neq c'$ ,  $(a, c) \in f \square g$  und  $(a, c') \in f \square g$ . Folglich gilt für gewisse  $b, b' \in B$ , daß  $(a, b) \in f$ ,  $(b, c) \in g$ ,  $(a, b') \in f$  und  $(b', c') \in g$  ist. Da  $f$  eine Abbildung, erhalten wir hieraus:  $b = b'$ ,  $(b, c) \in g$  und  $(b, c') \in g$ , womit  $g$  keine Abbildung ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2): ÜA A.1.53. ■

Leicht überprüft man anhand der Definitionen die Richtigkeit von

**Satz 1.4.3** Sei  $f$  eine bijektive Abbildung von  $A$  auf  $B$ . Dann gilt

- (1)  $f^{-1}$  ist bijektiv;
- (2)  $f \square f^{-1} = id_{;A}$ ;
- (3)  $f^{-1} \square f = id_{;B}$ .

Der nächste Satz beschreibt einen Zusammenhang zwischen Abbildungen und Äquivalenzrelationen. Er bildet die Grundlage von sogenannten *Homomorphiesätzen* für algebraische Strukturen, mit denen wir uns im Kapitel 2 kurz und im dritten Teil des zweiten Bandes ausführlich beschäftigen werden.

**Satz 1.4.4**

- (1) Sei  $f$  eine Abbildung von  $A$  in  $B$ . Dann ist die Relation

$$R_f := \{(x, y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$$

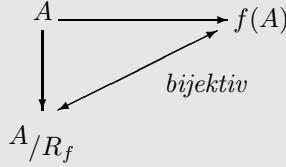
eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $A$ , die sogenannte „von  $f$  induzierte Äquivalenzrelation“.

- (2) Ist umgekehrt eine Äquivalenzrelation  $R$  auf  $A$  gegeben, so ist die Abbildung

$$g : A \longrightarrow A/R, x \mapsto [x]_R$$

eine Abbildung von  $A$  auf die Faktormenge von  $A$  nach  $R$  mit der Eigenschaft, daß  $R_g$  mit  $R$  übereinstimmt.

Es besteht sogar eine bijektive Abbildung von  $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$  auf  $A_{/R_f} : f(a) \mapsto [a]_{R_f}$ . Schematisch:



*Beweis.* ÜA. ■

Wir kommen nun zu den sogenannten Verknüpfungen.

**Definition** Sei  $A$  eine nichtleere Menge.

Eine Abbildung von  $A \times A$  in  $A$  heißt eine **innere Verknüpfung** (bzw. **Operation**) auf  $A$ .

Für innere Verknüpfungen verwenden wir Zeichen wie  $\square, \circ, +, -, \cdot, :, \dots$ . Statt  $f((a, b))$  ( $f$  dabei aus  $\{\square, \circ, +, \dots\}$ ) schreiben wir  $f(a, b)$  bzw.  $a \square b, a \circ b, a + b, \dots$

### Beispiele

- (1.) Die gewöhnliche Addition auf der Menge der reellen Zahlen lässt sich wie folgt beschreiben:  $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ . Sie ist offenbar eine innere Verknüpfung auf  $\mathbb{R}$ .
- (2.) Die Verkettung von Relationen  $\square : \mathfrak{P}(A) \rightarrow \mathfrak{P}(A), (R, Q) \mapsto R \square Q$  ist eine innere Verknüpfung auf der Menge  $\mathfrak{P}(A)$ .

**Definition** Seien  $A$  und  $K$  nichtleere Mengen.

Eine **äußere Verknüpfung auf  $A$  mit dem Skalarbereich  $K$**  ist eine Abbildung  $\wedge_K : K \times A \rightarrow A, (k, a) \mapsto k \wedge_K a$ .

**Beispiel** Sei  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $K = \mathbb{R}$ . Die Abbildung

$$\wedge_K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (k, (x, y)) \mapsto (k \cdot x, k \cdot y)$$

( $\cdot$  bezeichnet die übliche Multiplikation von reellen Zahlen) ist eine äußere Verknüpfung auf  $\mathbb{R}^2$  mit dem Skalarbereich  $\mathbb{R}$ .

**Definitionen** Seien  $A$  und  $K$  nichtleere Mengen,  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ ,  $\circ$  eine innere und  $\wedge_K$  eine äußere Verknüpfung auf  $A$ . Man sagt

- $R$  ist mit  $\circ$  **verträglich (kompatibel)** : $\iff$   
 $\forall a, a', b, b' \in A : ((a, b) \in R \wedge (a', b') \in R) \implies (a \circ a', b \circ b') \in R$ .
- $R$  ist mit  $\wedge_K$  **verträglich** : $\iff$   
 $\forall a, b \in A \forall k \in K : (a, b) \in R \implies (k \wedge_K a, k \wedge_K b) \in R$ .

Die mit den Verknüpfungen auf einer Menge verträglichen Äquivalenzrelationen nennt man **Kongruenzen** dieser Menge.

**Beispiel** In  $\mathbb{Z}$  ist  $\equiv_n$  (die Kongruenz modulo  $n$ ) mit der gewöhnlichen Addition und der gewöhnlichen Multiplikation verträglich (Beweis: ÜA A.1.36).

Der Sinn der obigen Definitionen ist der, daß man bei verträglichen  $R$  auf  $A/R$  mit Hilfe der Verknüpfungen  $\circ$ ,  $\wedge_K$  auf  $A$  ebenfalls Verknüpfungen einführen kann. Genaueres dazu im

**Satz 1.4.5 (mit Definition)** Sei  $A$  eine Menge mit einer äußeren Verknüpfung  $\wedge_K$  ( $K$  gewisse Menge) und einer inneren Verknüpfung  $\circ$ , die mit einer Äquivalenzrelation  $R$  auf  $A$  verträglich sind. Dann läßt sich auf  $A/R$  sinnvoll definieren:

- (1)  $[a] \circ [b] := [a \circ b]$ ,
- (2)  $k \wedge_K [a] := [k \wedge_K a]$

$(a, b \in A, k \in K)$ , d.h., die Definition der Verknüpfung  $\circ$  bzw.  $\wedge_K$  auf  $A/R$  ist unabhängig von der konkreten Wahl der sogenannten **Vertreter**  $a, b$  der Äquivalenzklassen  $[a], [b]$ .

*Beweis.* (1): Seien  $a, a' \in [a]$  und  $b, b' \in [b]$ . Wir haben  $[a \circ b] = [a' \circ b']$  zu zeigen. Aus  $a, a' \in [a]$  und  $b, b' \in [b]$  folgt  $(a, a') \in R$  und  $(b, b') \in R$ . Wegen der Verträglichkeit von  $\circ$  mit  $R$  ergibt sich hieraus  $(a \circ b, a' \circ b') \in R$ , womit nach Satz 1.3.1, (2)  $[a \circ b] = [a' \circ b']$  gilt.

(2) beweist man analog. ■

### Beispiel

Auf der Menge  $\mathbb{Z}_n (= \{[0], [1], \dots, [n-1]\})$  läßt sich mit Hilfe der gewöhnlichen Addition und Multiplikation eine **Addition modulo n** und eine **Multiplikation modulo n** definieren:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &:= [a + b], \\ [a] \cdot [b] &:= [a \cdot b] \end{aligned}$$

$(a, b \in \mathbb{Z})$ .

## 1.5 Mächtigkeiten, Kardinalzahlen

Um festzustellen, ob für jeden Studenten in einem Raum ein Sitzplatz vorhanden ist, kann man auf zwei Arten vorgehen:

- (1) Man zählt die Studenten, dann die Stühle und vergleicht.
- (2) Man bittet die Studenten, Platz zu nehmen und schaut, ob Studenten oder Stühle übrig bleiben.

Die Methode (2) scheint auf den ersten Blick recht umständlich zu sein. Sie hat aber einen großen Vorteil: Man braucht dazu nicht Zählen zu können, muß jedoch in der Lage sein, eine bijektive Abbildung (Studenten  $\longleftrightarrow$  Stühle) zu finden. Die Methode (2) wird von uns nachfolgend benutzt werden, um festzustellen, ob zwei „unendliche“ Mengen „gleich groß“ sind. Außerdem werden wir mit Hilfe der neu eingeführten Begriffe und Methoden in der Lage sein, solche von uns bisher intuitiv verwendeten Begriffe wie „endliche Menge“ und „unendliche Menge“ zu präzisieren. Darüberhinaus soll eine kurze Einführung in den Teil der Mengenlehre gegeben werden, der sich mit den Beziehungen zwischen unendlichen Mengen befaßt. Dem Leser sei empfohlen, die vorgestellten Ergebnisse nicht nach dem sogenannten „gesunden Menschenverstand“ und der Anschauung zu beurteilen, sondern staunend zu akzeptieren, daß im „Unendlichen“ andere Gesetze als im „Endlichen“ herrschen.

**Definition** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Man sagt

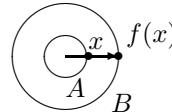
$A$  ist **gleichmächtig** zu  $B$  : $\iff \exists$  bijektive Abbildung  $f$  von  $A$  auf  $B$ .

Für „ $A$  ist gleichmächtig zu  $B$ “ schreiben wir kurz:

$$A \sim B.$$

Nachfolgend einige **Beispiele** für gleichmächtige Mengen  $A$  und  $B$ , wobei ab dem dritten Beispiel die bijektiven Abbildungen  $f$  nur durch Zeichnungen charakterisiert werden, die mit mehr oder weniger Aufwand natürlich auch in Berechnungsvorschriften für die Abbildungen übersetzt werden können.

- (1.) Offenbar sind endliche Mengen genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.
- (2.)  $A = \mathbb{N}_0$ ,  $B = \mathbb{Z}$ .  
 $f = \{(0, 0), (1, 1), (2, -1), (3, 2), (4, -2), \dots, (2 \cdot k - 1, k), (2 \cdot k, -k), \dots\}.$
- (3.)<sup>8</sup>  $A$  sei Menge aller Punkte eines Kreises  $K_1$ ,  
 $B$  sei Menge aller Punkte eines Kreises  $K_2$ .  
 $f :$

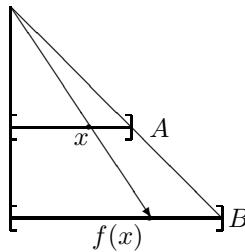


- (4.)  $A = [a, b]$ ,  $B = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ .

Faßt man die Mengen  $A$  und  $B$  als Punktmengen auf, die sich durch Strecken geometrisch veranschaulichen lassen, so ist eine bijektive Abbildung  $f$  von  $A$  auf  $B$  wie folgt beschreibbar:

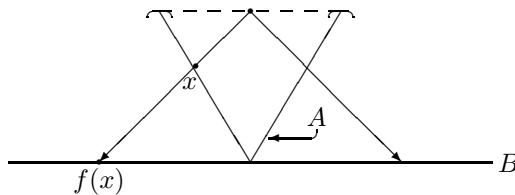
---

<sup>8</sup> Dieses Beispiel findet man bereits in mittelalterlichen Texten und es galt wie ähnliche Beispiele aus der Antike als paradox.



(5.)  $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B = \mathbb{R}$ .

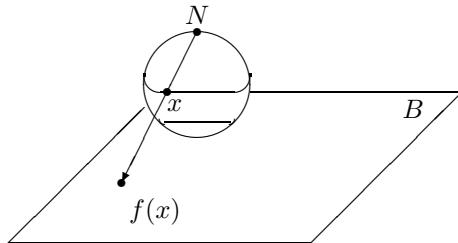
Analog zu Beispiel (4.) lassen sich  $A$  als Punkte einer (geknickten) Strecke (ohne die zu  $a$  und  $b$  gehörenden Punkte) und  $B$  als Menge aller Punkte einer Geraden geometrisch veranschaulichen. Eine mögliche bijektive Abbildung  $f$  ergibt sich aus:



(6.)  $A$  sei die Menge aller Punkte auf einer Kugel ohne  $N$  („Nordpol“),

$B$  sei die Menge aller Punkte einer Ebene.

$f :$



**Lemma 1.5.1** Sei  $M$  irgendeine Menge von Mengen. Dann ist die Relation

$$R := \{(A, B) \in M^2 \mid A \text{ ist gleichmächtig zu } B\}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $M$ .

*Beweis.* Seien  $A, B, C$  beliebige Elemente aus  $M$ . Offenbar gilt  $A \sim A$ , da die identische Abbildung  $\text{id}_A$  eine bijektive Abbildung von  $A$  auf  $A$  ist. Falls  $f$  eine bijektive Abbildung von  $A$  auf  $B$  ist, haben wir mit  $f^{-1}$  nach Satz 1.4.3 eine Bijektion von  $B$  auf  $A$ .

Gilt  $A \sim B$  und  $B \sim C$ , so existieren Bijektionen  $f$  und  $g$  mit  $f : A \rightarrow B$ ,

$g : B \longrightarrow C$ . Wegen Satz 1.4.2, (2) ist  $f \square g$  eine bijektive Abbildung von  $A$  auf  $C$ , also  $A$  gleichmächtig zu  $C$ . Folglich ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . ■

Mit Hilfe der Gleichmächtigkeitsrelation  $\sim$  kann man eine Menge  $M$  von Mengen nach Satz 1.4.4 in Äquivalenzklassen zerlegen, d.h., man faßt alle gleichmächtigen Mengen zu einer Klasse zusammen und sagt, sie haben die **gleiche Mächtigkeit** oder die **gleiche Kardinalzahl**. Unter der **Kardinalzahl**  $|A|$  der Menge  $A$  versteht man dabei die „Gesamtheit“ aller zu  $A$  gleichmächtigen Mengen. („Gesamtheit“ müssen wir hier undefiniert lassen, da oben – wegen der bekannten Schwierigkeiten mit dem Mengenbegriff –  $M$  nicht als Menge aller Mengen gewählt werden konnte.)

Wir merken uns

- $|A| = |B|$  (bzw.  $\text{card } A = \text{card } B$ )  $\iff A \sim B$

und vereinbaren folgende Bezeichnungen:

- $|\emptyset| := 0$ ,

- $|\{1, 2, 3, \dots, n\}| := n$ ,

- $|\mathbb{N}| := \aleph_0$

( $\aleph$  („Aleph“) ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.),

- $|\mathbb{R}| := \mathfrak{c}$  (oder auch  $\aleph_1$ ).

Außerdem sei

- $|A| \leq |B| : \iff \exists \text{ injektive Abbildung von } A \text{ in } B$ ,

- $|A| < |B| : \iff (|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|)$ .

Die oben beschriebene Relation  $\leq$  ist auf einer Menge von Kardinalzahlen offenbar reflexiv und transitiv. Außerdem kann man zeigen, daß  $\leq$  antisymmetrisch und linear ist (siehe dazu z.B. [Ale 67]). Es gilt damit:

**Satz 1.5.2** (ohne Beweis) *Auf einer Menge von Kardinalzahlen ist die oben definierte Relation  $\leq$  eine lineare Ordnung. Mit anderen Worten: Für je zwei beliebig gewählte Mengen  $A$  und  $B$  gilt entweder  $|A| = |B|$ ,  $|A| < |B|$  oder  $|B| < |A|$ .*

#### Bemerkung (ohne Beweis)

Mit den Kardinalzahlen kann man fast wie mit den gewöhnlichen Zahlen umgehen, wenn man definiert:

$$\begin{aligned} |A| + |B| &:= |A \cup B|, \\ |A| \cdot |B| &:= |A \times B|, \\ |A|^{|B|} &:= |A^B|, \end{aligned}$$

wobei o.B.d.A.  $A \cap B = \emptyset$  und  $A^B$  die Menge aller Abbildungen von  $B$  in  $A$  bezeichnet. Es gilt dann nämlich für beliebige Kardinalzahlen  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned}
(a+b)+c &= a+(b+c), \\
a+b &= b+a, \\
a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\
a \cdot b &= b \cdot a, \\
a^{b+c} &= a^b \cdot a^c, \\
(a \cdot b)^c &= a^c \cdot b^c, \\
(a^b)^c &= a^{b \cdot c}, \\
a \leq b &\implies a+c \leq b+c, \\
a \leq b &\implies (a \cdot c \leq b \cdot c \wedge a^c \leq b^c \wedge c^a \leq c^b).
\end{aligned}$$

Weiter mit

**Definitionen** Sei  $A$  eine Menge. Man sagt

- $A$  ist **unendlich** : $\iff \exists B : B \subset A \wedge B \sim A$ ;
- $A$  ist **endlich** : $\iff A$  ist nicht unendlich.

### Beispiel

Die Unendlichkeit der Menge  $\mathbb{N}_0$  ergibt sich aus der Bijektion

$$f := \{(n, 2 \cdot n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

von  $\mathbb{N}_0$  auf die echte Teilmenge der geraden Zahlen von  $\mathbb{N}_0$ .

Eine erste Unterscheidung zwischen verschiedenen „Unendlichkeiten“ liefern die

**Definitionen** Sei  $A$  eine Menge. Dann heißt

- $A$  **abzählbar (unendlich)** : $\iff A \sim \mathbb{N}$ ;
- $A$  **überabzählbar** : $\iff A$  unendlich und nicht abzählbar.

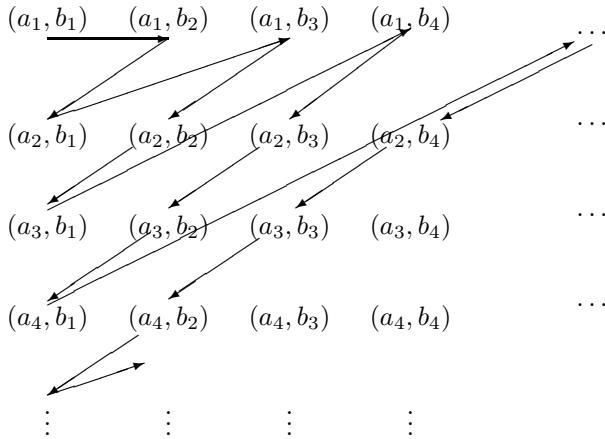
**Satz 1.5.3** Seien  $A, A_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) abzählbare Mengen und  $B$  eine endliche Menge. Dann sind folgende Mengen ebenfalls abzählbar:

- (a)  $A \setminus B, A \cup B$ ;
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ;
- (c)  $\bigcup_{i \in I} A_i$  ( $I \subseteq \mathbb{N}$ ).

*Beweis.* (a): ÜA.

(b): Wir beweisen die Behauptung hier nur für  $n = 2$ . Den allgemeinen Beweis führt man mit Hilfe der vollständigen Induktion und sei den Lesern als ÜA empfohlen.

Die Elemente von  $A_1 \times A_2$  kann man, falls  $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  und  $A_2 = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ , wie folgt aufschreiben und abzählen:



(d.h., unsere bijektive Abbildung von  $A_1 \times A_2$  auf  $\mathbb{N}$  sieht wie folgt aus:

$(a_1, b_1) \mapsto 1, (a_1, b_2) \mapsto 2, (a_2, b_1) \mapsto 3, \dots$ .

(c) beweist man ähnlich wie (b) (ÜA A.1.57). ■

Zwei Folgerungen aus Satz 1.5.3 sind zusammengefaßt im

#### Satz 1.5.4

- (a)  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ .
- (b)  $A$  abzählbar  $\implies \{M \in \mathfrak{P}(A) \mid M \text{ ist endlich}\}$  abzählbar.

**Satz 1.5.5** Es sei  $A$  eine endliche oder abzählbare Menge,  $B$  eine unendliche Menge und  $C$  eine überabzählbare Menge. Dann gilt:

- (a)  $B$  enthält eine abzählbare Menge.
- (b)  $C \setminus A \sim C$ .
- (c)  $A \cup B \sim B$ .

*Beweis.* (a): Da  $B$  unendlich ist, gibt es in  $B$  ein Element  $a_1$ . Offenbar ist  $B \neq \{a_1\}$ , womit es in  $B$  ein von  $a_1$  verschiedenes Element  $a_2$  gibt. Wegen  $B \neq \{a_1, a_2\}$ , existiert ein  $a_3 \in B \setminus \{a_1, a_2\}$ . Setzt man diesen Prozeß fort, erhält man die abzählbare Teilmenge  $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  von  $B$ .

(b): O.B.d.A. sei  $A \subseteq C$ . Wegen  $C = A \cup (C \setminus A)$  und Satz 1.5.2 kann  $C \setminus A$  weder endlich noch abzählbar sein. Folglich ist  $C \setminus A$  überabzählbar und enthält nach (a) eine abzählbare Teilmenge  $N$ . Sei  $M := (C \setminus A) \setminus N$ . Dann gilt  $C \setminus A = N \cup M$  und  $C = (A \cup N) \cup M$ . Zwischen den abzählbaren Mengen  $N$  und  $A \cup N$  gibt es eine bijektive Abbildung. Ordnet man außerdem jedem  $x \in M$  wieder  $x$  zu, hat man eine bijektive Abbildung zwischen  $C \setminus A$  und  $C$  erhalten, womit  $C \setminus A \sim C$  gezeigt ist.

(c): Ist  $B$  abzählbar, so gilt (c) nach Satz 1.5.3. Ist  $B$  überabzählbar, so ist  $A \cup B$  ebenfalls überabzählbar und mit Hilfe von (b) folgt (c) aus  $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \sim A \cup B$ . ■

**Satz 1.5.6** Die Menge  $(0, 1)$  ( $= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ) ist nicht abzählbar.

*Beweis.* Sei  $x \in (0, 1)$ . Dann ist  $x$  darstellbar als unendlicher Dezimalbruch

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\dots \quad (\forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$$

ohne Neunerperiode. Angenommen, die Menge  $(0, 1)$  ist abzählbar. Dann lassen sich alle  $x \in (0, 1)$  wie folgt „aufzählen“:

$$\begin{aligned} & 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\ & 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots \\ & 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} : a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Genauer, es gibt eine bijektive Abbildung  $f$  von  $\mathbb{N}$  auf  $(0, 1)$  mit  $f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn wir zeigen können, daß (ganz egal wie wir oben alle  $x \in (0, 1)$  angeordnet haben) mindestens eine reelle Zahl  $y \in (0, 1)$  in der Aufzählung nicht enthalten ist, hätten wir einen Widerspruch zur Annahme und unsere Behauptung wäre bewiesen. Ein solches  $y$  erhält man z.B. wie folgt:

$$y = 0.y_1y_2y_3y_4\dots, \text{ wobei}$$

$$y_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} \neq 0, \quad (i \in \mathbb{N}) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zahl  $y$  ist von 0 verschieden, da die Zahlen  $0, a0000\dots$  mit  $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$  in der oben angegebenen Aufzählung vorkommen müssen, womit  $y_i = 1$  für gewisse  $i$  gilt. Nach Konstruktion haben wir außerdem  $y \neq 0.a_{i1}a_{i2}\dots a_{ii}\dots$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(0, 1)$  nicht abzählbar. ■

Die Idee des Beweises von Satz 1.5.6 läßt sich auch verwenden zur Begründung des folgenden

**Satz 1.5.7** Seien  $A$  und  $B$  Mengen mit  $A \neq \emptyset$  und  $B$  enthalte mindestens zwei Elemente. Außerdem sei die Menge aller Abbildungen von  $A$  in  $B$  mit  $B^A$  bezeichnet. Dann gilt

$$|A| < |B^A|.$$

(D.h., es existiert von  $A$  auf eine echte Teilmenge von  $B^A$  eine bijektive Abbildung und  $A$  ist nicht zu  $B^A$  gleichmächtig.)

*Beweis.* Da  $|B| \geq 2$ , findet man in  $B$  zwei verschiedene Elemente  $\alpha$  und  $\beta$ . Jedem  $a$  aus  $A$  kann man dann eindeutig die Abbildung  $f_a : A \longrightarrow B$  mit

$$f(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x = a, \\ \beta & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnen. Folglich gibt es eine bijektive Abbildung von  $A$  auf eine echte Teilmenge von  $B^A$ .

Angenommen,  $A \sim B^A$ , d.h., es existiert eine Bijektion  $\varphi : A \rightarrow B^A$  mit  $\varphi = \{(a, g_a) \mid a \in A\}$ . Wenn wir eine Abbildung  $g$  finden könnten, die von jeder Abbildung  $g_a$  ( $a \in A$ ) verschieden ist, hätten wir einen Widerspruch zu  $|A| = |B^A|$  erhalten und die Behauptung bewiesen. Man prüft nun leicht nach, daß z.B.  $g$  mit

$$g(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } g_x(x) = \beta, \\ \beta, & \text{falls } g_x(x) \neq \beta \end{cases} \quad (x \in A)$$

die geforderten Eigenschaften besitzt. ■

Folgerungen aus dem obigen Satz sind zusammengefaßt im

### Satz 1.5.8

- (a) Für beliebige nichtleere Mengen  $A$  gilt  $|A| < |\mathfrak{P}(A)|$ .  
(Also gibt es unendlich viele Kardinalzahlen!)
- (b)  $\mathbb{R} \sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ .
- (c)  $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- (d)  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$ .

*Beweis.* (a) folgt aus Satz 1.5.7, da man jede Teilmenge  $T$  von  $A$  auf eindeutige Weise durch die Abbildung  $f_T : A \rightarrow \{0, 1\}$  mit

$$f_T(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakterisieren kann, womit  $|\mathfrak{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$ .

(b): Nachfolgend ist ein Beweis für (b) kurz skizziert. Eine ausführliche Begründung für die einzelnen Beweisschritte überlege man sich als ÜA (siehe dazu A.1.58 und A.1.60–A.1.63).

Bezeichne  $I$  die Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $0 < x < 1$ . Bereits gezeigt haben wir  $\mathbb{R} \sim I$ . Jede reelle Zahl  $x$  aus  $I$  läßt sich in der Form

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + a_3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{2^i})$$

$(a_1, a_2, \dots \in \{0, 1\})$  darstellen. Folglich läßt sich  $x$  durch die Folge  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  charakterisieren. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  keine 1-Periode besitzt. Faßt man nun alle Folgen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  mit  $x_i \in \{0, 1\}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) zur Menge  $F$  und die Folgen aus  $F$  mit einer 1-Periode zur Menge  $E$  zusammen, so kann man unter Verwendung von Satz 1.5.5 leicht  $I \sim F \setminus E \sim F \sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  zeigen, woraus (b) folgt.

(c): Wählt man  $F$  wie oben, so ist z.B. die Abbildung

$$g : F \times F \rightarrow F, ((a_1, a_2, a_3, \dots), (b_1, b_2, b_3, \dots)) \mapsto (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

bijektiv, womit  $F \sim F \times F$  gilt. Als ÜA überlege man sich, daß hieraus (c) folgt. (d): ÜA. ■

Erwähnt sei noch der folgende Satz, von dem wir uns Spezialfälle bereits oben überlegt haben und dessen Beweis man z.B. in [Ale 67] finden kann.

**Satz 1.5.9 (ohne Beweis)**

*Seien  $A$  und  $B$  beliebig gewählte Mengen mit  $|A| \leq |B|$  und  $B$  ist eine unendliche Menge. Dann gilt  $|A \cup B| = |B|$  und, falls  $A \neq \emptyset$ ,  $|A \times B| = |B|$ .*

Eine abschließende **Bemerkung**: Oben wurde gezeigt, daß  $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$  die kleinste Kardinalzahl einer unendlichen Menge ist. Außerdem wurde  $\aleph_0 < \aleph_1 := |\mathbb{R}|$  bewiesen. Ist die Bezeichnung  $\aleph_1$  eigentlich gerechtfertig, d.h., gibt es keine Menge  $M$  mit  $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$ ? Bereits Cantor vermutete 1884 in der sogenannte „Kontinuumshypothese“, daß dies so ist, konnte es jedoch nicht beweisen. Die 1963 von P. J. Cohen gefundene Antwort auf die Frage ist überraschend:<sup>9</sup> Die Kontinuumshypothese (bzw. die Negation der Kontinuumshypothese) läßt sich weder beweisen, noch widerlegen. Man sagt, sie ist *unentscheidbar*. Mehr dazu findet man z.B. in [Deu 99], wo man auch die Originalbeweise von Cohen und der von ihm benutzten Ergebnisse anderer Mathematiker nachlesen kann. Wer sich für Unentscheidbarkeitsbeweise interessiert, dem sei [Rau 96] empfohlen. Verstehen kann man die dort angegebenen Beweise jedoch erst, nachdem man sich ausführlich mit Mathematischer Logik beschäftigt hat. Da die Mathematische Logik ein wichtiger Bestandteil der Grundlagenmathematik bildet, wollen wir einige Anfangsüberlegungen dieser Theorie im nächsten Abschnitt behandeln.

## 1.6 Boolesche Funktionen und Prädikate

**Definitionen** Es sei  $B := \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M$  eine nichtleere Menge und  $R \subseteq M^n$  eine  $n$ -stellige Relation über  $M$ .

- Eine  **$n$ -stellige Boolesche Funktion**<sup>10</sup> ( **$n$ -stellige binäre Funktion**) ist eine Abbildung  $f$  von  $B^n$  in  $B$ , d.h.,  $f : B^n \longrightarrow B$ .
- Eine Abbildung  $P : M^n \longrightarrow B$  heißt  **$n$ -stelliges Prädikat über  $M$** .
- $R$  und das  $n$ -stellige Prädikat  $P$  über  $M$  heißen **äquivalent** (bzw. **induzieren einander**), falls für alle  $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$  gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \iff P(a_1, \dots, a_n) = 1.$$

---

<sup>9</sup> Für diese Leistung erhielt Paul Joseph Cohen (1934–2007) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1966 in Moskau die Fields-Medaille, die eine Art Nobel-Preis für Mathematiker darstellt, verliehen.

<sup>10</sup> Benannt nach George Boole (1815–1864), einem englischen Mathematiker und Philosophen. G. Boole ist einer der Begründer der modernen mathematischen Logik.

Zur Kennzeichnung der Stelligkeit  $n$  von  $f$  bzw.  $P$  schreiben wir auch  $f^{(n)}$  bzw.  $P^{(n)}$ .

Mit den Prädikaten beschäftigen wir uns am Ende dieses Abschnitts. Zunächst jedoch **Beispiele** für Boolesche Funktionen:

Für  $n = 1$  gibt es genau vier verschiedene Boolesche Funktionen, die in folgender Tabelle definiert sind:

$x$	$c_0(x)$	$c_1(x)$	$e(x)$	$non(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Anstelle von  $non(x)$  schreiben wir auch  $\bar{x}$  (oder  $\neg x$ ).

Für  $n = 2$  gibt es 16 verschiedene Boolesche Funktionen, von denen 5 ( $\wedge, \vee, +, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ) in der folgende Tabelle definiert sind. Dabei sei  $\circ(x, y) := x \circ y$  für  $\circ \in \{\wedge, \vee, +, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$  vereinbart.

$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x + y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Die Erklärung für die verwendeten Symbole findet man weiter unten. Anstelle von  $x \wedge y$  schreiben wir auch  $x \cdot y$  oder kurz  $xy$ . Allgemein lassen sich Booleschen Funktionen  $f^{(n)}$  durch Tabellen der Form

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	...	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$a_1$	$a_2$	...	$a_n$	$f(a_1, a_2, \dots, a_n)$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
1	$\vdots$	...	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

(jedenfalls theoretisch) angeben. Effektivere Beschreibungen folgen weiter unten.

Anwendungen finden bzw. untersucht werden die Booleschen Funktionen vorrangig in der

- Aussagenlogik und
- bei der mathematischen Beschreibung von Schaltungen bzw. den Bauelementen von Computern.

Wir befassen uns hier nur mit einigen Eigenschaften der Booleschen Funktionen, die sich aus ihren Anwendungen in der Aussagenlogik ergeben.

## Aussagen und Aussagenverbindungen

**Definition** Eine **Aussage** ist ein Satz (einer natürlichen oder künstlichen Sprache), von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr (Bezeichnung: 1) oder falsch (Bezeichnung: 0) ist. Wir nehmen dabei an, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (sogenanntes „Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten“).

**Beispiele** für Aussagen sind:

- $2 + 2 = 5$ .
- Rostock liegt an der Warnow.
- Im Weltall gibt es außerirdische Lebewesen (Vulkanier, Klingonen, Romulaner, Cardassianer, ...).

Keine Aussagen sind z.B.:

- Zwei Hühner auf dem Weg nach vorgestern.
- Alles was ich sage, ist falsch.
- Heute ist schönes Wetter.
- Seid leise!

Aussagen werden zumeist mit großen lateinischen Buchstaben  $A, B, \dots$  bezeichnet. Anstelle von „ $A$  sei eine beliebige Aussage“ sagt man „ $A$  sei eine Aussagenvariable“. Eine Aussagenvariable nimmt also die Werte 0 und 1 an. Aussagen (Sätze) werden in der Umgangssprache (u.a. durch Bindewörter wie „und“, „oder“, „wenn–dann“, ...) auf vielfache Weise verknüpft. Das Ergebnis dieser Verknüpfung liefert in der Regel wieder eine Aussage, deren Wert (0 oder 1) abhängig ist von den der verknüpften Einzelaussagen. Im Rahmen der Aussagenlogik werden ein Teil der umgangssprachlichen Verknüpfungen modelliert, in Teilen sogar erst präzise formuliert. Da wir bei Aussagen von ihrem Inhalt abstrahieren, uns also nur ihr sogenannter **Wahrheitswert** 0 oder 1 interessiert, sind Aussagenverbindungen mehrstellige Funktionen über  $\{0, 1\}$ , also unsere oben definierten Booleschen Funktionen (auch **Wahrheitswertfunktionen** oder **Funktionen der zweiwertigen Logik** genannt).

Deutungen für einige der oben in Tabellen definierten Booleschen Funktionen sind dann:

- **Negation** der Aussage  $A$  :  $\overline{A}$  („nicht  $A$ “).  
 $\overline{A}$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  falsch ist.
- **Konjunktion** der Aussagen  $A, B$  :  $A \wedge B$  („ $A$  und  $B$ “).  
 $A \wedge B$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  wahr sind.
- **Disjunktion** der Aussagen  $A, B$  :  $A \vee B$  („ $A$  oder  $B$ “).  
 $A \vee B$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  oder  $B$  oder  $A$  und  $B$  den Wert 1 haben.  
 $\vee$  entspricht also dem umgangssprachlichen „oder“, sofern dieses im nicht-ausschließenden Sinne verwendet wird.
- **Kontravalenz**:  $A + B$  („entweder  $A$  oder  $B$ “).  
 $A + B$  ist genau dann wahr, wenn entweder  $A$  oder  $B$  wahr ist.

- **Äquivalenz:**  $A \iff B$  („ $A$  genau dann, wenn  $B$ “).  
 $A \iff B$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  denselben Wahrheitswert haben.
- **Implikation:**  $A \implies B$  („Aus  $A$  folgt  $B$ “; „Wenn  $A$ , so  $B$ “).  
 $A \implies B$  ist genau dann falsch, wenn  $A$  den Wert 1 und  $B$  den Wert 0 annimmt.  
 $A \implies B$  ist also immer wahr, wenn  $A$  falsch ist. Umgangssprachlich hat dies keine Bedeutung, weil man Aussagen wie „Wenn der Elefant fliegen kann, dann ist der Schnee weiß.“ oder „Wenn  $2 + 2 = 7$ , dann ist 2 eine Primzahl.“ als sinnlos ansieht. Da wir jedoch vom konkreten Inhalt der Aussagen  $A$ ,  $B$  abstrahieren, sind auch Festlegungen für  $0 \implies 0$  und  $0 \implies 1$  zu treffen. Daß obige Festlegungen sinnvoll sind, sieht man z.B. anhand der Bildung von  $\overline{A \implies B} = A \wedge \overline{B}$ .

Mit Hilfe eines Alphabets für Bezeichnungen der Aussagenvariablen, 0, 1, Klammern und den oben eingeführten Zeichen  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\iff$ ,  $\implies$ ,  $+$  lassen sich kompliziertere Aussagen (sogenannte **Formeln (Ausdrücke) der Aussagenalgebra**) aufbauen. Z.B.

$$((A \wedge B) \implies (B \vee (\overline{C \implies A}))).$$

Ausführlich behandeln wir das nachfolgend.

### Beschreibung von Booleschen Funktionen mittels Boolescher Terme (Formeln, Ausdrücke)

Da eine Tabellendarstellung Boolescher Funktionen nur sehr eingeschränkt verwendbar ist, besteht ein naheliegender Gedanke darin, sie durch Formeln zu beschreiben.

#### Definition

- (a) Die Konstanten 0, 1 sowie die Variablen  $x, y, z, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$  sind für sich genommen **Boolesche Terme (Formeln, Ausdrücke)**.
- (b) Ist  $A$  ein Boolescher Term, so auch  $\overline{A}$  (bzw.  $\neg A$ ).
- (c) Sind  $A$  und  $B$  Boolesche Terme, so auch

$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \implies B), (A \iff B), (A + B).$$

- (d) Jeder Boolesche Term entsteht, indem die Regeln (b) und (c) endlich oft angewendet werden, wobei die Booleschen Terme aus Regel (a) als Ausgangspunkte dienen.

Nachfolgend nennen wir Boolesche Terme kurz nur Terme. Bei den Termangaben lassen wir außerdem die nach der obigen Bildungsvorschrift entstehenden Außenklammern weg.

Den Termen kann man Boolesche Funktionen zuordnen:

Sei  $A$  ein Term, in dem nur Variable aus der Menge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  vorkommen.

Mittels

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := A$$

ist dann eine  $n$ -stellige Boolesche Funktion definierbar, wobei obige Vorschrift bedeutet, daß bei konkreter Belegung der  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mit 0 oder 1 der zugehörige Funktionswert sich anhand der Formel  $A$  errechnet.

Man beachte, daß jedem Term unendlich viele Boolesche Funktionen zugeordnet werden können. Außerdem können verschiedene Terme gleiche Funktionen beschreiben.

Interessiert sind wir natürlich nur an einfachen Termen. Zum Auffinden möglichst einfacher Beschreibungen (Terme) Boolescher Funktionen werden wir uns anschließend einige Regeln des „Umbauens“ von Termen zusammenstellen, die es uns ermöglichen werden, aus komplizierten Termen solche etwas überschaubarer Struktur abzuleiten.

Zunächst soll jedoch die Gleichheit von Termen definiert werden.

**Definition** Terme  $T_1, T_2$  heißen **gleich** (**äquivalent**, **gleichwertig**; Bezeichnung:  $T_1 = T_2$ ), wenn bei jeder Belegung der in  $T_1$  und  $T_2$  vorkommenden Aussagenvariablen  $A_i$  mit Werten aus  $\{0, 1\}$   $T_1$  und  $T_2$  denselben Wahrheitswert annehmen. Beispiele für äquivalente Formeln sind im nächsten Satz angegeben.

**Satz 1.6.1** Es gilt:

- (a)  $\forall \circ \in \{\vee, \wedge, \iff, +\} : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z;$
- (b)  $x \vee x = x, x \wedge x = x, x \iff x = 1, x \implies x = 1, x + x = 0,$   
 $x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0;$
- (c)  $\forall \circ \in \{\vee, \wedge, \iff, +\} : x \circ y = y \circ x;$
- (d)  $x \wedge \overline{x} = 0, x \vee \overline{x} = 1, \overline{\overline{x}} = x,$   
 $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y};$
- (e)  $\overline{x \implies y} = x \wedge \overline{y};$
- (f)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$
- (g)  $x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x.$

*Beweis.* ÜA. ■

Mit Hilfe der im Satz 1.6.1 angegebenen Identitäten lassen sich Boolesche Terme vereinfachen (sogenannte „**algebraische Methode**“).

### Beispiele

$$(1.) (((xy \vee xz) \vee (x(yz))) \vee y) \vee z$$

Wegen Satz 1.6.1 können wir auf einen Teil der Klammern in diesem Term verzichten, wenn vereinbart wird, daß  $\cdot$  ( $= \wedge$ ) stärker bindet als  $\vee$ :  $xy \vee xz \vee xyz \vee y \vee z$ .

Zusammenfassungen sind dann (nach Satz 1.6.1) wie folgt möglich:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 xy & \vee & xz & \vee & xyz & \vee & y & \vee & z \\
 \diagdown & & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \diagup \\
 & & & & y & & z & & z
 \end{array} = y \vee z$$

$$(2.) \overline{(x \vee \bar{y})(x \vee z)} = \overline{(xx \vee xz \vee \bar{y}x \vee \bar{y}z)} = \overline{(x \vee \bar{y}z)} = \bar{x}(y \vee \bar{z}) = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z}.$$

$$(3.) ((x \vee \bar{x}) \wedge y) \vee \bar{y} = (1 \wedge y) \vee \bar{y} = 1.$$

**Definition** Ein Boolescher Term heißt **Tautologie** (oder **allgemeingültiger Ausdruck**), wenn er zu 1 äquivalent ist.

Tautologien liefern sogenannte Gesetze der Aussagenalgebra, d.h., jede Tautologie ist das Schema einer Schar von Aussagen, die auf Grund ihrer logisch sprachlichen Struktur, also unabhängig vom konkreten Inhalt, wahr sind. Das systematische Aufsuchen derartiger Schemata gehört zu den ältesten Aufgaben der Logik.

Terme  $F_1, F_2$  sind übrigens gleich, wenn  $F_1 \iff F_2$  eine Tautologie ist.

Läßt sich nun jede Boolesche Funktion mit Hilfe eines Terms beschreiben?

Antwort wird Satz 1.6.2 geben. Zunächst jedoch ein **Beispiel**:

Für die durch die nachfolgende Tabelle definierte dreistellige Funktion  $f$  gilt

$$f(x, y, z) = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (xy\bar{z}).$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Jede der in der Formel für  $f$  auftretende Konjunktionen „realisiert“ dabei eine 1 von den Funktionswerten von  $f$ . Unter Verwendung der Schreibweise

$$x^\alpha := \begin{cases} \bar{x} & \text{für } \alpha = 0, \\ x & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\alpha \in \{0, 1\})$$

lässt sich  $f$  auch wie folgt charakterisieren:

$$f(x, y, z) = (x^0 y^1 z^0) \vee (x^1 y^0 z^0) \vee (x^1 y^1 z^1).$$

Die so erhaltene Darstellung von  $f$  nennt man disjunktive Normalform von  $f$ . Allgemein gilt:

**Satz 1.6.2** Jede  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  lässt sich mittels der sogenannten **disjunktiven Normalform** (Bezeichnung: **DNF**) beschreiben:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n} f(a_1, \dots, a_n) \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n},$$

wobei

$$x^\alpha := \begin{cases} \bar{x} & \text{für } \alpha = 0, \\ x & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\alpha \in \{0, 1\})$$

bzw., falls  $f$  nicht nur den Wert 0 annimmt,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n \\ f(a_1, \dots, a_n) = 1}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}.$$

(Obige Formeln besagen, daß für jedes Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$  die „Konjunktion“

$$f(a_1, \dots, a_n) \wedge x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n} \text{ bzw. } x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}$$

aufgeschrieben wird. Anschließend werden dann diese Konjunktionen durch  $\vee$  miteinander verknüpft. Auf das Setzen einer Vielzahl von Klammern kann dabei wegen Satz 1.6.1 verzichtet werden (siehe dazu auch Kapitel 2). ■

Es sei bemerkt, daß die disjunktive Normalform nur eine von vielen Möglichkeiten ist, sämtliche Booleschen Funktionen durch eine gewisse Formelstruktur zu beschreiben.

Oft liefert die disjunktive Normalform eine zu komplizierte Beschreibung einer Booleschen Funktion (z.B. gilt  $x \vee y = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xy$ ).

Wie findet man aber (ausgehend von einer disjunktiven Normalform) eine „verkürzte Darstellung“ (d.h., weniger Konjunktionen und innerhalb einer Konjunktion möglichst wenig Variable) für eine gegebene Boolesche Funktion?

Nachfolgend soll anhand eines Beispiels ein mögliches Verfahren (genauer: das **Quine-McCluskey-Verfahren**) vorgestellt werden: Sei

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

## Die disjunktive Normalform

$$xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

dieser Funktion lässt sich dann mit Hilfe des folgenden Verfahrens „verkürzen“:

**1. Schritt:** Durch systematisches Anwenden von

$$\begin{aligned} xy \vee x\bar{y} &= x, \\ xy &= yx, \\ x \vee x &= x \end{aligned}$$

fasse man möglichst viele Konjunktionen zusammen.

Ausgangspunkt dieser Zusammenfassungen ist die **1. geordnete Liste der Konjunktionen**, in der die Konjunktionen aus der disjunktiven Normalform nach der Anzahl der auftretenden Negationszeichen geordnet sind:

Nummer der Konjunktion	Konjunktion
1.	$xyz$
2.	$xy\bar{z}$
3.	$\bar{x}yz$
4.	$\bar{x}\bar{y}z$
5.	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Zusammenfassungen mittels der Regel  $xy \vee x\bar{y} = x$  (unter Beachtung von  $xy = yx$ ) sind dann nur bei Konjunktionen möglich, die zu benachbarten „Gruppen“ in obiger Liste gehören. Man erhält dann folgende 1. Zusammenfassung:

Nummern der zusammengefaßten Konjunktionen	Ergebnis der Zusammenfassungen
1., 2.	$xy$
2., 3.	$y\bar{z}$
3., 5.	$\bar{x}\bar{z}$
4., 5.	$\bar{x}\bar{y}$ .

Sortiert man nun die erhaltenen Konjunktionen nach gleichen Variablen und anschließend nach der Anzahl der auftretenden Negationszeichen, so erhält man die **2. geordnete Liste der Konjunktionen**:

Nr. der Konj.	Konjunktion
1.	$xy$
2.	$\bar{x}\bar{y}$
3.	$\bar{x}\bar{z}$
4.	$y\bar{z}$

Da keine weitere Zusammenfassung mehr möglich ist, sind wir mit Schritt 1 fertig. Als erste verkürzte Darstellung für  $f$  haben wir damit

$$f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}$$

erhalten.

**2. Schritt:** Man lasse diejenigen Konjunktionen in der durch Schritt 1 erhaltenen Darstellung für  $f$  weg, die überflüssig sind.

Anhand der Tabelle

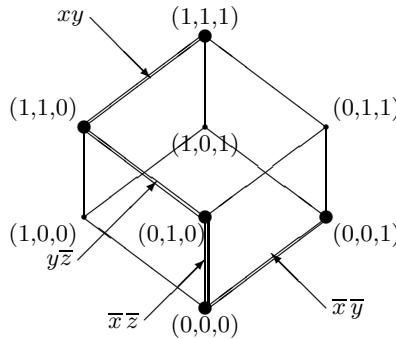
$x$	$y$	$z$	$xy$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$y\bar{z}$	$f$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

sieht man, daß z.B.  $y\bar{z}$  überflüssig ist. Wir erhalten zum Abschluß unseres Verfahrens damit die folgende minimale DNF:

$$f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z.$$

Es sei noch bemerkt, daß man sich die obige verkürzte Darstellung sowie einige andere Möglichkeiten anhand folgender geometrischen Darstellung der dreistelligen Funktion  $f$  überlegen kann:

Man deute die Tupel  $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$  als Ecken eines Würfels wie unten angegeben und kennzeichne diejenigen Ecken, die zu den Tupeln gehören, auf denen  $f$  den Wert 1 annimmt:



Man sieht nun leicht, daß Konjunktionen der Form  $u^a$  ( $u \in \{x, y, z\}$ ) Seitenflächen, Konjunktionen der Form  $u^a v^b$  ( $u, v \in \{x, y, z\}$ ) Seitenkanten und Konjunktionen der Bauart  $x^a y^b z^c$  Eckpunkte des Würfels charakterisieren.

Folglich läßt sich  $f$  auch durch die Formel

$$xy \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$$

beschreiben.

Zu Booleschen Funktionen abschließend noch eine **Bemerkung** (ohne Beweis): Ausgangspunkt obiger Darstellung Boolescher Funktionen waren die Konjunktion, die Disjunktion und die Negation, mit deren Hilfe wir alle anderen Booleschen Funktionen darstellen konnten. Muß dies unbedingt sein? Könnte man nicht auch von beliebigen Funktionen  $f, g, h, \dots$  ausgehen und versuchen, durch Ineinandereinsetzen dieser Funktionen sowie Umordnen und Identifizieren von Variablen alle anderen Booleschen Funktionen (etwa in der Art  $f(g(\dots), h(\dots), \dots)$ ) auszudrücken? Welche Eigenschaften müssen dann solche Funktionen besitzen, falls dies gelingt?

Bei der Beantwortung dieser Fragen sind mehrstellige Relationen und der Begriff des Bewahrens von Relationen durch Funktionen hilfreich:

Man sagt, eine  $n$ -stellige Funktion  $f$  **bewahrt die  $h$ -stellige Relation  $R$**  ( $h \in \mathbb{N}$ ), wenn für beliebige  $(a_1, a_2, \dots, a_h), (b_1, b_2, \dots, b_h), (c_1, c_2, \dots, c_h), \dots \in R$  stets  $(f(a_1, b_1, c_1, \dots), f(a_2, b_2, c_2, \dots), \dots, f(a_h, b_h, c_h, \dots)) \in R$  gilt.

**Beispiel** Die durch die Tabelle

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

definierte Funktion  $f$  bewahrt die (einstellige) Relation  $\{1\}$ , jedoch nicht die (zwei-stellige) Relation  $\{(0, 1), (1, 0)\}$ , da  $(f(0, 0), f(1, 1)) = (1, 1) \notin \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

Es gilt dann:

Eine beliebige Boolesche Funktion ist genau dann mittels Superposition (Ineinandereinsetzen von Funktionen in Funktionen, Umordnen der Variablen, Identifizieren von Variablen) aus Elementen einer Menge  $A$  von Booleschen Funktionen erzeugbar, wenn zu jeder der 5 Relationen

$$\begin{aligned} R_0 &:= \{0\}, \\ R_1 &:= \{1\}, \\ R_2 &:= \{(0, 1), (1, 0)\}, \\ R_3 &:= \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \\ R_4 &:= \{(a, b, c, d) \in \{0, 1\}^4 \mid a + b = c + d \pmod{2}\} \\ &= \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), \\ &\quad (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

<sup>11</sup>

in  $A$  eine Funktion existiert, die diese Relation nicht bewahrt. Ausführliche Informationen zu diesem von E. L. Post aus dem Jahre 1920 stammenden sogenannten Vollständigkeitskriterium für die zweiseitige Logik entnehme man Band 2, [Pös-K 79] oder [Jab-L 80]. Hier soll dieses Kriterium nur noch anhand eines **Beispiels** erläutert werden:

Sei  $A = \{f\}$  und  $f$  durch die Tabelle

---

<sup>11</sup> Nur sogenannte lineare Funktionen, das sind Funktionen  $f^{(n)}$ , die durch Formeln der Gestalt  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \pmod{2}$  beschrieben werden können, bewahren diese Relation.

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

definiert. Offenbar bewahrt  $f$  nicht  $R_0$  und  $R_1$ . Wegen

$$(f(0, 1), f(1, 0)) = (0, 0)$$

bewahrt  $f$  nicht  $R_2$  und wegen

$$(f(0, 0), f(0, 1)) = (1, 0)$$

nicht  $R_3$ . Aus

$$(f(0, 0), f(0, 1), f(1, 0), f(1, 1)) = (1, 0, 0, 0)$$

folgt außerdem, daß  $f$  nicht  $R_4$  bewahrt. Damit lassen sich durch  $f$  mittels Superposition alle anderen Booleschen Funktionen erzeugen. Diese Eigenschaft von  $f$  kann man sich aber auch auf folgende Weise überlegen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \overline{x} \wedge \overline{y}, \\ f(x, x) &= \overline{x}, \\ f(f(x, x), f(y, y)) &= x \wedge y \quad \text{und} \\ f(f(x, y), f(x, y)) &= x \vee y, \end{aligned}$$

womit nach Satz 1.6.2 aus  $f$  alle anderen Booleschen Funktionen durch Superposition erzeugbar sind.

Der Rest dieses Abschnitts beschäftigt sich mit einer Anwendung des eingangs definierten Begriffs *Prädikat*, indem eine Einführung in die

### Prädikatenlogik erster Stufe

gegeben wird.<sup>12</sup>

Falls es gelingt, einen Sachverhalt, dessen Wahrheitsgehalt zu überprüfen ist, durch einen Booleschen Term zu beschreiben, hatten wir oben eine einfache Methode erhalten, durch formales Rechnen dem Booleschen Term den Wert 0 oder 1 zuzuordnen. Wir wollen diese Methode ausdehnen auf Aussagen über Relationen und Operationen, die über einer Menge  $M$  definiert sind. Zunächst ein **Beispiel**: Es sei  $M := \{0, 1, 2\}$ ,  $R_1 := \{(x, y) \in M^2 \mid x = y\}$ ,  $R_2 := \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$  und  $f(x, y) := x + y \pmod{3}$  für alle  $x, y \in M$ . Wir schreiben  $x < y$ , falls  $(x, y) \in R_2$ . Die (offenbar falsche) Aussage

$$A: \text{Falls } f(0, 2) = 2 \text{ und } 0 < 2 \text{ gilt, ist } 2 < 2,$$

---

<sup>12</sup> Es ist zu empfehlen, sich diesen Abschnitt nach dem Lesen des zweiten Kapitels nochmals anzusehen. Außerdem sollte man sich nicht durch die vielen Formeln abschrecken lassen, sondern sich vielmehr klarmachen, daß mit der Formelsprache vertraute Dinge exakt definiert oder in eine Sprache übersetzt werden, die Grundlage von Programmierungen sein können.

ist zwar unter Verwendung unserer im Abschnitt 1.1 vereinbarten Symbole auch in der Form

$$(f(0, 2) = 2 \wedge (0 < 2)) \implies (2 < 2) \quad (1.2)$$

aufschreibbar, jedoch können wir die Zeichen  $\wedge$  und  $\implies$  nicht als Boolesche Funktionen interpretieren, da  $f(0, 2) = 2$ ,  $0 < 2$  und  $2 < 2$  nicht 0 oder 1 sind. Ordnet man jedoch der Relation  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) das von  $R_i$  induzierte Prädikat  $P_i$  zu, läßt sich (1.2) wie folgt aufschreiben:

$$\varphi := (P_1(f(0, 2), 2) \wedge P_2(0, 2)) \implies P_2(2, 2), \quad (1.3)$$

wobei

$x$	$y$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0	1	0
0	1	0	1
0	2	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	0	1
2	0	0	0
2	1	0	0
2	2	1	0

Wegen

$$\underbrace{(P_1(f(0, 2), 2)}_{=1} \wedge \underbrace{P_2(0, 2)}_{=1} \underbrace{\implies P_2(2, 2)}_{=0} \quad (1.4)$$

gilt  $\varphi = 0$ , d.h., die Aussage  $A$  ist falsch und wir konnten dies unter Verwendung der Booleschen Funktionen  $\wedge$  und  $\implies$  ausrechnen.

Wir betrachten als nächstes die Aussage

*B: Für alle  $x, y, z \in M$  gilt: Falls  $f(x, y) = z$  und  $x < y$ , ist  $y < z$ ,*

die man auch in der Form

$$\psi := \forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M (P_1(f(x, y), z) \wedge P_2(x, y)) \implies P_2(y, z) \quad (1.5)$$

aufschreiben kann. Legt man fest, daß eine Formel der Form

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M \varphi(x, y, z)$$

genau dann den Wert 1 annimmt, wenn  $\varphi(a, b, c) = 1$  für alle  $(a, b, c) \in M^3$  gilt, hat  $\psi$  wegen  $\varphi(0, 2, 2)$  den Wert 0.

Wir verallgemeinern obiges Beispiel, indem wir zunächst festlegen, welche Art von Formeln wir betrachten wollen, die aus vorgegebenen Zeichen nach gewissen Regeln gebildet werden, d.h., wir legen die *Syntax*<sup>13</sup> der Prädikatenlogik fest. Danach wird definiert, wie man diesen Formeln einen Wahrheitswert (wie üblich mit 0 oder 1 bezeichnet) zuordnen kann, wenn man den verwendeten Zeichen einen gewissen Sinn gibt, d.h., wir behandeln die *Semantik*<sup>14</sup> der Prädikatenlogik.

<sup>13</sup> Allgemein versteht man unter *Syntax* die Lehre vom Aufbau der Wortverbindungen und Sätze einer Sprache.

<sup>14</sup> Unter Semantik verstehen wir hier die *formale Semantik* bzw. die *Bedeutungslehre*, die sich mit dem Sinn und der Bedeutung von Zeichen befaßt.

Um die Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe zu definieren, wählen wir zunächst zwei Indexmengen  $I$  und  $J$ , wobei  $I = \emptyset$  möglich ist. Jedem  $i \in I$  und jedem  $j \in J$  ordnen wir dann ein gewisses  $n_i \in \mathbb{N}_0$  bzw.  $m_j \in \mathbb{N}$  zu. Die so gewählten Zahlen fassen wir zu einer sogenannten **Signatur** zusammen:

$$\delta := ((n_i)_{i \in I}, (m_j)_{j \in J}).$$

Z.B.  $I := \{1, 2\}$ ,  $J := \{1, 2, 3\}$  und  $\delta := ((0, 2), (1, 2, 2))$ , d.h.,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 2$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m_3 = 2$ .

Die Indexmengen  $I$  und  $J$  sowie die Signatur  $\delta$  dienen dazu, Operations- und Relationssymbole zu unterscheiden und jedem Symbol eine gewisse Stelligkeit zuzuordnen. Außerdem benötigen wir:

- die Menge  $Var := \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  der **Variablen**;
- die Menge  $\mathfrak{F} := \{f_i^{n_i} \mid i \in I\}$  der **Operationssymbole**, wobei  $n_i$  die Stelligkeit des Operationssymbols  $f_i^{n_i}$  angibt;
- die Menge  $\mathfrak{F}^{(n)}$  aller  $n$ -stelligen Operationssymbole aus  $\mathfrak{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ;
- die Menge  $\mathfrak{P} := \{P_j^{m_j} \mid j \in J\}$  der **Prädikatenymbole**, wobei  $m_j$  die Stelligkeit des Prädikats  $P_j^{m_j}$  angibt;
- die Menge der **Junktoren**  $\mathfrak{J} := \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftarrow, \exists, \forall\}$ <sup>15</sup> ( $\exists$  nennt man **Existenzquantor** und  $\forall$  heißt **Allquantor**);  
 $\mathfrak{J}_0 := \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftarrow\};$
- die Menge der **Klammersymbole**  $\{(, )\}$ .

Falls sich die Stelligkeiten der Operations- und Prädikatensymbole aus dem Zusammenhang ergeben, lassen wird die entsprechenden Indizes weg.

Mit Hilfe von  $Var$  und  $\{f_i^{n_i} \mid i \in I\}$  können wir die Menge  $T(Var)$  aller **Terme** als *kleinste* Menge mit den folgenden zwei Eigenschaften bilden:

- (1)  $Var \cup \mathfrak{F}^{(0)} \subseteq T(X)$ ,
- (2) Falls  $f \in \mathfrak{F}^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) und  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T(X)$ , dann gehört auch  $f(t_1, \dots, t_n)$  zu  $T(Var)$ .

**Beispiel** Es sei  $I := \{1\}$ ,  $n_1 = 1$  und  $f := f_1$ . Dann gilt

$$T(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i, f(x_i), f(f(x_i)), f(f(f(x_i))), \dots\}.$$

Die Menge *FORM* sei die kleinste Menge  $\mathcal{X}$  mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (1)  $P_j(t_1, \dots, t_{m_j}) \in \mathcal{X}$  für alle  $j \in J$  und alle  $t_1, \dots, t_{m_j} \in Term$ ;  
 $(P_j(t_1, \dots, t_{m_j}))$  heißt **Atom**;
- (2) falls  $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$ , dann  $(\alpha \circ \beta) \in \mathcal{X}$  für alle  $\circ \in \mathfrak{J}_0 = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow\}$ ;
- (3) falls  $\alpha \in \mathcal{X}$ , dann  $(\neg \alpha) \in \mathcal{X}$ ;
- (4) falls  $\alpha \in \mathcal{X}$ , dann  $(\exists x_k \alpha) \in \mathcal{X}$  und  $(\forall x_k \alpha) \in \mathcal{X}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

<sup>15</sup> Die Auswahl von Zeichen, die wir bereits bei der Definition gewisser Boolescher Funktionen benutzt haben, kann auch anders gewählt werden. In der Literatur üblich sind das Weglassen von  $\Leftarrow$  und das Hinzufügen von zwei nullstelligen Zeichen.

Die Menge  $FORM$  heißt **Menge aller Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe** der Signatur  $\delta$ .<sup>16</sup>

**Beispiele** Es sei  $I := \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $J := \{1, 2, 3\}$  und  $\delta := ((0, 3, 2, 2), (1, 2, 2))$ . Elemente aus  $FORM$  sind dann u.a.

$P_1(f_2(x_1, x_2, x_3)), \quad (\exists x_2 P_3(x_5, f_1)), \quad P_2(f_2(x_3, x_1, f_4(x_2, x_2)), x_1) \quad \text{und}$   
 $(P_1(x_5) \vee (\forall x_3 P_3(f_4(f_1, x_7))))$ .

Keine Formeln aus  $FORM$  sind z.B.  $P_1(P_2(x_1, x_2))$  und alle Terme.

$P_1(x_1, x_2, x_3)$  gehört nicht zu  $FORM$ , da durch die Signatur  $\delta$  für  $P_1$  die Stelligkeit 1 festgelegt wurde.

Als vereinfachende Schreibweise vereinbaren wir:  $x, y, z \in Var$ ,  $f, g, h$  sind Operationssymbole und  $P, Q, R$  sind Prädikatensymbole (mit in Beispielen noch festzulegenden Stelligkeiten). Außerdem lassen wir die Außenklammern bei den Formeln weg.

Man beachte, daß prädikatenlogische Formeln mit einem All- oder Existenzquantor keine Zeichen der Gestalt  $x_k \in M$  enthalten. Dies wurde weggelassen, weil bei der (unten zu findenden) inhaltlichen Interpretation solcher Formeln sämtliche Variablen  $x_k$  nur Werte aus ein- und derselben Menge annehmen.

Eine Formel  $\alpha \in FORM$ , die bei einer möglichen rekursiven Bildung der Formel  $\beta \in FORM$  vorkommt, heißt **Teilformel** von  $\beta$ .

Für jedes  $t \in T(Var)$  bezeichne  $Var(t)$  die Menge aller Elemente aus  $Var$ , die in  $t$  auftreten. Für  $\varphi \in FORM$  ist die Menge  $Var(\varphi)$  aller **Variablen von**  $\varphi$  definiert durch

- $Var(P_j(t_1, \dots, t_{m_j})) := Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_{m_j})$ ,
- $Var(\neg\alpha) := Var(\alpha)$  und  $Var(\alpha \circ \beta) := Var(\alpha) \circ Var(\beta)$  für alle  $\circ \in \mathfrak{J}_0$ ,
- $Var(\exists x_k \alpha) = Var(\forall x_k \alpha) := Var(\alpha) \cup \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$ .

Die Menge  $fr(\varphi)$  der **freien Variablen** von  $\varphi$  ist definiert durch

- $fr(\varphi) := Var(\varphi)$ , falls  $\varphi$  ein Atom ist;
- $fr(\neg\alpha) := fr(\alpha)$  und  $fr(\alpha \circ \beta) := fr(\alpha) \cup fr(\beta)$  für alle  $\circ \in \mathfrak{J}_0$ ,
- $fr(\forall x_k \alpha) = fr(\exists x_k \alpha) := fr(\alpha) \setminus \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$ .

Die Menge  $bd(\varphi)$  der **gebundenen Variablen von**  $\varphi$  ist definiert durch

- $bd(\varphi) := \emptyset$ , falls  $\varphi$  ein Atom ist;
- $bd(\neg\alpha) := bd(\alpha)$  und  $bd(\alpha \circ \beta) := bd(\alpha) \cup bd(\beta)$  für alle  $\circ \in \mathfrak{J}_0$ ,
- $bd(\forall x_k \alpha) = bd(\exists x_k \alpha) := bd(\alpha) \cup \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$ .

**Beispiel** Für die Formel  $\varphi := ((\exists x_1 P_2(x_2, x_3)) \vee (\forall x_2 P_1(x_2)))$  gilt  $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $fr(\varphi) = \{x_2, x_3\}$  und  $bd(\varphi) = \{x_1, x_2\}$ .

Eine Formel  $\varphi \in FORM$  heißt **offene Formel**, wenn  $bd(\varphi) = \emptyset$ .  $\varphi$  ist ein **Satz** oder ist **abgeschlossen**, wenn  $fr(\varphi) = \emptyset$ . Offensichtlich gilt  $Var(\varphi) = fr(\varphi) \cup bd(\varphi)$ , jedoch ist  $fr(\alpha) \cap bd(\varphi)$  nicht notwendig leer.

<sup>16</sup> Eine Prädikatenlogik zweiter Stufe erhält man, wenn die Quantoren nicht nur auf Variable, sondern auch auf Prädikaten- und Operationssymbole angewendet werden dürfen.

Um unseren Formeln aus *FORM* einen Inhalt bzw. eine Interpretation zu geben, benötigen wir eine nichtleere Menge  $A$  (**Trägermenge** genannt) sowie für alle  $i \in I$  und alle  $j \in J$  auf  $A$  definierte Operationen  $f_i^{\mathfrak{A}}$  der Stelligkeit  $n_i$  und Relationen  $R_j^{\mathfrak{A}}$  der Stelligkeit  $m_j$ , die Prädikate  $P_j^{\mathfrak{A}}$  induzieren. Wir setzen

$$\mathfrak{A} := (A; (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$$

und nennen  $\mathfrak{A}$  eine **Struktur** der Signatur  $\delta$ .

Ordnet man mittels der Abbildung  $u : Var \rightarrow A$  jeder Variablen aus  $Var$  einen gewissen Wert aus  $A$  zu, kann man durch folgende Definition der Abbildung  $\tilde{u} : T(X) \rightarrow A$  jedem Term  $t \in T(Var)$  einen Wert aus  $A$  zuordnen:

- (1) Falls  $t \in Var$ , sei  $\tilde{u}(t) := u(t)$ .
- (2) Falls  $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ , wobei  $\{t_1, \dots, t_{n_i}\} \subseteq T(Var)$ , sei

$$\tilde{u}(t) := f_i^{\mathfrak{A}}(\tilde{u}(t_1), \dots, \tilde{u}(t_{n_i})).$$

Seien  $u, u'$  Abbildungen von  $Var$  in  $A$ . Wir schreiben

$$u =_{x_k} u',$$

falls  $u(x_j) = u'(x_j)$  für alle  $j \neq k$  ( $j, k \in \mathbb{N}$ ).

Es sei  $\mathfrak{A} := (A; (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$  eine Struktur der Signatur  $\delta$  und  $u : Var \rightarrow A$  eine Abbildung. Mit Hilfe der Struktur  $\mathfrak{A}$  und der Abbildung  $u$  kann man jetzt wie folgt eine Abbildung (**Bewertung** genannt)

$$v_{\mathfrak{A}, u} : FORM \rightarrow \{0, 1\}$$

definieren, die jeder prädikatenlogischen Formel einen Wahrheitswert zuordnet:

- $v_{\mathfrak{A}, u}(P_j(t_1, \dots, t_{m_j})) = 1$  genau dann, wenn  $(\tilde{u}(t_1), \dots, \tilde{u}(t_{m_j})) \in R_j^{\mathfrak{A}}$ ;
- $v_{\mathfrak{A}, u}(\neg\alpha) := \neg(v_{\mathfrak{A}, u}(\alpha))$  und  $v_{\mathfrak{A}, u}(\alpha \circ \beta) := v_{\mathfrak{A}, u}(\alpha) \circ v_{\mathfrak{A}, u}(\beta)$  für alle  $\circ \in \mathfrak{J}_0$ ;
- $v_{\mathfrak{A}, u}(\forall x_k \varphi) = 1$  genau dann wenn  $v_{\mathfrak{A}, u'}(\varphi) = 1$  für alle  $u'$  mit  $u =_{x_k} u'$   
(wir schreiben:  $v_{\mathfrak{A}, u}(\forall x_k \varphi) = \bigwedge_{u', u =_{x_k} u'} v_{\mathfrak{A}, u'}(\varphi)$ );
- $v_{\mathfrak{A}, u}(\exists x_k \varphi) = 1$  genau dann, wenn es ein  $u'$  mit  $u =_{x_k} u'$  und  $v_{\mathfrak{A}, u'}(\varphi) = 1$  gibt  
(wir schreiben:  $v_{\mathfrak{A}, u}(\exists x_k \varphi) = \bigvee_{u', u =_{x_k} u'} v_{\mathfrak{A}, u'}(\varphi)$ ).

**Beispiele** Es sei  $f$  ein einstelliges Operationssymbol,  $P$  ein einstelliges und  $Q$  ein zweistelliges Prädikatssymbol. Als Trägermenge einer Struktur  $\mathfrak{A}$  wählen wir  $A := \{a, b, c\}$ . Außerdem sei  $f^{\mathfrak{A}}(a) := b$ ,  $f^{\mathfrak{A}}(b) := c$ ,  $f^{\mathfrak{A}}(c) := a$ ,  $P^{\mathfrak{A}}$  sei durch die Relation  $\{(b, c)\}$  und  $Q^{\mathfrak{A}}$  durch die Relation  $\{(a, a), (b, b), (a, c), (c, b)\}$  induziert. Die drei prädikatenlogischen Formeln

$$\begin{aligned} \alpha &:= P(x) \implies Q(f(x), y), \\ \beta &:= (\forall x P(x)) \implies Q(f(x), y) \\ \gamma &:= \forall x (P(x) \implies (\exists y Q(f(x), y))) \end{aligned}$$

haben dann die folgenden Wahrheitswerte in der Struktur  $\mathfrak{A}$ , wenn man  $u(x) := c$  und  $u(y) := a$  setzt:

$$\begin{aligned}
v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) &= P^{\mathfrak{A}}(u(x)) \Rightarrow Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(u(x)), u(y)) \\
&= P^{\mathfrak{A}}(c) \Rightarrow Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c), a) = P^{\mathfrak{A}}(c) \Rightarrow Q^{\mathfrak{A}}(a, a) = 1 \Rightarrow 1 = 1, \\
v_{\mathfrak{A},u}(\beta) &= v_{\mathfrak{A},u}((\forall x P(x))) \Rightarrow v_{\mathfrak{A},u}(Q(f(x), y)) \\
&= (P^{\mathfrak{A}}(a) \wedge P^{\mathfrak{A}}(b) \wedge P^{\mathfrak{A}}(c)) \Rightarrow Q^{\mathfrak{A}}(a, a) = 1, \\
v_{\mathfrak{A},u}(\gamma) &= \bigwedge_{u', u' =_x u} v_{\mathfrak{A},u'}(P(x) \Rightarrow (\exists y Q(f(x), y))) \\
&= \bigwedge_{u', u' =_x u} (P^{\mathfrak{A}}(u'(x)) \Rightarrow (\bigvee_{u'', u'' =_y u'} (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(u'(x)), u''(y))))) \\
&= (P^{\mathfrak{A}}(a) \Rightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a), a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a), b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a), c)) \wedge \\
&\quad (P^{\mathfrak{A}}(b) \Rightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b), a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b), b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b), c)) \wedge \\
&\quad (P^{\mathfrak{A}}(c) \Rightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c), a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c), b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c), c)) = 1.
\end{aligned}$$

Merken wir uns: Falls  $\varphi$  keine Quantoren enthält, ist  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$  einfach zu berechnen, indem man die Variablen durch die durch  $u$  vorgegebenen Elemente aus  $A$  ersetzt und dann den Wahrheitswert der Formel  $\varphi$  von innen nach außen gemäß der Interpretationen der Operationen und Prädikate in der Struktur  $\mathfrak{A}$  berechnet.

Falls  $\varphi$  gewisse Quantoren der Art  $\forall x$  oder  $\exists x$  mit  $x \in \text{Var}$  enthält, hat im Wirkungsbereich des Quantors (einer gewissen Teilformel von  $\varphi$ ) die Festlegung  $u(x)$  keinen Einfluß auf den Wahrheitswert der Teilformel. Gibt es in der Formel  $\varphi$  keine freien Variablen, hängt  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$  nur von  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi$  ab. Man schreibt dann auch  $\mathfrak{A}(\varphi)$  anstelle von  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$ . Bildet man eine Formel  $\varphi'$  aus  $\varphi$ , indem man eine Teilformel der Gestalt  $Q x \alpha$  ( $Q \in \{\forall, \exists\}$ ,  $x \in \text{Var}$ ) durch  $Q y \alpha'$  ersetzt, wobei  $y \in \text{Var} \setminus \text{Var}(\varphi)$  und  $\alpha'$  aus  $\alpha$  durch das Ersetzen der freien Variablen  $x$  durch  $y$  entsteht, so gilt  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = v_{\mathfrak{A},u}(\varphi')$ .

$\varphi \in \text{FORM}$  wird durch  $u : \text{Var} \rightarrow A$  **erfüllt**, genau dann, wenn  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = 1$ .  
 $\varphi$  ist **wahr** (oder **gültig**) in  $\mathfrak{A}$  genau dann, wenn  $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = 1$  für alle  $u : \text{Var} \rightarrow A$  gilt.

Wir schreiben  $\mathfrak{A} \models \varphi$  für „ $\varphi$  ist **wahr** in  $\mathfrak{A}$ “.

$\mathfrak{A} \not\models \varphi$  steht für „ $\varphi$  ist **nicht wahr** (oder **falsch**) in  $\mathfrak{A}$ “.

Falls  $\mathfrak{A} \models \varphi$ , heißt  $\mathfrak{A}$  ein **Model der Formel**  $\varphi$ .

Gilt  $\mathfrak{A} \models \sigma$  für alle  $\sigma \in \Sigma \subseteq \text{FORM}$ , nennen wir  $\mathfrak{A}$  ein **Model der Menge**  $\Sigma$ . Offenbar ist eine geschlossene Formel aus  $\text{FORM}$  entweder wahr oder falsch in  $\mathfrak{A}$ .

Formeln  $\alpha, \beta \in \text{FORM}$  heißen **äquivalent** (Bezeichnung:  $\alpha \equiv \beta$ ) genau dann, wenn  $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = v_{\mathfrak{A},u}(\beta)$  für jede Struktur  $\mathfrak{A}$  und für jede Abbildung  $u : \text{Var} \rightarrow A$ .

Die im folgenden Satz angegebenen Beispiele für äquivalente Formeln sind wichtige Hilfsmittel beim Umformulieren von Sachverhalten, die mittels prädikatenlogischer Formeln beschreibbar sind.

**Satz 1.6.3** Für beliebige  $\varphi, \psi \in \text{FORM}$  gilt:

- (1)  $\neg \forall x_k \varphi \equiv \exists x_k \neg \varphi$ ,  $\neg \exists x_k \varphi \equiv \forall x_k \neg \varphi$ ;
- (2) falls  $x_k \notin \text{fr}(\psi)$ , dann  $(Q x_k \varphi) \circ \psi \equiv Q x_k (\varphi \circ \psi)$  für alle  $Q \in \{\exists, \forall\}$  und  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ ;
- (3)  $(\forall x_k \varphi) \wedge (\forall x_k \psi) \equiv \forall x_k (\varphi \wedge \psi)$ ,  
 $(\exists x_k \varphi) \vee (\exists x_k \psi) \equiv \exists x_k (\varphi \vee \psi)$ ;
- (4)  $\forall x_k (\forall x_l \varphi) \equiv \forall x_l (\forall x_k \varphi)$ ,  $\exists x_k (\exists x_l \varphi) \equiv \exists x_l (\exists x_k \varphi)$ .

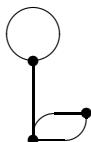
*Beweis.* Wir zeigen exemplarisch nur  $\neg\forall x_k \varphi \equiv \exists x_k \neg\varphi$ , indem wir die Allgemeingültigkeit der Formeln  $\alpha := (\neg\forall x_k \varphi) \implies (\exists x_k \neg\varphi)$  und  $\beta := (\exists x_k \neg\varphi) \implies (\neg\forall x_k \varphi)$  beweisen. Sei dazu  $\mathfrak{A}$  eine beliebige zu *FORM* passende Struktur und  $u : Var \rightarrow A$  eine beliebig gewählte Abbildung. Die Formel  $\alpha$  ist allgemeingültig, wenn  $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = 1$  gilt. Angenommen,  $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = 0$ . Dann gilt  $v_{\mathfrak{A},u}(\neg\forall x_k \varphi) = 1$  und  $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k \neg\varphi) = 0$ . Wegen  $1 = v_{\mathfrak{A},u}(\neg\forall x_k \varphi) = \neg(v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k \varphi))$  haben wir dann  $v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k \varphi) = 0$ , womit eine Abbildung  $u' : A \rightarrow A$  mit  $u' =_{x_k} u$  und  $v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi) = 0$  existiert. Folglich  $\neg(v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi)) = v_{\mathfrak{A},u'}(\neg\varphi) = 1$ , im Widerspruch zu  $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k \neg\varphi) = 0$ . Also ist  $\alpha$  allgemeingültig. Analog zeigt man die Allgemeingültigkeit von  $\beta$ . ■

Der oben eingeführte Begriffsapparat ist Grundlage automatischer Beweisverfahren. Mehr dazu findet man in Büchern über Mathematische Logik (z.B. [Sch 87], [Hein-W 91], [Rau 96] und [Das 2006]).

## 1.7 Graphen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns mehrmals zur Veranschaulichung von Beziehungen (Relationen, Korrespondenzen, Abbildungen) zwischen Elementen von Mengen gewisser Zeichnungen bedient, in denen die Elemente durch Punkte und die Beziehungen zwischen diesen Elementen durch Verbindungsstriche oder Pfeile symbolisiert wurden. Für die Methode, sich Beziehungen zwischen irgendwelchen Objekten zeichnerisch durch Punkte und Striche zu verdeutlichen, gibt es natürlich noch viel mehr Anwendungen. So könnte man z.B. den Aufbau einer chemischen Verbindung, einen Stadtplan, ein Fernmeldenetz, den Aufbau eines Computerprogramms und vieles mehr durch solche „Diagramme“ verdeutlichen.

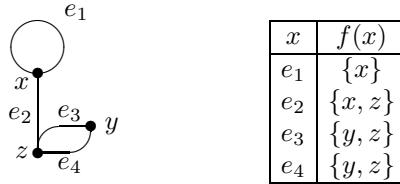
Diese vielen Anwendungen motivieren die mathematische Behandlung solcher „Punkte“ und „Striche“, die hier ganz kurz in Ansätzen vorgeführt werden soll. In späteren Abschnitten kommen wir dann hin und wieder auf diese Objekte zurück. Ausführlich behandeln wir die Graphentheorie und einige ihrer Anwendungen im Band 2. Wir beginnen mit der mathematischen Beschreibung der sogenannten ungerichteten Graphen wie z.B.



Indem man die Punkte (nachfolgend Knoten genannt) mit Buchstaben aus der Menge  $V$  (hier  $\{x, y, z\}$ ) und die Striche (Kanten genannt) mit Elementen aus der Menge  $E$  (hier  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ) bezeichnet sowie die Verbindungen zwischen den Knoten durch gewisse Kanten durch die Abbildung

$$f : E \rightarrow V, e_1 \mapsto \{x\}, e_2 \mapsto \{x, z\}, e_3 \mapsto \{y, z\}, e_4 \mapsto \{y, z\}$$

angibt, sind sämtliche uns interessierenden Eigenschaften des obigen ungerichteten Graphen durch das Tripel  $(V, E, f)$  erfaßt:



Dieses Beispiel motiviert folgende

**Definition** Ein **ungerichteter Graph**  $G$  ist ein Tripel  $(V(G), E(G), f_G)$ , bestehend aus einer nichtleeren Menge  $V(G)$  von **Knoten** (bzw. **Ecken** (engl.: vertices)), einer dazu disjunkten Menge  $E(G)$  von **Kanten** (engl.: edges) und einer Abbildung  $f_G$ , die jeder Kante  $e \in E(G)$  die Menge  $\{x, y\}$  ( $x = y$  möglich!) zuordnet:

$$e \mapsto \{x, y\}.$$

In Beispielen werden wir ungerichtete Graphen meist kurz durch eine Zeichnung, die die Bezeichnungen der Knoten und Kanten enthält, angeben. Zunächst aber eine Reihe von Bezeichnungen und Begriffe für ungerichtete Graphen (mehr oder weniger Auswahl):

**Definitionen** Sei  $G = (V(G), E(G), f_G)$  ein ungerichteter Graph,  $e \in E(G)$  und  $x, y \in V(G)$ . Dann heißt bzw. sagt man:

- $G$  ist **endlich** : $\iff$   $V(G)$  und  $E(G)$  sind endliche Mengen;
- $e$  ist **Schlinge** : $\iff$   $|f_G(e)| = 1$ ;
- $e$  ist **Mehrfachkante** : $\iff$   $\exists e' \in E(G) \setminus \{e\} : f_G(e) = f_G(e')$ ;
- $G$  ist **einfacher** : $\iff$   $G$  besitzt keine Schlingen und Mehrfachkanten; (Einfache Graphen  $G$  lassen sich übrigens ohne Verwendung einer Abbildung  $f_G$  beschreiben:

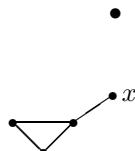
$$G = (V(G), E(G)),$$

wobei  $E(G) \subseteq \{\{a, b\} \mid a \neq b \wedge \{a, b\} \subseteq V(E)\}.$ )

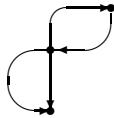
- $e$  verbindet  $x$  und  $y$  (bzw.  $e$  ist **inzident** zu  $x$  und  $y$  bzw.  $x$  (oder  $y$ ) ist **adjazent** zu  $y$  (oder  $x$ )) : $\iff f_G(e) = \{x, y\}$ .

Die Anzahl der Kanten, die mit einem Knoten  $x$  inzident sind, wird **Grad** von  $x$  in  $G$  genannt und mit  $d(x)$  bezeichnet. Dabei zählt man jede Schlinge als zwei Kanten! Man sagt:

- $x$  ist **isolierter Knoten** : $\iff d(x) = 0$ ;
- $x$  ist **Endknoten** : $\iff d(x) = 1$ .



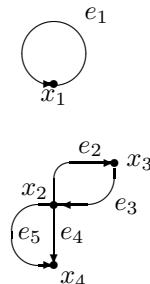
Wie oben bereits erwähnt, gibt es Modelle von Systemen, in denen anstelle von Strichen Pfeile Verwendung finden. Z.B.



Mathematisch kann man eine solche Zeichnung mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe wie folgt beschreiben:

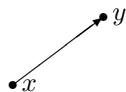
$$G = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, f_G\}, \text{ wobei}$$

$x$	$f_G(x)$
$e_1$	$(x_1, x_1)$
$e_2$	$(x_2, x_3)$
$e_3$	$(x_3, x_2)$
$e_4$	$(x_2, x_4)$
$e_5$	$(x_2, x_4)$



Verallgemeinern lässt sich dieses Beispiel wie folgt:

**Definition** Ein **gerichteter Graph** ist ein Tripel  $(V(G), E(G), f_G)$ , bestehend aus der **Knotenmenge**  $V(G)$ , der Menge der **gerichteten Kanten (Bögen)**  $E(G)$  und der **Inzidenzabbildung**  $f_G$ , die jeder gerichteten Kante  $e$  ein geordnetes Paar  $(x, y) \in V(G) \times V(G)$  zuordnet. Falls  $f_G(e) = (x, y)$ , so nennt man  $x$  **Ausgangsknoten** von  $e$  und  $y$  **Endknoten** von  $e$ .



Die obigen Begriffe und Bezeichnungen für ungerichtete Graphen lassen sich ohne Mühe fast alle auf gerichtete Graphen übertragen. Wir verzichten hier auf deren konkrete Angabe.

Für ungerichtete/gerichtete Graphen lassen sich folgende Begriffe einführen:

### Definitionen

- $G' = (V(G'), E(G'), f_{G'})$  heißt **Teilgraph** von  $G = (V(G), E(G), f_G)$  : $\iff V(G') \subseteq V(G) \wedge E(G') \subseteq E(G) \wedge f_{G'} \subseteq f_G$ .
- $G'$  heißt **spannender Teilgraph** von  $G$  : $\iff G'$  ist Teilgraph von  $G \wedge V(G) = V(G')$ .
- $G$  ist **isomorph** zu  $G'$  : $\iff$   
 $\exists$  Bijektion  $g$  von  $V(G)$  auf  $V(G')$   $\wedge$   $\exists$  Bijektion  $h$  von  $E(G)$  auf  $E(G')$  :  
 $\forall e \in E(G) : f_G(e) = \{x, y\}$  (bzw.  $f_G(e) = (x, y)$ )  
 $\implies f_{G'}(h(e)) = \{g(x), g(y)\}$  (bzw.  $f_{G'}(h(e)) = (g(x), g(y))$ ).

Falls  $G$  zu  $G'$  isomorph ist, schreiben wir  $G \cong G'$ . Die Relation  $\cong$  ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf einer Menge von Graphen.

Mit der Sprechweise „ $G$  ist isomorph zu  $G'$ “ erfaßt man Graphen, die bis auf die Bezeichnung ihrer Knoten und Kanten identisch sind.

**Beispiel** Seien  $G$  und  $G'$  ungerichtete Graphen, die durch folgende Skizzen definiert sind:



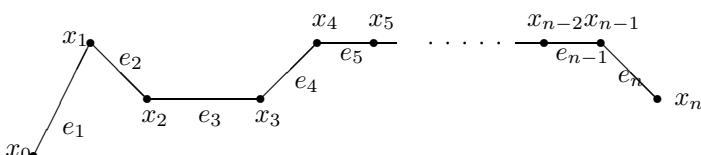
$G$  ist zu  $G'$  isomorph, da obige Definition für die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} g : & x_1 \mapsto x'_3 \\ & x_2 \mapsto x'_1 \\ & x_3 \mapsto x'_2 \\ & x_4 \mapsto x'_4 \end{array} \quad h : \quad \begin{array}{l} e_1 \mapsto e'_4 \\ e_2 \mapsto e'_3 \\ e_3 \mapsto e'_1 \\ e_4 \mapsto e'_2 \end{array}$$

erfüllt ist.

### Definitionen

$x_0e_1x_1e_2x_2e_3x_3 \dots e_nx_n$  heißt **Kantenfolge** (bzw. **gerichtete Kantenfolge**) von  $x_0$  nach  $x_n$  der Länge  $n$  des gerichteten Graphen (bzw. des ungerichteten Graphen)  $G$  : $\iff$   $\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f_G(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\} \\ (\text{bzw. } f_G(e_i) = (x_{i-1}, x_i)). \end{array} \right.$



Die Kantenfolge nennt man **offen**, wenn  $x_0 \neq x_n$ . Sie heißt **geschlossen**, wenn  $x_0 = x_n$  ist.

Man nennt die Kantenfolge (bzw. gerichtete Kantenfolge)  $x_0e_1\dots e_nx_n$  **Weg** (bzw. **gerichteten Weg** oder **Bahn**), wenn sie offen ist und alle  $x_0,\dots,x_n$  paarweise verschieden sind. Eine Kantenfolge (bzw. gerichtete Kantenfolge) wird **Kreis** (bzw. **gerichteter Kreis** oder **Zyklus**) genannt, wenn sie geschlossen ist und alle  $x_0,\dots,x_{n-1}$  paarweise verschieden sind.

Außerdem:

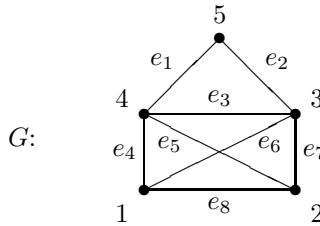
Ein ungerichteter Graph  $G$  heißt **zusammenhängend**  $\iff \forall x,y \in V(G) \exists$  Kantenfolge von  $x$  nach  $y$ .

Ein gerichteter Graph  $G$  heißt **stark zusammenhängend**  $\iff \forall x,y \in V(G) \exists$  gerichtete Kantenfolge von  $x$  nach  $y$ .

Abschließend noch zwei Beispiele (nicht repräsentativ!) dafür, was in der Graphentheorie untersucht bzw. welche Sätze erhalten wurden. Dabei betrachten wir nur ungerichtete Graphen. Wir beginnen mit den **Eulerschen Linien**. Eine Kantenfolge  $K := x_0e_1x_1e_2\dots e_nx_n$  heißt **offene** (bzw. **geschlossene**) **Eulersche Linie** des ungerichteten Graphen  $G$ , falls gilt:

$$\{e_1, \dots, e_n\} = E(G) \wedge (\forall i \neq j : e_i \neq e_j) \wedge (x_0 \neq x_n \text{ (bzw. } x_0 = x_n\text{)}).$$

Z.B. besitzt der Graph



die offene Eulersche Linie  $1e_63e_34e_15e_23e_72e_81e_44e_52$ .

Folgendes Kriterium für die Existenz Eulerscher Linien wurde von L. Euler 1741 erhalten:

*Sei  $G$  ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Dann gilt:  $G$  besitzt genau dann eine offene (bzw. geschlossene) Eulersche Linie, wenn genau zwei Knoten von  $G$  einen ungeraden Grad haben (bzw. wenn  $d(x)$  für alle  $x \in V(G)$  gerade ist).*

Bewiesen wird dieser Satz im Band 2.

Die nachfolgenden Verfahren zur **Konstruktion von Minimalgerüsten** findet man ebenfalls im Band 2 ausführlich erläutert. Ausgangspunkt ist z.B. folgendes **Problem**:

Geplant ist der Bau neuer Gebäude, die mit Energie (z.B. Gas, Strom, Dampf) versorgt werden sollen. Die Kosten für die Herstellung möglicher Leitungsverbindungen zwischen den Gebäuden seien bekannt. Wie findet man ein kostenoptimales Leitungsnetz, das alle Gebäude versorgt, vorausgesetzt, daß eine Zuleitung pro Gebäude genügt und die Länge des Weges von einer Energiequelle zum Gebäude keine Rolle spielen soll?

Ein zugehöriges **Graphenmodell** sieht so aus:

Knoten sind die zu versorgenden Gebäude, (ungerichtete) Kanten sind die möglichen Leitungsverbindungen zwischen den Gebäuden  $a_i$  und  $a_j$ , die mit den Herstellungskosten  $\alpha_k$  bewertet werden:

$$\xrightarrow[a_i]{\alpha_k} \xrightarrow[a_j]{} \quad \text{Diagramm einer Kante mit Bewertung } \alpha_k.$$

Exakt läßt sich dies mittels einer „Kostenfunktion“

$$\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

beschreiben.

Der sich ergebende Graph  $G$  ist offenbar zusammenhängend. Da geschlossene Kantenfolgen überflüssige Verbindungen liefern, welche die Kosten erhöhen, muß also ein zusammenhängender, kreisloser, spannender Teilgraph (ein sogenanntes **Gerüst**) gefunden werden, dessen Kantenbewertungssumme minimal ist, d.h., wir haben ein sogenanntes **Minimalgerüst** aufzufinden. Nachfolgend sind zwei Verfahren angegeben, die unter der Voraussetzung, daß die Kanten paarweise verschiedene Kantenbewertungen besitzen, jeweils eine eindeutige Lösung liefern. Bei der Beschreibung dieser Verfahren wird die anschauliche Darstellung der Graphen zu Grunde gelegt.

#### **Erstes Verfahren:**

Man starte mit der Kante niedrigster Bewertung und füge solange als möglich die jeweils minimal bewertete Kante hinzu, die mit den bereits gewählten Kanten einen zusammenhängenden Graphen, aber keinen Kreis bildet.

#### **Zweites Verfahren:**

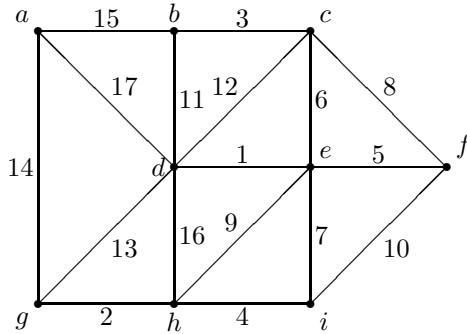
- (1.) Man bilde den Teilgraphen  $G_1$  von  $G$ , wobei  $V(G_1) = V(G)$  und  $E(G_1)$  aus den Kanten jedes Knoten aus  $V(G)$  zu seinen nächsten Nachbarn (das sind Knoten, zu denen Kanten mit der kleinsten Bewertung führen, die von dem betrachteten Knoten ausgehen) besteht. Falls  $G_1$  zusammenhängend ist, bildet  $G_1$  das gesuchte Minimalgerüst.
  - (2.) Ist  $G_1$  nicht zusammenhängend, so ersetze man jede Komponente (das ist ein zusammenhängender Teilgraph, der nicht Teilgraph eines anderen zusammenhängenden Teilgraphen ist) von  $G_1$  durch einen einzigen Knoten und bildet einen Graphen  $G_2$ , in dem zwei Knoten durch eine Kante verbunden werden, sofern in  $E(G)$  eine Kante zwischen den entsprechenden Komponenten existiert. Gewählt wird dabei die Kante mit minimaler Bewertung.
  - (3.) Ist  $G_2$  zusammenhängend und kreislos, so ist man fertig.  
 $G_3 := (V(G), E(G_1) \cup E(G_2), f_{G_3})$  mit  $f_{G_3}(e) := f_G(e)$  für  $e \in E(G_1) \cup E(G_2)$  ist ein gesuchtes Minimalgerüst.
- Besteht  $G_2$  aus  $\geq 2$  Komponenten oder besitzt Kreise, so verfahre man mit  $G_2$  wie mit  $G$  in (1.) und (2.).

Zwecks Illustration der obigen Verfahren wollen wir abschließend ein Minimalgerüst für den Graphen  $G$  mit

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

$$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, g\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, g\}, \{d, h\}, \{e, f\}, \{e, h\}, \{e, i\}, \{f, i\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$$

und  $f_G = \text{id}_{E(G)}$  sowie den Kosten (Kantenbewertungen)  $\alpha(\{a, b\}) = 15$ ,  $\alpha(\{a, d\}) = 17, \dots$  (siehe Zeichnung) ermitteln.



Das erste Verfahren verläuft dann wie folgt:

Beginn mit  $\{d, e\}$  (kleinste Bewertung!).

Fortsetzung mit  $\{e, f\}$  (wiederum kleinste Bewertung!).

Weitere Fortsetzungen sind:  $\{c, e\}, \{b, c\}, \{e, i\}, \{h, i\}, \{g, h\}$ .

$\{c, f\}, \{e, h\}, \{f, i\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, g\}$  entfallen wegen Kreisverbot.

Fortsetzung mit  $\{a, g\}$ .

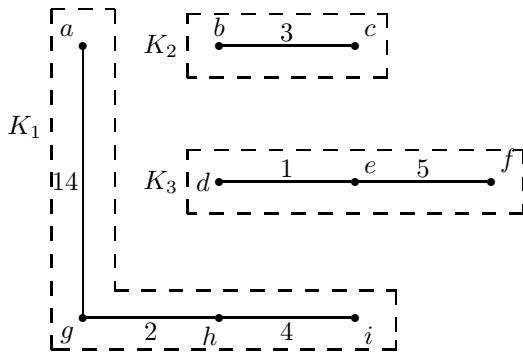
Abbruch, da alle Knoten erfaßt sind!

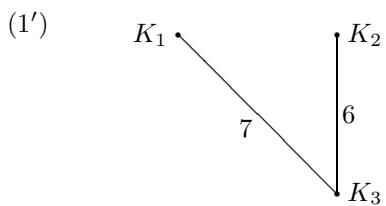
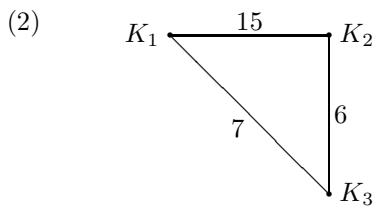
Als Minimalgerüst erhalten wir

$$G' = (V(G); \{\{a, g\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{e, i\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}).$$

Dieses Gerüst ergibt sich auch bei Anwendung des zweiten Verfahrens. Dabei auftretende Zwischenschritte sind:

(1)





---

## Klassische algebraische Strukturen

Bei einer Reihe von Mengen, für deren Elemente gewisse Operationen erklärt sind, kann man gewisse Gemeinsamkeiten bez. der „Rechenregeln“ erkennen. So gilt z.B. für jede der Mengen

$$\mathbb{N} \quad \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

(die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$  und die Menge aller Abbildungen von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{N}$ ) mit den zugehörigen inneren Verknüpfungen (Operationen)

$$+ \quad \cup \quad \square$$

das sogenannte Assoziativgesetz<sup>1</sup>

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

wobei  $\circ \in \{+, \cup, \square\}$  und  $x, y, z$  beliebig wählbare Elemente aus den zu den Operationen gehörenden Mengen bezeichnen. Es bietet sich nun an, anstelle von konkreten Mengen mit dazugehörigen konkreten Operationen sogenannte **algebraische Strukturen (allgemeine Algebren, universale Algebren)**

$$M := (M; \circ_1, \circ_2, \circ_3, \dots)$$

aus einer nichtleeren Menge  $M$  („Trägermenge“) und gewissen auf  $M$  definierten inneren Verknüpfungen  $\circ_1, \circ_2, \dots$ , die gewissen „Gesetzen“ genügen, bestehend, zu untersuchen. Vorteil dieser Methode: Abgeleitete Aussagen (Aussagen, die nur aus den „Rechenregeln“ – wie z.B. dem Assoziativgesetz – folgen) über algebraische Strukturen gelten für sämtliche Beispiele, müssen also nicht für jedes Beispiel extra bewiesen werden. Außerdem liefert diese Vorgehensweise tiefere Einsichten über die betrachteten Strukturen und erschließt auch neue Anwendungsgebiete für die Mathematik. Entwickelt wurde diese

---

<sup>1</sup> Siehe Satz 1.2.4 und Satz 1.4.1.

Methode des Studiums mathematischer Objekte bei der Suche nach Lösungen jahrhundertealter Probleme – wie z.B. dem der Existenz von Lösungsformeln, in denen nur bestimmte Zeichen wie etwa Wurzelausdrücke vorkommen sollen, für

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

$(a_i \in \mathbb{C})$  – und bei dem Bemühen, das Gesamtgebäude der Mathematik übersichtlich darzustellen.

Wir betrachten nachfolgend zunächst spezielle algebraische Strukturen mit höchstens zwei inneren Verknüpfungen, sogenannte *Halbgruppen*, *Gruppen*, *Ringe*, *Körper* und *Verbände* und anschließend solche mit zwei zweistelligen Operationen und einer einstelligen Operation, die sogenannten *Booleschen Algebren*.

Ziel dieses Kapitels ist es, eine für diesen Band ausreichende Einführung in die oben genannten algebraischen Strukturen zu geben. Fortsetzungen und Ergänzungen dieses Kapitels findet man dann im Band 2.

## 2.1 Halbgruppen

**Definitionen** Es sei  $H$  eine nichtleere Menge und  $\circ$  eine innere Verknüpfung auf  $H$ . Man sagt

$$(H; \circ) \text{ ist } \mathbf{Halbgruppe} : \iff \underbrace{\forall a, b, c \in H : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c}_{(A)}$$

Falls sich aus dem Zusammenhang die Operation  $\circ$  ergibt, schreiben wir anstelle von  $(H; \circ)$  nur  $H$  bzw.  $\mathbf{H}$ . Das Element  $a \circ b$  aus  $H$  heißt **Produkt** von  $a$  und  $b$ .

**Beispiele** Halbgruppen sind

- (1.)  $(\mathbb{N}; +)$ ,  $(\mathbb{N}; \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}; +)$ ,  $(\mathbb{Q}; \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}; +)$ , ...

und für jede nichtleere Menge  $M$ :

- (2.)  $(\mathfrak{P}(M); \cap)$ ,  $(\mathfrak{P}(M); \cup)$ ,  $(\mathfrak{P}(M); \triangle)$ ,  
 (3.)  $(\mathfrak{P}(M \times M); \square)$ ,  
 (4.)  $(M^M; \square)$ .

Keine Halbgruppen sind

- (5.)  $(\{1, 2, 3\}; +)$ , da  $+$  keine innere Verknüpfung auf  $\{1, 2, 3\}$ ,  
 (6.)  $(\mathbb{Z}; -)$ , da  $-$  nicht assoziativ (z.B. ist  $1 - (2 - 3) = 2$ , aber  $(1 - 2) - 3 = -4$ ).

Ist  $H$  eine endliche Menge, d.h.,  $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , so kann man die Halbgruppe  $(H; \circ)$  durch eine **Halbgruppentafel** charakterisieren:

$\circ$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_j$	$\dots$	$x_n$
$x_1$	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	$\dots$	$x_1 \circ x_j$	$\dots$	$x_1 \circ x_n$
$x_2$	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	$\dots$	$x_2 \circ x_j$	$\dots$	$x_2 \circ x_n$
$\vdots$						
$x_i$	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	$\dots$	$x_i \circ x_j$	$\dots$	$x_i \circ x_n$
$\vdots$						
$x_n$	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	$\dots$	$x_n \circ x_j$	$\dots$	$x_n \circ x_n$

**Beispiel**  $(\mathfrak{P}(\{a\}); \cap), \mathfrak{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$

**Satz 2.1.1** In einer beliebigen Halbgruppe  $(H; \circ)$  hängt das Produkt beliebiger Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aus  $H$  ( $n \geq 3$ ) in der durch die Numerierung gegebenen Anordnung nicht von der Verteilung der Klammern in dem Produkt ab.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion über  $n \geq 3$ .

(I) Wegen (A) ist die Behauptung für  $n = 3$  richtig.

(II) Angenommen, die Behauptung ist für Produkte mit weniger als  $n$  Faktoren bewiesen, so daß man in solchen auf die Beklammerung verzichten kann. Daher braucht man bei einem Produkt aus  $n$  Faktoren der Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nur noch folgende Beklammerung zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} &a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \dots \circ a_n), \\ &(a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ a_4 \circ \dots \circ a_n), \\ &(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \dots \circ a_n) \\ &(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{n-1}) \circ a_n. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß ein beliebiger dieser Ausdrücke

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \dots \circ a_n)$$

mit  $a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \dots \circ a_n)$

übereinstimmt. Unter Verwendung von (A) und unserer Annahme erhält man:  
 $(a_1 \circ \dots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \dots \circ a_n) = (a_1 \circ (a_2 \circ \dots \circ a_i)) \circ (a_{i+1} \circ \dots \circ a_n) = a_1 \circ ((a_2 \circ \dots \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ \dots \circ a_n)) = a_1 \circ (a_2 \circ \dots \circ a_n).$

Folglich gilt unsere Behauptung. ■

Wegen Satz 2.1.1 können wir nachfolgend bei Produkten von Elementen einer Halbgruppe auf das Setzen von Klammern verzichten.

Als nächstes behandeln wir Elemente von Halbgruppen bzw. Halbgruppen mit besonderen Eigenschaften.

**Definitionen** Es sei  $(H; \circ)$  eine Halbgruppe und  $h \in H$ . Dann heißt

- $H$  kommutative (abelsche<sup>2</sup>) Halbgruppe : $\iff \underbrace{\forall a, b \in H : a \circ b = b \circ a}_{(K)}$
- $h$  Nullelement von  $H$  : $\iff \forall x \in H : x \circ h = h \circ x = h$ ;  
(Beispiele: 0 ist Nullelement von  $(\mathbb{N}_0; \cdot)$ ,  
 $\mathbb{N}$  ist Nullelement von  $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}); \cup)$ .)
- $h$  Einselement (neutrales Element) von  $H$  : $\iff \forall x \in H : x \circ h = h \circ x = x$ .  
(Beispiele: 0 ist Einselement von  $(\mathbb{N}_0; +)$ ,  
1 ist Einselement von  $(\mathbb{N}; \cdot)$ ,  
 $\emptyset$  ist Einselement von  $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}); \cup)$ .)

Eine Halbgruppe mit einem Einselement nennt man **Monoid**.

Sei  $(H; \circ)$  ein Monoid mit genau einem Einselement  $e$  und  $h \in H$ . Dann heißt

- $h$  invertierbar : $\iff \exists h' \in H : h \circ h' = h' \circ h = e$ .  
 $h'$  nennt man in diesem Fall ein zu  $h$  **inverses Element**.  
Beispiele:  $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}); \Delta)$  ist ein Monoid mit dem (einzigen) Einselement  $\emptyset$ . Für  $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  ist  $X$  das inverse Element. In  $(\mathbb{N}; \cdot)$  ist nur 1 invertierbar.

**Satz 2.1.2** Es sei  $(H; \circ)$  eine Halbgruppe. Dann gilt:

- (1)  $H$  besitzt höchstens ein Einselement und höchstens ein Nullelement.
- (2) Hat  $H$  ein Einselement  $e$  und ist  $h \in H$  invertierbar, so ist das zu  $h$  inverse Element  $h'$  eindeutig bestimmt.

**Beweis.** (1): Angenommen,  $e$  und  $e'$  sind Einselemente von  $H$ . Dann gilt  $e \circ e' = e' \circ e = e'$  wegen der Eigenschaft von  $e$  und  $e \circ e' = e' \circ e = e$  wegen der Eigenschaft von  $e'$ . Also  $e = e'$ . Analog überlegt man sich, daß es höchstens ein Nullelement gibt.

(2): Seien  $h'$  und  $h''$  inverse Elemente zu  $h$ . Dann gilt  $h' = e \circ h' = (h'' \circ h) \circ h' \stackrel{(A)}{=} h'' \circ (h \circ h') = h'' \circ e = h''$ . ■

**Definition** Es sei  $(H; \circ)$  eine Halbgruppe und  $H' \subseteq H$ . Dann heißt

**$H'$  Unterhalbgruppe von  $H$**  : $\iff (H'; \circ)$  Halbgruppe

( $\circ$  bezeichnet dabei die Operation von  $H$ , jedoch auf  $H'$  beschränkt).

Offenbar gilt

$H'$  Unterhalbgruppe von  $H \iff H' \circ H' := \{x \circ y \mid x \in H' \wedge y \in H'\} \subseteq H'$ .

### Beispiele

Eine Unterhalbgruppe von  $(\mathbb{Z}; +)$  ist  $(\mathbb{N}; +)$ .

Keine Unterhalbgruppe von  $(\mathbb{Z}; +)$  ist u.a.  $(\{1\}; +)$ .

**Definition** Es sei  $(H; \circ)$  eine algebraische Struktur mit nur einer inneren

<sup>2</sup> Benannt nach Nils Henrik Abel (1802–1829), norwegischer Mathematiker.

Verknüpfung und  $H' \subseteq H$ . Unter dem **Abschluß**  $\langle H' \rangle$  von  $H'$  verstehen wir die Menge aller möglichen endlichen Produkte von Elementen aus  $H'$ , d.h.,

$$\langle H' \rangle := \{a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_r \mid r \in \mathbb{N} \wedge \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subseteq H'\}.$$

Falls  $(H; \circ)$  Halbgruppe, so ist  $\langle H' \rangle$  die kleinste Unterhalbgruppe von  $H$ , die  $H'$  enthält.

### Beispiele

Wählt man  $(H; \circ) = (\mathbb{Z}; +)$ , so gilt  $\langle \{1\} \rangle = \mathbb{N}$  und  $\langle \{1, -1\} \rangle = \mathbb{Z}$ .

**Definitionen** Es sei  $(H; \circ)$  eine algebraische Struktur und  $H' \subseteq H$ . Man sagt

- $H'$  erzeugt  $H : \iff \langle H' \rangle = H$ ;
- $H$  ist endlich erzeugt : $\iff \exists H' : \langle H' \rangle = H \wedge H'$  endlich.

**Satz 2.1.3** Es sei  $(H; \circ)$  eine algebraische Struktur und  $\langle E \rangle = H$ . Gilt für beliebige  $x, z \in H$  und beliebiges  $e \in E$  stets

$$x \circ (e \circ z) = (x \circ e) \circ z,$$

so ist  $(H; \circ)$  eine Halbgruppe.

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$H' := \{y \in H \mid \forall x, z \in H : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\}.$$

Unser Satz ist bewiesen, wenn wir  $H = H'$  nachweisen können.

Offenbar ist  $E \subseteq H'$ .

Seien nun  $u, v \in H'$ . Dann gilt für beliebige  $x, z \in H$ :

$$(x \circ (u \circ v)) \circ z \stackrel{\text{da } u \in H'}{=} ((x \circ u) \circ v) \circ z \stackrel{\text{da } v \in H'}{=} (x \circ u) \circ (v \circ z) \stackrel{\text{da } u \in H'}{=} x \circ (u \circ (v \circ z)) \stackrel{\text{da } v \in H'}{=} x \circ ((u \circ v) \circ z).$$

Folglich gehört  $u \circ v$  zu  $H'$ , womit  $H'$  eine Unterhalbgruppe von  $H$  ist. Wegen  $E \subseteq H'$  und  $\langle E \rangle = H$  folgt hieraus  $H = H'$ . ■

Der eben bewiesene Satz liefert als Folgerung ein Verfahren (**Light-Test**<sup>3</sup>), mit dem man feststellen kann, ob eine Menge  $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) zusammen mit der Operation  $\circ$  eine Halbgruppe ist:

Man wähle eine möglichst kleine Menge  $E$  mit  $\langle E \rangle = H$  und vergleiche für jedes  $e \in E$  die folgenden Tabellen  $T_1(e)$  und  $T_2(e)$ .

$T_1(e) :$

$\circ$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$x_1 \circ e$	$(x_1 \circ e) \circ x_1$	$(x_1 \circ e) \circ x_2$	$\dots$	$(x_1 \circ e) \circ x_n$
$x_2 \circ e$	$(x_2 \circ e) \circ x_1$	$(x_2 \circ e) \circ x_2$	$\dots$	$(x_2 \circ e) \circ x_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_n \circ e$	$(x_n \circ e) \circ x_1$	$(x_n \circ e) \circ x_2$	$\dots$	$(x_n \circ e) \circ x_n$

<sup>3</sup> Benannt nach F. W. Light.

$$T_2(e) :$$

$\circ$	$e \circ x_1$	$e \circ x_2$	$\dots$	$e \circ x_n$
$x_1$	$x_1 \circ (e \circ x_1)$	$x_1 \circ (e \circ x_2)$	$\dots$	$x_1 \circ (e \circ x_n)$
$x_2$	$x_2 \circ (e \circ x_1)$	$x_2 \circ (e \circ x_2)$	$\dots$	$x_2 \circ (e \circ x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$x_n \circ (e \circ x_1)$	$x_n \circ (e \circ x_2)$	$\dots$	$x_n \circ (e \circ x_n)$

Die Operation  $\circ$  ist assoziativ, wenn das Innere der Tabelle  $T_1(e)$  mit dem von  $T_2(e)$  für jedes  $e \in E$  übereinstimmt.

**Beispiel** Wir rechnen so, wie es in einigen urgesellschaftlich lebenden Stämmen einst üblich war:

$1 \oplus 1 = 2, 1 \oplus 2 = 3, 2 \oplus 3 =$  „viel“  $=: v$ . Wir können also exakt nur bis 3

$\oplus$	1	2	3	$v$
1	2	3	$v$	$v$
2	3	$v$	$v$	$v$
3	$v$	$v$	$v$	$v$
$v$	$v$	$v$	$v$	$v$

Für  $E = \{1\}$  gilt  $\langle E \rangle = \{1, 2, 3, v\}$  und

$T_1(1)$ :

$\oplus$	1	2	3	$v$
$1 \oplus 1 = 2$	3	$v$	$v$	$v$
$2 \oplus 1 = 3$	$v$	$v$	$v$	$v$
$3 \oplus 1 = v$	$v$	$v$	$v$	$v$
$v \oplus 1 = v$	$v$	$v$	$v$	$v$

$T_2(1)$ :

$\oplus$	$1 \oplus 1$	$1 \oplus 2$	$1 \oplus 3$	$1 \oplus v$
1	3	v	v	v
2	v	v	v	v
3	v	v	v	v
v	v	v	v	v

$(\{1, 2, 3, v\}; \oplus)$  ist also eine Halbgruppe.

Vor der nächsten Definition ein einführendes

**Beispiel** Die Halbgruppen  $H_1 = (\{0, 1\}; \circ_1)$  und  $H_2 = (\{a, b\}; \circ_2)$  mit

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline \circ_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|cc|} \hline \circ_2 & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \\ \hline \end{array}$$

unterscheiden sich nur in den Bezeichnungen ihrer Elemente und ihrer inneren Verknüpfungen. Solche Halbgruppen nennt man isomorph zueinander. Mathematisch lässt sich diese „Gleichheit bis auf Bezeichnungen“ der obigen Halbgruppen durch die Existenz einer bijektiven Abbildung  $f$  von  $\{0, 1\}$  auf  $\{a, b\}$  ( $f : 0 \mapsto a, 1 \mapsto b$ ) beschreiben, die die Verknüpfungstafel von  $H_1$  in die von  $H_2$  überführt:

$\circ_1$	$\dots$	$y$	$\dots$	
$\vdots$		$\vdots$		
$x$	$\dots$	$x \circ_1 y$		
$\vdots$				

$f \rightarrow$

$\circ_2$	$\dots$	$f(y)$	$\dots$	
$\vdots$		$\vdots$		
$f(x)$	$\dots$	$f(x) \circ_2 f(y) = f(x \circ_1 y)$		
$\vdots$				

**Definition** Seien  $\mathbf{H}_1 = (H_1; \circ_1)$  und  $\mathbf{H}_2 = (H_2; \circ_2)$  Halbgruppen. Dann heißt

$$\mathbf{H}_1 \text{ isomorph zu } \mathbf{H}_2 : \iff \exists \text{ bijektive Abbildung } f : H_1 \rightarrow H_2 : \forall x, y \in H_1 : f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y).$$

Anstelle von „ $\mathbf{H}_1$  ist isomorph zu  $\mathbf{H}_2$ “ schreiben wir auch

$$\mathbf{H}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_2.$$

**Lemma 2.1.4** Die Isomorphie  $\cong$  ist auf einer Menge von Halbgruppen eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* ÜA. ■

Schwächt man die Bedingung in obiger Definition derart ab, daß „ $f$  ist bijektive Abbildung“ durch „ $f$  ist surjektiv“ ersetzt wird, gelangt man zu den folgenden

**Definitionen** Seien  $\mathbf{H}_1 = (H_1; \circ_1)$  und  $\mathbf{H}_2 = (H_2; \circ_2)$  Halbgruppen. Dann heißt

$\mathbf{H}_2$  ein **homomorphes Bild** von  $\mathbf{H}_1$  : $\iff$

$$\exists \text{ surjektive Abbildung } f : H_1 \rightarrow H_2 (\forall x, y \in H_1 f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y)).$$

Die Abbildung  $f$  wird in diesem Fall eine **homomorphe Abbildung** bzw. ein **Homomorphismus** genannt.

**Beispiel** Die Halbgruppe  $(\{0,1,2,3,4,5\}; + \text{ mod } 6)$  lässt sich homomorph auf die Halbgruppe  $(\{0,1,2\}; + \text{ mod } 3)$  abbilden, wie man sich anhand der Verknüpfungstafeln leicht überlegen kann:

$+ \text{ mod } 6$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	4	1
5	5	2	0	3	1	4

$+ \text{ mod } 3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Eine homomorphe Abbildung ist z.B.

$$f := \{(0,0), (3,0), (1,1), (4,1), (2,2), (5,2)\}.$$

## 2.2 Gruppen

**Definition** Sei  $(G; \circ)$  eine algebraische Struktur. Dann heißt

$$(G; \circ) \text{ Gruppe} :\iff \begin{array}{c} (G; \circ) \text{ ist Halbgruppe (d.h., (A) gilt)} \quad \wedge \\ \underbrace{\exists e \in G : \forall x \in G : x \circ e = x}_{\substack{(E) \\ \forall x \in G : \exists x' \in G : x \circ x' = e}} \quad \wedge \\ \underbrace{\forall x \in G : \exists x' \in G : x \circ x' = e}_{(I)} \end{array}$$

Eine weitere Möglichkeit, eine Gruppe zu definieren, ergibt sich aus dem folgenden

### Satz 2.2.1

$$\begin{aligned} (G; \circ) \text{ Gruppe} &\iff (G; \circ) \text{ ist Monoid, in dem alle Elemente invertierbar sind, d.h., es gilt} \\ &\quad (A) \quad \wedge \\ &\quad (E') \quad \exists e \in G : \forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x \quad \wedge \\ &\quad (I') \quad \forall x \in G : \exists x' \in G : x \circ x' = x' \circ x = e. \end{aligned}$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ folgt unmittelbar aus der Definition einer Gruppe.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $(G; \circ)$  eine Halbgruppe, die (E) und (I') erfüllt. Für den Nachweis von (I') haben wir zu zeigen, daß aus  $x \circ x' = e$  stets  $x' \circ x = e$  für beliebiges  $x \in G$  folgt. Wegen  $x \circ x' = e$  und (E) gilt:  $x' \circ (x \circ x') = x'$ . Außerdem existiert für  $x'$  ein  $x''$  mit  $x' \circ x'' = e$ , womit  $e = x' \circ x'' = (x' \circ x \circ x') \circ x'' = (x' \circ x) \circ (x' \circ x'') = x' \circ x$ , d.h., (I') ist erfüllt.

(E') ergibt sich wie folgt: Sei  $x \circ e = x$ . Wegen der Gültigkeit von (I') und (E) gibt es ein  $x'$  mit  $x \circ x' = x' \circ x = e$ . Hieraus folgt nach (A):  $e \circ x = (x \circ x') \circ x = x \circ (x' \circ x) = x \circ e = x$ . ■

Mit Hilfe von Satz 2.1.2 erhalten wir als Folgerung aus Satz 2.2.1 den

**Satz 2.2.2** In einer Gruppe sind das Einselement und das zu jedem Element  $x \in G$  existierende inverse Element  $x'$  eindeutig bestimmt. ■

Folgende Schreibweisen werden wir bei Gruppen verwenden:

	allgemein	„multiplikativ“	„additiv“
Verknüpfung	$\circ$	$\cdot$	$+$
Einselement	$e$	$1$	$0$
zu $x$ inverses Element	$x^{-1}$	$x^{-1}$	$-x$

Die additive Schreibweise einer Gruppe wird in der Regel nur für kommutative Gruppen verwendet.

Vor der Herleitung einiger Eigenschaften von Gruppen mehrere (zum Teil wichtige) Beispiele.

### Beispiel 1

Falls  $+$  bzw.  $\cdot$  die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation bezeichnet, sind folgende algebraische Strukturen Gruppen:  $(\mathbb{Z}; +)$ ,  $(\mathbb{Q}; +)$ ,  $(\mathbb{R}; +)$ ,  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ .

### Beispiel 2

Verknüpfungstafeln von Gruppen mit 2, 3 bzw. 4 Elementen sind

$\circ$	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$e$

$\circ$	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

$\circ$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$	$e$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$e$	$a$	$b$

$\circ$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

Als simple Folgerung aus weiter unten angegebenen Eigenschaften von Gruppen wird sich übrigens ergeben, daß die oben angegebenen Gruppen (bis auf Isomorphie) die einzigen Gruppen mit 2, 3 bzw. 4 Elementen sind. Eine Fortsetzung dieses „Kindergartens“ der kleinen Gruppen findet man z.B. in [Lid-P 82] oder [Cig 95].

### Beispiel 3: Die symmetrische Gruppe $S_n := (S_n; \square)$

$S_n$  bezeichne für  $n \in \mathbb{N}$  die Menge

$$\{f \mid f \text{ ist Bijektion von } \{1, 2, \dots, n\} \text{ auf } \{1, 2, \dots, n\}\},$$

deren Elemente **Permutationen** genannt werden.

Es ist üblich,  $s \in S_n$  durch das folgende Schema zu beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$

$s \square t$  bezeichnet (wie in Abschnitt 1.1 vereinbart) die Hintereinanderausführung der Abbildungen  $s$  und  $t$ . Unter Verwendung obigen Schemas gilt

$$\begin{aligned} s \square t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t(1) & t(2) & \dots & t(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t(s(1)) & t(s(2)) & \dots & t(s(n)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Gruppenaxiome (A), (E) und (I) für  $(S_n; \square)$  ergibt sich aus den Sätzen 1.4.1 und 1.4.3 des Kapitels 1. Es sei noch bemerkt, daß  $|S_n| = n!$ . Speziell für  $n = 3$  vereinbaren wir folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} S_3 &= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}, \text{ wobei} \\ s_1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (= e = \text{id}_{\{1,2,3\}}), \quad s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ s_3 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ s_5 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe  $S_3$  sieht dann wie folgt aus:

$\square$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
$s_1$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
$s_2$	$s_2$	$s_1$	$s_4$	$s_3$	$s_6$	$s_5$
$s_3$	$s_3$	$s_5$	$s_1$	$s_6$	$s_2$	$s_4$
$s_4$	$s_4$	$s_6$	$s_2$	$s_5$	$s_1$	$s_3$
$s_5$	$s_5$	$s_3$	$s_6$	$s_1$	$s_4$	$s_2$
$s_6$	$s_6$	$s_4$	$s_5$	$s_2$	$s_3$	$s_1$

$S_3$  ist offenbar nicht kommutativ!

**Beispiel 4: Die additive Gruppe  $(\mathbb{Z}_n; + \bmod n)$  der Restklassen modulo  $n$**

Wie im Abschnitt 1.4 definiert, sei  $\mathbb{Z}_n$  die Faktormenge  $\mathbb{Z}$  nach  $\equiv_n$ , d.h.,  $\mathbb{Z}$  besteht aus den Äquivalenzklassen der Relation  $\equiv_n$ :

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\},$$

für die wir außerdem die Addition modulo  $n$  wie folgt definiert hatten:

$$[x] + [y] := [x + y] \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

$(\mathbb{Z}_n; +)$  ist offenbar eine kommutative Gruppe mit dem Einselement  $[0]$ . Das zu  $[x]$  inverse Element ist  $[-x]$ . Der Kürze wegen verzichten wir nachfolgend bei der Bezeichnung der Elemente von  $\mathbb{Z}_n$  auf die eckigen Klammern, d.h., wir setzen

$$a = [a]$$

für  $a \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Falls erforderlich, unterscheiden wir die Addition modulo  $n$  von der gewöhnlichen Addition durch die Schreibweise  $+ (\bmod n)$ . Z.B. hat dann  $(\mathbb{Z}_3; +)$  die folgende Verknüpfungstafel:

$+ (\bmod 3)$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Auf  $\mathbb{Z}_n$  lässt sich neben der Addition modulo  $n$  auch eine Multiplikation modulo  $n$  definieren, wie wir uns in Abschnitt 1.4 überlegt hatten:

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y] \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Die algebraische Struktur  $(\mathbb{Z}_n; \cdot)$  ist zwar eine Halbgruppe mit dem Einselement  $[1]$ , jedoch keine Gruppe, da für  $[0]$  (wegen  $[0] \cdot [x] = [0]$  für beliebiges  $x \in \mathbb{Z}$ ) kein inverses Element existiert. Geht man nun zu  $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}; \cdot)$  über, so erhält man nicht für jedes  $n$  eine Gruppe, wie folgendes Beispiel zeigt:

Unter Verwendung der oben eingeführten Kurzschreibweise für die Elemente von  $\mathbb{Z}_4$  gilt:

$\cdot \pmod{4}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

womit  $\cdot \pmod{4}$  keine innere Verknüpfung auf der Menge  $\{1, 2, 3\}$  ist. Eine Gruppe ist jedoch  $(\{[1], [3]\}; \cdot \pmod{4})$ . Diese Gruppe lässt sich verallgemeinern zum

**Beispiel 5: Die Gruppe  $(P_n; \cdot \pmod{n})$  der primen Restklassen modulo  $n$**

$P_n$  bezeichne die Menge

$$\{[a] \in \mathbb{Z}_n \mid \text{der größte gemeinsame Teiler von } a \text{ und } n \text{ ist } 1\}.$$

Zur Erinnerung:  $d$  heißt **größter gemeinsamer Teiler** von  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  : $\iff d \in \mathbb{N} \wedge d|a \wedge d|b \wedge (\forall t \in \mathbb{N} : (t|a \wedge t|b) \implies t|d)$ .

Bezeichnen wollen wir den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$  mit  $a \sqcap b$ . Für den Beweis, daß  $(P_n; \cdot)$  eine Gruppe bildet, benötigen wir folgenden

### Satz 2.2.3 (Satz vom größten gemeinsamen Teiler)

Seien  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Dann existiert genau ein größter gemeinsamer Teiler  $d \in \mathbb{N}$  von  $a$  und  $b$ , der sich für gewisse  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  in der Form

$$d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

darstellen lässt. Umgekehrt ist jeder gemeinsame Teiler  $d$  von  $a$  und  $b$ , der eine Darstellung der Form  $d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ) gestattet, ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $a > b > 0$ .

Zunächst betrachten wir ein Verfahren (den sogenannten „Euklidischen“ Al-

<sup>4</sup> Benannt nach Euklid (bzw. Eukleides) von Alexandria (um 300 v. Chr.). Verfasser eines Sammelwerkes des mathematischen Wissens seiner Zeit, der „Elemente“. Die „Elemente“ waren 2000 Jahre lang die Grundlage für den geometrischen Unterricht an Schulen und Universitäten.

**gorithmus“) zur Berechnung von  $d$ , aus dem sich anschließend leicht unsere Behauptungen ergeben werden.**

Falls  $b|a$  gilt, haben wir offenbar  $d = b$ . Andernfalls erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Division mit Rest

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ \dots &\quad \dots & \dots \dots, \end{aligned}$$

wobei die  $q_1, q_2, \dots, r_1, \dots, r_1, r_2, \dots$  gewisse natürliche Zahlen bezeichnen und die Reste  $r_1, r_2, \dots$  eine streng monoton fallende Folge bilden. Daher müssen wir nach endlich vielen Schritten zum Rest 0 gelangen. Für eine gewisse natürliche Zahl  $k$  ergibt sich also

$$\begin{aligned} r_{k-4} &= r_{k-3} \cdot q_{k-2} + r_{k-2}, & 0 < r_{k-2} < r_{k-3}, \\ r_{k-3} &= r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, & 0 < r_{k-1} < r_{k-2}, \\ r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_k + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1}, \\ r_{k-1} &= r_k \cdot q_{k+1}. \end{aligned}$$

Die Zahl  $r_k$  ist größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ : Liest man nämlich die obigen Gleichungen von unten nach oben, so erhält man der Reihe nach folgende Teilerbeziehungen:

$$r_k|r_{k-1}, r_k|r_{k-2}, \dots, r_k|r_1, r_k|b, r_k|a.$$

Also ist  $r_k$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Für jeden anderen gemeinsamen Teiler  $t \in \mathbb{N}$  von  $a$  und  $b$  (also auch für den größten gemeinsamen Teiler) folgt aber, wenn man nunmehr die obigen Gleichungen von oben nach unten liest:

$$t|r_1, t|r_2, \dots, t|r_k.$$

Damit ist gezeigt, daß es genau einen größten gemeinsamen Teiler (nämlich  $r_k$ ) von  $a$  und  $b$  gibt.

Zum Beweis der Gleichung  $r_k = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$  betrachten wir nochmals die obigen Gleichungen von unten nach oben. Aus der vorletzten Gleichung ergibt sich

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1} \cdot q_k.$$

Mittels der darüberstehenden Gleichung erhalten wir hieraus

$$r_k = (1 + q_{k-1} \cdot q_k) \cdot r_{k-2} - q_k \cdot r_{k-3}.$$

Ersetzt man nun  $r_{k-2}$  durch  $r_{k-4} - r_{k-3} \cdot q_{k-2}$  und faßt zusammen, so kommt man zu einer Gleichung der Form

$$r_k = (\dots) \cdot r_{k-4} + (\dots) \cdot r_{k-3}.$$

Als nächstes nutzt man aus, daß  $r_{k-3} = r_{k-5} - r_{k-4} \cdot q_{k-3}$  ist, usw.

Unser Verfahren liefert schließlich unter Verwendung der ersten Gleichung die Darstellung

$$r_k = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

mit gewissen  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

Die Umkehrung ist klar, da aus

$$d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b \wedge d|a \wedge d|b$$

folgt, daß jeder Teiler von  $a$  und  $b$  auch  $d$  teilt, womit  $d$  nur der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  sein kann. ■

Zur Erläuterung des Euklidischen Algorithmus noch ein einfaches

**Beispiel** Seien  $a = 38, b = 10$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 38 &= 10 \cdot 3 + 8 \\ 10 &= 8 \cdot 1 + 2 \\ 8 &= 2 \cdot 4. \end{aligned}$$

Also haben wir  $38 \sqcap 10 = 2$ . Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  für die Darstellung  $\alpha \cdot 38 + \beta \cdot 10 = 2$  erhält man wie folgt

$$\begin{aligned} 2 &= 10 - 1 \cdot 8 \\ &= 10 - 1 \cdot (38 - 10 \cdot 3) = 4 \cdot 10 - 1 \cdot 38, \text{ d.h., } \alpha = -1 \text{ und } \beta = 4. \end{aligned}$$

Eine Folgerung aus Satz 2.2.3 ist:

#### Satz 2.2.4

$(P_n; \cdot \pmod n)$  ist eine Gruppe.

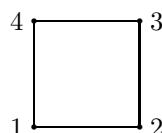
*Beweis.* Man prüft leicht nach, daß  $(P_n; \cdot \pmod n)$  eine Halbgruppe mit dem Einselement  $[1]$  ist. Wir haben noch zu zeigen, daß für jedes  $[a] \in P_n$  ein inverses Element existiert. Falls  $[a] \in P_n$ , ist  $a \sqcap n = 1$ . Folglich existieren nach Satz 2.2.3 gewisse  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha \cdot a + \beta \cdot n = 1$ . Da die übliche Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen mit der Relation  $\equiv_n$  verträglich ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} [\alpha] \cdot [a] + \underbrace{[\beta] \cdot [n]}_{= [0]} &= [1]. \end{aligned}$$

Folglich ist  $[a] = [a]^{-1}$ . ■

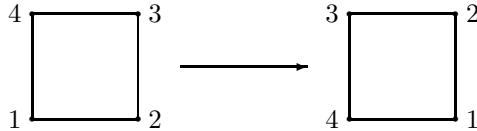
#### Beispiel 6: Diedergruppen

Vor der allgemeinen Definition betrachten wir zunächst folgende Aufgabe:  
Gegeben sei ein Quadrat, dessen Ecken wir mit 1, 2, 3, 4 numerieren.



Man denke sich dieses Quadrat ausgeschnitten. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, dieses Quadrat wieder in das Blatt Papier einzupassen?  
Offenbar ist folgendes möglich:

- Quadrat herausnehmen, um  $90^\circ$  drehen und wieder einpassen:

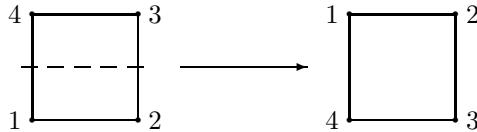


Diese Bewegung ist vollständig durch die Permutation

$$d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

- Quadrat herausnehmen und umklappen (spiegeln):



Beschreiben lässt sich diese Bewegung durch die Permutation

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Alle anderen möglichen Bewegungen sind durch gewisse Hintereinander-ausführungen der beiden „Bewegungen“  $d$  und  $s$  beschreibbar.

Also, die Menge aller „Bewegungen“ (auch „Deckbewegungen“ genannt) des Quadrats auf sich erhält man durch den Abschluß von  $\{d, s\}$  bez. der Operation  $\square : \langle \{d, s\} \rangle$ .

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$\langle \{d, s\} \rangle = \{d, d\square d, d\square d\square d, d\square d\square d\square d, s, s\square d, s\square d\square d, s\square d\square d\square d\}$$

gilt, wobei

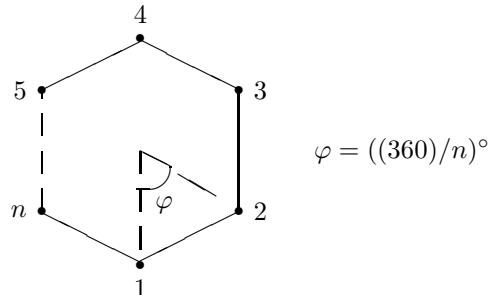
$$\begin{aligned} d\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & d\square d\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ d\square d\square d\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} (= e), & s\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ s\square d\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & s\square d\square d\square d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anhand der Verknüpfungstafel der Halbgruppe  $(\langle \{d, s\} \rangle; \square)$  stellt man außerdem fest, daß  $(\langle \{d, s\} \rangle; \square)$  eine Gruppe aus 8 Elementen ist. So nebenbei

haben wir damit auch endlich unsere Ausgangsfrage beantwortet: Es gibt genau 8 verschiedene Deckbewegungen des Quadrats auf sich.

Verallgemeinern läßt sich unser obiges Beispiel wie folgt:

Wir betrachten ein regelmäßiges  $n$ -Eck ( $n \geq 3$ ):

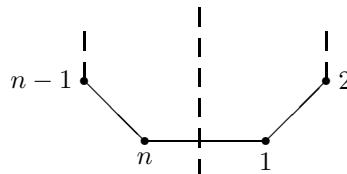


Jede mögliche Deckabbildung (Deckbewegung), die das  $n$ -Eck wieder auf sich überführt, ohne daß sich dabei Längen oder Winkel ändern, erhält man durch Hintereinanderausführung der Bewegungen  $d$  und  $s$ , wobei  $d$  eine Drehung um den Winkel  $((360)/n)^\circ$  mittels

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

und  $s$  eine Spiegelung um eine gewisse Achse vermöge

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



beschreibt.

Die Menge all dieser Bewegungen  $\langle\{d, s\}\rangle$  bildet eine Gruppe

$$D_n = (\{d, d\square d, \dots, \underbrace{d\square \dots \square d}_{n\text{-mal}}, s, s\square d, \dots, s\square \underbrace{d\square \dots \square d}_{(n-1)\text{-mal}}\}, \square),$$

die sogenannte **Diedergruppe**.

Untersucht werden solche Diedergruppen z.B. in der Kristallographie; sie gestatten jedoch auch eine Anwendung mathematischer Methoden auf Probleme der bildenden Kunst, wie z.B. Mustergestaltung und Ornamentik. Im Text der ÜA A.2.23 ist eine Anwendung dieser Gruppen in der Chemie erläutert.

Der nachfolgende Satz faßt einige elementare Folgerungen aus den Gruppenaxiomen (A), (E) und (I) zusammen.

**Satz 2.2.5** Es sei  $(G; \circ)$  eine Gruppe und  $a, b, x, y$  Elemente aus  $G$ . Dann gilt:

- (1)  $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ .
- (2)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
- (3) Die Gleichungen  $a \circ x = b$  und  $y \circ a = b$  haben jeweils genau eine Lösung  $x$  bzw.  $y$ .
- (4) Aus  $a \circ x = b \circ x$  (bzw.  $x \circ a = x \circ b$ ) folgt stets  $a = b$ .

*Beweis.* (1): Wir haben zu zeigen, daß das zu  $(a \circ b)^{-1}$  inverse Element  $b^{-1} \circ a^{-1}$  ist beziehungsweise daß die Gleichung

$$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = e$$

richtig ist. Wegen (A), (E) und  $a \circ a^{-1} = b \circ b^{-1} = e$  gilt  $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$ .

(2): Die Behauptung ist gleichwertig mit  $a^{-1} \circ a = e$ , einer Gleichung, die aus Satz 2.2.1 folgt.

(3): Offenbar gilt

$$a \circ x = b \iff a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ b \iff e \circ x = a^{-1} \circ b \iff x = a^{-1} \circ b.$$

(4): Es gilt:

$$a \circ x = b \circ x \implies a \circ x \circ x^{-1} = b \circ x \circ x^{-1} \implies a \circ e = b \circ e \implies a = b.$$

Analog zeigt man:  $x \circ a = x \circ b \implies a = b$ . ■

Einige **Bezeichnungen**:

Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(G; \circ)$  Gruppe und  $a \in G$  seien

$$\begin{aligned} a^n &:= \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{n\text{-mal}}, \\ a^0 &:= e \quad \text{und} \\ a^{-n} &:= \underbrace{a^{-1} \circ a^{-1} \circ \dots \circ a^{-1}}_{n\text{-mal}}. \end{aligned}$$

Die Potenzrechnung in Gruppen verläuft wie erwartet:

**Satz 2.2.6** Sei  $(G; \circ)$  eine Gruppe. Dann gilt für beliebiges  $a \in G$  und beliebige  $n, m \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} a^n \circ a^m &= a^{n+m} && \text{und} \\ (a^n)^{-1} &= (a^{-1})^n = a^{-n}. \end{aligned}$$

*Beweis.* ÜA. ■

**Definitionen** Seien  $(G; \circ)$  eine Gruppe,  $a \in G$  und  $U \subseteq G$ .

- Die Mächtigkeit  $|G|$  von  $G$  heißt **Ordnung** von  $G$ .  
Man schreibt anstelle von  $|G|$  auch  $\text{ord } G$ .
- Die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $a^n = e$  gilt, nennt man **Ordnung von  $a$**  und bezeichnet sie mit  $\text{ord } a$ .  
Falls  $\text{ord } a$  nicht existiert, schreibt man  $\text{ord } a = \infty$ .

### Beispiele

- Für  $G = (\mathbb{Z}_4; + \bmod 4)$  gilt

$x$	$\text{ord } x$
[0]	1
[1]	4
[2]	2
[3]	4

,

da  $[0] = [0]$ ,  $[1]+[1]+[1]+[1] = [0]$ ,  $[2]+[2] = [0]$ ,  $[3]+[3]+[3]+[3] = [0]$  und diese Identitäten für weniger als die angegebenen Summanden nicht gelten.

- Falls  $G = (\mathbb{Z}; +)$ , gilt für jedes  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$   $\text{ord } a = \infty$ , da für alle  $n \in \mathbb{N}$  stets  $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n\text{-mal}} \neq 0$  ist.
- Die Menge

$$\langle U \rangle := \{a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_r \mid \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq U \cup U^{-1} \wedge r \in \mathbb{N}\},$$

wobei  $U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}$ , heißt **Abschluß von  $U$** . Man beachte, daß der eben definierte Abschlußbegriff nicht mit dem aus dem Abschnitt über Halbgruppen übereinstimmt!

### Beispiele

- Für  $G = (\mathbb{Z}; +)$  ist

$$\langle \{1\} \rangle = \mathbb{Z}, \langle \{2\} \rangle = \{2, -2, 0, 4, -4, 6, -6, \dots\}.$$

- Falls  $G = (\mathbb{Z}_4; + \bmod 4)$ , haben wir

$$\begin{aligned} \langle \{[0]\} \rangle &= \{[0]\}, \langle \{[1]\} \rangle = \langle \{[3]\} \rangle = \mathbb{Z}_4 \text{ und} \\ \langle \{[2]\} \rangle &= \{[0], [2]\}. \end{aligned}$$

Noch einige Bemerkungen zu den obigen Definitionen:

- Anstelle von  $\langle \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle$  schreibt man oft nur  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ .
- Wenn  $(G; \circ)$  eine endliche Gruppe ist, so gilt

$$\text{ord } a = |\langle \{a\} \rangle|$$

für jedes  $a \in G$ .

- Ist  $U$  eine Teilmenge einer endlichen Gruppe, so haben wir

$$\langle U \rangle = \{a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_r \mid \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subseteq U \wedge r \in \mathbb{N}\},$$

d.h., der Abschluß von  $U$  stimmt mit dem für Halbgruppen definierten überein.

Als nächstes wollen wir uns mit Gruppen innerhalb einer Gruppe und einigen ihrer Eigenschaften befassen.

**Definition** Es sei  $(G; \circ)$  eine Gruppe und  $U$  eine Teilmenge von  $G$ . Dann heißt

$(U; \circ)$  **Untergruppe von  $G$**  : $\iff$   $(U; \circ)$  erfüllt die Gruppenaxiome (A), (E) und (I).

Vor Beispielen zunächst der

### Satz 2.2.7 (Untergruppenkriterium)

(1) Es sei  $(G; \circ)$  eine endliche Gruppe,  $U \subseteq G$  und  $U \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & (U; \circ) \text{ Untergruppe von } G \\ \iff & \circ (\text{auf } U \text{ beschränkt}) \text{ ist innere Verknüpfung auf } U \\ \iff & U \circ U := \{a \circ b \mid a, b \in U\} \subseteq U \\ \iff & \langle U \rangle = U. \end{aligned}$$

(2) Es sei  $(G; \circ)$  Gruppe und  $U \subseteq G$ . Dann gilt

$$(U; \circ) \text{ Untergruppe von } G \iff U \circ U^{-1} \subseteq U,$$

$$\text{wobei } U \circ U^{-1} := \{a \circ b^{-1} \mid a, b \in U\}.$$

*Beweis.* (1): Es genügt, die Äquivalenz

$$(U; \circ) \text{ Untergruppe von } G \iff U \circ U \subseteq U$$

zu beweisen.

„ $\implies$ “ ist trivial.

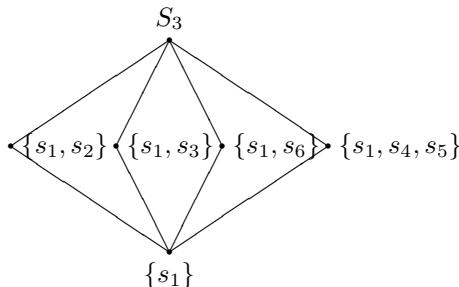
„ $\impliedby$ “: Es sei  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  und  $U \circ U \subseteq U$ . Wegen  $U \circ U \subseteq U$  und Satz 2.2.5, (4) gilt für beliebiges  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ :  $u_i \circ U := \{u_i \circ u_1, u_i \circ u_2, \dots, u_i \circ u_m\} = U$ . Folglich existiert für das Element  $u_i$  ein Element  $u_j$  mit  $u_i \circ u_j = u_i$ . Wegen Satz 2.2.5, (3) kann dieses  $u_j$  nur das Einselement  $e$  der Gruppe  $G$  sein, womit (E) für  $U$  nachgewiesen ist. Außerdem folgt aus  $u_i \circ U = U$ , daß ein  $u_k$  mit  $u_i \circ u_k = e$  in  $U$  existiert. Also gilt auch (I) für  $U$ . (A) ist trivialerweise für die Elemente von  $U$  erfüllt.

(2): „ $\implies$ “ ist offenbar richtig.

„ $\Leftarrow$ “: Da  $U \neq \emptyset$ , gibt es ein  $a \in U$ . Wegen  $U \circ U^{-1} \subseteq U$  gehört folglich  $a \circ a^{-1} = e$  zu  $U$ , d.h., (E) ist für  $U$  gültig. Für jedes  $x \in U$  existiert ferner  $x^{-1}$ , da  $e \circ x^{-1} = x^{-1} \in U \circ U^{-1}$ , womit (I) für die Elemente von  $U$  erfüllt ist. Außerdem ist  $\circ$  eine innere Verknüpfung in  $U$ , da für beliebige  $x, y \in U$  nach dem oben Gezeigten gilt:  $x \circ (y^{-1})^{-1} = x \circ y \in U$ . Da (A) offenbar erfüllt ist, ist  $(U; \circ)$  eine Gruppe. ■

### Beispiele

- (1.) Die einzigen Untergruppen von  $(\mathbb{Z}_4; + \text{ mod } 4)$  sind  $\{[0]\}, \{[0], [2]\}$  und  $\mathbb{Z}_4$ .
- (2.) Die symmetrische Gruppe  $(S_3; \square)$  besitzt genau 6 Untergruppen:  $\{s_1\}$ ,  $\{s_1, s_2\}$ ,  $\{s_1, s_3\}$ ,  $\{s_1, s_6\}$ ,  $\{s_1, s_4, s_5\}$  und  $S_3$ . Definiert man die Inklusion  $\subseteq$  als teilweise reflexive Ordnung auf der Menge aller Untergruppen der  $S_3$ , so erhält man folgendes Hasse-Diagramm:



### Satz 2.2.8 (Satz von Cayley<sup>5</sup>)

Sei  $(G; \circ)$  eine endliche Gruppe. Dann existiert eine Untergruppe  $U$  der symmetrischen Gruppe  $(S_{|G|}; \square)$ , die zu  $G$  isomorph ist.

*Beweis.* Eine beliebige Gruppe  $(G; \circ)$  mit  $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und

$\circ$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$x_1$	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	$\dots$	$x_1 \circ x_n$
$x_2$	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	$\dots$	$x_2 \circ x_n$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$x_n$	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	$\dots$	$x_n \circ x_n$

ist offenbar isomorph zu einer Gruppe  $(G'; \circ)$  mit  $G' := \{1, 2, \dots, n\}$  und

<sup>5</sup> Arthur Cayley (1821–1895), englischer Mathematiker, der auch während seiner Tätigkeit als Jurist Zeit für mathematische Veröffentlichungen hatte. Seine über 900 Publikationen befassen sich u.a. mit Invariantentheorie, Matrizen, algebraische Geometrie und Gruppentheorie.

$\circ$	1	2	$\dots$	$n$
1	$1 \circ 1$	$1 \circ 2$	$\dots$	$1 \circ n$
2	$2 \circ 1$	$2 \circ 2$	$\dots$	$2 \circ n$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$n$	$n \circ 1$	$n \circ 2$	$\dots$	$n \circ n$

wobei

$$\forall i, j, k \in G' : i \circ j = k \iff x_i \circ x_j = x_k.$$

Wegen Satz 2.2.5, (4) gilt  $\{1 \circ i, 2 \circ i, \dots, n \circ i\} = \{1, 2, \dots, n\}$  für beliebiges  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Außerdem müssen alle Spalten der oben stehenden Tabelle paarweise verschieden sein. Folglich kann man jedem  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  eine Permutation  $s_i$  aus  $S_n$  wie folgt mittels der Abbildung  $f$  zuordnen:

$$f : i \mapsto s_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 \circ i & 2 \circ i & \dots & n \circ i \end{pmatrix}.$$

$f$  ist offenbar eine bijektive Abbildung von  $\{1, 2, \dots, n\}$  auf  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  und für beliebige  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt:

$$\begin{aligned} f(i) \square f(j) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 \circ i & 2 \circ i & \dots & n \circ i \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 \circ j & 2 \circ j & \dots & n \circ j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ (1 \circ i) \circ j & (2 \circ i) \circ j & \dots & (n \circ i) \circ j \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(A)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 \circ (i \circ j) & 2 \circ (i \circ j) & \dots & n \circ (i \circ j) \end{pmatrix} \\ &= f(i \circ j). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $f$  ist damit eine isomorphe Abbildung von  $(G'; \circ)$  auf die algebraische Struktur  $(\{s_1, s_2, \dots, s_n\}; \square)$ , die offenbar eine Untergruppe  $U$  der Gruppe  $S_n$  bildet.

Da  $\cong$  eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus  $G \cong G'$  und  $G' \cong U$  die Behauptung von Satz 2.2.8. ■

**Beispiel** Es sei  $G = (\{e, a, b\}; \circ)$  und

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Zu  $G$  isomorph ist die Gruppe  $G' = (\{1, 2, 3\}; \circ)$  mit

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Hieraus lässt sich dann eine isomorphe Abbildung  $\varphi$  von  $G$  auf eine Untergruppe der  $S_3$  wie folgt festlegen:

$$\varphi : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = s_1, a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = s_4, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = s_5,$$

wobei

$\square$	$s_1$	$s_4$	$s_5$
$s_1$	$s_1$	$s_4$	$s_5$
$s_4$	$s_4$	$s_5$	$s_1$
$s_5$	$s_5$	$s_1$	$s_4$

d.h.,  $G$  ist isomorph zu  $(\{s_1, s_4, s_5\}; \square)$ .

Ziel der nachfolgenden Überlegungen sind eine Aussage über die Ordnungen der Untergruppen einer gegebenen Gruppe. Zunächst jedoch zwei

### Definitionen

- Seien  $(G; \circ)$  eine Gruppe,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $x \in G$ .  
 $x \circ U := \{x \circ u \mid u \in U\}$  heißt **Links-** und  
 $U \circ x := \{u \circ x \mid u \in U\}$  heißt **Rechtsnebenklasse** von  $G$  nach  $U$ .

**Beispiel** Für  $G = (S_3; \square)$ ,  $U = \{s_1, s_2\}$  und  $x = s_3$  ist

$$s_3 \square U = \{s_3, s_5\} \text{ und } U \square s_3 = \{s_3, s_4\}.$$

- Eine Untergruppe  $U$  von  $G$  mit der Eigenschaft

$$\forall x \in G : \quad x \circ U = U \circ x \\ (\text{bzw. } \forall x \in G : \quad U = x^{-1} \circ U \circ x)$$

nennt man **Normalteiler** der Gruppe  $G$ .

### Beispiele

- (1) In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe Normalteiler.
- (2) Die Untergruppe  $\{s_1, s_4, s_5\}$  der  $S_3$  ist Normalteiler.

**Satz 2.2.9** Sei  $U$  eine Untergruppe der Gruppe  $(G; \circ)$ . Je zwei Links- (bzw. Rechts-) Nebenklassen von  $G$  nach  $U$  sind gleichmächtig und entweder gleich oder disjunkt. Außerdem gilt für beliebige  $x, y \in G$ :

$$x \circ U = y \circ U \iff y^{-1} \circ x \in U$$

und

$$U \circ x = U \circ y \iff y \circ x^{-1} \in U.$$

*Beweis.* Es genügt, die Behauptungen für Linksnebenklassen zu beweisen. Für  $x, y \in G$  ist die Abbildung

$$f : x \circ U \rightarrow y \circ U, x \circ u \mapsto y \circ u$$

bijektiv, da sie offensichtlich nach Definition surjektiv ist und sich aus  $f(x \circ u_1) = f(x \circ u_2)$  mittels Satz 2.2.5, (4)  $u_1 = u_2$  ergibt. Also sind die Mengen  $x \circ U$  und  $y \circ U$  gleichmächtig.

Angenommen,  $(x \circ U) \cap (y \circ U) \neq \emptyset$  und  $x, y \in U$ . Dann existieren gewisse  $u_1, u_2 \in U$  mit  $x \circ u_1 = y \circ u_2$ . Folglich haben wir

$$\begin{aligned} x &= y \circ u_2 \circ u_1^{-1} \text{ und damit } x \circ U \subseteq y \circ U \\ \text{und } y &= x \circ u_1 \circ u_2^{-1} \text{ und damit } y \circ U \subseteq x \circ U, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar  $x \circ U = y \circ U$  ergibt.

Seien nun  $x, y \in G$  beliebig gewählt. Gilt  $x \circ U = y \circ U$ , so existieren  $u_1, u_2 \in U$  mit  $x \circ u_1 = y \circ u_2$ , woraus  $y^{-1} \circ x = u_2 \circ u_1^{-1} \in U$  folgt. Ist umgekehrt  $y^{-1} \circ x \in U$ , so gilt  $(y^{-1} \circ x) \circ U = U$  und damit  $x \circ U = y \circ U$ . ■

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 2.2.9 erhält man:

**Lemma 2.2.10** *Die Links- (bzw. Rechts-)Nebenklassen  $a \circ U$  (bzw.  $U \circ a$ ) für  $a \in G$  bilden eine Zerlegung der Menge  $G$ .* ■

Z.B. gilt für  $G = (\mathbb{Z}_6; + \bmod 6)$  und  $U = \{[0], [3]\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_6 &= \{[0], [3]\} \cup ([1] + \{[0], [3]\}) \cup ([2] + \{[0], [3]\}) \\ &= \{[0], [3]\} \cup \{[1], [4]\} \cup \{[2], [5]\}. \end{aligned}$$

Aus dieser Folgerung und der Gleichmächtigkeit von Nebenklassen einer Gruppe  $G$  nach der Untergruppe  $U$  erhält man als weitere Folgerung aus Satz 2.2.9 den

### Satz 2.2.11 (Satz von Lagrange<sup>6</sup>)

*Seien  $G$  eine endliche Gruppe und  $U$  eine Untergruppe von  $G$ . Bezeichne außerdem  $|G : U|$  (**Index von  $G$  in  $U$**  genannt) die Anzahl der verschiedenen Rechts- (bzw. Links-) Nebenklassen von  $G$  nach  $U$ . Dann gilt*

$$|G| = |U| \cdot |G : U|. \quad \blacksquare$$

Eine Gruppe der Ordnung 6 kann also nur Untergruppen der Ordnung 1, 2, 3 oder 6 haben, aber keine mit etwa 4 oder 5 Elementen.

Einige Folgerungen aus Satz 2.2.11 fassen wir zusammen im

---

<sup>6</sup> Joseph Louis Lagrange (1736–1813), französischer Mathematiker, der grundlegende Arbeiten zur Mechanik und Infinitesimalrechnung schrieb.

**Satz 2.2.12** Seien  $G$  eine endliche Gruppe,  $U$  eine Untergruppe von  $G$ ,  $a \in G$  und bezeichne  $e$  das Einselement von  $G$ . Dann gilt

- (1)  $|U| \mid |G|$ ;
- (2)  $\text{ord } a \mid |G|$ ;
- (3) Ist  $|G| \in \mathbb{P}$ , so sind  $\{e\}$  und  $G$  die einzigen (die sogenannten trivialen) Untergruppen von  $G$ . ■

Mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnungen und Begriffe lassen sich auch die Homomorphismen auf Gruppen charakterisieren. Es ist zu empfehlen, sich vor dem nachfolgenden Satz noch einmal das Beispiel von Seite 65 eines Homomorphismus anzusehen.

### Satz 2.2.13 (Homomorphiesatz für Gruppen)

- (1) Sei die Gruppe  $(G'; \circ')$  homomorphes Bild der Gruppe  $G = (G; \circ)$ , d.h., es existiert eine surjektive Abbildung  $f : G \rightarrow G'$  mit

$$\forall x, y \in G : f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y).$$

Dann gilt

- (a)  $\ker f := \{x \in G \mid f(x) = e'\}$  („**Kern von  $f$** “), wobei  $e'$  das Einselement von  $G'$  bezeichnet, ist ein Normalteiler  $N$  der Gruppe  $G$  und
- (b) die Menge

$$G/N := \{x \circ N \mid x \in G\}$$

(**Faktorgruppe von  $G$  nach  $N$**  genannt) bildet zusammen mit der Operation  $\circ$ , die definiert ist durch

$$\forall A, B \in G/N : A \circ B := \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

eine Gruppe, die zur Gruppe  $G'$  isomorph ist.

- (2) Ist umgekehrt  $N$  ein Normalteiler von  $G$ , so erhält man durch

$$f_N : G \rightarrow G/N, x \mapsto x \circ N$$

eine homomorphe Abbildung von  $G$  auf die Faktorgruppe  $G/N$ .

*Beweis.* (1): Wir zeigen zunächst, daß  $N := \ker f$  eine Untergruppe von  $G$  ist. Dazu bezeichne  $e$  das Einselement von  $G$ . Für alle  $x, y \in N$  haben wir offenbar:  $f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y) = e' \circ' e' = e'$ , womit  $N \circ N \subseteq N$ .

Wegen  $f(x) = f(x \circ e) = f(x) \circ' f(e)$  für beliebige  $x \in G$  gilt ferner  $f(e) = e'$ . Außerdem haben wir für  $x \in N$ :  $e' = f(e) = f(x \circ x^{-1}) = f(x) \circ' f(x^{-1}) = e' \circ' f(x^{-1}) = f(x^{-1})$ , woraus sich  $N^{-1} \subseteq N$  ergibt. Hieraus und aus  $N \circ N \subseteq$

$N$  folgt nun, daß  $N \circ N^{-1} \subseteq N$  ist. Nach dem Untergruppenkriterium ist damit  $N \leq G$ .

Die Normalteilereigenschaft ( $\forall x \in N : x \circ N \circ x^{-1} = N$ ) der Gruppe  $N$  ergibt sich aus

$$f(x \circ n \circ x^{-1}) = f(x) \circ f(n) \circ f(x^{-1}) = f(x) \circ' e' \circ' f(x^{-1}) = f(x \circ x^{-1}) = e'$$

für beliebige  $n \in N$ . Also gilt (a).

(b): Aus der Definition eines Normalteilers und der Eigenschaft  $N \circ N = N$  für Gruppen  $N$  erhält man für beliebige  $x, y \in G$ :  $(x \circ N) \circ (y \circ N) = (x \circ N) \circ (N \circ y) = x \circ ((N \circ N) \circ y) = x \circ (N \circ y) = x \circ (y \circ N) = (x \circ y) \circ N$ , womit  $\circ$  eine innere Verknüpfung auf der Menge  $G/N$  ist. Von der Abbildung

$$g_f : G/N \rightarrow G', x \circ N \mapsto f(x)$$

zeigt man nun leicht, daß sie die algebraische Struktur  $(G/N; \circ)$  auf  $G'$  isomorph abbildet, woraus (b) folgt:

Wegen  $g_f(x \circ N) = g_f(y \circ N) \implies f(x) = f(y) \implies f(x \circ y^{-1}) = f(x) \circ' (f(y))^{-1} = e' \implies x \circ y^{-1} \in N \implies N \circ (x \circ y^{-1}) = N \implies N \circ x = N \circ y \implies x \circ N = y \circ N$

ist  $g_f$  bijektiv und wegen

$$\begin{aligned} \forall x \circ N, y \circ N \in G/N : \quad & g_f((x \circ N) \circ (y \circ N)) = g_f((x \circ y) \circ N) = f(x \circ y) \\ & = f(x) \circ' f(y) = g_f(x \circ N) \circ' g_f(y \circ N). \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von  $G/N$  auf  $G'$ .

(2): Für jeden Normalteiler  $N$  von  $G$  ist die Abbildung

$$f_N : G \rightarrow G/N, x \mapsto x \circ N$$

offenbar surjektiv und es gilt für beliebige  $x, y \in G$ :

$f_N(x \circ y) = (x \circ y) \circ N = x \circ (y \circ N) = x \circ (N \circ y) = x \circ (N \circ N \circ y) = (x \circ N) \circ (N \circ y) = (x \circ N) \circ (y \circ N) = f(x) \circ f(y)$ , womit  $f$  ein Homomorphismus von  $G$  auf  $G/N$  ist. ■

## 2.3 Ringe und Körper

Wir spezialisieren zunächst unseren Begriff der Gruppe weiter zu dem des Ringes.

**Definition** Sei  $R$  eine nichtleere Menge, auf der zwei innere Verknüpfungen erklärt sind, die wir mit  $+$  und  $\cdot$  bezeichnen wollen.  $+$  und  $\cdot$  müssen dabei nicht mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation identisch sein! Dann heißtt

$$\begin{aligned} (R; +, \cdot) \text{ Ring} : \iff & (R; +) \text{ ist abelsche Gruppe} & \wedge \\ & (R; \cdot) \text{ ist Halbgruppe} & \wedge \\ & \forall x, y, z \in R : & \\ & \quad \left. \begin{aligned} & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ & \wedge (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z. \end{aligned} \right\} & \quad (\text{D}) \end{aligned}$$

$(R; +, \cdot)$  kommutativer Ring : $\iff$   $(R; +, \cdot)$  ist Ring und  $(R; \cdot)$  eine kommutative Halbgruppe.

### Beispiele

- (1.)  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$  ist ein „Prototyp“ für Ringe.
- (2.)  $(\mathbb{Z}_n; + \pmod{n}, \cdot \pmod{n})$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Ring.  
Beide oben angegebenen Ringe sind auch kommutative Ringe.

Wir vereinbaren folgende **Bezeichnungen**:

- Anstelle von  $(R; +, \cdot)$  schreiben wir oft kurz  $R$ .
- Das Einselement von  $(R; +)$  wird mit  $0$  bezeichnet.
- Für jedes Element  $x$  der Gruppe  $(R; +)$  bezeichnen wir das inverse Element von  $x$  mit  $-x$ .

Elementare Rechenregeln in Ringen sind zusammengefaßt im

**Satz 2.3.1** Sei  $(R; +, \cdot)$  ein Ring. Dann gilt für beliebige  $x, y \in R$ :

- (1)  $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ ;
- (2)  $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ ;
- (3)  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ .

*Beweis.* (1): Wegen (E) und (D) gilt  $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ . Indem man  $0 \cdot x + (-0 \cdot x) (= 0) = 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x$  hieraus schlußfolgert, erhält man  $0 \cdot x = 0$ . Analog zeigt man  $x \cdot 0 = 0$ .

(2): Offenbar gilt  $0 = x \cdot 0 = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot y + x \cdot (-y)$ , womit  $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$  ist. Analog läßt sich  $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$  begründen.

(3): Indem man (2) zweimal verwendet und Satz 2.2.5, (2) beachtet, erhält man  $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y$ . ■

Besonders wichtig werden für uns nachfolgend gewisse spezielle Ringe (die sogenannten Körper) sein.

**Definition** Es sei  $K$  eine nichtleere Menge und  $+, \cdot$  zwei innere Verknüpfungen in  $K$ . Dann heißt

$(K; +, \cdot)$  **Körper** : $\iff$   $(K; +, \cdot)$  Ring  $\wedge (K \setminus \{0\}; \cdot)$  kommutative Gruppe.

Da  $K \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , enthält die Menge  $K$  eines Körpers mindestens zwei verschiedene Elemente.

**Beispiele** Offenbar sind  $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}; +, \cdot)$  ( $+, \cdot$  bezeichnen dabei die übliche Addition und Multiplikation) Körper. Wegen der Folgerung aus Satz 2.2.3 ist für jedes  $p \in \mathbb{P}$  die algebraische Struktur  $(\mathbb{Z}_p; + \pmod{p}, \cdot \pmod{p})$  ein Körper (siehe dazu auch Satz 2.3.3).

### Definitionen

- Es sei  $(R; +, \cdot)$  ein kommutativer Ring und  $x \in R \setminus \{0\}$ . Dann heißt  $x$  **Nullteiler** von  $R$  : $\iff \exists y \in R \setminus \{0\} : x \cdot y = 0$ .

**Beispiel** Für  $(\mathbb{Z}_4; + \pmod{4}, \cdot \pmod{4})$  ist  $[2]$  Nullteiler, da  $[2] \cdot [2] = [0]$ .

- Einen kommutativen Ring nennt man  
**nullteilerfrei** : $\iff \forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$ .

**Satz 2.3.2**

- (1) Sei  $(R; +, \cdot)$  ein endlicher kommutativer Ring mit dem Einselement 1 (bez.  $\cdot$ ) und sei  $R$  nullteilerfrei. Dann ist  $(R; +, \cdot)$  ein Körper.
- (2) Jeder Körper ist nullteilerfrei.

*Beweis.* (1): Wir haben zum Beweis nur zu zeigen, daß für jedes  $x \in R \setminus \{0\}$  ein  $x^{-1}$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$  existiert. Dazu betrachten wir die Menge  $x \cdot R := \{x \cdot y \mid y \in R\}$  und zeigen  $|x \cdot R| = |R|$ . Angenommen,  $|x \cdot R| \neq |R|$ . Dann existieren  $y_1, y_2 \in R$  mit  $x \cdot y_1 = x \cdot y_2$  und  $y_1 \neq y_2$ . Folglich ist  $x \cdot (y_1 - y_2) = 0$  und (wegen  $x \neq 0$  sowie der Nullteilerfreiheit von  $R$ )  $y_1 = y_2$ , im Widerpruch zur Annahme. Also gilt  $|x \cdot R| = |R|$  und damit (wegen der Endlichkeit von  $R$ ) auch  $x \cdot R = R$ , womit für  $x$  ein  $x^{-1} \in R$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$  existiert.  
(2): Besitzt ein Ring Nullteiler, so ist  $\cdot$  keine innere Verknüpfung auf der Menge  $R \setminus \{0\}$ . Also muß ein Körper nullteilerfrei sein. ■

**Satz 2.3.3** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(\mathbb{Z}_n; + \pmod{n}, \cdot \pmod{n}) \text{ ist Körper} \iff n \in \mathbb{P}.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ folgt aus Abschnitt 2.2.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $(\mathbb{Z}_n; + \pmod{n}, \cdot \pmod{n})$  ein Körper und angenommen,  $n \notin \mathbb{P}$ . Dann gibt es gewisse  $u, v \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  mit  $u < n$ ,  $v < n$  und  $u \cdot v = n$ . Folglich haben wir  $[u] \cdot [v] = [0]$ , im Widerspruch zu Satz 2.3.2, (2). ■

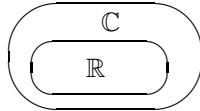
**Bemerkung** Im Band 2 werden wir – in Vorbereitung auf einen Abschnitt über Codierungstheorie – zeigen, daß die Anzahl  $|K|$  der Elemente eines endlichen Körpers  $K$  nur eine Primzahlpotenz  $p^n$  sein kann und daß zu jeder Primzahlpotenz  $p^n$  bis auf Isomorphie (d.h., bis auf Ändern der Bezeichnungen) genau ein Körper mit  $p^n$  Elementen existiert.

Abschließend wollen wir uns ausführlich mit dem

**Körper der komplexen Zahlen**

befassen.

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist eine „Erweiterung“ der Menge  $\mathbb{R}$ :



So wie man z.B.  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$  erweitert hat, um jede Gleichung der Form  $a \cdot x = b$  mit  $a \neq 0$  lösen zu können, erweitert man  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$ , um z.B. Lösungen  $x$  für jede Gleichung der Form

$$x^n + a = 0 \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

zu haben.

Komplexe Zahlen kann man auf mehrere Weisen einführen. Wir gehen zunächst den **historischen Weg**:

Man führt die neue Größe

$$i \quad (\text{„imaginäre Einheit“})$$

als eine Lösung der Gleichung  $x^2 = -1$  ein, d.h., es gilt

$$i^2 = -1,$$

und bezeichnet

$$z = a + b \cdot i \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

als komplexe Zahl mit dem **Realteil**  $a$  (Bezeichnung:  $a = \operatorname{Re} z$ ) und dem **Imaginärteil**  $b$  (Bezeichnung:  $b = \operatorname{Im} z$ ). Die Menge aller komplexen Zahlen ist dann

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Mit den komplexen Zahlen rechnet man, von der Regel  $i^2 = -1$  abgesehen, ganz so wie man es mit den reellen Zahlen gewöhnt ist. Die Addition und die Multiplikation von komplexen Zahlen verläuft demnach wie folgt:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) &= (a + c) + (b + d) \cdot i, \\ (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) &= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i. \end{aligned}$$

Außerdem ist z.B., falls  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ ,

$$(a + b \cdot i)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

wenn man formal

$$(a+b \cdot i)^{-1} = \frac{1}{a + b \cdot i} = \frac{a - b \cdot i}{(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)} = \frac{a - b \cdot i}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

rechnet. Bei dieser naiven Vorgehensweise bleibt offen, was denn eigentlich  $i$  oder allgemeiner eine komplexe Zahl ist. Wir wollen deshalb noch eine Definition der komplexen Zahlen angeben, die nur auf bekannten Begriffen aufbaut.

### Algebraische Konstruktion der komplexen Zahlen

Dazu betrachten wir die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , auf der wir als innere Verknüpfungen eine Addition  $\oplus$  und eine Multiplikation  $\odot$  einführen:

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \odot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R}; +, \cdot$  bezeichnen die üblichen Operationen auf  $\mathbb{R}$ ). Man prüft nun leicht nach, daß  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus)$  eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element  $(0, 0)$  ist. Ferner gilt  $(1, 0)$  ist das Einselement von  $((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}; \odot)$  und

$$(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$$

ist das zu  $(a, b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$  inverse Element.

Durch Nachrechnen überzeugt man sich davon, daß auch (A) für  $\odot$  und (D) für  $\oplus, \odot$  gilt. Damit ist bewiesen (siehe auch ÜA A.2.26):

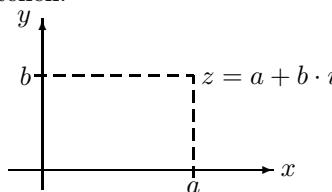
**Satz 2.3.4**  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \odot)$  ist ein Körper, den man Körper der komplexen Zahlen nennt und seine Elemente komplexe Zahlen. ■

Man erkennt unschwer, daß  $a + b \cdot i$  nur eine andere Schreibweise für das Paar  $(a, b)$  reeller Zahlen ist. (Genauer:  $(\mathbb{C}; +, \cdot)$  ist isomorph zu  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \odot)$ . Dabei ist die Isomorphie von Ringen wie folgt definiert:

Seien  $(R; +, \cdot)$  und  $(R'; +', \cdot')$  Ringe. Man sagt

$$\begin{aligned} R \text{ ist isomorph zu } R' : \iff & \exists \text{ bijektive Abbildung } f : R \rightarrow R' : \\ & \forall x, y \in R : f(x + y) = f(x) +' f(y) \quad \wedge \\ & f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y). ) \end{aligned}$$

Wir werden deshalb komplexe Zahlen nicht in Form von Paaren schreiben, sondern immer in der Form  $a + b \cdot i$ , weil diese Schreibweise suggestiver und den Rechenoperationen besser angepaßt ist. Die Beschreibung durch Paare ist dazu gut, die komplexen Zahlen aus etwas schon Bekannten, nämlich den reellen Zahlen, zu konstruieren sowie sich eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen zu überlegen. Komplexe Zahlen  $z = a + b \cdot i$  lassen sich nämlich in einer Ebene mit rechtwinkligem Koordinatenkreuz als Punkte mit Koordinaten  $a$  und  $b$  darstellen:

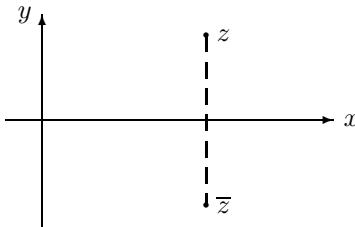


Man erhält auf diese Weise eine Veranschaulichung von  $\mathbb{C}$  als **komplexe Zahlenebene**. Dabei bezeichnet man die  $x$ -Achse als „reelle Achse“ und die  $y$ -Achse als „imaginäre Achse“.

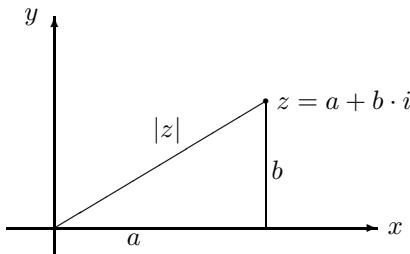
Mit Hilfe der komplexen Zahlenebene lassen sich auch die beiden nachfolgenden Begriffe interpretieren.

### Definitionen

- $\bar{z} := a - b \cdot i$ , falls  $z = a + b \cdot i$ , heißt die zu  $z$  **konjugierte komplexe Zahl**.



- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ , wobei  $z = a + b \cdot i$ , nennt man **Betrag** von  $z$  („Abstand zum Punkt  $(0,0)$ “).

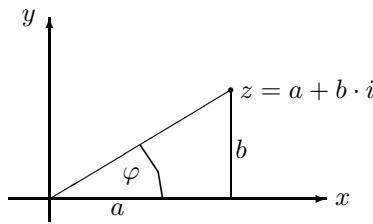


**Satz 2.3.5** Für beliebige komplexe Zahlen  $z, z'$  gilt:

- (1)  $\bar{\bar{z}} = z$ ,  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ,  $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$ ;
- (2)  $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ ;
- (3)  $\operatorname{Im} z = ((\bar{z} - z)/2) \cdot i$ ;
- (4)  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ;
- (5)  $|z| = |\bar{z}|$ ;
- (6)  $z^{-1} = \bar{z}/(|z|^2)$  für  $z \neq 0$ ;
- (7)  $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ ;
- (8)  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  („Dreiecksungleichung“).

*Beweis.* ÜA A.2.34. ■

Obige geometrische Deutung der komplexen Zahlen  $z$  liefert auch folgende **trigonometrische Darstellung** von  $z \neq 0$ :



Sei  $\varphi$  der Winkel (von uns in der Regel im Bogenmaß angegeben) zwischen der  $x$ -Achse und der reellen Geraden durch  $z$  und dem Nullpunkt. Dabei messen wir den Winkel stets in „positiver Umlaufrichtung“, d.h., entgegen dem Uhrzeigersinn. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= |z| \cdot \cos \varphi, \\ b &= |z| \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

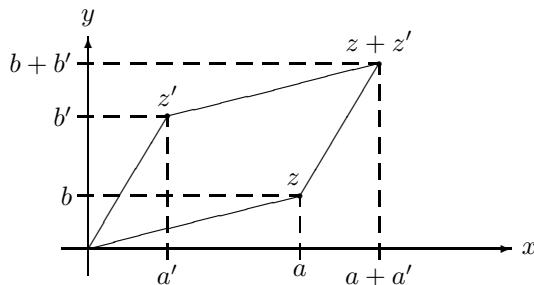
Häufig schreibt man auch

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

wobei  $r := |z|$ .

Diese trigonometrische Darstellung von komplexen Zahlen ist sehr brauchbar beim Multiplizieren, Potenzieren und bei dem (noch zu erläuternden) Wurzelziehen von komplexen Zahlen. Dazu gleich mehr.

Zunächst jedoch die **geometrische Deutung der „Grundrechenarten“ für komplexe Zahlen**. Wir beginnen mit der **Addition**:

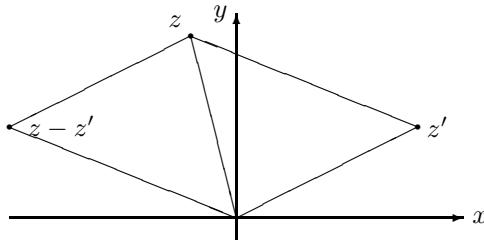


Die Addition entspricht demnach der Addition von Vektoren der Ebene nach der Parallelogrammregel (siehe dazu auch Abschnitt 4.1).

Definiert man die Subtraktion – durch

$$z - z' := z + (-z') \quad (z, z' \in \mathbb{C}),$$

so gilt für diese **Subtraktion**:



Offenbar entspricht dies der Subtraktion von Vektoren (siehe Kapitel 4).

Wir kommen nun zur geometrischen Interpretation der **Multiplikation** zweier Zahlen  $z$  und  $z'$  aus  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ :

Sind  $z$  und  $z'$  in trigonometrischer Form

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \\ z' &= r' \cdot (\cos \varphi' + i \cdot \sin \varphi') \end{aligned}$$

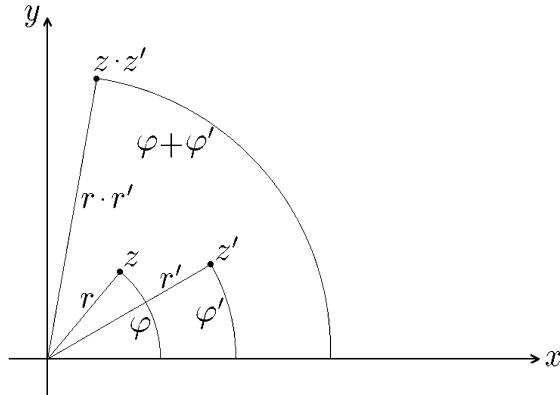
gegeben, so erhält man mittels der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

und durch simple Rechnung

$$z \cdot z' = r \cdot r' (\cos(\varphi + \varphi') + i \cdot \sin(\varphi + \varphi')).$$

Damit ist die geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen klar:



Die Winkel  $\varphi, \varphi'$  zur  $x$ -Achse werden addiert und die Beträge  $|z|, |z'|$  multipliziert, womit  $z \cdot z'$  eine Art „Drehstreckung“ bzw. „Drehstauchung“ beschreibt.

Definiert man die **Division** komplexer Zahlen aus  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  durch

$$z : z' := z \cdot (z')^{-1},$$

so gilt analog zu oben

$$z : z' = \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\varphi - \varphi') + i \cdot \sin(\varphi - \varphi')).$$

Mittels vollständiger Induktion kann man außerdem aus obiger Formel für  $z \cdot z'$  auf die sogenannte **Moivresche Formel**<sup>7</sup> für  $z^n$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) schließen:

$$z^n := \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-mal}} = r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi)$$

Als nächstes wollen wir sämtliche Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung

$$z^n = a \text{ mit } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

bestimmen. Dazu wählen wir  $a$  in trigonometrischer Darstellung

$$a = R \cdot (\cos \tau + i \cdot \sin \tau).$$

Eine Lösung  $z$  von  $z^n = a$  sei mit

$$r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

bezeichnet. Dann gilt (unter Verwendung der Moivreschen Formel):

$$\begin{aligned} z^n &= (r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi))^n = r^n(\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi) \\ &= R(\cos \tau + i \cdot \sin \tau). \end{aligned}$$

Folglich

$$r^n = R, \text{ d.h., } r = \sqrt[n]{R}$$

und  $n \cdot \varphi = \tau + 2 \cdot \pi \cdot k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

(wegen der Periodizität der cos- und sin-Funktionen).

Damit muß eine Lösung  $z$  von  $z^n = a$  von der Gestalt

$$\sqrt[n]{R} \cdot \left( \cos \frac{\tau + 2 \cdot \pi \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\tau + 2 \cdot \pi \cdot k}{n} \right) =: z_k$$

für gewisses  $k \in \mathbb{Z}$  sein. Falls man  $k$  ganz  $\mathbb{Z}$  durchlaufen lässt, erhält man mittels obiger Formel genau  $n$  verschiedene Lösungen

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$$

von  $z^n = a$ , da

$$z_i = z_j \iff i \equiv_n j.$$

Fassen wir zusammen:

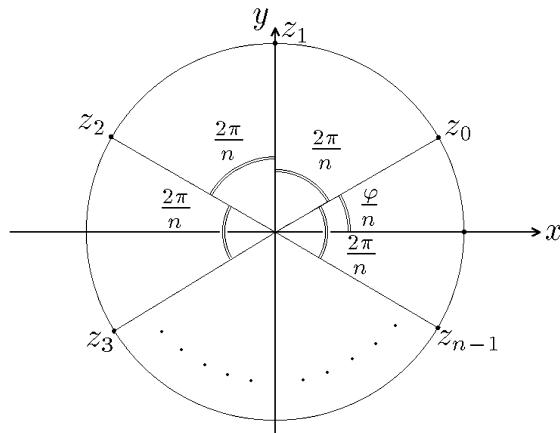
---

<sup>7</sup> Abraham de Moivre (1667 - 1754), französischer Mathematiker, der nach England emigrierte.

**Satz 2.3.6** Es sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $a = R \cdot (\cos \tau + i \cdot \sin \tau)$  die trigonometrische Darstellung von  $a$ . Dann besitzt die Gleichung  $z^n = a$  genau  $n$  verschiedene Lösungen

$$z_k := \sqrt[n]{R} \cdot \left( \cos \frac{\tau + 2 \cdot \pi \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\tau + 2 \cdot \pi \cdot k}{n} \right)$$

mit  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , die man  **$n$ -te Wurzeln** aus  $a$  nennt und mit  $\sqrt[n]{a}$  oder  $a^{1/n}$  bezeichnet.<sup>8</sup> Die diesen Wurzeln entsprechenden Punkte in der komplexen Zahlenebene liegen alle auf einem Kreis mit dem Radius  $\sqrt[n]{R}$  und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und sind die Ecken eines diesem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks (siehe Zeichnung). ■



## Beispiele

(1.) Die Lösungen von

$$z^2 = -1 (= \cos \pi + i \cdot \sin \pi)$$

sind

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \pi/2 + i \cdot \sin \pi/2 = i && \text{und} \\ z_1 &= \cos 3\pi/2 + i \cdot \sin 3\pi/2 = -i. \end{aligned}$$

(2.) Außer  $z_0 = 1$  hat die Gleichung

$$z^3 = 1$$

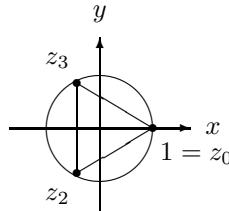
---

<sup>8</sup> Man beachte: In  $\mathbb{R}$  bezeichnet  $\sqrt[n]{a}$  ( $a > 0$ ) die eindeutig bestimmte positive Lösung von  $x^n = a$ . Im Gegensatz dazu meint  $\sqrt[n]{a}$  im Komplexen jede Zahl, deren  $n$ -te Potenz gleich  $a$  ist. Das hat z.B. zur Folge, daß in  $\mathbb{R}$   $\sqrt[3]{1}$  die 1, dagegen in  $\mathbb{C}$  1 oder  $-1$  bedeutet. Trotzdem ist eine an sich erforderliche Unterscheidung der Wurzelsymbole nicht üblich. In Zweifelsfällen hat man demzufolge den zugrundeliegenden Körper ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) anzugeben.

noch die Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 2\pi/3 + i \cdot \sin 2\pi/3 = (-1 + i \cdot \sqrt{3})/2 \text{ und} \\ z_2 &= \cos 4\pi/3 + i \cdot \sin 4\pi/3 = (-1 - i \cdot \sqrt{3})/2, \end{aligned}$$

die sich geometrisch wie folgt beschreiben lassen:



(3.) Zur Bestimmung der Lösungen von

$$z^2 = 1 + i$$

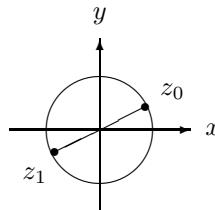
überlegt man sich zunächst leicht, daß

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos \pi/4 + i \cdot \sin \pi/4).$$

Folglich sind

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2}(\cos \pi/8 + i \cdot \sin \pi/8) \quad \text{und} \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}(\cos 9\pi/8 + i \cdot \sin 9\pi/8) \end{aligned}$$

die gesuchten Lösungen:



Eine allerletzte **Bemerkung** (ohne Beweis) über komplexe Zahlen.

Zwecks näherer Berechnung von sin- und cos-Werten bzw. Werten der  $e^x$ -Funktion benutzt man sogenannte Potenzreihen (Taylor-Reihen). Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots, \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  (siehe dazu z.B. [Fre-F 85] oder [Man-K 66]).

Wählt man in obigen Reihen  $x \in \mathbb{C}$ , so konvergieren diese Reihen immer noch für beliebige  $x$ , so daß man mittels dieser Reihen

$\cos$ ,  $\sin$  und die Exponentialfunktion

als Funktionen einer komplexen Veränderlichen definieren kann. Speziell gilt damit

$$e^{i\varphi} = 1 + i \cdot \varphi + \frac{(i \cdot \varphi)^2}{2!} + \frac{(i \cdot \varphi)^3}{3!} + \frac{(i \cdot \varphi)^4}{4!} + \dots$$

Auspotenzieren und Umordnen ergibt

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i \cdot \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \\ &= (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots) + i \cdot (\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots) \\ &= \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

womit wir die sehr wichtige **Eulersche Formel**

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

erhalten haben. Multipliziert man die Eulersche Formel mit  $r$ , so erhält man die **Exponentielle Darstellung** für  $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ :

$$z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}.$$

## 2.4 Verbände und Boolesche Algebren

Nachfolgend sollen kurz zwei algebraische Strukturen vorgestellt werden, für die es eine Vielzahl von Anwendungen gibt und die wir deshalb im Band 2 noch etwas ausführlicher behandeln werden. Wir beginnen mit den

### Definitionen eines Verbandes

Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene Standardwege einen Verband zu definieren.

**Erste Definition** eines Verbandes:

Sei  $L$  eine nichtleere Menge, auf der zweistellige Operationen  $\vee$  („Vereinigung“) und  $\wedge$  („Durchschnitt“) erklärt sind.  $\mathbf{L} := (L; \vee, \wedge)$  heißt **Verband** (engl.: lattice), wenn in  $\mathbf{L}$  für beliebige  $x, y, z \in L$  folgende Identitäten gelten:

- (L1a)  $x \vee y = y \vee x,$
- (L1b)  $x \wedge y = y \wedge x \quad \text{(Kommutativität)},$
- (L2a)  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$
- (L2b)  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad \text{(Assoziativität)},$
- (L3a)  $x \vee x = x,$
- (L3b)  $x \wedge x = x \quad \text{(Idempotenz)},$
- (L4a)  $x \vee (x \wedge y) = x,$
- (L4b)  $x \wedge (x \vee y) = x \quad \text{(Absorption)}.$

Für die zweite Definition eines Verbandes benötigen wir noch einige Begriffe und Bezeichnungen:

**Definition** Bezeichne  $A$  eine nichtleere Menge und sei  $\leq$  eine reflexive teilweise Ordnung auf  $A$  (siehe Kapitel 1). Das Paar  $(A; \leq)$  nennt man dann **partiell geordnete Menge** (engl.: partially ordered set) oder kurz **Poset**.

In Beispielen werden wir Posets zumeist durch Hasse-Diagramme angeben. Eine Poset  $P$ , die zusätzlich noch die Bedingung

$$a \leq b \text{ oder } b \leq a \text{ für beliebige } a, b \in P$$

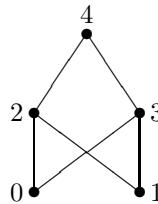
erfüllt, heißt **total geordnete Menge** oder **linear geordnete Menge** oder kurz **Kette**.

Für Posets verwenden wir im Fall  $a \leq b$  und  $a \neq b$  auch die (übliche) Schreibweise  $a < b$ . Außerdem schreiben wir manchmal anstelle von  $a \leq b$  auch  $b \geq a$ .

**Definition** Bezeichne  $A$  eine Teilmenge einer Poset  $P = (P; \leq)$ . Unter dem **Supremum** von  $A$  (Bezeichnung:  $\sup A$ ) versteht man ein  $p$  aus  $P$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\forall a \in A : a \leq p$ ;
- (2)  $(\forall a \in A : a \leq b) \implies p \leq b$ .

**Bemerkung** Das Supremum einer Menge  $A$  existiert i.allg. nicht für beliebiges  $A$ . Es sei z.B.  $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  und  $\leq$  durch folgendes Hasse-Diagramm definiert:



Dann existiert  $\sup\{0, 1\}$  nicht, da (2) von keinem Element aus  $P$  erfüllt wird.

**Definition** Bezeichne  $A$  eine Teilmenge einer Poset  $P = (P; \leq)$ . Unter dem **Infimum** von  $A$  (Bezeichnung:  $\inf A$ ) versteht man ein  $p$  aus  $P$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\forall a \in A : p \leq a$ ;
- (2)  $(\forall a \in A : b \leq a) \implies b \leq p$ .

**Zweite Definition** eines Verbandes:

Eine Poset  $(L; \leq)$  heißt **Verband**, wenn für beliebige  $a, b \in L$  stets sowohl  $\sup\{a, b\}$  als auch  $\inf\{a, b\}$  existieren.

**Satz 2.4.1** Es gilt:

- (1) Wenn  $(L; \vee, \wedge)$  ein Verband nach der ersten Definition ist, so erhält man durch

$$a \leq b : \iff a = a \wedge b$$

eine partielle Ordnung  $\leq$ , die zusammen mit  $L$  einen Verband nach der zweiten Definition bildet.

- (2) Ist umgekehrt  $(L; \leq)$  ein Verband nach der zweiten Definition, so kann man zwei zweistellige Operationen  $\vee, \wedge$  durch

$$\begin{aligned} a \vee b &:= \sup\{a, b\} && \text{und} \\ a \wedge b &:= \inf\{a, b\} \end{aligned}$$

definieren, und  $(L; \vee, \wedge)$  ist ein Verband nach der ersten Definition.

*Beweis.*<sup>9</sup> (1): Es sei  $(L; \vee, \wedge)$  ein Verband und  $\leq$  wie in (1) angegeben definiert. Dann gilt  $a \wedge a = a$  und folglich  $a \leq a$  für jedes  $a \in A$ , womit  $\leq$  reflexiv ist.

Falls  $a \leq b$  und  $b \leq a$ , haben wir  $a = a \wedge b$  sowie  $b = b \wedge a$ . Wegen (L1b) folgt hieraus  $a = b$ , womit  $\leq$  antisymmetrisch ist.

Es sei nun  $a \leq b$  und  $b \leq c$ . Dann gilt nach Definition von  $\leq$ :  $a = a \wedge b$  und  $b = b \wedge c$ . Hieraus ergibt sich nach (L2b)  $a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$ , womit  $a \leq c$  und folglich  $\leq$  transitiv ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $\sup\{a, b\}$  und  $\inf\{a, b\}$  für alle  $a, b \in L$  existieren.

Da  $a = a \wedge (a \vee b)$  und  $b = b \wedge (a \vee b)$ , haben wir  $a \leq a \vee b$  und  $b \leq a \vee b$ .

Es sei nun  $a \leq u$  und  $b \leq u$ . Es gilt dann  $a = a \wedge u$ ,  $b = b \wedge u$ ,  $a \vee u = (a \wedge u) \vee u = u$ ,  $b \vee u = (b \wedge u) \vee u = u$  und  $(a \vee u) \vee (b \vee u) = u \vee u = u = a \vee (u \vee (b \vee u)) = (a \vee b) \vee u$ , womit  $u = (a \vee b) \vee u$ .

Bildet man nun  $(a \vee b) \wedge u$ , so erhält man  $(a \vee b) \wedge u = (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee u) = a \vee b$ . Folglich ist  $a \vee b \leq u$  und  $\sup\{a, b\} = a \vee b$ .

Analog zeigt man  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ , indem man in obigen Überlegungen  $\wedge$  und  $\vee$  vertauscht sowie  $\leq$  durch  $\geq$  ersetzt.

Also ist  $(L; \leq)$  ein Verband.

(2): siehe Band 2. ■

**Beispiele** für Verbände:

- (1.) Es sei  $L := \{0, 1\}$  und  $\vee$  die auf  $L$  definierte Konjunktion und  $\wedge$  die auf  $L$  definierte Disjunktion. Offenbar ist dann  $(L; \vee, \wedge)$  ein Verband.
- (2.) Es sei  $L := \mathbb{N}$ ,  $a \vee b$  bezeichne das kleinste gemeinsame Vielfache und  $a \wedge b$  den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$ . Auch in diesem Fall prüft man leicht nach, daß  $(L; \vee, \wedge)$  ein Verband ist.

---

<sup>9</sup> Siehe auch den ausführlichen Beweis dieses Satzes im Band 2.

- (3.) Beispiele für Verbände nach der zweiten Definition sind:  
 $(\mathfrak{P}(A); \subseteq)$ , wobei  $A$  eine beliebige Menge ist;  
 $(\mathbb{R}; \leq)$ , wobei  $\leq$  die übliche (totale) Ordnung auf  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

**Definition** Man nennt einen Verband  $(L; \vee, \wedge)$  **distributiv**, wenn für alle  $x, y, z \in L$  folgende Gleichungen gelten:

- (D1)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ,  
(D2)  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .

Wir kommen nun zu den Booleschen Algebren, die spezielle Verbände sind.

**Definition** Eine **Boolesche Algebra** ist eine Algebra  $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  des Typs  $(2, 2, 1, 0, 0)$  (d.h.,  $\vee$  und  $\wedge$  sind zweistellige Operationen auf  $B$ ,  $\neg$  eine einstellige Operation auf  $B$  und 0 sowie 1 gewisse Elemente in  $B$ ), die folgenden Bedingungen für beliebiges  $x \in B$  genügt:

- (B1)  $\mathbf{B}$  ist ein distributiver Verband;  
(B2)  $x \wedge 0 = 0$ ,  $x \vee 1 = 1$ ;  
(B3)  $x \wedge \bar{x} = 0$ ,  $x \vee \bar{x} = 1$ .

### Beispiele

- (1.) Es sei  $B = \{0, 1\}$  und  $\vee, \wedge, \neg$  wie im Abschnitt 1.6 definiert. Man prüft dann leicht nach, daß die so definierte Algebra  $(B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  (bis auf Isomorphie) die einzige mögliche 2-elementige Boolesche Algebra ist.  
(2.) Bezeichne  $X$  eine beliebige nichtleere Menge und  $\cup$  (Vereinigung),  $\cap$  (Durchschnitt) und  $\neg$  (Komplement bez.  $X$ ) die üblichen Mengenoperationen über Teilmengen von  $X$ . Dann ist

$$(\mathfrak{P}(X); \cup, \cap, \neg, \emptyset, X)$$

eine Boolesche Algebra. Diese Algebra ist übrigens isomorph<sup>10</sup> zu der im nächsten Beispiel angegebenen Algebra.

- (3.) Die Menge aller Abbildungen von einer gegebenen nichtleeren Menge  $X$  in  $\{0, 1\}$  sei  $2^X$ . Mit Hilfe der in (1.) definierten Operationen  $\vee, \wedge, \neg$  lassen sich dann auf  $2^X$  die Operationen  $\bigvee, \bigwedge, \neg\neg$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} (f \bigvee g)(x) &:= f(x) \vee g(x), \\ (f \bigwedge g)(x) &:= f(x) \wedge g(x), \\ (\overline{f})(x) &:= \neg f(x) \end{aligned}$$

$(f, g \in 2^X)$ . Mit  $c_0$  und  $c_1$  wollen wir die durch

$$c_0(x) := 0, c_1(x) := 1$$

---

<sup>10</sup> Isomorphe Abbildungen zwischen Verbänden lassen sich analog zu den bisher definierten isomorphen Abbildungen definieren (siehe auch die Definition auf Seite 99).

definierten Abbildungen aus  $2^X$  bezeichnen. Da man leicht nachprüfen kann, daß durch

$$\alpha : \mathfrak{P}(X) \rightarrow 2^X,$$

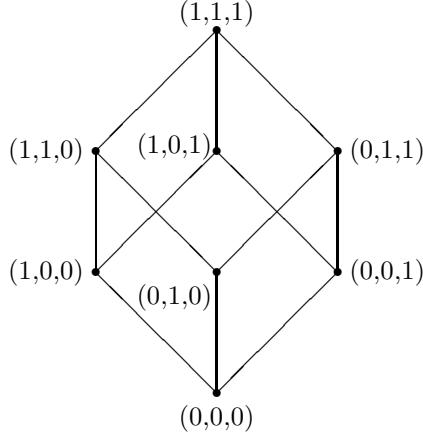
$$(\alpha(M))(x) = 1 : \iff x \in M$$

eine isomorphe Abbildung von  $\mathfrak{P}(X)$  auf  $2^X$  definiert wird, ist auch  $(2^X; \vee, \wedge, \neg, c_0, c_1)$  eine Boolesche Algebra.

Im Fall  $|X| = n \in \mathbb{N}$  kann man die Menge  $2^X$  auch wie folgt aufschreiben:

$$2^X := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \in \{0, 1\}\} \\ (= \{0, 1\}^n),$$

und die Boolesche Algebra  $2^X$  ist geometrisch durch ein Hasse-Diagramm darstellbar (Boolesche Algebren sind spezielle Verbände!). Für  $n = 3$  erhält man z.B.:



An den so erhaltenen Hasse-Diagrammen (sogenannten „Einheitswürfeln“) kann man sich eine Reihe von Eigenschaften Boolescher Algebren geometrisch verdeutlichen.

- (4.) Eine Unteralgebra von  $(\mathfrak{P}(X); \cup, \cap, \neg, \emptyset, X)$  wollen wir ein **Feld von Teilmengen** der Menge  $X$  nennen. Die Trägermenge einer solchen Unteralgebra von  $\mathfrak{P}(X)$  ist also eine gewisse Teilmenge von  $X$ , die  $\emptyset$  sowie  $X$  enthält und die abgeschlossen ist bez. (endlicher) Anwendung der Operationen  $\cup$ ,  $\cap$  und  $\neg$ . Ein Feld von Teilmengen einer Menge  $X$  bildet (als Unteralgebra einer Booleschen Algebra) natürlich ebenfalls eine Boolesche Algebra.

Eine Zusammenstellung nützlicher Rechenregeln in Booleschen Algebren liefert der folgende Satz.

**Satz 2.4.2** Sei  $\mathbf{B}$  eine Boolesche Algebra. Für beliebige  $x, y \in B$  gilt dann:

- (a)  $x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x;$
- (b)  $(x \wedge y = 0 \text{ und } x \vee y = 1) \implies \overline{x} = y;$
- (c)  $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0;$
- (d)  $\overline{\overline{x}} = x;$
- (e)  $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$  („Morgansche Regeln“);
- (f)  $x \leq y \iff \overline{y} \leq \overline{x};$
- (g)  $x \leq y \iff \overline{x} \vee y = 1.$

*Beweis.* (a): Da in einer Booleschen Algebra  $x \wedge 0 = 0$  gilt, erhält man unter Verwendung des Absorptionsgesetzes

$$x \vee 0 = x \vee (x \wedge 0) = x.$$

Aus der Eigenschaft  $x \vee 1 = 1$  einer Booleschen Algebra und dem Absorptionsgesetz folgt außerdem:

$$x \wedge 1 = x \wedge (x \vee 1) = x.$$

(b): Seien  $x \wedge y = 0$  und  $x \vee y = 1$ . Zum Beweis von  $\overline{x} = y$  genügt es zu zeigen, daß  $y \leq \overline{x}$  und  $\overline{x} \leq y$  gilt. Nach Definition von  $\leq$  gilt dies, falls  $\overline{x} \wedge y = y$  und  $\overline{x} \wedge y = \overline{x}$  ist.  $y \leq \overline{x}$  folgt aus

$$\overline{x} \wedge y = 0 \vee (\overline{x} \wedge y) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) = (x \vee \overline{x}) \wedge y = 1 \wedge y = y.$$

$\overline{x} \leq y$  folgt aus

$$\overline{x} = 1 \wedge \overline{x} = (x \vee y) \wedge \overline{x} = (x \wedge \overline{x}) \vee (y \wedge \overline{x}) = 0 \vee (y \wedge \overline{x}) = y \wedge \overline{x}.$$

(c): Zum Beweis von  $\overline{0} = 1$  können wir (b) benutzen. Da nämlich die Gleichungen

$$0 \wedge 1 = 0 \text{ und } 0 \vee 1 = 1$$

nach Axiomen der Booleschen Algebra gelten, folgt  $\overline{0} = 1$  aus (b), indem man  $x = 0$  und  $y = 1$  setzt.

Analog beweist man  $\overline{1} = 0$ .

(d) folgt ebenfalls aus (b) durch Ersetzen von  $y$  durch  $\overline{x}$ .

(e): Zum Beweis von  $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$  zeigen wir

$$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0, (x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1,$$

aus dem dann mittels (b) die Behauptung folgt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) &= (x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \\
 &= ((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y})) \\
 &= (0 \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge 0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Analog beweist man  $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ , womit  $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$  aus (b) folgt.  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  lässt sich leicht aus der eben gerade bewiesenen Formel und (d) herleiten.

(f) folgt aus der Definition von  $\leq$ , mittels (e) und aus

$$x \leq y \iff x \wedge y = x \iff \bar{x} \vee \bar{y} = \bar{x} \iff \bar{y} \leq \bar{x}.$$

(g) folgt aus

$$\begin{aligned}
 x \leq y &\implies x \wedge y = x \\
 &\implies \bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee x \\
 &\implies \bar{x} \vee (x \wedge y) = 1 \\
 &\implies (\bar{x} \vee (x \wedge y)) \vee y = 1 \vee y = 1 \\
 &\implies \bar{x} \vee \underbrace{(x \wedge y) \vee y}_{=y} = 1 \\
 &\implies \bar{x} \vee y = 1
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \vee y = 1 &\implies x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge 1 \\
 &\implies (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y) = x \\
 &\implies x \wedge y = x \\
 &\implies x \leq y.
 \end{aligned}$$

■

**Definition** Seien  $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  und  $\mathbf{B}' = (B'; \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$  zwei Boolesche Algebren. Man sagt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \text{ ist isomorph zu } \mathbf{B}' : &\iff \exists \text{ Bijektion } f : B \rightarrow B' : \forall x, y \in B : \\
 &f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \text{ und} \\
 &f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y) \text{ und} \\
 &f(\bar{x}) = \overline{f(x)}'.
 \end{aligned}$$

Der nachfolgende Satz zeigt, daß Boolesche Algebren bis auf Isomorphie in einem gewissen Sinne eindeutig bestimmt sind.

**Satz 2.4.3 (Stonescher Darstellungssatz)<sup>11</sup>**

- (1) Jede endliche Boolesche Algebra ist isomorph zu einer gewissen Booleschen Algebra der Form  $\mathfrak{P}(X)$ .
- (2) Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einem Feld von Teilmengen einer gewissen Menge.

*Beweis.* Siehe Band 2. ■

Abschließend soll noch ein Zusammenhang zwischen Booleschen Algebren und speziellen Ringen bewiesen werden.

**Definition** Sei  $\mathbf{R} = (R; +, \cdot)$  ein Ring mit dem neutralen Element 0 bez. + und dem neutralen Element 1 bez.  $\cdot$ .  $\mathbf{R}$  wird dann **Boolescher Ring** genannt, wenn für beliebige  $x \in R$  stets

$$x^2(:= x \cdot x) = x$$

gilt.

**Lemma 2.4.4** In einem Booleschen Ring gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} x + x &= 0, \\ x \cdot y &= y \cdot x. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Behauptungen folgen aus

$$\begin{aligned} (x + x) \cdot (x + x) &= x + x \\ \implies x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x &= x + x \\ \implies x + x + x + x &= x + x \\ \implies (x + x) + (x + x) - (x + x) &= (x + x) - (x + x) \\ \implies x + x &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot (x + y) &= x + y \\ \implies x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y &= x + y \\ \implies x + x \cdot y + y \cdot x + y &= x + y \\ \implies x + x \cdot y + y \cdot x + y - (x + y) &= x + y - (x + y) \\ \implies x \cdot y + y \cdot x &= 0 \\ \implies x \cdot y &= -(y \cdot x) = y \cdot x. \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup> Marshall Harvey Stone (1903–1989), US-amerikanischer Mathematiker.

**Satz 2.4.5**

- (1) Bezeichne  $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  eine Boolesche Algebra. Mit Hilfe von  $\mathbf{B}$  läßt sich eine Algebra

$$\mathbf{B}^\oplus := (B; +, \cdot)$$

wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} x + y &:= (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y), \\ x \cdot y &:= x \wedge y. \end{aligned}$$

Die Algebra  $\mathbf{B}^\oplus$  ist dann ein Boolescher Ring mit dem neutralen Element 0 bez. + und dem neutralen Element 1 bez. ..

- (2) Bezeichne umgekehrt  $\mathbf{R} = (R; +, \cdot)$  einen Booleschen Ring mit dem neutralen Element 0 bez. + und dem neutralen Element 1 bez. .. Mit Hilfe von  $\mathbf{R}$  läßt sich eine Algebra

$$\mathbf{R}^\oplus := (R; \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$$

wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} x \vee y &:= x + y + (x \cdot y), \\ x \wedge y &:= x \cdot y, \\ \bar{x} &:= 1 + x. \end{aligned}$$

Die Algebra  $\mathbf{R}^\oplus$  ist dann eine Boolesche Algebra.

- (3) Seien  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{R}$  wie oben definiert. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^\oplus)^\oplus &= \mathbf{B}, \\ (\mathbf{R}^\oplus)^\oplus &= \mathbf{R}. \end{aligned}$$

*Beweis.* (1): Sei  $\mathbf{B} := (B; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$  eine Boolesche Algebra. Legt man

$$a + b := (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b), \quad a \cdot b := a \wedge b$$

fest, so sind offenbar  $(B; +)$  und  $(B; \cdot)$  kommutative Halbgruppen, da  $\vee$  und  $\wedge$  in einem Verband kommutative Operationen sind.

Mit Hilfe von Satz 2.4.2 prüft man leicht nach, daß für beliebige  $a \in B$  gilt:

$$\begin{aligned} a + 0 &= (a \wedge \bar{0}) \vee (\bar{a} \wedge 0) = a, \quad \text{d.h., } 0 \text{ ist ein neutrales Element bez. } +, \\ a + a &= (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0, \quad \text{d.h., das zu } a \text{ inverse Element bez. } + \text{ ist } a. \\ 1 \cdot a &= (1 \wedge a) = a, \quad \text{d.h., } 1 \text{ ist das neutrale Element von } B \text{ bez. } .. \end{aligned}$$

Also ist  $(B; +)$  eine kommutative Gruppe und  $(B; \cdot)$  eine kommutative Halbgruppe mit dem neutralen Element 1. Außerdem haben wir:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= ((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge c \\ &= ((a \wedge \bar{b}) \wedge c) \vee ((\bar{a} \wedge b) \wedge c) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(a \cdot c) + (b \cdot c) &= ((a \cdot c) \wedge \overline{b \cdot c}) \vee (\overline{a \cdot c} \wedge (b \cdot c)) \\
&= ((a \wedge c) \wedge \overline{b \wedge c}) \vee (\overline{a \wedge c} \wedge (b \wedge c)) \\
&= ((a \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})) \vee ((\overline{a} \vee \overline{c}) \wedge (b \wedge c)) \\
&= ((a \wedge \overline{b}) \wedge c) \vee ((\overline{a} \wedge b) \wedge c),
\end{aligned}$$

d.h., es gilt  $(a \cdot c) + (b \cdot c) = (a+b) \cdot c$  für beliebige  $a, b, c \in B$ . Das zweite Distributivgesetz  $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b+c)$  folgt aus dem gerade bewiesenen Distributivgesetz und der Kommutativität von  $\cdot$ . Wegen des Idempotenzgesetzes  $x \wedge x = x$  gilt schließlich auch  $x \cdot x = x$  für alle  $x \in B$ . Also ist  $(B; +, \cdot)$  ein Boolescher Ring.

(2): Sei  $\mathbf{B} := (B; +, \cdot)$  ein Boolescher Ring mit dem neutralen Element 0 bezüglich  $+$  und dem Einselement 1 bezüglich  $\cdot$  (erklärt auf  $B \setminus \{0\}$ ). Sei nun für beliebige  $a, b \in B$  definiert:

$$a \vee b := a + b + (a \cdot b), \quad a \wedge b := a \cdot b, \quad \overline{a} := a + 1.$$

Wir haben zu zeigen, daß

- |  |  |
|--|--|
| $(a) \quad x \wedge y = y \wedge x,$<br>$(b) \quad x \vee y = y \vee x,$<br>$(c) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$<br>$(d) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$<br>$(e) \quad x \wedge x = x,$<br>$(f) \quad x \vee x = x,$<br>$(g) \quad x \vee (x \wedge y) = x,$ | $(h) \quad x \wedge (x \vee y) = x,$<br>$(i) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$<br>$(j) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$<br>$(k) \quad x \wedge 0 = 0,$<br>$(l) \quad x \vee 1 = 1,$<br>$(m) \quad x \wedge \overline{x} = 0,$<br>$(n) \quad x \vee \overline{x} = 1.$ |
|--|--|

für beliebige  $x, y, z \in B$  gilt.

(a) und (b) folgen unmittelbar aus der vorausgesetzten Kommutativität von  $+$  und  $\cdot$ . (c) gilt, da  $\cdot$  assoziativ ist. (e) ist nach Definition eines Booleschen Ringes erfüllt. Nach Definition von  $\vee$  ergibt sich (d) aus

$$\begin{aligned}
x \vee (y \vee z) &= x + (y + z + y \cdot z) + x \cdot (y + z + y \cdot z) \\
&= x + y + z + y \cdot z + x \cdot y + x \cdot z + x \cdot y \cdot z \\
&= x + y + x \cdot y + z + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z \\
&= (x + y + x \cdot y) + z + (x + y + x \cdot y) \cdot z \\
&= (x \vee y) \vee z.
\end{aligned}$$

Wegen

$$x \vee x = x + x + x \cdot x = 0 + x = x$$

gilt (f).

(g) folgt aus

$$x \vee (x \wedge y) = x + x \cdot y + x \cdot (x \cdot y) = x + x \cdot y + (x \cdot x) \cdot y = x + x \cdot y + x \cdot y = x + 0 = x.$$

(h) folgt analog aus:

$$x \wedge (x \vee y) = x \cdot (x + y + x \cdot y) = x \cdot x + x \cdot y + x \cdot (x \cdot y) = x + x \cdot y + x \cdot y = x + 0 = x.$$

(i) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= x \cdot (y + z + y \cdot z) \\ &= x \cdot y + x \cdot z + x \cdot (y \cdot z) \\ &= x \cdot y + x \cdot z + (x \cdot x) \cdot (y \cdot z) \\ &= x \cdot y + x \cdot z + (x \cdot y) \cdot (x \cdot z) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

(j) folgt aus

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= (x + y + x \cdot y) \cdot (x + z + x \cdot z) \\ &= x + x \cdot z + x \cdot z + y \cdot x + y \cdot z + y \cdot x \cdot z \\ &\quad + x \cdot y + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z \\ &= x + y \cdot z + x \cdot (y \cdot z) \\ &= x \vee (y \wedge z). \end{aligned}$$

(k) ist eine Eigenschaft, die allgemein in Ringen gilt (siehe Satz 2.3.1).

(l) folgt aus

$$x \vee 1 = x + 1 + x \cdot 1 = x + 1 + x = (x + x) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

(m) folgt aus

$$x \wedge \overline{x} = x \cdot (x + 1) = x \cdot x + x = x + x = 0.$$

(n) folgt aus

$$x \vee \overline{x} = x + (x + 1) + x \cdot (x + 1) = (x + x) + 1 + (x \cdot x + x) = 0 + 1 + (x + x) = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Also ist **B** eine Boolesche Algebra. ■

Mehr über Verbände und Boolesche Algebren findet man im Band 2 sowie z.B. in [Bur-S 81], [Kop 88], [Sko 73] und [Whi 64].

## **Teil II**

---

**Lineare Algebra und analytische Geometrie**

---

## Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizen

In diesem Kapitel bezeichne  $K = (K; +, \cdot)$  stets einen Körper. Gemäß unserer in Kapitel 2 getroffenen Vereinbarungen sei auch hier

- 0 das Einselement von  $(K; +)$ ,
- 1 das Einselement von  $(K \setminus \{0\}; \cdot)$ ,
- $-x$  das zu  $x \in K$  inverse Element bez.  $+$  und
- $x^{-1}$  das zu  $x \in K \setminus \{0\}$  inverse Element bez.  $\cdot$ .

Falls  $x, y \in K$ , steht

$$\begin{aligned} & x - y \\ \text{für } & x + (-y) \end{aligned}$$

und es sei, falls  $y \neq 0$ ,

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1} \text{ bzw. } x : y := x \cdot y^{-1} \text{ bzw. } x/y := x \cdot y^{-1}.$$

Für  $x \cdot y$  schreiben wir kurz auch  $xy$ .

Außerdem seien

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1, \\ x^n &:= \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}, \\ x^{-n} &:= \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \dots \cdot x^{-1}}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

$(n \in \mathbb{N})$ .

*Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, wählen wir in Beispielen als Körper  $K$  den Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .*

Gegenstand unserer nachfolgenden Untersuchungen ist das allgemeine **lineare Gleichungssystem** (abgekürzt LGS)

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
 a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
 \vdots + \vdots + \dots + \vdots &= \vdots \\
 a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{*}$$

$(n, m \in \mathbb{N})$ , wobei die  $a_{ij} \in K$  die sogenannten **Koeffizienten** der **Unbekannten**  $x_j$  sind ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) sowie  $b_1, b_2, \dots, b_m \in K$  die sogenannten **Absolutglieder**.

Als **Lösung** dieses LGS wird jede Belegung der  $x_1, \dots, x_n$  mit gewissen Werten aus  $K$  angesehen, die sämtliche Gleichungen von (\*) erfüllt.

Man nennt (\*) ein **homogenes** LGS, wenn  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$  ist; dagegen spricht man von einem **inhomogenen** LGS, wenn mindestens ein  $b_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) von 0 verschieden ist.

Ziele dieses Kapitels sind es,

- notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Lösungen des LGS (\*)
- sowie
- Lösungsverfahren für (\*)

aufzufinden.

Hilfsmittel dazu sind

Determinanten und Matrizen,

mit denen wir uns zunächst beschäftigen wollen.

### 3.1 Determinanten

Zwecks Herleitung und Motivation einer allgemeinen Determinantendefinition betrachten wir das LGS (\*) für  $n = m = 2$ :

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\
 a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 ,
 \end{aligned}$$

für das wir  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$  voraussetzen. Multipliziert man die erste Gleichung mit  $a_{22}$ , die zweite mit  $-a_{12}$  und addiert beide Gleichungen, so erhält man

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

bzw.

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Analog bekommt man durch Multiplikation der ersten Gleichung mit  $-a_{21}$ , der zweiten mit  $a_{11}$  und anschließender Addition beider Gleichungen:

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Man erkennt, daß die Lösungen  $x_1, x_2$  des LGS Quotienten zweier Terme der Form  $a \cdot b - c \cdot d$  sind. Führt man nun als Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} := \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta$$

(**Determinante 2. Ordnung** genannt) ein, so erhält man folgende übersichtliche Beschreibung von  $x_1, x_2$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Als nächstes betrachten wir das LGS (\*) für  $n = m = 3$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

für das wir

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

voraussetzen. Nachfolgend wird beschrieben, wie man durch Multiplikation der Gleichungen mit gewissen Faktoren und anschließender Addition der Gleichungen unser LGS lösen kann.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \mid \cdot(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \mid \cdot(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \mid \cdot(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 = b_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + b_2(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \text{ d.h.,}$$

$$x_1 = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + b_2(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch  $x_2, x_3$ :

$$x_2 = \frac{b_1(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + b_3(-a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + b_2(-a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

Definiert man nun als **Determinante 3. Ordnung**:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} := a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - (b \cdot d \cdot i + a \cdot f \cdot h + c \cdot e \cdot g)$$

( $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in K$ ), was man sich nach der „**Regel von Sarrus**“<sup>1</sup>

$$\begin{array}{c|ccc|cc} a & b & c & & a & b \\ d & e & f & & d & e \\ g & h & i & & g & h \end{array} = aei + bfg + cdh - (bdi + afh + ceg)$$

ganz gut merken kann,

so erhält man für die Lösung des LGS (\*) mit  $n = m = 3$  und  $a_{11}a_{22}a_{33} + \dots \neq 0$  folgende übersichtliche Beschreibung:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

<sup>1</sup> Pierre-Frederic Sarrus (1798–1861), französischer Mathematiker.

Unsere bisherigen Betrachtungen legen den Versuch nahe, für ein LGS mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten bei passend gewählten Voraussetzungen auch im Fall  $n > 3$  einen Ausdruck („Determinante  $n$ -ter Ordnung“) zu finden, der für dieses System eine entsprechende Rolle spielt wie die Determinanten 2. bzw. 3. Ordnung für  $n = 2$  bzw. 3. Um zu einer Vermutung zu kommen, betrachten wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

etwas genauer. Man erkennt sofort, daß in der Determinante 2. Ordnung jeder Summand aus zwei Faktoren und in der Determinante 3. Ordnung jeder Summand aus drei Faktoren besteht. Man bemerkt außerdem, daß in jedem Summanden die Anordnung der Faktoren so gewählt worden ist, daß die ersten Indizes in der natürlichen Reihenfolge stehen und die zweiten Indizes der Faktoren von der Bauart

$$s(1)s(2) \quad (s \in S_2)$$

bzw.

$$s(1)s(2)s(3) \quad (s \in S_3)$$

sind. Wodurch werden aber die „Vorzeichen“ + bzw. – bestimmt? Bei der Beantwortung dieser Frage hilft uns der Begriff der **Inversion** einer Permutation weiter.

**Definition** Seien  $s \in S_n$  und  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Man sagt:  
das Paar  $(s(i), s(j))$  bildet eine **Inversion** von  $s : \iff s(i) > s(j) \wedge i < j$ .  
Die Anzahl der Inversionen von  $s$  sei mit  $I(s)$  bezeichnet. Speziell für  $n \in \{2, 3\}$  erhält man folgende Inversionszahlen der Permutationen aus  $S_2 \cup S_3$ :

$(s(1), s(2), s(3))$	$I(s)$
$(s(1), s(2))$	$I(s)$
$(1, 2)$	0
$(2, 1)$	1

$(s(1), s(2), s(3))$	$I(s)$
$(1, 2, 3)$	0
$(2, 3, 1)$	2
$(3, 1, 2)$	2
$(1, 3, 2)$	1
$(2, 1, 3)$	1
$(3, 2, 1)$	3

Man erkennt nun unschwer, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(s_1)} a_{1s_1(1)} a_{2s_1(2)} + (-1)^{I(s_2)} a_{1s_2(1)} a_{2s_2(2)}$$

$(S_2 = \{s_1, s_2\})$  und

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{s \in S_3} (-1)^{I(s)} \cdot a_{1s(1)} \cdot a_{2s(2)} \cdot a_{3s(3)}$$

gilt. Diese Schreibweise lässt sich natürlich sofort verallgemeinern.

**Definition** Seien  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn} \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Unter einer **Determinante  $n$ -ter Ordnung** über  $K$

$$|a_{ij}|_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

versteht man ein Element aus  $K$ , das sich aus den vorgegebenen Elementen  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  wie folgt berechnet:

$$\sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} \cdot a_{1s(1)} \cdot a_{2s(2)} \cdot \dots \cdot a_{ns(n)}.$$

Man beachte: Eine Determinante  $n$ -ter Ordnung ist also nur ein gewisses Element aus  $K$ , für das wir auch die Bezeichnung  $|a_{ij}|_n$  oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \dots \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

verwenden, aus der zu ersehen ist, aus welchen Elementen aus  $K$  dieses Element berechenbar ist.

Obige Definition einer Determinante ist nicht die einzige mögliche<sup>2</sup>. Zur Unterscheidung nennt man sie deshalb auch „**Leibnizsche Definition**“ einer Determinante, nach Gottfried W. Leibniz (1646–1716), von dem erste Überlegungen zu Determinanten stammen.

Bevor wir uns Gedanken über die Berechnung und Anwendung solcher Determinanten machen, noch einige

#### Bezeichnungen und Bemerkungen:

- Die Leibnizsche Definition enthält als Spezialfall auch Determinanten erster Ordnung:

$$|a_{11}|_1 := a_{11}.$$

- Falls  $K$  nur aus zwei Elementen besteht (z.B.  $K = (\mathbb{Z}_2; +(\text{mod } 2), \cdot(\text{mod } 2))$ ), ist  $-1 = 1$  und damit

$$|a_{ij}|_n = \sum_{s \in S_n} a_{1s(1)} \cdot a_{2s(2)} \cdot \dots \cdot a_{ns(n)}.$$

---

<sup>2</sup> Weitere Möglichkeiten entnehme man z.B. [Koc 57] oder [Kel 68].

- Den Ausdruck  $(-1)^{I(s)}$  bezeichnet man oft auch mit

sign  $s$  („**Signum** von  $s$ “).

- Bei den Elementen  $a_{ij}$  der Determinante  $A := |a_{ij}|_n$  heißt  $i$  der **Zeilenindex** und  $j$  der **Spaltenindex**. Außerdem sei in  $A$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11} \swarrow a_{12} & \cdots & \swarrow a_{1n} \\ a_{21} \swarrow a_{22} & \cdots & \swarrow a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \swarrow a_{n2} & \cdots & \swarrow a_{nn} \end{vmatrix}$$

← Nebendiagonale  
← Hauptdiagonale

- Entsteht  $A = |a_{ij}|_n$  aus den Koeffizienten des LGS (\*) für  $n = m$ , so nennt man  $A$  **Koeffizientendeterminante** von (\*).

Die Berechnung einer Determinante nach Definition ist für große  $n$  fast unmöglich, da die Summe, die in der Definition von Leibniz angegeben wurde, aus  $n!$  Summanden besteht und  $n!$  für große  $n$  sehr stark wächst. So hätte man z.B. zur Berechnung einer Determinante 25-ter Ordnung nach Definition allein  $25! \cdot 24$  Multiplikationen auszuführen, für die ein Computer, der in der Sekunde 1 Million Multiplikationen ausführen kann, etwa  $10^{13}$  Jahre benötigt. Trotzdem werden wir bald in der Lage sein, Determinanten zu berechnen. Dabei werden wir Eigenschaften der Determinanten, die in den nachfolgenden Sätzen 3.1.5–3.1.10 angegeben sind, benutzen.

### Eigenschaften von Determinanten

Zunächst drei Hilfsaussagen über Permutationen, die wir für die Beweise der Sätze 3.1.4 und 3.1.6 benötigen. Die dort auftretenden Permutationen  $s$  sind in der Form

$s = (s(1), s(2), \dots, s(n))$  angegeben. Es bietet sich hierbei an, Permutationen als Anordnungen der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  aufzufassen.

**Lemma 3.1.1** *Seien  $s$  und  $s'$  Permutationen aus  $S_n$ . Dann gelangt man von  $s$  zu  $s'$  durch eine gewisse Aufeinanderfolge von Transpositionen (Vertauschungen von zwei Elementen  $s(i), s(j)$ ).*

*Beweis.* Zunächst ein Beispiel. Seien  $s = (3, 4, 5, 2, 1)$  und  $s' = (2, 1, 4, 3, 5)$ . Von  $s$  zu  $s'$  gelangt man wie folgt:

$$(3, 4, 5, \mathbf{2}, 1) \rightarrow (2, 4, 5, 3, 1) \rightarrow (2, 1, \mathbf{5}, 3, 4) \rightarrow (2, 1, 4, 3, 5).$$

Fett gedruckt sind dabei die im nächsten Schritt zu vertauschenden Elemente.

Aus diesem Beispiel ist das allgemeine Verfahren erkennbar, das wie folgt abläuft: Ist  $s(1) = s'(1)$ , so ist für den Übergang von  $s$  zu  $s'$  die erste Stelle „richtig besetzt“. Andernfalls vertauscht man  $s(1)$  mit  $s(j) := s'(1)$ . Als nächstes betrachtet man die 2. Stelle. Ist  $s(2) = s'(2)$ , so hat man keine Vertauschung vorzunehmen. Bei  $s(2) \neq s'(2)$  findet man ein  $k > 2$  mit  $s(k) = s'(2)$  und man kann dann  $s(2)$  mit  $s(k)$  vertauschen, usw. Nach  $n - 1$  Schritten dieser Art stehen  $s'(1), s'(2), \dots, s'(n - 1)$  an den richtigen Stellen und somit auch  $s'(n)$ . ■

**Lemma 3.1.2** *Vertauscht man in einer Permutation  $s$  zwei verschiedene Elemente  $s(i)$  und  $s(j)$ , so ändert sich die Inversionszahl der Permutation um eine ungerade Zahl.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $i < j$ .

Das Lemma ist unmittelbar einzusehen, wenn  $j = i + 1$  ist: Die Zahlen  $s(i)$  und  $s(i+1)$  bilden entweder vor oder nach der Vertauschung eine Inversion, je nachdem ob  $s(i) > s(i+1)$  oder  $s(i) < s(i+1)$ . Alle etwa vorhandenen weiteren Inversionen treten in  $s$  und  $s'$  (der aus  $s$  gebildeten Permutation mittels Vertauschung von  $s(i)$  mit  $s(i+1)$ ) gleichermaßen auf. Folglich unterscheiden sich  $I(s)$  und  $I(s')$  genau um 1.

Wir betrachten nun den Fall  $j > i + 1$ . Die aus  $s$  durch Vertauschen von  $s(i)$  und  $s(j)$  zu erhaltene Permutation sei mit  $s'$  bezeichnet. Offenbar kann der Übergang von  $s$  zu  $s'$  durch mehrmaliges Vertauschen je zweier benachbarter Elemente bewerkstelligt werden. Man vertausche  $s(i)$  zunächst so oft jeweils mit seinem rechten Nachbarn, bis  $s(i)$  an der  $j$ -ten Stelle steht. Dazu sind  $j - i$  Vertauschungen benachbarter Elemente erforderlich. Nach diesen Vertauschungen befindet sich  $s(j)$  auf dem  $(j - 1)$ -ten Platz. Vertauscht man nun  $s(j)$  mit seinem jeweiligen linken Nachbarn bis  $s(j)$  zur  $i$ -ten Stelle gelangt, so erhält man  $s'$ , wobei dazu nochmals  $j - 1 - i$  Vertauschungen von je zwei nebeneinanderstehenden Elementen erforderlich waren. Insgesamt sind damit  $2 \cdot (j - i) - 1$  Vertauschungen beim Übergang von  $s$  zu  $s'$  notwendig gewesen. Bei jeder dieser Vertauschungen ändert sich die Inversionszahl um 1. Folglich unterscheidet sich  $I(s')$  von  $I(s)$  um eine ungerade Zahl. ■

**Lemma 3.1.3** *Seien  $s \in S_n$  und  $I(s)$  eine ungerade (bzw. gerade) Zahl. Dann gelangt man von  $s$  zu der Permutation  $(1, 2, \dots, n)$  stets durch eine ungerade (bzw. gerade) Anzahl von Transpositionen.*

*Beweis.* Nach Lemma 3.1.1 gelangt man von  $s$  zu  $(1, 2, \dots, n)$  durch eine gewisse Aufeinanderfolge von Transpositionen. Bei jeder Transposition ändert sich wegen Lemma 3.1.2 die Inversionszahl um eine ungerade Zahl. Da  $I((1, 2, \dots, n)) = 0$  ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

**Satz 3.1.4** Vertauscht man in einer Determinante sämtliche Zeilen mit den Spalten (ohne die Reihenfolge der Zeilen bzw. Spalten zu verändern), so ändert sich der Wert der Determinante nicht.

*Beweis.* Für Determinanten 1. und 2. Ordnung ist die Behauptung offensichtlich. Sei nun  $A := |a_{ij}|_n$  eine Determinante  $n$ -ter Ordnung ( $n \geq 3$ ) und bezeichne  $B := |b_{ij}|_n$  die sich aus  $A$  durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten ergebene Determinante, d.h., es gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{ji} = b_{ij}.$$

Nach Definition ist

$$B = \sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} \cdot b_{1s(1)} b_{2s(2)} \cdots b_{ns(n)},$$

wobei  $b_{1s(1)} b_{2s(2)} \cdots b_{ns(n)} = a_{s(1)1} a_{s(2)2} \cdots a_{s(n)n}$  gilt. Durch Vertauschen der Reihenfolge der Faktoren erhält man aus  $a_{s(1)1} \cdots a_{s(n)n}$  ein Produkt der Form  $a_{1s'(1)} \cdots a_{ns'(n)}$ . Schaut man sich nur die Zeilenindizes (also die an der ersten Stelle stehenden Indizes) an, so entspricht diesen Vertauschungen der Übergang von  $(s(1), s(2), \dots, s(n))$  zu  $(1, 2, \dots, n)$  durch Transpositionen. Falls  $I(s)$  gerade (bzw. ungerade) ist, so beträgt die Anzahl dieser Transpositionen eine gerade (bzw. ungerade) Zahl nach Lemma 3.1.3. Betrachtet man nun die Permutation  $s'$ , so gelangt man von  $s'$  zu  $(1, 2, \dots, n)$  durch die gleiche Anzahl von Transpositionen wie von  $s$  zu  $(1, 2, \dots, n)$ .

Folglich gilt

$$(-1)^{I(s)} = (-1)^{I(s')},$$

womit jeder Summand der Form  $(-1)^{I(s)} \cdot b_{1s(1)} \cdots b_{ns(n)}$  von  $B$  auch in  $\sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} \cdot a_{1s(1)} \cdots a_{ns(n)}$  vorkommt und umgekehrt, d.h., es gilt  $A = B$ . ■

Unmittelbar aus der Definition einer Determinante folgt der

**Satz 3.1.5** Ein gemeinsamer Faktor einer Zeile (bzw. Spalte) einer Determinante kann herausgezogen werden, d.h., es gilt

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{i1} & \alpha \cdot a_{i2} & \dots & \alpha \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = \alpha \cdot |a_{ij}|_n.$$

■

**Satz 3.1.6** Entsteht eine Determinante  $A'$  aus einer Determinante  $A$  durch Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Zeile (bzw. Spalte), wobei  $i \neq j$ , so gilt  $A = -A'$ .

*Beweis.* Wegen Satz 3.1.4 genügt es, die Behauptung nur für Zeilen zu beweisen. O.B.d.A. sei  $i < j$ . Nach Definition einer Determinante und Lemma 3.1.2 gilt dann

$$\begin{aligned} A &= \sum_{s \in S_n} (-1)^{I((s(1), \dots, s(i), \dots, s(j), \dots))} a_{1s(1)} \cdots a_{ns(n)} \\ &= \sum_{s \in S_n} -(-1)^{I((s(1), \dots, s(j), \dots, s(i), \dots))} a_{1s(1)} \cdots a_{ns(n)} \\ &= -A'. \end{aligned}$$

■

**Satz 3.1.7** Ist in einer Determinante  $A$  eine Zeile (bzw. Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (bzw. Spalte), so ist  $A = 0$ .

Insbesondere gilt  $A = 0$ , wenn  $A$  zwei gleiche Zeilen (bzw. Spalten) besitzt.

*Beweis.* Wegen der Sätze 3.1.5 und 3.1.4 genügt es, die Behauptung nur für Determinanten  $A$  mit zwei gleichen Zeilen zu beweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $1 + 1 \neq 0$  (d.h., das zu 1 inverse Element ist  $\neq 1$ ).

Vertauscht man in diesem Fall in  $A$  die beiden gleichen Zeilen, so bleibt einerseits der Wert von  $A$  ungeändert, wechselt aber andererseits nach Satz 3.1.6 sein Vorzeichen, d.h., es ist  $A = -A$ . Folglich haben wir  $A + A = 0 = (1+1) \cdot A$ . Da jeder Körper nullteilerfrei ist (siehe Satz 2.3.2, (2)), ergibt sich hieraus  $A = 0$ .

2. Fall:  $1 + 1 = 0$  (d.h.,  $1 = -1$ ).

In diesem Fall gilt  $a + a = 0$  für alle  $a \in K$ , da  $a + a = a \cdot (1 + 1)$ . Außerdem gilt für jede Determinante  $|a_{ij}|_n$  über  $K$ :

$$|a_{ij}|_n = \sum_{s \in S_n} a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdots a_{ns(n)}.$$

Sind nun in dieser Determinante zwei Zeilen gleich, so stimmen zwei Summanden der Form  $a_{1s(1)} \cdots a_{ns(n)}$  und  $a_{1s'(1)} \cdots a_{ns'(n)}$  überein, wenn  $s'$  aus  $s$  durch Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Stelle entsteht und die  $i$ -te und die  $j$ -te Zeile unserer Determinante gleich sind. Folglich gilt nach dem oben Bemerkten  $A = 0$ . ■

**Satz 3.1.8** Unterscheiden sich zwei Determinanten  $n$ -ter Ordnung  $A$  und  $A'$  nur in der  $i$ -ten Zeile, d.h., haben wir

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und } A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so gilt

$$A + A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis. ÜA. ■

**Satz 3.1.9** Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert.

*Beweis.* Es sei  $A = |a_{ij}|_n$  und die Determinante  $A'$  unterscheide sich von  $A$  nur in der  $j$ -ten Zeile ( $j \neq i$ ), die das  $\alpha$ -fache der  $i$ -ten Zeile sei:

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{i1} & \alpha \cdot a_{i2} & \dots & \alpha \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile} = \alpha \cdot |a_{ij}|_n.$$

$A'$  ist nach Satz 3.1.7 gleich 0.

Folglich erhalten wir mit Hilfe von Satz 3.1.8 unsere Behauptung:

$$A = A + A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + \alpha a_{i1} & a_{j2} + \alpha a_{i2} & \dots & a_{jn} + \alpha a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des sogenannten Laplaceschen Entwicklungssatzes (siehe z.B. [Koc 57]). ■

**Satz 3.1.10 (Entwicklungssatz für Determinanten; mit Definition)**  
Es sei  $A = |a_{ij}|_n$  eine Determinante  $n$ -ter Ordnung,  $n \geq 2$ , und für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$A_{ij}$$

eine Determinante  $(n - 1)$ -ter Ordnung, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte sowie deren Multiplikation mit  $(-1)^{i+j}$  entsteht:

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Determinante  $A_{ij}$  nennt man auch **Adjunkte** von  $A$ . Dann gilt für beliebige  $s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $s \neq t$ :

(1)

$$\begin{aligned} A &= a_{t1} \cdot A_{t1} + a_{t2} \cdot A_{t2} + \dots + a_{tn} \cdot A_{tn} \\ &\quad (\text{„Entwicklung von } A \text{ nach der } t\text{-ten Zeile“}) \\ &= a_{1t} \cdot A_{1t} + a_{2t} \cdot A_{2t} + \dots + a_{nt} \cdot A_{nt} \\ &\quad (\text{„Entwicklung von } A \text{ nach der } t\text{-ten Spalte“}); \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 0 &= a_{s1} \cdot A_{t1} + a_{s2} \cdot A_{t2} + \dots + a_{sn} \cdot A_{tn} \\ &= a_{1s} \cdot A_{1t} + a_{2s} \cdot A_{2t} + \dots + a_{ns} \cdot A_{nt}. \end{aligned}$$

Vor dem Beweis drei **Beispiele** zwecks Erläuterung des Satzes.

(1.) Entwickelt man

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

nach der 1. Spalte, so erhält man

$$A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

Besser ist jedoch eine Entwicklung nach der 3. Spalte:  $A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12.$

(2.) Entwickelt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

nach der ersten Zeile, die entstehende Determinante wiederum nach der ersten Zeile, usw., so erhält man

$$A = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-3) \cdot 4 = 24.$$

(3.) Die Richtigkeit der Aussage (1) aus Satz 3.1.10 für  $n = 3$  und  $t = 1$  erkennt man wie folgt:

$$\begin{aligned} |a_{ij}|_3 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

Nun aber zum *Beweis* von Satz 3.1.10.

(1): Wegen der Sätze 3.1.4 und 3.1.6 genügt es, die Behauptung nur für  $t = 1$  und Zeilen zu beweisen.

In der Formel für  $|a_{ij}|_n$  wollen wir zunächst alle diejenigen Glieder zusammenfassen, in denen  $a_{11}$  vorkommt. Offenbar erhalten wir

$$|a_{ij}|_n = a_{11} \cdot \sum_{s \in S_n, s(1)=1} (-1)^{I(1, s(2), \dots, s(n))} a_{2s(2)} \dots a_{ns(n)} + R,$$

wobei  $R$  die Summe aller derjenigen Summanden der Determinantensumme bezeichnet, in denen  $a_{11}$  nicht vorkommt.

Da 1 keinen Einfluß auf  $I((1, s(2), \dots, s(n)))$  hat, gilt dann  $|a_{ij}|_n = a_{11} \cdot A_{11} + R.$

Nun wollen wir klären, mit welchem Faktor  $a_{1j}$  für  $j \geq 2$  in einer Darstellung der Form  $|a_{ij}|_n = a_{1j} \cdot x + R_x$  zu multiplizieren ist ( $R_x$  bezeichnet die Summe aller derjenigen Summanden in der Definition von  $|a_{ij}|_n$ , in denen  $a_{1j}$  nicht auftritt). Dazu vertauschen wir in  $A := |a_{ij}|_n$  der Reihe nach die  $j$ -te Spalte mit allen weiter links stehenden Spalten. Das sind im Ganzen  $j - 1$  Vertauschungen. Nach diesen Vertauschungen ist eine Determinante  $A'$  mit

$$A' := \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{2,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und  $A' = (-1)^{j-1} \cdot |a_{ij}|_n$  (wegen Satz 3.1.6) entstanden. Nach den obigen Überlegungen für  $a_{11}$  gilt nun  $A' = a_{1j} \cdot A'_{11} + R'$ , wobei  $A'_{11}$  aus  $A$  durch Streichen der ersten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht. Hieraus folgt

$$A = a_{1j} \cdot (-1)^{j+1} \cdot A'_{11} + R_x = a_{1j} \cdot A_{1j} + R_x.$$

Unsere Behauptung (1) ist damit für  $t = 1$  und Zeilen bewiesen.

(2): Wegen der Sätze 3.1.4 und 3.1.6 können wir uns auf den Beweis der Behauptung für  $t = 1, s = 2$  und Zeilen beschränken.

Nach Satz 3.1.7 ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gleich 0. Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Zeile, so erhält man  $0 = a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} + \dots + a_{2n} \cdot A_{1n}$ . ■

Mit Hilfe von Satz 3.1.10 können wir jetzt auch eine erste Anwendung der Determinanten beim Lösen linearer Gleichungssysteme beweisen.

### Satz 3.1.11 (Cramersche<sup>3</sup> Regel)

Gilt für das LGS (\*)  $n = m$  und ist die Koeffizientendeterminante  $A = |a_{ij}|_n$  von (\*) ungleich 0, so hat (\*) genau eine Lösung, die man wie folgt berechnen kann:

$$x_j = \frac{1}{A} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=: A_j}$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$ .  $A_j$  entsteht dabei aus  $A$ , indem man die  $j$ -te Spalte durch die Spalte aus den Elementen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ersetzt.

*Beweis.* Für  $n = 1$  ist unsere Behauptung trivial. Falls  $n \in \{2, 3\}$ , folgt die Cramersche Regel aus den zu Beginn des Abschnitts 3.1 angegebenen

<sup>3</sup> Gabriel Cramer (1704–1752), Schweizer Mathematiker. Publizierte 1750 eine verbaile Beschreibung der Cramerschen Regel.

Rechnungen. Die dabei benutzte Lösungsidee lässt sich auf den allgemeinen Fall übertragen.

Multipliziert man nämlich die  $i$ -te Gleichung von (\*) mit der Adjunkte  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und addiert anschließend sämtliche erhaltenen Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot A_{1j} \\ \cdot A_{2j} \\ \vdots \\ \cdot A_{nj} \end{array} \right.$$

so erhält man  $A \cdot x_j = b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj}$ ,

da nach Addition der multiplizierten Gleichungen und Zusammenfassung die Variable  $x_s$  ( $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) mit

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \dots + a_{ns}A_{nj}$$

multipliziert wird und dieser Ausdruck für  $s \neq j$  gleich 0 sowie für  $s = j$  gleich der Determinante  $A$  ist (nach Satz 3.1.10).

Man erkennt nun unschwer, daß die Determinante  $A_j$  mit dem Ausdruck  $b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj}$  übereinstimmt, indem man  $A_j$  nach der  $j$ -ten Spalte entwickelt. Damit gilt  $x_j = A^{-1} \cdot A_j$ , falls  $A \neq 0$ , womit unser LGS (\*) höchstens eine Lösung besitzt.

Umgekehrt rechnet man nach, daß  $x_j = A^{-1} \cdot A_j$  für  $j = 1, 2, \dots, n$  tatsächlich eine Lösung von (\*) ist:

$$\begin{aligned} & a_{i1}A^{-1}A_1 + a_{i2}A^{-1}A_2 + \dots + a_{in}A^{-1}A_n \\ &= A^{-1}(a_{i1}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}) + \dots + \\ & \quad a_{in}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn})) \\ &= A^{-1}(b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \dots + a_{in}A_{1n}) + \dots + \\ & \quad b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \dots + a_{in}A_{nn})) \\ &= b_i \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ). ■

Als unmittelbare Folgerung aus dem eben bewiesenen Satz erhält man:

### Satz 3.1.12 (mit Definitionen)

- (1) Ein homogenes LGS (\*) mit  $n = m$  besitzt genau dann nur die sogenannte **triviale Lösung**  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , wenn die Koeffizientendeterminante von (\*) ungleich 0 ist.
- (2) Hat das homogene LGS (\*) mit  $n = m$  außer der trivialen Lösung noch eine andere, eine sogenannte **nichttriviale Lösung**, so muß notwendig die Koeffizientendeterminante  $A$  gleich 0 sein. ■

**Beispiele** für die Berechnung von Determinanten:

- (1.) Falls man von Determinanten, in denen eine Zeile (oder Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (oder Spalte) ist, absieht, sind Determinanten in „Dreiecksgestalt“ (das sind Determinanten, in denen oberhalb oder unterhalb der Haupt- bzw. Nebendiagonalen lauter Nullen stehen) am einfachsten zu berechnen. Entwickelt man nämlich eine solche Determinante zeilen- bzw. spaltenweise, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

und

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,n-1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n1},$$

wobei

$$b := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv_4 0 \text{ oder } n \equiv_4 1, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das letzte Ergebnis erhält man übrigens leicht aus dem darüberstehenden durch Spaltenvertauschungen unter Beachtung von Satz 3.1.6.

- (2.) Komplizierter aufgebaute Determinanten lassen sich mit Hilfe der in den Sätzen 3.1.6 und 3.1.9 genannten Eigenschaften solange „umformen“, bis sie obige (einfach zu berechnende) Gestalt haben. Um die dabei auftretenden Rechnungen „durchsichtiger“ zu machen, vereinbaren wir, die Addition des  $\alpha$ -fachen der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \cdot$$

und das Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Zeile durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zu kennzeichnen. Entsprechendes sei für Spalten vereinbart. Außerdem schreiben wir anstelle von  $+\alpha \cdot$  für  $\alpha = 1$  (bzw.  $\alpha = -1$ ) kurz + (bzw. -).

Die Entwicklung einer Determinante nach einer gewissen Zeile oder Spalte kennzeichnen wir durch entsprechendes Anbringen des Zeichens  $\star$ .

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

lässt sich dann z.B. wie folgt berechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{+3·}} +3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{+7)}} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

Aus diesem Beispiel ist ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von Determinanten ablesbar:

Man überführt mittels Vertauschen von Zeilen (bzw. Spalten (Satz 3.1.6 beachten!)) und Addition von Vielfachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) die Determinante A in eine mit gleichem Wert, die von Dreiecksgestalt ist. Die dabei auszuführenden Einzelschritte ähneln sehr dem „Gaußalgorithmus“, mit dem wir uns etwas später ausführlich beschäftigen werden.

(3.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \star = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{-}}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

★

$$(-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -52$$

(4.)

$$\begin{vmatrix} a^2 & -(a+1)^2 & -(a+2)^2 \\ b^2 & -(b+1)^2 & -(b+2)^2 \\ c^2 & -(c+1)^2 & -(c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+2 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+2 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 - a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2 - a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (b-a) \cdot (c-a) \cdot \begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix}$$

★

$$= 4(b-a)(c-a)(b-c)$$

(5.) Sei  $D := |d_{ij}|_n$  eine Determinante  $n$ -ter Ordnung mit

$$d_{ij} := \begin{cases} a & \text{für } i = j, \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$$

 $D$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cccccc} a + (n-1)b & a + (n-1)b & \dots & a + (n-1)b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{array} \right| \\
&= (a + (n-1)b) \cdot \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & b & \dots & b \\ b & b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & a \end{array} \right| \quad \text{with } \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \\
&= (a + (n-1)b) \cdot \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{array} \right| \\
&= (a + (n-1)b) \cdot (a-b)^{n-1}
\end{aligned}$$

(6.) Die Determinante der Form

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \left| \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{array} \right|$$

nennt man **Vandermondesche<sup>4</sup> Determinante** ( $n \geq 2$ ). Durch vollständige Induktion über  $n$  wollen wir zeigen, daß der Wert dieser Determinante

$$\prod_{\substack{i>j \\ 1 \leq i, j \leq n}} (x_i - x_j)$$

ist ( $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \alpha_i := \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ ).

(I) Für  $n = 2$  gilt offensichtlich

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{array} \right| = x_2 - x_1.$$

---

<sup>4</sup> Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796), französischer Mathematiker. Schrieb erste zusammenfassende Darstellung der Determinanten im Jahre 1776.

(II) Angenommen, die Behauptung sei für Vandermondesche Determinanten  $(n - 1)$ -ter Ordnung richtig.

Subtrahiert man in einer Vandermondeschen Determinante  $V_n(x_1, \dots, x_n)$  das  $x_1$ -fache der  $(n - 1)$ -ten Spalte von der  $n$ -ten Spalte, dann das  $x_1$ -fache der  $(n - 2)$ -ten Spalte von der  $(n - 1)$ -ten Spalte, usw., so erhält man

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Entwickelt man nun diese Determinante nach der ersten Zeile und klammert die gemeinsamen Faktoren der einzelnen Zeilen aus, ergibt sich

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{= V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}.$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme erhält man hieraus die Behauptung

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i>j \\ 1 \leq i, j \leq n}} (x_i - x_j).$$

## 3.2 Matrizen

Der nachfolgend eingeführte Begriff der Matrix wird es uns ermöglichen, LGS sehr übersichtlich und kurz zu behandeln.

**Definition** Ein rechteckiges Ordnungsschema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(kurz mit  $(a_{ij})_{m,n}$  bezeichnet)

aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten mit Elementen  $a_{ij} \in K$  heißt **Matrix vom Typ  $(m, n)$  über  $K$**  bzw.  **$(m, n)$ -Matrix**.

Die Menge aller Matrizen des Typs  $(m, n)$  über  $K$  sei mit

$$K^{m \times n}$$

bezeichnet. Man beachte: Im Unterschied zu einer Determinante ist eine Matrix keine (!) Rechenvorschrift für ihre Elemente, sondern bloß ein Ordnungsschema, das man mit einem Schrank, in dem mehrere Reihen von Schubladen untereinander angeordnet sind, vergleichen kann. Mathematisch interessant wird ein solcher „Schrank“ erst dann, wenn seine „Schubfächer“ mit irgendwelchen Dingen gefüllt sind und wenn mit diesen Dingen dann auf gewisse Weise „gearbeitet“ wird. Wir werden deshalb für Matrizen gewisse Verknüpfungen (Operationen) einführen, die das „Arbeiten“ mit ihnen ermöglichen werden. Zunächst jedoch

### Beispiele

(1.) Für das LGS (\*) werden wir nachfolgend zwei Matrizen betrachten:

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(„Koeffizientenmatrix von (\*)“)

und

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

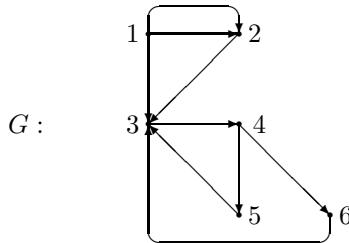
(„erweiterte Koeffizientenmatrix“ bzw.  
„Systemmatrix von (\*)“),

wobei

$$\mathfrak{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

auch einzeln Verwendung findet.

(2.) Gewisse Informationen über Graphen kann man ebenfalls in Form von Matrizen angeben. Z.B. lässt sich jedem gerichteten Graphen  $G$  ohne Schlingen mit der Knotenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  eine sogenannte **Adjazenzmatrix**  $\mathfrak{B} := (b_{ij})_{n,n}$  zuordnen, wobei  $b_{ij}$  die Anzahl der Bögen von  $G$  angibt, die vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$  gerichtet sind. Speziell für



erhält man

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weitere Matrizenarten, denen man Graphen zuordnen kann, findet man z.B. in Band 2 bzw. bei den Übungsaufgaben.

Matrizen mit mindestens zwei Zeilen und mindestens zwei Spalten bezeichnen wir i.allg. nachfolgend mit großen deutschen Buchstaben:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dots$$

Im Unterschied dazu schreiben wir für  $(m, 1)$ -Matrizen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dots$$

und für  $(1, m)$ -Matrizen

$$\mathfrak{a}^T, \mathfrak{b}^T, \mathfrak{c}^T, \mathfrak{e}^T, \dots, \mathfrak{x}^T, \mathfrak{y}^T, \dots$$

Für manche Untersuchungen ist es nützlich, die Spalten bzw. Zeilen einer Matrix als Spalten- bzw. Zeilenmatrizen aufzufassen. Wir schreiben dann anstelle von

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

auch  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n)$ , wobei

$$\mathfrak{a}_i := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

bzw.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathfrak{b}_m^T \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mathfrak{b}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, 2, \dots, m.$$

Bezeichnungen für oft auftretende Matrizen aus  $K^{n \times n}$  sind:

$$\mathfrak{O}_{m,n} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{„Nullmatrix“})$$

$(\in K^{m \times n})$ ,

$$\mathfrak{E}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{„Einheitsmatrix“})$$

$(\in K^{n \times n})$ ,

$$\mathfrak{D}_n := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad (\text{„Diagonalmatrix“})$$

$(\in K^{n \times n})$ .

Jeder Matrix  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n \times n}$  aus  $K^{n \times n}$  lässt sich eine Determinante

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

zuordnen, die mit

$$\det \mathfrak{A} \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{A}|$$

bezeichnet wird.

Zwei Matrizen  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{p,q}$  wollen wir genau dann als **gleich** ansehen, wenn sie vom gleichen Typ sind und wenn  $a_{ij} = b_{ij}$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist. Wir schreiben, falls Gleichheit der Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  vorliegt,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

## Operationen über Matrizen<sup>5</sup>

### (1.) Addition von Matrizen

Seien  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{m,n}$  zwei Matrizen gleichen Typs. Dann versteht man unter der Summe von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  die Matrix

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

#### Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt für beliebige Matrizen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  aus  $K^{m \times n}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} + \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}, \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{O}_{m,n} &= \mathfrak{A}, \\ (a_{ij})_{m,n} + (-a_{ij})_{m,n} &= \mathfrak{O}_{m,n}, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar der folgende Satz ergibt:

**Satz 3.2.1**  $(K^{m \times n}; +)$  ist eine abelsche Gruppe. ■

### (2.) Multiplikation von Matrizen

Die Matrizenmultiplikation ist nur für sogenannte **verkettete Matrizen**  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{n,q}$  erklärt, d.h., die Anzahl der Spalten von  $\mathfrak{A}$  muß mit der Anzahl der Zeilen von  $\mathfrak{B}$  übereinstimmen.

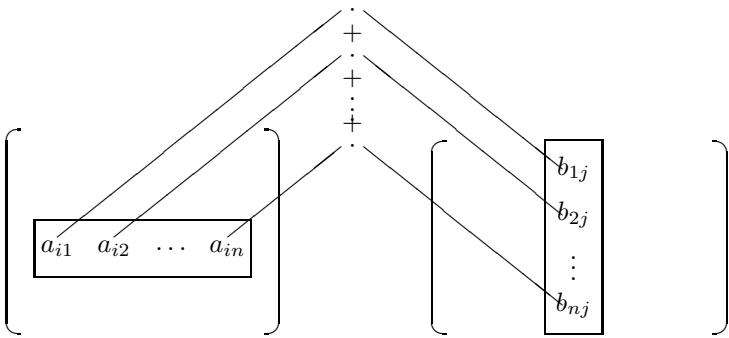
Das Produkt der Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  mit der Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times q}$  ist die Matrix  $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \in K^{m \times q}$ , wobei  $\mathfrak{C} := (c_{ij})_{m,q}$  und

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

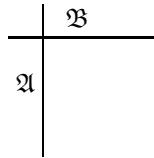
Das Element  $c_{ij}$  von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  erhält man also, indem man das sogenannte „innere Produkt“ der  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{A}$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $\mathfrak{B}$  bildet:

---

<sup>5</sup> Zunächst nur die Addition und Multiplikation von Matrizen. Nach Anwendungen und Eigenschaften dieser Operationen werden noch zwei weitere Operationen eingeführt.



Übersichtlich lässt sich diese Produktbildung mit Hilfe des **Falkschen Schemas**<sup>6</sup> ausführen (sowohl bei konkreten Berechnungen als auch bei einigen theoretischen Überlegungen). Man ordnet dazu die Elemente von  $\mathfrak{A}$  links unten, die von  $\mathfrak{B}$  rechts oben wie folgt an:



und berechnet ein beliebiges Element  $c_{ij}$  von  $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  als inneres Produkt der  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{A}$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $\mathfrak{B}$ , in deren „Schnittpunkt“ es dann aufgeschrieben wird:

	$b_{11}$	$b_{12}$		$b_{1j}$		$b_{1q}$
	$b_{21}$	$b_{22}$		$b_{2j}$		$b_{2q}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	$b_{n1}$	$b_{n2}$		$b_{nj}$		$b_{nq}$
$a_{11} a_{12} \dots a_{1n}$	$\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1}$	$\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k2}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kj}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kq}$
$a_{21} a_{22} \dots a_{2n}$	$\sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k1}$	$\sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k2}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{2k} b_{kj}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{2k} b_{kq}$
$\vdots$						
$a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}$	$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k1}$	$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k2}$	$\dots$	$\boxed{\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kq}$
$\vdots$						
$a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn}$	$\sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1}$	$\sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k2}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kj}$	$\dots$	$\sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kq}$

<sup>6</sup> Sigurd Falk schlug 1951 dieses Schema in „Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation“ (Z. Angew. Math. Mech. **31** (1951), S. 152–153) vor.

**Beispiele** und einige Anwendungen:

- (1.) Seien  $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Aus

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} & & & 2 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{array} \right.$$

ergibt sich

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (2.) Bildet man für die Adjazenzmatrix  $\mathfrak{B}$  eines schlingenlosen, gerichteten Graphen  $G$  (siehe S. 128) die Matrix

$$\mathfrak{C} := \underbrace{(\dots ((\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{B}) \dots \cdot \mathfrak{B})}_{k} \cdot \mathfrak{B},$$

so gibt das Element  $c_{ij}$  von  $\mathfrak{C}$  die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge  $k$  vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$  an (siehe dazu auch Band 2). Für den Graphen  $G$  von S. 128 gilt z.B.

$$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Beweis: ÜA).

- (3.) Führt man in der Matrixgleichung

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$$

mit  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$ ,

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

die Multiplikation durch, erhält man

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Nach Definition der Gleichheit von Matrizen ist dies genau dann erfüllt, wenn die Gleichungen des LGS (\*) gültig sind.

Also:

Durch die Angabe einer Matrixgleichung der Form  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  wird ein LGS (\*) bestimmt und umgekehrt kann man aus einem LGS (\*) eine Matrixgleichung der Form  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  erhalten.

**Wir werden deshalb bei der Behandlung von LGS keinen Unterschied zwischen (\*) und der zugehörigen Matrixgleichung machen.**

Speziell schreiben wir anstelle des LGS (\*) nachfolgend

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}.$$

#### (4.) Additionsmatrizen

Sogenannte Additionsmatrizen erhält man aus der Einheitsmatrix  $\mathfrak{E}_n$ , indem man ein Element  $a_{st} = 0$  ( $s \neq t$ ) durch ein  $\lambda \in K$  ersetzt. Bezeichnen wollen wir solche Matrizen mit

$$\mathfrak{D}_{n,s,t;\lambda}$$

bzw. kurz mit

$$\mathfrak{D}_{s,t;\lambda}.$$

Multipliziert man eine  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{D}_{n,s,t;\lambda}$ , so entsteht das Produkt

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{D}_{n,s,t;\lambda} \cdot \mathfrak{A} & \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}_{n,s,t;\lambda} \\ \text{aus } \mathfrak{A}, \text{ indem man in } \mathfrak{A} \text{ zur} \\ \text{s-ten Zeile das } \lambda\text{-fache} & | \quad \text{t-ten Spalte das } \lambda\text{-fache} \\ \text{der t-ten Zeile} & | \quad \text{der s-ten Spalte} \\ & \text{addiert.} \end{array}$$

#### (5.) Permutationsmatrizen

Permutationsmatrizen sind  $(n, n)$ -Matrizen, in deren Zeilen und Spalten je eine 1 und sonst lauter Nullen stehen.

Multipliziert man eine  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  von links mit einer Permutationsmatrix, so unterscheidet sich die „Ergebnismatrix“ von  $\mathfrak{A}$  nur durch eine andere Reihenfolge der Zeilen. Bei der Multiplikation von rechts, werden in  $\mathfrak{A}$  Spalten vertauscht.

Der nachfolgende Satz faßt einige wichtige Regeln für die Matrizenmultiplikation zusammen.

**Satz 3.2.2** *Es gilt:*

- (1)  $\forall \mathfrak{A} \in K^{m \times n} \forall \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K^{n \times q} : \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C};$
- (2)  $\forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^{m \times n} \forall \mathfrak{C} \in K^{n \times q} : (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C};$
- (3)  $\forall \mathfrak{A} \in K^{m \times n} \forall \mathfrak{B} \in K^{n \times q} \forall \mathfrak{C} \in K^{q \times p} : \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C};$
- (4)  $\forall \mathfrak{A} \in K^{n \times n} : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$
- (5) *Die Matrizenmultiplikation ist i.allg. nicht kommutativ.*

*Beweis.* ÜA. ■

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir hieraus sowie aus Satz 3.2.1:

**Satz 3.2.3**

- (1)  $(K^{n \times n}; \cdot)$  ist eine Halbgruppe mit dem Einselement  $\mathfrak{E}_n.$
- (2)  $(K^{n \times n}; +, \cdot)$  ist ein Ring.

**Definitionen** Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}.$  Dann heißt

$$\mathfrak{A} \text{ regulär} : \iff \det \mathfrak{A} \neq 0.$$

$K_r^{n \times n}$  sei die Menge aller  $(n, n)$ -Matrizen über  $K,$  die regulär sind. Eine nicht reguläre  $(n, n)$ -Matrix nennt man auch **singulär**.

**Satz 3.2.4**

$$\forall \mathfrak{A} \in K_r^{n \times n} \exists \mathfrak{A}' \in K^{n \times n} : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_n.$$

*Beweis.* Vor dem allgemeinen Beweis zunächst ein **Beispiel.**

Sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{A}$  ist offenbar regulär ( $\det \mathfrak{A} = 7$ ). Die gesuchte Matrix  $\mathfrak{A}'$  mit  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_3$  sei wie folgt aufgebaut:

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}',$  so erhält man folgende Bedingungen für die Unbekannten  $x_{ij}:$

	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$
	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$
1 0 3	$x_{11} + 3x_{31} = 1$	$x_{12} + 3x_{32} = 0$	$x_{13} + 3x_{33} = 0$
4 1 5	$4x_{11} + x_{21} + 5x_{31} = 0$	$4x_{12} + x_{22} + 5x_{32} = 1$	$4x_{13} + x_{23} + 5x_{33} = 0$
0 1 0	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 1$

Die  $x_{ij}$  sind also Lösungen von drei LGS mit gleicher Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$ , jedoch unterschiedlichen rechten Seiten. Nach Satz 3.1.11 gibt es für jedes dieser LGS genau eine Lösung, die man wie folgt berechnen kann:

$$x_{11} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot A_{11} = -5/7,$$

\*

$$x_{21} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot A_{12} = 0,$$

\*

$$x_{31} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot A_{13} = 4/7,$$

\*

$$x_{12} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot A_{21} = 3/7, \text{ usw.}$$

\*

Wir erhalten

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} -5/7 & 3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/7 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

mit  $|\mathfrak{A}'| \neq 0$ .

Es sei nun  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{n,n}$  eine beliebige reguläre Matrix,  $\mathfrak{A}' = (x_{ij})_{n,n}$ ,  $\mathfrak{x}_j = (x_{ij})_{n,1}$  die Kurzbezeichnung für die Spalten von  $\mathfrak{A}'$  ( $j = 1, \dots, n$ ) und

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathfrak{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bezeichnungen für die Spalten von  $\mathfrak{e}_n$ . Dann gilt

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_n \iff \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_j = \mathfrak{e}_j.$$

Wegen  $|\mathfrak{A}| \neq 0$  sind die den Matrixgleichungen  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_j = \mathfrak{e}_j$  entsprechenden LGS nach der Cramerschen Regel eindeutig lösbar.

Man erhält:

$$x_{ij} = |\mathfrak{A}|^{-1} \cdot A_{ji},$$

wobei  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $A_{ji}$  die Adjunkten von  $|\mathfrak{A}|$  bezeichnen.

Also existiert ein  $\mathfrak{A}'$  mit  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_n$  und es gilt

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} A_{11}/|\mathfrak{A}| & A_{21}/|\mathfrak{A}| & \dots & A_{n1}/|\mathfrak{A}| \\ A_{12}/|\mathfrak{A}| & A_{22}/|\mathfrak{A}| & \dots & A_{n2}/|\mathfrak{A}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/|\mathfrak{A}| & A_{2n}/|\mathfrak{A}| & \dots & A_{nn}/|\mathfrak{A}| \end{pmatrix}.$$

■

Es sei noch bemerkt, daß der später angegebene Satz 3.4.3 ein besseres Verfahren zur Berechnung von  $\mathfrak{A}'$  liefert.

Bevor wir uns noch etwas näher mit der im Satz 3.2.4 beschriebenen Matrix  $\mathfrak{A}'$  beschäftigen werden, zunächst ein Satz, aus dem sich die Regularität von  $\mathfrak{A}'$  folgern läßt.

### Satz 3.2.5 (Determinantenmultiplikationssatz)

$$\forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^{n \times n} : |\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|.$$

*Beweis.* Man überlegt sich leicht, daß die Behauptung richtig ist, wenn  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{B}$  eine Diagonalmatrix ist.

Wegen Satz 3.1.9 und der oben angegebenen Eigenschaften von Additionsmatrizen ist der Satz offenbar gültig, falls es sich bei  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{B}$  um eine Additionsmatrix handelt.

Man überlegt sich nun (ÜA), daß man jede  $(n, n)$ -Matrix durch Multiplikation von links und rechts mit gewissen Additionsmatrizen in eine Diagonalmatrix überführen kann. Speziell für  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  seien  $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_t$  gewisse Additionsmatrizen, für die

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_* &:= \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}_r \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_{r+1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}_s & \text{und} \\ \mathfrak{B}_* &:= \mathfrak{C}_{s+1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}_{s+r'} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}_{s+r'+1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}_t \end{aligned}$$

Diagonalmatrizen sind. Da  $|\mathfrak{C}_i| = 1$  ( $i \in \{1, \dots, t\}$ ), existiert nach Satz 3.2.4 eine Matrix  $\mathfrak{C}'_i$  mit  $\mathfrak{C}_i \cdot \mathfrak{C}'_i = \mathfrak{E}_n$ , die offenbar ebenfalls eine Additionsmatrix ist (siehe dazu den Beweis von Satz 3.2.4). Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{C}'_r \cdot \mathfrak{C}'_{r-1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}'_1 \cdot \mathfrak{A}_* \cdot \mathfrak{C}'_s \cdot \mathfrak{C}'_{s-1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}'_{r+1} & \text{und} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{C}'_{s+r'} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}'_{s+1} \cdot \mathfrak{B}_* \cdot \mathfrak{C}'_t \cdot \mathfrak{C}'_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{C}'_{s+r'+1}. \end{aligned}$$

Nach dem oben Bemerktem ergibt sich hieraus

$$|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}_*| \cdot |\mathfrak{B}_*|.$$

Da nach Satz 3.1.9  $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_*|$  und  $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}_*|$  gilt, ist  $|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|$ . ■

Ist  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_n$ , so erhält man mit Hilfe von Satz 3.2.5

$$|\mathfrak{A}'| = 1/|\mathfrak{A}|.$$

Als unmittelbare Folgerung hieraus und aus den Sätzen 3.2.3, 3.2.4 ergibt sich der

**Satz 3.2.6** ( $K_r^{n \times n}; \cdot$ ) ist eine Gruppe. ■

Das zu  $\mathfrak{A} \in K_r^{n \times n}$  inverse Element  $\mathfrak{A}'$  werden wir (analog zu den Bezeichnungen aus Kapitel 2) die zu  $\mathfrak{A}$  **inverse Matrix** nennen und mit  $\mathfrak{A}^{-1}$  bezeichnen. Nach Kapitel 2 ist  $\mathfrak{A}^{-1}$  eindeutig bestimmt und es gilt für beliebige  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_r^{n \times n}$ :

- $\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$ ,
- $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{-1}$ ,
- $(\mathfrak{A}^{-1})^{-1} = \mathfrak{A}$ .

Es sei noch bemerkt, daß man ein LGS (\*) mit regulärer Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  mit Hilfe von  $\mathfrak{A}^{-1}$  leicht lösen kann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{-1} \cdot | & \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \\ & \quad \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{b} \\ & \quad \mathfrak{E}_n \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{b} \end{aligned}$$

Weiter mit den Definitionen von Matrizenoperationen.

### (3.) Transponieren

Für  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}^T$  diejenige Matrix aus  $K^{n \times m}$ , die aus  $\mathfrak{A}$  durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten entsteht, d.h., falls  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$ , so ist  $\mathfrak{A}^T = (a'_{ij})_{n,m}$  und  $a'_{ij} = a_{ji}$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .  $\mathfrak{A}^T$  heißt die zu  $\mathfrak{A}$  **transponierte Matrix**. Falls  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T$  ist, nennt man die Matrix  $\mathfrak{A}$  **symmetrisch**.

Man rechnet leicht nach, daß der folgende Satz gilt:

**Satz 3.2.7**

- (1)  $\forall \mathfrak{A} \in K^{m \times n} : (\mathfrak{A}^T)^T = \mathfrak{A}$ ;
- (2)  $\forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^{m \times n} : (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^T = \mathfrak{A}^T + \mathfrak{B}^T$ ;
- (3)  $\forall \mathfrak{A} \in K^{m \times n} \forall \mathfrak{B} \in K^{n \times q} : (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})^T = \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A}^T$ . ■

#### (4.) Multiplikation mit Skalar

Für  $\lambda \in K$  und  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{m,n}$  sei

$$\lambda \cdot \mathfrak{A} := (\lambda \cdot a_{ij})_{m,n},$$

d.h.,  $\cdot$  ist eine äußere Verknüpfung von  $K \times K^{m \times n}$  in  $K^{m \times n}$ .

#### Beispiel

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &:= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot \mathfrak{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Elementare Eigenschaften dieser Multiplikation mit Skalar sind zusammengefaßt im

**Satz 3.2.8** Für beliebige  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^{m \times n}$  und  $\lambda, \mu \in K$  gilt

- (1)  $1 \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ ,
- (2)  $(\lambda + \mu) \cdot \mathfrak{A} = \lambda \cdot \mathfrak{A} + \mu \cdot \mathfrak{A}$ ,
- (3)  $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathfrak{A} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathfrak{A})$ ,
- (4)  $\lambda \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda \cdot \mathfrak{A} + \lambda \cdot \mathfrak{B}$ .

Für beliebiges  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathfrak{B} \in K^{n \times q}$  und  $\lambda \in K$  ist außerdem

- (5)  $\lambda \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = (\lambda \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{B}$ .

(Man beachte, daß es sich bei (2), (3) und (5) um unterschiedliche + und · handelt!) ■

Mit Hilfe der Matrizen und den auf Matrizen definierten Operationen kann man sich einen ersten Überblick über das Lösungsverhalten von LGS verschaffen. Dies geschieht in den nächsten drei Sätzen.

**Satz 3.2.9** Seien  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$  Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ( $\mathfrak{o}^T := (0, 0, \dots, 0)$ ) und  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ . Dann ist auch

$$\alpha_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathfrak{x}_2 + \dots + \alpha_r \cdot \mathfrak{x}_r$$

eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ .

*Beweis.* Sind  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$  Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , so gilt für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$ :  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i = \mathfrak{o}$ . Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Satz 3.2.2 und Satz 3.2.8:

$$\mathfrak{A} \cdot (\alpha_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \dots + \alpha_r \cdot \mathfrak{x}_r) = \alpha_1 \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1) + \dots + \alpha_r \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_r) = \alpha_1 \cdot \mathfrak{o} + \dots + \alpha_r \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o},$$

d.h.,  $\alpha_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \dots + \alpha_r \cdot \mathfrak{x}_r$  ist Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ . ■

**Satz 3.2.10** Ist  $\mathfrak{x}_0$  eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{x}_1$  eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , so erhält man durch  $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1$  eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ .

*Beweis.* Nach Satz 3.2.2 gilt:  $\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{o} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ . ■

**Satz 3.2.11** Bezeichne  $L$  die Menge der Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $L_0$  die Menge der Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ . Sei außerdem  $\mathfrak{x}_0$  eine gewisse (fixierte) Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ . Dann existiert für jedes  $\mathfrak{x}_* \in L$  ein  $\mathfrak{x}_1 \in L_0$  mit  $\mathfrak{x}_* = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1$ , d.h., es gilt

$$L = \mathfrak{x}_0 + L_0.$$

*Beweis.* Sind  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_* = \mathfrak{b}$ , so erfüllt  $\mathfrak{x}_1 := \mathfrak{x}_* - \mathfrak{x}_0$  die geforderten Bedingungen, da

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{x}_* - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_* - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{b} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o}.$$

■

### 3.3 Rang von Matrizen

Der Begriff des Ranges einer Matrix wird es uns im Abschnitt 3.4 ermöglichen, Lösbarkeitskriterien für LGS übersichtlich und kurz zu formulieren.

#### Definitionen

- Unter einer **Unterdeterminante** einer Matrix  $\mathfrak{A}$  versteht man die Determinante einer quadratischen Matrix  $\mathfrak{A}'$ , die aus  $\mathfrak{A}$  durch Streichen gewisser Zeilen und Spalten entsteht.
- Sei  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n} \setminus \{\mathfrak{O}_{m,n}\}$ . Die größte Ordnung unter den von Null verschiedenen Unterdeterminanten von  $\mathfrak{A}$  heißt **Rang** von  $\mathfrak{A}$ .

Bezeichnen werden wir den Rang von  $\mathfrak{A}$  mit

$$\operatorname{rg} \mathfrak{A}.$$

Außerdem sei

$$\operatorname{rg} \mathfrak{O}_{m,n} := 0.$$

#### Beispiele

(1.)

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3, \text{ da } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(2.)

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1,$$

da alle Unterdeterminanten der Ordnung 2 oder 3 gleich 0 sind und eine Unterdeterminante der Ordnung 1 (hier sogar alle)  $\neq 0$  ist.

(3.) Sei  $a_{11} \cdot a_{22} \cdots \cdots a_{rr} \neq 0$ . Dann ist

$$\operatorname{rg} \left( \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & a_{3,r+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) = r,$$

da jede Unterdeterminante der Matrix mit mehr als  $r$  Zeilen mindestens eine Nullzeile enthält und

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{array} \right| = a_{11} \cdots \cdots a_{rr} \neq 0$$

gilt. Eine solche Matrix, deren Rang unmittelbar zu erkennen ist, wollen wir nachfolgend **Matrix in Trapezform** nennen.

**Satz 3.3.1** *Der Rang einer Matrix  $\mathfrak{A}$  ändert sich nicht, wenn folgende sogenannte **rangäquivalente Umformungen** der Matrix  $\mathfrak{A}$  vorgenommen werden:*

- (1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten);
- (2) Multiplikation der Elemente einer Zeile (bzw. Spalte) mit Faktor  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ;
- (3) Addition des  $\lambda$ -fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte),  $\lambda \in K$ .

*Beweis.* Ergibt sich aus den Eigenschaften einer Determinante. ■

**Satz 3.3.2** Jede Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n} \setminus \{\mathfrak{O}_{m,n}\}$  lässt sich durch rangäquivalente Umformungen in eine Matrix  $\mathfrak{A}'$  von Trapezform überführen mit  $\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg } \mathfrak{A}'$ .

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n} \setminus \{\mathfrak{O}_{m,n}\}$ . Die aus  $\mathfrak{A}$  zu erhaltenen Matrizen bei rangäquivalenten Umformungen seien mit  $\mathfrak{A}^{(t)} := (a_{ij}^{(t)})_{m,n}$  bezeichnet,  $t \in \mathbb{N}$ . Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält man aus  $\mathfrak{A}$  eine Matrix  $\mathfrak{A}^{(1)}$  mit  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ . Addieren wir nun der Reihe nach das

$(-a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$ -fache der ersten Zeile zur zweiten, das

$(-a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$ -fache der ersten Zeile zur dritten, ..., das

$(-a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$ -fache der ersten Zeile zur  $n$ -ten, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\mathfrak{A}^{(2)} := \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Sind alle Elemente der zweiten bis  $m$ -ten Zeile gleich 0, so ist  $\mathfrak{A}^{(2)}$  von Trapezform. Andernfalls können wir durch Vertauschen der zweiten bis  $m$ -ten Zeile und Vertauschen der zweiten bis  $n$ -ten Spalte eine Matrix  $\mathfrak{A}^{(3)}$  konstruieren, für die  $a_{22}^{(3)} \neq 0$  gilt. Analog zu oben kann man durch Addition gewisser Vielfacher der zweiten Zeile zu den darunterstehenden eine Matrix  $\mathfrak{A}^{(4)}$  der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(4)} & a_{12}^{(4)} & \dots & a_{1n}^{(4)} \\ 0 & a_{22}^{(4)} & \dots & a_{2n}^{(4)} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n}^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn}^{(4)} \end{pmatrix}$$

erhalten, usw.

Nach endlich vielen Schritten haben wir auf diese Weise eine Matrix in Trapezform konstruiert. ■

Analog zu den Vereinbarungen über Determinantenumformungen, werden wir bei konkreten Rangbestimmungen die rangäquivalenten Umformungen durch Pfeile angeben.

**Beispiel**

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Zeilen-vert.}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Zeilen-vert.}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 5$$

Für spätere Überlegungen benötigen wir noch den

**Satz 3.3.3** Seien  $\mathfrak{A} \in K_r^{m \times m}$ ,  $\mathfrak{B} \in K_r^{m \times n}$  und  $\mathfrak{C} \in K_r^{n \times n}$ . Dann gilt

$$\text{rg } \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = \text{rg } \mathfrak{B}.$$

*Beweis.* Wegen Satz 3.3.1 ist unsere Behauptung offenbar richtig, wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  Additionsmatrizen sind.

Außerdem lässt sich jede reguläre  $(n, n)$ -Matrix durch Multiplikation mit Additionsmatrizen in eine Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

mit  $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n \neq 0$  überführen, wobei die Multiplikationen entweder nur von links oder nur von rechts ausgeführt werden können (Beweis: ÜA). Speziell existieren für die Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  gewisse Additionsmatrizen  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_t$  mit

$$\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_s \cdot \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}_{s+1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_t = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Nach dem oben Bemerkten gilt dann  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = \operatorname{rg} \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_s \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}_{s+1} \cdot \mathfrak{D}_{s+2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_t$ .

Man rechnet nun leicht nach, daß, falls  $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{m,n}$ ,

$$\mathfrak{D}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_s \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}_{s+1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_t = \begin{pmatrix} a_1 c_1 b_{11} & a_1 c_2 b_{12} & \dots & a_1 c_n b_{1n} \\ a_2 c_1 b_{21} & a_2 c_2 b_{22} & \dots & a_2 c_n b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m c_1 b_{m1} & a_m c_2 b_{m2} & \dots & a_m c_n b_{mn} \end{pmatrix}$$

gilt. Unsere Behauptung folgt hieraus unter Berufung auf Satz 3.3.1, (2). ■

### 3.4 Lösbarkeitskriterien und Lösungsverfahren für LGS

Wir betrachten nachfolgend ein spezielles LGS der Form (\*\*), von dem wir leicht feststellen werden, unter welchen Bedingungen es lösbar und wie die Menge der Lösungen beschreibbar ist. Anschließend wird gezeigt, daß man jedes LGS der Form (\*) durch gewisse Umformungen auf eines der Form (\*\*) bringen kann, ohne daß sich die Lösbarkeitsbedingungen und die Lösungsmenge ändern.

Es sei

$$\begin{array}{lllll} x_1 & + c_{1,r+1}x_{r+1} & + \dots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 & + c_{2,r+1}x_{r+1} & + \dots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \dots & & & & \\ x_r & + c_{r,r+1}x_{r+1} & + \dots + c_{rn}x_n & = & d_r \\ & & & 0 & = d_{r+1} \\ \dots & & & & \\ & & & 0 & = d_m, \end{array} \quad (**)$$

wobei die Koeffizienten  $c_{ij}$  und die Absolutglieder  $d_i$  aus  $K$  sind. Die Matrizendarstellung von (\*\*\*) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

bzw. kurz

$$\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{d}.$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{d} \text{ hat L\"osungen} &\iff d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0 \\ &\iff \operatorname{rg} \mathfrak{C} = r = \operatorname{rg} (\mathfrak{C}, \mathfrak{d}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{x} \text{ hat keine L\"osungen} &\iff \exists i \geq r+1 : d_i \neq 0 \\ &\iff \operatorname{rg} \mathfrak{C} < \operatorname{rg} (\mathfrak{C}, \mathfrak{d}). \end{aligned}$$

Falls  $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$  ist, kann man bei Belegung der Variablen  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  mit beliebigen Werten  $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$  aus  $K$  wegen

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n \\ x_2 &= d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2n}x_n \\ \dots &\dots \\ x_r &= d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n \end{aligned}$$

stets eine L\"osung berechnen. Die Menge der L\"osungen von (\*\*\*)) l\"asst sich damit in Matrizenschreibweise wie folgt angeben:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \middle| \exists t_1, \dots, t_{n-r} \in K : \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} d_1 - c_{1,r+1}t_1 - \dots - c_{1n}t_{n-r} \\ d_2 - c_{2,r+1}t_1 - \dots - c_{2n}t_{n-r} \\ \vdots \\ d_r - c_{r,r+1}t_1 - \dots - c_{rn}t_{n-r} \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{array} \right) \right\}.$$

Mittels unserer Matrizenoperationen ist eine L\"osung  $\mathfrak{x}$  aber auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-r} \cdot \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$=: \mathfrak{x}$        $=: \mathfrak{x}_0$        $=: \mathfrak{x}_1$        $=: \mathfrak{x}_2$        $=: \mathfrak{x}_{n-r}$

(„allgemeine Lösung von (\*\*) in Matrizenform“)

aufschreibbar. Offenbar ist  $\mathfrak{x}_0$  dabei eine spezielle Lösung von (\*\*) und  $t_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \dots + t_{n-r} \cdot \mathfrak{x}_{n-r}$  die allgemeine Lösung von  $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , wobei  $\mathfrak{o}^T := (0, 0, \dots, 0)$ . Diesen Aufbau einer Lösung eines LGS hatten wir uns übrigens schon in den Sätzen 3.2.9–3.2.11 überlegt.

**Beispiel** Für das LGS

$$\begin{array}{rcrccl} x_1 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \end{array}$$

lautet die allgemeine Lösung in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

**Definition** Zwei LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}'$  mit  $n$  Unbekannten über dem Körper K heißen **äquivalent** (Schreibweise:  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \longleftrightarrow \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}'$ ), wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Speziell sind alle lösungslosen LGS mit  $n$  Unbekannten untereinander äquivalent.

**Satz 3.4.1** Folgende Umformungen eines LGS (\*) überführen (\*) in ein zu (\*) äquivalentes:

- (1) Vertauschen zweier Gleichungen;
- (2) Ändern der Reihenfolge der Summanden in den Gleichungen;
- (3) Multiplikation einer Gleichung von (\*) mit einem Faktor  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ;
- (4) Addition des  $\lambda$ -fachen einer Gleichung von (\*) zu einer anderen Gleichung von (\*).

*Beweis.* Erhält man das LGS (\*) aus dem LGS (\*) mittels der Umformungen (1)–(4), so ist offenbar auch (\*) aus (\*) durch (1)–(4) konstruierbar. Damit ist jede Lösung von (\*) auch eine von (\*) und umgekehrt. ■

**Satz 3.4.2** Jedes LGS (\*) lässt sich durch Anwenden der Umformungen (1)–(4) (siehe Satz 3.4.1) in ein zu (\*) äquivalentes der Form (\*\*) überführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ir} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix},$$

wobei  $\{x_{i1}, \dots, x_{in}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$  ist.

*Beweis.* Zum Beweis geben wir den sogenannten

„Gauß-Algorithmus“<sup>7</sup>

an, mit dem man jedes LGS (\*) in ein dazu äquivalentes der Form (\*\*) überführen kann. Die Grundidee dieses Verfahrens ist sehr alt. Schon chinesische Mathematiker lösten LGS vor 2000 Jahren mit Hilfe des „Gauß-Algorithmus“ (siehe [Jus 64]). Wir werden das LGS (\*) schrittweise in (\*\*) überführen. Die dabei auftretenden „Zwischenglieder“ bezeichnen wir mit

$$(t) : \quad \mathfrak{A}^{(t)} \cdot \mathfrak{x}^{(t)} = \mathfrak{b}^{(t)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(t)} &= (a_{ij}^{(t)})_{m,n}, (\mathfrak{x}^{(t)})^T = (x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}) \\ (\{x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}\}) &= \{x_1, \dots, x_n\} \text{ und} \\ (\mathfrak{b}^{(t)})^T &= (b_1^{(t)}, \dots, b_m^{(t)}), \\ t &= 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

**1. Schritt:** Durch Umordnen der Gleichungen und Ändern der Reihenfolge der Summanden in den Gleichungen überführen wir (\*) in das LGS (1):  $\mathfrak{A}^{(1)} \cdot \mathfrak{x}^{(1)} = \mathfrak{b}^{(1)}$  mit  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ .

**2. Schritt:** Wir addieren das  $-a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ -fache der ersten Gleichung von (1) zur zweiten Gleichung, dann das  $-a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ -fache der ersten Gleichung zur dritten Gleichung von (1), usw. Allgemein wird zur  $i$ -ten Zeile das  $-a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ -fache der ersten Zeile von (1) addiert,  $i = 2, \dots, m$ .

Wir erhalten dann das LGS (2):

<sup>7</sup> Carl Friedrich Gauß (1777–1855), einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, außerdem Astronom, Geodät und Physiker.

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1^{(1)} + a_{12}^{(1)}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n^{(1)} &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2^{(1)} + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n^{(1)} &= b_2^{(2)} \\
a_{32}^{(2)}x_2^{(1)} + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n^{(1)} &= b_3^{(2)} \\
&\dots + \dots = \dots \\
a_{m2}^{(2)}x_2^{(1)} + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n^{(1)} &= b_m^{(2)}.
\end{aligned}$$

**3. Schritt:** Durch Umordnen der Summanden, die  $x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$  enthalten, und Ändern der Reihenfolge der zweiten bis  $m$ -ten Gleichung bilden wir aus (2) das LGS (3) mit  $a_{22}^{(3)} \neq 0$ . Ist dies nicht möglich, haben wir nach Division der ersten Gleichung durch  $a_{11}^{(1)}$  schon (\*\*) erhalten.

**4. Schritt:** Für  $i \in \{1, 3, 4, \dots, m\}$  addieren wir das  $-a_{i2}^{(3)}/a_{22}^{(3)}$ -fache der zweiten Gleichung von (3) zur  $i$ -ten Gleichung.

Ergebnis dieser  $m - 1$  Umformungen ist das LGS (4):

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1^{(1)} + a_{13}^{(4)}x_2^{(3)} + \dots + a_{1n}^{(4)}x_n^{(3)} &= b_1^{(4)} \\
a_{22}^{(3)}x_2^{(3)} + a_{23}^{(3)}x_2^{(3)} + \dots + a_{2n}^{(3)}x_n^{(3)} &= b_2^{(3)} \\
a_{33}^{(4)}x_3^{(3)} + \dots + a_{3n}^{(4)}x_n^{(3)} &= b_3^{(4)} \\
&\dots + \dots = \dots \\
a_{m3}^{(4)}x_3^{(3)} + \dots + a_{mn}^{(4)}x_n^{(3)} &= b_m^{(4)}.
\end{aligned}$$

usw.

Nach einer gewissen Anzahl von Schritten bricht unser Verfahren ab und wir erhalten ein zu (\*) äquivalentes LGS der Form

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(s)}x_1^{(s)} + a_{1,r+1}^{(s)}x_{r+1}^{(s)} + \dots + a_{1n}^{(s)}x_n^{(s)} &= b_1^{(s)} \\
a_{2,r+1}^{(s)}x_{r+1}^{(s)} + \dots + a_{2n}^{(s)}x_n^{(s)} &= b_2^{(s)} \\
&\dots + \dots = \dots \\
a_{rr}^{(s)}x_r^{(s)} + a_{r,r+1}^{(s)}x_{r+1}^{(s)} + \dots + a_{rn}^{(s)}x_n^{(s)} &= b_r^{(s)} \\
0 &= b_{r+1}^{(s)} \\
&\vdots \\
0 &= b_m^{(s)}.
\end{aligned}$$

Dividiert man nun die  $i$ -te Gleichung durch  $a_{ii}^{(s)}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , so geht unser obiges LGS in eins der Form (\*\*) über. ■

**Beispiel** Das LGS

$$\begin{array}{rcl}
x_2 - x_3 &=& 1 \\
x_1 + 2x_3 &=& 2 \\
x_2 + x_3 &=& 0
\end{array}$$

kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus wie folgt lösen:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & - & x_3 = 1 \\ x_2 & + & x_3 = 0 \\ x_1 & + & 2x_3 = 2 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} x_2 & - & x_3 = 1 \\ & 2x_3 = -1 \\ x_1 & + & 2x_3 = 2 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} x_2 & - & x_3 = 1 \\ x_1 & + & 2x_3 = 2 \\ & q2x_3 = -1 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1/2 \\ x_1 & = & 3 \\ x_3 & = & -1/2. \end{array}$$


---

Da sich bei den einzelnen Schritten des Gauß-Algorithmus nur die Koeffizienten der Variablen und die Absolutglieder ändern, würde es völlig genügen, nur mit ihnen zu rechnen. Zwecks „Schreibökonomie“ werden wir deshalb ein LGS durch Umformen seiner Systemmatrix lösen. Genauer:

Wir überführen die Systemmatrix  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$  von (\*) mittels der Umformungen

- (1) Vertauschen von Zeilen,
- (2) Vertauschen von Spalten (ungleich der letzten Spalte!),
- (3) Multiplikation einer Zeile mit Faktor  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ,
- (4) Addition des  $\lambda$ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,  $\lambda \in K$

in eine Matrix der Form

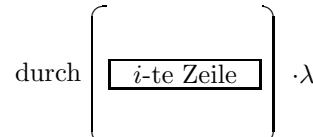
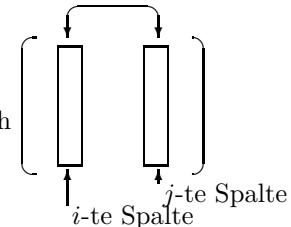
$$\left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array} \right),$$

die Systemmatrix eines zu (\*) äquivalenten LGS des Typs (\*) ist. Dabei haben wir uns natürlich die Spaltenvertauschungen zu notieren, da sie eine andere Reihenfolge der Variablen im System (\*\*) bewirken.

Wir vereinbaren, die Umformungen

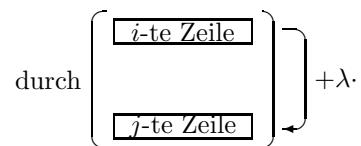
- Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Zeile      durch 

- Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Spalte



und

- Addition des  $\lambda$ -fachen der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile



an den Matrizen kenntlich zu machen. Nach erfolgten Spaltenvertauschungen notieren wir uns über der ersten Zeile der Matrix die neue Reihenfolge der Variablen.

Unser obiges Beispiel zum Gauß-Algorithmus würde dann in dieser Kurzschreibweise wie folgt aussehen:

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{x_2 \ x_1 \ x_3} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xleftrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xleftrightarrow{\quad}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{-} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xleftrightarrow{+ \frac{1}{2} \cdot} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xleftrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Aus der letzten Matrix lässt sich dann (unter Beachtung der vorgenommenen Spaltenvertauschung) die Lösung ablesen:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

### Weitere Beispiele

(1.)

$$\begin{aligned} x_1 &- x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 &+ x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-} \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \leftrightarrow \\
 \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+3\cdot} \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-} \leftrightarrow \\
 \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 \quad - 2x_5 = 1 \\ x_2 \quad - 4x_5 = 1 \\ x_3 \quad - x_5 = 0 \\ x_4 \quad + 2x_5 = 0 \end{array}
 \end{array}$$

Wählt man  $x_5 = t \in \mathbb{R}$  beliebig, so erhält man die allgemeine Lösung des LGS in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2.) Die LGS

$$(1) : \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 & - & x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 & + & x_4 = 2 \end{array}$$

und

$$(2) : \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_2 & - & x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 & + & x_4 = 0 \end{array}$$

haben gleiche Koeffizientenmatrizen. Es bietet sich an, (1) und (2) gleichzeitig zu lösen:

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-} \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{-2\cdot} \leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow[-]{\quad + \quad} \leftrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

Aus der letzten Matrix sind die allgemeinen Lösungen von (1) und (2) ablesbar. Wählt man  $x_4 = t \in \mathbb{R}$  beliebig, so ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine allgemeine Lösung von (1) und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine allgemeine Lösung von (2).

Die aus diesem Beispiel ablesbare Methode zum gleichzeitigen Lösen mehrerer LGS mit gleicher Koeffizientenmatrix werden wir nachfolgend bei der Berechnung inverser Matrizen heranziehen. Zunächst jedoch noch einige **Bemerkungen** zum Gauß-Algorithmus:

- (1.) Zum Berechnen der Lösungen eines LGS (\*) hätte es völlig genügt, die Systemmatrix  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$  mittels der Umformungen (1)–(4) aus Satz 3.4.1 in eine Matrix von Trapezform zu überführen, da man aus einem LGS der Form

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{33}x_3 + \dots + a_{3r}x_r + a_{3,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n &= b_r
\end{aligned}$$

mit  $a_{11} \dots a_{rr} \neq 0$  durch Wahl von  $x_{r+1} = t_1, x_{r+2} = t_2, \dots, x_n = t_{n-r}$  aus der letzten Gleichung  $x_r$  berechnen kann, dann durch Einsetzen der berechneten Werte für  $x_r, \dots, x_n$  in die vorletzte Gleichung  $x_{r-1}$  ermitteln kann, usw.

- (2.) Der Gauß-Algorithmus liefert i.allg. nicht eine eindeutig bestimmte Systemmatrix eines LGS der Form (\*\*), womit bei unterschiedlicher Abfolge der Einzelschritte sich auch unterschiedliche allgemeine Lösungen ergeben können. Bei richtiger Rechnung sind jedoch die durch die allgemeinen Lösungen bestimmten Lösungsmengen gleich.

- (3.) Bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus hat man mehrmals gewisse Koeffizienten  $\neq 0$  auszuwählen, die sogenannten **Pivotelemente**. Die Wahl des Pivotelements in einem gewissen Schritt des Gauß-Algorithmus ist vom theoretischen Standpunkt aus gesehen gleichgültig, vom praktischen Standpunkt aus aber sehr wichtig, weil eine unzweckmäßige Wahl des Pivotelements durch Rundungsfehler zu großen Fehlern beim Lösen des LGS führen kann. Beispiele dazu findet man im Teil III, wo auch Näherungsverfahren zum Lösen von LGS behandelt werden.

Wie schon angekündigt, wollen wir uns anschließend überlegen, wie man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (unter Umgehung der Formel für die inversen Matrizen) aus dem Beweis von Satz 3.2.4 zu einer  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  ihre inverse Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$  berechnen kann, falls  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ . Im Beweis von Satz 3.2.4 hatten wir gezeigt, daß die  $j$ -te Spalte von  $\mathfrak{A}^{-1}$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_j = \mathfrak{e}_j$  mit  $\mathfrak{e}_j^T = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{\scriptsize{j-te Stelle}}, 0, \dots, 0})$  ist,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Zur Berechnung von  $\mathfrak{A}^{-1}$  hat man also  $n$  LGS mit gleicher Koeffizientenmatrix zu lösen. Dies kann gleichzeitig geschehen, indem man die Matrix  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}_n)$  durch den Gauß-Algorithmus in eine der Form  $(\mathfrak{E}_n, \mathfrak{B})$  überführt. Also gilt der

**Satz 3.4.3** Sei  $\mathfrak{A} \in K_r^{n \times n}$ . Erhält man aus der Matrix  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}_n)$  durch Anwenden der Umformungen

- (1) Vertauschen von Zeilen,
- (2) Vertauschen der ersten  $n$  Spalten,
- (3) Multiplikation einer Zeile mit Faktor  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ,
- (4) Addieren von  $\lambda$ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,  $\lambda \in K$ ,

eine Matrix der Form  $(\mathfrak{E}_n, \mathfrak{B})$ , so ist, falls nur die Umformungen der Art (1), (3) und (4) vorgenommen wurden,  $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}$  und, falls auch (2) verwendet wurde,  $\mathfrak{A}^{-1}$  aus  $\mathfrak{B}$  durch Vertauschen entsprechender Zeilen zu erhalten. Genauer: Wurde die  $r$ -te Spalte bei der Überführung von  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}_n)$  in  $(\mathfrak{E}_n, \mathfrak{B})$  auf den Platz der  $s$ -ten Spalte gesetzt (wurde also in den Gleichungssystemen eine Umordnung der Summanden vorgenommen), so ist die  $s$ -te Zeile von  $\mathfrak{B}$  die  $r$ -te Zeile von  $\mathfrak{A}^{-1}$ . ■

## Beispiele

- (1.) Die zu

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - \frac{1}{4} \cdot \\
 &\leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) - 2 \cdot \\
 &\leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{array} \right) = (\mathfrak{E}_3, \mathfrak{B})
 \end{aligned}$$

Da wir zu Beginn der Rechnung die erste mit der dritten Spalte vertauscht hatten, erhalten wir aus  $\mathfrak{B}$  durch Vertauschen der ersten mit der dritten Zeile  $\mathfrak{A}^{-1}$ :

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2.) Sei

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aus  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}_4)$  erhält man durch Umordnen der Spalten ( $3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4$ ):

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{-\frac{1}{3}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{2}{3}} \\
 &\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{:3}
 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{array} \right) = (\mathfrak{E}_4, \mathfrak{B})$$

Mittels Zeilenumordnung (1 → 3, 2 → 2, 3 → 4, 4 → 1) ergibt sich hieraus:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4/9 & 1/3 \\ 0 & 1 & 8/9 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/9 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun zu einem Lösbarkeitskriterium für LGS.

**Satz 3.4.4** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathfrak{b} \in K^{m \times 1}$  und  $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Dann gilt

- (1)  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  besitzt eine Lösung  $\mathfrak{x} \iff \text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ ;
- (2)  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  besitzt keine Lösung  $\mathfrak{x} \iff \text{rg } \mathfrak{A} < \text{rg } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ ;
- (3) Es sei  $\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) =: r$ ,  $L$  die Menge der Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $L_0$  die Menge der Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ( $\mathfrak{o} := (0, 0, \dots, 0)^T$ ). Dann existieren ein  $\mathfrak{x}_0 \in L$  und gewisse  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{n-r}$  aus  $L_0$  mit den Eigenschaften

$$\text{rg}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{n-r}) = n - r$$

(d.h., die  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{n-r}$  sind linear unabhängig (siehe Satz 4.3.1, (a)) und

$$\begin{aligned} L &= \{\mathfrak{x} \mid \exists t_1, \dots, t_{n-r} \in K : \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \dots + t_{n-r} \cdot \mathfrak{x}_{n-r}\} \\ &= \mathfrak{x}_0 + L_0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Da man jedes LGS (\*) mittels des Gauß-Algorithmus in ein zu (\*) äquivalentes der Form (\*\*) überführen kann, wobei sich nach Satz 3.3.1 die Ränge der Koeffizienten- und der Systemmatrix nicht ändern, folgen (1) und (2) aus unseren Überlegungen zur Lösbarkeit von (\*\*) zu Beginn dieses Kapitels.

(3) ergibt sich aus dem Gauß-Algorithmus und den Eigenschaften der LGS des Typs (\*\*). ■

Leicht zu begründende Folgerungen aus Satz 3.4.4 sind zusammengefaßt im

**Satz 3.4.5**

- (1) Das LGS (\*) hat genau eine Lösung, wenn  $\text{rg } \mathfrak{A} = n$  ( $n$  ist dabei die Anzahl der Unbekannten).
- (2) Das LGS (\*) mit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$  besitzt nur die triviale Lösung  $\mathfrak{o}$ , wenn  $\text{rg } \mathfrak{A} = n$ .
- (3) Ist  $K$  ein endlicher Körper, so hat das LGS (\*) mit  $\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) =: r$  genau  $|K|^{n-r}$  verschiedene Lösungen.
- (4) Falls  $\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) < n$  und  $K$  ein unendlicher Körper ist, so besitzt (\*) unendlich viele Lösungen. ■

Unter Verwendung der Bezeichnungen aus dem nachfolgenden Kapitel 4 ist eine weitere Folgerung aus 3.4.4:

**Satz 3.4.6** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  und  $\mathfrak{x} \in K^{n \times 1}$ . Dann ist die Menge aller Lösungen  $\mathfrak{x}$  des homogenen LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ein Untervektorraum des  $K$ -Vektorraums  $K^{n \times 1}$  der Dimension  $n - \text{rg } \mathfrak{A}$ . ■

Die Zusammenhänge zwischen affinen Räumen und LGS entnehme man Satz 5.3.2.

Abschließend noch zwei **Beispiele** zu Anwendungen von Satz 3.4.4, (1), (2):

(1.) Hat das LGS

$$\begin{array}{rccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

Lösungen?

Mittels rangäquivalenter Umformungen bringen wir die Systemmatrix des LGS auf Trapezform:

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) &\stackrel{\text{Spaltenvert.}}{=} \text{rg} \left( \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot \text{Zeile } 1} \text{rg} \left( \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &= \text{rg} \left( \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{+ \text{Zeile } 3} \text{rg} \left( \begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = 4 \end{aligned}$$

Aus unseren Rechnungen ist außerdem  $\text{rg } \mathfrak{A} = 3$  ablesbar. Folglich hat unser LGS keine Lösungen.

(2.) Wie sind  $a, b \in \mathbb{R}$  zu wählen, damit das LGS

$$\begin{array}{rcl} x + y - z & = & -1 \\ -x & + z & = 0 \\ a \cdot x + y + z & = & b \end{array}$$

genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen bzw. keine Lösung besitzt?

Zur Beantwortung dieser Frage bringen wir zunächst die Systemmatrix des LGS auf Trapezform:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{-a \cdot} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-a & 1+a & b+a \end{array} \right) \xrightarrow{-(1-a) \cdot} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1+a & b+1 \end{array} \right)$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \begin{cases} 2, & \text{falls } a = -1, \\ 3, & \text{falls } a \neq -1 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{rg} (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} 2, & \text{falls } a = -1 \text{ und } b = -1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit hat das LGS

- genau eine Lösung für  $a \neq -1$ ,
- unendlich viele Lösungen für  $a = -1$  und  $b = -1$   
und
- keine Lösung, falls  $a = -1$  und  $b \neq -1$ .

## Vektorräume über einem Körper $K$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer der zentralen Strukturen der linearen Algebra vertraut machen, mit der Vektorraumstruktur, für die es eine Vielzahl von interessanten Anwendungen gibt, auf die wir dann in den nachfolgenden Abschnitten eingehen werden. Dabei wird sich herausstellen, daß der Vektorraumbegriff ein einfacher und vereinheitlichender Grundbegriff der Algebra, Analysis, Geometrie und mathematischen Physik ist.

### 4.1 Die Definition eines Vektorraums über $K$ , Beispiele

Sei  $K$  nachfolgend stets ein Körper, für den wir die gleichen Vereinbarungen treffen wollen wie im Kapitel 3.

**Definition** Eine Menge  $V$  heißt **Vektorraum** (abgekürzt: VR) **über dem Körper**  $K = (K; +, \cdot)$  und ihre Elemente **Vektoren**, wenn auf  $V$

eine innere Verknüpfung  $+ : V \times V \rightarrow V$  („Addition“)

und

eine äußere Verknüpfung  $\cdot : K \times V \rightarrow V$  („Multiplikation mit Skalar“)

definiert sind, so daß folgendes gilt:

- (V1)  $(V; +)$  ist eine abelsche Gruppe.
- (V2) Für beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$  und beliebige  $a, b \in K$  gilt
  - (a)  $1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$
  - (b)  $a \cdot (b \cdot \mathfrak{a}) = (a \cdot b) \cdot \mathfrak{a}$
  - (c)  $(a + b) \cdot \mathfrak{a} = a \cdot \mathfrak{a} + b \cdot \mathfrak{a}$
  - (d)  $a \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = a \cdot \mathfrak{a} + a \cdot \mathfrak{b}$ .

#### Bezeichnungen

Anstelle von „ $V$  ist Vektorraum über  $K$ “ sagen wir auch

„ $V$  ist  $K$ -Vektorraum“ und schreiben  $_KV$ .

Bezeichnungen für Vektoren sind in der Regel:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{o}, \dots .$$

Das neutrale Element von  $(V; +)$  sei  $\mathfrak{o}$ .

Das zu  $\mathfrak{x} \in V$  inverse Element bez.  $+$  bezeichnen wir mit  $-\mathfrak{x}$ .

Außerdem sei  $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} := \mathfrak{x} + (-\mathfrak{y})$  für beliebige  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ .

Sind  $x_1, \dots, x_r \in K$  und  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r \in V$ , so nennen wir

$$x_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{x}_2 + \dots + x_r \cdot \mathfrak{x}_r$$

eine **Linearkombination** (abgekürzt: LK) der Vektoren  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$ .

Gilt  $\mathfrak{b} = x_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \dots + x_r \cdot \mathfrak{x}_r$ , so sagt man

„ $\mathfrak{b}$  ist eine Linearkombination der Vektoren  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$ “

bzw. „ $\mathfrak{b}$  ist linear abhängig von  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$ “.

**Beispiele** für Vektorräume:

- (1.) Jeder Körper  $K$  ist selbst Vektorraum über  $K$ .
- (2.) Nach Satz 3.2.1 und Satz 3.2.8, (1)–(4) bildet die Menge  $K^{m \times n}$  mit der Matrizenaddition und der für Matrizen definierten Multiplikation mit Skalar einen VR über  $K$ .  
Wir werden später sehen, daß insbesondere der VR  $K^{n \times 1}$  „repräsentativ“ für sogenannte  $n$ -dimensionale VRe über  $K$  ist.
- (3.) Sei  $\mathfrak{P}_n$  die Menge aller Abbildungen  $f$  von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , die durch Formeln der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$  beschrieben werden können.  $\mathfrak{P}_n$  ist also die Menge aller sogenannten **Polynome**, deren Grad höchstens  $n$  ist (siehe dazu auch Abschnitt 8.2). Auf der Menge  $\mathfrak{P}_n$  lassen sich eine Addition und eine Multiplikation mit Skalar (aus  $\mathbb{R}$ ) wie folgt erklären: Für  $f(x) := \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$  und  $g(x) := \sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i$  seien

$$(f + g)(x) := \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) \cdot x^i$$

und

$$(c \cdot f)(x) := \sum_{i=0}^n (c \cdot a_i) \cdot x^i,$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$ .

Man prüft nun leicht nach, daß  $\mathfrak{P}_n$  zusammen mit den eben definierten Operationen einen VR über  $\mathbb{R}$  bildet.

Indem man die Koeffizienten der Polynome nur aus  $\mathbb{Q}$  oder aus  $\mathbb{C}$  wählt, erhält man analog zu oben auch VRe über  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{C}$ . Der VR  $\mathfrak{P}_n$  läßt sich aber auch noch auf eine andere Weise verallgemeinern. Bekanntlich

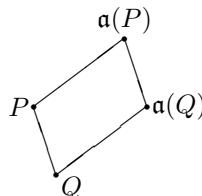
ist die Summe zweier stetiger Funktionen<sup>1</sup> über einem gewissen Intervall  $[a, b]$  und auch das  $\lambda$ -fache einer stetigen Funktion wieder eine stetige Funktion,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Damit ist die Menge

$$C[a, b]$$

aller stetigen Funktionen, die den Definitionsbereich  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  haben, zusammen mit den auf natürliche Weise erklärt Addition und Multiplikation mit Skalar ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Anstelle des Intervalls  $[a, b]$  hätten wir auch die im Abschnitt 1.2 definierten Intervalle  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  oder  $(a, b)$  wählen können.

Nun jedoch noch eine kurze Wiederholung der aus der Schule her bekannten Vektorräume.

- (4.) Bezeichne  $\mathfrak{R}_2$  die 2-dimensionale euklidische Ebene („Anschaugsebene“) und  $\mathfrak{R}_3$  den 3-dimensionalen euklidischen Raum („Anschaungsraum“). Wir meinen damit eine Ebene bzw. Raum, in dem man wie Euklid, also so wie in der Schule gelernt, Geometrie betreiben kann. Die Elemente von  $\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_3$  nennen wir üblicherweise **Punkte**. In vielen Fällen macht es keinen Unterschied, ob man Geometrie in der Ebene oder im Raum betreibt bzw. vorgenommene Überlegungen laufen analog ab. Tritt eine solche Situation auf, schreiben wir anstelle von  $\mathfrak{R}_2$  bzw.  $\mathfrak{R}_3$  nur  $\mathfrak{R}$ . Eine **Verschiebung** (auch **Vektor** genannt) von  $\mathfrak{R}$  ist entweder die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathfrak{R}}$  (nachfolgend auch mit  $\sigma$  bezeichnet) oder eine sogenannte **Parallelverschiebung** von  $\mathfrak{R}$  auf  $\mathfrak{R}$ , d.h., eine bijektive Abbildung  $\alpha$  von  $\mathfrak{R}$  auf  $\mathfrak{R}$ , für die für beliebige Punkte  $P, Q \in \mathfrak{R}$  gilt: Die Punkte  $P, \alpha(P), \alpha(Q)$  und  $Q$  sind die Eckpunkte eines Parallelogramms:



Die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathfrak{R}}$  nennt man auch **Nullvektor**.

Eine Parallelverschiebung ist offenbar vollständig bestimmt, wenn man zu irgendeinem Punkt  $P$  den Bildpunkt  $\alpha(P)$  kennt. Geometrisch würde also eine Zeichnung der Art



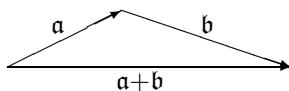

---

<sup>1</sup> Den Begriff „stetige Funktion“ setzen wir hier als bekannt voraus.

(**Repräsentant** von  $\mathfrak{a}$  genannt) zur Charakterisierung von  $\mathfrak{a}$  genügen. Die Länge eines Repräsentanten von  $\mathfrak{a}$  nennt man **Betrag** von  $\mathfrak{a}$  und bezeichnet sie mit  $|\mathfrak{a}|$ . Als Länge (Betrag) des Nullvektors sei 0 festgelegt. Identifiziert man eine Parallelverschiebung mit ihrem Repräsentanten (stellt man also Parallelverschiebungen durch Pfeile dar), so hat man natürlich Pfeile als gleich anzusehen, wenn sie gleichen Betrag, gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn (Orientierung) besitzen. Haben die Repräsentanten zweier Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  die gleiche Richtung (d.h., liegen die Repräsentanten von  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  auf parallelen Geraden), so schreiben wir  $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ . Liegt neben gleicher Richtung auch gleiche Orientierung vor, so verwenden wir die Schreibweise  $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$ . Ist die Orientierung entgegengesetzt, so geben wir das durch  $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$  an.

Die Menge aller Verschiebungen der Ebene  $\mathfrak{R}_2$  sei mit  $\vec{V}_2$  und die Menge aller Verschiebungen des Raumes  $\mathfrak{R}_3$  mit  $\vec{V}_3$  bezeichnet. Außerdem sei  $\vec{V} \in \{\vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ .  $\vec{V}$  ist ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$  (Beweis: ÜA), wenn man für die Verschiebungen eine Addition + und eine Multiplikation · mit Skalar wie folgt festlegt:

- + sei unsere wohlbekannte Hintereinanderausführung  $\square$  von Abbildungen, die sich unter Verwendung von Repräsentanten auch kurz durch



beschreiben lässt.

- Die Multiplikation einer Verschiebung  $\mathfrak{a}$  mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist durch folgende Forderungen eindeutig festgelegt:

$$|\lambda \cdot \mathfrak{a}| := |\lambda| \cdot |\mathfrak{a}| \text{ und } \lambda \cdot \mathfrak{a} \begin{cases} = \mathfrak{o}, & \text{falls } \lambda = 0, \\ \uparrow\uparrow \mathfrak{a}, & \text{falls } \lambda > 0, \\ \uparrow\downarrow \mathfrak{a}, & \text{falls } \lambda < 0. \end{cases}$$

(Auf die Repräsentanten bezogen, ist die Multiplikation mit Skalar nichts anderes als eine Streckung oder Stauchung des Repräsentanten mit eventueller Umorientierung.)

Der nächste Satz gibt einige einfache Rechenregeln an, die sich aus den Vektorraumaxiomen ergeben und die wir nachfolgend oft benutzen werden.

**Satz 4.1.1** Sei  $KV$  Vektorraum. Dann gilt für beliebige  $\mathfrak{a} \in V$  und beliebige  $\lambda \in K$ :

- $0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ,
- $\lambda \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ ,
- $\lambda \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \iff \lambda = 0 \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ,
- $-\mathfrak{a} = (-1) \cdot \mathfrak{a}$ .

*Beweis.* Anhand der Vektorraumaxiome und der Eigenschaften von Gruppen prüft man leicht die Richtigkeit folgender Äquivalenzen und Gleichungen nach:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathfrak{a} &= (0 + 0) \cdot \mathfrak{a} = 0 \cdot \mathfrak{a} + 0 \cdot \mathfrak{a} \implies 0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \\ \lambda \cdot \mathfrak{o} &= \lambda \cdot (\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) = \lambda \cdot \mathfrak{o} + \lambda \cdot \mathfrak{o} \implies \lambda \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}. \end{aligned}$$

Also gilt (a) und (b), womit auch „ $\Leftarrow$ “ von (c) richtig ist. Hat man  $\lambda \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$  und  $\lambda \neq 0$ , so existiert  $\lambda^{-1}$  und es gilt  $\mathfrak{a} = 1 \cdot \mathfrak{a} = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot \mathfrak{a} = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \lambda^{-1} \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ , womit „ $\Rightarrow$ “ von (c) bewiesen wurde.

(d) folgt aus

$$\mathfrak{a} + (-1) \cdot \mathfrak{a} = 1 \cdot \mathfrak{a} + (-1) \cdot \mathfrak{a} = (1 + (-1)) \cdot \mathfrak{a} = 0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

■

## 4.2 Untervektorräume

**Definition** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U$  eine Teilmenge von  $V$ . Dann heißt  $U$  **Untervektorraum** von  $V$ , falls  $U$  zusammen mit den Verknüpfungen von  $V$ , die auf die Elemente von  $U$  beschränkt sind, einen  $K$ -Vektorraum bildet.

Anstelle von Untervektorraum schreiben wir oft auch kurz UVR.

Vor Beispielen zunächst der

**Satz 4.2.1** Es sei  $U \subseteq {}_K V$  und  $U \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \text{ ist UVR von } V &\iff (\forall a, b \in K \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U : a \cdot \mathfrak{a} + b \cdot \mathfrak{b} \in U) \\ &\iff (\forall a \in K \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U : a \cdot \mathfrak{a} \in U \wedge \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in U). \end{aligned}$$

*Beweis.* Den Beweis führt man leicht mit Hilfe von Satz 2.2.7 (ÜA). ■

**Beispiele** für UVRe:

- (1.) Jeder VR  ${}_K V$  besitzt stets zwei sogenannte **triviale UVRe**:  $\{\mathfrak{o}\}, V$ .
- (2.) Die Untervektorräume des VRs  $K^{2 \times 1}$  mit  $K = \mathbb{Z}_3$  sind

$$\begin{aligned} U_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ U_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } K^{2 \times 1}. \end{aligned}$$

- (3.) Ist  $V = K^{n \times 1}$  VR über  $K$  und  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$ , so ist die Menge aller Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ein UVR von  $V$  (Beweis: ÜA A.4.1).
- (4.)  $\mathbb{Q}$  ist VR über  $\mathbb{Q}$ . Die Menge  $\mathbb{Z}$  ist zwar eine Untergruppe von  $(\mathbb{Q}; +)$ , jedoch kein UVR von  $\mathbb{Q}$ , da z.B.  $(1/2) \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$ .

- (5.) Die Lösungen eines inhomogenen LGS (\*) bilden keinen UVR von  $K^{n \times 1}$   
(Beweis: ÜA A.4.1).

Als nächstes wollen wir uns überlegen, wie man aus Teilmengen eines Vektorraums oder aus gegebenen Untervektorräumen eines Vektorraums weitere Untervektorräume bilden kann. Dazu die

**Definition** Sei  $M \subseteq {}_K V$ . Die Menge

$$\{\mathfrak{o}\}, \text{ falls } M = \emptyset,$$

$$[M] := \{\mathfrak{x} \mid \exists t \in \mathbb{N} \exists a_1, \dots, a_t \in K \exists \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t \in M : \mathfrak{x} = a_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + a_t \cdot \mathfrak{a}_t\},$$

falls  $M \neq \emptyset$ , heißt **Abschluß** oder **lineare Hülle** von  $M$ .

**Beispiel** Für die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\subseteq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{3 \times 1})$$

gilt

$$[M] = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Elementare Eigenschaften linearer Hüllen, die man leicht nachprüft, faßt der nachfolgende Satz zusammen.

**Satz 4.2.2 (mit Definition)** Seien  $M, M' \subseteq {}_K V$ . Dann gilt:

- (a)  $M \subseteq [M]$ ,
- (b)  $M \subseteq M' \implies [M] \subseteq [M']$ ,
- (c)  $[M] = [[M]]$ .<sup>2</sup>
- (d)  $[M]$  ist UVR von  ${}_K V$  („der von  $M$  aufgespannte UVR“).
- (e)  $M$  ist UVR von  ${}_K V \iff [M] = M$ .
- (f)  $[M] = \bigcap_{U \in \mathfrak{M}} U$ , wobei  $\mathfrak{M}$  die Menge aller UVRe von  ${}_K V$  bezeichnet, die  $M$  enthalten. Mit anderen Worten:  $[M]$  ist der kleinste UVR von  ${}_K V$ , der  $M$  enthält. ■

Ebenfalls leicht beweisbar ist der

**Satz 4.2.3** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U_i$  ( $i \in I$ ) Untervektorräume von  $V$ . Dann ist auch  $\bigcap_{i \in I} U_i$  ein UVR von  $V$ . ■

Der Durchschnitt von UVRen ist also wieder ein UVR. Die Vereinigung von UVRen ist hingegen i.allg. kein UVR, wie folgendes Beispiel zeigt: Wählt man  $V = K^{2 \times 1}$ ,  $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in K \right\}$  und  $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in K \right\}$ , so sind zwar  $U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$ , jedoch ist  $U_1 \cup U_2$  kein UVR, da z.B.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$ , obwohl  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$  gilt.

---

<sup>2</sup> (a)–(c) besagen, daß [...] ein sogenannter Hülleoperator ist (siehe Band 2).

Man erhält jedoch einen UVR, wenn man  $[U_1 \cup U_2]$  bildet. Es ist üblich, einen auf diese Weise gebildeten UVR mit  $U_1 + U_2$  zu bezeichnen. Was man allgemein unter „Summen“ von UVRen zu verstehen hat, wird erläutert in den

**Definitionen** Für UVRe  $U_1, U_2, \dots, U_n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ) sei

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \dots + U_n &:= [U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n] \\ &= \{u_1 + u_2 + \dots + u_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : u_i \in U_i\} \end{aligned}$$

die **Summe** der Untervektorräume  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Anstelle von  $U_1 + \dots + U_n$  verwendet man auch die Schreibweise

$$\sum_{i=1}^n U_i.$$

Außerdem sagt man

$$\begin{aligned} U_1 + \dots + U_n \text{ ist } \mathbf{direkte Summe} \text{ der UVRe } U_1, \dots, U_n &\iff \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : U_i \cap (\sum_{j=1, j \neq i}^n U_j) &= \{\mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Falls die Summe  $U_1 + \dots + U_n$  direkt ist, gibt man diese Eigenschaft auch durch die Schreibweise  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$  (oder  $U_1 + \dots + U_n$ ) an.

**Beispiel** Sei  $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$  VR über  $\mathbb{R}$ . Offenbar ist

$$\left[ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] + \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] \left( = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \right)$$

eine direkte Summe.

Wählt man hingegen

$$U_1 = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right] \text{ und } U_2 = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right],$$

so ist  $U_1 + U_2$  keine direkte Summe, da  $U_2 \subseteq U_1$  (wegen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ).$$

**Satz 4.2.4 (mit Definition)** Läßt sich ein  $K$ -Vektorraum  $V$  als direkte Summe von gewissen UVRen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  darstellen:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n,$$

so existieren für jeden Vektor  $\mathfrak{x} \in V$  eindeutig bestimmte Vektoren  $\mathfrak{x}_i \in U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  (die sogenannten **Projektionen** von  $\mathfrak{x}$  in die UVRe  $U_1, \dots, U_n$ ), mit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \dots + \mathfrak{x}_n.$$

*Beweis.* Angenommen, es gilt für gewisses  $\mathfrak{x} \in V$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \dots + \mathfrak{x}_n, \\ \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{x}'_2 + \dots + \mathfrak{x}'_n, \\ \mathfrak{x}_i &\neq \mathfrak{x}'_i \text{ für ein gewisses } i \in \{1, \dots, n\} \text{ und} \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} : \{\mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}'_j\} &\subseteq U_j.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}'_1) + \dots + (\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}'_n) \text{ und } \mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}'_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n (\underbrace{\mathfrak{x}_j - \mathfrak{x}'_j}_{\in U_j}) \neq \mathfrak{o},$$

womit  $U_1 + \dots + U_n$  keine direkte Summe sein kann, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Das folgende Lemma gibt eine andere Möglichkeit an, direkte Summen von Untervektorräumen zu definieren.

**Lemma 4.2.5** Seien  $U_1, U_2, \dots, U_n$  UVRe eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann ist  $U := U_1 + U_2 + \dots + U_n$  genau dann eine direkte Summe, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\forall \mathfrak{b}_1 \in U_1 \forall \mathfrak{b}_2 \in U_2 \dots \forall \mathfrak{b}_n \in U_n : \\ \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \dots + \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o} \implies \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \dots = \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

*Beweis.* „ $\implies$ “: Sei  $U$  eine direkte Summe und seien  $\mathfrak{b}_i \in U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit  $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \dots + \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$  beliebig gewählt. Da jeder UVR  $U_i$  den Nullvektor enthält und für den Nullvektor  $\mathfrak{o} + \dots + \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$  gilt, folgt  $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{o}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$  aus Satz 4.2.4.

„ $\impliedby$ “: Sei (4.1) erfüllt und  $\mathfrak{b}_i \in U_i \cap (\sum_{j=1, j \neq i}^n U_j)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig gewählt, d.h., es existieren gewisse  $\mathfrak{b}_j \in U_j$  ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) mit  $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_1 + \dots + \mathfrak{b}_{i-1} + \mathfrak{b}_{i+1} + \dots + \mathfrak{b}_n$ . Folglich gilt

$$\underbrace{(-\mathfrak{b}_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(-\mathfrak{b}_{i-1})}_{\in U_{i-1}} + \underbrace{\mathfrak{b}_i}_{\in U_i} + \underbrace{(-\mathfrak{b}_{i+1})}_{\in U_{i+1}} + \dots + \underbrace{(-\mathfrak{b}_n)}_{\in U_n} = \mathfrak{o},$$

woraus sich wegen (4.1) insbesondere  $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{o}$  ergibt. ■

### 4.3 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit

**Definitionen** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t \in V$ . Dann heißen/heißt

- $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t$  linear unabhängig („l.u.“) : $\iff$   
 $x_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + x_t \cdot \mathfrak{a}_t = \mathfrak{o} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0$ .
- $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t\}$  linear unabhängig („l.u.“) : $\iff$   
 $x_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + x_t \cdot \mathfrak{a}_t = \mathfrak{o} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0$ .

- $M(\subseteq V)$  linear unabhängig („l.u.“) : $\iff$  Jede endliche Teilmenge von  $M$  ist linear unabhängig.
- $a_1, \dots, a_t$  (bzw.  $\{a_1, \dots, a_t\}$  bzw.  $M(\subseteq V)$ ) heißen linear abhängig („l.a.“), wenn sie nicht linear unabhängig sind.

### Beispiele

- (1.) Ein System von Vektoren der Form  $a_1, \dots, a_i, \dots, a_t$  oder  $a_1, \dots, o, \dots, a_t$  ist stets linear abhängig. Dagegen ist die Menge  $\{a_1, a_1, a_2\}$  linear unabhängig, wenn  $a_1, a_2$  linear unabhängig sind, da  $\{a_1, a_1, a_2\} = \{a_1, a_2\}$ .
- (2.) Für den VR  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  über  $\mathbb{R}$  wollen wir feststellen, ob die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = o,$$

die gleichwertig ist mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = o$$

bzw. mit dem LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man rechnet nun leicht nach, daß der Rang der Koeffizientenmatrix dieses LGS gleich 2 ist, womit dieses LGS nichttriviale Lösungen  $x_1, x_2, x_3$  besitzt und folglich  $a_1, a_2, a_3$  linear abhängig sind.

- (3.) Es sei  $V = \mathfrak{P}_3$  und  $K = \mathbb{R}$ .

Um zu klären, ob

$$f_1(x) = x^3 + x - 1, \quad f_2(x) = x^3 + x^2, \quad f_3(x) = 2x + 1$$

linear unabhängig oder linear abhängig sind, ermitteln wir die Anzahl der möglichen Lösungen  $a_1, a_2, a_3$  der Gleichung

$$a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) = 0.$$

Durch Umordnen der Summanden erhält man aus dieser Gleichung die Bedingung

$$(a_1 + a_2) \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + (a_1 + 2a_3) \cdot x + (-a_1 + a_3) = 0,$$

die für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  nur genau dann erfüllt ist, wenn

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = 0 \\ a_2 & = 0 \\ a_1 & + 2a_3 = 0 \\ -a_1 & + a_3 = 0 \end{array}$$

gilt. Offenbar hat dieses LGS nur die triviale Lösung, womit  $f_1, f_2, f_3$  linear unabhängig sind.

Das zweite Beispiel von oben lässt sich verallgemeinern zum

**Satz 4.3.1** Es sei  $KV = K^{n \times 1}$  und  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \in K^{n \times 1}$ . Dann gilt:

- (a)  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t$  sind linear unabhängig  $\iff \text{rg}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t) = t$ .
- (b) Man findet in der Menge  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\}$  genau dann maximal  $r$  linear unabhängige Vektoren, wenn  $\text{rg}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t) = r$  ist.

*Beweis.* (a): Die Matrixgleichung  $x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_t \cdot \mathbf{a}_t = \mathbf{o}$  lässt sich auch in der Form

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_t) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

aufschreiben. Nach Satz 3.4.5, (b) besitzt diese Gleichung genau dann nur die triviale Lösung  $\mathbf{o}$ , wenn  $\text{rg}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t) = t$  ist. Also gilt (a).

(b) folgt aus (a) und den Eigenschaften des Ranges von Matrizen. ■

Die im nächsten Satz angegebene Eigenschaft eines Ranges einer Matrix kann auch zur Definition des Ranges einer Matrix verwendet werden.

**Satz 4.3.2** Der Rang einer Matrix ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten der Matrix.

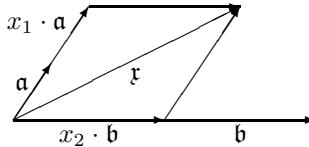
*Beweis.* Für Spalten ist Satz 4.3.2 nur eine andere Formulierung der Aussage (b) von Satz 4.3.1. Da nach Satz 3.1.4  $\text{rg} \mathfrak{A} = \text{rg} \mathfrak{A}^T$  ist, stimmt die Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten einer Matrix  $\mathfrak{A}$  mit der Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen überein. ■

## 4.4 Basen

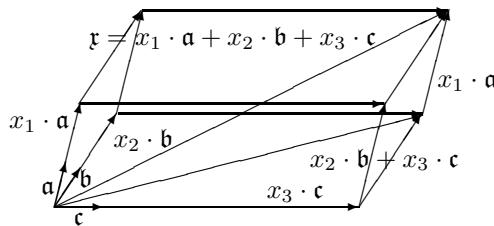
**Definition** Sei  $B$  eine Teilmenge eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann heißt  $B$  Basis von  $V$ :  $\iff B$  ist linear unabhängig und  $[B] = V$ .

### Beispiele

- (1.) Je zwei linear unabhängige Vektoren (Verschiebungen) aus  $\vec{V}_2$  bilden offenbar eine Basis von  $\vec{V}_2$ , da man, falls  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  l.u., jeden Vektor  $\mathfrak{x} \in \vec{V}_2$  in der Form  $\mathfrak{x} = x_1 \cdot \mathfrak{a} + x_2 \cdot \mathfrak{b}$  darstellen kann:



- (2.) Analog überlegt man sich, daß man aus drei l.u. Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  des  $\vec{V}_3$  eine Basis von  $\vec{V}_3$  erhält:



- (3.) Eine Basis des  $K$ -Vektorraums  $K^{n \times 1}$  ist

$$\mathfrak{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathfrak{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

da diese Vektoren offenbar l.u. sind und für jedes  $\mathfrak{a} := (a_1, \dots, a_n)^T \in K^{n \times 1}$

$$\mathfrak{a} = a_1 \cdot \mathfrak{e}_1 + a_2 \cdot \mathfrak{e}_2 + \dots + a_n \cdot \mathfrak{e}_n$$

gilt.

- (4.) Eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathfrak{P}_n$  ist

$$f_1(x) = x^n, \quad f_2(x) = x^{n-1}, \dots, \quad f_n(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = 1.$$

**Satz 4.4.1** Für Teilmengen  $B$  eines  $K$ -Vektorraums  $V$  sind folgende Bedingungen äquivalent:

(a)  $B$  ist Basis von  $V$ .

(b)  $[B] = V \wedge (\forall B' : B' \subset B \implies [B'] \neq V)$ .

(D.h.,  $B$  ist eine minimale Menge, die  $V$  erzeugt.)

(c)  $B$  l.u.  $\wedge (\forall \mathbf{a} \in V \setminus B : B \cup \{\mathbf{a}\}$  ist l.a.).

Ist  $V \neq \{\mathbf{o}\}$ , so ist außerdem zu obigen Bedingungen äquivalent:

(d) Jeder Vektor  $\mathbf{a} \in V$  kann auf genau eine Weise als LK gewisser Vektoren  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in B$  dargestellt werden:

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + a_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + a_n \cdot \mathbf{b}_n,$$

wobei  $n$  abhängig von  $\mathbf{a}$  ist.

*Beweis.* 1. Fall:  $V = \{\mathbf{o}\}$ .

In diesem Fall kann eine Basis  $B$  nur die leere Menge sein und die Aussagen des Satzes sind trivial.

2. Fall:  $V \neq \{\mathbf{o}\}$ .

Wir zeigen: (a)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a).

„(a)  $\Rightarrow$  (d)“: Offenbar gilt

$$[B] = V \Rightarrow \forall \mathbf{a} \in V \exists \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in B \exists a_1, \dots, a_n \in K : \mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{b}_n.$$

Sei nun  $\mathbf{a} = a'_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + a'_n \cdot \mathbf{b}_n$  eine weitere Darstellung von  $\mathbf{a}$  durch  $B$ . (Daß in beiden Darstellungen dieselben Vektoren  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  auftreten, bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, da man fehlende Vektoren mit den Koeffizienten 0 aufnehmen kann.) Folglich gilt

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = (a_1 - a'_1) \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + (a_n - a'_n) \cdot \mathbf{b}_n.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ergibt sich hieraus  $a_1 = a'_1, \dots, a_n = a'_n$ . Also gilt (d).

„(d)  $\Rightarrow$  (b)“: Wegen (d) haben wir  $[B] = V$ . Sei  $B' \subset B$  und angenommen,  $[B'] = V$ . Da  $V \neq \{\mathbf{o}\}$ , muß  $B' \neq \{\mathbf{o}\}$  sein. Außerdem existiert ein  $\mathbf{b} \in B \setminus B'$  mit  $\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{b}'_1 + \dots + b_n \cdot \mathbf{b}'_n$  ( $\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n \in B'$ ).  $\mathbf{b}$  lässt sich aber auch in der Form  $\mathbf{b} = 1 \cdot \mathbf{b}$  darstellen. Damit haben wir zwei verschiedene Darstellungen von  $\mathbf{b}$  mittels Vektoren aus  $B$  erhalten, im Widerspruch zu (d).

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Sei (b) erfüllt. Wegen  $[B] = V \neq \{\mathbf{o}\}$  ist  $B \neq \emptyset$ . Wir überlegen uns zunächst, daß  $B$  l.u. ist. Falls  $B = \{\mathbf{b}\}$ , ist offenbar  $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$  und damit  $B$  l.u. Ist  $|B| \geq 2$  und angenommen,  $B$  l.a., so existieren gewisse  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  in  $B$  mit  $\lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{o}$  für gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und  $\lambda_1 \neq 0$ . Folglich gilt  $\mathbf{b}_1 = (1/\lambda_1) \cdot (-\lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 - \dots - \lambda_n \cdot \mathbf{b}_n)$ , womit  $\mathbf{b}_1 \in [B \setminus \{\mathbf{b}_1\}]$ , im Widerspruch zu (b). Also ist in jedem Fall  $B$  l.u. Offenbar gilt dann außerdem für beliebige  $\mathbf{a} \in V : B \cup \{\mathbf{a}\}$  ist l.a., da sonst  $B \cup \{\mathbf{a}\}$  im Fall der linearen Unabhängigkeit nicht (b) erfüllt.

„(c)  $\Rightarrow$  (a)“: Sei  $B$  eine maximale Menge l.u. Vektoren aus  $V$ . Wir haben  $[B] = V$  zu zeigen. Bezeichne dazu  $\mathbf{a}$  ein beliebiges Element aus  $V$ . Ist  $\mathbf{a} \in B$ , so gehört natürlich  $\mathbf{a}$  zu  $[B]$ . Falls  $\mathbf{a} \notin B$ , ist  $B \cup \{\mathbf{a}\}$  nach Voraussetzung l.a., womit es gewisse  $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \in B$  und gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{o}$  gibt. Da  $B$  maximal ist, gilt  $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \in B$ . Somit gilt  $\mathbf{a} = -\lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + -\lambda_n \cdot \mathbf{b}_n \in B$ , im Widerspruch zu (c).

$\dots + \lambda_n \cdot \mathfrak{b}_n = \mathfrak{o}$  sowie  $\lambda_1 \neq 0$  gibt. Also ist  $\mathfrak{a} = (1/\lambda_1) \cdot (-\lambda_2 \cdot \mathfrak{b}_2 - \dots - \lambda_n \cdot \mathfrak{b}_n) \in [B]$  und damit  $[B] = V$  bewiesen. ■

Als nächstes wollen wir uns mit der Frage

„Hat jeder  $K$ -Vektorraum eine Basis?“

beschäftigen. Unsere Antwort wird zwar „ja“ sein, jedoch ist der Beweis nicht trivial. Es gibt jedoch gewisse Vektorräume, für die der Nachweis der Existenz von Basen ganz einfach ist.

**Satz 4.4.2** *Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, der eine endliche Teilmenge  $E$  mit  $[E] = V$  besitzt (d.h., „ $E$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ “ bzw. „ $E$  erzeugt  $V$ “). Dann existiert eine Teilmenge  $B$  von  $E$ , die Basis von  $V$  ist.*

*Beweis.* Seien  $[E] = V$  und  $|E| = k \in \mathbb{N}_0$ . Ist  $E$  eine Basis, so ist nichts zu beweisen. Falls  $E$  keine Basis von  $V$  bildet, gibt es ein  $\mathfrak{a}_1 \in E$  mit  $\mathfrak{a}_1 \in [E \setminus \{\mathfrak{a}_1\}]$ . Folglich ist auch  $E_1 := E \setminus \{\mathfrak{a}_1\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  mit  $k - 1$  Elementen. Falls  $E_1$  eine Basis bildet, so ist der Beweis beendet. Ist  $E_1$  keine Basis, so existiert ein  $\mathfrak{a}_2 \in E_1$  mit  $\mathfrak{a}_2 \in [E_1 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}]$ . Folglich gilt schon für die  $(k - 2)$ -elementige Menge  $E_2 := E_1 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}$ , daß  $[E_2] = V$  ist, usw. Da  $k \in \mathbb{N}_0$ , muß unser Verfahren nach einer gewissen endlichen Anzahl von Schritten abbrechen und wir erhalten eine Teilmenge von  $E$ , die Basis von  $V$  ist. ■

Die Begriffe „Basis“, „Erzeugendensystem“ sowie unser eben geführte Beweis lassen sich ohne Mühe auf algebraische Strukturen übertragen. Jede endlich erzeugte algebraische Struktur besitzt demnach eine Basis. Ist die algebraische Struktur nicht mehr endlich erzeugbar, so muß nicht in jedem Fall ein minimales Erzeugendensystem (also eine Basis) existieren. Dazu ein einfaches **Beispiel:**

Wir betrachten die algebraische Struktur  $(A; \circ)$  mit  $A := \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  und

$$a_i \circ a_j := \begin{cases} a_{i-1} & \text{für } i \geq 2, \\ a_i & \text{für } i = 1 \end{cases} \quad (i, j \in \mathbb{N}),$$

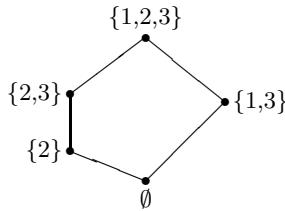
für die offenbar Mengen der Form  $A_t := \{a_i \mid t \leq i\}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) Erzeugendensysteme sind. Man prüft nun leicht nach, daß sich diese und auch andere Erzeugendensysteme von  $A$  nicht zu minimalen Erzeugendensystemen reduzieren lassen.

Dieses Beispiel scheint zwar ziemlich „abartig“ zu sein (( $A; \circ$ ) ist noch nicht einmal eine Halbgruppe), jedoch gibt es genügend andere „sinnvollere“ (aber auch kompliziertere) Beispiele algebraischer Strukturen ohne Basis (u.a. auch Gruppen!).

Für den Nachweis, daß jeder  $K$ -Vektorraum eine Basis besitzt, benötigen wir noch einige Bezeichnungen und das sogenannte Lemma von Zorn.

Sei  $\mathfrak{M}$  ein gewisses Mengensystem, also eine Menge von bestimmten Mengen. Die Enthaltsbeziehung  $\subseteq$  ist dann eine teilweise reflexive Ordnungsrelation auf  $\mathfrak{M}$ , die man sich durch ein Hasse-Diagramm veranschaulichen kann.

Falls  $\mathfrak{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{2\}, \emptyset\}$  haben wir z.B. das folgende Hasse-Diagramm:



Bezeichne  $\mathcal{K}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{M}$ . Dann heißt

$$\mathcal{K} \text{ Kette} : \iff \forall M_1, M_2 \in \mathcal{K} : M_1 \subseteq M_2 \vee M_2 \subseteq M_1.$$

Z.B. ist  $\{\emptyset, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  eine Kette der obigen Menge  $\mathfrak{M}$ .

Man nennt ein  $M \in \mathfrak{M}$  ein **maximales Element** von  $\mathfrak{M}$  :  $\iff$

$$\forall N \in \mathfrak{M} : M \subseteq N \implies M = N.$$

In unserem Beispiel ist offenbar  $\{1, 2, 3\}$  das einzige maximale Element von  $\mathfrak{M}$ .

#### **Lemma 4.4.3 (Lemma von Zorn<sup>3</sup>)**

Sei  $\mathfrak{M}$  ein Mengensystem. Wenn in jeder Kette  $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{M}$  die Menge  $\bigcup_{T \in \mathcal{K}} T$  zu  $\mathfrak{M}$  gehört, dann gibt es zu jedem  $A \in \mathfrak{M}$  ein maximales Element  $M \in \mathfrak{M}$  mit  $A \subseteq M$ .

Wir verwenden das Lemma von Zorn hier als Axiom. Man kann nämlich zeigen (siehe z.B. [Kur 64]), daß dieses Lemma zum sogenannten Auswahlaxiom<sup>4</sup>

„Ist eine Menge  $M$  gegeben, dann existiert eine Abbildung  $\varphi$ , die jeder nichtleeren Teilmenge  $A$  von  $M$  ein bestimmtes Element  $\varphi(A)$  dieser Teilmenge zuordnet.“

äquivalent ist. Die Frage nach dem logischen Fundament für dieses Axiom und seiner Zulässigkeit gehört zu den schwierigsten und umstrittensten Problemen der Mengenlehre.

Wir können hier jedoch nicht auf das Auswahlaxiom verzichten, das sich übrigens für abzählbare Mengen  $M$  leicht beweisen lässt: Wenn die Elemente von  $M$  durch natürliche Zahlen nummeriert sind, so erhalten wir die gewünschte Abbildung, indem wir jedem  $A \in M$  ( $A \neq \emptyset$ ) dasjenige Element aus  $A$  zuordnen, das die niedrigste Nummer besitzt.

Nach diesen Vorbereitungen ist eine Verallgemeinerung von Satz 4.4.2 nicht weiter schwierig. Dies geschieht im

**Satz 4.4.4** Jeder (!)  $K$ -Vektorraum besitzt eine Basis.

<sup>3</sup> Benannt nach Max A. Zorn (1906–1993).

<sup>4</sup> Hier nur grob formuliert.

*Beweis.* Sei  $V$  ein beliebiger  $K$ -Vektorraum und  $\mathfrak{M}$  die Menge aller Teilmengen von  $V$ , die linear unabhängig sind. Wir wollen zunächst beweisen, daß  $\mathfrak{M}$  die Voraussetzung des Lemmas von Zorn erfüllt. Dazu bezeichne  $\mathcal{K}$  eine Kette ( $\subseteq \mathfrak{M}$ ), d.h.,  $\mathcal{K} := \{B_i \mid i \in I\}$  und es gilt

$$(\forall i, j \in I : B_i \subseteq B_j \vee B_j \subseteq B_i) \wedge (\forall i \in I : B_i \text{ l.u.}).$$

Für den Beweis von  $B := \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathfrak{M}$  haben wir zu zeigen, daß  $B$  l.u. ist. Angenommen,  $B$  ist l.a. Dann enthält  $B$  gewisse l.a. Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ , wobei jeder Vektor  $\mathfrak{a}_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) in einer gewissen Menge  $B_{i_j}$  ( $i_j \in I$ ) enthalten ist, da  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Die  $B_{i_j}$  bilden eine Kette. Folglich gibt es ein  $t \in I$  mit  $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\} \subseteq B_t$ . Laut Voraussetzung ist aber  $B_t$  l.u., womit wir einen Widerspruch zur linearen Abhängigkeit von  $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$  erhalten haben. Also war unsere Annahme falsch und  $\mathfrak{M}$  erfüllt die Voraussetzung des Lemmas von Zorn.

Damit gibt es in der Menge  $\mathfrak{M}$  eine maximale Menge l.u. Vektoren, die nach Satz 4.4.1 eine Basis ist. ■

Noch eine **Bemerkung:** Der obige Beweis ist nur ein Existenzbeweis, leider nicht konstruktiv! Im allgemeinen ist es für gewisse Vektorräume schwierig, Basen zu ermitteln bzw. man kennt bisher für diese VRe keine Basen. Dazu ein **Beispiel:** Sei  $V$  die Menge aller Folgen aus reellen Zahlen, d.h.,  $V = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{R}\}$ , die zusammen mit  $+, \cdot$ :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \\ c \cdot (a_1, a_2, \dots) &:= (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots) \end{aligned}$$

$(a_i, b_i, c \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N})$  offenbar einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bildet.

Obwohl  $V$  auf den ersten Blick große Ähnlichkeit mit  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  hat, ist die Verallgemeinerung  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, 0, 1, 0, \dots)$ , ..., der Basis  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  von  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  keine von  $V$ , da z.B.  $(1, 1, 1, \dots)$  nicht von endlich vielen der obigen Vektoren erzeugt werden kann. Nimmt man nun  $(1, 1, 1, \dots)$  mit hinzu, so ist der Abschluß dieses Systems immer noch nicht  $V$ , da man z.B. nicht  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  aus endlich vielen Vektoren des Systems konstruieren kann, usw.

Dieses Beispiel läßt vermuten, daß  $V$  keine abzählbare Basis besitzt.

Wir werden uns nachfolgend in der Regel nur mit endlich erzeugten Vektorräumen befassen, für die wir jetzt noch einige weitere Eigenschaften der Basen zusammentragen wollen.

Für den ersten Satz benötigen wir das

**Lemma 4.4.5** Seien  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \in {}_K V$  und  $\mathfrak{b} := \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \mathfrak{a}_n \in {}_K V$ , wobei  $\lambda_i \neq 0$  für ein gewisses  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$[\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}] = [\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{i+1}, \dots, \mathfrak{a}_n\}].$$

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $i = 1$ . Offenbar gilt  $[\{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n\}] \subseteq [\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}]$ . Da  $\lambda_1 \neq 0$ , ist außerdem  $\mathfrak{a}_1 = (1/\lambda_1) \cdot (\mathfrak{b} - \lambda_2 \cdot \mathfrak{a}_2 - \dots - \lambda_n \cdot \mathfrak{a}_n)$ , womit auch  $[\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}] \subseteq [\{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n\}]$  ist. Also gilt die Behauptung. ■

**Satz 4.4.6 (Austauschsatz von Steinitz<sup>5</sup>)**

Es seien  $E := \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$  ein Erzeugendensystem des  $K$ -Vektorraums  $V$  und  $B := \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r\}$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $V$ ,  $\{n, r\} \subset \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- (a)  $\exists E' \subseteq E : |E'| = r \wedge [\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r\} \cup (E \setminus E')] = V$ .
- (b)  $r \leq n$ .

*Beweis.* Wir beweisen (a) und (b) durch vollständige Induktion über  $r$ .

(I)  $r = 1$ : Da  $[E] = V$ , existieren gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\mathfrak{b}_1 = \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \mathfrak{a}_n$ , wobei mindestens ein  $\lambda_i \neq 0$ , da  $\mathfrak{b}_1 \neq 0$ . Damit ergibt sich unsere Behauptung (a) für  $r = 1$  aus Lemma 4.4.5.

$1 \leq n$  gilt laut Voraussetzung.

(II)  $k - 1 \rightarrow k$ : Angenommen, (a) und (b) sind für  $r = k - 1$  richtig. Folglich ist  $k - 1 \leq n$  und o.B.d.A.  $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_n\}$  ein Erzeugendensystem für  $V$ . Im Fall  $k - 1 = n$  bilden bereits die Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{k-1}$  eine Basis von  $V$  und  $\mathfrak{b}_k$  ist eine LK der Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{k-1}$ , im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$ .

Daher können wir nachfolgend  $k - 1 < n$  annehmen. Da  $\mathfrak{b}_k \in [\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_n\}]$ , gibt es gewisse  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  mit

$$\mathfrak{b}_k = a_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + a_{k-1} \cdot \mathfrak{b}_{k-1} + a_k \cdot \mathfrak{a}_k + \dots + a_n \cdot \mathfrak{a}_n.$$

Im Fall  $a_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$  erhält man einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$ . Folglich existiert ein  $i \in \{k, \dots, n\}$  mit  $a_i \neq 0$ , womit nach Lemma 4.4.5 die Menge  $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{i+1}, \dots, \mathfrak{a}_n\}$  ein Erzeugendensystem der Menge  $V$  ist. ■

Der Austauschsatz von Steinitz besitzt eine Reihe von wichtigen Folgerungen, die in den Sätzen 4.4.7–4.4.10 angegeben sind.

**Satz 4.4.7**

- (a) Sei  $_KV$  ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann bestehen alle seine Basen aus gleichviel Vektoren.
- (b) Besitzt ein Vektorraum eine unendliche Basis, so sind auch alle anderen Basen unendlich.
- (c) In einem beliebigen Vektorraum haben je zwei Basen die gleiche Mächtigkeit.

*Beweis.* (a) und (b) sind offensichtlich Folgerungen aus (c), jedoch einfacher als (c) zu beweisen, was zunächst gezeigt werden soll: Seien  $B'$  und  $B''$  zwei Basen eines VRs  $V$ . Ist  $V$  endlich erzeugt, so folgt aus Satz 4.4.6, (b) und der linearen Unabhängigkeit von  $B'$  bzw.  $B''$ , daß  $B'$  und  $B''$  endliche Mengen sind, womit man,

<sup>5</sup> Ernst Steinitz (1871–1928), deutscher Mathematiker.

indem man zunächst  $E = B'$  und  $B = B''$  und dann  $E = B''$  und  $B = B'$  wählt, als Folgerung aus Satz 4.4.6  $|B''| \leq |B'|$  und  $|B'| \leq |B''|$ , also  $|B'| = |B''|$ , erhält.

(c): Seien  $B := \{\mathbf{b}_i \mid i \in I\}$  und  $C := \{\mathbf{c}_j \mid j \in J\}$  zwei beliebig gewählte Basen des nicht endlich erzeugten Vektorraums  $V$  über dem Körper  $K$ . Zum Beweis von (c) genügt es,  $|B| \geq |C|$  zu zeigen.

Da  $C$  eine Basis von  $V$  ist, gibt es für jedes  $i \in I$  eine gewisse endliche Teilmenge  $J_i$  von  $J$  und gewisse  $b_{ij} \in K$  ( $j \in J_i$ ) mit

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j \in J_i} b_{ij} \cdot \mathbf{c}_j. \quad (4.2)$$

Wir setzen  $J'_i := \{j \in J_i \mid b_{ij} \neq 0\}$  und zeigen als nächstes  $\bigcup_{i \in I} J'_i = J$ . Nach Definition ist  $\bigcup_{i \in I} J'_i \subseteq J$ . Angenommen, es gibt ein  $k \in J \setminus (\bigcup_{i \in I} J'_i)$ , d.h., es gilt

$$\forall i \in I : b_{ik} = 0. \quad (4.3)$$

Da  $C$  Basis von  $V$  ist, gibt es eine gewisse endlichen Menge  $I_k \subset I$  und gewisse  $c_l \in K$  mit

$$\mathbf{c}_k = \sum_{l \in I_k} c_l \cdot \mathbf{b}_l. \quad (4.4)$$

Unter Verwendung von (4.2) folgt aus (4.4)

$$\mathbf{c}_k = \sum_{l \in I_k} c_l \cdot \sum_{j \in J_l} b_{lj} \cdot \mathbf{c}_j. \quad (4.5)$$

Wegen (4.3) ist damit der Vektor  $\mathbf{c}_k$  eine LK von Vektoren aus  $C \setminus \{\mathbf{c}_k\}$ , im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $C$ . Also gilt  $\bigcup_{i \in I} J'_i = J$  und (c) folgt aus

$$|J| = \left| \bigcup_{i \in I} J'_i \right| \leq \left| \bigcup_{i \in I} J'_i \times \{i\} \right| \leq |\mathbb{N} \times I| = |I|$$

(siehe Satz 1.5.9). ■

Satz 4.4.7 rechtfertigt folgende

**Definitionen** Die (basisunabhängige) Anzahl der Vektoren einer Basis eines endlich erzeugten Vektorraums  $_K V$  heißt **Dimension** von  $_K V$  und wird mit

$$\dim_K V$$

bezeichnet.

Speziell ist  $\dim \{\mathbf{o}\} = 0$ , da  $[\emptyset] = \{\mathbf{o}\}$ .

Besitzt ein VR  $_K V$  keine endliche Basis, so wollen wir  $_K V$  **unendlichdimensional** (im Zeichen:  $\dim_K V = \infty$ ) nennen.

Wir vereinbaren, die Dimension  $n \in \mathbb{N}$  eines Vektorraums  $_K V$  durch

$$_K V_n$$

kenntlich zu machen.

### Beispiele

(1.) Offenbar gilt  $\dim \vec{V}_2 = 2$  und  $\dim \vec{V}_3 = 3$ .

(2.)  $\dim \mathfrak{P}_n = n + 1$ .

(3.) Der UVR

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

von  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  hat die Dimension 2, da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a+b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und  $(0, 1, 1)^T, (0, 0, 1)^T$  offenbar linear unabhängig sind.(4.) Seien  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  und  $U := \{\mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \mid \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}\}$ . Dann ist  $U$  ein UVR von  $K^{m \times n}$  mit der Dimension  $n - \text{rg}(\mathfrak{A})$  (Beweis: ÜA).

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4.4.6 ist der

**Satz 4.4.8** *Sei  $M$  eine Teilmenge eines VRs  $_K V_n$ . Dann gilt:*

$$M \text{ l.u.} \implies |M| \leq n.$$

■

**Satz 4.4.9** *Sei  $M \subseteq {}_K V_n$ . Dann gilt:*

$$[M] = V \wedge |M| = n \iff M \text{ ist Basis.}$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ gilt nach Satz 4.4.7.„ $\Rightarrow$ “: Wir haben die lineare Unabhängigkeit von  $M$  zu zeigen.Angenommen,  $M$  ist l.a., d.h., für gewisses  $\mathfrak{a} \in M$  ist  $M \setminus \{\mathfrak{a}\}$  ein Erzeugendensystem für  $V_n$ . Nach Satz 4.4.6 enthält eine Basis von  $V_n$  damit höchstens  $n - 1$  Elemente, im Widerspruch zur Voraussetzung und Satz 4.4.7. ■**Satz 4.4.10** *Jede linear unabhängige Menge  $T$  eines  $n$ -dimensionalen VRs  $_K V$  lässt sich zu einer Basis  $B'$  von  $_K V$  ergänzen.**Beweis.* Offenbar ist  $|T| \leq n$  und für  $V$  gibt es eine gewisse Basis  $\{\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n\}$ . Wählt man nun in Satz 4.4.6  $E = \{\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n\}$  und  $B = T$ , so ist Satz 4.4.10 nur eine andere Formulierung von Aussage (a) des Satzes 4.4.6. ■

## 4.5 Lineare Unabhängigkeit und Basen über einem Untervektorraum

Dieser Abschnitt stellt einige Verallgemeinerungen der Begriffe aus den Abschnitten 4.3 und 4.4 zusammen, die wir nur im Abschnitt 8.4 benötigen.

**Definitionen** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $U$  ein UVR von  $V$  und  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t \in V$ . Dann heißen/heißt

- $\{a_1, \dots, a_t\}$  linear unabhängig über  $U$  („l.u. über  $U$ “) : $\iff$   
 $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_t \cdot a_t \in U \implies x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0.$
- $\{a_1, \dots, a_t\}$  linear abhängig über  $U$  („l.u. über  $U$ “) : $\iff$   
 $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_t \cdot a_t \in U \implies x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0.$
- $M(\subseteq V)$  linear unabhängig über  $U$  („l.u. über  $U$ “) : $\iff$  Jede endliche Teilmenge von  $M$  ist linear unabhängig über  $U$ .

Außerdem:

- $\{a_1, \dots, a_t\}$  (bzw.  $\{a_1, \dots, a_t\}$  bzw.  $M(\subseteq V)$ ) heißen **linear abhängig über  $U$**  („l.a. über  $U$ “), wenn sie nicht linear unabhängig über  $U$  sind.
- $B \subseteq V$  heißt **Basis (von  $V$ ) über  $U$** , wenn sie eine maximale Menge von l.u. Vektoren über  $U$  ist.

**Beispiel** Offenbar ist jede l.u. Menge über  $\{\mathbf{0}\}$  l.u. im Sinne von Abschnitt 4.3.

**Lemma 4.5.1** Seien  $U$  ein UVR des  $K$ -Vektorraums  $V$ ,  $B$  eine Basis von  $U$  und  $A \subseteq V$ . Dann gilt:

- $A$  ist l.u. über  $U \iff A \cup B$  l.u.
- $A$  ist eine Basis von  $V$  über  $U \iff A \cup B$  ist Basis von  $V$ .

*Beweis.* O.B.d.A. können wir  $A := \{a_1, \dots, a_s\}$  und  $B := \{b_1, \dots, b_t\}$  wählen.

(a): „ $\implies$ “: Sei  $A$  l.u. über  $U$ . Angenommen, für gewisse  $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t \in K$  ist

$$a_1 \cdot a_1 + \dots + a_s \cdot a_s + b_1 \cdot b_1 + \dots + b_t \cdot b_t = \mathbf{0}.$$

Folglich ist  $a_1 \cdot a_1 + \dots + a_s \cdot a_s = -(b_1 \cdot b_1 + \dots + b_t \cdot b_t) \in U$  und aus der linearen Unabhängigkeit von  $A$  über  $U$  ergibt sich zunächst  $a_1 = \dots = a_s = 0$  und dann (wegen der linearen Unabhängigkeit von  $B$ )  $b_1 = \dots = b_t = 0$ . Also ist  $A \cup B$  linear unabhängig.

„ $\iff$ “: Seien  $A \cup B$  l.u. und  $u := a_1 \cdot a_1 + \dots + a_s \cdot a_s \in U$  beliebig gewählt. Dann existieren gewisse  $b_1, \dots, b_t \in K$  mit  $u = b_1 \cdot b_1 + \dots + b_t \cdot b_t$ . Folglich haben wir

$$a_1 \cdot a_1 + \dots + a_s \cdot a_s - (b_1 \cdot b_1 + \dots + b_t \cdot b_t) = \mathbf{0},$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit von  $A \cup B$  nur für  $a_1 = \dots = a_s = b_1 = \dots = b_t = 0$  gelten kann. Also ist  $A$  l.u. über  $U$ .

(b): „ $\implies$ “: Sei  $A$  eine Basis von  $V$  über  $U$ . Dann ist  $A \cup B$  nach (a) l.u. Falls ein  $c \in V \setminus [A \cup B]$  existiert, so ist  $A \cup B \cup \{c\}$  l.u. und damit  $A \cup \{c\}$  l.u. über  $U$ , womit  $A$  keine maximale l.u. Menge über  $U$  ist, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.  
 „ $\iff$ “: Sei  $A \cup B$  eine Basis von  $V$ . Dann ist  $A \cup B$  eine maximale Menge von l.u. Vektoren, womit es insbesondere kein  $a \in V \setminus U$  gibt, so daß  $\{a\} \cup A \cup B$  l.u. ist. Folglich kann nach (a)  $A$  nur eine maximale Menge von l.u. Vektoren über  $U$  sein. ■

Eine Folgerung aus Lemma 4.5.1 ist das folgende Lemma.

**Lemma 4.5.2** Seien  $U_0, U_1, \dots, U_m$  Untervektorräume des  $K$ -Vektorraums  $V$  mit der Eigenschaft

$$U_0 := \{\mathbf{0}\} \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{m-1} \subset U_m.$$

Außerdem sei  $B_i$  eine Basis von  $U_i$  über  $U_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, m$ . Dann ist  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$  eine Basis von  $U_m$ . ■

**Lemma 4.5.3** Seien  $\mathfrak{T} \in K^{n \times 1}$  und

$$T_0 := \{\mathbf{0}\},$$

$$T_k := \{\mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \mid \mathfrak{T}^k \cdot \mathfrak{x} = \mathbf{0}\} \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Dann sind die  $T_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  Untervektorräume des  $K$ -Vektorraums  $K^{n \times 1}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$(a) \forall k \in \mathbb{N}_0 : T_k \subseteq T_{k+1}.$$

$$(b) (\exists t \in \mathbb{N}_0 : T_t = T_{t+1}) \implies (\forall s \geq t : T_s = T_t).$$

$$(c) (\exists t \in \mathbb{N}_0 : T_t \neq T_{t+1}) \implies (T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_t \subset T_{t+1}).$$

$$(d) Ist A \subseteq T_{k+2} l.u. über T_{k+1} (k \in \mathbb{N}_0), dann ist$$

$$\mathfrak{T} \cdot A := \{\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in A\} \subseteq T_{k+1}$$

l.u. über  $T_k$ .

$$(e) Existiert ein  $\mathfrak{a} \in T_{k+1} \setminus T_k$  für ein gewisses  $k \in \mathbb{N}_0$ , so ist die Menge$$

$$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}, \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{a}, \dots, \mathfrak{T}^k \cdot \mathfrak{a}\}$$

l.u. und es gilt  $\mathfrak{T}^i \cdot \mathfrak{a} \in T_{k-i+1} \setminus T_{k-i}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

*Beweis.* Da die Menge  $T_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  als Menge aller Lösungen eines homogenen LGS aufgefaßt werden kann, ist  $T_k$  ein UVR von  $K^{n \times 1}$ .

Wegen

$$\mathfrak{T}^k \cdot \mathfrak{x} = \mathbf{0} \implies \mathfrak{T}^{k+1} \cdot \mathfrak{x} = \mathbf{0}$$

gilt (a).

(b): Sei  $T_t = T_{t+1}$ . Zum Beweis von (b) genügt es, zu zeigen, daß  $T_{t+2} = T_{t+1}$  ist. Wegen (a) gilt dies, falls  $T_{t+2} \subseteq T_{t+1}$ . Sei  $\mathfrak{x} \in T_{t+2}$  beliebig gewählt, d.h., es gilt  $\mathfrak{T}^{t+2} \cdot \mathfrak{x} = \mathbf{0}$ . Folglich haben wir  $\mathfrak{T}^{t+1}(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{x}) = \mathbf{0}$ , womit  $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{x}$  zu  $T_{t+1}$  gehört. Wegen  $T_{t+1} = T_t$  gilt dann  $\mathfrak{T}^t \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{x}) = \mathbf{0}$ . Also liegt  $\mathfrak{x}$  in  $T_{t+1}$ , was zu zeigen war.

(c) folgt aus (a) und (b).

(d): Sei  $A := \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m\} \subseteq T_{k+2}$  l.u. über  $T_{k+1}$ . Dann ist  $\mathfrak{T} \cdot A$  wegen

$$\mathfrak{a} \in A \subseteq T_{k+2} \implies \mathfrak{T}^{k+2} \cdot \mathfrak{a} = \mathbf{0} \implies \underbrace{\mathfrak{T}^{k+1} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a})}_{\in \mathfrak{T} \cdot A} = \mathbf{0}$$

eine Teilmenge von  $T_{k+1}$ . Angenommen, für gewisse  $x_1, \dots, x_m \in K$  ist

$$x_1 \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_1) + x_2 \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_2) + \dots + x_m \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_m) \in T_k,$$

d.h., es gilt

$$\mathfrak{T}^k \cdot (x_1 \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_1) + x_2 \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_2) + \dots + x_m \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}_m)) = \mathbf{0}$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{T}^{k+1} \cdot (x_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + x_m \cdot \mathfrak{a}_m) = \mathbf{0}.$$

Folglich gehört  $x_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + x_m \cdot \mathfrak{a}_m$  zu  $T_{k+1}$ , was wegen der linearen Unabhängigkeit von  $A$  über  $T_{k+1}$  nur für  $x_1 = \dots = x_m = 0$  gelten kann. Also ist  $\mathfrak{T} \cdot A$  l.u. über  $T_k$ .

(e) folgt aus (d). ■

**Satz 4.5.4** Seien  $\mathfrak{T} \in K^{n \times n}$ ,  $\text{rg}\mathfrak{T} < n$ <sup>6</sup> und die UVRe  $T_k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  wie im Lemma 4.5.3 definiert. Dann gibt es eine kleinste Zahl  $r \in \{1, \dots, n\}$  mit

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_{r-1} \subset T_r = T_{r+1} = \dots$$

Außerdem existiert für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$  eine Menge  $B_i \subseteq T_i$ , die l.u. über  $T_{i-1}$  ist, und  $B := B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$  ist eine Basis für  $T_r$ . Diese  $B_i$  lassen sich so wählen, daß  $B$  die Vereinigung von Mengen der Art

$$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{a}, \mathfrak{T}^2 \cdot \mathfrak{a}, \dots, \mathfrak{T}^{k_a} \cdot \mathfrak{a}\}$$

für gewisse  $\mathfrak{a} \in T_r$  und  $k_a \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  ist.

*Beweis.* Die Existenz eines  $r \in \{1, \dots, n\}$  mit  $T_{r-1} \subset T_r = T_{r+1}$  folgt aus Lemma 4.5.3 und  $\dim T_i \leq n$ . Aus Lemma 4.5.3 folgt weiterhin, daß die  $T_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ ) UVR von  $K^{n \times 1}$  mit

$$T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{r-1} \subset T_r$$

sind.

Die Mengen  $B_1, \dots, B_r$  mit der gewünschten Eigenschaft lassen sich wie folgt konstruieren:

Da  $T_{r-1} \subset T_r$ , gibt es eine Menge  $B_r$ , die l.u. über  $T_{r-1}$  ist. Man erhält  $B_r$  nach Lemma 4.5.1 z.B. dadurch, daß man zunächst – von einer Basis  $E_1$  von  $T_{r-1}$  ausgehend – durch Ergänzung eine Basis  $E_2$  von  $T_r$  konstruiert. Man kann dann  $B_r = E_2 \setminus E_1$  wählen. Daß diese Vorgehensweise immer zum Ziel führt, ist durch Satz 4.4.10 gesichert. Die Menge  $\mathfrak{T} \cdot B_r$  ist dann eine Teilmenge von  $T_{r-1}$  und l.u. über  $T_{r-2}$ .  $\mathfrak{T} \cdot B_r$  läßt sich dann durch die (eventuell leere Menge)  $A_{r-1}$  zu einer Basis  $B_{r-1}$  von  $T_{r-1}$  über  $T_{r-2}$  ergänzen. Als nächstes bildet man dann  $\mathfrak{T} \cdot B_{r-1}$  und ergänzt diese über  $T_{r-3}$  linear unabhängige Teilmenge von  $T_{r-2}$  zu einer Basis  $B_{r-2}$  von  $T_{r-2}$  über  $T_{r-3}$ , usw.

Der Rest unseres Satzes folgt aus Lemma 4.5.2. ■

Zur Illustration des obigen Satzes noch ein **Beispiel**:

Seien  $K = \mathbb{R}$  und

$$\mathfrak{T} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\mathfrak{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\mathfrak{T}^3 = \mathfrak{O}_{5,5}$  ist  $r = 3$ . Außerdem prüft man leicht nach, daß – unter Verwendung der Bezeichnungen  $\mathfrak{e}_1 := (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathfrak{e}_2 := (0, 1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathfrak{e}_3 := (0, 0, 1, 0, 0)^T$ ,  $\mathfrak{e}_4 := (0, 0, 0, 1, 0)^T$  und  $\mathfrak{e}_5 := (0, 0, 0, 0, 1)^T$  – folgendes gilt:

---

<sup>6</sup> Der Fall  $\text{rg}\mathfrak{T} = n$  ist uninteressant, da in diesem Fall  $\dim T_0 = \dim T_1 = \dim T_2 = \dots = 0$  ist.

$$T_3 = \mathbb{R}^{5 \times 1} = [\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}],$$

$$T_2 = \{0, b, c, d, e)^T \mid b, c, d, e \in \mathbb{R}\} = [\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}],$$

$$T_1 = \{(0, 0, 0, d, e)^T \mid d, e \in \mathbb{R}\} = [\{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}].$$

Offenbar ist dann  $B_3 := \{\mathbf{e}_1\}$  eine Basis von  $T_3$  über  $T_2$ ,  $B_2 := \{\mathfrak{T} \cdot \mathbf{e}_1 = (0, 1, 3, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2\}$  eine Basis von  $T_2$  über  $T_1$ ,  $B_1 := \{\mathfrak{T}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = (0, 0, 0, 7, 1)^T, \mathfrak{T} \cdot \mathbf{e}_2 = (0, 0, 0, 1, 1)^T\}$  eine Basis von  $T_1$  über  $T_0 := \{\mathbf{0}\}$  und  $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3$  hat die im Satz 4.5.4 genannten Eigenschaften.

## 4.6 Dimensionssätze, Isomorphie

**Satz 4.6.1** Sei  $U$  ein UVR von  ${}_K V_n$ . Dann gilt:

- (a)  $\dim U \leq n$ .
- (b)  $\dim U = n \iff U = V$ .

*Beweis.* (a):  $U$  besitzt nach Satz 4.4.4 eine Basis  $B$ , wobei jede endliche Teilmenge von  $B$  l.u. ist. Da nach Satz 4.4.6, (b) in  $V$  die Mächtigkeit von l.u. Mengen höchstens  $n$  beträgt, kann  $B$  höchstens  $n$  Elemente enthalten, womit  $\dim U \leq n$  ist.

(b): „ $\iff$ “ ist trivial.

„ $\Rightarrow$ “: Ist  $\dim U = n$ , so gibt es in  $U$  eine Basis aus  $n$  Elementen, die sich nach Satz 4.4.10 zu einer Basis von  $V$  ergänzen lässt. Da eine Basis von  $V$  aber stets genau  $n$  Elemente enthält, ist  $U = V$ . ■

### Satz 4.6.2 (Dimensionsformel)

Seien  $U$  und  $W$  zwei endlichdimensionale UVRe des  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann gilt

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

*Beweis.* Sei  $D := U \cap W$ . Nach Satz 4.2.3 ist  $D$  ebenfalls ein UVR mit  $\dim D = d \leq \dim U$  (bzw.  $d \leq \dim W$ ). Dann besitzt  $D$  eine Basis

$$B = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } d = 0, \\ \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_d\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Satz 4.4.10 existieren Ergänzungen von  $B$  zu einer Basis  $B_1$  von  $U$  sowie einer Basis  $B_2$  von  $W$ :

$$\begin{aligned} B_1 :&= B \cup \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_u\} \quad (\dim U = d + u), \\ B_2 :&= B \cup \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_w\} \quad (\dim W = d + w). \end{aligned}$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß

$$B \cup \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_u, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_w\}$$

eine Basis von  $U + W$  ist.

Offenbar kann jeder Vektor  $\mathfrak{x} \in U + W$  in der Form  $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  mit  $\mathfrak{a} \in U$  und  $\mathfrak{b} \in W$  dargestellt werden. Da sich  $\mathfrak{a}$  als LK von Vektoren aus  $B_1$  und  $\mathfrak{b}$  als LK von Vektoren aus  $B_2$  darstellen lassen, ist  $\mathfrak{x}$  eine LK von  $B \cup \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_u, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_w\}$ .

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von  $B \cup \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_u, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_w\}$  betrachten wir die Gleichung

$$x_1 \cdot \mathfrak{d}_1 + \dots + x_d \cdot \mathfrak{d}_d + y_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + y_u \cdot \mathfrak{a}_u + z_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + z_w \cdot \mathfrak{b}_w = \mathfrak{o},$$

die äquivalent zu

$$x_1 \cdot \mathfrak{d}_1 + \dots + x_d \cdot \mathfrak{d}_d + y_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + y_u \cdot \mathfrak{a}_u = -z_1 \cdot \mathfrak{b}_1 - \dots - z_w \cdot \mathfrak{b}_w$$

ist. Da in der letzten Gleichung die linke Seite ein Vektor aus  $U$ , die rechte Seite aber ein Vektor aus  $W$  ist, müssen beide Seiten einen Vektor aus  $U \cap W$  beschreiben, der sich als LK von  $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_d$  darstellen lassen muß. Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $B_1$  und  $B_2$  ergibt sich hieraus  $x_1 = \dots = x_d = y_1 = \dots = y_u = z_1 = \dots = z_w = 0$ . Folglich  $\dim(U + W) = d + u + w$  und damit  $\dim U + \dim W = d + u + d + w = (d + u + w) + d = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$ . ■

**Definition** Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Die zu  $V$  gehörenden Verknüpfungen seien mit  $+$  und  $\cdot$  bezeichnet; die von  $W$  kennzeichnen wir durch  $\boxplus$  und  $\boxdot$ . Dann heißt

$V$  isomorph zu  $W$  (im Zeichen:  $V \underset{\cong}{\equiv} W$ ): $\iff$

$$\exists \text{ Bijektion } \varphi : V \rightarrow W \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V \forall a, b \in K :$$

$$\varphi(a \cdot \mathfrak{a} + b \cdot \mathfrak{b}) = (a \boxdot \varphi(\mathfrak{a})) \boxplus (b \boxdot \varphi(\mathfrak{b}))$$

(bzw.

$$\exists \text{ Bijektion } \varphi : V \rightarrow W \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V \forall a \in K :$$

$$\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}) \boxplus \varphi(\mathfrak{b}) \quad \wedge \quad \varphi(a \cdot \mathfrak{a}) = a \boxdot \varphi(\mathfrak{a}).$$

Die Relation  $\underset{\cong}{\equiv}$  ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf einer Menge von  $K$ -Vektorräumen.

**Beispiel** Die  $\mathbb{R}$ -Vektorräume  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $\mathfrak{P}_3$  sind isomorph zueinander, da für die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathfrak{P}_3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

und beliebigen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sowie beliebigen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha c + \beta g & \alpha d + \beta h \end{pmatrix}\right) \\ &= (\alpha a + \beta e)x^3 + (\alpha b + \beta f)x^2 + (\alpha c + \beta g)x + (\alpha d + \beta h) \\ &= \alpha(ax^3 + bx^2 + cx + d) + \beta(ex^3 + fx^2 + gx + h) \\ &= \alpha \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \beta \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

**Satz 4.6.3** Seien  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume. Dann gilt:

$$V \xrightarrow{\cong} W \iff \dim V = \dim W.$$

D.h., für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ , ist  $K^{n \times 1}$  bis auf Isomorphie der einzige  $n$ -dimensionale Vektorraum über dem Körper  $K$ .

*Beweis.* Falls  $V$  bzw.  $W$  nur aus jeweils einem Element bestehen bzw.  $\dim V = \dim W = 0$  gilt, ist die Behauptung trivial.

Da  $\xrightarrow{\cong}$  eine Äquivalenzrelation ist, genügt es (zwecks Nachweis der restlichen Behauptungen des Satzes), zu zeigen, daß ein beliebiger  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum  $V$  zu  $K^{n \times 1}$  isomorph ist,  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $\dim V = n$ , gibt es für  $V$  eine Basis  $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , für die wir eine „Rangfolge“ fixieren:  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ .

Für jeden Vektor  $\mathbf{a}$  aus  $V$  existieren dann eindeutig bestimmte  $a_1, \dots, a_n \in K$  mit  $\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + a_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + a_n \cdot \mathbf{b}_n$  (siehe Satz 4.4.1, (d)). Auf Grund dieser Eigenschaft ist die Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow K^{n \times 1}, \mathbf{a} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

bijektiv und es gilt für beliebige  $\alpha, \beta \in K$  und beliebige  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  mit  $\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{b}_n$  und  $\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + b_n \cdot \mathbf{b}_n$ :

$$\varphi(\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) = \varphi((\alpha a_1 + \beta b_1) \cdot \mathbf{b}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2) \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n) \cdot \mathbf{b}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \varphi(\mathbf{a}) + \beta \cdot \varphi(\mathbf{b}),$$

d.h.,  $\varphi$  ist eine isomorphe Abbildung von  $V$  auf  $K^{n \times 1}$ . ■

Die im obigen Beweis angegebene Abbildung  $\varphi$  beschreibt inhaltlich nichts anderes als den Übergang von den Vektoren zu ihren sogenannten Koordinatendarstellungen bez. der Basis  $B$ , der in der Schule für die Vektorräume  $\vec{V}_2$  und  $\vec{V}_3$  praktiziert wurde. Ausführlich beschäftigen wir uns mit Koordinaten und einigen damit zusammenhängenden Fragestellungen im nächsten Abschnitt.

## 4.7 Koordinaten, Basistransformationen

Bezeichne  $V$  nachfolgend einen  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum ( $n \in \mathbb{N}$ ) und sei  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eine Basis von  $V$ .

Mittels der Schreibweise

$$B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$$

kann man eine Reihenfolge der Elemente von  $B$  festlegen.

Bekanntlich lässt sich dann jeder Vektor  $\mathbf{a} \in V$  durch eine LK der Form

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + a_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + a_n \cdot \mathbf{b}_n$$

darstellen ( $a_1, \dots, a_n \in K$ ). Die Elemente  $a_1, \dots, a_n$ , die  $\mathbf{a}$  bei fixiertem  $B$  vollständig bestimmen, nennt man die **Koordinaten** von  $\mathbf{a}$  bez.  $B$ . Wir schreiben

$$\mathbf{a}/B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

bzw. (um Elemente aus  $K^{n \times 1}$  von Koordinatendarstellungen zu unterscheiden)

$$\mathbf{a}/B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

Später, wenn wir neben Koordinaten von Vektoren auch Koordinatendarstellungen für Punkte benutzen werden, fügen wir noch eine sogenannte **Erkennungskoordinate 0 für Vektoren** hinzu und schreiben

$$\mathbf{a}/B = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Eine unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 4.6.3 und 4.3.1 ist der

### Satz 4.7.1

- (a)  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \forall a \in K : (\mathbf{a} + \mathbf{b})/B = \mathbf{a}/B + \mathbf{b}/B \wedge (a \cdot \mathbf{a})/B = a \cdot (\mathbf{a}/B)$ .
- (b)  $\forall \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \in V : \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \text{ l.u. } \iff rg(\mathbf{a}_1/B, \mathbf{a}_2/B, \dots, \mathbf{a}_t/B) = t$ . ■

Als nächstes wollen wir uns mit dem Umrechnen der Koordinaten bez. einer Basis  $B$  in die bez. einer neuen Basis  $B'$  beschäftigen. Als Vorbereitung dazu ein **Beispiel**:

Es sei  $V = \mathfrak{P}_2 (= \{f \mid (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \wedge (\exists a, b, c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c)\})$  und  $K = \mathbb{R}$ . Basen für  $V$  sind z.B.

$$B = (x^2, x, 1)$$

und

$$B' = (x^2 + 1, x - 1, 2).$$

Offenbar gilt

$$x^2 + 1/B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x - 1/B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und } 2/B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Will man nun für das Polynom  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , für das

$$f(x)/B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ist, die Koordinaten bez.  $B'$  berechnen, so hat man gewisse  $a', b', c'$  mit

$$f(x) = a' \cdot (x^2 + 1) + b' \cdot (x - 1) + c' \cdot 2$$

zu bestimmen. Aus dieser Gleichung erhält man nach Satz 4.7.1 die Bedingung

$$f(x)/B = a' \cdot (x^2 + 1)/B + b' \cdot (x - 1)/B + c' \cdot (2)/B$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Aus der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

lässt sich dann  $f(x)/B'$  wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

berechnen:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

**Satz 4.7.2 (mit Definition)** Seien  $B = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n)$  und  $B' = (\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \dots, \mathfrak{b}'_n)$  zwei Basen von  ${}_K V_n$ . Zwischen den Koordinaten eines Vektors  $\mathfrak{x} \in V$  bez.  $B$  und den Koordinaten von  $\mathfrak{x}$  bez.  $B'$  besteht folgender Zusammenhang

$$\mathfrak{x}/B = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{x}/B',$$

wobei  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{b}'_1/B, \mathfrak{b}'_2/B, \dots, \mathfrak{b}'_n/B)$  die sogenannte **Übergangsmatrix** von  $B$  zu  $B'$  ist. Ausführlich schreibt man anstelle von  $\mathfrak{M}$  auch  $\mathfrak{M}(B, B')$  und es gilt

$$\mathfrak{M}(B, B') = (\mathfrak{M}(B', B))^{-1}.$$

*Beweis.* Seien  $\mathfrak{x} = x_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{b}_n$  und  $\mathfrak{x} = x'_1 \cdot \mathfrak{b}'_1 + \dots + x'_n \cdot \mathfrak{b}'_n$ , d.h.,  $(\mathfrak{x}/B)^T = (x_1, \dots, x_n)$  und  $(\mathfrak{x}/B')^T = (x'_1, \dots, x'_n)$ . Durch Übergang zu Koordinaten bez.  $B$  erhält man aus der Gleichung  $\mathfrak{x} = x'_1 \cdot \mathfrak{b}'_1 + \dots + x'_n \cdot \mathfrak{b}'_n$  die Beziehung

$$\mathfrak{x}/B = x'_1 \cdot (\mathfrak{b}'_1)/B + \dots + x'_n \cdot (\mathfrak{b}'_n)/B,$$

die man auch in der Form

$$\mathfrak{x}/B = (\mathfrak{b}'_1/B, \dots, \mathfrak{b}'_n/B) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

aufschreiben kann, womit wir den behaupteten Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{x}/B$  und  $\mathfrak{x}/B'$  erhalten haben. Mit Hilfe von Satz 4.7.1, (b) überlegt man sich leicht, daß  $\mathfrak{M}$  eine reguläre Matrix ist, womit  $\mathfrak{M}^{-1}$  existiert und damit offenbar auch  $\mathfrak{M}(B', B) = (\mathfrak{M}(B, B'))^{-1}$  gilt. ■

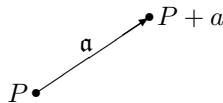
## 4.8 Anwendungen für Vektoren aus $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$

Wie schon im Abschnitt 4.1 vereinbart, sei  $\mathfrak{R}_2$  (bzw.  $\mathfrak{R}_3$ ) die Menge aller Punkte der (euklidischen) Anschauungsebene (bzw. des Anschauungsraumes). Aus Abschnitt 4.1 übernehmen wir außerdem die Bezeichnungen  $\mathfrak{R}$ ,  $\vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_3$  und  $\vec{V}$ , wobei  $\vec{V}$  die Menge der Verschiebungen von  $\mathfrak{R}$  sei.

Für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathfrak{R}$  und eine beliebige Verschiebung  $\mathfrak{a} \in \vec{V}$  bezeichnen wir mit

$$P + \mathfrak{a}$$

den Bildpunkt von  $P$  bei der Abbildung  $\mathfrak{a}$ :



Dieses  $+$  hat offenbar folgende Eigenschaften:

- (a)  $\forall P \in \mathfrak{R} : P + \mathfrak{o} = P,$
- (b)  $\forall P \in \mathfrak{R} \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \overrightarrow{V} : (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}),$ <sup>7</sup>
- (c)  $\forall P, Q \in \mathfrak{R} \exists! \mathfrak{x} \in \overrightarrow{V} : P + \mathfrak{x} = Q.$

Das  $\mathfrak{x}$  aus (c) bezeichnen wir auch mit

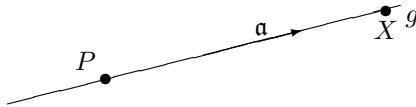
$$Q - P$$

bzw.

$$\overline{PQ}.$$

Mit Hilfe der Verknüpfung  $+$ :  $\mathfrak{R} \times \overrightarrow{V} \rightarrow \mathfrak{R}$ , den Vektorraumoperationen sowie den Vektoren aus  $\overrightarrow{V}$  lassen sich bestimmte Punktmengen von  $\mathfrak{R}$  gut beschreiben:

- (1.) Sei  $g \subseteq \mathfrak{R}$  eine Gerade. Dann existiert ein  $\mathfrak{a} \in \overrightarrow{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$  und ein  $P \in g$  mit  $g = \{X \in \mathfrak{R} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : X = P + \lambda \cdot \mathfrak{a}\}.$



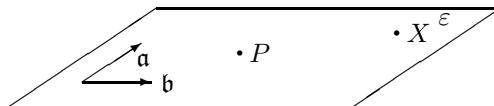
Wir schreiben

$$g : X = P + \lambda \cdot \mathfrak{a}$$

und nennen  $X = P + \lambda \cdot \mathfrak{a}$  eine **Parameterdarstellung** für  $g$ .

- (2.) Bezeichne  $\varepsilon$  eine Ebene des  $\mathfrak{R}_3$ . Dann existieren l.u. Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  aus  $\overrightarrow{V}_3$  und ein  $P \in \mathfrak{R}_3$  mit

$$\varepsilon = \{X \in \mathfrak{R}_3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : X = P + \lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}\}.$$



Wir schreiben

$$\varepsilon : X = P + \lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}$$

und nennen diese Darstellung von  $\varepsilon$  eine **Parameterdarstellung** von  $\varepsilon$ .

---

<sup>7</sup> Man beachte, daß es sich wieder einmal um verschiedene  $+$  handelt.

Damit man mit solchen Darstellungen bequem rechnen kann, führt man in der Regel Koordinaten für die Punkte ein.

Seien  $n \in \{2, 3\}$ ,  $B = (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis für  $\vec{V}_n$  und  $A$  ein fest gewählter Punkt aus  $\mathfrak{R}_n$ . Für jedes  $X \in \mathfrak{R}_n$  existieren dann eindeutig bestimmte  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  mit

$$X = A + x_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{b}_n,$$

womit  $X$  bei einem fixierten Koordinatensystem  $\mathcal{K} = (A; \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eindeutig durch  $x_1, \dots, x_n$  bestimmt ist.

Wir schreiben

$$X/\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ bzw. kurz } X/\mathcal{K}$$

oder (zwecks Unterscheidung von den Koordinatendarstellungen von Vektoren)

$$X/\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei 1 die sogenannte **Erkennungskoordinate für Punkte** ist.

Für das Rechnen mit solchen Koordinaten gelten offenbar folgende Regeln:

$$(X + \mathfrak{x})/\mathcal{K} = X/\mathcal{K} + \mathfrak{x}/B$$

$$(X - Y)/B = X/\mathcal{K} - Y/\mathcal{K}$$

$$(X, Y \in \mathfrak{R}_n; \mathfrak{x} \in \vec{V}_n).$$

Abschließend wollen wir anhand von Beispielen noch einige

### geometrische Grundaufgaben

wiederholen:

Sei  $\mathcal{K} = (A; \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$  ein Koordinatensystem des  $\mathfrak{R}_3$ , d.h.,  $A \in \mathfrak{R}_3$  und  $B := (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$  ist eine Basis von  $\vec{V}_3$ . Außerdem seien

$$P/\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q/\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R/\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{a}/B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bez.  $\mathcal{K}$  ist dann

- (1.) eine Parameterdarstellung der Geraden  $g$ , die die Punkte  $P$  und  $Q$  enthält<sup>8</sup>:

---

<sup>8</sup> Kurzschreibweise für eine Gerade  $g$  durch die Punkte  $P$  und  $Q$ :  $g(P, Q)$ .

$$g : \begin{pmatrix} X \\ P + \lambda \cdot (P - Q) \\ 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

(2.) eine Parameterdarstellung der Ebene  $\varepsilon$ , die die Punkte  $P, Q, R$  enthält<sup>9</sup>:

$$\varepsilon : X = P + \lambda \cdot (P - Q) + \mu \cdot (P - R)$$

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(3.) der Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $h : X = A + t \cdot \mathfrak{a}$  mit der Ebene  $\varepsilon$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{aligned} S \in h \cap \varepsilon \iff & \exists a, b, c \in \mathbb{R} : S = A + a \cdot \mathfrak{a} \wedge \\ & \underbrace{S = P + b \cdot (P - Q) + c \cdot (P - R)}_{\Downarrow} \\ & -2a = 1 \qquad \qquad \qquad a = -1/2 \\ & 0 = 1 \qquad + 2c \iff b = 2 \\ & a = 2 - b + c \qquad \qquad c = -1/2 \end{aligned}$$

(4.) eine zu  $g$  windschiefe Gerade: z.B.  $h$  aus (3.), da das LGS

$$\begin{aligned} -2t &= 1 \\ 0 &= 1 \\ t &= 2 - \lambda \end{aligned}$$

offenbar keine Lösung besitzt und  $\mathfrak{a}$  und  $P - Q$  l.u. sind;

(5.) der Schnitt von  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon'$ :  $X = A + s \cdot \mathfrak{b}_1 + t \cdot \mathfrak{b}_2$ :

$$\varepsilon \cap \varepsilon' : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

---

<sup>9</sup> Kurzschreibweise für eine Ebene  $\varepsilon$  durch die Punkte  $P, Q, R$ :  $\varepsilon(P, Q, R)$ .

da

$$\begin{aligned}
 & X \in \varepsilon \cap \varepsilon' \\
 \iff & \exists \lambda, \mu, s, t \in \mathbb{R} : X = P + \lambda \cdot (P - Q) + \mu \cdot (P - R) \wedge \\
 & \underbrace{X = A + s \cdot \mathfrak{b}_1 + t \cdot \mathfrak{b}_2}_{\Downarrow} \\
 & \begin{array}{rcl} 1 & = & s \\ 1 & + & 2\mu = t \\ 2 - \lambda & + & \mu = 0 \end{array} \\
 & \underbrace{\quad\quad\quad}_{\Downarrow} \\
 & s = 1 \wedge t = 1 + 2\mu \wedge \lambda = 2 + \mu \wedge \mu \in \mathbb{R} \\
 \iff & \exists \mu \in \mathbb{R} : X = A + \mathfrak{b}_1 + (1 + 2 \cdot \mu) \cdot \mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

## Affine Räume

Wir betrachten in diesem Kapitel als Verallgemeinerung der euklidischen (2-dimensionalen) Ebene  $\mathfrak{R}_2$  und des euklidischen (3-dimensionalen) Raumes  $\mathfrak{R}_3$  einen sogenannten  $n$ -dimensionalen affinen Raum über einem beliebigen Körper  $K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere wollen wir das Gemeinsame an solchen bekannten Begriffen wie Punkt, Gerade, Ebene, Raum herausarbeiten und es in allgemeinen Sätzen niederlegen, aus denen sich dann u.a. durch Spezialisierung konkrete Sätze für  $\mathfrak{R}_2$  bzw.  $\mathfrak{R}_3$  ableiten lassen.

Auch in diesem Kapitel bezeichne  $K = (K; +, \cdot)$  einen beliebigen Körper, für den wir dieselben Vereinbarungen treffen wollen, wie in den vorangegangenen Kapiteln.

### 5.1 Die Definition eines affinen Raumes, Beispiele

Wir verallgemeinern  $\mathfrak{R}_2$  bzw.  $\mathfrak{R}_3$ , indem wir wesentliche Eigenschaften von  $\mathfrak{R}_2$  bzw.  $\mathfrak{R}_3$  als Axiome für den affinen Raum festlegen.

**Definition** Eine nichtleere Menge  $R_n$ , deren Elemente  $P, Q, \dots$  **Punkte** genannt werden, heißt  **$n$ -dimensionaler affiner Raum** über dem Körper  $K$ , wenn mit  $R_n$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum  $V_n$  über  $K$  und eine Abbildung

$$+ : R_n \times V_n \rightarrow R_n, P + \mathfrak{x} \mapsto Q,$$

so gegeben sind, daß folgendes gilt:

$$(R1) \quad \forall P \in R_n : P + \mathfrak{o} = P,$$

$$(R2) \quad \forall P \in R_n \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V_n : (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}),$$

$$(R3) \quad \forall P, Q \in R_n \exists! \mathfrak{x} \in V_n : P + \mathfrak{x} = Q,$$

(Bezeichnungen für  $\mathfrak{x}$ :  $Q - P$  oder  $\overrightarrow{PQ}$ ).

### Beispiele

- (1.) Offenbar ist  $\mathfrak{R}_2$  (bzw.  $\mathfrak{R}_3$ ) ein 2- (bzw. 3-) dimensionaler affiner Raum über dem Körper  $\mathbb{R}$ .
- (2.) (**Standardbeispiel** eines  $n$ -dimensionalen affinen Raumes über  $K$ ) Wählt man

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in K \right\}$$

und

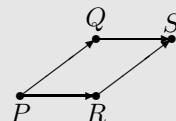
$$V_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \in K \right\},$$

so ist  $V_n$  zusammen mit der Matrizenaddition und der auf Matrizen definierten Multiplikation mit Skalar ( $\in K$ ) ein  $K$ -Vektorraum sowie  $R_n$  zusammen mit  $V_n$  und der Matrizenaddition ein  $n$ -dimensionaler affiner Raum über dem Körper  $K$ .

Aus den Axiomen (R1)–(R3) des affinen Raumes lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen, die zusammengefaßt sind im

**Satz 5.1.1** Für beliebige  $P, Q, R, S \in R_n$  und beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V_n$  gilt:

- (a)  $\overrightarrow{PP} = \mathfrak{o}$ ,
- (b)  $P + \mathfrak{a} = Q + \mathfrak{a} \implies P = Q$ ,
- (c)  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ ,
- (d)  $P + \mathfrak{a} = Q + \mathfrak{b} \implies Q - P = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ,
- (e)  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \mathfrak{o}$ , d.h.,  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ ,
- (f)  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \implies \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ .



*Beweis.* (a):  $P + \overrightarrow{PP} \stackrel{(R3)}{=} P \stackrel{(R1)}{=} P + \mathfrak{o} \stackrel{(R3)}{=} \overrightarrow{PP} = \mathfrak{o}$ .

(b):  $(P + \mathfrak{a}) + (-\mathfrak{a}) = (Q + \mathfrak{a}) + (-\mathfrak{a}) \stackrel{(R2)}{\implies} P + (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}) = Q + (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}) \implies P = Q$ .

(c):  $P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R \stackrel{(R3)}{=} \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ .

(d):  $P + \mathfrak{a} = Q + \mathfrak{b} \implies (P + \mathfrak{a}) + (-\mathfrak{b}) = (Q + \mathfrak{b}) + (-\mathfrak{b}) \stackrel{(R2)}{\implies} P + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = Q + \mathfrak{o} = Q \implies Q - P = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ .

(e) folgt aus (c) und (a).

(f): Es gilt  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} + (-\overrightarrow{RS}) + (-\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{PP} = \mathbf{o}$ . Hieraus folgt, falls  $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \mathbf{o}$ , daß  $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PR} = \mathbf{o}$  bzw.  $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR}$ . ■

## 5.2 Koordinaten und Koordinatensysteme

Wie in den Anschauungsräumen  $\Re_2$  bzw.  $\Re_3$  kann man auch für Punkte aus  $R_n$  Koordinatendarstellungen einführen. Dazu wählen wir ein  $A \in R_n$  und eine Basis  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V_n$ . Nach Definition des  $R_n$  und den Eigenschaften von  $V_n$  existieren zu jedem  $X \in R_n$  eindeutig bestimmte  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit

$$X = A + \underbrace{x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + x_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{b}_n}_{= \overrightarrow{AX}}.$$

Bei einem fixierten  $S := (A; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , wobei  $S$  **Koordinatensystem** des  $R_n$ ,  $A$  **Koordinatenursprung** und  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  die **Achsenrichtungen** heißen, genügt zur Kennzeichnung von  $X$  die Angabe von  $x_1, \dots, x_n$  (**den Koordinaten von  $X$  bez.  $S$** ).

Wir schreiben:

$$X/S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bzw. (zwecks Unterscheidung von Koordinatendarstellungen für Vektoren von  $V_n$ )

$$X/S = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(1 ist dabei die sogenannte **Erkennungsordinate für Punkte**). Zwei leicht nachprüfbare Eigenschaften der Punktkoordinaten faßt der nachfolgende Satz zusammen.

**Satz 5.2.1** Für beliebige  $P, Q \in R_n$  und beliebige  $\mathbf{a} \in V_n$  gilt:

- (a)  $(P + \mathbf{a})/S = P/S + \mathbf{a}/B$
- (b)  $(\overrightarrow{PQ})/S = Q/S - P/S$ .

■

**Satz 5.2.2** Seien  $S := (A; \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  und  $S' := (A'; \mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_n)$  zwei Koordinatensysteme des  $R_n$ , d.h.,  $B := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  und  $B' := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_n)$  sind Basen von  $V_n$  und  $A, A' \in R_n$ .

Zwischen den Koordinaten eines Punktes  $X \in R_n$  bez.  $S$  und den Koordinaten von  $X$  bez.  $S'$  besteht folgender Zusammenhang:

$$X/S = A'/S + \mathfrak{M} \cdot X/S',$$

wobei  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(B, B')$  die Übergangsmatrix von  $B$  zu  $B'$  (siehe S. 183) bezeichnet, falls keine Erkennungskoordinaten verwendet werden, oder

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & | & | & & | \\ 0 & | & \mathfrak{M}(B, B') & & | \\ \vdots & | & & & | \\ 0 & | & & & | \end{pmatrix}$$

gilt, wenn  $X/S$ ,  $A'/S$  und  $X/S'$  mit Erkennungskoordinaten aufgeschrieben werden.

*Beweis.* Falls  $X/S' = (1, x'_1, \dots, x'_n)^T$ , gilt

$$X = A' + x'_1 \cdot \mathfrak{b}'_1 + x'_2 \cdot \mathfrak{b}'_2 + \dots + x'_n \cdot \mathfrak{b}'_n.$$

Durch Übergang zu Koordinaten bez.  $S$  ergibt sich aus dieser Gleichung unter Beachtung von Satz 5.2.1 sowie Satz 4.7.1:

$$\begin{aligned} X/S &= A'/S + x'_1 \cdot (\mathfrak{b}'_1/B) + \dots + x'_n \cdot (\mathfrak{b}'_n/B) \\ &= A'/S + (\mathfrak{o}, \mathfrak{b}'_1/B, \mathfrak{b}'_2/B, \dots, \mathfrak{b}'_n/B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar unsere Behauptung ergibt. ■

### 5.3 Affine Unterräume

**Definitionen** Seien  $R_n$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Raum über  $K$  und  $W$  ein  $k$ -dimensionaler Untervektorraum des zu  $R_n$  gehörenden Vektorraums  $V_n$ . Dann heißt die Menge

$$P + W := \{P + \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in W\}$$

für jeden Punkt  $P \in R_n$  ein  **$k$ -dimensionaler affiner Unterraum** von  $R_n$  bzw. kurz eine  **$k$ -Ebene** von  $R_n$ .

Für  $k = 0$  besteht  $P + W$  nur aus dem Punkt  $P$ .

Die 1-Ebene wollen wir auch **Gerade** und die 2-Ebene nur **Ebene** nennen, womit sich für  $R_n = \mathfrak{R}_n$  ( $n \in \{2, 3\}$ ) und  $K = \mathbb{R}$  keine Unterschiede zu den üblichen Vorstellungen über „Gerade“ und „Ebene“ ergeben.

Falls  $k = n - 1$  ist, nennt man die  $k$ -Ebene auch eine **Hyperebene** des  $R_n$ .

Man prüft nun leicht nach, daß eine  $k$ -Ebene  $P + W$  die Axiome (R1)–(R3) des affinen Raums erfüllt, wenn man + auf die Mengen  $P + W$  und  $W$  beschränkt.  $P + W$  ist also ein affiner Raum mit dem zugehörigen Vektorraum  $W$ .

**Satz 5.3.1** Seien  $R_n$  ein affiner Raum und  $P, Q \in R_n$ . Außerdem seien  $U$  und  $W$  UVRe des zu  $R_n$  gehörenden VRs  $V_n$ . Dann gilt

$$P + U = Q + W \iff (\overrightarrow{PQ} \in U \wedge U = W).$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $P + U = Q + W$ . Da  $\mathfrak{o} \in W$ , gibt es ein  $\mathfrak{a} \in U$  mit  $P + \mathfrak{a} = Q + \mathfrak{o} = Q$ , d.h.,  $\mathfrak{a} = \overrightarrow{PQ} \in U$ . Entsprechend läßt sich auch  $\overrightarrow{QP} \in W$  beweisen. Sei jetzt  $\mathfrak{x}$  ein beliebiges Element aus  $W$ . Zu diesem  $\mathfrak{x}$  existiert ein  $\mathfrak{y} \in U$  mit  $P + \mathfrak{y} = Q + \mathfrak{x}$ . Wegen  $Q + \mathfrak{x} = (P + \overrightarrow{PQ}) + \mathfrak{x}$  ist  $\mathfrak{y} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}$ , d.h.,  $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - \mathfrak{a} \in U$ . Also gilt  $W \subseteq U$ . Analog zeigt man  $U \subseteq W$ , woraus sich  $U = W$  ergibt.

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $\overrightarrow{PQ} \in U$  und  $U = W$ . Offenbar gibt es dann ein  $\mathfrak{a} \in U$  mit  $P + \mathfrak{a} = Q$ . Damit gilt  $P + U = P + (\mathfrak{a} + U) = (P + \mathfrak{a}) + U = Q + U = Q + W$ . ■

Mit Hilfe einer Basis  $B_W := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k)$  des  $k$ -dimensionalen UVRs  $W$  läßt sich die  $k$ -Ebene  $P + W$  auch wie folgt beschreiben:

$$P + W = \{X \in R_n \mid \exists t_1, \dots, t_k \in K : X = P + t_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + t_k \cdot \mathfrak{b}_k\}.$$

Die Gleichung

$$X = P + t_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + t_k \cdot \mathfrak{b}_k$$

heißt eine **Parameterdarstellung** von  $P + W$  (mit den Parametern  $t_1, \dots, t_k$ ) und wir schreiben:

$$P + W : X = P + t_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + t_k \cdot \mathfrak{b}_k.$$

Bei konkreten Rechnungen wählen wir uns ein Koordinatensystem  $S = (A; B)$  des  $R_n$  und geben die  $k$ -Ebene in der folgenden Form an

$$P + W : X/S = P/S + t_1 \cdot (\mathfrak{b}_1/B) + \dots + t_k \cdot (\mathfrak{b}_k/B).$$

Neben den Parameterdarstellungen von  $k$ -Ebenen sind auch sogenannte parameterfreie Darstellungen üblich. Zunächst ein einfaches

**Beispiel** Im Raum  $\mathfrak{R}_3$  sei bez. eines Koordinatensystems  $S$  eine Gerade  $g$  mittels

$$g : X/S = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

charakterisiert, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 3t. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun  $t$  in der ersten und dritten Gleichung durch  $1 - y$ , so erhält man das LGS

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3y + z &= 3, \end{aligned}$$

das genau von denjenigen  $x, y, z$  erfüllt wird, für die ein  $t \in \mathbb{R}$  mit  $x = 2t$ ,  $y = 1 - t$  und  $z = 3t$  existiert. (Zum Beweis löse man das LGS und überzeuge sich davon, daß die Matrizendarstellung der allgemeinen Lösung bis auf die fehlenden Erkennungskoordinaten eine Parameterdarstellung von  $g$  bildet.) Folglich bestimmt das LGS die Gerade  $g$  eindeutig und wir haben mit dieser Charakterisierung von  $g$  eine sogenannte parameterfreie Darstellung erhalten. Allgemein gilt der

**Satz 5.3.2** Bezeichne  $S$  ein Koordinatensystem des  $R_n$  und sei  $X/S = (x_1, \dots, x_n)^T =: \mathfrak{x}$ . Dann gilt:

- (a) Für jede  $k$ -Ebene  $P + W$  des  $R_n$  existieren ein  $\mathfrak{A} \in K^{(n-k) \times n}$  und eine  $\mathfrak{b} \in K^{(n-k) \times 1}$  mit  $rg\mathfrak{A} = rg(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = n - k$  und

$$X \in P + W \iff \mathfrak{A} \cdot X/S = \mathfrak{b}.$$

- (b) Umgekehrt gibt es zu jedem LGS (\*)  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  mit  $rg\mathfrak{A} = rg(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = n - k$  eine  $k$ -Ebene  $P + W$  mit

$$P + W = \{X \mid \mathfrak{A} \cdot X/S = \mathfrak{b}\}.$$

*Beweis.* (a): Ist  $P + W (\subseteq R_n)$  eine  $k$ -Ebene und  $S := (A; B)$  ein Koordinatensystem des  $R_n$ , so gibt es  $k$  l.u. Vektoren  $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_k \in W$  mit

$$X \in P + W \iff X/S = P/S + t_1 \cdot (\mathfrak{c}_1/B) + \dots + t_k \cdot (\mathfrak{c}_k/B)$$

bzw.

$$X \in P + W \iff X/S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{l} x_1 - p_1 = c_{11}t_1 + \dots + c_{1k}t_k \\ x_2 - p_2 = c_{21}t_1 + \dots + c_{2k}t_k \\ \dots \\ x_n - p_n = c_{n1}t_1 + \dots + c_{nk}t_k \end{array}$$

$(\mathfrak{c}_i/B = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})^T, i = 1, \dots, k)$ .

Die Matrix  $(c_{ij})_{nk}$  besitzt wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_k$   $k$  l.u. Zeilen (siehe die Sätze 4.3.1, 4.3.2, 4.7.1).

O.B.d.A. seien die ersten  $k$  Zeilen von  $(c_{ij})_{nk}$  l.u. Dann ist  $|c_{ij}|_k \neq 0$ , womit die ersten  $k$  Gleichungen des obigen LGS eindeutig nach  $t_1, \dots, t_k$  auflösbar sind:

$$\begin{aligned} t_1 &= f_1(x_1, \dots, x_k) \\ &\vdots \\ t_k &= f_k(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Ersetzt man nun in den restlichen  $n - k$  Gleichungen des betrachteten LGS  $t_1, \dots, t_k$  durch diese Ausdrücke, so erhält man nach Zusammenfassungen und Umordnung der Summanden ein LGS des Typs (\*\*\*) (siehe Abschnitt 3.4). Umgekehrt sind die Lösungen dieses LGS die Koordinaten der Punkte aus  $P + W$ .

(b) folgt aus unseren Überlegungen über den Aufbau der Lösungen eines LGS im Kapitel 3. ■

Das zu einer  $k$ -Ebene  $P + W$  gehörende LGS (evtl. in Matrizenform aufgeschrieben) aus  $n - k$  Gleichungen nennen wir eine **parameterfreie Darstellung** von  $P + W$  und schreiben

$$P + W : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}.$$

Speziell lässt sich eine Hyperebene  $H$  des  $R_n$  in der Form

$$H : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

beschreiben, wobei  $a_1, \dots, a_n, b \in K$  und  $a_i \neq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Zu einer Geraden des  $R_n$  gehört ein LGS aus  $n - 1$  l.u. Gleichungen. Insbesondere können wir also eine Gerade  $g$  aus  $\mathfrak{R}_2$  durch

$$g : a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \quad ((a, b) \neq (0, 0)),$$

eine Ebene  $\varepsilon$  aus  $\mathfrak{R}_3$  durch

$$\varepsilon : a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d \quad ((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

und eine Gerade  $h$  aus  $\mathfrak{R}_3$  durch

$$\begin{aligned} h : \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{11} \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{21} \\ &(\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2) \end{aligned}$$

beschreiben.

## 5.4 Schnitt und Verbindung affiner Räume

**Satz 5.4.1** Der Durchschnitt („Schnitt“) von beliebigen Unterräumen  $E^{(i)} = P_i + W_i$  ( $i \in I$ ) eines affinen Raumes  $R_n$  ist entweder leer oder eine gewisse  $k$ -Ebene  $P + W$  mit  $P \in \bigcap_{i \in I} (P_i + W_i)$  und  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ .

*Beweis.* ÜA. ■

Seien  $P_1, \dots, P_{r+1} \in R_n$ . Dann heißt die Menge

$$E(P_1, \dots, P_{r+1}) := \bigcap_{\substack{E \\ \{P_1, \dots, P_{r+1}\} \subseteq E \subseteq R_n \\ E \text{ affiner Unterraum}}} E$$

ein von  $P_1, \dots, P_{r+1}$  aufgespannter affiner Unterraum bzw. eine von  $P_1, \dots, P_{r+1}$  aufgespannte  $t$ -Ebene des  $R_n$  (mit passend gewähltem  $t$ ). Offenbar ist  $E(P_1, \dots, P_{r+1})$  der kleinste affine Unterraum des  $R_n$ , der  $P_1, \dots, P_{r+1}$  enthält.

**Satz 5.4.2** Seien  $P_1, \dots, P_{r+1} \in R_n$ . Dann gilt für beliebiges  $i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ :

$$E(P_1, \dots, P_{r+1}) = P_i + [\{\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{r+1}}\}].$$

*Beweis.* ÜA. ■

**Definition** Seien  $P_1, \dots, P_{r+1} \in R_n$ . Man sagt

$P_1, \dots, P_{r+1}$  haben allgemeine Lage (bzw. sind l.u.) : $\iff$   
 $\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_{r+1}}$  l.u.

Als Folgerung aus 5.3 und Satz 5.4.2 ergibt sich der

**Satz 5.4.3** Auf jeder  $k$ -Ebene gibt es  $k+1$  Punkte in allgemeiner Lage, während je  $t$  Punkte mit  $t \geq k+1$  nicht in allgemeiner Lage sind. Durch je  $k+1$  Punkte in allgemeiner Lage geht genau eine  $k$ -Ebene. ■

Satz 5.4.3 verallgemeinert bekannte Aussagen der „Schulgeometrie“:

- Durch zwei Punkte  $P, Q$  mit  $P \neq Q$  aus  $\mathfrak{R}$  geht genau eine Gerade.
- Durch drei Punkte aus  $\mathfrak{R}_3$ , die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene.

**Definitionen** Seien  $E^{(i)} = P_i + W_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) affine Unterräume des  $R_n$ . Dann heißt die Menge

$$E^{(1)} + \dots + E^{(t)} := \{P_1 + \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in W_1 + \dots + W_t + [\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_t}\}]\}$$

die Verbindung der  $E^{(1)}, \dots, E^{(t)}$  bzw. man sagt:

$E^{(1)} + \dots + E^{(t)}$  wird von  $E^{(1)}, \dots, E^{(t)}$  aufgespannt.

**Beispiel** In  $\mathfrak{R}_3$  seien

$$E^{(1)} : X = P + t \cdot \mathfrak{a}$$

und

$$E^{(2)} : X = Q + s \cdot \mathfrak{b},$$

wobei bez. eines Koordinatensystems  $S = (A; B)$

$$P/S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q/S = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}/B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{b}/B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man prüft nun leicht nach, daß  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  l.u. sind. Folglich gilt  $E^{(1)} + E^{(2)} = P + [\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \overrightarrow{PQ}\}] = \mathfrak{R}_3$ .

**Definition** Seien  $R_n$  ein affiner Raum und  $P + W$  ein affiner Unterraum von  $R_n$ . Die Dimension von  $W$  nennen wir dann auch **Dimension von  $P + W$**  und bezeichnen sie mit

$$\dim(P + W).$$

#### Satz 5.4.4 (Dimensionssatz)

Seien  $E = P + W$  und  $E' = P' + W'$  zwei affine Unterräume des  $R_n$ . Dann gilt

$$\dim E + \dim E' = \dim(E + E') + \begin{cases} \dim(E \cap E') & \text{für } E \cap E' \neq \emptyset, \\ \dim(W \cap W') - 1 & \text{für } E \cap E' = \emptyset. \end{cases}$$

*Beweis.* 1. Fall:  $E \cap E' \neq \emptyset$ .

In diesem Fall gibt es ein  $P \in E \cap E'$  und es gilt  $E = P + W$  sowie  $E' = P + W'$ . Hieraus folgt  $E + E' = P + (W + W')$ , womit nach Satz 4.6.2  $\dim E + \dim E' = \dim W + \dim W' = \dim(W + W') + \dim(W \cap W') = \dim(E + E') + \dim(E \cap E')$  gilt.

2. Fall:  $E \cap E' = \emptyset$ .

Wir überlegen uns zunächst, daß in diesen Fall  $\overrightarrow{PP'}$  nicht zu  $W + W'$  gehört. Angenommen,  $\overrightarrow{PP'} \in W + W'$ . Dann ist aber  $\overrightarrow{PP'} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$  für gewisses  $\mathfrak{a} \in W$  und gewisses  $\mathfrak{a}' \in W'$  und  $P + \mathfrak{a} = P' - \mathfrak{a}' \in E \cap E'$ , im Widerspruch zu  $E \cap E' = \emptyset$ . Also gilt  $\dim(E + E') = \dim(W + W' + [\{\overrightarrow{PP'}\}]) = \dim(W + W') + 1$ .

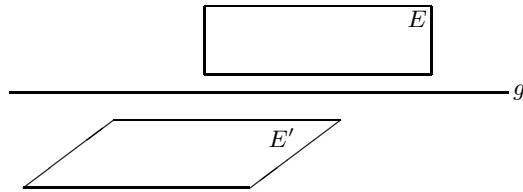
Hieraus ergibt sich dann unsere Behauptung mit Hilfe von Satz 4.6.2. ■

## 5.5 Parallele affine Unterräume

**Definitionen** Seien  $E = P + W$  und  $E' = P' + W'$  zwei affine Unterräume des  $R_n$ . Dann heißen

$E, E'$  **parallel** (im Zeichen:  $E \parallel E'$ ) : $\iff$   $W \subseteq W' \vee W' \subseteq W$ .

Man beachte: Falls  $\dim W = \dim W'$ , drückt die obige Definition genau das aus, was man sich anschaulich unter „parallel“ vorstellt. Insbesondere ist die Parallelität gleichdimensionaler Räume eine Äquivalenzrelation. Betrachtet man dagegen Parallelität verschiedendimensionaler Unterräume, so ist  $\parallel$  zwar reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv, wie folgendes Beispiel aus  $\mathfrak{R}_3$  zeigt:



Die Ebene  $E$  ist parallel zur Geraden  $g$  und  $g$  ist parallel zu  $E'$ , aber  $E$  ist nicht parallel zu  $E'$ .

Das Schnittverhalten paralleler Unterräume ist jedoch so, wie man es intuitiv erwartet:

**Satz 5.5.1** Seien  $E = P + W$  und  $E' = P' + W'$  zwei affine Unterräume des  $R_n$ . Dann gilt:

- (a)  $(E \cap E' \neq \emptyset \wedge E \parallel E') \implies (E \subseteq E' \vee E' \subseteq E)$ ;
- (b)  $(\neg(E \parallel E') \wedge \dim E = n - 1) \implies E \cap E' \neq \emptyset$ .

*Beweis.* (a) ergibt sich aus folgenden Implikationen:

$$E \cap E' \neq \emptyset \implies \exists Q \in E \cap E' \implies E = Q + W \wedge E' = Q + W';$$

$$E \parallel E' \implies W \subseteq W' \vee W' \subseteq W.$$

(b): Aus  $\neg(E \parallel E')$  (d.h.,  $W \not\subseteq W'$  und  $W' \not\subseteq W$ ) und  $\dim E = n - 1$  folgt  $W + W' = V_n$ . Also gehört  $\overrightarrow{PP'}$  zu  $W + W'$ , d.h., es gibt gewisse  $a$  und  $a'$  mit  $\overrightarrow{PP'} = a + a'$ ,  $a \in W$  und  $a' \in W'$ . Hieraus folgt nun  $P' - a' = P + a$ , wobei  $P' - a' \in E'$  und  $P + a \in E$  ist. Damit haben wir  $E \cap E' \neq \emptyset$ . ■

**Satz 5.5.2** Seien  $E = P + W$ ,  $E' = P' + W'$  und  $E'' = P'' + W''$  affine Unterräume des  $R_n$  und  $E'$  nicht parallel zu  $E''$ . Dann gilt

$$(E \parallel E' \wedge E \parallel E'') \iff (W \subseteq W' \cap W'' \vee W' + W'' \subseteq W).$$

*Beweis.* „ $\implies$ “: Aus den Voraussetzungen und der Definition der Parallelität folgt zunächst, daß

$$(W \subseteq W' \wedge W \subseteq W'') \vee (W' \subseteq W \wedge W'' \subseteq W)$$

gilt. Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$W \subseteq W' \cap W'' \vee W' + W'' \subseteq W.$$

„ $\iff$ “: Offenbar gilt

$$\begin{aligned} & W \subseteq W' \cap W'' \vee W' + W'' \subseteq W \\ \implies & (W \subseteq W' \wedge W \subseteq W'') \vee (W' \subseteq W \wedge W'' \subseteq W) \\ \implies & (E \parallel E' \wedge E \parallel E'') \vee (E' \parallel E \wedge E'' \parallel E). \end{aligned}$$

■

## Vektorräume mit Skalarprodukt (unitäre und euklidische VRe)

In diesem Kapitel soll zunächst das aus der Schule her bekannte Skalarprodukt wiederholt werden, für dessen Definition es Motivationen aus der Physik gibt (siehe z.B. [Bre-B 66], S. 56, [Böh 81-2], S. 197 oder [Dal-E 91], S. 710). Wir beschränken uns hier jedoch nur auf einige Anwendungen dieses (anschaulichen) Skalarproduktes in der Geometrie. Anschließend werden wir ein abstraktes Skalarprodukt für beliebige Vektorräume  $V$  über dem Körper  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  als eine Abbildung von  $V \times V$  in  $K$  definieren, die gewisse „Rechenregeln“ erfüllt, die auch für das anschauliche Skalarprodukt gelten. In den auf diese Weise erhaltenen Vektorräumen mit Skalarprodukt – den sogenannten **unitären** ( $K = \mathbb{C}$ ) bzw. **euklidischen Vektorräumen** ( $K = \mathbb{R}$ ) – lassen sich dann mit Hilfe des Skalarproduktes solche aus der Anschauung her bekannten Begriffe wie

„Betrag“, „Winkel“, „Orthogonalität“

einführen, die es uns ermöglichen werden, „anschauliche“ Konstruktionen aus  $\vec{V}_3$  auf die unitären bzw. euklidischen Vektorräume zu übertragen. Erste Anwendungen (und damit auch Motivationen) finden diese unsere Überlegungen dann u.a. im Kapitel 9.

### 6.1 Das Skalarprodukt in $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$

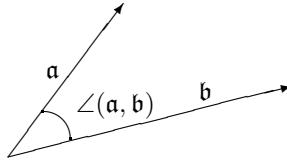
Wir übernehmen in diesem Abschnitt die in 4.1 und 4.8 eingeführten Bezeichnungen für die Anschauungsvektorräume  $\vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_3$  und die Anschauungspunkträume  $\mathfrak{R}_2$  bzw.  $\mathfrak{R}_3$ .

**Definitionen** Sind  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  zwei Vektoren aus  $\vec{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ , so verstehen wir unter  $\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$  („**Winkel zwischen  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$** “) den Drehwinkel<sup>1</sup>, um den ein Repräsentant des Vektor  $\mathfrak{a}$  gedreht werden muß, damit er die Richtung

---

<sup>1</sup> Meist im Bogenmaß angegeben.

und Orientierung eines Repräsentanten des Vektors  $\mathbf{b}$  hat. Außerdem gelte  $0 \leq \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$ , damit  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  eindeutig bestimmt ist.



Die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V}$  heißen **senkrecht zueinander** oder **orthogonal** (Bezeichnung:  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ), wenn  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/2$  oder wenn  $\mathbf{o} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

Einen Vektor  $\mathbf{a} \in \overrightarrow{V}$  wollen wir **normiert** bzw. einen **Einheitsvektor** nennen, wenn die Länge seiner Repräsentanten 1 beträgt.

Für  $\overrightarrow{V}_2$  fixieren wir im folgenden zwei orthogonale und normierte Vektoren

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}$$

sowie für  $\overrightarrow{V}_3$  die paarweise aufeinander senkrecht stehenden und normierten Vektoren

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

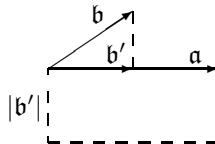
(Später werden wir noch verlangen, daß  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  außerdem ein sogenanntes Rechtssystem bildet. Wie man allgemein Rechtssysteme definieren kann, wird im Abschnitt 6.6 erläutert.)

**Definition** Für beliebige  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V}$  sei

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathbf{a} = \mathbf{o} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{o}, \\ |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{sonst} \end{cases}$$

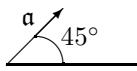
das **Skalarprodukt** der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

Das skalare Produkt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  kann geometrisch als Maßzahl derjenigen Rechteckfläche verstanden werden, die vom Betrag des Vektors  $\mathbf{a}$  und vom Betrag der Projektion  $\mathbf{b}'$  des Vektors  $\mathbf{b}$  auf  $\mathbf{a}$  gebildet wird:



### Beispiele

(1.) Die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V}_2$  seien wie folgt gewählt:



$$|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 4, \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/4.$$

Dann gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 4 \cdot (1/2) \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ .

(2.) Für die oben definierten Vektoren  $i, j, k$  aus  $\vec{V}_3$  haben wir

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

und

$$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0.$$

Nachfolgend werden wir zumeist das Skalarprodukt  $a \cdot b$  nicht nach Definition bestimmen, sondern uns der im nächsten Satz angegebenen Rechenregeln bedienen.

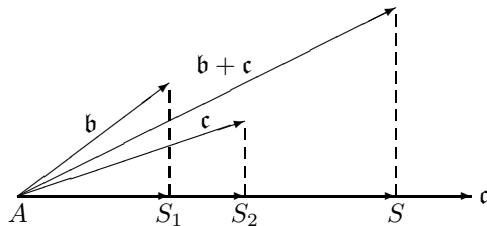
### Satz 6.1.1 (Eigenschaften des Skalarproduktes)

Für beliebige  $a, b, c \in \vec{V}$  und beliebiges  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $a \cdot b = b \cdot a$ ,
- (b)  $\lambda \cdot (a \cdot b) = (\lambda \cdot a) \cdot b = a \cdot (\lambda \cdot b)$ ,
- (c)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,
- (d)  $a^2 := a \cdot a = |a|^2 \geq 0$ ,
- (e)  $a \cdot a = 0 \iff a = 0$ ,
- (f)  $a \perp b \iff a \cdot b = 0$ ,
- (g)  $a / (i, j, k) = (a_1, a_2, a_3)^T \wedge b / (i, j, k) = (b_1, b_2, b_3)^T \implies a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ .

*Beweis.* (a), (b) und (d)–(f) folgen unmittelbar aus der Definition des Skalarproduktes und den Eigenschaften der cos-Funktion.

(c): Aus der Abbildung



ergibt sich:

$$a \cdot (b + c) = |a| \cdot |b + c| \cdot \cos \angle(a, b + c) = |a| \cdot |\overrightarrow{AS}|,$$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \angle(a, b) = |a| \cdot |\overrightarrow{AS_1}|,$$

$$a \cdot c = |a| \cdot |c| \cdot \cos \angle(a, c) = |a| \cdot |\overrightarrow{AS_2}|.$$

Addition der letzten beiden Gleichungen liefert

$$a \cdot b + a \cdot c = |a| \cdot (|\overrightarrow{AS_1}| + |\overrightarrow{AS_2}|) = |a| \cdot |\overrightarrow{AS}|.$$

Also ist unsere Behauptung (c) für den oben skizzierten Fall richtig. Den Beweis für die anderen möglichen Fälle der Lage von  $a, b$  und  $c$  überlegt man sich analog.

(g) rechnet man leicht mit Hilfe von (f) und (b) nach. ■

### Einige Anwendungen des Skalarproduktes (bei Ausnutzung von Satz 6.1.1)

#### (I.) als Beweishilfsmittel

##### (1.) Beweis eines Spezialfalles der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

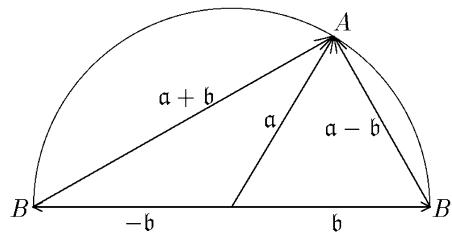
$\forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R} :$

$$(a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c')^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Aus der Definition des Skalarproduktes und  $|\cos x| \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ergibt sich  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$  bzw.  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ . Wählt man nun  $\mathbf{a}/(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (a, b, c)^T$  und  $\mathbf{b}/(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (a', b', c')^T$ , so folgt hieraus mit Hilfe von Satz 6.1.1, (d), (g) die behauptete Ungleichung.

##### (2.) Beweis des Thalessatzes

Wählt man die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  wie in der nachfolgenden Zeichnung angegeben,

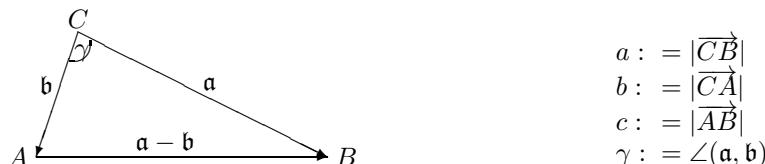


so gilt wegen  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ :

$A - B' = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $A - B = \mathbf{a} - (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0$ , d.h., die Vektoren  $A - B$  und  $A - B'$  sind orthogonal zueinander. Dies ist jedoch gerade der Inhalt des Thalessatzes.

##### (3.) Beweis des Kosinussatzes

Aus der Zeichnung

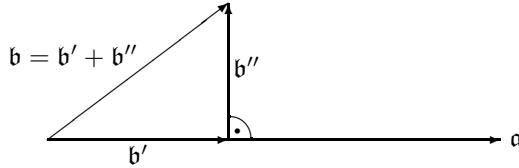


folgt:  $c^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ , womit für das obige Dreieck  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$  („Kosinussatz“) gilt.

## (II.) in der Geometrie

### (4.) Zerlegung eines Vektors in Parallel- und Normalkomponente

Seien  $\mathbf{a} \in \vec{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{b} \in \vec{V}$ . Der Vektor  $\mathbf{b}$  lässt sich dann als Summe eines zu  $\mathbf{a}$  parallelen Vektors  $\mathbf{b}'$  und eines zu  $\mathbf{a}$  orthogonalen Vektors  $\mathbf{b}''$  darstellen:  $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$ .



$\mathbf{b}'$  wird dabei die **Parallel-** und  $\mathbf{b}''$  die **Normalkomponente** von  $\mathbf{b}$  bez.  $\mathbf{a}$  genannt.

Zwecks Bestimmung von  $\mathbf{b}'$  und  $\mathbf{b}''$  multiplizieren<sup>2</sup> wir die Gleichung  $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'' (= \lambda \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}'' \text{ für ein gewisses } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ da } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}')$  skalar mit  $\mathbf{a}$  und erhalten wegen  $\mathbf{b}'' \perp \mathbf{a}: \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a}^2$ , woraus

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{b}' &= \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a}^2}\right) \cdot \mathbf{a} \quad ^3 \\ \mathbf{b}'' &= \mathbf{b} - \mathbf{b}'\end{aligned}}$$

folgt.

### (5.) Abstand eines Punktes $Q$ von einer Geraden $g$ ( $\subseteq \Re_2$ oder $\subseteq \Re_3$ ) und Projektion $Q'$ eines Punktes $Q$ auf $g$

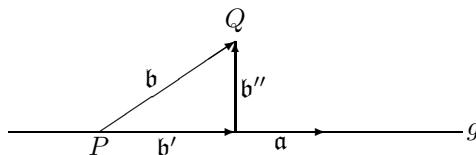
Seien  $g: X = P + \lambda \cdot \mathbf{a}$ ,  $Q \in \Re$  und  $\mathbf{b} := Q - P$ . Unter Verwendung von (4.) erhält man dann:

$$\ell (:= \text{Abstand von } Q \text{ zu } g) = |\mathbf{b}''|$$

und

$$Q' (:= \text{Projektion von } Q \text{ auf } g) = P + \mathbf{b}',$$

wie man sich anhand folgender Skizze leicht klar macht:



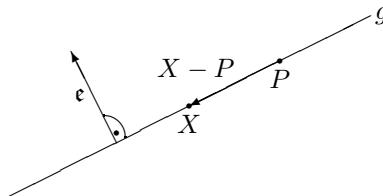
<sup>2</sup> Ein oft recht brauchbarer „Trick“ zur Ermittlung von skalaren Faktoren  $\lambda$  in Vektorgleichungen! Siehe dazu auch den Beweis von Satz 6.5.2 aus Abschnitt 6.5.

<sup>3</sup> Bitte nicht kürzen!

(6.) **Hessesche<sup>4</sup> Form einer Geraden  $g$  in der Ebene und Hessesche Form einer Ebene  $\varepsilon$  im Raum**

Bezeichne  $g : X = P + \lambda \cdot \mathbf{a}$  eine Gerade der Ebene und sei  $\mathbf{e}$  ein Vektor aus  $\overrightarrow{V_2}$ , der auf  $g$  senkrecht steht. Dann gilt offenbar für jeden Punkt  $X \in \mathfrak{R}_2$ :

$$X \in g \iff (X - P) \perp \mathbf{e} \iff (X - P) \cdot \mathbf{e} = 0.$$



Folglich wird die Gerade  $g$  ( $\subseteq \mathfrak{R}_2$ ) vollständig durch die Gleichung  $(X - P) \cdot \mathbf{e} = 0$  charakterisiert. Wir schreiben

$$g : (X - P) \cdot \mathbf{e} = 0$$

und nennen diese Darstellung von  $g$  die **Hessesche Form von  $g$**  bzw. **Hessesche Normalform** der Geraden  $g$ , falls  $|\mathbf{e}| = 1$  ist. (Hat  $\mathbf{e}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) nicht die Länge 1, so erhält man durch  $\frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot \mathbf{e}$  einen zu  $g$  orthogonalen Vektor der Länge 1.)

Wählt man als Koordinatensystem  $S := (A, B)$ ,  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j})$  und  $X/S = (1; x, y)^T$ ,  $P := (1; p, q)^T$  und  $\mathbf{e} := (0; a, b)^T$ , so lässt sich die obige Hessesche Form von  $g$  auch wie folgt aufschreiben:

$$g : a \cdot x + b \cdot y - (p \cdot a + q \cdot b) = 0,$$

womit wir die bereits bekannte parameterfreie Darstellung einer Geraden in der Ebene auf etwas andere Weise hergeleitet haben. Man erkennt übrigens anhand obiger Rechnung, daß aus  $g : ax + by + c = 0$  (bezogen auf  $S$ ) sofort ein Vektor  $\mathbf{e}$  mit  $\mathbf{e} \perp g$  ablesbar ist:

$$\mathbf{e}/(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (0; a, b)^T.$$

**Beispiel** Bezogen auf das obige Koordinatensystem  $S$  sei

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wählt man nun  $P/S := (1; 2, 3)^T$  und  $\mathbf{e}/B := (0; 5, 1)^T$ , so erhält man als Hessesche Form von  $g$ :

---

<sup>4</sup> Ludwig Otto Hesse (1811–1874), deutscher Mathematiker.

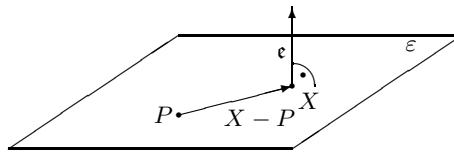
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ = 5 \cdot (x-2) + (y-3).$$

Also:  $g : 5 \cdot x + y - 13 = 0$ .

In Verallgemeinerung der obigen Überlegungen betrachten wir jetzt eine Ebene  $\varepsilon : X = P + \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b}$  des Raumes  $\Re_3$ .

Falls  $\mathbf{e}$  einen Vektor bezeichnet, der auf  $\varepsilon$  senkrecht steht (d.h., es gilt  $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$  und  $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}$ ), haben wir analog zu oben für alle  $X \in \Re_3$ :

$$X \in \varepsilon \iff (X - P) \perp \varepsilon \iff (X - P) \cdot \mathbf{e} = 0.$$



Also läßt sich die Ebene  $\varepsilon$  auch wie folgt durch eine sogenannte **Hessische Form** charakterisieren:

$$\boxed{\varepsilon : (X - P) \cdot \mathbf{e} = 0},$$

die ebenfalls **Hessesche Normalform** genannt wird, falls  $|\mathbf{e}| = 1$  ist.  
Bez. des Koordinatensystems  $S := (A; B)$  mit  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  und mit Hilfe der Bezeichnungen  $X/S := (1; x, y, z)^T$ ,  $P/S := (1; p, q, r)^T$ ,  $\mathbf{e}/B := (0; a, b, c)^T$  lautet die Hessesche Form von  $\varepsilon$ :

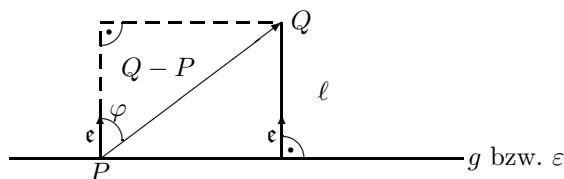
$$\varepsilon : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - (a \cdot p + b \cdot q + c \cdot r) = 0.$$

Man beachte, daß auch in diesem Fall aus der parameterfreien Darstellung einer Ebene  $\varepsilon : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$  (bez.  $S$ ) stets ein zu  $\varepsilon$  senkrechter Vektor  $\mathbf{e}$  ablesbar ist:

$$\mathbf{e}/B = (0; a, b, c)^T.$$

#### (7.) Abstand eines Punktes $Q$ von einer Geraden $g \subset \Re_2$ und Abstand eines Punktes $Q$ von einer Ebene $\varepsilon \subseteq \Re_3$

Sei die Gerade  $g$  (bzw. die Ebene  $\varepsilon$ ) durch eine Hessesche Form gegeben:  
 $g$  (bzw.  $\varepsilon$ ):  $(X - P) \cdot \mathbf{e} = 0$ . Aus der Zeichnung



ist dann für den Abstand  $\ell$  von  $Q$  zu  $g$  (bzw.  $\varepsilon$ ) folgende Formel ablesbar:

$$\begin{aligned}\ell &= |Q - P| \cdot \cos \varphi \\ &= |Q - P| \cdot |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}|^{-1} \cdot \cos \angle(Q - P, \mathbf{e}) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot (Q - P) \cdot \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Falls  $\mathbf{e}$  nicht wie in der Zeichnung angegeben nach oben, sondern nach unten zeigt, erhält man analog:

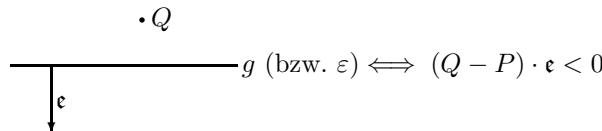
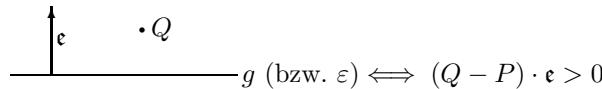
$$\ell = -\frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot (Q - P) \cdot \mathbf{e}.$$

Also:

$$\boxed{\ell = \left| \frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot (Q - P) \cdot \mathbf{e} \right|},$$

d.h., man erhält  $\ell$ , indem man in der linken Seite der Hesseschen Normalform von  $g$  (bzw.  $\varepsilon$ )  $X$  durch  $Q$  ersetzt und den Betrag des berechneten Wertes bildet.

Außerdem folgt aus unseren obigen Überlegungen:



### (8.) Abstand zweier windschiefer Geraden $g, h$ des Raumes

Zwei Geraden  $g$  und  $h$  des Raumes  $\mathfrak{R}_3$ , die gegeben sind durch

$$g : X = P + \lambda \cdot \mathbf{a}$$

und

$$h : X = Q + \mu \cdot \mathbf{b},$$

sind bekanntlich zueinander windschief, wenn sie nicht parallel zueinander liegen und sich nicht schneiden, d.h., es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}, \mathbf{b} &\text{ l.u.} & \text{und} \\ g \cap h &= \emptyset.\end{aligned}$$

Folglich liegen  $g$  und  $h$  in (eindeutig bestimmten) parallelen Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ :

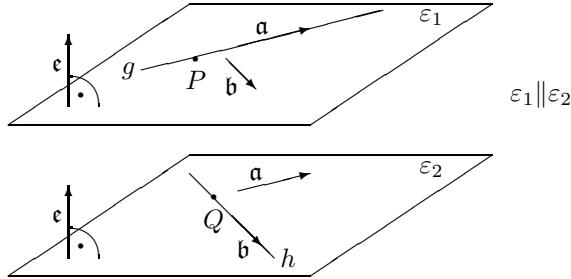
$$\varepsilon_1 : X = P + r \cdot \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b}$$

$$\varepsilon_2 : X = Q + t \cdot \mathbf{a} + u \cdot \mathbf{b},$$

und der Abstand  $\ell$  von  $g$  zu  $h$  ist gleich dem Abstand von  $\varepsilon_1$  zu  $\varepsilon_2$  (oder  $Q$ ), der sich wiederum nach unseren Überlegungen aus (7.) durch

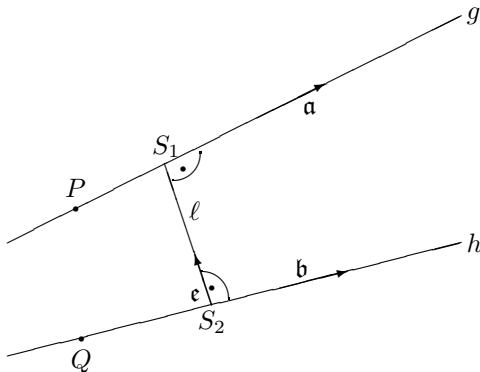
$$\ell = \left| \frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot (Q - P) \cdot \mathbf{e} \right|,$$

wobei  $\mathbf{e} \perp \mathbf{a}$  und  $\mathbf{e} \perp \mathbf{b}$  gelten muß, berechnen läßt.



( $\mathbf{e}$  läßt sich leicht (als eine Lösung eines LGS mit unendlich vielen Lösungen) aus  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$  und  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 0$  berechnen. Aus Abschnitt 6.6 wird sich auch noch die Möglichkeit  $\mathbf{e} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ergeben.)

Eine andere Möglichkeit der Berechnung des Abstandes von  $g$  zu  $h$ , wobei auch noch die Fußpunkte  $S_1, S_2$  der Lote von  $h$  auf  $g$  und  $g$  auf  $h$  berechnet werden, kann man der folgenden Skizze und den sich aus ihr ergebenen Gleichungen entnehmen:



$$S_1 = P + \lambda \cdot \mathbf{a} \quad S_2 = Q + \mu \cdot \mathbf{b}$$

$$S_1 = S_2 + t \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Aus dem LGS  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 0$  ist nämlich ein  $\mathbf{e}$  berechenbar, mit dessen Hilfe dann aus der Gleichung

$$P + \lambda \cdot \mathbf{a} = Q + \mu \cdot \mathbf{b} + t \cdot \mathbf{e}$$

die eindeutig bestimmten Parameter  $\lambda, \mu$  und  $t$  bestimbar sind, die wiederum nach obigen Gleichungen die Berechnungen von  $S_1, S_2$  und  $\ell = |S_1 - S_2|$  ermöglichen. Dazu ein

**Beispiel** Wir wählen das Koordinatensystem  $S := (A; B)$  mit  $B = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Außerdem seien

$$\begin{aligned} g : \quad X &= P + \lambda \cdot \mathbf{a}, \\ h : \quad X &= Q + \mu \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

mit  $P/S = (1; 0, 1, 2)^T, \mathbf{a}/B = (0; 1, -1, 3)^T, Q/S = (1; 0, 1, 0)^T$  und  $\mathbf{b}/B = (0; 1, 4, 1)^T$ .

Falls  $\mathbf{e}/B = (0; e_1, e_2, e_3)^T$ , folgt aus  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 0$  das LGS

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 + 3e_3 &= 0 \\ e_1 + 4e_2 + e_3 &= 0, \end{aligned}$$

das z.B. die Lösung  $e_1 = -13, e_2 = 2$  und  $e_3 = 5$  hat. Die Gleichung  $P + \lambda \cdot \mathbf{a} = Q + \mu \cdot \mathbf{b} + t \cdot \mathbf{e}$  führt dann auf das LGS

$$\begin{aligned} \lambda - \mu + 13t &= 0 \\ -\lambda - 4\mu - 2t &= 0 \\ 3\lambda - \mu - 5t &= -2, \end{aligned}$$

dessen einzige Lösung

$$\lambda = -108/198, \quad \mu = 22/198, \quad t = 10/198$$

ist. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} S_1 &= P + \lambda \cdot \mathbf{a} = (1; -108/198, 306/198, 72/198)^T, \\ S_2 &= Q + \mu \cdot \mathbf{b} = (1; 22/198, 286/198, 22/198)^T, \\ S_1 - S_2 &= 10/198 \cdot (0; -13, 2, 5)^T \quad \text{und} \\ |S_1 - S_2| &= 10/\sqrt{198}. \end{aligned}$$

#### (9.) Richtungskosinus

Bildet man der Reihe nach das Skalarprodukt von  $\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} + a_3 \cdot \mathbf{k}$  mit  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , so erhält man

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

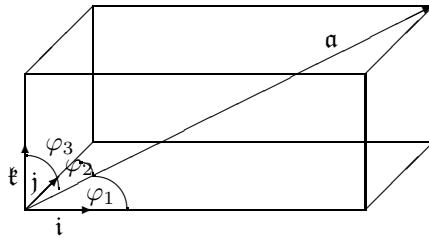
Da nach Definition des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} &= |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{i}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} &= |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{j}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} &= |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{k})\end{aligned}$$

gilt, ergibt sich hieraus

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{i}) \\ \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{j}) \\ \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{k}) \end{pmatrix},$$

was der anschaulichen Vorstellung entspricht, daß ein Repräsentant von  $\mathbf{a}$  durch seine Länge und die Winkel zu den Repräsentanten der Basisvektoren eindeutig bestimmt ist:



Die Werte  $\cos \varphi_1 := \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{i})$ ,  $\cos \varphi_2 := \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{j})$ ,  $\cos \varphi_3 := \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{k})$  heißen die **Richtungskosinus** von  $\mathbf{a}$ , die in älteren Geometriebüchern der analytischen Geometrie eine wesentliche Rolle spielten. Zwischen den Richtungskosinus eines Vektors besteht übrigens folgende Beziehung:

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$$

(Beweis: ÜA).

#### (10.) Winkel zwischen Vektoren, Geraden und Ebenen

Unmittelbar aus der Definition des Skalarproduktes folgt für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \vec{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

bzw., falls  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \vec{V}_3$ ,  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{a}/B = (a_1, a_2, a_3)^T$  und  $\mathbf{b}/B = (b_1, b_2, b_3)^T$ :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

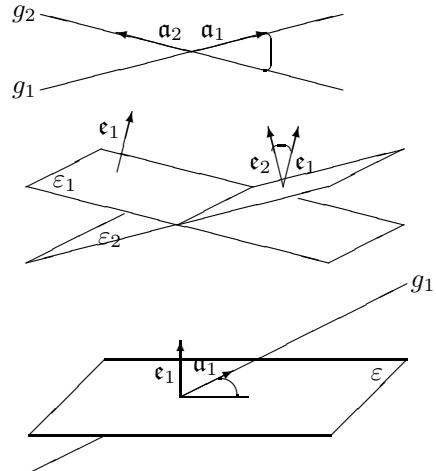
Seien  $g_i$ :  $X = P_i + t \cdot \mathbf{a}_i$ ,  $\varepsilon_i$ :  $(X - Q_i) \cdot \mathbf{e}_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) zwei Geraden

in Parameterdarstellung sowie zwei Ebenen in Hessescher Form. Schnitzen sich

- (a)  $g_1$  und  $g_2$
- (b)  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$
- (c)  $g_1$  und  $\varepsilon_1$ ,

so definieren wir den Winkel  $\varphi$  zwischen  $g_1, g_2$  bzw.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  bzw.  $g_1, \varepsilon_1$  durch:

$$(a) \min\{\angle(\alpha_1, \alpha_2), \angle(-\alpha_1, \alpha_2)\};$$



$$(b) \min\{\angle(\epsilon_1, \epsilon_2), \angle(-\epsilon_1, \epsilon_2)\};$$

$$(c) \pi/2 - \min\{\angle(\alpha_1, \epsilon_1), \angle(-\alpha_1, \epsilon_1)\},$$

womit die Berechnung dieser Winkel mit Hilfe obiger Formeln möglich ist.

## 6.2 Das Skalarprodukt in Vektorräumen über den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

**Definitionen**  $V$  bezeichne einen VR über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Unter einem **Skalarprodukt** verstehen wir dann eine Abbildung

$$\varphi : V \times V \rightarrow K,$$

die jedem Paar von Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  eine Zahl  $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K$  so zuordnet, daß gilt:

(S1) das Skalarprodukt ist **bilinear** (bzw.  $\varphi$  bildet eine **Bilinearform**), d.h.,

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in K :$$

$$\varphi(\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta \cdot \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \wedge$$

$$\varphi(\mathbf{a}, \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c}) = \overline{\beta} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \overline{\gamma} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c})$$

( $\overline{z}$  bezeichnet dabei die zu  $z \in \mathbb{C}$  konjugiert komplexe Zahl, siehe Kapitel 3);

- (S2) das Skalarprodukt ist für  
 $K = \mathbb{R}$  **symmetrisch**, d.h.,

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

und für

$K = \mathbb{C}$  **hermitisch**<sup>5</sup>, d.h.,

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})};$$

- (S3) das Skalarprodukt ist **positiv definit**, d.h.,

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R} \wedge \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0) \\ \wedge \quad & (\forall \mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}). \end{aligned}$$

### Beispiele

- (1.) Für den VR  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{n \times 1}}$  läßt sich ein Skalarprodukt (das sogenannte **Standardskalarprodukt** bzw. **innere Produkt**) mit Hilfe der Matrizenmultiplikation wie folgt definieren:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$$

bzw., falls  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  und  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ ,

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

- (2.) Man rechnet leicht nach (ÜA A.6.2), daß für den VR  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}^{n \times 1}}$  die durch

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{a}^T \cdot \overline{\mathbf{b}}$$

( $\overline{\mathbf{b}} := (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n})^T$ , falls  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ ) definierte Abbildung ein Skalarprodukt ist. Auch dieses Skalarprodukt heißt **Standardskalarprodukt**.

- (3.) Wählt man als VR die Menge aller stetigen Funktionen  $C[a, b]$  über dem Intervall  $[a, b]$  (siehe S. 159) und ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0$ , so ist die durch

$$\forall f, g \in C[a, b] : \varphi(f, g) := \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

definierte Abbildung ein Skalarprodukt dieses VRs.

- (4.) Für den VR  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{2 \times 1}}$  betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) : &= 2a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + 3 \cdot b \cdot d \\ &= (a, b) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> Auch üblich ist die Bezeichnung „hermitesch“, die sich aus dem Namen des französischen Mathematikers Charles Hermite (1822–1901) ableitet.

Aus der Matrizendarstellung von  $\varphi$  folgt, daß  $\varphi$  bilinear und symmetrisch ist. Für den Nachweis der positiven Definitheit formen wir  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$  ( $\mathfrak{x} := (a, b)^T$ ) um:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) &= 2a^2 + ab + ba + 3b^2 = a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + 2b^2 \\ &= a^2 + (a + b)^2 + 2b^2.\end{aligned}$$

Offenbar folgt hieraus  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0$  für alle  $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  und  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$  g.d.w.  $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ . Also ist  $\varphi$  ein Skalarprodukt.

**Definitionen** Ein VR über  $K$  mit Skalarprodukt heißt

- **euklidisch** : $\iff K = \mathbb{R}$ ,
- **unitär** : $\iff K = \mathbb{C}$ .

**Satz 6.2.1** Es sei  $V_n$  ein  $n$ -dimensionaler VR über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und

$$\varphi : V \times V \rightarrow K$$

eine Abbildung, die bilinear ist. Außerdem sei  $B := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis von  $V_n$ . Dann existiert eine (von  $B$  abhängige)  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}_\varphi$  mit

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}/B \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{y}/B},$$

wobei

$$\mathfrak{A}_\varphi := \begin{pmatrix} \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_n) \\ \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n) \end{pmatrix}.$$

(„Gramsche<sup>6</sup> Matrix“).

Umgekehrt ist jede Abbildung der Form

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}/B \cdot \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{y}/B}$$

für jedes  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  eine Bilinearform von  $V \times V$  in  $K$  und es gilt  $\mathfrak{A} = (\varphi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j))_{n,n}$ .

*Beweis.* Es seien  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V_n$  mit  $\mathfrak{x}/B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  und  $\mathfrak{y}/B = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  beliebig gewählt. Da  $\varphi$  eine Bilinearform ist, gilt dann

---

<sup>6</sup> Jorgen Pedersen Gram (1850–1916), norwegischer Mathematiker.

$$\begin{aligned}
& \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \\
&= \varphi(x_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{b}_n, y_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + y_n \cdot \mathfrak{b}_n) \\
&= \varphi(x_1 \cdot \mathfrak{b}_1, y_1 \cdot \mathfrak{b}_1) + \varphi(x_1 \cdot \mathfrak{b}_1, y_2 \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + \varphi(x_1 \cdot \mathfrak{b}_1, y_n \cdot \mathfrak{b}_n) + \\
&\quad \varphi(x_2 \cdot \mathfrak{b}_2, y_1 \cdot \mathfrak{b}_1) + \varphi(x_2 \cdot \mathfrak{b}_2, y_2 \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + \varphi(x_2 \cdot \mathfrak{b}_2, y_n \cdot \mathfrak{b}_n) + \\
&\quad \dots + \\
&\quad \varphi(x_n \cdot \mathfrak{b}_n, y_1 \cdot \mathfrak{b}_1) + \varphi(x_n \cdot \mathfrak{b}_n, y_2 \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + \varphi(x_n \cdot \mathfrak{b}_n, y_n \cdot \mathfrak{b}_n) \\
&= x_1 \cdot \overline{y_1} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) + x_1 \cdot \overline{y_2} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) + \dots + x_1 \cdot \overline{y_n} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_n) + \\
&\quad x_2 \cdot \overline{y_1} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1) + x_2 \cdot \overline{y_2} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2) + \dots + x_2 \cdot \overline{y_n} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_n) + \\
&\quad \dots + \\
&\quad x_n \cdot \overline{y_1} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_1) + x_n \cdot \overline{y_2} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_2) + \dots + x_n \cdot \overline{y_n} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n) \\
&= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1}\varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) & \dots & \overline{y_n}\varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_n) \\ \overline{y_1}\varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1) & \dots & \overline{y_n}\varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_n) \\ \dots & & \dots \\ \overline{y_1}\varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_1) & \dots & \overline{y_n}\varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n) \end{pmatrix} \\
&= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_n) \\ \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_n) \\ \dots & & & \dots \\ \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_1) & \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_2) & \dots & \varphi(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} \\
&= \mathfrak{x}/B \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{y}/B}.
\end{aligned}$$

Also läßt sich eine Bilinearform in der behaupteten Matrizenform darstellen. Daß auch umgekehrt eine Abbildung der Form  $\varphi_{\mathfrak{A}}$  eine Bilinearform ist, rechnet man leicht mit Hilfe der in den Sätzen 3.2.2, 3.2.7 und 3.2.8 aus Kapitel 3 angegebenen Eigenschaften der Matrizenoperationen nach (ÜA). Ist  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{n,n}$ , so gilt wegen  $\mathfrak{b}_k/B = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)^T$  ( $k = i, j$ ) ferner  $\varphi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j) = \mathfrak{b}_{i/B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{b}_{j/B}} = a_{ij}$ . ■

Satz 6.2.1 ermöglicht es uns, die Bedingungen (S2) und (S3) aus der Definition eines Skalarproduktes für endlich-dimensionale Vektorräume durch Eigenschaften der Matrix  $\mathfrak{A}_\varphi$  zu beschreiben:

**Satz 6.2.2** Bezeichne  $\varphi$  eine Bilinearform eines  $n$ -dimensionalen VRs  $V$  über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann gilt:

$$(a) \varphi \text{ ist symmetrisch} \iff \mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi^T,$$

$$(b) \varphi \text{ ist hermitisch} \iff \mathfrak{A}_\varphi = \overline{\mathfrak{A}_\varphi^T}.$$

*Beweis.* (a) „ $\implies$ “: Sei  $\varphi$  symmetrisch und bezeichne  $B := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis von  $V_n$ . Dann gilt für beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V_n$  nach Definition sowie nach Satz 6.2.1:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbf{a}^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{b} / B \\ &= \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b}^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{a} / B,\end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{A}_\varphi = (\varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j))_{n,n}$ . Wählt man nun speziell  $\mathbf{a} = \mathbf{b}_i$  und  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so haben wir  $\mathbf{b}_k / B = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)^T$  ( $k \in \{i, j\}$ ) und aus obigen Gleichungen folgt

$$\varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \mathbf{b}_i^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{b}_j / B = \mathbf{b}_j^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{b}_i / B = \varphi(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i).$$

Also gilt  $\mathbf{A}_\varphi = \mathbf{A}_\varphi^T$ .

„ $\Leftarrow$ “: Falls  $\mathbf{A}_\varphi = \mathbf{A}_\varphi^T$  ist, haben wir

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbf{a}^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{b} / B = (\mathbf{a}^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{b} / B)^T = \mathbf{b}^T / B \cdot (\mathbf{A}_\varphi^T)^T \cdot (\mathbf{a}^T / B)^T \\ &= \mathbf{b}^T / B \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{a} / B = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})\end{aligned}$$

für beliebige  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ , womit  $\varphi$  eine symmetrische Bilinearform bildet.

(b) beweist man analog. ■

**Satz 6.2.3** Bezeichne  $\varphi$  eine symmetrische (oder hermitische) Bilinearform des  $n$ -dimensionalen VRs  $V_n$  mit

$$\mathbf{A}_\varphi = (a_{ij})_n$$

bez. der Basis  $B := (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V_n$ .

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a)  $\varphi$  ist positiv definit (und damit ein Skalarprodukt).
- (b)  $\exists \mathbf{B} \in K^{n \times n} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}_\varphi \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0 \wedge \dots \wedge \lambda_n > 0.$$

- (c)  $\forall r \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$H_r := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0$$

(d.h., die sogenannten **Hauptminoren**  $H_1, \dots, H_n$  von  $\mathbf{A}_\varphi$  sind alle aus  $\mathbb{R}$  und positiv).

*Beweis.* Um den Beweis möglichst einfach zu führen, benötigen wir noch den Satz 6.5.2 aus diesem Kapitel sowie Satz 8.3.8 aus Kapitel 8. Dem Leser sei deshalb empfohlen, sich die nachfolgenden Überlegungen nach dem Beweis von Satz 8.3.8 noch einmal anzusehen.

O.B.d.A. sei  $K = \mathbb{C}$ . Dann ist  $\varphi$  als bilinear und hermitisch, womit es nach Satz 6.2.1 zu jeder Basis  $B := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Matrix  $\mathfrak{A}_\varphi := ((\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j))_{n,n} \in K^{n \times n}$  mit

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : \varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}/B \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{b}/B}$$

gibt.

(a)  $\Rightarrow$  (b): Sei zunächst  $\varphi$  ein Skalarprodukt.

Wegen Satz 6.5.2 (S. 223) existiert dann in  $V$  eine (bez.  $\varphi$ ) orthonormierte Basis  $B' := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_n)$ , für die es eine Matrix  $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(B, B')$  (siehe S. 183) mit

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \mathfrak{x}/B = \mathfrak{M}(B, B') \cdot \mathfrak{x}/B'$$

gibt. Folglich erhalten wir für beliebige  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{x}/B')^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{y}/B')} \\ &= \mathfrak{x}/B' \cdot \underbrace{(\mathfrak{M}^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{M}})}_{= (\varphi(\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{b}'_j))_{n,n}} \cdot \overline{\mathfrak{y}/B'} \\ &= (\varphi(\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{b}'_j))_{n,n} = \mathfrak{E}_n, \end{aligned}$$

womit  $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$  und  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$  die Behauptung erfüllen.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Umgekehrt erfülle nun die bilineare und hermitische Abbildung  $\varphi$  die Bedingung (a). Unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes 3.2.5 zeigt man leicht, daß  $|\mathfrak{B}| \neq 0$  ist. Mit Hilfe von  $\mathfrak{B}$  läßt sich dann eine Basis  $B'$  von  $V_n$  definieren, so daß  $\mathfrak{x}/B = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}/B'$  für beliebige  $\mathfrak{x} \in V$  gilt. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \mathfrak{x}/B' \cdot \underbrace{\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{B}}}_{\left( \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{array} \right)} \cdot \overline{\mathfrak{y}/B'} \\ &= \lambda_1 \cdot x'_1 \cdot \overline{y'_1} + \lambda_2 \cdot x'_2 \cdot \overline{y'_2} + \dots + \lambda_n \cdot x'_n \cdot \overline{y'_n}, \end{aligned}$$

wobei  $\mathfrak{x}/B' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$  und  $\mathfrak{y}/B' = (y'_1, \dots, y'_n)^T$ . Wegen  $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$  folgt hieraus die positive Definitheit von  $\varphi$ . Also gilt (a)  $\Leftrightarrow$  (b).

In Vorbereitung auf die Beweise von (a)  $\Rightarrow$  (c) und (c)  $\Rightarrow$  (b) seien

$$\begin{aligned} B_r &:= (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r), \\ U_r &:= [\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r\}], \\ \mathfrak{A}_{\varphi,r} &:= (a_{ij})_{r,r} \\ \text{und } \varphi_r(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &:= \mathfrak{x}/B_r \cdot \mathfrak{A}_{\varphi,r} \cdot \overline{\mathfrak{y}/B_r} \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in U_r) \end{aligned}$$

für  $r = 1, 2, \dots, n$ .

Offenbar ist  $\varphi_r$  die Beschränkung von  $\varphi$  auf den UVR  $U_r$  von  $V$ .

(a)  $\Rightarrow$  (c): Wenn  $\varphi$  positiv definit und damit ein Skalarprodukt ist, ist für beliebiges  $r \in \{1, \dots, n\}$  auch  $\varphi_r$  ein Skalarprodukt auf dem UVR  $U_r$ . Da wir bereits (a)  $\Leftrightarrow$  (b) gezeigt haben, gibt es für alle  $r \in \{1, \dots, n\}$  gewisse positive reelle Zahlen  $\lambda_1(r), \dots, \lambda_r(r)$  und eine Matrix  $\mathfrak{B}_r$  mit

$$\mathfrak{B}_r^T \cdot \mathfrak{A}_{\varphi,r} \cdot \overline{\mathfrak{B}_r} = \begin{pmatrix} \lambda_1(r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(r) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r(r) \end{pmatrix}.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_r^T \cdot \mathfrak{A}_{\varphi,r} \cdot \overline{\mathfrak{B}_r}| &= |\mathfrak{B}_r^T| \cdot |\mathfrak{A}_{\varphi,r}| \cdot |\overline{\mathfrak{B}_r}| = \underbrace{|\mathfrak{B}_r| \cdot |\overline{\mathfrak{B}_r}|}_{\geq 0} \cdot |\mathfrak{A}_{\varphi,r}| \\ &= \lambda_1(r) \cdot \dots \cdot \lambda_r(r) > 0, \end{aligned}$$

woraus sich  $|\mathfrak{A}_{\varphi,r}| = |a_{ij}|_r > 0$  für alle  $r \in \{1, \dots, n\}$  ergibt.

(c)  $\Rightarrow$  (b): Nach Satz 8.3.8 aus Kapitel 8 folgt aus der vorausgesetzten Eigenschaft von  $\varphi$ , hermitisch zu sein, die Existenz einer (unitären) Matrix  $\mathfrak{B}$  und gewisser  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit

$$\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathfrak{D}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, daß die  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) alle positiv sind.

Aus der Gleichung  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{D}$  und der Voraussetzung  $|\mathfrak{A}_\varphi| > 0$  folgt durch Bildung der Determinanten zunächst  $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$ . Da ferner  $|\mathfrak{B}| \neq 0$  (nach Definition einer unitären Matrix), wird durch  $\mathfrak{x}/B = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}/B'$  eine Koordinatentransformation zwischen den Basen  $B$  und  $B' := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_n)$  ( $\mathfrak{b}'_i/B$  ist  $i$ -te Spalte von  $\mathfrak{B}$ ) beschrieben. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \mathfrak{x}'/B' \cdot \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{B}} \cdot \overline{\mathfrak{y}'/B'} \\ &= \mathfrak{D} \end{aligned}$$

woraus  $\varphi(\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{b}'_i) = \lambda_i$  und  $\varphi(\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{b}'_j) = 0$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $i \neq j$  folgt (siehe Satz 6.2.1).

Sei nun  $B'_r := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_r)$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$ . Indem man  $\mathfrak{A}_{\varphi,r}$  anstelle von  $\mathfrak{A}_\varphi$  und anstelle von  $\mathfrak{B}$  die Matrix  $\mathfrak{B}_r := (\mathfrak{b}'_1/B_r, \dots, \mathfrak{b}'_r/B_r)$  wählt, erhält man analog zu oben:

$$\mathfrak{B}_r^T \cdot \mathfrak{A}_{\varphi,r} \cdot \overline{\mathfrak{B}_r} = (\varphi(\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{b}'_j))_{r,r} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun  $\det(\mathfrak{B}_r^T \cdot \mathfrak{A}_{\varphi,r} \cdot \overline{\mathfrak{B}_r})$ , so folgt aus der Voraussetzung  $|\mathfrak{A}_{\varphi,r}| > 0$ , daß  $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_r > 0$  für jedes  $r \in \{1, \dots, n - 1\}$  ist. Hieraus sowie aus dem oben schon Begründeten folgt nun unmittelbar, daß die  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sämtlich positiv sind. ■

Ein wichtiges Beweishilfsmittel für weitere Sätze liefert der

**Satz 6.2.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung<sup>7</sup>)**

Bezeichne  $V$  einen Vektorraum mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann gilt:

$$(a) \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 \leq \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}).$$

(b) Das Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung von (a) genau dann, wenn  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  l.a. sind.

*Beweis.* Offenbar gelten unsere Behauptungen (a) und (b) für die Fälle  $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  oder  $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ . Wir können daher nachfolgend  $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$  voraussetzen.

Wählt man nun

$$\mathfrak{a} := \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{y} - \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x},$$

so gilt nach den Eigenschaften eines Skalarproduktes:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) &= \varphi(\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{y} - \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x}, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{y} - \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x}) \\ &= (\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}))^2 \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) - \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \overline{\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})} \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \\ &\quad - \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \cdot \overline{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + |\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})|^2 \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}), \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}))^2 \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) - |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \quad \text{bzw.} \\ 0 &\leq \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot (\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) - |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2) \end{aligned}$$

ergibt. Aus der letzten Ungleichung folgt unsere Behauptung (a), da  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ .

Zwecks Beweises von (b) sei zunächst  $|\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$ . Nach den obigen Rechnungen ist dann  $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$ , was nach Definition von  $\varphi$  nur für  $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$  möglich ist. Da  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \neq 0$  (wegen unserer Voraussetzung  $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ ), folgt hieraus die lineare Abhängigkeit von  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ . Sind umgekehrt  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  l.a., so können wir wegen  $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$  annehmen, daß ein  $\lambda \in K$  mit

$$\mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$$

existiert. Bildet man nun das Skalarprodukt  $\varphi(\mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y}, \mathfrak{y})$ , so erhält man aus dieser Gleichung (wegen  $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{o}$ )

$$\lambda = -\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) / \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}).$$

Außerdem folgt aus der Gleichung  $\mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$  und dem eben bestimmten  $\lambda$ -Wert:

---

<sup>7</sup> Augustin L. Cauchy (1789–1857), französischer Mathematiker;  
Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), deutscher Mathematiker.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(\mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y}, \mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y}) \\
&= \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + \overline{\lambda} \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \underbrace{\lambda \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})}_{= \overline{\lambda} \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} + |\lambda|^2 \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \\
&= 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda} \cdot \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \\
&= \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) - 2 \cdot |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 / \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) + |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 / \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \\
&= \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) - |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 / \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}).
\end{aligned}$$

Also gilt  $|\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \cdot \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$ . ■

Wir wollen jetzt die aus den Anschaungsräumen her bekannten Begriffe

„Betrag“, „Orthogonalität“ und „Winkel“

von Vektoren verallgemeinern. Wir werden sehen, daß dies in unitären bzw. euklidischen Vektorräumen mit Hilfe des in diesen Räumen vorliegenden Skalarproduktes leicht zu bewerkstelligen ist, auch wenn man z.B. (wie im nächsten Kapitel gezeigt wird) eine Verallgemeinerung des anschaulichen Betrages eines Vektors ohne Verwendung des Skalarproduktes vornehmen kann.

### 6.3 Norm (Betrag) von Vektoren

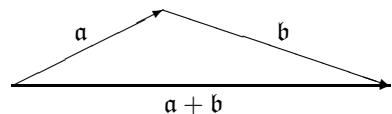
Indem wir vier (wesentliche) Eigenschaften der Abbildung

$$|\cdot| : \overrightarrow{V} \rightarrow \mathbb{R}, \mathfrak{a} \mapsto |\mathfrak{a}|$$

( $|\mathfrak{a}|$  bezeichnet die Länge eines Repräsentanten von  $\mathfrak{a}$ ) als Axiome auswählen, erhalten wir folgende

**Definitionen** Bezeichne  $V$  einen beliebigen  $K$ -Vektorraum,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{x} \mapsto \|\mathfrak{x}\|$  heißt **Norm** von  $V$ , wenn sie folgende vier Eigenschaften für beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$  und beliebige  $\lambda \in K$  besitzt:

- (N1)  $\|\mathfrak{a}\| \geq 0$
- (N2)  $\|\mathfrak{a}\| = 0 \iff \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$
- (N3)  $\|\lambda \cdot \mathfrak{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\|$
- (N4)  $\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\|$  („Dreiecksungleichung“).



Ein Vektorraum, für den eine Norm definiert ist, wird ein **normierter Raum** genannt.

**Beispiele** Für den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , lassen sich u.a. folgende Normen einführen, die wir hier für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  angeben.

(1.) die **euklidische Norm**:

$$\|\mathbf{a}\|_2 := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

(        =  $\sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}}$ ; · bezeichnet die Matrizenmultiplikation);

(2.) die **Maximumnorm**:

$$\|\mathbf{a}\|_\infty := \max_{i, 1 \leq i \leq n} |a_i|;$$

(3.)  $\|\mathbf{a}\|_1 := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ .

Wählt man speziell  $\mathbf{a} = (1, 0, 2, -3)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ , so erhält man  $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{14}$ ,  $\|\mathbf{a}\|_\infty = 3$  und  $\|\mathbf{a}\|_1 = 6$ .

Ein weiteres Beispiel liefert der nächste Satz:

**Satz 6.3.1** Bezeichne  $V$  einen VR mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann ist die durch

$$\|\mathbf{a}\|_\varphi := \sqrt{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

$(\mathbf{a} \in V)$  definierte Abbildung von  $V$  in  $\mathbb{R}$  eine Norm.

*Beweis.* Die Axiome (N1) und (N2) einer Norm ergeben sich für  $\|\cdot\|_\varphi$  aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes. Aus der Bilinearität folgt:

$$\|\lambda \cdot \mathbf{a}\|_\varphi = \sqrt{\varphi(\lambda \cdot \mathbf{a}, \lambda \cdot \mathbf{a})} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = |\lambda| \cdot \sqrt{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|_\varphi,$$

womit  $\|\cdot\|_\varphi$  auch das Axiom (N3) einer Norm erfüllt.

Zwecks Beweises der Dreiecksungleichung bilden wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_\varphi^2 &= \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \underbrace{\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}_{= \overline{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}} + \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{a}\|_\varphi^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})) + \|\mathbf{b}\|_\varphi^2 \end{aligned}$$

und erhalten hieraus unter Verwendung von Satz 6.2.4, (a):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_\varphi^2 &\leq \|\mathbf{a}\|_\varphi^2 + \|\mathbf{b}\|_\varphi^2 + 2 \cdot \underbrace{|\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}_{\leq \sqrt{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b})}} = \|\mathbf{a}\|_\varphi \cdot \|\mathbf{b}\|_\varphi \\ &\leq (\|\mathbf{a}\|_\varphi + \|\mathbf{b}\|_\varphi)^2. \end{aligned}$$

Also genügt  $\|\cdot\|_\varphi$  auch dem Axiom (N4) einer Norm. ■

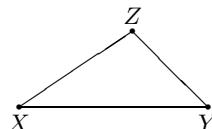
### Einige Bemerkungen:

- (1.) Gehört der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $V_n$  zu einem  $n$ -dimensionalen Punktraum  $R_n$  und ist auf  $V_n$  eine Norm definiert, so kann man mit Hilfe dieser Norm  $\|\cdot\|$  eine Abstandsfunktion  $\varrho$  (eine sogenannte **Metrik**) für den  $R_n$  definieren:

$$\forall X, Y \in R_n : \varrho(X, Y) := \|X - Y\|.$$

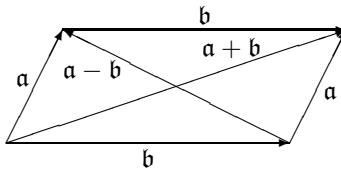
$\varrho$  hat dann für beliebige  $X, Y, Z \in R_n$  folgende vier Eigenschaften:

- (M1)  $\varrho(X, Y) \geq 0$ ;
- (M2)  $\varrho(X, Y) = 0 \iff X = Y$ ;
- (M3)  $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$ ;
- (M4)  $\varrho(X, Y) \leq \varrho(X, Z) + \varrho(Z, Y)$  („Dreiecksungleichung“).



- (2.) Im Teil III werden wir uns mit Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen befassen. Insbesondere werden wir uns bemühen, für ein LGS, das wir in Form einer Matrixgleichung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ( $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ;  $\mathfrak{x}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ) vorgeben, die Lösung näherungsweise zu bestimmen. Geometrisch lässt sich die Lösung  $\mathfrak{x}$  als Punkt in einem  $n$ -dimensionalen Raum deuten. Mit Hilfe einer für diesen Raum erklärten Metrik (also letztlich mit Hilfe einer Norm) werden wir dann die „Güte“ der Näherungslösung messen. Unsere oben angegebenen Normen für den VR  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  sind Beispiele dafür, auf welche verschiedene Weise „Abstandsmessungen“ vorgenommen werden können. Auch bei der Approximation von (komplizierten) Funktionen ( $\in C[a, b]$ ) durch (einfachere) Funktionen wird mit Hilfe einer Norm eine sogenannte beste Approximation festgelegt werden können. Die hierbei benutzten Normen spiegeln dann die unterschiedlichen Kriterien (abhängig von der zugrundeliegenden Aufgabenstellung) dafür wieder, was eine beste Annäherung („beste Approximation“) sein soll.
- (3.) In Satz 6.3.1 wurde bewiesen, daß mit Hilfe eines Skalarproduktes eines VRs  $V$  eine Norm für  $V$  definiert werden kann. Jedoch lässt sich nicht jede Norm mit Hilfe eines (passend gewählten) Skalarproduktes wie im Satz 6.3.1 angegeben beschreiben. Zum Beispiel hat die Maximumnorm diese Eigenschaft. Zum Beweis (ÜA A.6.5) dieses Sachverhaltes überlege man sich zunächst, daß jede Norm  $\|\cdot\|_\varphi$  ( $\varphi$  Skalarprodukt) die sogenannte Parallelogrammeigenschaft:

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = 2 \cdot \|\mathfrak{a}\|^2 + 2 \cdot \|\mathfrak{b}\|^2$$



besitzt, und zeige anschließend, daß die Maximumnorm diese Eigenschaft nicht hat.

**Definition** Sei  $V$  ein normierter VR und  $\mathbf{a} \in V$ . Dann heißt

$\mathbf{a}$  **normiert** (bzw.  $\mathbf{a}$  **Einheitsvektor**) : $\iff \|\mathbf{a}\| = 1$ .

## 6.4 Winkel zwischen Vektoren (in euklidischen Vektorräumen)

Sei nachfolgend  $V$  ein euklidischer VR mit dem Skalarprodukt  $\varphi$ .

Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ , so gilt  $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$  und  $\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) > 0$ . Außerdem folgt aus Satz 6.2.4:

$$-1 \leq \frac{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|_\varphi \cdot \|\mathbf{b}\|_\varphi} \leq 1.$$

Folgende Definition ist damit möglich.

**Definition** Unter einem Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$  (Bezeichnung:  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ) versteht man diejenige Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für die gilt:

- (a)  $0 < \alpha \leq \pi$  und
- (b)

$$\cos \alpha = \frac{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|_\varphi \cdot \|\mathbf{b}\|_\varphi}.$$

Viele spätere Überlegungen fußen auf Begriffe und Sätze aus dem folgenden Abschnitt.

## 6.5 Orthogonalität

In diesem Abschnitt bezeichne  $V$  stets einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\varphi$ .

### Definitionen

- Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  heißen **orthogonal** (bez.  $\varphi$ ) (Bezeichnung:  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  bzw.  $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ) : $\iff \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

- Ein System von Vektoren  $\mathbf{b}_i$  ( $i \in I$ ) aus  $V$  wird **orthogonal** (bzw. ein **Orthogonalsystem**) genannt, wenn die Vektoren aus diesem System paarweise zueinander orthogonal sind.
- Vektoren  $\mathbf{b}_i$  ( $i \in I$ ) aus  $V$  heißen **orthonormiert** : $\iff$

$$\forall i, j \in I : \varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}^8$$

### Beispiele

(1.) Seien  $V := \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ,  $K = \mathbb{R}$  und  $\varphi$  das Standardskalarprodukt.

Dann sind z.B.

$$\mathbf{a} := (1, 0, 2, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := (2, -7, -1, 3)^T$$

orthogonal zueinander und die Vektoren

$$(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T$$

sind orthonormiert.

(2.) Wählt man  $V = C[-\pi, \pi]$  (Vektorraum aller stetigen Funktionen über dem Intervall  $[-\pi, \pi]$ ) und

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx ,$$

so sind bez. dieses Skalarproduktes z.B. die Funktionen

$$f(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g(x) = \sin x$$

orthogonal zueinander, da  $h(x) := \sin x \cdot \cos x$  eine ungerade Funktion (d.h.,  $h(x) = -h(-x)$ ) ist und folglich  $\varphi(\sin x, \cos x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \sin x dx = 0$  gilt.

Allgemein lässt sich zeigen, daß (bezogen auf das obige Skalarprodukt) folgende Orthogonalitäten für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  gelten:

$$\begin{aligned} \cos n \cdot x &\perp \cos m \cdot x \quad (n \neq m), \\ \cos n \cdot x &\perp \sin m \cdot x, \\ \sin n \cdot x &\perp \sin m \cdot x \quad (n \neq m). \end{aligned}$$

In der Analysis werden diese Eigenschaften der cos- und sin-Funktionen bei der Bestimmung sogenannter Fourier-Reihen für periodische Funktionen benutzt.<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup>  $\delta_{ij}$  wird **Kroneckersymbol** genannt (nach dem deutschen Mathematiker Leopold Kronecker (1823 - 1891)).

<sup>9</sup> Siehe dazu auch die Bemerkung nach Satz 6.5.4.

**Satz 6.5.1** Jede Menge  $B$  ( $\subseteq V$ ) von orthogonalen Vektoren, die nicht den Nullvektor enthält, ist l.u.

*Beweis.* ÜA A.6.10. ■

Als besonders wichtig wird sich später folgender Satz erweisen.

**Satz 6.5.2** Bezeichne  $V$  einen VR mit endlicher oder abzählbarer Basis über dem Körper  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann besitzt  $V$  eine orthonormierte Basis.

*Beweis.* (Schmidtsches Orthonormierungsverfahren<sup>10</sup> (kurz: ONV)).

O.B.d.A. genügt es, den Satz nur für  $n$ -dimensionale Vektorräume zu beweisen ( $n \in \mathbb{N}$ ). Sei also  $V$  ein solcher VR, für den es nach den Sätzen 4.4.4 und 4.4.7 eine Basis aus  $n$  l.u. Vektoren

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n (\in V)$$

gibt. Ziel der nachfolgenden Überlegungen ist die Konstruktion von LK

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n (\in V)$$

aus den Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ , die orthonormiert sind.

Wir beginnen mit der Bestimmung von  $\mathfrak{e}_1$ :

Offenbar gehört die LK

$$\mathfrak{e}_1 := \frac{1}{\|\mathfrak{a}_1\|_\varphi} \cdot \mathfrak{a}_1$$

zu  $V$  und sie ist normiert. Als nächstes konstruieren wir  $\mathfrak{e}_2$ :

Der Vektor  $\mathfrak{b}_2 := \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1$  ist wegen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{e}_1) &= \varphi(\mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1) \\ &= \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \varphi(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

orthogonal zu  $\mathfrak{e}_1$  und gehört als LK von  $\mathfrak{e}_1$  und  $\mathfrak{a}_2$  zu  $V$ .

Also erhält man  $\mathfrak{e}_2$  durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_2 &:= \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 \\ \mathfrak{e}_2 &:= \frac{1}{\|\mathfrak{b}_2\|_\varphi} \cdot \mathfrak{b}_2 \end{aligned}$$

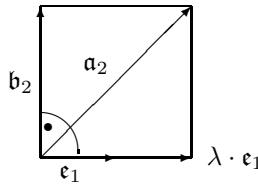
(Überlegen kann man sich die obige Formel für  $\mathfrak{b}_2$  wie folgt:

Angenommen, es gibt einen Vektor  $\mathfrak{b}_2 \in [\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{a}_2\}]$ , der zu  $\mathfrak{e}_1$  orthogonal ist. Dann gibt es auch ein  $\lambda \in K$  mit

$$\mathfrak{a}_2 = \lambda \cdot \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{b}_2.$$

---

<sup>10</sup> Erhard Schmidt (1876–1959), deutscher Mathematiker.



Bildet man nun das Skalarprodukt  $\varphi(a_2, e_1)$ , so folgt aus  $\varphi(b_2, e_1) = 0$ , daß  $\lambda = \varphi(a_2, e_1)$  sein muß, woraus sich dann die obige Formel für  $b_2$  ergibt.)  
 $e_3$ :

Man rechnet leicht nach, daß der Vektor

$$b_3 := a_3 - \varphi(a_3, e_1) \cdot e_1 - \varphi(a_3, e_2) \cdot e_2$$

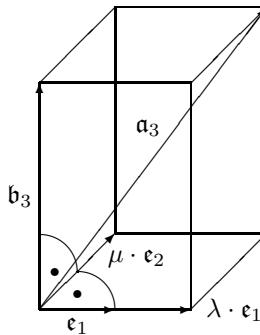
aus  $\{e_1, e_2, a_3\}$  zu  $e_1$  und  $e_2$  orthogonal ist. Folglich erhalten wir  $e_3$  durch Normieren von  $b_3$ :

$$e_3 := \frac{1}{\|b_3\|_\varphi} \cdot b_3.$$

(Auch in diesem Fall kann man sich die Formel für  $b_3$  aus der Gleichung

$$a_3 = b_3 + \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$$

und der Forderung  $\varphi(b_3, e_1) = \varphi(b_3, e_2) = 0$  herleiten, indem man die obige Gleichung zunächst skalar mit  $e_1$  und dann mit  $e_2$  multipliziert.)



Usw.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Formeln zur Berechnung einer ortho-normierten Basis von  $V$  aus  $n$  l.u. Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in V$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1 &:= \mathbf{a}_1 \\
 \mathbf{b}_i &:= \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j \\
 &\quad (i = 2, 3, \dots, n) \\
 \mathbf{e}_k &:= \frac{1}{\|\mathbf{b}_k\|_\varphi} \cdot \mathbf{b}_k \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

■

**Beispiel** Im VR  $\mathbb{R}^{5 \times 1}$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$$

wollen wir für den UVR  $U := [\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}]$ , wobei

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sei, eine orthonormierte Basis bestimmen. Da  $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$  und  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  l.u. sind, haben wir dazu nach dem Schmidt'schen Orthonomierungsverfahren aus  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  orthonormierte Vektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  zu ermitteln. Wir erhalten  $\mathbf{e}_1$ :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|_\varphi} \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{a}_2 - \varphi(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_2\|_\varphi} \cdot \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{e}_3$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_3 &= \mathfrak{a}_3 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{e}_3 &= \frac{1}{\|\mathfrak{b}_3\|_\varphi} \cdot \mathfrak{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nachfolgend einige Folgerungen aus Satz 6.5.2:

**Satz 6.5.3** Für jedes Skalarprodukt  $\varphi$  eines  $n$ -dimensionalen VRs über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  existiert eine Basis  $B$ , so daß

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}^T /_B \cdot \overline{\mathfrak{y} /_B}$$

gilt.

*Beweis.* Wählt man in Satz 6.2.1 die Basis  $B$  orthonormiert, so ist  $\mathfrak{A}_\varphi$  die Einheitsmatrix und unsere Behauptung ist bewiesen. ■

Möglich ist nach diesem Satz die

### Vereinbarung:

Wenn nicht anders angegeben, werden wir nachfolgend in ÜA und Beispielen immer annehmen, daß unser Skalarprodukt in  $V_n$  mit Hilfe von Koordinaten bez. einer orthonormierten Basis berechnet wird, d.h., wir nehmen an, daß  $\varphi$  das Standardskalarprodukt

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + \dots + x_n \cdot \overline{y_n}$$

$(\mathfrak{x} /_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \mathfrak{y} /_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T)$  ist. Anstelle von  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  schreiben wir dann auch

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle .$$

**Bemerkung** In einem endlich-dimensionalen VR ist es günstig, Basen stets orthonormiert zu wählen. Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, werden wir nachfolgend stets so handeln. Einen (weiteren) Vorteil dieser Wahl kann man dem nächsten Satz entnehmen.

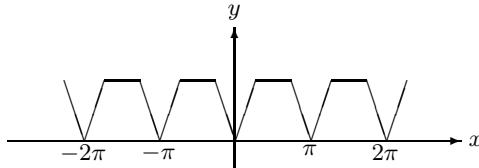
**Satz 6.5.4** Bezeichne  $V$  einen  $n$ -dimensionalen VR mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Außerdem sei  $(\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n)$  eine orthonormierte Basis von  $V$ . Dann gilt:

$$\mathbf{a}/B = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) \\ \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Die Gültigkeit der Aussage überlegt man sich analog zum Beispiel (9.), S. 208. ■

**Bemerkung** Die Idee aus Satz 6.5.4, Koordinaten mittels Skalarprodukt zu berechnen, verwendet man auch in der Analysis (genauer in der Funktionalanalysis), wo es u.a. um die Lösung des folgenden Problems geht:

Gegeben sei eine stetige Funktion  $f$ , die periodisch bez. des Intervalls  $[-\pi, \pi]$  ist. Z.B. habe  $f$  folgende Gestalt:



(Obige Funktion ist auch periodisch bezüglich des Intervalls  $[0, \pi]$ .) Gesucht wird eine Reihenentwicklung (eine sogenannte Fourier-Reihe) für  $f$  der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot f_i(x),$$

wobei

$$f_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos 2x, \quad f_4(x) = \sin 2x, \quad f_5(x) = \cos 3x, \quad f_6(x) = \sin 3x, \dots$$

Die unbekannten Koeffizienten  $a_i$  ( $i \in \mathbb{N}_0$ ) lassen sich dann (hier grob skizziert) dadurch bestimmen, daß zunächst die Orthonormiertheit der Funktionen  $f_i$  ( $i \in \mathbb{N}_0$ ) bez. des Skalarprodukts

$$\varphi(g, h) := (1/\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot h(x) dx$$

( $g, h \in C[-\pi, \pi]$ ) gezeigt wird, woraus sich dann (unter der Annahme, daß die oben angegebene Reihe existiert) analog zu Satz 6.5.4

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : a_i = \varphi(f, f_i)$$

ergibt. Umgekehrt läßt sich dann beweisen, daß jede auf diese Weise gebildete Reihe die Summe  $f(x)$  hat. Beim Beweis der Konvergenz der Reihe erweist sich die im nächsten Satz angegebene Ungleichung als nützlich.

**Satz 6.5.5 (Besselsche<sup>11</sup> Ungleichung)** Seien  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  orthonormierte Vektoren eines VRs  $V$  mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann gilt:

- (a)  $\forall \mathbf{a} \in V : \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2 \leq \|\mathbf{a}\|_{\varphi}^2$
- (b)  $\forall \mathbf{a} \in V \forall \nu \in \{1, 2, \dots, m\} : \mathbf{e}_{\nu} \perp \mathbf{a} - \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$ .

*Beweis.* Sei

$$\mathbf{a}' := \mathbf{a} - \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i.$$

(a) folgt dann aus:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{a}'\|_\varphi^2 &= \varphi(\mathbf{a}', \mathbf{a}') \\ &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \sum_{i=1}^m \overline{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{a})}_{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)} + \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2 \\ &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2. \end{aligned}$$

(b) prüft man wie folgt nach:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a} - \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\nu) &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\nu) - \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\nu)}_{=\delta_{i\nu}} \\ &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\nu) - \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\nu) = 0. \end{aligned}$$

■

### Satz 6.5.6 (Parsevalsche Gleichung<sup>12</sup>)

Seien  $KV$  ein VR mit Skalarprodukt  $\varphi$  und  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in V$  orthonormiert. Dann gilt:

$$[\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}] = V \iff \forall \mathbf{a} \in V : \|\mathbf{a}\|_\varphi^2 = \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2.$$

*Beweis.* „ $\implies$ “: Falls  $[\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}] = V$  ist, gibt es für jedes  $\mathbf{a} \in V$  gewisse  $a_1, \dots, a_m \in K$  mit

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + a_m \cdot \mathbf{e}_m.$$

Damit erhalten wir unter Verwendung von Satz 6.5.4:

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2 = \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2 = \|\mathbf{a}\|_\varphi^2.$$

„ $\impliedby$ “: Angenommen, die Parsevalsche Gleichung  $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)|^2$  gilt, jedoch bilden  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  keine Basis von  $V$ . Dann existiert ein Vektor  $\mathbf{b} \in V \setminus [\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}]$ , der  $\neq 0$  ist und für den wir o.B.d.A.  $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{b} \perp \mathbf{e}_m$  annehmen können (siehe Satz 6.5.2). Hieraus folgt dann nach Satz 6.5.5 und wegen  $\|\mathbf{b}\|_\varphi > 0$ :

$$0 = \sum_{i=1}^m |\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{e}_i)|^2 < \|\mathbf{b}\|_\varphi^2,$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung in „ $\impliedby$ “.

■

**Definition** Seien  $M$  und  $N$  Teilmengen eines VRs  $V$  mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Man sagt dann:

$M, N$  sind (bez.  $\varphi$ ) **orthogonal** zueinander (im Zeichen  $M \perp N$ ) : $\iff$   
 $\forall \mathbf{a} \in M \ \forall \mathbf{b} \in N : \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

<sup>11</sup> Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), deutscher Mathematiker.

<sup>12</sup> Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836) publizierte Ende des 18. Jahrhunderts für ein spezielles Skalarprodukt die im Satz angegebene Gleichung.

**Satz 6.5.7** Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann gilt für beliebige  $M, N \subseteq V$ :

$$M \perp N \iff [M] \perp [N].$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ ist trivial.

„ $\Rightarrow$ “: Falls  $\{\mathfrak{o}\} \in \{M, N\}$  oder  $\emptyset \in \{M, N\}$ , gilt offenbar  $[M] \perp [N]$ . Also können wir nachfolgend  $\{\emptyset, \{\mathfrak{o}\}\} \cap \{M, N\} = \emptyset$  annehmen.

Seien  $\mathfrak{a} \in [M]$  und  $\mathfrak{b} \in [N]$ . Dann sind  $\mathfrak{a}$  bzw.  $\mathfrak{b}$  als LK gewisser Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r \in M$  bzw.  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_s \in N$  darstellbar:

$$\mathfrak{a} = \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda_r \cdot \mathfrak{a}_r, \quad \mathfrak{b} = \mu_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + \mu_s \cdot \mathfrak{b}_s.$$

Man rechnet nun leicht  $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$  nach, da nach Voraussetzung  $\varphi(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j) = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  und  $j \in \{1, \dots, s\}$  gilt, woraus  $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$  folgt. ■

**Definition** Für Teilmengen  $M$  eines VRs  $V$  mit Skalarprodukt  $\varphi$  nennen wir die Menge

$$M^\perp := \{\mathfrak{a} \in V \mid \{\mathfrak{a}\} \perp M\}$$

**orthogonales Komplement** von  $M$  (bez.  $V$ ).

**Satz 6.5.8** Für jeden VR  $V$  mit Skalarprodukt und jede Menge  $M \subseteq V$  gilt:

- (a)  $M^\perp$  ist UVR von  $V$ ;
- (b)  $M^\perp = [M]^\perp$ .

*Beweis.* (a): Wegen  $M^\perp \perp M$  folgt aus Satz 6.5.7:  $[M^\perp] \perp [M]$ .

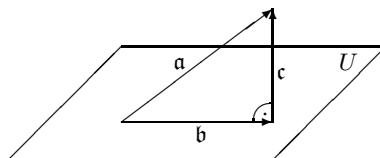
Speziell haben wir damit auch  $[M^\perp] \perp M$ , woraus sich nach Definition  $[M^\perp] \subseteq M^\perp$  ergibt. Dies ist jedoch nur möglich für  $[M^\perp] = M^\perp$ .

(b): Nach Definition des orthogonalen Komplements haben wir  $[M]^\perp \subseteq M^\perp$ . Außerdem gilt nach Satz 6.5.7:

$$M \perp M^\perp \implies [M] \perp [M^\perp] (= M^\perp \text{ (nach (a))}) \implies M^\perp \subseteq [M]^\perp.$$

Folglich ist  $M^\perp = [M]^\perp$ . ■

**Definitionen** Seien  $U$  ein UVR des VRs  $V$  mit Skalarprodukt und  $\mathfrak{a} \in V$ .  $\mathfrak{b} \in U$  heißt **orthogonale Projektion** von  $\mathfrak{a}$  in  $U$ : $\iff \exists \mathfrak{c} \in V : \mathfrak{c} \in U^\perp \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ .



Der Vektor  $\mathfrak{c}$  wird dabei **Lot** genannt.

**Satz 6.5.9** Wenn eine orthogonale Projektion  $\mathfrak{b}$  eines Vektors  $\mathfrak{a} \in V$  in einem UVR  $U$  von  $V$  existiert, so ist sie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Angenommen, es gibt zwei verschiedene orthogonale Projektionen  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{b}'$  von  $\mathfrak{a}$  in  $U$ :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}',$$

wobei  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in U^\perp$ . Hieraus und aus Satz 6.5.8, (a) folgt:

$$\mathbf{o} = \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{b}')}_{\in U} + \underbrace{(\mathbf{c} - \mathbf{c}')}_{\in U^\perp}.$$

Bildet man nun das Skalarprodukt  $\varphi(\mathbf{o}, \mathbf{o})$ , das bekanntlich  $= 0$  ist, und setzt  $\mathbf{o} = \mathbf{b} - \mathbf{b}' + \mathbf{c} - \mathbf{c}'$ , so erhält man:  $0 = \varphi(\mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{b} - \mathbf{b}') + \varphi(\mathbf{c} - \mathbf{c}', \mathbf{c} - \mathbf{c}')$ , woraus (wegen der positiven Definitheit von  $\varphi$ )  $\mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{o}$  und  $\mathbf{c} - \mathbf{c}' = \mathbf{o}$  folgt, im Widerspruch zur Annahme. ■

**Satz 6.5.10** Seien  $V$  ein VR mit Skalarprodukt,  $U$  ein UVR von  $V$  und  $\mathbf{a} \in V$ . Existiert dann die orthogonale Projektion  $\mathbf{a}'$  von  $\mathbf{a}$  in  $U$ , so gilt für alle  $\mathbf{b} \in U$ :

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_\varphi$$

$$\text{und } \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_\varphi \iff \mathbf{a}' = \mathbf{b}.$$

(Mit anderen Worten:  $\mathbf{a}'$  ist eine „beste Approximation“ (d.h.,

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi = \min_{\mathbf{x} \in U} \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|_\varphi)$$

von  $\mathbf{a}$  durch ein Element aus  $U$ , die außerdem eindeutig bestimmt ist.)

*Beweis.* Bezeichne  $\mathbf{b}$  ein beliebiges Element von  $U$  und sei  $\mathbf{a}'' := \mathbf{a} - \mathbf{a}'$ . Da  $\mathbf{a}'' \perp U$ , haben wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_\varphi^2 &= \|\mathbf{a} - \mathbf{a}' + \mathbf{a}' - \mathbf{b}\|_\varphi^2 = \|\mathbf{a}'' + \mathbf{a}' - \mathbf{b}\|_\varphi^2 \\ &= \varphi(\mathbf{a}'' + (\mathbf{a}' - \mathbf{b}), \mathbf{a}'' + (\mathbf{a}' - \mathbf{b})) \\ &= \|\mathbf{a}''\|_\varphi^2 + \underbrace{\varphi(\mathbf{a}'', \mathbf{a}' - \mathbf{b})}_{=0} + \underbrace{\varphi(\mathbf{a}' - \mathbf{b}, \mathbf{a}'')}_{=0} + \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}\|_\varphi^2 \\ &= \|\mathbf{a}''\|_\varphi^2 + \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}\|_\varphi^2 \\ &= \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi^2 + \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}\|_\varphi^2, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar unsere Behauptungen ergeben. ■

Die orthogonale Projektion eines Vektors  $\in V$  in einen UVR von  $V$  braucht nicht zu existieren. Nur wenn  $U$  endliche Dimension besitzt, kann ihre Existenz allgemein nachgewiesen werden:

**Satz 6.5.11** Seien  $V$  ein VR mit Skalarprodukt,  $U$  ein endlich-dimensionaler UVR von  $V$  und  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_t\}$  eine orthonormierte Basis von  $U$ . Für jeden Vektor  $\mathbf{a}$  aus  $V$  existiert dann die orthogonale Projektion  $\mathbf{a}_U$  in  $U$ , die sich wie folgt berechnen lässt:

$$\mathbf{a}_U = \sum_{i=1}^t \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i.$$

*Beweis.* Für  $\mathbf{a} \in V$  wählen wir  $\mathbf{a}_U$  wie oben angegeben. Offenbar gehört dann  $\mathbf{a}_U$  zu  $U$  und nach Satz 6.5.5, (b) haben wir für beliebige  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ :

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}_U = \mathbf{a} - \sum_{i=1}^t \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j,$$

womit  $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{a}_U \in U^\perp$ . Folglich gilt  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_U + \mathbf{c}$  und  $\mathbf{a}_U$  ist eine orthogonale Projektion. ■

**Satz 6.5.12** Sei  $U$  ein endlich-dimensionaler UVR des VRs  $V$  mit Skalarprodukt. Dann gilt

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

Besitzt außerdem  $V$  ebenfalls endliche Dimension, so gilt ferner

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$$

und

$$U \oplus U^\perp = V.$$

*Beweis.* Offenbar gilt  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ . Zwecks Nachweis von  $(U^\perp)^\perp \subseteq U$  sei  $\mathfrak{x} \in (U^\perp)^\perp$ . Wegen  $\dim U < \aleph_0$  findet man nach Satz 6.5.11 in  $U$  eine orthogonale Projektion  $\mathfrak{x}_U$  und  $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U$  gehört zu  $U^\perp$ . Wegen  $\mathfrak{x} \in (U^\perp)^\perp$  bzw.  $\mathfrak{x}_U \in U$  gilt folglich:

$$\varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U, \mathfrak{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U, \mathfrak{x}_U) = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U\|_\varphi^2 = \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U, \mathfrak{x}) - \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_U, \mathfrak{x}_U) = 0,$$

woraus  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_U$  und damit  $\mathfrak{x} \in U$  folgt. Also gilt  $(U^\perp)^\perp = U$ .

Sei jetzt  $\dim V = n \in \mathbb{N}$ . Nach unseren obigen Sätzen über VRe und Basen, können wir die Existenz gewisser orthonormierter Vektoren  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_t, \mathfrak{e}_{t+1}, \dots, \mathfrak{e}_n$  mit

$$U = [\{\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_t\}] \quad \text{und} \quad V = [\{\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_t, \dots, \mathfrak{e}_n\}]$$

annehmen.  $U^\perp$  besteht dann offenbar aus allen Vektoren  $\mathfrak{a} \in V$  mit  $\mathfrak{a}_U = \mathfrak{o}$ . Nach Satz 6.5.11 haben wir dann  $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^t \varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_i) \cdot \mathfrak{e}_i$ . Da die Vektoren  $\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_t$  l.u. sind, folgt hieraus  $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_i) = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Also gilt  $\mathfrak{a} \in [\{\mathfrak{e}_{t+1}, \dots, \mathfrak{e}_n\}]$  und damit  $\dim U^\perp = n - t = \dim V - \dim U$ . Da offenbar  $U \cap U^\perp = \{\mathfrak{o}\}$  ist, folgt mit Hilfe der Sätze 4.6.1, (b) und 4.6.2 hieraus dann auch  $U \oplus U^\perp = V$ . ■

## 6.6 Das Vektorprodukt

Nachfolgend soll eine zweistellige Operation (Vektorprodukt)

$$\times : \overrightarrow{V_3} \times \overrightarrow{V_3} \rightarrow \overrightarrow{V_3}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \mapsto \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

definiert werden, die eine gute Ergänzung zu unserem anschaulichen Skalarprodukt bildet, wie anschließende Anwendungsbeispiele zeigen werden. Nach diesen Anwendungen soll kurz erläutert werden, wie man diese Definition für  $n$ -dimensionale VRe verallgemeinern kann. Es sei noch erwähnt, daß es neben den von uns hier behandelten geometrischen Anwendungen viele physikalische Anwendungen (z.B. Drehimpuls eines Massenpunktes, Geschwindigkeit der Massenpunkte eines rotierenden Körpers, Zentrifugalkraft u.a.) des Vektorprodukts gibt (siehe dazu z.B. [Hai 85], S. 180, [Böh 81-2], S. 206, [Dal-E 91], S. 714).

In Vorbereitung auf die Definition des Vektorprodukts  $\times$  benötigen wir die folgenden

**Definitionen** Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \overrightarrow{V}_3$  wollen wir in dieser Reihenfolge **positiv orientiert** (oder ein **Rechtssystem**) nennen, wenn sie folgende zwei Bedingungen erfüllen:

(Rs1)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  ist eine Basis von  $\overrightarrow{V}_3$

und

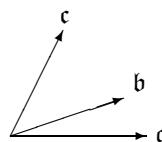
(Rs2) Repräsentanten von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand angeordnet

oder (auf die Repräsentanten bezogen):

aus der Richtung, in der  $\mathbf{c}$  zeigt, gesehen, ist die kürzeste Drehung, die  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  überführt, eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn;

bzw.

wenn  $\mathbf{c}$  nach oben,  $\mathbf{b}$  nach hinten zeigen, dann zeigt  $\mathbf{a}$  nach rechts:



Eine weitere Möglichkeit der Charakterisierung eines Rechtssystems, die nicht die Anschauung bemüht, gibt Satz 6.6.3, (d) an. Diesem Satz kann man auch eine Begründung für die Bezeichnung *positiv orientiert* entnehmen.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sollen in dieser Reihenfolge **negativ orientiert** (bzw. ein **Linkssystem**) heißen, wenn sie eine Basis von  $\overrightarrow{V}_3$  bilden, jedoch nicht positiv orientiert sind.

Seien ab jetzt die Vektoren

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$$

nicht nur orthonormiert, sondern auch positiv orientiert.

**Definition** Seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V}_3$ . Unter dem **Vektorprodukt** von  $\mathbf{a}$  mit  $\mathbf{b}$  verstehen wir den Vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{falls } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ l.a.}, \\ \mathbf{c} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

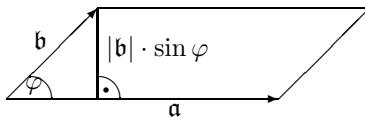
$$(Vp1) |\mathbf{c}| := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$(Vp2) \mathbf{a} \perp \mathbf{c} \text{ und } \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$$

sowie

$$(Vp3) \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ in dieser Reihenfolge positiv orientiert sind.}$$

Die Bedingung (Vp1) bedeutet anschaulich, daß der Betrag von  $\mathbf{c}$  gleich der Maßzahl des Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist:

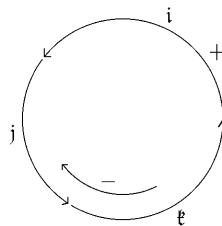


### Beispiele

- (1.) Da wir  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  als orthonormiertes Rechtssystem angenommen haben, prüft man leicht nach, daß gilt:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \dots,$$

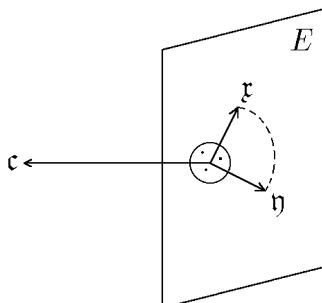
was man sich z.B. wie folgt merken kann:



Außerdem gilt offensichtlich:

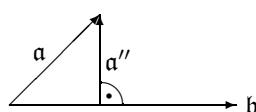
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o}.$$

- (2.) Seien  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \overrightarrow{V}_3$ ,  $\mathbf{c}$  orthogonal zu  $\mathbf{x}$ ,  $|\mathbf{c}| = 1$  und  $E$  eine zu  $\mathbf{c}$  orthogonale Ebene. Dann erhält man einen Repräsentanten von  $\mathbf{y} := \mathbf{x} \times \mathbf{c}$  aus einem Repräsentanten von  $\mathbf{x}$  in  $E$  durch Drehung um  $90^\circ$  wie nachfolgend angegeben:



- (3.) Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V}_3$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$  und bezeichnet  $\mathbf{a}''$  die Normalkomponente von  $\mathbf{a}$  bez.  $\mathbf{b}$ , so haben wir

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}'' \times \mathbf{b},$$



- da
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}''| = |\mathbf{a}''| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}'', \mathbf{b}) = |\mathbf{a}'' \times \mathbf{b}|$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}'' \times \mathbf{b}$  und
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}'' \times \mathbf{b}$  gleichorientiert sind.

Einige Eigenschaften des Vektorprodukts faßt der folgende Satz zusammen.

**Satz 6.6.1** Seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \overrightarrow{V}_3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a});$
- $\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \cdot \mathbf{b});$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  („Distributivgesetz“).
- Das Assoziativgesetz gilt für das Vektorprodukt i.allg. nicht!

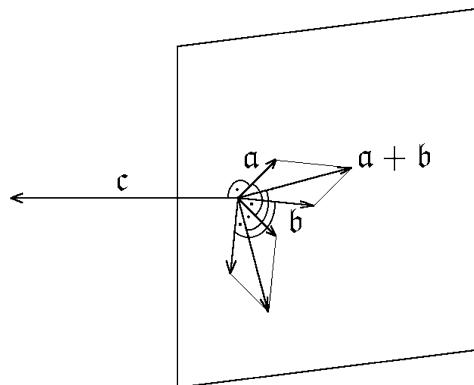
*Beweis.* (a) und (b) ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Vektorprodukts.

(c):

I) Wir beweisen das Distributivgesetz zunächst für einen Spezialfall:

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, |\mathbf{c}| = 1.$$

Seien  $\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{b}$  und  $E$  eine Ebene senkrecht zu  $\mathbf{c}$ . Nach unseren Überlegungen aus Beispiel (2.) von oben entstehen dann Repräsentanten von  $\mathbf{x} \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$  bzw.  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  aus in  $E$  liegenden Repräsentanten von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  durch Drehung um  $90^\circ$  wie folgt:



Offenbar gilt damit  $\mathbf{x} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ .

II) Allgemein erhalten wir jetzt hieraus und unter Verwendung von (b) sowie Beispiel (3.) die Behauptung (c):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &\stackrel{(3.)}{=} (\mathbf{a} + \mathbf{b})'' \times \mathbf{c} \\
 &= (\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') \times \mathbf{c} \\
 &= (\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') \times (|\mathbf{c}| \cdot \mathbf{c}_o) \quad (\mathbf{c}_o := (1/|\mathbf{c}|) \cdot \mathbf{c}) \\
 &\stackrel{(b)}{=} |\mathbf{c}| \cdot ((\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') \times \mathbf{c}_o) \\
 &\stackrel{I)}{=} |\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{a}'' \times \mathbf{c}_o + \mathbf{b}'' \times \mathbf{c}_o) \\
 &\stackrel{(3.)}{=} |\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}_o + \mathbf{b} \times \mathbf{c}_o) \\
 &= |\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}_o) + |\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}_o) \\
 &\stackrel{(b)}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.
 \end{aligned}$$

(d): ÜA A.6.8. ■

Der nächste Satz liefert eine effektive Methode der Berechnung von Vektorprodukten.

**Satz 6.6.2** Seien  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  und  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V_3}$ , wobei  $\mathbf{a}/B = (a_1, a_2, a_3)^T$  und  $\mathbf{b}/B = (b_1, b_2, b_3)^T$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &:= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \mathbf{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \mathbf{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

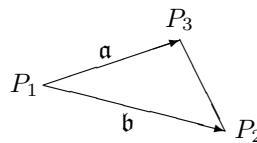
*Beweis.* Nach Satz 6.6.1 und Beispiel (1.) haben wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} + a_3 \cdot \mathbf{k}) \times (b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j} + b_3 \cdot \mathbf{k}) \\
 &= a_1 b_1 \cdot \underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{i}}_{\mathbf{o}} + a_1 b_2 \cdot \underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}_{\mathbf{k}} + a_1 b_3 \cdot \underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{k}}_{-\mathbf{j}} + \\
 &\quad a_2 b_1 \cdot \underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{i}}_{-\mathbf{k}} + a_2 b_2 \cdot \underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{j}}_{\mathbf{o}} + a_2 b_3 \cdot \underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{k}}_{\mathbf{i}} + \\
 &\quad a_3 b_1 \cdot \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{i}}_{\mathbf{j}} + a_3 b_2 \cdot \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{j}}_{-\mathbf{i}} + a_3 b_3 \cdot \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{k}}_{\mathbf{o}} \\
 &= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \mathbf{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \mathbf{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

■

### Einige geometrische Anwendungen des Vektorprodukts

- (1.) Da  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  die Maßzahl des Flächeninhaltes des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist, lassen sich mit Hilfe des Vektorprodukts die Flächeninhalte von aus Dreiecken zusammengesetzten Flächen leicht berechnen, wenn man die Koordinaten der Eckpunkte vorgegeben hat. Als Beispiel wollen wir den Flächeninhalt  $F$  des Dreiecks  $\Delta(P_1, P_2, P_3)$  berechnen, wobei bez. des Koordinatensystems  $S := (A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  gilt:  
 $P_1 = (1; 0, 1, 3)^T, P_2 = (1; 1, 0, 0)^T, P_3 = (1; 1, 2, -4)^T$ .



Indem wir  $\mathbf{a} := P_3 - P_1 = (0; 1, 1, -7)^T$  und  $\mathbf{b} := P_2 - P_1 = (0; 1, -1, -3)^T$  bilden, erhalten wir aus

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \cdot \mathbf{i} - 4 \cdot \mathbf{j} - 2 \cdot \mathbf{k}$$

den Flächeninhalt  $F = (1/2) \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = (1/2) \cdot \sqrt{100 + 16 + 4} = \sqrt{30}$ .

- (2.) Sei  $E : X = P + \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b}$  eine Ebene aus  $\mathfrak{R}_3$ . Einen auf  $E$  senkrecht stehenden Vektor (einen sogenannten **Normalenvektor**) von  $E$ , den man z.B. für die Hessesche Form von  $E$  benötigt, erhält man durch  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .
- (3.) Da für eine Gerade

$$g : X = P + \lambda \cdot \mathbf{a}$$

aus  $\mathfrak{R}_3$  offenbar die Äquivalenz

$$X \in g \iff (X - P) \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

gilt, gibt es auch folgende Charakterisierung von  $g$ :

$$g : (X - P) \times \mathbf{a} = \mathbf{o},$$

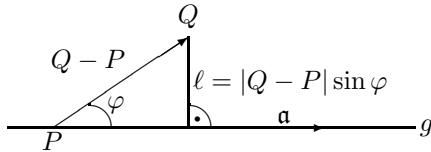
die man **Plückersche Form** bzw., falls  $|\mathbf{a}| = 1$ , **Plückersche Normalform** von  $g$  nennt<sup>13</sup>.

- (4.) Mit Hilfe der Plückerschen Normalform kann man sich nun folgende Formel zur Berechnung des Abstandes  $\ell$  des Punktes  $Q$  von der Geraden  $g : (X - P) \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$  des  $\mathfrak{R}_3$  merken:

<sup>13</sup> Julius Plücker (1801–1868), deutscher Mathematiker.

$$\boxed{\ell = (1/|\mathbf{a}|) \cdot |(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \times \mathbf{a}|},$$

deren Richtigkeit man sich anhand der Skizze



und der sich hieraus ergebenen Gleichung

$$\ell = (1/|\mathbf{a}|) \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{Q} - \mathbf{P}| \cdot \sin \varphi = (1/|\mathbf{a}|) \cdot |(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \times \mathbf{a}|$$

überlegen kann.

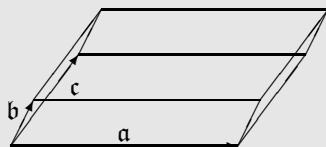
Der nächste Satz faßt einige weitere recht brauchbare Eigenschaften bzw. Anwendungen des Vektorprodukts zusammen.

**Satz 6.6.3** Bezuglich der Basis  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  seien die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \overrightarrow{V_3}$  gegeben durch  $\mathbf{a}/B = (a_1, a_2, a_3)^T$ ,  $\mathbf{b}/B = (b_1, b_2, b_3)^T$ ,  $\mathbf{c}/B = (c_1, c_2, c_3)^T$ . Dann gilt:

(a)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{"Spatprodukt"});$$

(b)  $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$  ist gleich der Maßzahl des Volumens des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  aufgespannten **Spat** (bzw. **Parallelepiped**):

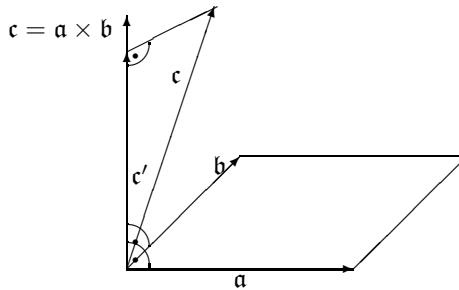


(c)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ist Basis von  $\overrightarrow{V_3} \iff (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$ ;

(d)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind positiv orientiert  $\iff (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$ ,  
 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind negativ orientiert  $\iff (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ .

*Beweis.* (a) rechnet man leicht mit Hilfe von Satz 6.6.2 und Satz 6.1.1, (g) nach (ÜA).

(b): Seien  $\mathbf{x} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}'$  die Parallelkomponente von  $\mathbf{c}$  bez.  $\mathbf{x}$ :



Dann gilt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{c}'| \cdot \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{c}')$ . Nach Definition des Vektorprodukts ist  $|\mathbf{x}|$  gleich dem Flächeninhalt der Grundfläche des Spates und  $|\mathbf{c}'|$  seine Höhe. Wegen  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{c}'$  haben wir ferner  $\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{c}') \in \{1, -1\}$  (in der obigen Skizze gilt  $\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{c}') = 1$ ; im Fall  $\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{c}') = -1$  zeigt  $\mathbf{c}$  nach unten). Somit ist der Betrag des Spatprodukts gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe des Spats.

(c):  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bilden nach unseren Überlegungen aus Abschnitt 4.4 genau dann eine Basis von  $\overrightarrow{V_3}$ , wenn sie l.u. sind. Dies ist aber nach Satz 4.7.1, (b) (S. 181) genau dann der Fall, wenn  $\text{rg}(\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{c}/B) = 3$ , woraus sich unsere Behauptung ergibt.

(d) ist eine Folgerung aus unseren Überlegungen zur Begründung von (b). ■

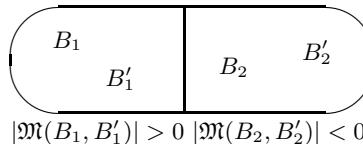
Weitere Eigenschaften des Vektorprodukts entnehme man z.B. [Bre-B 66], S. 237–246.

Das Vektorprodukt lässt sich – wie nachfolgend gezeigt werden soll – auch für  $n$ -dimensionale VRe über  $\mathbb{R}$  und  $n - 1$  vorgegebenen Vektoren aus  $V_n$  einführen. Wir beginnen mit einigen Überlegungen, die es uns gestatten werden, das Vektorprodukt für  $\overrightarrow{V_3}$  ohne „Anleihen“ bei der Anschauung zu erklären. Diese Definition ist dann die Grundlage einer Verallgemeinerung.

Zunächst die Festlegung einer Orientierung von Basen in  $\mathbb{R} V_n$ .

**Definitionen** Seien  $B$  und  $B'$  Basen des VRs  $\mathbb{R} V_n$  und bezeichne  $\mathfrak{M}(B, B')$  die Übergangsmatrix von  $B$  zu  $B'$  (siehe Satz 4.7.2). Dann nennen wir  $B, B'$  **gleichorientiert** (im Zeichen  $(B, B') \in R_{or}$ ) : $\iff |\mathfrak{M}(B, B')| > 0$ .

Als ÜA überlege man sich, daß die auf diese Weise definierte Relation  $R_{or}$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von  $\mathbb{R} V_n$  bildet. Folglich wird die Menge dieser Basen durch  $R_{or}$  in zwei Äquivalenzklassen zerlegt, die **Orientierungen** von  $\mathbb{R} V_n$  genannt werden:



Zur Festlegung einer bestimmten Orientierung hat man einfach eine der beiden Klassen auszuzeichnen, etwa durch Wahl einer repräsentierenden Basis (z.B. der Standardbasis).

Für den VR  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  heißt dann z.B. jede Basis  $B'$  Rechtssystem, wenn sie in derselben Äquivalenzklasse wie die Standardbasis liegt, was nichts anderes bedeutet, als daß die Determinante, deren Spalten die Elemente von  $B'$  sind, einen Wert  $> 0$  hat. Ist in  $V$  eine Orientierung ausgezeichnet, so nennt man  $V$  einen **orientierten VR**.

Der Vorbereitung einer zweiten Definition eines Vektorproduktes für  $\overrightarrow{V_3}$  dienen die nachfolgenden Bemerkungen, in denen  $\varphi$  stets das für  $\overrightarrow{V_3}$  im Abschnitt 6.1 definierte Skalarprodukt bezeichnet.

- Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - |\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \underbrace{(1 - \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))}_{\sin^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

- Falls  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V_3}$  l.a. sind, haben wir

$$\begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} = 0.$$

Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V_3}$  l.u., so gibt es genau zwei Vektoren  $\mathbf{e}$  mit der Länge 1 und der Eigenschaft  $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}) = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{e}) = 0$ .

Definiert man

$$\text{sign}(|\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{e}/B|) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{e}/B| \geq 0, \\ -1, & \text{falls } |\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{e}/B| < 0, \end{cases}$$

so gilt für jeden dieser Vektoren  $\mathbf{e}$ :

$$\text{sign}(|\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{e}/B|) \cdot \mathbf{e} = \text{sign}(|\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, -\mathbf{e}/B|) \cdot (-\mathbf{e}).$$

Aus diesen Bemerkungen folgt nun, daß folgende Definition eine Abbildung von  $\overrightarrow{V_3} \times \overrightarrow{V_3}$  in  $\overrightarrow{V_3}$  liefert, die im Fall

$$B \in [(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})]_{R_{or}}$$

nur eine andere Beschreibung des ursprünglichen Vektorproduktes ist.

**Definition** Seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overrightarrow{V_3}$  und  $\mathbf{e} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Weiter bezeichne  $B$  eine Basis von  $\overrightarrow{V_3}$ . Dann sei das Vektorprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \text{sign}(|\mathbf{a}/B, \mathbf{b}/B, \mathbf{e}/B|) \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{e}|} \cdot \mathbf{e}$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen Definition des Vektorproduktes läßt sich diese neue Beschreibung für  $(n+1)$ -dimensionale Vektorräume über  $\mathbb{R}$  verallgemeinern:

**Definition** Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  Vektoren aus einem  $(n+1)$ -dimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und bezeichne  $\mathbf{e}$  einen Vektor aus  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Dann ist das **Vektorprodukt** der Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  ( $n \geq 2$ ) definiert durch

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \dots \times \mathfrak{a}_n := \text{sign}(|\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-1}, \mathfrak{e}|) \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) & \dots & \varphi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_1) & \dots & \varphi(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_n) \end{vmatrix}} \cdot \frac{1}{\|\mathfrak{e}\|_\varphi} \cdot \mathfrak{e}$$

Als ÜA überlege man sich analog zu oben, daß obige Definition sinnvoll ist, d.h., wirklich eine Abbildung liefert.

---

## Euklidische und unitäre affine Punkträume

In diesem Kapitel soll kurz gezeigt werden wie man einige Begriffe und Sätze aus der Anschauungsebene bzw. aus dem Anschauungsraum, die mit dem Skalarprodukt zusammenhängen, auf  $n$ -dimensionale Punkträume übertragen kann.

**Definition** Sei  $R_n$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Punktraum über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann heißt  $R_n$  **euklidisch** (bzw. **unitär**), wenn der zu  $R_n$  gehörende VR euklidisch (bzw. unitär) ist.

Nachfolgend bezeichnet  $R_n$  stets einen euklidischen (bzw. unitären) Punktraum, für dessen zugehörigen VR das Skalarprodukt  $\varphi$  erklärt ist.

### 7.1 Abstandsmessung

**Definitionen** Seien  $P, Q \in R_n$ . Die Maßzahl

$$\begin{aligned} d(P, Q) &:= \|\overrightarrow{PQ}\|_\varphi (= \|Q - P\|_\varphi) \\ &= \sqrt{\varphi(Q - P, Q - P)} \end{aligned}$$

heißt **Abstand** von  $P, Q$ .

Als **Abstand**  $d(M, N)$  von **Punktmengen**  $M, N \subseteq R_n$  legen wir fest:

$$d(M, N) := \min_{P \in M, Q \in N} d(P, Q).$$

**Beispiel** Wählt man im zu  $R_n$  gehörenden VR  $V_n$  eine orthonormierte Basis  $B$  und ein  $A \in R_n$ , so gilt bez. des Koordinatensystems  $S := (A; B)$ , falls  $P/S = (1; p_1, \dots, p_n)^T$  und  $Q/S = (1; q_1, \dots, q_n)^T$ :

$$d(P, Q) = \sqrt{\varphi(Q - P, Q - P)} = \sqrt{|q_1 - p_1|^2 + |q_2 - p_2|^2 + \dots + |q_n - p_n|^2}.$$

Eigenschaften der Funktion  $d$ , die leichte Folgerungen aus den Normaxiomen sind, faßt der nachfolgende Satz zusammen.

**Satz 7.1.1 (mit Definition)** Für beliebige  $P, Q, R \in R_n$  gilt:

- (a)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;
- (b)  $d(P, Q) \geq 0$ ;
- (c)  $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$ ;
- (d)  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ .

D.h., jeder euklidische (bzw. unitäre) Raum  $R_n$  ist ein sogenannter **metrischer Raum** mit der Metrik

$$d : R_n \times R_n \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \|Q - P\|_\varphi.$$

■

**Satz 7.1.2** Seien  $E = P + W$  eine  $k$ -Ebene des  $R_n$  und  $Q \in R_n$ . Dann gilt:

$$d(Q, E) = \|\mathbf{a} - \sum_{i=1}^k \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i\|_\varphi,$$

wobei  $\mathbf{a} := Q - P$  und  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  eine orthonormierte Basis von  $W$  bezeichnet.

*Beweis.* Sei  $X = P + \mathfrak{x}$  ein beliebiger Punkt aus  $E$  und bezeichne  $\mathbf{a}'$  die orthogonale Projektion von  $\mathbf{a}$  in  $W$ . Dann gilt nach Satz 6.5.10 (S. 230):  $d(X, Q) = \|P + \mathfrak{x} - (P + \mathfrak{x})\|_\varphi = \|\mathfrak{x}\|_\varphi \geq \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi$ . Folglich haben wir  $d(E, Q) = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_\varphi$ . Unsere Behauptung folgt dann aus der Formel zur Berechnung von  $\mathbf{a}'$  aus Satz 6.5.11. ■

Als Folgerung aus obigem Satz erhält man übrigens unsere Abstandsformel von S. 206, die die Parallel- und Normalkomponente eines Vektors  $\mathbf{a}$  bez. eines Vektors  $\mathbf{b}$  verwendet.

Zwecks Verallgemeinerung von Satz 7.1.2 und unserer Methoden zur Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden in  $\Re_3$  zunächst die

**Definition** Seien  $E = Q + W$  und  $E' = Q' + W'$  Unterpunkträume des  $R_n$ .  $\mathbf{a} \in V_n$  heißt **Lot** von  $E$  und  $E'$ :  $\iff (\exists P \in E \ \exists P' \in E' : \mathbf{a} = \overrightarrow{PP'} \wedge \mathbf{a} \perp W \wedge \mathbf{a} \perp W')$ .

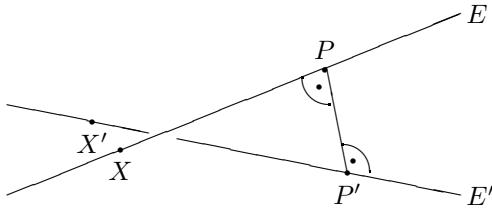
**Satz 7.1.3** Für beliebige disjunkte Unterpunkträume  $E, E'$  des  $R_n$  gilt:

- (a) Es existiert genau ein Lot  $\mathbf{a}$  von  $E$  und  $E'$ ;
- (b)  $d(E, E') = \|\mathbf{a}\|_\varphi$ ;
- (c)  $(\mathbf{b} = \overrightarrow{XX'} \wedge X \in E \wedge X' \in E' \wedge \|\mathbf{b}\|_\varphi = d(E, E')) \implies \mathbf{b}$  ist Lot von  $E$  und  $E'$ .

*Beweis.* (a): Zwecks Nachweises der Existenz eines Lotes überlegen wir uns zunächst folgende zwei Aussagen über Teilmengen  $W, W'$  von  $V_n$ :

- (i)  $(\mathfrak{a} \perp W \wedge \mathfrak{a} \perp W') \iff \mathfrak{a} \perp (W + W' = [W \cup W']).$   
 („ $\iff$ “ ist trivial.  
 „ $\implies$ “: Sei  $\mathfrak{b} \in W + W'$ . Dann existieren  $\mathfrak{b}_1 \in W$  und  $\mathfrak{b}_2 \in W'$  mit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ . Bildet man nun  $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)$ , so erhält man die Behauptung.)
- (ii)  $V_n = (W + W') \oplus (W + W')^\perp.$   
 (Folgt aus Satz 6.5.12.)

Wir wollen nun zwei Punkte  $P$  und  $P'$  mit der Eigenschaft  $\overrightarrow{PP'} \perp E$  und  $\overrightarrow{PP'} \perp E'$  ermitteln. Dazu betrachten wir zwei beliebige Punkte  $X \in E$  und  $X' \in E'$ .



Dann gilt nach (ii)

$$\overrightarrow{XX'} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{y} + \mathfrak{y}') + \mathfrak{x}_2,$$

wobei  $\mathfrak{x}_1 \in W + W'$ ,  $\mathfrak{y} \in W$ ,  $\mathfrak{y}' \in W'$  und  $\mathfrak{x}_2 \in (W + W')^\perp$ .

Wählt man  $P := X + \mathfrak{y}$  und  $P' := X' + (-\mathfrak{y}')$ , so erhält man  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'P'} = (X - P) + (X' - X) + (P' - X') = -\mathfrak{y} + \mathfrak{y} + \mathfrak{y}' + \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{y}' = \mathfrak{x}_2 \in (W + W')^\perp$ .

Wegen (i) folgt hieraus, daß die so definierten  $P$  und  $P'$  das Gewünschte leisten. Also gibt es ein Lot.

Die Eindeutigkeit dieses Lotes kann man sich wie folgt überlegen:

Angenommen,  $\mathfrak{a} = \overrightarrow{PP'}$  und  $\mathfrak{b} = \overrightarrow{QQ'}$  sind Lote von  $E$  und  $E'$ , wobei  $P, Q \in E$  und  $P', Q' \in E'$ . Dann gilt  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'}$  bzw.

$$\underbrace{\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'}}_{\in (W+W')^\perp} = \underbrace{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q'P'}}_{\in W+W'}.$$

Folglich und unter Verwendung von (ii) haben wir dann:

$$\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} \in (W + W')^\perp \cap (W + W') = \{\mathfrak{o}\},$$

was  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$  impliziert.

(b): Für beliebige  $X \in E$  und  $X' \in E'$  und den oben bestimmten  $P$  und  $P'$  bzw.  $\mathfrak{a} := \overrightarrow{PP'}$  gilt:  
 $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X'}$  und

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{XX'}\|_\varphi^2 &= \varphi(\underbrace{\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}}_{\in W+W'}) + \underbrace{\overrightarrow{PP'}}_{\in (W+W')^\perp}, (\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}) + \overrightarrow{PP'} \\
&= \|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}\|_\varphi^2 + \|\overrightarrow{PP'}\|_\varphi^2 \\
&\geq \|\overrightarrow{PP'}\|_\varphi^2.
\end{aligned}$$

Also ist (b) richtig.

(c): Seien  $X \in E$ ,  $X' \in E'$ ,  $\mathfrak{b} := \overrightarrow{XX'}$  und  $\|\mathfrak{b}\| = d(E, E')$ . Wir haben zu zeigen, daß  $\mathfrak{b}$  ein Lot von  $E$  und  $E'$  ist.

Nach den Rechnungen im Beweis von (b) haben wir:

$$\|\overrightarrow{XX'}\|_\varphi^2 = d(E, E')^2 = \|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}\|_\varphi^2 + \|\overrightarrow{PP'}\|_\varphi^2,$$

woraus (wegen  $\|\overrightarrow{PP'}\|_\varphi = d(E, E')$ )  $\|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}\|_\varphi = 0$  und damit (nach den Normaxiomen)  $\overrightarrow{XP} = -\overrightarrow{P'X'}$  folgt. Die letzte Gleichung liefert dann  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{XX'}$ , womit  $\mathfrak{b}$  Lot ist. ■

## 7.2 Winkel- und Volumenmessung in euklidischen Punkträumen

Analog zu den Definitionen in der Anschauungsebene bzw. im Anschauungsraum (siehe S. 221) lassen sich unter Verwendung der für euklidische Vektorräume erklärten Winkel zwischen Vektoren (siehe 6.4) Winkel zwischen je zwei Geraden, zwei Hyperebenen sowie Geraden und Hyperebenen definieren. Wir geben hier nur ein **Beispiel** an:

Sind  $g = P + W$  und  $g' = P' + W'$  Geraden im  $R_n$  über  $\mathbb{R}$  mit  $g \cap g' \neq \emptyset$  und  $\mathfrak{a} \in W \setminus \{\mathfrak{o}\}$ ,  $\mathfrak{a}' \in W' \setminus \{\mathfrak{o}\}$  so gewählt, daß  $0 \leq \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \leq \pi/2$ , versteht man unter dem Winkel der Geraden  $g$ ,  $g'$  den (eindeutig bestimmten) Winkel  $\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ .

Zwecks Einführung einer Volumenmessung im  $R_n$  zunächst die

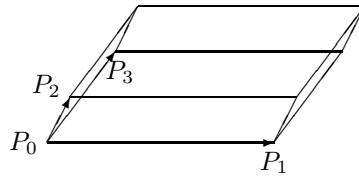
**Definition** Seien  $P_0, P_1, \dots, P_k$  Punkte eines affinen Raumes  $R_n$  über  $\mathbb{R}$  und  $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$  l.u. Dann heißt die Menge

$$\text{Sp}(P_0, P_1, \dots, P_k) :=$$

$$\{X \in R_n \mid \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : X = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \overrightarrow{P_0P_i} \wedge (\forall i : 0 \leq \lambda_i \leq 1)\}$$

**$k$ -Spat** im  $R_n$ .

Für  $n = k = 3$  stimmt diese Definition mit der eines Spates (bzw. Parallelepipeds) im  $\mathfrak{R}_3$  überein:



In Verallgemeinerung der im Satz 6.6.3 (S. 237) angegebenen Volumenformel für diesen Spat:

$$V_{\text{Spat}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (= |\mathbf{a}_{/B}, \mathbf{b}_{/B}, \mathbf{c}_{/B}|)$$

mit  $\mathbf{a} := \overrightarrow{P_0P_1}_{/B} = (a_1, a_2, a_3)^T$ ,  $\mathbf{b} := \overrightarrow{P_0P_2}_{/B} = (b_1, b_2, b_3)^T$ ,  $\mathbf{c} := \overrightarrow{P_0P_3}_{/B} = (c_1, c_2, c_3)^T$  und  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , die sich wegen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{/B}^T \\ \mathbf{b}_{/B}^T \\ \mathbf{c}_{/B}^T \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{a}_{/B}, \mathbf{b}_{/B}, \mathbf{c}_{/B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

und dem Determinantenmultiplikationssatz auch in der Form

$$|\mathbf{a}_{/B}, \mathbf{b}_{/B}, \mathbf{c}_{/B}| = \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}) & \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ \varphi(\mathbf{c}, \mathbf{a}) & \varphi(\mathbf{c}, \mathbf{b}) & \varphi(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}}$$

mit  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{y}$  für  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  aufschreiben lässt, erhalten wir die

**Definition** Bezeichne  $\varphi$  das Skalarprodukt des euklidischen Raumes  $R_n$  und seien  $P_0, \dots, P_k \in R_n$  und  $\mathbf{a}_i := \overrightarrow{P_0P_i}$  für  $i = 1, \dots, k$  l.u. Dann heißt

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & \varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) \\ \varphi(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & \varphi(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1) & \varphi(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) \end{vmatrix}}$$

das **Volumen des Spats**  $\text{Sp}(P_0, \dots, P_k)$ .

## 7.3 Koordinatentransformationen in kartesischen Koordinatensystemen

**Definition** Ein Koordinatensystem  $S = (A; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  des  $R_n$  heißt **kartesisches Koordinatensystem**, falls  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  eine orthonormierte Basis des zu  $R_n$  gehörenden VRs  $V_n$  ist.

Im Abschnitt 5.2 hatten wir uns bereits überlegt, daß zwischen den Koordinaten  $X/S$  eines beliebigen Punktes  $X$  bez. des Koordinatensystems  $S := (A; B)$  und den Koordinaten  $X/S'$  des Punktes  $X$  bez. des Koordinatensystems  $S' := (A'; B')$  folgender Zusammenhang besteht:

$$X/S = A'/S + \mathfrak{M}(B, B') \cdot X/S'.$$

Wir wollen nun klären, welche Eigenschaften die Matrix  $\mathfrak{M}(B, B')$  besitzt, falls  $B$  und  $B'$  orthonormiert sind. Dazu die

**Definition** Seien  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann heißt

- $\mathfrak{A}$  orthogonal : $\iff \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^T$ ;
- $\mathfrak{B}$  unitär : $\iff \mathfrak{B}^{-1} = \overline{\mathfrak{B}^T}$ .

### Satz 7.3.1

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann gilt:

(a1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \text{ ist orthogonal} &\iff \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T = \mathfrak{E}_n \iff \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n \\ &\iff \text{die Zeilen (bzw. Spalten) von } \mathfrak{A} \\ &\quad \text{sind bez. des Skalarproduktes} \\ &\quad \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{y} \text{ orthonormiert.} \end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \text{ ist unitär} &\iff \mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{B}^T} = \mathfrak{E}_n \iff \overline{\mathfrak{B}^T} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{E}_n \\ &\iff \text{die Zeilen (bzw. Spalten) von } \mathfrak{B} \\ &\quad \text{sind bez. des Skalarproduktes} \\ &\quad \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}} \text{ orthonormiert.} \end{aligned}$$

(b<sub>1</sub>)  $\mathfrak{A}$  orthogonal  $\implies |\mathfrak{A}| \in \{1, -1\}$ ;

(b<sub>2</sub>)  $\mathfrak{B}$  unitär  $\implies |\mathfrak{B}| \in \{1, -1\}$ ;

(c<sub>1</sub>)  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$  orthogonal  $\implies \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'$  orthogonal;

(c<sub>2</sub>)  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$  unitär  $\implies \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}'$  unitär.

*Beweis.* Es genügt, die obigen Behauptungen nur für unitäre Matrizen zu beweisen, da sich die Aussagen über orthogonale Matrizen hieraus als Spezialfälle ergeben.

(a<sub>2</sub>) folgt aus den Eigenschaften inverser Matrizen (siehe S. 137) und aus der Definition einer unitären Matrix.

(b<sub>2</sub>) ergibt sich unter Verwendung von Satz 3.2.5 (S. 136), Satz 3.1.4 (S. 115) und Satz 2.3.1 (S. 83) aus  $|\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{B}^T}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\overline{\mathfrak{B}^T}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\overline{\mathfrak{B}}| = | |\mathfrak{B}| |^2 = |\mathfrak{E}| = 1$ .

(c<sub>3</sub>) erhalten wir unter Verwendung der bekannten Regel für das Transponieren und des Bildens von konjugiert komplexen Zahlen aus:

$$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}') \cdot \overline{(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}')}^T = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}') \cdot (\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T) = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B}' \cdot \overline{\mathfrak{B}'}^T) \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T = \mathfrak{E}. \blacksquare$$

Als leichte Folgerung aus obigen Satz 7.3.1 und Satz 5.2.2 (S. 192) erhalten wir dann den

**Satz 7.3.2** Bezeichne  $S := (A; B)$  ein kartesisches Koordinatensystem des  $R_n$  über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann gilt für ein beliebiges Koordinatensystem  $S' := (A'; B')$ :

$$S' \text{ kartesisch} \iff (K = \mathbb{R} \wedge \mathfrak{M}(B, B') \text{ orthogonal}) \vee (K = \mathbb{C} \wedge \mathfrak{M}(B, B') \text{ unitär}).$$

*Beweis.* ÜA. ■

Nachfolgend überlegen wir uns noch einige Eigenschaften orthogonaler Matrizen. Wir beginnen mit

**Satz 7.3.3** Jede orthogonale  $(2, 2)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  über  $\mathbb{R}$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \varepsilon \cdot \sin \alpha & \varepsilon \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  und  $-\pi < \alpha \leq \pi$  gilt.

Umgekehrt ist jede Matrix dieser Form eine orthogonale Matrix.

*Beweis.* Sei

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix. Nach Definition einer orthogonalen Matrix haben wir dann

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$

und

$$a \cdot c + b \cdot d = 0.$$

Im Fall  $a = 0$  folgt hieraus offenbar

$$\mathfrak{A} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Behauptung ist leicht verifizierbar.

Analog überprüft man die Richtigkeit der Behauptung für  $b = 0$ .

Wir können also nachfolgend  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  voraussetzen.

Wegen  $a^2 + b^2 = 1$  gibt es ein  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  mit  $a = \cos \alpha (= \cos(-\alpha))$ . Außerdem folgt aus  $b^2 = 1 - a^2 = \sin^2 \alpha$ , daß  $b \in \{-\sin \alpha, \sin \alpha\}$ . Falls  $b = \sin \alpha$  ist, gilt für  $\alpha' := -\alpha$ :  $a = \cos \alpha'$  und  $b = -\sin \alpha'$ . Also existiert ein  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  mit

$$a = \cos \alpha \quad \text{und} \quad b = -\sin \alpha.$$

Aus  $ac + bd = 0$  erhält man nun die Gleichungen

$$c/b = -d/a =: t, \quad c = (-d/a) \cdot b = t \cdot b \quad \text{und} \quad d = (-c/b) \cdot a = -t \cdot a,$$

woraus sich  $t \in \{1, -1\}$  mit Hilfe von  $c^2 + d^2 = 1$  ergibt. Also hat die orthogonale Matrix  $\mathfrak{A}$  die behauptete Gestalt.

Daß jede Matrix der Gestalt

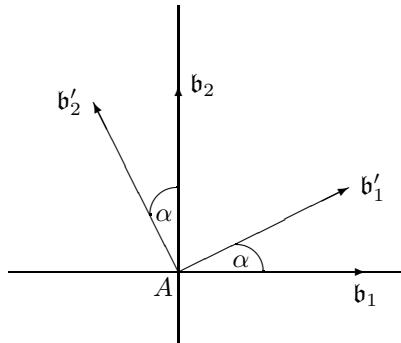
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \varepsilon \cdot \sin \alpha & \varepsilon \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

mit  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  und  $-\pi < \alpha \leq \pi$  orthogonal ist, rechnet man leicht nach. ■

Geometrisch lassen sich  $\alpha$  und  $\varepsilon$  aus Satz 7.3.3 z.B. auf folgende Weise deuten: Seien  $S := (A; \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$  und  $S' := (A; \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2)$  kartesische Koordinatensysteme der Ebene  $\mathfrak{R}_2$ . Nach Satz 5.2.2 (S. 192) gilt dann für jedes  $X \in \mathfrak{R}_2$ :

$$X/S = A/S + \mathfrak{M}(B, B') \cdot X/S'.$$

Wählt man nun  $B$  und  $B'$  wie in der Abbildung

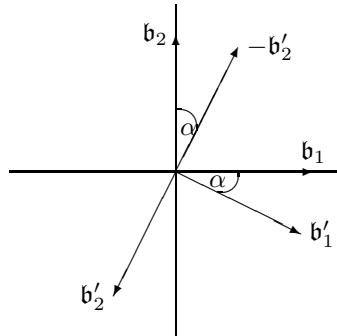


angegeben, so erhält man

$$\mathfrak{M}(B, B') = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

womit sich  $\alpha$  (im Fall  $\varepsilon = 1$ ) aus Satz 7.3.3 als Drehwinkel deuten läßt, um den die Achsenrichtungen  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$  bei der Überführung in  $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2$  gedreht werden müssen (im mathematisch positiven Drehsinn).

Wird bei der Überführung von  $B$  in  $B'$  nicht nur „gedreht“ sondern (wie weiter unten angegeben) auch „gespiegelt“,



so erhält man

$$\mathfrak{M}(B, B') = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix},$$

und  $\alpha$  ist im Fall  $\varepsilon = -1$  als Winkel bei einer „Drehspiegelung“ deutbar. Unmittelbar einzusehen ist, daß auch Matrizen der Gestalt

$$\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha) := \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & & & & \vdots & \\ \vdots & & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & & \leftarrow r\text{-te Zeile} \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \\ & \sin \alpha & \cos \alpha & & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \stackrel{s\text{-te Spalte}}{\downarrow} = (e_{ij})_{n,n},$$

wobei

$$e_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ und } i \notin \{r, s\}, \\ \cos \alpha & \text{für } i = j \in \{r, s\}, \\ -\sin \alpha & \text{für } (i, j) = (r, s), \\ \sin \alpha & \text{für } (i, j) = (s, r), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für beliebige verschiedene  $r, s \in \{1, \dots, n\}$  orthogonal sind. Außerdem gilt:

$$\mathfrak{E}_{n;r,s}(0) = \mathfrak{E}_n$$

und

$$(\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha))^{-1} = \mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha)^T = \mathfrak{E}_{n;r,s}(-\alpha).$$

**Satz 7.3.4** Jede orthogonale  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  mit  $n \geq 2$  und  $|\mathfrak{A}| = 1$  lässt sich als Produkt von höchstens  $n \cdot (n-1)/2$  Matrizen der Form  $\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha)$  darstellen.

*Beweis.* Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

(I) Für  $n = 2$  folgt der Satz 7.3.4 aus Satz 7.3.3.

(II) Angenommen, die Behauptung ist für alle orthogonalen Matrizen  $\mathfrak{B}$  des Typs  $(k, k)$  mit  $2 \leq k < n$  und  $|\mathfrak{B}| = 1$  richtig.

Ist dann  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{n,n}$  eine orthogonale Matrix mit  $|\mathfrak{A}| = 1$ , so bilden wir

$$\mathfrak{A}' := (a'_{ij})_{n,n} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_{n;1,2}(-\alpha_1),$$

wobei

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cdot \cos \alpha_1 - a_{12} \sin \alpha_1 && \text{und} \\ a'_{12} &= a_{11} \cdot \sin \alpha_1 + a_{12} \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Der Winkel  $\alpha_1$  lässt sich so bestimmen, daß

$$a'_{12} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{11} \geq 0$$

gilt. Bildet man nun

$$\mathfrak{A}'' := (a''_{ij})_{n,n} = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{E}_{n;1,3}(-\alpha_2),$$

so haben wir

$$\begin{aligned} a''_{11} &= a'_{11} \cdot \cos \alpha_2 - a'_{13} \sin \alpha_2 && \text{und} \\ a''_{13} &= a'_{11} \cdot \sin \alpha_2 + a'_{13} \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Der Winkel  $\alpha_2$  ist dann wieder so bestimmbar, daß

$$a''_{13} = 0 \quad \text{und} \quad a''_{11} \geq 0$$

ist.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert nach  $n - 1$  Schritten:

$$\mathfrak{A}^{(n-1)} := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_{n;1,2}(-\alpha_1) \cdot \mathfrak{E}_{n;1,3}(-\alpha_2) \cdot \dots \cdot \mathfrak{E}_{n;1,n}(-\alpha_{n-1}).$$

Die Matrix  $\mathfrak{A}^{(n-1)} =: (d_{ij}^{(n-1)})_{n,n}$  ist als Produkt orthogonaler Matrizen mit der Determinante 1 wieder eine orthogonale Matrix mit der Determinante 1. Das Element  $d_{11}^{(n-1)}$  ist nicht negativ, und alle folgenden Elemente der ersten Zeile von  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  sind 0. Da die Zeilen einer orthogonalen Matrix bez. des Standardskalarproduktes orthonormiert sind, haben wir  $(d_{11}^{(n-1)})^2 = 1$  und damit  $d_{11}^{(n-1)} = 1$ . Folglich müssen die restlichen Elemente der ersten Spalte von  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  alle gleich 0 sein. Also:

$$\mathfrak{A}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{(n-1)} & \dots & d_{2n}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_{n2}^{(n-1)} & \dots & d_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Streicht man in  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  die erste Zeile und die erste Spalte, so entsteht eine orthogonale Matrix, die nach unserer Annahme als Produkt von höchstens  $(n-1)(n-2)/2$  Matrizen der Form  $\mathfrak{E}_{n-1;r,s}(\alpha)$  dargestellt werden kann. Folglich ist auch  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  ein Produkt von Matrizen der Form  $\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha)$ . Multipliziert man nun die obige Darstellung von  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  von rechts der Reihe nach mit  $\mathfrak{E}_{n;1;k}(\alpha_{k-1})$ ,  $k = n, n-1, \dots, 3, 2$ , so erhält man (unter Verwendung der Darstellung von  $\mathfrak{A}^{(n-1)}$  in Form eines Produktes von höchstens  $(n-2)(n-1)/2$  Matrizen der Form  $\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha)$ ) die behauptete Darstellung für  $\mathfrak{A}$ . Die Anzahl der Faktoren ist dabei maximal

$$(n-1)(n-2)/2 + n - 1 = n(n-1)/2$$

■

Als Folgerung erhalten wir aus dem Beweis des obigen Satzes den

**Satz 7.3.5** *Für jede orthogonale  $(3, 3)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  mit  $|\mathfrak{A}| = 1$  gibt es gewisse  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\ 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Zwei **Bemerkungen** zu Satz 7.3.5:

- (1.) Geometrisch lässt sich die Aussage von Satz 7.3.5 wie folgt deuten:  
Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(B, B^*)$  die Übergangsmatrix bei einer Koordinatentransformation im  $\mathfrak{R}_3$ , so entstehen die Koordinatenachsen von  $S^* := (A; B^*)$  aus den Koordinatenachsen von  $S := (A; B)$  (nachfolgend von uns  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse genannt), indem man zunächst in der  $x, y$ -Ebene die  $x$ - und die  $y$ -Achse jeweils um den Winkel  $\alpha_1$  dreht, dann in der (so entstandenen)  $x', z'$ -Ebene die Achsen um  $\alpha_2$  dreht und abschließend in der so gebildeten  $y'', z''$ -Ebene die Achsen um  $\alpha_3$  dreht.  
Unter anderem heißt dies auch: Gleichorientierte Basen des Raumes lassen sich durch Drehungen ineinander überführen.
- (2.) Ein zu Satz 7.3.5 analoges Ergebnis erhält man für orthogonale Matrizen  $\mathfrak{A}$  mit  $|\mathfrak{A}| = -1$ , indem man die orthogonale Matrix

$$\mathfrak{A}' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{A}$$

bildet und  $|\mathfrak{A}'| = 1$  beachtet.

---

## Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von Matrizen

Nachfolgend geht es um die Erarbeitung von Sätzen, die wir in den Kapiteln 9 und 10 benötigen. Für das Verständnis von Kapitel 9 sind nur die Sätze über symmetrische Matrizen und der Abschnitt 8.4 erforderlich. Die restlichen Überlegungen dieses Kapitels werden wir im Kapitel 10 erstmals anwenden. Für weitere Anwendungen (z.B. beim Lösen von Differentialgleichungssystemen<sup>1)</sup>) sei z.B. auf [Hup 90] verwiesen.

### 8.1 Motivation, Grundbegriffe

Bevor wir zu den Definitionen der Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenvektor“ kommen, zunächst drei Probleme, bei deren Lösung wir später als Hilfsmittel Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen werden.

#### Erstes Problem

Im affinen Raum  $R_n$  über  $\mathbb{R}$  bezeichne  $S := (A; B)$  ein kartesisches Koordinatensystem, und es sei  $T$  die Menge aller Punkte  $X$ , die der Gleichung

$$X/S^T \cdot \mathfrak{A} \cdot X/S = a \quad (8.1)$$

mit  $a \in \mathbb{R}$  genügen. Z.B. sei  $T$  in  $R_2$  definiert durch

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

bzw.

$$x_1^2 + 7x_1x_2 + 8x_2^2 = 1.$$

Kann man dann ein kartesisches Koordinatensystem  $S' := (A'; B')$  mit

$$T : X/S'^T \cdot \mathfrak{A}' \cdot X/S' = a$$

---

<sup>1</sup> Siehe dazu ÜA A.8.15.

und

$$\mathfrak{A}' := (\mathfrak{M}(B, B'))^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}(B, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

finden?

Mit anderen Worten: Läßt sich die orthogonale Übergangsmatrix  $\mathfrak{M}(B, B')$  so bestimmen, daß beim Ersetzen von  $X/S$  durch  $\mathfrak{M}(B, B') \cdot X/S'$  in (8.1) die beschreibende Gleichung von  $T$  in Koordinaten bez.  $S'$  eine einfachere Struktur hat (genauer:  $\mathfrak{A}'$  in der beschreibenden Gleichung von  $T$  eine Diagonalmatrix ist)?

Falls eine Lösung dieses Problems existiert, nennt man die Matrix  $\mathfrak{A}$  aus der Gleichung von  $T$  **diagonalisierbar**.

### Zweites Problem

Seien  $V_n$  ein  $n$ -dimensionaler VR über dem Körper  $K$ ,  $B$  eine Basis von  $V_n$  und  $f$  eine Abbildung von  $V_n$  in  $V_n$ , die sich mit Hilfe einer Matrix  $\mathfrak{A}_f \in K^{n \times n}$  wie folgt beschreiben läßt:

$$\forall \mathfrak{x} \in V_n : f(\mathfrak{x})/B := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B.$$

$f$  ist eine sogenannte **lineare Abbildung**<sup>2</sup> von  $V_n$  in  $V_n$  (bzw. ein **Endomorphismus** von  $V_n$  bzw. ein **linearer Operator** von  $V_n$ ). Gibt es dann eine Basis  $B'$ , so daß die Abbildung  $f$  auch durch eine Gleichung der Form

$$f(\mathfrak{x})/B' := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}/B'$$

mit passend gewählten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  charakterisiert werden kann? Da bekanntlich

$$\mathfrak{x}/B = \mathfrak{M}(B, B') \cdot \mathfrak{x}/B'$$

gilt (siehe Satz 4.7.2), ist obige Fragestellung gleichwertig mit:

Existiert eine Matrix  $\mathfrak{M}(B, B') \in K^{n \times n}$  mit der Eigenschaft, daß  $(\mathfrak{M}(B, B'))^{-1} \cdot \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{M}(B, B')$  eine Diagonalmatrix ist?

Falls dieses Problem eine Lösung besitzt, heißt die lineare Abbildung  $f$  **diagonalisierbar**.

### Drittes Problem

Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  nicht diagonalisierbar. Gibt es dann gewisse Matrizen  $\mathfrak{A}_i \in K^{n_i \times n_i}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) (die sogenannten **Diagonalkästchen von  $\mathfrak{A}$** ) und eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  mit

---

<sup>2</sup> Siehe Kapitel 10.

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{O}_{n_1, n_2} & \dots & \mathfrak{O}_{n_1, n_t} \\ \mathfrak{O}_{n_2, n_1} & \mathfrak{A}_2 & \dots & \mathfrak{O}_{n_2, n_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{n_t, n_1} & \mathfrak{O}_{n_t, n_2} & \dots & \mathfrak{A}_t \end{pmatrix} ?$$

Dabei sollen die Matrizen  $\mathfrak{A}_i$  eine noch festzulegende Struktur besitzen. Z.B. verlangen wir später, daß die  $\mathfrak{A}_i$  sogenannte *elementare Jordan-Matrizen*<sup>3</sup> sind.

Falls für  $\mathfrak{A}$  eine solche Matrix  $\mathfrak{B}$  existiert, nennen wir  $\mathfrak{A}$  **quasi-diagonalisierbar**.

Die drei Probleme führen damit auf die folgende Aufgabenstellung:

**Gegeben:**  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$

**Gesucht:**  $\mathfrak{M} \in K_r^{n \times n}$  mit  $\mathfrak{M}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{M}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}$  ist eine Diagonalmatrix, d.h., nur in der Hauptdiagonalen dieser Matrix können Elemente ungleich 0 stehen, oder sie ist eine Quasi-Diagonalmatrix, d.h., nur längs der Hauptdiagonalen befinden sich quadratische Untermatrizen, in denen von Null verschiedene Elemente stehen können. Die Matrix  $\mathfrak{A}' := \mathfrak{M}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}$  heißt dann eine **Normalform von  $\mathfrak{A}$** .

Nun zu den angekündigten Begriffen und Bezeichnungen, die mit der Lösung dieser Aufgabenstellung in Verbindung stehen:

**Definition** Zwei Matrizen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in K^{n \times n}$  heißen **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2$  gibt.

### Lemma 8.1.1 (mit Definitionen)

(a) *Auf der Menge  $K^{n \times n}$  ist die Relation*

$$R := \{(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in R \mid \exists \mathfrak{B} \in K_r^{n \times n} : \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2\}$$

*eine Äquivalenzrelation, die sogenannte Ähnlichkeitsrelation von Matrizen.*

(b) *Sind  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in K^{n \times n}$  ähnliche Matrizen, d.h.,  $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in R$ , so gilt  $rg(\mathfrak{A}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i = rg(\mathfrak{A}_2 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i$  für alle  $\lambda \in K$  und alle  $i \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis.** (a): Wegen  $\mathfrak{E}_n^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_n = \mathfrak{A}$  für alle  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  ist  $R$  reflexiv. Da aus  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2$  stets  $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}_1$  folgt, ist  $R$  symmetrisch. Für den Nachweis der Transitivität seien  $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3) \in R$ , d.h., es existieren gewisse reguläre Matrizen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2$  und  $\mathfrak{C}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A}_3$ . Folglich haben wir

$$\mathfrak{C}^{-1} \cdot (\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A}_3,$$

woraus sich  $(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}_3$  und dann  $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3) \in R$  ergibt.

(b): Sei  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2$  für eine gewisse reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$ . Dann gilt

<sup>3</sup> Siehe Abschnitt 8.5.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_2 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i &= (\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B} - \lambda \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{B})^i = (\mathfrak{B}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{B})^i \\ &= \mathfrak{B}^{-1} \cdot (\mathfrak{A}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

(b) folgt damit aus Satz 3.3.3. ■

**Definition** Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ . Dann heißt

- $\lambda \in K$  **Eigenwert** (kurz: **EW**) von  $\mathfrak{A} : \iff \exists \mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \setminus \{\mathfrak{o}\} : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x}$ . Die Gleichung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x}$  lässt sich auch in der Form  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  aufschreiben, so daß man auch definieren kann:
- $\lambda \in K$  **Eigenwert** von  $\mathfrak{A} : \iff \exists \mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \setminus \{\mathfrak{o}\} : (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ .

**Beispiel** Seien  $K = \mathbb{R}$  und

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\lambda_1 := 0$  ein Eigenwert, da für  $\mathfrak{x}_1 := (1, 0, -1)^T$  die Gleichung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{o} = 0 \cdot \mathfrak{x}_1$  gilt. Auch  $\lambda_2 := 1$  ist EW von  $\mathfrak{A}$ , da z.B. für  $\mathfrak{x}_2 := (1, -1, 0)^T$  gilt:  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2$ .

**Definitionen** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $\lambda \in K$  ein EW von  $\mathfrak{A}$ . Dann heißt

- die Menge

$$L_{\mathfrak{A}}(\lambda) := \{\mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \mid \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x}\}$$

**Eigenraum** des Eigenwerts  $\lambda$  von  $\mathfrak{A}$  und jedes Element von  $L_{\mathfrak{A}}(\lambda) \setminus \{\mathfrak{o}\}$  ein zu  $\lambda$  gehörender **Eigenvektor** (abgekürzt: **EV**).

- die Menge

$$L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda) := \{\mathfrak{x} \in K^{n \times 1} \mid (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}\} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

**verallgemeinerter Eigenraum** des Eigenwerts  $\lambda$  von  $\mathfrak{A}$  und jedes Element von  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda) \setminus \{\mathfrak{o}\}$  ein zu  $\lambda$  gehörender **verallgemeinerter Eigenvektor** (abgekürzt: **vEV**).

Offenbar ist ein Eigenraum auch ein verallgemeinerter Eigenraum. Außerdem ist jeder verallgemeinerte Eigenraum (als Lösungsraum eines homogenen LGS) ein Untervektorraum.

**Definitionen** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $U$  ein UVR des VRs  $K^{n \times 1}$ . Dann heißt  $U$

- **$\mathfrak{A}$ -invariant** : $\iff \mathfrak{A} \cdot U := \{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in U\} \subseteq U$ ;
- **$\mathfrak{A}$ -zerlegbar** : $\iff \exists \mathfrak{A}$ -invariante UVRe  $U_1, U_2 : \dim U_1 \geq 1 \wedge \dim U_2 \geq 1 \wedge U_1 \oplus U_2 = U$ ;
- **$\mathfrak{A}$ -unzerlegbar** : $\iff U$  ist nicht  $\mathfrak{A}$ -zerlegbar.

Beispiele zu obigen Begriffen findet man im Abschnitt 8.3.

Bevor wir uns Methoden zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren überlegen, kurz zurück zu den eingangs angegebenen drei Problemen, für die die nächsten zwei Lemmata und der Satz 8.1.4 Lösungswege zeigen.

**Lemma 8.1.2** Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K^{n \times n}$ ,  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  regulär,  $\mathfrak{C} := (\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n)$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ . Dann können die Spalten  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  von  $\mathfrak{B}$  als Basis  $B$  von  $K^{n \times 1}$  aufgefaßt werden und es gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \mathfrak{c}_i = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i) / B , \quad (8.2)$$

d.h., für jedes  $i$  ist die  $i$ -te Spalte von  $\mathfrak{C}$  die Koordinatendarstellung des Vektors  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i$  bezüglich der Basis  $B$ .

*Beweis.* Seien  $\mathfrak{d}_1^T, \dots, \mathfrak{d}_n^T$  die Zeilen der Matrix  $\mathfrak{B}^{-1}$ , womit

$$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathfrak{d}_k^T \cdot \mathfrak{b}_l = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad (8.3)$$

gilt. Sei weiterhin  $\mathfrak{c}'_i := (c'_{i1}, c'_{i2}, \dots, c'_{in})^T = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i) / B$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), d.h., es gelte

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i = c'_{1i} \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + c'_{ni} \cdot \mathfrak{b}_n .$$

Dann folgt mit Hilfe von (8.3) aus den folgenden Überlegungen die Behauptung (8.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_i &= \mathfrak{B}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i) \\ &= \mathfrak{B}^{-1} \cdot (c'_{1i} \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + c'_{ni} \cdot \mathfrak{b}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1^T \\ \dots \\ \mathfrak{d}_n^T \end{pmatrix} \cdot (c'_{1i} \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + c'_{ni} \cdot \mathfrak{b}_n) \\ &= \begin{pmatrix} c'_{1i} \cdot (\mathfrak{d}_1^T \cdot \mathfrak{b}_1) + c'_{2i} \cdot (\mathfrak{d}_1^T \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + c'_{ni} \cdot (\mathfrak{d}_1^T \cdot \mathfrak{b}_n) \\ c'_{1i} \cdot (\mathfrak{d}_2^T \cdot \mathfrak{b}_1) + c'_{2i} \cdot (\mathfrak{d}_2^T \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + c'_{ni} \cdot (\mathfrak{d}_2^T \cdot \mathfrak{b}_n) \\ \dots \\ c'_{1i} \cdot (\mathfrak{d}_n^T \cdot \mathfrak{b}_1) + c'_{2i} \cdot (\mathfrak{d}_n^T \cdot \mathfrak{b}_2) + \dots + c'_{ni} \cdot (\mathfrak{d}_n^T \cdot \mathfrak{b}_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c'_{i1} \\ \dots \\ c'_{ni} \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{c}'_i \end{aligned}$$

■

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Lemma 8.1.2 ist:

**Lemma 8.1.3** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n) \in K_r^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A}_i \in K^{n_i \times n_i}$  für  $i = 1, \dots, t$ . Dann gilt

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{O}_{n_1, n_2} & \dots & \mathfrak{O}_{n_1, n_t} \\ \mathfrak{O}_{n_2, n_1} & \mathfrak{A}_2 & \dots & \mathfrak{O}_{n_2, n_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{n_t, n_1} & \mathfrak{O}_{n_t, n_2} & \dots & \mathfrak{A}_t \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn der UVR  $U_i := [\{\mathfrak{b}_{n_1+n_2+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, \mathfrak{b}_{n_1+n_2+\dots+n_i}\}]$  für jedes  $i \in \{1, \dots, t\}$   $\mathfrak{A}$ -invariant ist und  $K^{n \times 1} = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$  gilt. ■

**Satz 8.1.4** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n) \in K_r^{n \times n}$ . Dann gilt

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \iff (\forall i \in \{1, \dots, n\} : \mathfrak{b}_i \text{ ist EV zum EW } \lambda_i \text{ von } \mathfrak{A}) \wedge \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n \text{ sind l.u.}$$

*Beweis.* Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir nachfolgend mit  $\mathfrak{D}$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ . Hieraus folgt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}$  bzw.

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1, \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_n) = (\lambda_1 \cdot \mathfrak{b}_1, \lambda_2 \cdot \mathfrak{b}_2, \dots, \lambda_n \cdot \mathfrak{b}_n),$$

womit  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i = \lambda_i \cdot \mathfrak{b}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt. Da  $\mathfrak{b}_i$  für jedes  $i$  die Spalte einer regulären Matrix ist, gilt  $\mathfrak{b}_i \neq \mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{b}_i$  ist folglich EV zum EW  $\lambda_i$  von  $\mathfrak{A}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  l.u. EVen zu den EWen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathfrak{A}$ . Dann existiert  $\mathfrak{B}^{-1}$  und wegen  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i = \lambda_i \cdot \mathfrak{b}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  haben wir:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i) / B = (0, \dots, 0, \underbrace{\lambda_i}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T.$$

Damit ergibt sich unsere Behauptung aus Lemma 8.1.2. ■

Als **Folgerungen** aus Satz 8.1.4 erhalten wir:

- Das erste Problem besitzt genau dann eine Lösung, wenn eine orthonormierte Basis für  $V_n$  aus EVen zu den EWen von  $\mathfrak{A}$  existiert.
- Das zweite Problem besitzt genau dann eine Lösung, wenn in  $V_n$  eine Basis aus EVen zu den EWen der Matrix  $\mathfrak{A}_f$  existiert.
- Das dritte Problem besitzt genau dann eine Lösung, wenn der VR  $K^{n \times 1}$  als direkte Summe von  $\mathfrak{A}$ -invarianten UVRen dargestellt werden kann.

Wie kann man aber nun die EWe und EVen einer Matrix  $\mathfrak{A}$  sowie  $\mathfrak{A}$ -invariante (möglichst auch  $\mathfrak{A}$ -unzerlegbare) UVRe bestimmen?

Wir beginnen mit Aussagen über EWe.

## 8.2 Eigenwerte von Matrizen und Nullstellen von Polynomen

**Satz 8.2.1** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

$$\lambda \text{ ist EW von } \mathfrak{A} \iff |\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| = 0.$$

*Beweis.* Wie wir nach der Definition eines Eigenwertes bereits angegeben haben, ist  $\lambda$  genau dann ein EW von  $\mathfrak{A}$ , wenn das homogene LGS  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  eine nichttriviale Lösung  $\mathfrak{x}$  besitzt. Dieses homogene LGS besitzt aber nach Satz 3.4.5 genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn  $\text{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) < n$  ist, was mit  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| = 0$  gleichwertig ist. ■

**Beispiele** Seien  $K = \mathbb{R}$  und

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda) = (1-\lambda) \cdot (\lambda-2) \cdot \lambda \end{aligned}$$

nur für  $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ , womit 0, 1 und 2 die EWe von  $\mathfrak{A}$  sind.

Wählt man ebenfalls  $K = \mathbb{R}$ , jedoch

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich aus  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ , daß nur  $\lambda_1 := 1+2 \cdot i$  oder  $\lambda_2 := 1-2 \cdot i$  dieser Gleichung genügen, womit  $\mathfrak{A}$  im Körper der reellen Zahlen keine Eigenwerte besitzt.

**Definition** Die (ausgerechnete) Determinante  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n|$ , wobei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ , heißt **charakteristisches Polynom** von  $\mathfrak{A}$ .

**Satz 8.2.2** Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in K^{n \times n}$  ähnliche Matrizen, d.h., es gibt eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$ . Dann besitzen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  dasselbe charakteristische Polynom.

*Beweis.* Aus  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$  folgt unter Verwendung von Satz 3.2.5 (Seite 136):

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{A}' - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| &= |\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| = |\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{B}| \\
&= |\mathfrak{B}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}^{-1}| \cdot |\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| \cdot |\mathfrak{B}| \\
&= |\mathfrak{B}|^{-1} \cdot |\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| \cdot |\mathfrak{B}| \\
&= |\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n|.
\end{aligned}$$

■

Satz 8.2.1 besagte, daß  $\lambda \in K$  genau dann EW der Matrix  $\mathfrak{A}$  ist, wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Aus diesem Grunde werden wir uns jetzt kurz mit Nullstellen von Polynomen befassen.

### Einiges über die Nullstellenberechnung von Polynomen

**Definitionen** Unter einem **Polynom** über dem Körper  $K$  versteht man eine Abbildung  $p_n$  von  $K$  in  $K$ , die definiert ist durch

$$\forall x \in K : p_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

wobei  $a_0, \dots, a_n \in K$  die **Koeffizienten** des Polynoms sind und  $n \in \mathbb{N}_0$  ist. Falls  $a_n \neq 0$ , heißt  $p_n$  Polynom  $n$ -ten **Grades**. Für den Fall  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$  habe  $p_n$  den Grad  $-1$ .  $\text{Grad}(p_n)$  bezeichne den Grad des Polynoms  $p_n$ .

Die Gleichung

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

heißt **algebraische Gleichung** in  $x$  und die Lösungen ( $\in K$ ) dieser Gleichung werden **Nullstellen** oder **Wurzeln** des Polynoms  $p_n$  genannt.

Wegen der späteren Anwendungen werden uns nachfolgend nur Aussagen über Nullstellen von Polynomen über den Körper der reellen oder komplexen Zahlen interessieren. Wir beginnen mit

### Satz 8.2.3 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede algebraische Gleichung mit reellen oder komplexen Koeffizienten hat mindestens eine Wurzel in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Satz zu beweisen. So hat bereits Gauß 5 Beweise für den Fundamentalsatz gegeben. Der Beweis wird um so einfacher, je mehr Sätze man aus der Analysis heranziehen kann.<sup>4</sup> Der nachfolgend angegebene Beweis für den Fundamentalsatz benutzt nur die Begriffe *Limes einer Folge*, *stetige Funktion* und den Satz:

Seien  $r \in \mathbb{R}$ ,  $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$  und  $f : K_r \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige

<sup>4</sup> Siehe dazu z. B. [Wae 50], S. 236, wo gezeigt wird, wie man aus Sätzen der Funktionentheorie den Fundamentalsatz als unmittelbare Folgerung erhält.

Funktion. Dann existiert ein  $(a, b) \in K_r$  mit  $f(a, b) \leq f(x, y)$  für alle  $(x, y) \in K_r$ .<sup>5</sup>  
Sei nachfolgend

$$p(z) := a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  und  $a_n \neq 0$ . Für beliebige  $z := x+i \cdot y \in \mathbb{C}$  können wir

$$f(x, y) := |p(x + i \cdot y)|$$

setzen.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist offenbar eine stetige Funktion, von der wir zeigen werden, daß ihr Minimum 0 ist. Wegen

$$\forall w \in \mathbb{C} : |w| = 0 \iff w = 0$$

folgt hieraus unmittelbar die Existenz eines  $z \in \mathbb{C}$  mit  $p(z) = 0$ .

Wegen

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &= |a_n| \cdot |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}\right| \end{aligned}$$

ist  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$ , womit man sich bei der Suche nach dem Minimum von  $f(x, y)$  auf die  $(x, y)$  aus einer gewissen Menge  $K_r$  mit passend gewähltem  $r \in \mathbb{R}$  beschränken kann.

Bezeichne nachfolgend  $\alpha := a + b \cdot i$  ein Element aus  $\mathbb{C}$  mit  $f(a, b) = \min_{(x, y) \in K_r} f(x, y)$ . Angenommen,  $p(\alpha) \neq 0$ . In diesem Fall läßt sich ein Polynom  $q$  durch

$$\forall w \in \mathbb{C} : q(w) := \frac{p(w + \alpha)}{p(\alpha)}$$

definieren. Dieses Polynom läßt sich mit passend gewählten Koeffizienten  $b, c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  auch in der Form

$$1 + b \cdot w^k + \sum_{i=k+1}^n c_i \cdot w^i$$

darstellen, wobei man  $k$  stets so wählen kann, daß  $b \neq 0$  ist. Nach Satz 2.3.6 existiert ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $b \cdot c^k = -1$ . Folglich haben wir

$$q(c \cdot w) = 1 - w^k + w^{k+1} \cdot \sum_{i=k+1}^n c_i \cdot c^i \cdot w^{i-k-1}$$

und für alle  $w \in \mathbb{R}$  mit  $0 < w < 1$  gilt

$$\begin{aligned} |q(c \cdot w)| &\leq 1 - w^k + w^{k+1} \cdot \underbrace{\sum_{i=k+1}^n |c_i| \cdot |c^i| \cdot w^{i-k-1}}_{\leq \sum_{i=k+1}^n |c_i| \cdot |c^i| =: C} \\ &\leq 1 - w^k \cdot (1 + w \cdot C). \end{aligned}$$

Die reelle Zahl  $w$  läßt sich nun so klein wählen, daß  $0 < 1 + w \cdot C < 1$  und damit  $1 - w^k \cdot (1 + w \cdot C) < 1$  gilt. Folglich haben wir die Existenz eines  $w \in \mathbb{R}$  und

<sup>5</sup> Ein Spezialfall des Satzes: *Jede stetige zweistellige reelle Funktion, die auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge definiert ist, besitzt auf dieser Menge ein Minimum.*

eines  $c \in \mathbb{C}$  mit  $\left| \frac{p(c \cdot w + \alpha)}{p(\alpha)} \right| < 1$  nachgewiesen. Die hieraus folgende Ungleichung  $|p(c \cdot w + \alpha)| < p(\alpha)$  ist jedoch ein Widerspruch zu unserer Definition von  $\alpha$ . Also ist  $p(\alpha) = 0$ . ■

**Satz 8.2.4** Ist  $x_1$  eine Nullstelle des Polynoms  $p_n$  mit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i,$$

$n \geq 1$  und  $a_n \neq 0$ , so existiert ein Polynom  $p_{n-1}$  des Grades  $n-1$  mit

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdot p_{n-1}(x).$$

Mit anderen Worten: Das Polynom  $p_n$  ist durch  $x - x_1$  teilbar, falls  $x_1$  eine Nullstelle von  $p_n$  ist.

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, daß

$$x^i - x_1^i = (x - x_1) \cdot (x^{i-1} + x_1 \cdot x^{i-2} + \dots + x_1^{i-2} \cdot x + x_1^{i-1})$$

für jedes  $i \in \mathbb{N}$  gilt.

Wegen  $p_n(x_1) = 0$  folgt hieraus

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(x) - p_n(x_1) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x^i - x_1^i) \\ &= (x - x_1) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \cdot (x^{i-1} + x_1 \cdot x^{i-2} + \dots + x_1^{i-1})}_{:= p_{n-1}(x)} \\ &= (x - x_1) \cdot p_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Da  $p_{n-1}$  offenbar ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades ist, ist folglich unsere Behauptung bewiesen. ■

Vor weiteren Eigenschaften der Polynome überlegen wir uns als nächstes ein

**Verfahren zur Berechnung von  $p_n(x)/(x - x_1)$ ,**

wobei  $x_1$  nicht notwendig eine Nullstelle von  $p_n$  sein muß:

Seien

$$\begin{aligned} p_n(x) &:= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ p_{n-1}(x) &:= b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

und es gelte für gewisse  $x_1, \alpha$ :

$$p_n(x)/(x - x_1) = p_{n-1}(x) + \alpha/(x - x_1)$$

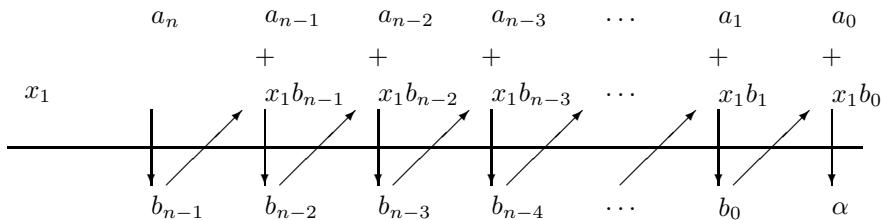
bzw.

$$p_n(x) = (x - x_1) \cdot p_{n-1}(x) + \alpha.$$

Dann erhält man durch Ausmultiplizieren von  $(x - x_1) \cdot p_{n-1}(x)$ , anschließendem Zusammenfassen der Summanden und Koeffizientenvergleich mit  $p_n(x)$  folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + x_1 \cdot b_{n-1}, \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + x_1 \cdot b_{n-2}, \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + x_1 \cdot b_1, \\ \alpha &= a_0 + x_1 \cdot b_0, \end{aligned}$$

aus denen man bei gegebenem Polynom  $p_n$  die Koeffizienten des gesuchten Polynoms  $p_{n-1}$  und den „Divisionsrest“  $\alpha$  berechnen kann. Die dabei durchzuführenden Rechnungen lassen sich sehr übersichtlich nach dem sogenannten **Horner-Schema**<sup>6</sup> durchführen:



Aus diesem Schema lassen sich nun bei gegebenen  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) und  $x_1$  nicht nur die Koeffizienten  $b_j$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) des Polynoms  $p_{n-1}$  ablesen, sondern auch

$$\alpha = p_n(x_1).$$

**Beispiel** Seien  $p_4(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x - 1$  und  $x_1 = -2$ . Dann hat das zugehörige Horner-Schema die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad 0 \quad 6 \quad -1 \\ -2 \quad \quad -4 \quad 14 \quad -28 \quad 44 \\ \hline 2 \quad -7 \quad 14 \quad -22 \quad 43 \end{array}$$

Also haben wir  $p_4(-2) = 43$  und

$$(2x^4 - 3x^3 + 6x - 1) : (x + 2) = 2x^3 - 7x^2 + 14x - 22 + \frac{43}{x + 2}.$$

<sup>6</sup> Benannt nach dem englischen Mathematiker W. G. Horner (1774 - 1834), obwohl bereits chinesische Mathematiker sich eines ähnlichen Verfahrens Jahrhunderte vor Horner bedienten und auch L. Euler dieses Verfahren kannte.

Es sei noch bemerkt, daß eine Fortsetzung dieses Verfahrens (sogenanntes „vollständiges Horner-Schema“):

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2 & -3 & 0 & 6 & -1 \\
 -2 & & -4 & 14 & -28 & 44 \\
 \hline
 & 2 & -7 & 14 & -22 & 43 \\
 -2 & & -4 & 22 & -72 & \\
 \hline
 & 2 & -11 & 36 & -94 & \\
 -2 & & -4 & 30 & & \\
 \hline
 & 2 & -15 & 66 & & \\
 -2 & & -4 & & & \\
 \hline
 & 2 & -19 & & & \\
 -2 & & & & & \\
 \hline
 & 2 & & & &
 \end{array}$$

die Koeffizienten  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) des mit  $p_4(x)$  identischen Polynoms  $\sum_{i=1}^4 c_i(x+2)^i$  liefert:

$$2(x+2)^4 - 19(x+2)^3 + 66(x+2)^2 - 94(x+2) + 43.$$

Als Folgerung aus den Sätzen 8.2.3 und 8.2.4 läßt sich nun durch vollständige Induktion über  $n$  beweisen:

**Satz 8.2.5** *Jedes Polynom  $n$ -ten Grades  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  läßt sich in Linearfaktoren mit passend gewählten reellen oder komplexen  $x_i$  zerlegen:*

$$p_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Ein Polynom  $n$ -ten Grades hat also höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* ÜA. ■

Die  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) aus Satz 8.2.5 sind i.allg. nicht alle verschieden. Wir definieren daher:

**Definition**  $x_i$  heißt eine  **$k$ -fache Nullstelle** von  $p_n(x) : \iff$

$\exists$  Polynom  $q$  des Grades  $n - k$ :  $p_n(x) = (x - x_i)^k \cdot q(x) \wedge q(x_i) \neq 0$ .

Wir kommen nun zur

**konkreten Bestimmung der Nullstellen von Polynomen  
n-ten Grades mit Koeffizienten aus  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ :**

Die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sind klar (Schulstoff!).

**$n = 3$ :**

Üblicherweise<sup>7</sup> überführt man zur Nullstellenberechnung des Polynom

$$p_3(x) = x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

dieses Polynom durch die Substitution

$$x = y - (a_2/3)$$

zunächst in

$$p^*(x) := y^3 + py + q,$$

wobei  $p := a_1 - (a_2^2/3)$  und  $q := 2 \cdot (a_2^3/27) - (a_1 \cdot a_2/3) + a_0$ .

Um nun die Nullstellen des reduzierten Polynoms  $p^*$  zu berechnen, gibt es eine Reihe von Verfahren, von denen hier nur eine Variante angegeben ist.

Wir setzen

$$D := (p/3)^3 + (q/2)^2$$

und unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $D \geq 0$ .

In diesem Fall sind

$$y_1 := \underbrace{\sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}}}_{:= u} + \underbrace{\sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}}}_{=: v}$$

$$y_2 := -(u+v)/2 + 3 \cdot ((u-v)/2) \cdot i$$

$$y_3 := -(u+v)/2 - 3 \cdot ((u-v)/2) \cdot i$$

„Cardanische Formeln“<sup>8</sup>

die Nullstellen des Polynoms  $p^*$  (Beweis: Nachrechnen! Eine Herleitung dieser Formel findet man z.B. in [Cig 95] oder [Enz 68]; S. 108/109).

**Fall 2:**  $D < 0$ .

<sup>7</sup> Genauer: In vielen Formelsammlungen findet man die nachfolgend angegebenen Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades. Darüberhinaus gibt es jedoch viele weitere Methoden der Berechnung von Nullstellen von Polynomen. Siehe dazu z.B. [Mat 1878].

<sup>8</sup> Benannt nach Geronimo Cardano (1501–1576), der diese Formeln als erster publizierte, obwohl von Scipione del Ferro (1465–1526) und insbesondere von Niccolo Tartaglia (um 1500–1557) diese Formeln bereits vorher entwickelt wurden.

Auch in diesem Fall könnte man die in Fall 1 angegebenen Cardanischen Formeln verwenden, jedoch rechnet man hier im „Komplexen“, obwohl die Nullstellen von  $p^*$  alle reell sind. Günstiger sind deshalb die folgenden Lösungsformeln:

Seien  $\varrho := \sqrt{-p^3/27}$  und  $\cos \varphi := -q/(2 \cdot \varrho)$ .

Dann erhält man durch

$$\begin{aligned}y_1 &:= 2 \cdot \sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos(\varphi/3) \\y_2 &:= 2 \cdot \sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos((\varphi/3) + (2\pi/3)) \\y_3 &:= 2 \cdot \sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos((\varphi/3) + (4\pi/3))\end{aligned}$$

die Nullstellen von  $p^*$ .

Die gesuchten Nullstellen des Polynoms  $p_3$  sind dann

$$x_i := y_i - a_2/3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

**n = 4:**

Durch die Substitution

$$x = y - a_3/4$$

geht das Polynom  $p_4(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  in das Polynom

$$\hat{p}_4(y) = y^4 + py^2 + qy + r$$

mit den neuen Koeffizienten  $p, q, r$  über.

Das Lösungsverhalten der algebraischen Gleichung  $\hat{p}_4(y) = 0$  ist abhängig vom Lösungsverhalten ihrer kubischen Resolvente:

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Sind  $z_1, z_2, z_3$  die Lösungen dieser Gleichung, so lassen sich die Nullstellen  $y_1, \dots, y_4$  des Polynoms  $\hat{p}_4(y)$  auf folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned}y_1 &:= (1/2) \cdot (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \\y_2 &:= (1/2) \cdot (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \\y_3 &:= (1/2) \cdot (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \\y_4 &:= (1/2) \cdot (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),\end{aligned}$$

womit

$$x_i := y_i - a_3/4 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

die Nullstellen des Polynoms  $p_4(x)$  sind.

Gleichungen ab dem fünften Grad sind i.allg. nicht mehr durch Radikale (Wurzelausdrücke) lösbar.<sup>9</sup> Bewiesen wurde dieser tiefliegende Satz erstmalig vollständig vom norwegischen Mathematiker Nils Henrik Abel (1802–1829)

<sup>9</sup> Benutzt man sogenannte Theta-Funktionen, so gibt es jedoch Lösungsformeln für Gleichungen beliebigen Grades. Siehe dazu z.B. [Kin 96].

im Jahre 1826. Einen Beweis findet der Leser z.B. in [Koc 74], [Cig 95] oder Band 2.

Wir werden uns später noch einige Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen von Polynomen überlegen. Zunächst jedoch werden wir versuchen, durch Probieren bzw. „Erraten“ von Nullstellen  $x_i$  und anschließendem Abspalten des Linearfaktors  $(x - x_i)$  vom Polynom  $p_n(x)$  schrittweise die Nullstellen zu bestimmen. Dabei erweist sich folgender Satz als hilfreich, den man leicht verifizieren kann.

**Satz 8.2.6 (Viertascher<sup>10</sup> Wurzelsatz)**

*Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Wurzeln des Polynoms  $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , so besteht zwischen diesen Wurzeln und den Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  von  $p_n(x)$  der folgende Zusammenhang:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= a_{n-2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -a_{n-3}, \\ &\vdots \\ x_1x_2x_3 \dots x_n &= (-1)^n a_0. \end{aligned}$$

Speziell bedeutet dies:

Hat  $p_n(x)$  ganzzahlige Koeffizienten und eine ganzzahlige Wurzel, so ist diese als Teiler in  $a_0$  enthalten.<sup>11</sup> ■

Weiter mit

**Eigenschaften der Eigenwerte von Matrizen:**

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 8.2.5 ist der

**Satz 8.2.7** Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann gilt:

- (a)  $\mathfrak{A}$  hat höchstens  $n$  EWe, falls  $K = \mathbb{R}$ .
- (b)  $\mathfrak{A}$  hat genau  $n$  EWe (Vielfachheiten mitgezählt), falls  $K = \mathbb{C}$ . ■

Die Aussage des folgenden Satzes ergibt sich aus Satz 8.2.6 und ist bei Proberechnungen verwendbar.

<sup>10</sup> Benannt nach dem französischen Juristen Francois Viète (lateinisiert: Vieta; 1540–1603), für den Mathematik Freizeitbeschäftigung war. Seine Arbeiten verbesserten die algebraische Sprache und förderten das „Buchstabenrechnen“. Man hat Viète deshalb auch „Vater der Algebra“ genannt.

<sup>11</sup> Die letzte Aussage erhält man leicht unter Verwendung des Horner-Schemas: Aus der Berechnung von  $p_n(\alpha)$  mittels Horner-Schema folgt  $a_0 = -x_1 \cdot b_0$ . Sind die  $a_i \in \mathbb{Z}$ , so auch die  $b_j$ , womit  $x_1$  ein Teiler von  $a_0$  ist.

**Satz 8.2.8 (mit Definition)** Sei  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und bezeichnen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die n EWe von  $\mathfrak{A}$ . Dann gilt:

- (a)  $|\mathfrak{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \cdot \lambda_n$ .
- (b)  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .  
( $a_{11} + \dots + a_{nn}$  nennt man auch **Spur** der Matrix  $\mathfrak{A}$ .)

■

**Satz 8.2.9** Seien  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A}$  symmetrisch (d.h.  $\mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}$ ) oder  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A}$  hermitisch (d.h.  $\overline{\mathfrak{A}}^T = \mathfrak{A}$ ). Dann besitzt das charakteristische Polynom von  $\mathfrak{A}$  nur reelle Nullstellen, d.h., genau n reelle Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

*Beweis.* Wir beweisen den Satz hier nur für den Fall  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A}$  symmetrisch. Der andere Fall ist unter Verwendung von Satz 2.3.5, (a) leicht analog zu begründen.

Wegen Satz 8.2.7 haben wir nur zu zeigen, daß  $\mathfrak{A}$  nur reelle EWe besitzt. Angenommen, es gibt einen EW  $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  von  $\mathfrak{A}$  mit zugehörigem EV  $\mathfrak{x}_1$ . Dann gilt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = \lambda_1 \cdot \mathfrak{x}_1$ , woraus sich die Gleichung

$$\bar{\mathfrak{x}}_1 \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = \lambda_1 \cdot \bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \mathfrak{x}_1$$

ergibt. Da  $\bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \mathfrak{x}_1 \in \mathbb{R}$ , ist die rechte Seite dieser Gleichung aus  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Wir zeigen, daß die linke Seite der Gleichung zu  $\mathbb{R}$  gehört, woraus ein Widerspruch und damit unsere Behauptung folgt:

Offenbar ist eine Zahl  $z \in \mathbb{C}$  genau dann reell, wenn  $\bar{z} = z$  ist. Bildet man nun  $\bar{z}$  für  $z := \bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1$ , so erhält man wegen der Symmetrie von  $\mathfrak{A}$  und den Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen sowie den Regeln fürs Transponieren:

$$\bar{z} = \mathfrak{x}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \bar{\mathfrak{x}}_1 = (\mathfrak{x}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \bar{\mathfrak{x}}_1)^T = \bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{x}_1 = \bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = z,$$

womit  $\bar{\mathfrak{x}}_1^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1$  reell ist. ■

### Satz 8.2.10

- (a) Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ . Dann stimmen die charakteristischen Polynome von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^T$  überein.
- (b) Die Eigenwerte einer orthogonalen (bzw. unitären) Matrix haben stets den Betrag 1.
- (c) Ist  $\lambda$  ein EW einer orthogonalen Matrix  $\mathfrak{A}$ , so gilt  $\lambda \neq 0$  und  $1/\lambda$  ist ebenfalls ein EW von  $\mathfrak{A}$ .

*Beweis.* ÜA (siehe auch ÜA A.8.10). ■

Abschließend überlegen wir uns noch den Beweis für einen „Klassiker“ aus der Theorie der EWe.

**Satz 8.2.11 ( Satz von Cayley-Hamilton<sup>12</sup>)**

Es sei  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und

$$\varphi(x) := |\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (-1)^n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Dann gilt

$$(-1)^n \cdot \mathfrak{A}^n + a_{n-1} \cdot \mathfrak{A}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \mathfrak{A} + a_0 \cdot \mathfrak{E}_n = \mathfrak{O}_{n,n}.$$

*Beweis.* Offenbar gibt es unendlich viele  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $\varphi(x) \neq 0$  ist. Für solche  $x$  existiert dann die Matrix  $(\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n)^{-1}$ , die sich bekanntlich mit Hilfe der Adjunkten  $B_{i,j}$  der Determinante  $B := |\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n|$  wie folgt berechnen lässt:

$$(\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n)^{-1} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot (B_{i,j})_{n,n}^T.$$

In jeder Adjunkten  $B_{i,j}$  ist der größte Exponent von  $x$  höchstens gleich  $n-1$ . Folglich lässt sich die Matrix  $(\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n)^{-1}$  mit Hilfe geeigneter  $(n, n)$ -Matrizen  $\mathfrak{B}_{n-1}, \dots, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_0$  auch in der Form

$$(\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n)^{-1} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot (x^{n-1} \cdot \mathfrak{B}_{n-1} + x^{n-2} \cdot \mathfrak{B}_{n-2} + \dots + x \cdot \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_0)$$

darstellen. Aus der Gleichung  $(\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot (\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n)^{-1} = \mathfrak{E}_n$  folgt dann

$$\begin{aligned} & \varphi(x) \cdot \mathfrak{E}_n \\ &= (\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot (x^{n-1} \cdot \mathfrak{B}_{n-1} + x^{n-2} \cdot \mathfrak{B}_{n-2} + \dots + x \cdot \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_0) \\ &= -x^n \cdot \mathfrak{B}_{n-1} + x^{n-1} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2}) + x^{n-2} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_{n-2} - \mathfrak{B}_{n-3}) \\ &\quad + \dots + x \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0) + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} (-1)^n \cdot \mathfrak{E}_n &= -\mathfrak{B}_{n-1} \\ a_{n-1} \cdot \mathfrak{E}_n &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2} \\ a_{n-2} \cdot \mathfrak{E}_n &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_{n-2} - \mathfrak{B}_{n-3} \\ \dots & \\ a_1 \cdot \mathfrak{E}_n &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0 \\ a_0 \cdot \mathfrak{E}_n &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_0. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun die obige erste Gleichung von links mit  $\mathfrak{A}^n$ , die zweite Gleichung mit  $\mathfrak{A}^{n-1}$ , usw. und addiert anschließend sämtliche Gleichungen, so erhält man die Behauptung. ■

---

<sup>12</sup> A. Cayley (1821–1895), W. R. Hamilton (1805–1865).

### 8.3 Verallgemeinerte Eigenräume

Nachfolgend sollen wesentliche Eigenschaften der verallgemeinerten Eigenräume hergeleitet werden. Insbesondere geht es dabei darum, mit Hilfe der verallgemeinerten Eigenräume  $\mathfrak{A}$ -invariante UVRe zu konstruieren. Durch die konstruierten  $\mathfrak{A}$ -invarianten UVRe und Lemma 8.1.3 gelingt uns dann per Induktion der Nachweis der Lösbarkeit von Problem 1 und 2 aus 8.1 für symmetrische und unitäre Matrizen.

Außerdem werden einige Sätze bewiesen, die es uns in den Abschnitten 8.4 und 8.5 ermöglichen werden, für gewisse Körper  $K$  (z.B.  $K = \mathbb{C}$ ) und einer beliebigen Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  Verfahren zur Berechnung einer regulären Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  anzugeben, die  $\mathfrak{A}$  mittels  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  in eine Diagonalmatrix, falls  $\mathfrak{A}$  diagonalisierbar ist, oder, im Falle der Nichtdiagonalisierbarkeit von  $\mathfrak{A}$ , in eine Quasi-Diagonalmatrix<sup>13</sup> überführt.

In Vorbereitung auf einige nachfolgende Beweise sei dem Leser empfohlen, sich den Abschnitt 4.5 noch einmal anzusehen. Außerdem überlege man sich als ÜA, daß für beliebige  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in K$  die folgende Gleichung gilt:

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{A}. \quad (8.4)$$

Nun aber zu den angekündigten Eigenschaften von verallgemeinerten Eigenräumen.

**Satz 8.3.1** Sei  $\lambda$  ein EW der Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ . Dann ist für jedes  $i \in \mathbb{N}$  der verallgemeinerte Eigenraum  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  ein  $\mathfrak{A}$ -invarianter UVR des VRs  $K^{n \times 1}$  mit

$$\dim L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda) = n - \operatorname{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i. \quad (8.5)$$

Außerdem existiert ein kleinstes  $r \in \{1, \dots, n\}$  – nachfolgend (bei einer fixierten Matrix  $\mathfrak{A}$ ) mit

$$r(\lambda)$$

bezeichnet – mit der Eigenschaft:

$$L_{\mathfrak{A}}^1(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^2(\lambda) \subset \dots \subset L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) = L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)+1}(\lambda) = \dots. \quad (8.6)$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{T} := \mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n$ . Da  $\lambda$  EW von  $\mathfrak{A}$  ist, gilt  $\operatorname{rg} \mathfrak{T} < n$ . Bis auf die  $\mathfrak{A}$ -Invarianz von  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  folgt unser Satz damit aus Satz 4.5.4. Die  $\mathfrak{A}$ -Invarianz von  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  läßt sich wie folgt zeigen:

Sei  $\mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  beliebig gewählt. Dann gilt  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , und wegen (8.4) haben wir

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}) = \mathfrak{A} \cdot \underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i}_{= \mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o},$$

d.h.,  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  gilt. Folglich ist  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$   $\mathfrak{A}$ -invariant. ■

**Satz 8.3.2** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A}$  und für ein gewisses  $t \in \mathbb{N}$  gelte

$$L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda). \quad (8.7)$$

Dann ist für jedes  $\mathfrak{b} \in L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda) \setminus L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)$  die Menge

<sup>13</sup> Genauer: Jordan-Matrix; siehe Abschnitt 8.5.

$$B := \{\mathfrak{b}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot \mathfrak{b}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{t-1} \cdot \mathfrak{b}\}$$

*l.u. und  $[B]$  ist ein  $\mathfrak{A}$ -invarianter und  $\mathfrak{A}$ -unzerlegbarer UVR von  $L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda)$ .*

*Beweis.* Mit Hilfe von Lemma 4.5.3, (c) folgt aus (8.7) zunächst

$$L_{\mathfrak{A}}^1(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^2(\lambda) \subset \dots \subset L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda).$$

und dann (nach Lemma 4.5.3, (e)), daß  $B$  l.u. ist.

Für den Beweis der  $\mathfrak{A}$ -Invarianz von  $[B]$  genügt es,  $\mathfrak{A} \cdot B \subseteq [B]$  zu zeigen:  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} \in [B]$  folgt aus

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n + \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b} = \underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}}_{\in B} + \underbrace{\lambda \cdot \mathfrak{b}}_{\in [B]}.$$

Sei nun  $\mathfrak{b}_i := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{b}$  für  $i = 1, 2, \dots, t$ . Dann gilt (wegen  $\mathfrak{b} \in L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda)$ )  $\mathfrak{b}_t = \mathfrak{o}$  und analog zu oben folgt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i \in [B]$  für  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  aus

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_i = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n + \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_i = \underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_i}_{= b_{i+1} \in B} + \underbrace{\lambda \cdot \mathfrak{b}_i}_{\in [B]}.$$

Also ist  $[B]$   $\mathfrak{A}$ -invariant.

Es bleibt noch die  $\mathfrak{A}$ -Unzerlegbarkeit von  $[B]$  zu zeigen:

Angenommen,  $[B]$  ist die direkte Summe zweier  $\mathfrak{A}$ -invarianter UVR  $U_1$  und  $U_2$ , die beide ungleich dem UVR  $\{\mathfrak{o}\}$  sind. Offenbar enthält  $U_1$  oder  $U_2$  ein Element  $\mathfrak{c}$  aus  $L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda) \setminus L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)$ . (Falls dies nicht gilt, haben wir  $U_1 \cup U_2 \subseteq L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)$  und damit  $U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2] \subseteq L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)$ , im Widerspruch zu  $U_1 + U_2 = [B]$  und  $[B] \cap (L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda) \setminus L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)) \neq \emptyset$ .) Analog zu oben kann man dann zeigen, daß

$$\mathfrak{c}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{c}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot \mathfrak{c}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{t-1} \cdot \mathfrak{c}$$

l.u. sind, womit sie eine Basis für  $[B]$  bilden. O.B.d.A. sei  $\mathfrak{c} \in U_1$ . Wegen  $\mathfrak{c}_1 := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} - \lambda \cdot \mathfrak{c}$  und  $\mathfrak{A} \cdot U_1 \subseteq U_1$  gehört dann auch  $\mathfrak{c}_1$  zu  $U_1$ . Aus  $\mathfrak{c}_2 := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{c}_1$  ergibt sich analog  $\mathfrak{c}_2 \in U_1$ . Eine Fortsetzung dieser Überlegungen liefert  $B \subseteq U_1$ , was  $[B] = U_1$  zur Folge hat. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme  $[B] = U_1 \oplus U_2$  und  $\dim U_2 \geq 1$ . ■

**Satz 8.3.3** Seien  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $r(\lambda)$  wie im Satz 8.3.1 definiert. Dann ist die Menge

$$E_{\mathfrak{A}}(\lambda) := \{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in K^{n \times 1}\}$$

ein  $\mathfrak{A}$ -invarianter UVR von  $K^{n \times 1}$ . Außerdem gilt

$$L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) \oplus E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = K^{n \times 1}. \quad (8.8)$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{y} \in E_{\mathfrak{A}}(\lambda)$  beliebig gewählt. Dann existiert ein  $\mathfrak{x} \in K^{n \times 1}$  mit

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x},$$

und es gilt wegen (8.4) und Satz 8.3.1:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \underbrace{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x})}_{\in L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)} \in E_{\mathfrak{A}}(\lambda).$$

Folglich ist  $E_{\mathfrak{A}}(\lambda)$   $\mathfrak{A}$ -invariant.

Als nächstes überlegen wir uns  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) \cap E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = \{\mathfrak{o}\}$ . Sei dazu  $\mathfrak{y} \in L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) \cap E_{\mathfrak{A}}(\lambda)$  beliebig gewählt. Dann existiert ein  $\mathfrak{x} \in K^{n \times 1}$  mit  $\mathfrak{y} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x}$ , und es gilt  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ . Folglich haben wir  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{2 \cdot r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , woraus sich mit Hilfe von (8.6)  $\mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$  und damit  $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$  ergibt. Also ist  $E_{\mathfrak{A}}(\lambda) + L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$  eine direkte Summe. Da bekanntlich  $\dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) = n - \text{rg}((\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)})$  ist, haben wir zum Beweis von (8.8) nur noch  $\dim E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = \text{rg}((\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)})$  zu zeigen. Seien dazu  $\mathfrak{T} := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)}$ ,  $(\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n) := \mathfrak{E}_n$  und  $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_n)^T$  ein beliebiges Element aus  $E_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ . Dann folgt aus

$$\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{T} \cdot (x_1 \mathfrak{e}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{e}_n) = x_1 \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{e}_1) + \dots + x_n \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{e}_n),$$

daß  $\mathfrak{x}$  eine LK der Spalten von  $\mathfrak{T}$  ist. Mit Hilfe von Satz 4.3.1 folgt hieraus  $\dim E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = \text{rg} \mathfrak{T}$ . ■

**Satz 8.3.4** Seien  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $r(\lambda)$  wie im Satz 8.3.1 definiert. Dann ist  $K^{n \times 1}$  genau dann  $\mathfrak{A}$ -unzerlegbar, wenn  $r(\lambda) = n$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $K^{n \times 1}$   $\mathfrak{A}$ -unzerlegbar. Da laut Voraussetzung  $\mathfrak{A}$  einen EW  $\lambda$  besitzt, ist  $\dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) \geq 1$ . Mit Hilfe von Satz 8.3.3 folgt hieraus  $\dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) = n$ . Angenommen,  $r(\lambda) < n$ . Dann muß es wegen (8.6) ein  $t \leq r(\lambda)$  geben, so daß eine Basis für  $L_{\mathfrak{A}}^t(\lambda)$  über  $L_{\mathfrak{A}}^{t-1}(\lambda)$  mindestens zwei Elemente  $\mathfrak{b}_1$  und  $\mathfrak{b}_2$  enthält. Mittels Satz 8.3.2 und Lemma 4.5.3 folgt hieraus ein Widerspruch zur  $\mathfrak{A}$ -Unzerlegbarkeit von  $K^{n \times 1}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $r(\lambda) = n$ . Dann gilt  $L_{\mathfrak{A}}^{n-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^n(\lambda)$ , woraus sich mit Hilfe von Satz 8.3.2 die  $\mathfrak{A}$ -Unzerlegbarkeit von  $K^{n \times 1} = L_{\mathfrak{A}}^n(\lambda)$  ergibt. ■

**Lemma 8.3.5** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $\lambda, \mu \in K$  zwei verschiedene und  $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in K$  paarweise verschiedene Eigenwerte von  $\mathfrak{A}$ . Dann gilt:

$$(a) \forall i \in \mathbb{N} \forall \mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda) : (\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda).$$

$$(b) L_{\mathfrak{A}}(\lambda) \cap L_{\mathfrak{A}}(\mu) = \{\mathfrak{o}\}, \text{ d.h., } L_{\mathfrak{A}}(\lambda) + L_{\mathfrak{A}}(\mu) \text{ ist eine direkte Summe.}$$

$$(c) \text{ Seien } L_{\mathfrak{A}}^{r_1}(\lambda_1) + L_{\mathfrak{A}}^{r_2}(\lambda_2) + \dots + L_{\mathfrak{A}}^{r_t}(\lambda_t) + L_{\mathfrak{A}}^s(\mu) \text{ eine direkte Summe für gewisse } r_1, \dots, r_t \in \mathbb{N} \text{ und } s \in \mathbb{N}_0, \text{ wobei } t \geq 2 \text{ für } s = 0 \text{ und } L_{\mathfrak{A}}^0(\lambda) := \{\mathfrak{o}\}. \text{ Dann ist auch } L_{\mathfrak{A}}^{r_1}(\lambda_1) + L_{\mathfrak{A}}^{r_2}(\lambda_2) + \dots + L_{\mathfrak{A}}^{r_t}(\lambda_t) + L_{\mathfrak{A}}^{s+1}(\mu) \text{ eine direkte Summe.}$$

*Beweis.* (a): Wegen (8.4) gilt für alle  $\mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot ((\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x}) \\ &= (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{x}}_{= \mathfrak{o}} \\ &= \mathfrak{A} \cdot \underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i \cdot \mathfrak{x}}_{= \mathfrak{o}} \\ &= \mathfrak{o}, \end{aligned}$$

d.h.,  $(\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$ .

(b): Sei  $\mathfrak{x} \in L_{\mathfrak{A}}(\lambda) \cap L_{\mathfrak{A}}(\mu)$ . Dann gilt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mu \cdot \mathfrak{x}$ . Folglich haben wir  $\lambda \cdot \mathfrak{x} = \mu \cdot \mathfrak{x}$  beziehungsweise  $(\lambda - \mu) \cdot \mathfrak{x} = 0$ , was wegen  $\lambda \neq \mu$  nur für  $\mathfrak{x} = 0$  gelten kann. Also ist  $L_{\mathfrak{A}}(\lambda) + L_{\mathfrak{A}}(\mu)$  eine direkte Summe.

(c): Seien  $\mathfrak{x}_i \in L_{\mathfrak{A}}^{r_i}(\lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, t$ ) und  $\mathfrak{y} \in L_{\mathfrak{A}}^{s+1}(\mu)$  sowie  $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \dots + \mathfrak{x}_t + \mathfrak{y} = 0$ .

(c) ist bewiesen, wenn wir  $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \dots = \mathfrak{x}_t = \mathfrak{y} = 0$  zeigen können (siehe Lemma 4.2.5). Multipliziert man die Gleichung  $(\sum_{i=1}^t \mathfrak{x}_i) + \mathfrak{y} = 0$  von links mit  $\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n$ , so erhält man unter Verwendung von (a) und der Voraussetzung  $(\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n)^{s+1} \cdot \mathfrak{y} = 0$

(d.h.,  $(\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n)^s \cdot ((\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{y}) = 0$ ):

$$0 = (\underbrace{\sum_{i=1}^t (\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x}_i}_{\in L_{\mathfrak{A}}^{r_i}(\lambda_i)}) + (\underbrace{(\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{y}}_{\in L_{\mathfrak{A}}^s(\mu)}). \quad (8.9)$$

Da nach Voraussetzung  $(\sum_{i=1}^t L_{\mathfrak{A}}^{r_i}(\lambda_i)) + L_{\mathfrak{A}}^s(\mu)$  eine direkte Summe ist, folgt aus (8.9)

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} : (\mathfrak{A} - \mu \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x}_i = 0,$$

d.h., es gilt:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} : \mathfrak{x}_i \in L_{\mathfrak{A}}^1(\mu).$$

Wegen  $L_{\mathfrak{A}}^1(\mu) \subseteq L_{\mathfrak{A}}^s(\mu)$  ist damit  $\mathfrak{x}_i \in L_{\mathfrak{A}}^{r_i}(\lambda_i) \cap L_{\mathfrak{A}}^s(\mu)$ . Nach Voraussetzung ist  $L_{\mathfrak{A}}^{r_i}(\lambda_i) + L_{\mathfrak{A}}^s(\mu)$  eine direkte Summe. Folglich gilt  $\mathfrak{x}_1 = \dots = \mathfrak{x}_t = 0$  und damit auch  $\mathfrak{y} = 0$ . ■

**Satz 8.3.6** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  die Eigenwerte von  $\mathfrak{A}$  ( $t \geq 2$ ). Dann ist die Summe der Eigenräume

$$L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1) + L_{\mathfrak{A}}(\lambda_2) + \dots + L_{\mathfrak{A}}(\lambda_t)$$

und die Summe der verallgemeinerten Eigenräume

$$L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_1)}(\lambda_1) + L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_2)}(\lambda_2) + \dots + L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_t)}(\lambda_t)$$

eine direkte Summe.

*Beweis.* Mit Hilfe von Lemma 8.3.5, (b), (c) läßt sich leicht per Induktion zeigen, daß die Summe der Eigenräume  $\sum_{i=1}^t L_{\mathfrak{A}}(\lambda_i)$  direkt ist. Dies benutzend, folgt dann aus Lemma 8.3.5, (c) und unter Verwendung der Kommutativität von  $+$ , daß auch  $\sum_{i=1}^t L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_i)}(\lambda_i)$  eine direkte Summe ist. ■

Abschließend untersuchen wir die Eigenräume von Matrizen aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  (bzw.  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ) etwas näher.

**Satz 8.3.7** Seien  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,

$$\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T = \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{A} \quad (8.10)$$

und  $\mathfrak{b}_1 \in K^{n \times 1}$  ein EV von  $\mathfrak{A}$  zum EW  $\lambda_1 \in K$  mit  $\mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = 1$ . Außerdem seien die Vektoren  $\mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n \in K^{n \times 1}$  so gewählt, daß – bezüglich des Standardskalarprodukts  $\varphi$ <sup>14</sup> – die Menge  $\{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$  eine orthonormierte Basis für  $K^{n \times 1}$  bildet. Dann gilt:

$$(a) \quad \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{b}_1 = \overline{\lambda} \cdot \mathfrak{b}_1.$$

<sup>14</sup>  $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^{n \times 1} : \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}}$

- (b)  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  ist orthogonal für  $K = \mathbb{R}$  und unitär für  $K = \mathbb{C}$ .  
(c)  $[\{\mathfrak{b}_1\}] \oplus [\{\mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}] = K^{n \times 1}$ .  
(d)  $[\{\mathfrak{b}_1\}]$  und  $[\{\mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}]$  sind  $\mathfrak{A}$ -invariante UVRe von  $K^{n \times 1}$ .  
(e) Setzt man  $B_1 := B \setminus \{\mathfrak{b}_1\}$  und  $\mathfrak{A}_1 := ((\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_2)_{/B_1}, \dots, (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_n)_{/B_1})$ , so gilt

$$\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathfrak{O}_{1,n-1} \\ \mathfrak{O}_{n-1,1} & \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

$$\text{und } \mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}_1}^T = \overline{\mathfrak{A}_1}^T \cdot \mathfrak{A}_1.$$

*Beweis.* Wir beweisen obigen Satz nur für  $K = \mathbb{C}$ . Der Beweis für  $K = \mathbb{R}$  verläuft analog.

(a): Durch Übergang zu den konjugiert komplexen Zahlen folgt aus (8.10) die Gleichung  $\overline{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}$ . Setzt man  $\mathfrak{y} := \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{b}_1 - \overline{\lambda} \cdot \mathfrak{b}_1$ , so rechnet man (unter Verwendung der oben angegebenen Gleichung) leicht nach, daß

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) &= \mathfrak{y}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}} \\ &= \mathfrak{b}_1^T \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} - \overline{\lambda} \cdot \mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} - \overline{\lambda} \cdot \mathfrak{b}_1^T \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} + |\lambda|^2 \cdot \mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} \\ &= (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{b}_1)^T \cdot \overline{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{b}_1)} \end{aligned}$$

gilt. Wegen der positiven Definitheit von  $\varphi$  und der Voraussetzung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{o}$  folgt hieraus  $\mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ , womit (a) gezeigt ist.

(b) folgt aus Satz 7.3.1 und (c) aus der Konstruktion der Menge  $B$ .

(d): Nach Voraussetzung gilt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 = \lambda_1 \cdot \mathfrak{b}_1$ . Folglich ist  $[\{\mathfrak{b}_1\}]$   $\mathfrak{A}$ -invariant. Die  $\mathfrak{A}$ -Invarianz des UVRs  $[\{\mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n\}] = [\{\mathfrak{b}_1\}]^\perp$  ergibt sich aus (a) wie folgt:  
Für beliebig gewähltes  $\mathfrak{x} \in [\{\mathfrak{b}_1\}]^\perp$  ist

$$\mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x})} = \mathfrak{b}_1^T \cdot (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{x}}) = \underbrace{(\overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{b}_1)^T}_{\overline{\lambda} \cdot \mathfrak{b}_1} \cdot \overline{\mathfrak{x}} = \overline{\lambda} \cdot \underbrace{(\mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{x}})}_{=0} = 0,$$

womit  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \in [\{\mathfrak{b}_1\}]^\perp$ .

(e): Die Gleichung (8.11) ist eine Folgerung aus (d), Lemma 8.1.2 und Lemma 8.1.3.  
Setzt man  $\mathfrak{D} := \overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ , so folgt aus (8.11),  $\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T = \mathfrak{E}_n$  und (8.10)

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{D}}^T \cdot \mathfrak{D} &= \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \mathfrak{O}_{1,n-1} \\ \mathfrak{O}_{n-1,1} & \mathfrak{A}_1^T \cdot \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix} \\ &= \overline{(\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})}^T \cdot (\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \stackrel{(8.10)}{=} \mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{B} \\ &= \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{D}}^T \\ &= \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \mathfrak{O}_{1,n-1} \\ \mathfrak{O}_{n-1,1} & \mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}_1}^T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was  $\overline{\mathfrak{A}_1}^T \cdot \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}_1}^T$  ergibt. ■

Mit Hilfe des obigen Satzes können wir jetzt eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix über dem Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  beweisen, aus der sich unmittelbar die Lösbarkeit des ersten und zweiten Problems aus Abschnitt 8.1 für symmetrische und hermitische Matrizen ergibt.

**Satz 8.3.8** Seien  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset K$  und

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

- (a) Es existiert genau dann eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  mit den Eigenschaften  $\mathfrak{B}^{-1} = \overline{\mathfrak{B}}^T$  und  $\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ , wenn
  - (α)  $\overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T$  und
  - (β)  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda_1 - x) \cdot (\lambda_2 - x) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - x)$  gilt.
- (b) Sind  $K = \mathbb{R}$  und  $\mathfrak{A}$  symmetrisch, so existiert eine orthogonale Matrix  $\mathfrak{B}$  und eine gewisse Diagonalmatrix  $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ , wobei die in der Hauptdiagonalen von  $\mathfrak{D}$  stehenden Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gerade die EWe von  $\mathfrak{A}$  sind.
- (c) Sind  $K = \mathbb{C}$  und  $\mathfrak{A}$  hermitisch, so existiert eine unitäre Matrix  $\mathfrak{B}$  und eine gewisse Diagonalmatrix  $\mathfrak{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ , wobei die in der Hauptdiagonalen von  $\mathfrak{D}$  stehenden Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gerade die EWe von  $\mathfrak{A}$  sind.

*Beweis.* (a): O.B.d.A. sei  $K = \mathbb{C}$ .

„ $\Rightarrow$ “: Für eine unitäre Matrix  $\mathfrak{B}$  sei  $\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ . Dann gilt  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T$  und – wie man leicht nachprüft –  $\overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{D}}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T$  sowie  $\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{D}}^T \cdot \overline{\mathfrak{B}}^T$ . Wegen  $\overline{\mathfrak{D}}^T \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{D}}^T$  folgt hieraus (α). (β) ergibt sich unmittelbar aus unserer Voraussetzung und Lemma 8.1.1.

„ $\Leftarrow$ “: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über  $n$ .

- (I) Für  $n = 1$  ist  $\mathfrak{B} = (1)_{1,1}$  und die Behauptung trivial.
- (II) Angenommen, die Behauptung ist für  $(n-1, n-1)$ -Matrizen mit fixiertem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und den entsprechenden Eigenschaften (α) und (β) richtig. Erfülle nun  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  die Bedingungen (α) und (β). Wegen (β) besitzt  $\mathfrak{A}$  die  $n$  EWe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (Vielfachheiten mitgezählt). Zum EW  $\lambda_1$  sei  $\mathfrak{x}_1 \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{0\}$  ein zugehöriger EV.

Der Vektor  $\mathfrak{x}_1$  läßt sich durch Vektoren  $\mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n$  zu einer Basis für  $\mathbb{C}^{n \times 1}$  ergänzen, aus denen durch Anwendung des Schmidt'schen ONV eine (bez. Standardskalarprodukt) orthonormierte Basis  $\mathfrak{b}_1 (= (1/\|\mathfrak{x}_1\|) \cdot \mathfrak{x}_1), \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$  für  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  berechenbar ist. Die aus diesen Vektoren bildbare Matrix  $\mathfrak{B}_1 := (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n)$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8.3.7 und mit Hilfe dieses Satzes erhält man

$$\overline{\mathfrak{B}_1}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathfrak{O}_{1,n-1} \\ \mathfrak{O}_{n-1,1} & \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix  $\mathfrak{A}_1$  des Typs  $(n-1, n-1)$  wegen des Satzes 8.3.7, (e) die Gleichung  $\overline{\mathfrak{A}_1}^T \cdot \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}_1}^T$  erfüllt und wegen des Satzes 8.2.2 offenbar die EWe  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  hat. Nach Annahme existiert für  $\mathfrak{A}_1$  eine unitäre Matrix  $\mathfrak{B}_2$  mit

$$\overline{\mathfrak{B}_2}^T \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wählt man nun

$$\mathfrak{B}_3 := \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_{1,n-1} \\ \mathfrak{O}_{n-1,1} & \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix},$$

so ist diese Matrix unitär. Demzufolge ist  $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_3$  als Produkt unitärer Matrizen auch unitär, und man rechnet leicht nach, daß diese Matrix die im Satz angegebene Eigenschaft besitzt.

(b), (c): Offenbar erfüllt eine Matrix  $\mathfrak{A}$ , die symmetrisch oder hermitisch ist, die Bedingung (α) aus (a). Die Bedingung (β) ist für  $K = \mathbb{C}$  wegen des Fundamentalsatzes der Algebra für alle Matrizen aus  $\mathbb{C}^{n \times n}$  erfüllt. Für  $K = \mathbb{R}$  und symmetrische Matrizen aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  gilt (β) wegen Satz 8.2.9 ebenfalls. Damit sind die Aussagen (b) und (c) Folgerungen aus (a). ■

Es sei noch bemerkt, daß im nachfolgenden Abschnitt 8.4 für eine beliebige symmetrische Matrix  $\mathfrak{A}$  ein effektives Berechnungsverfahren einer Matrix  $\mathfrak{B}$  angegeben wird, das  $\mathfrak{A}$  mittels  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  in eine Diagonalmatrix überführt und sich von dem aus dem obigen Beweis ablesbaren Verfahren wesentlich unterscheidet.

Zunächst jedoch eine Verbesserung des Satzes 8.3.8 für  $K = \mathbb{R}$ .

**Satz 8.3.9** *Die Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besitze die Eigenschaft (a) aus Satz 8.3.8. Dann existiert eine orthogonale Matrix  $\mathfrak{B}$ , die mittels  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  die Matrix  $\mathfrak{A}$  in eine Quasi-Diagonalform überführt, wobei die Kästchen dieser Diagonalform entweder die Gestalt  $(\lambda)_{1,1}$  oder die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

haben, wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein EW von  $\mathfrak{A}$  und  $a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $\mathfrak{A}$  ist.<sup>15</sup>

*Beweis.* Der Satz lässt sich ähnlich wie Satz 8.3.8, (a) durch vollständige Induktion über  $n$  beweisen. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist trivial. Angenommen, unser Satz gilt für alle Matrizen  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $m \leq n - 1$  und fixiertem  $n$ , die (a) aus Satz 8.3.8 erfüllen. Sei nun  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Besitzt  $\mathfrak{A}$  einen reellen Eigenwert, so kann man analog zum Beweis von Satz 8.3.8, (a) weiter verfahren. Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, bei dem das charakteristische Polynom keine einzige reelle Nullstelle besitzt.

Sei dazu  $\lambda := a + b \cdot i$  eine Nullstelle von  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n|$  in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $\bar{\lambda} = a - b \cdot i$  eine Nullstelle von  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n|$ . Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion von zwei (bezüglich Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ) orthonormierten Vektoren  $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}_1 &= a \cdot \mathfrak{c}_1 - b \cdot \mathfrak{c}_2, \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}_2 &= b \cdot \mathfrak{c}_1 + a \cdot \mathfrak{c}_2.\end{aligned}\tag{8.12}$$

Wir konstruieren diese Vektoren mit Hilfe von zwei (bezüglich des Standardskalarprodukts  $\varphi$  in  $\mathbb{C}^{n \times 1}$ ) orthonormierten Vektoren aus  $\mathbb{C}^{n \times 1}$ . Nach Voraussetzung existiert ein EV  $\mathfrak{b}_1 \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  zum EW  $\lambda$ , von dem wir o.B.d.A. auch  $\mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = 1$  voraussetzen können, d.h.,  $\mathfrak{b}_1$  ist bezüglich  $\varphi$  normiert. Dann gilt  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 = \lambda \cdot \mathfrak{b}_1$ , und durch Übergang zu den konjugiert komplexen Zahlen erhält man  $\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = \bar{\lambda} \cdot \overline{\mathfrak{b}_1}$ , da wir  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vorausgesetzt haben. Also ist  $\overline{\mathfrak{b}_1}$  ein EV zum EW  $\bar{\lambda}$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathbb{C}^{n \times 1}$ . Wegen  $\varphi(\overline{\mathfrak{b}_1}, \overline{\mathfrak{b}_1}) = \overline{\mathfrak{b}_1}^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = (\overline{\mathfrak{b}_1}^T \cdot \mathfrak{b}_1)^T = \varphi(\mathfrak{b}_1, \overline{\mathfrak{b}_1}) = 1$  ist  $\overline{\mathfrak{b}_1}$  normiert. Aus

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \varphi(\mathfrak{b}_1, \overline{\mathfrak{b}_1}) &= \lambda \cdot \mathfrak{b}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = (\lambda \cdot \mathfrak{b}_1)^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1)^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1} \\ &= \mathfrak{b}_1^T \cdot (\mathfrak{A}^T \cdot \overline{\mathfrak{b}_1}) \stackrel{8.3.7,(a)}{=} \mathfrak{b}_1^T \cdot (\bar{\lambda} \cdot \overline{\mathfrak{b}_1}) \\ &= \bar{\lambda} \cdot \varphi(\mathfrak{b}_1, \overline{\mathfrak{b}_1})\end{aligned}$$

und  $\lambda \neq \bar{\lambda}$  folgt  $\varphi(\mathfrak{b}_1, \overline{\mathfrak{b}_1}) = 0$ . Also sind die Vektoren  $\mathfrak{b}_1$  und  $\overline{\mathfrak{b}_1}$  bezüglich  $\varphi$  orthonormiert. Wie man leicht nachprüft (ÜA), sind dann die beiden Vektoren

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathfrak{b}_1 + \overline{\mathfrak{b}_1}) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{b}_1, \\ \mathfrak{c}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot i} \cdot (\mathfrak{b}_1 - \overline{\mathfrak{b}_1}) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Im} \mathfrak{b}_1\end{aligned}$$

aus  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  orthonormiert, und sie erfüllen die Gleichungen aus (8.12). Ergänzt man nun die Vektoren  $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$  durch die Vektoren  $\mathfrak{c}_3, \dots, \mathfrak{c}_n$  zu einer orthonormierten Basis von  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , so ist  $[\{\mathfrak{c}_3, \dots, \mathfrak{c}_n\}]$  ein  $\mathfrak{A}$ -invarianter UVR und die Matrix  $\mathfrak{C} := (\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n)$  hat wegen (8.12) die Eigenschaft

<sup>15</sup> Bekanntlich ist dann auch  $a - b \cdot i$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ -b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} & \dots & d_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{n-2,1} & \dots & d_{n-2,n-2} \end{pmatrix},$$

wobei man auf die Matrix  $(d_{ij})_{n-2,n-2}$  die Induktionsannahme anwenden kann. Die oben kurz geschilderten Beweisschritte verlaufen damit analog zu den Beweisen der Sätze 8.3.7 und 8.3.8. Ausführlich überlege man sich dies als ÜA. ■

**Satz 8.3.10** Es sei  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische (bzw. hermitische)  $(n,n)$ -Matrix und  $\lambda_1, \lambda_2$  zwei verschiedene EWe von  $\mathfrak{A}$  mit den zugehörigen EVen  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ . Dann gilt

$$\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2 = 0 \quad (\text{bzw. } \mathfrak{x}_1^T \cdot \bar{\mathfrak{x}}_2 = 0).$$

Mit anderen Worten:

$$L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1) \perp L_{\mathfrak{A}}(\lambda_2)$$

bez. Standardskalarprodukt.

*Beweis.* Sei zunächst  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Nach unseren Voraussetzungen gilt:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = \lambda_1 \cdot \mathfrak{x}_1 \text{ und } \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_2 = \lambda_2 \cdot \mathfrak{x}_2.$$

Multipliziert man von links die erste dieser Gleichungen mit  $\mathfrak{x}_2^T$  und die zweite mit  $\mathfrak{x}_1^T$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_2^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 &= \lambda_1 \cdot (\mathfrak{x}_2^T \cdot \mathfrak{x}_1) = \lambda_1 \cdot (\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2) \\ \text{und} \quad \mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_2 &= \lambda_2 \cdot (\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2). \end{aligned}$$

Da  $\mathfrak{x}_2^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1$  eine  $(1,1)$ -Matrix ist und außerdem  $\mathfrak{A}$  als symmetrisch vorausgesetzt wurde, haben wir

$$\mathfrak{x}_2^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{x}_2^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1)^T = \mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_2.$$

Mit Hilfe der oben hergeleiteten Gleichungen folgt hieraus

$$\lambda_1 \cdot (\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2) = \lambda_2 \cdot (\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2),$$

was (wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) nur für  $\mathfrak{x}_1^T \cdot \mathfrak{x}_2 = 0$  gelten kann.

Den Fall „ $\mathfrak{A}$  hermitisch“ beweist man analog. ■

**Satz 8.3.11 (mit Definitionen)** Es sei  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische (oder hermitische)  $(n,n)$ -Matrix und  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A}$ . Außerdem bezeichne  $\mu_a(\lambda)$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  des charakteristischen Polynoms  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}| = 0$  und sei  $\mu_g(\lambda) := \dim L_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ . ( $\mu_a(\lambda)$  heißt **algebraische Vielfachheit** von  $\lambda$  und  $\mu_g(\lambda)$  wird **geometrische Vielfachheit** von  $\lambda$  genannt.) Dann gilt

$$\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda).$$

*Mit anderen Worten: Zu einem Eigenwert einer symmetrischen (oder hermitischen) Matrix mit der Vielfachheit  $t$  gibt es genau  $t$  linear unabhängige Eigenvektoren.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz hier nur für symmetrische Matrizen. Der Beweis für hermitische Matrizen verläuft analog.

Nach Satz 8.3.8 findet man für  $\mathfrak{A}$  eine orthogonale  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{B}$  mit

$$\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} (=: \mathfrak{D}),$$

wobei die Elemente der Hauptdiagonalen von  $\mathfrak{D}$  die EW von  $\mathfrak{A}$  sind. Folglich ist  $\mathfrak{A}$  zu  $\mathfrak{D}$  ähnlich, und  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{D}$  haben nach Satz 8.2.2 die gleichen EWe. Wegen Satz 3.3.3 (S. 142) gilt außerdem  $\text{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}) = \text{rg}(\mathfrak{B}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{B})$ . Unsere Behauptung folgt dann hieraus unter Verwendung von  $\mu_g(\lambda) = \dim L_{\mathfrak{A}}(\lambda) = n - \text{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E})$ ,  $\mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D} - \lambda \cdot \mathfrak{E}$ ,  $\text{rg}(\mathfrak{D} - \lambda \cdot \mathfrak{E}) = n - \mu_a(\lambda)$ . ■

## 8.4 Überführung von symmetrischen Matrizen in Diagonalgestalt

Eine Folgerung aus den Sätzen 8.2.9, 8.3.8, 8.3.10 und 8.3.11 ist das folgende

**Verfahren zur Berechnung einer orthogonalen Matrix  $\mathfrak{B}$ , die eine vorgegebene symmetrische Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mittels  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  in eine Diagonalmatrix überführt:**

- (a) Man bestimme die EWe von  $\mathfrak{A}$ :

$$\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{t_1} \quad \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{t_2} \quad \dots \dots \quad \underbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}_{t_r}$$

$(t_1 + t_2 + \dots + t_r = n; \lambda_1, \dots, \lambda_r$  paarweise verschieden).

(Daß es genau  $n$  reelle EW gibt (Vielfachheiten mitgezählt) folgt aus Satz 8.2.9.)

- (b) Zu jedem EW  $\lambda_i$  mit der Vielfachheit  $t_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) berechne man  $t_i$  l.u. EVen. (Die Existenz dieser Vektoren folgt aus Satz 8.3.11.) Sind dies die Vektoren

$$\underbrace{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{t_1}}_{\in L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1)}, \underbrace{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{t_2}}_{\in L_{\mathfrak{A}}(\lambda_2)}, \dots, \underbrace{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{t_r}}_{\in L_{\mathfrak{A}}(\lambda_r)},$$

so gilt nach Satz 8.3.10 bez. des Standardskalarproduktes:

$$\mathfrak{a}_i \perp \mathfrak{b}_j, \dots, \mathfrak{a}_i \perp \mathfrak{x}_j, \dots, \mathfrak{b}_i \perp \mathfrak{x}_j, \dots$$

- (c) Man orthonormiere die EV „gruppenweise“ (d.h., man bestimme für  $L_{\mathfrak{A}}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ ) jeweils (bez. Standardskalarprodukt) eine orthonormierte Basis. Man erhält auf diese Weise  $n$  orthonormierte EVen

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$$

zu den EWen von  $\mathfrak{A}$ , die die Spalten der gesuchten Matrix  $\mathfrak{B}$  bilden:

$$\mathfrak{B} := (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n).$$

(Siehe dazu auch Satz 8.1.4.)

## Beispiele

- (1.) Sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aus  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_3| = 0$  erhält man, daß  $\lambda_1 = 1$  ein zweifacher EW und  $\lambda_2 = 7$  ein einfacher EW von  $\mathfrak{A}$  ist.

Die zugehörigen EVen berechnen sich aus den LGS  $(\mathfrak{A} - \mathfrak{E}_3) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  und  $(\mathfrak{A} - 7 \cdot \mathfrak{E}_3) \cdot \mathfrak{x}' = \mathfrak{o}$ . Die Lösungen des ersten LGS lassen sich durch

$$\mathfrak{x} = t_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathfrak{a}_1} + t_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathfrak{a}_2}$$

und die des zweiten LGS durch

$$\mathfrak{x}' = t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: \mathfrak{b}}$$

$(t_1, t_2, t \in \mathbb{R})$  beschreiben. Zwecks Ermittlung einer orthogonalen Matrix  $\mathfrak{B}$  mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

haben wir nach dem Schmidtschen ONV die Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  (bez. Standardskalarprodukt) zu orthonormieren und den Vektor  $\mathfrak{b}$  nur zu normieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= (1/\|\mathfrak{a}_2\|) \cdot \mathfrak{a}_1 = (1/\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{e}_2 &= (1/\|\mathfrak{b}_2\|) \cdot \mathfrak{b}_2 = (1/\sqrt{3}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{e}_3 &= (1/\|\mathfrak{b}\|) \cdot \mathfrak{b} = (1/\sqrt{6}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich leistet

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

das Gewünschte.

- (2.) Bezeichne  $T$  die Menge aller Punkte  $X$ , deren Koordinaten (bez. eines kartesischen Koordinatensystems  $S$ )  $x_1, x_2$  der Gleichung

$$7x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot x_1 \cdot x_2 = 1$$

bzw.

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

genügen. Gibt es ein kartesisches Koordinatensystem  $S' := (A; \mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2)$  mit

$$\underbrace{\frac{X^T}{S'} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{X}{S'}}_{=: \mathfrak{D}} = 1$$

$(\frac{X^T}{S'} = (x'_1, x'_2))$ ? Mit anderen Worten (siehe S. 192): Gibt es eine orthogonale Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\frac{X}{S} = \mathfrak{B} \cdot \frac{X}{S'}$  und  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ ? Nach dem obigen Verfahren lässt sich  $\mathfrak{B}$  wie folgt mit Hilfe der EWe und EVen von  $\mathfrak{A}$  ermitteln:

Aus

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 7 - 8\lambda + \lambda^2 - 7 = \lambda^2 - 8\lambda$$

ergeben sich für  $\mathfrak{A}$  die EWe  $\lambda_1 = 8$  und  $\lambda_2 = 0$ . Die EVen zum EW 8 von  $\mathfrak{A}$  erhält man als Lösungen  $\neq 0$  des LGS

$$\underbrace{(\mathfrak{A} - 8 \cdot \mathfrak{E})}_{\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -7 \end{pmatrix}} \cdot \mathfrak{x} = 0 : \quad \mathfrak{x} = s \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0).$$

Die EVen zum EW 0 von  $\mathfrak{A}$  sind dann die nichttrivialen Lösungen von

$$\underbrace{(\mathfrak{A} - 0 \cdot \mathfrak{E})}_{\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}} \cdot \mathfrak{x} = 0 : \quad \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

Normieren der EVen  $(7, 1)^T$  und  $(1, -7)^T$  von  $\mathfrak{A}$  liefert:

$$\mathfrak{B} = (1/\sqrt{8}) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 1 \\ 1 & -\sqrt{7} \end{pmatrix},$$

womit die Kurve  $T$  auch durch die Gleichung

$$(x'_1, x'_2) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 1$$

bzw.

$$8x'^2_1 = 1$$

beschrieben werden kann. Aus dieser Beschreibung folgt dann unmittelbar, daß  $T$  sich aus zwei parallelen Geraden zusammensetzt.

Das eben behandelte Beispiel wird im Kapitel 9 verallgemeinert, um sogenannte Hyperflächen zweiter Ordnung zu klassifizieren.

## 8.5 Jordansche Normalformen

Die Hauptergebnisse dieses Abschnittes beziehen sich auf einen Körper  $K$ , in dem das charakteristische Polynom einer jeden Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dies ist z.B. für  $K = \mathbb{C}$  der Fall.

Ziel dieses Abschnittes ist es, herauszufinden, ob es für den Fall, bei dem eine Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  nicht diagonalisierbar ist, nicht doch noch eine gewisse reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  existiert, so daß  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  von möglichst „einfacher Bauart“ ist. Einfach bedeutet hier (mit Blick auf spätere Anwendungen), daß möglichst viele Elemente in  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  über und unter der Hauptdiagonalen 0 sind. Wir beginnen mit Bezeichnungen für gewisse Matrizen, die nachfolgend eine Rolle spielen.

### Definitionen

- Eine Matrix der Form  $(\lambda)_{1,1}$  oder der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  heißt **elementare Jordan-Matrix**<sup>16</sup> mit dem Eigenwert  $\lambda$  (kurz: **Jordan-Kästchen**) und wird nachfolgend mit  $J_n(\lambda)$  bezeichnet.

- Ist  $J_{n_i}(\lambda_i)$  eine elementare Jordan-Matrix des Typs  $n_i \times n_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) mit dem Eigenwert  $\lambda_i$ , so nennt man die Matrix, die sich wie folgt aus den Untermatrizen  $J_{n_i}(\lambda_i)$  und passend gewählten Nullmatrizen  $\mathfrak{O}_{n_i, n_j} \in K^{n_i \times n_j}$  aufbaut:

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \mathfrak{O}_{n_1, n_2} & \mathfrak{O}_{n_1, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_1, n_{r-1}} & \mathfrak{O}_{n_1, n_r} \\ \mathfrak{O}_{n_2, n_1} & J_{n_2}(\lambda_2) & \mathfrak{O}_{n_2, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_2, n_{r-1}} & \mathfrak{O}_{n_2, n_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{n_{r-1}, n_1} & \mathfrak{O}_{n_{r-1}, n_2} & \mathfrak{O}_{n_{r-1}, n_3} & \dots & J_{n_{r-1}}(\lambda_{r-1}) & \mathfrak{O}_{n_{r-1}, n_r} \\ \mathfrak{O}_{n_r, n_1} & \mathfrak{O}_{n_r, n_2} & \mathfrak{O}_{n_r, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_r, n_{r-1}} & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

$$(\in K^{(n_1 + \dots + n_r) \times (n_1 + \dots + n_r)}),$$

eine **Jordan-Matrix**. (Man beachte, daß die  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  nicht alle paarweise verschieden sein müssen!).

- Existiert zu einer Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in K^{n \times n}$  und eine gewisse Jordan-Matrix  $\mathfrak{J}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{J}$ , so heißt  $\mathfrak{J}$  eine **Jordansche Normalform von  $\mathfrak{A}$** .

Einige Eigenschaften von Jordan-Matrizen sind zusammengefaßt im

**Lemma 8.5.1** Sei  $\mathfrak{J} \in K^{n \times n}$  eine Jordan-Matrix mit

$$|\mathfrak{J} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_t - x)^{\alpha_t},$$

wobei die  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  paarweise verschieden seien. Außerdem bezeichne  $j_{q,k}$  die Anzahl der in  $\mathfrak{J}$  vorkommenden Matrizen  $J_q(\lambda_k)$  ( $q \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ ). Ferner seien die Zahlen  $s_k \in \mathbb{N}$  so festgelegt, daß  $j_{s_k, k} \neq 0$ , jedoch  $j_{q, k} = 0$  für alle  $q \geq s_k + 1$  ist. Dann gilt:

- $\alpha_k = \sum_{q=1}^{s_k} q \cdot j_{q,k}$  für alle  $k \in \{1, \dots, t\}$ ;
- $rg(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^i = n - \alpha_k + \sum_{l=1}^{s_k-i} l \cdot j_{i+l, k}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, s_k - 1\}$  und  $rg(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^m = n - \alpha_k$  für alle  $m \geq s_k$ , wobei  $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ ;
- Bei Vorgabe von  $n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  und von den Zahlen  $rg(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^i$  für alle  $k \in \{1, \dots, t\}$  und alle  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , sind die Zahlen  $j_{q,k}$  für alle  $q \in \mathbb{N}$  und alle  $k \in \{1, \dots, t\}$  aus den unter (a) und (b) angegebenen Gleichungen auf eindeutige Weise berechenbar.

<sup>16</sup> Benannt nach dem französischen Mathematiker Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922). Jordan hat fundamentale Beiträge zur Analysis, Gruppentheorie und Topologie geleistet.

(d) Eine zu  $\mathfrak{J}$  ähnliche Matrix  $\mathfrak{J}' \in K^{n \times n}$  unterscheidet sich von  $\mathfrak{J}$  höchstens durch die Reihenfolge der in  $\mathfrak{J}$  vorkommenden elementaren Jordan-Matrizen.

*Beweis.* (a) und (b) rechnet man leicht nach (ÜA!).

(c): Wegen (b) gilt  $\text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^1 > \text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^2 > \dots > \text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^{\alpha_k - 1}$  sowie  $\text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^m = n - \alpha_k$  für alle  $m \geq s_k$ . Hieraus lassen sich zunächst die Zahlen  $s_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, t\}$  berechnen. Ist  $s_k = 1$ , so gilt offenbar  $j_{1,k} = \alpha_k$  und  $j_{m,k} = 0$  für alle  $m \geq 2$ . Im Fall  $s_k \geq 2$  gilt  $j_{m,k} = 0$  für alle  $m \geq s_k + 1$  und die Zahlen  $j_{q,k}$  für  $q = 1, \dots, s_k$  lassen sich aus dem LGS

$$\sum_{q=1}^{s_k} q \cdot j_{q,k} = \alpha_k,$$

$$\sum_{l=1}^{s_k-i} l \cdot j_{i+l,k} = \text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^i - n + \alpha_k \quad (i \in \{1, 2, \dots, s_k - 1\}),$$

das wegen der Regularität der Koeffizientenmatrix genau eine Lösung besitzt, berechnen.

(d): Sind  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{J}'$  ähnliche Jordan-Matrizen aus  $K^{n \times n}$ , so haben sie nach Lemma 8.1.1, (a) das gleiche charakteristische Polynom und nach Lemma 8.1.1, (b) stimmen die Ränge der Matrizen  $\text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^i$  und  $\text{rg}(\mathfrak{J}' - \lambda_k \cdot \mathfrak{E}_n)^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  überein. Folglich ergibt sich (d) aus (c). ■

**Lemma 8.5.2** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda \in K$  und  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n) \in K_r^{n \times n}$ . Außerdem sei  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = J_n(\lambda)$ . Dann gilt:

(a)  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda - x)^n$ , d.h.,  $\lambda$  ist der EW von  $\mathfrak{A}$  mit der Vielfachheit  $n$ .

(b)  $\forall i \in \{1, \dots, n - 1\} : \mathfrak{b}_i = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-i} \cdot \mathfrak{b}_n$ .

(c)  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \neq \mathfrak{O}_{n,n}$  und  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n = \mathfrak{O}_{n,n}$ .

*Beweis.* (a): Offenbar gilt  $|J_n(\lambda) - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda - x)^n$ . (a) folgt damit aus Satz 8.2.2.

(b): Aus  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = J_n(\lambda)$  folgt mit Hilfe von Lemma 8.1.2

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_1 &= \lambda \cdot \mathfrak{b}_1, \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{b}_1 + \lambda \cdot \mathfrak{b}_2, \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_3 &= \mathfrak{b}_2 + \lambda \cdot \mathfrak{b}_3, \\ &\dots \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_{n-1} &= \mathfrak{b}_{n-2} + \lambda \cdot \mathfrak{b}_{n-1} \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_n &= \mathfrak{b}_{n-1} + \lambda \cdot \mathfrak{b}_n. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mathfrak{b}_1 \in L_{\mathfrak{A}}^1(\lambda)$  und man erhält die Behauptung (b), indem man obige Gleichungen (mit der letzten Gleichung beginnend) etwas umformt und die bereits abgeleiteten Gleichungen benutzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{n-1} &= (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_n, \\ \mathfrak{b}_{n-2} &= (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_{n-1} = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot \mathfrak{b}_n, \\ &\dots \\ \mathfrak{b}_2 &= (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_3 = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-2} \cdot \mathfrak{b}_n, \\ \mathfrak{b}_1 &= (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}_2 = (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \cdot \mathfrak{b}_n. \end{aligned}$$

(c): Man rechnet leicht nach, daß  $(J_n(\lambda) - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \neq \mathfrak{O}_{n,n}$  und  $(J_n(\lambda) - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n = \mathfrak{O}_{n,n}$  gilt. Da  $J_n(\lambda)$  und  $\mathfrak{A}$  nach Voraussetzung ähnliche Matrizen sind, sind nach Lemma 8.1.1, (b) die Ränge der Matrizen  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n$  und  $(\mathfrak{J} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n$  gleich. Wegen  $\text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n = 0$  ist damit  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n = \mathfrak{O}_{n,n}$ . Analog kann man dann auch  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \neq \mathfrak{O}_{n,n}$  zeigen. ■

**Satz 8.5.3** Seien  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda \in K$  und  $r(\lambda)$  wie im Satz 8.3.1 definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathfrak{A}$  ist zu  $J_n(\lambda)$  ähnlich.
- (b) Es gilt  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda - x)^n$ ,  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \neq \mathfrak{O}_{n,n}$  und  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^n = \mathfrak{O}_{n,n}$ .
- (c)  $\lambda$  ist EW von  $\mathfrak{A}$  und  $r(\lambda) = n$ .

*Beweis.* „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ folgt aus Lemma 8.5.2.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“ ergibt sich aus den Eigenschaften der verallgemeinerten Eigenräume (siehe Satz 8.3.1).

Wir haben also nur noch „(c)  $\Rightarrow$  (a)“ zu zeigen.

Sei also  $\lambda$  EW von  $\mathfrak{A}$  und  $r(\lambda) = n$ . Dann gilt  $L_{\mathfrak{A}}^{n-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^n(\lambda)$  und nach Satz 8.3.2 sind für jedes  $\mathfrak{b} \in L_{\mathfrak{A}}^n(\lambda) \setminus L_{\mathfrak{A}}^{n-1}(\lambda)$  die Vektoren  $\mathfrak{b}_1 := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-1} \cdot \mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{b}_2 := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{n-2} \cdot \mathfrak{b}$ , ...,  $\mathfrak{b}_{n-1} := (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{b}_n := \mathfrak{b}$  l.u.. Sei  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$ . Man rechnet nun nach, daß  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = J_n(\lambda)$  gilt (siehe dazu auch den Beweis von Lemma 8.5.2, (b)). ■

**Satz 8.5.4** Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  eine Matrix, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt:

- (a)  $\mathfrak{A}$  ist zu einer gewissen Jordan-Matrix ähnlich.
- (b) Die zu  $\mathfrak{A}$  ähnliche Jordan-Matrix  $\mathfrak{J}$  ist bis auf die Reihenfolge der in  $\mathfrak{J}$  auftretenden Jordan-Kästchen eindeutig bestimmt.

*Beweis.* (a): Wir beweisen (a) durch vollständige Induktion über  $n$ .

(I) Für  $n = 1$  ist unsere Behauptung offensichtlich.

(II) Angenommen, unser Satz ist für alle Matrizen  $\mathfrak{A}' \in K^{m \times m}$ , deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und  $m < n$  richtig.

Sei nun  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ . Nach Voraussetzung existieren dann gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  und gewisse  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{N}$  mit  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_t - \lambda)^{\alpha_t}$ . Wir wählen einen EW  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$  und erhalten nach Satz 8.3.3 die folgende Zerlegung von  $K^{n \times 1}$  in  $\mathfrak{A}$ -invariante UVRe:

$$L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) \oplus E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = K^{n \times 1}. \quad (8.13)$$

Folgende zwei Fälle sind dann möglich:

**Fall 1:**  $r(\lambda) = n$ .

In diesem Fall folgt unsere Behauptung aus Satz 8.5.3.

**Fall 2:**  $r(\lambda) < n$ .

Folgende zwei Fälle sind dann möglich:

**Fall 2.1:**  $m := \dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) < n$ .

Wegen (8.13) ist  $K^{n \times 1}$  in diesem Fall  $\mathfrak{A}$ -zerlegbar. Nach Satz 8.3.3 ist (8.13) eine

Zerlegung von  $K^{n \times 1}$  in  $\mathfrak{A}$ -invariante UVRe. Mit Hilfe von Lemma 8.1.3 folgt hieraus, daß  $\mathfrak{A}$  zu einer Matrix der Form

$$\mathfrak{A}' := \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{O}_{m,n-m} \\ \mathfrak{O}_{n-m,m} & \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix}$$

ähnlich ist. Offenbar gilt  $|\mathfrak{A}' - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n| = |\mathfrak{A}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_m| \cdot |\mathfrak{A}_2 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_{n-m}|$ , womit nach Voraussetzung und Lemma 8.2.2 auch die charakteristischen Polynome von  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  vollständig in Linearfaktoren zerfallen. Nach unserer Induktionsannahme existiert damit eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}_i$ , die  $\mathfrak{A}_i$  in eine Jordan-Matrix  $\mathfrak{J}_i$  ( $i = 1, 2$ ) überführt:  $\mathfrak{B}_i^{-1} \cdot \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{B}_i = \mathfrak{J}_i$ . Wählt man nun

$$\mathfrak{B}_3 := \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{O}_{m,n-m} \\ \mathfrak{O}_{n-m,m} & \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\mathfrak{B}_3^{-1} \cdot \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}_3 = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}_1 & \mathfrak{O}_{m,n-m} \\ \mathfrak{O}_{n-m,m} & \mathfrak{J}_2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist  $\mathfrak{A}$  im Fall 2.1 zu einer Jordan-Matrix ähnlich.

**Fall 2.2:**  $\dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) = n$ .

Dieser Fall ist nur für  $E_{\mathfrak{A}}(\lambda) = \{\mathbf{0}\}$  möglich. Da jedoch  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$  nach Satz 8.3.4  $\mathfrak{A}$ -zerlegbar ist, können wir analog zu Fall 2.1 die Existenz einer zu  $\mathfrak{A}$  ähnlichen Jordan-Matrix nachweisen.

(b) folgt aus (a), der Transitivität der Ähnlichkeitsrelation und Lemma 8.5.1, (d). ■

Es sei noch bemerkt, daß man Satz 8.5.4 auch ohne die im obigen Beweis herangezogenen Sätze durch Ähnlichkeitstransformationen auf elementare Weise beweisen kann (siehe dazu z.B. [Hei-R 73]). Offen bleibt dabei jedoch die Begründung für das weiter unten angegebenen Konstruktionsverfahren der Jordan-Matrizen. Für die Begründung dieses Verfahrens fehlt uns nur noch der folgende

**Satz 8.5.5** Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  eine Matrix, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, d.h., es existieren gewisse paarweise verschiedene  $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$  und gewisse  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{N}$  mit den Eigenschaften  $\alpha_1 + \dots + \alpha_t = n$  und

$$|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_t - x)^{\alpha_t}. \quad (8.14)$$

Dann gilt:

$$(a) \forall i \in \{1, \dots, t\}: \dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_i)}(\lambda_i) = \alpha_i.$$

$$(b) L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_1)}(\lambda_1) \oplus L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_2)}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda_t)}(\lambda_t) = K^{n \times 1}.$$

*Beweis.* (a): Nach Satz 8.5.4 ist  $\mathfrak{A}$  zu einer gewissen Jordan-Matrix  $\mathfrak{J}$  ähnlich, d.h., es existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{J}$ . Sei  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$  beliebig gewählt und bezeichne  $\alpha$  die Vielfachheit von  $\lambda$ . Dann steht wegen Satz 8.2.2 in der Hauptdiagonalen von  $\mathfrak{J}$  genau  $\alpha$ -mal der EW  $\lambda$  und man rechnet leicht nach, daß  $\text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} = n - \alpha$  ist (siehe dazu auch Lemma 8.5.1). Andererseits gilt nach Satz 8.3.1  $\dim L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda) = n - \text{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)}$ . Unsere Behauptung (a) folgt damit aus der nach Lemma 8.1.1, (b) geltenden Gleichung  $\text{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} = \text{rg}(\mathfrak{J} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)}$ .

(b) ergibt sich aus (a), Satz 8.3.6 und Lemma 4.5.1. ■

Als Folgerung aus Lemma 8.5.2 und den Sätzen 8.1.2, 8.1.3, 8.3.1, 8.3.2, 8.3.4, 8.3.6 und 8.5.5 ergibt sich nun:

**Ein Verfahren zur Berechnung einer regulären Matrix  $\mathfrak{B}$ , die mittels  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  die Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  in eine Jordan-Matrix überführt**

Sei  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , die mittels  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  eine zu  $\mathfrak{A}$  ähnliche Jordan-Matrix liefert, erhält man mit Hilfe des folgenden Verfahrens:

- (1.) Zerlegen des charakteristischen Polynoms  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n|$  in Linearfaktoren:

$$|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_n| = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_t - x)^{\alpha_t}$$

( $t, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  paarweise verschieden).

- (2.) Für jedes  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$  verfahre man anschließend wie folgt:

- Berechnen der Matrizen

$$\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^3, \dots$$

solange, bis ein kleinstes  $r(\lambda)$  mit

$$\operatorname{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} = \operatorname{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)+1}$$

gefunden ist. Maximal kann  $r(\lambda)$  gleich der Vielfachheit von  $\lambda$  sein.

- Lösen der  $r(\lambda)$  LGS mit den Matrizendarstellungen

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}.$$

(Falls  $\lambda$  der einzige EW von  $\mathfrak{A}$  ist, gilt  $(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)} = \mathfrak{O}_{n,n}$ .)

Aus den Matrizendarstellungen der Lösungen sind dann Basen  $G_i$  für die verallgemeinerten Eigenräume  $L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$  ( $i = 1, \dots, r(\lambda)$ ) abzulesen. Die verallgemeinerten Eigenräume haben die Eigenschaft

$$L_{\mathfrak{A}}^1(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^2(\lambda) \subset \dots \subset L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-1}(\lambda) \subset L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$$

und wir setzen

$$m_i := \dim L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda) = n - \operatorname{rg}(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^i.$$

- Bestimmen einer Basis  $B_{r(\lambda)}$  von  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$  über  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-1}(\lambda)$  durch

$$B_{r(\lambda)} := G_{r(\lambda)} \setminus L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-1}(\lambda).$$

Anschließend bildet man

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot B_{r(\lambda)} := \{(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in B_{r(\lambda)}\}$$

und ergänzt diese l.u. Menge durch die (eventuell leere) Menge  $A_{r(\lambda)-1}$  zu einer Basis  $B_{r(\lambda)-1}$  von  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-1}(\lambda)$  über  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-2}$ . Dies ist unter Beachtung von Lemma 4.5.1 leicht möglich.

Als nächstes bildet man die Menge

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^2 \cdot B_{r(\lambda)} \cup (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot A_{r(\lambda)-1}$$

und ergänzt diese Menge von l.u. Vektoren durch die (eventuell leere) Menge  $A_{r(\lambda)-2}$  zu einer Basis  $B_{r(\lambda)-2}$  von  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-2}(\lambda)$  über  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)-3}$ , usw.

Man erhält durch

$$B(\lambda) := B_{r(\lambda)} \cup B_{r(\lambda)-1} \cup \dots \cup B_1$$

eine Basis für  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(\lambda)$ , deren Elementanzahl mit der Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  übereinstimmt.

Mit Hilfe der Bezeichnungen  $\mathfrak{T} := \mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n$  und  $r := r(\lambda)$  liefert die folgende Tabelle eine Übersicht über die Konstruktion der Basis  $B(\lambda)$ :

$i$	$U_i$	$\dim U_i$	Basis $B_i$ von $U_i$ über $U_{i-1}$	$ B_i $
$r$	$L_{\mathfrak{A}}^r(\lambda)$	$m_r$	$B_r$	$m_r - m_{r-1}$
$r-1$	$L_{\mathfrak{A}}^{r-1}(\lambda)$	$m_{r-1}$	$\mathfrak{T} \cdot B_r \cup A_{r-1}$	$m_{r-1} - m_{r-2}$
$r-2$	$L_{\mathfrak{A}}^{r-2}(\lambda)$	$m_{r-2}$	$\mathfrak{T}^2 \cdot B_r \cup \mathfrak{T} \cdot A_{r-1} \cup A_{r-2}$	$m_{r-2} - m_{r-3}$
$r-3$	$L_{\mathfrak{A}}^{r-3}(\lambda)$	$m_{r-3}$	$\mathfrak{T}^3 \cdot B_r \cup \mathfrak{T}^2 \cdot A_{r-1} \cup \mathfrak{T} \cdot A_{r-2} \cup A_{r-3}$	$m_{r-3} - m_{r-4}$
...	...	...	.....	...
1	$L_{\mathfrak{A}}^1(\lambda)$	$m_1$	$\mathfrak{T}^{r-1} \cdot B_r \cup \mathfrak{T}^{r-2} \cdot A_{r-1} \cup \dots \cup \mathfrak{T} \cdot A_2 \cup A_1$	$m_1$

- Die Elemente von  $B(\lambda)$  werden dann zu einer Matrix  $\mathfrak{B}_{\lambda}$  zusammengefaßt, indem man die Vektoren dieser Basis in der Reihenfolge ihres Auftretens in den Spalten (von unten nach oben gelesen!) der obigen Tabelle anordnet. Genauer:

Man wählt ein  $\mathfrak{a} \in B_{r(\lambda)}$  und erhält als erste Spalten von  $\mathfrak{B}_{\lambda}$ :

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-1} \cdot \mathfrak{a}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-2} \cdot \mathfrak{a}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{a}, \mathfrak{a}$$

Falls ein  $\mathfrak{b} \in B_{r(\lambda)} \setminus \{\mathfrak{a}\}$  existiert, werden als nächste Spalten von  $\mathfrak{B}_{\lambda}$  die Vektoren

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-1} \cdot \mathfrak{b}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-2} \cdot \mathfrak{b}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{b}, \mathfrak{b}$$

gewählt. Existiert ein solches  $\mathfrak{b}$  nicht, wählt man ein  $\mathfrak{c} \in A_{r(\lambda)-1}$  und legt als nächste Spalten von  $\mathfrak{B}_{\lambda}$  die Vektoren

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-2} \cdot \mathfrak{c}, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n)^{r(\lambda)-3} \cdot \mathfrak{c}, \dots, (\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{a}, \mathfrak{c}$$

fest, usw.

- (3.) Eine Matrix  $\mathfrak{B}$  mit den geforderten Eigenschaften ist dann

$$\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}_{\lambda_1}, \mathfrak{B}_{\lambda_2}, \dots, \mathfrak{B}_{\lambda_t}),$$

für die die Matrix  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  die Struktur

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}(\lambda_1) & \mathfrak{O}_{\alpha_1, \alpha_2} & \mathfrak{O}_{\alpha_1, \alpha_3} & \dots & \mathfrak{O}_{\alpha_1, \alpha_t} \\ \mathfrak{O}_{\alpha_2, \alpha_1} & \mathfrak{A}(\lambda_2) & \mathfrak{O}_{\alpha_2, \alpha_3} & \dots & \mathfrak{O}_{\alpha_2, \alpha_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{\alpha_t, \alpha_1} & \mathfrak{O}_{\alpha_t, \alpha_2} & \mathfrak{O}_{\alpha_t, \alpha_3} & \dots & \mathfrak{A}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

hat, wobei für jedes  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$  in der Matrix  $\mathfrak{A}(\lambda)$  – unter Verwendung der Bezeichnungen aus (2.) – folgende elementare Jordan-Matrizen zum EW  $\lambda$  (längs der Hauptdiagonalen) stehen:

$|B_r|$ -mal die Matrix  $J_{r(\lambda)}(\lambda)$ ,  
 $|A_{r-1}|$ -mal die Matrix  $J_{r(\lambda)-1}(\lambda)$ ,  
 $|A_{r-2}|$ -mal die Matrix  $J_{r(\lambda)-2}(\lambda)$ ,  
...  
 $|A_2|$ -mal die Matrix  $J_2(\lambda)$ ,  
 $|A_1|$ -mal die Matrix  $J_1(\lambda)$ .

### Beispiele

(1.) Sei

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachprüft, gilt

$$|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_5| = (3 - \lambda)^5,$$

womit  $\lambda = 3$  der einzige EW von  $\mathfrak{A}$  ist.  $r(\lambda)$  ist gleich 3, da  $\text{rg}(\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5) = 3$ ,

$$(\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}((\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5)^2) = 1$$

und  $(\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5)^3 = \mathfrak{O}_{5,5}$  gilt. Damit sind wir in der Lage, die obige Tabelle für unser Beispiel zu präzisieren:

$i$	$U_i$	$\dim U_i$	Basis $B_i$ von $U_i$ über $U_{i-1}$	$ B_i $
3	$L_{\mathfrak{A}}^3(3)$	5	$\mathfrak{b}_3$	1
2	$L_{\mathfrak{A}}^2(3)$	4	$\mathfrak{b}_2 := (\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5) \cdot \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_5$	2
1	$L_{\mathfrak{A}}^1(3)$	2	$\mathfrak{b}_1 := (\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5)^2 \cdot \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4 := (\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5) \cdot \mathfrak{b}_5$	2

wobei  $\mathfrak{b}_3 \in \mathbb{C}^{5 \times 1} \setminus L_{\mathfrak{A}}^2(3)$  und  $\mathfrak{b}_5 \in L_{\mathfrak{A}}^2(3) \setminus [L_{\mathfrak{A}}^1(3) \cup \{\mathfrak{b}_2\}]$  noch zu bestimmen sind.

Es sei bemerkt, daß man an dieser Stelle schon sieht, wie eine zu  $\mathfrak{A}$  ähnliche Jordan-Matrix aussieht. Mit  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_5)$  gilt nämlich nach Satz 8.5.4 und Lemma 8.5.2:

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zwecks Bestimmung der Vektoren  $\mathfrak{b}_3$  und  $\mathfrak{b}_5$  haben wir das LGS  $(\mathfrak{A} - 3 \cdot \mathfrak{E}_5)^i \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  für  $i = 1$  und  $i = 2$  zu lösen. Aus der Matrizendarstellung der Lösungen sind dann z.B. die folgenden Beschreibungen der verallgemeinerten Eigenräume ablesbar:

$$L_{\mathfrak{A}}^1(3) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

und

$$L_{\mathfrak{A}}^2(3) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

Offenbar ist

$$\mathfrak{b}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 1} \setminus L_{\mathfrak{A}}^2(3).$$

Damit erhalten wir

$$\mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählt man nun

$$\mathfrak{b}_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{\mathfrak{A}}^2(3) \setminus [L_{\mathfrak{A}}^1(3) \cup \{\mathfrak{b}_2\}],$$

so ist

$$\mathfrak{b}_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$ , die unsere Matrix  $\mathfrak{A}$  in eine Jordan-Matrix überführt, ist folglich:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.) Sei

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Eine (mehr oder weniger) längere Rechnung ergibt

$$|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_5| = (2 - \lambda)^3 \cdot (5 - \lambda)^2,$$

womit  $\lambda_1 := 2$  und  $\lambda_2 := 5$  die einzigen EWe von  $\mathfrak{A}$  sind.

Wir bestimmen zunächst eine Basis für  $L_{\mathfrak{A}}(\lambda_1)$  nach dem in obigem Schritt (2.) beschriebenen Verfahren:

$r(\lambda_1)$  ist gleich 3, da  $\text{rg}(\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5) = 4$ ,

$$(\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & -18 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}((\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^2) = 3,$$

$$(\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -54 & 0 & -54 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 27 & 27 & 27 \\ 27 & 0 & 27 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}(\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^3) = 2$$

und  $r(\lambda_1)$  nicht größer als 3 sein kann. Wie im ersten Beispiel können wir die im allgemeinen Verfahren angegebene Tabelle präzisieren:

$i$	$U_i$	$\dim U_i$	Basis $B_i$ von $U_i$ über $U_{i-1}$	$ B_i $
3	$L_{\mathfrak{A}}^3(2)$	3	$\mathfrak{b}_3$	1
2	$L_{\mathfrak{A}}^2(2)$	2	$\mathfrak{b}_2 := (\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5) \cdot \mathfrak{b}_3$	1
1	$L_{\mathfrak{A}}^1(2)$	1	$\mathfrak{b}_1 := (\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^2 \cdot \mathfrak{b}_3$	1

wobei  $\mathfrak{b}_3 \in L_{\mathfrak{A}}^3(2) \setminus L_{\mathfrak{A}}^2(2)$  noch zu bestimmen ist.

Dazu genügt es, die LGS  $(\mathfrak{A} - 2 \cdot \mathfrak{E}_5)^i \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  für  $i = 2$  und  $i = 3$  zu lösen.

Aus den Matrizendarstellungen der Lösungen sind dann z.B. die folgenden Beschreibungen der verallgemeinerten Eigenräume ablesbar:

$$L_{\mathfrak{A}}^2(2) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

und

$$L_{\mathfrak{A}}^3(2) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Offenbar ist

$$\mathfrak{b}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{\mathfrak{A}}^3(2) \setminus L_{\mathfrak{A}}^2(2).$$

Damit erhalten wir

$$\mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes haben wir eine Basis für den Eigenraum  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\lambda)}(5)$  zu bestimmen. Da  $\text{rg}(\mathfrak{A} - 5 \cdot \mathfrak{E}_5) = 1$  ist, gilt  $r(5) = 2$  und unsere Übersichtstabelle lautet:

$i$	$U_i$	$\dim U_i$	Basis $B_i$ von $U_i$ über $U_{i-1}$	$ B_i $
2	$L_{\mathfrak{A}}^2(5)$	2	$\mathfrak{b}_5$	1
1	$L_{\mathfrak{A}}^1(5)$	1	$\mathfrak{b}_4 := (\mathfrak{A} - 5 \cdot \mathfrak{E}_5) \cdot \mathfrak{b}_5$	1

wobei  $\mathfrak{b}_5 \in L_{\mathfrak{A}}^2(5) \setminus L_{\mathfrak{A}}^1(5)$  ist. Zwecks Bestimmung von  $\mathfrak{b}_5$  hat man die LGS  $(\mathfrak{A} - 5 \cdot \mathfrak{E}_5)^i \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  für  $i = 1$  und  $i = 2$  zu lösen, wobei

$$(\mathfrak{A} - 5 \cdot \mathfrak{E}_5)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 & 0 & 12 \\ 12 & 9 & 12 & 0 & 18 \\ 1 & -6 & 10 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält hieraus z.B.

$$L_{\mathfrak{A}}^1(5) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

und

$$L_{\mathfrak{A}}^2(5) = \left[ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Hieraus folgt dann unmittelbar

$$\mathfrak{b}_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix

$$\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt damit

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Der Satz 8.5.4 zeigte, daß zu jeder Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  für  $K = \mathbb{C}$  eine ähnliche Jordan-Matrix aus  $K^{n \times n}$  gehört. Für  $K = \mathbb{R}$  gilt dieser Satz nur, wenn die Matrix  $\mathfrak{A}$  genau  $n$  reelle EWe (Vielfachheiten mitgezählt) besitzt. Wie man im Fall, wo das charakteristische Polynom von  $\mathfrak{A}$  nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt, eine Normalform von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  konstruieren kann, soll Gegenstand der letzten Überlegungen dieses Kapitels sein. Genauer: Wir werden zeigen, daß zu jeder Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, die  $\mathfrak{A}$  mittels  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  in eine Matrix  $\mathfrak{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{O}_{n_1, n_2} & \mathfrak{O}_{n_1, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_1, n_r} \\ \mathfrak{O}_{n_2, n_1} & \mathfrak{K}_2 & \mathfrak{O}_{n_2, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_2, n_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{n_r, n_1} & \mathfrak{O}_{n_r, n_2} & \mathfrak{O}_{n_r, n_3} & \dots & \mathfrak{K}_r \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

überführt, wobei jede Matrix  $\mathfrak{K}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ) entweder eine gewisse elementare Jordan-Matrix ist oder die Form

$$\mathfrak{K}_j = J_{n_j}^*(a_j, b_j) := \begin{pmatrix} a_j & b_j & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_j & a_j & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_j & b_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_j & a_j & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_j & b_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_j & a_j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_j & b_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -b_j & a_j \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

für gewisse  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  hat.

Die Berechnung der Spalten der Matrix  $\mathfrak{B}$ , die zu den reellen EWe von  $\mathfrak{A}$  gehören und die in (8.15) die elementaren Jordan-Matrizen liefern, verläuft wie bei der Berechnung einer Jordan-Matrix für  $\mathfrak{A}$ . Falls  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein EW von  $\mathfrak{A}$  im Körper  $\mathbb{C}$ , so ist auch  $\bar{z}$  ein EW von  $\mathfrak{A}$  und die Konstruktion der zu diesen EWe gehörenden Spalten von  $\mathfrak{B}$  ergibt sich aus dem nachfolgenden Satz.

**Satz 8.5.6** Seien  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{(2 \cdot n) \times (2 \cdot n)}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z := a + i \cdot b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $|\mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{E}_{2 \cdot n}| = (z - x)^n \cdot (\bar{z} - x)^n$  und  $\mathfrak{A}$  ähnlich zur Matrix

$$J_{2 \cdot n}(z, \bar{z}) := \begin{pmatrix} J_n(z) & \mathfrak{O}_{n, n} \\ \mathfrak{O}_{n, n} & J_n(\bar{z}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2 \cdot n) \times (2 \cdot n)}.$$

Dann gilt:

- (a) Es existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}_1 := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{2 \cdot n}) \in \mathbb{C}^{(2 \cdot n) \times (2 \cdot n)}$  mit  $\mathfrak{B}_1^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 = J_{2 \cdot n}(z, \bar{z})$  und die mit Hilfe der ersten  $n$  Spalten aus  $\mathfrak{B}$  bildbare Matrix

$$\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n, \overline{\mathfrak{b}_1}, \dots, \overline{\mathfrak{b}_n})$$

ist ebenfalls regulär und hat die Eigenschaft  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = J_{2 \cdot n}(z, \bar{z})$ .

- (b) Bildet man mit Hilfe der Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  aus (a) die Vektoren

$$\mathfrak{c}_j := \mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j},$$

$$\mathfrak{c}'_j := i \cdot (-\mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j})$$

$(j = 1, \dots, n)$ , so sind diese Vektoren aus  $\mathbb{R}^{(2 \cdot n) \times 1}$  und die Matrix

$$\mathfrak{C} := (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}'_2, \dots, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{c}'_n)$$

ist regulär und erfüllt die Gleichung  $\mathfrak{C}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} = J_{2 \cdot n}^*(a, b)$ .

*Beweis.* Die Existenz der Matrix  $\mathfrak{B}_1$  mit  $\mathfrak{B}_1^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 = J_{2 \cdot n}(z, \bar{z})$  folgt aus Satz 8.5.4, dem Fundamentalsatz der Algebra und unseren Voraussetzungen. Setzt man  $\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{o}$ , so erhält man hieraus (unter Verwendung von Lemma 8.1.2)

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_j = \mathfrak{b}_{j-1} + z \cdot \mathfrak{b}_j. \quad (8.17)$$

Der Übergang zu den konjugiert komplexen Zahlen liefert aus (8.17)

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{b}_j} = \overline{\mathfrak{b}_{j-1}} + \bar{z} \cdot \overline{\mathfrak{b}_j}. \quad (8.18)$$

Mit Hilfe von (8.18) überlegt man sich leicht, daß  $\overline{\mathfrak{b}_1}, \dots, \overline{\mathfrak{b}_n}$  Vektoren aus  $L_{\mathfrak{A}}^{r(\bar{z})}(\bar{z})$  sind, die – da  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  l.u. sind – auch l.u. sind. Wegen  $L_{\mathfrak{A}}^{r(z)}(z) \cap L_{\mathfrak{A}}^{r(\bar{z})}(\bar{z}) = \{\mathfrak{o}\}$  (siehe Lemma 8.3.5, (b)) ist dann die Matrix  $\mathfrak{B}$  regulär und aus (8.17) und (8.18) folgt  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = J_{2 \cdot n}(z, \bar{z})$ .

(b): Offenbar ist  $\mathfrak{c}_j = 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{b}_j$  und  $\mathfrak{c}'_j = 2 \cdot \operatorname{Im} \mathfrak{b}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Als ÜA überlege man sich, daß  $\mathfrak{C}$  regulär ist<sup>17</sup>. Die restlichen Behauptungen unseres Satzes folgen mit Hilfe von Lemma 8.1.2, (8.17) und (8.18) aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}_j &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_j + \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{b}_j} \\ &= \mathfrak{b}_{j-1} + (a + b \cdot i) \cdot \mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_{j-1}} + (a - i \cdot b) \cdot \overline{\mathfrak{b}_j} \\ &= \mathfrak{b}_{j-1} + \overline{\mathfrak{b}_{j-1}} + a \cdot (\mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j}) - b \cdot i \cdot (-\mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j}) \\ &= \mathfrak{c}_{j-1} + a \cdot \mathfrak{c}_j - b \cdot \mathfrak{c}'_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}'_j &= -i \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b}_j + i \cdot \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{b}_j} \\ &= i \cdot (-\mathfrak{b}_{j-1} - (a + b \cdot i) \cdot \mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_{j-1}} + (a - i \cdot b) \cdot \overline{\mathfrak{b}_j}) \\ &= i \cdot (-\mathfrak{b}_{j-1} + \overline{\mathfrak{b}_{j-1}}) + a \cdot i \cdot (-\mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j}) + b \cdot (\mathfrak{b}_j + \overline{\mathfrak{b}_j}) \\ &= \mathfrak{c}'_{j-1} + a \cdot \mathfrak{c}'_j + b \cdot \mathfrak{c}_j, \end{aligned}$$

wobei  $\mathfrak{c}_0 := \mathfrak{c}'_0 := \mathfrak{o}$  ist. ■

Wie bereits oben erläutert, folgt aus Satz 8.5.6 der folgende

<sup>17</sup> Siehe dazu auch die Aufgabe A.4.8 aus Kapitel 17.

**Satz 8.5.7** Zu jeder Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und gewisse Matrizen  $\mathfrak{K}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ) mit

$$\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{O}_{n_1, n_2} & \mathfrak{O}_{n_1, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_1, n_r} \\ \mathfrak{O}_{n_2, n_1} & \mathfrak{K}_2 & \mathfrak{O}_{n_2, n_3} & \dots & \mathfrak{O}_{n_2, n_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{O}_{n_r, n_1} & \mathfrak{O}_{n_r, n_2} & \mathfrak{O}_{n_r, n_3} & \dots & \mathfrak{K}_r \end{pmatrix}.$$

Jede Matrix  $\mathfrak{K}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$  ( $j \in \{1, \dots, r\}$ ) ist dabei entweder eine gewisse elementare Jordan-Matrix oder hat die Gestalt (8.16), wobei die Zahlen  $z_j := a_j + b_j \cdot i$  und  $\overline{z_j}$  EWe von  $\mathfrak{A}$  aus dem Körper  $\mathbb{C}$  sind. ■

---

## Hyperflächen 2. Ordnung

### 9.1 Grundbegriffe

Bezeichne nachfolgend  $R_n$  stets einen euklidischen  $n$ -dimensionalen Punktraum (also einen  $n$ -dimensionalen Punktraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt). Außerdem sei

$$S := (A; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

ein kartesisches Koordinatensystem des  $R_n$ .

**Definition** Die Menge  $T$  aller Punkte  $X \in R_n$ , deren Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  (bez.  $S$ ) der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i + \alpha_0 = 0 \quad (*)$$

( $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ) genügen, heißt **Hyperfläche 2. Ordnung**. Zwecks Charakterisierung der Menge  $T$  schreiben wir kurz

$$T : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i + \alpha_0 = 0$$

Hyperflächen in  $R_2$  ( $\cong \mathfrak{R}_2$ ) heißen auch **Kurven 2. Ordnung** und Hyperflächen in  $R_3$  ( $\cong \mathfrak{R}_3$ ) nennt man auch **Flächen 2. Ordnung**.

#### Beispiele

(1) Für  $n = 2$  lautet  $(*)$

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{21}x_2x_1 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_0 = 0.$$

Speziell sind damit Geraden mit den beschreibenden Gleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0 \quad (a_1 \neq 0 \text{ oder } a_2 \neq 0)$$

und Kreise mit den beschreibenden Gleichungen

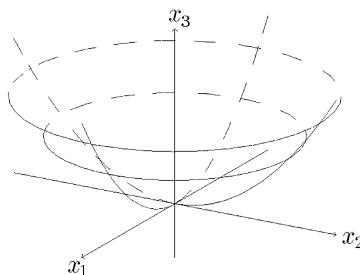
$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$$

$(a, b, r \in \mathbb{R})$  Kurven 2. Ordnung.

(2) Ein Beispiel für eine Fläche 2. Ordnung ist

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$$

ein sogenannter Rotationsparaboloid.



Hauptziele dieses Kapitels sind:

- Klassifikation der Hyperflächen 2. Ordnung  
(Insbesondere suchen wir Antwort auf die Frage: Welche Typen von Kurven und Flächen 2. Ordnung gibt es?)
- Herleitung von Verfahren, mit denen man feststellen kann, welches geometrische Gebilde durch eine vorgegebene Gleichung der Form (\*) beschrieben wird.

Unser Lösungsweg wird darin bestehen, das Koordinatensystem  $S$  mit dessen Hilfe  $T$  durch (\*) charakterisiert werden kann, durch ein (der Hyperfläche angepaßtes) Koordinatensystem  $S'$  zu ersetzen, so daß  $T$  in Koordinaten bez.  $S'$  durch eine (einfachere) Gleichung der Gestalt

$$\gamma_1 {x'_1}^2 + \dots + \gamma_n {x'_n}^2 + \beta x'_n + \gamma = 0$$

beschrieben werden kann. Aus dieser sogenannten Normalform ist dann erkennbar, um welchen Typ (etwa Gerade, Ellipse, Parabel, ... für  $n = 2$ ) es sich bei der Hyperfläche  $T$  handelt.

Um das oben angedeutete Verfahren möglichst schreibökonomisch behandeln zu können, werden wir uns zunächst eine Matrizenschreibweise für Hyperflächen 2. Ordnung überlegen.

Die Gleichung einer Kurve 2. Ordnung

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

kann in der Form

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (d/2, e/2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f = 0$$

und die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + ix_3 + j = 0$$

in der Form

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2 \cdot (g/2, h/2, i/2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + j = 0$$

aufgeschrieben werden (Beweis: Nachrechnen!).

Allgemein lässt sich die Gleichung (\*) einer Hyperfläche 2. Ordnung auch durch die folgende Matrizengleichung angeben:

$$\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x} + c = 0$$

( $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{n,n}$ ;  $\mathfrak{b}^T = (b_1, \dots, b_n)$ ;  $a_{ij} = a_{ji} = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})/2$ ,  $b_i = \alpha_i/2$ ;  $c = \alpha_0$ ). Den Ausdruck  $\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$  nennt man **quadratische Form** und  $2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x}$  ist die Zusammenfassung der sogenannten **linearen Glieder**.  $\mathfrak{A}$  wird auch **Formenmatrix** der quadratischen Form genannt.

Hauptziel des Kapitels 9 ist der Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 9.1.1** Es sei  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische  $(n, n)$ -Matrix,  $\mathfrak{b}^T = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $S$  ein kartesisches Koordinatensystem des  $R_n$  und  $\mathfrak{x}^T := (X_{/S})^T = (x_1, \dots, x_n)$ . Die Hyperfläche 2. Ordnung

$$T : \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x} + c = 0$$

lässt sich durch maximal zwei Koordinatentransformationen mit orthogonalen Übergangsmatrizen (bzw. durch geeignete Wahl eines kartesischen Koordinatensystems  $S''$ ) in eine der folgenden Normalformen

- (Ia)  $\alpha_1 x_1''^2 + \alpha_2 x_2''^2 + \dots + \alpha_n x_n''^2 = 0$
- (Ib)  $\alpha_1 x_1''^2 + \alpha_2 x_2''^2 + \dots + \alpha_n x_n''^2 = 1$
- (II)  $\alpha_1 x_1''^2 + \dots + \alpha_r x_r''^2 - 2x_n'' = 0 \quad (r < n)$

überführen.

Ein Beweis dieses Satzes ist die sogenannte „Hauptachsentransformation“, die wir im nächsten Abschnitt ausführlich mit Beispielen behandeln werden.

## 9.2 Hauptachsentransformation (Beweis von Satz 9.1.1)

Wir beginnen mit einem Versuch, die linearen Glieder  $2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x}$  in der Gleichung

$$\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x} + c = 0 \quad (1)$$

durch die Wahl eines anderen Koordinatenursprungs  $A'$  bzw. durch die Koordinatentransformation

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$$

$(\mathfrak{x} := X/S; \mathfrak{x}' := X/S'; \mathfrak{c} := A'/S)$  zu beseitigen.

Ersetzt man  $\mathfrak{x}$  in (1) durch  $\mathfrak{x}' + \mathfrak{c}$ , so erhält man:

$$(\mathfrak{x}' + \mathfrak{c})^T \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{x}' + \mathfrak{c}) + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot (\mathfrak{x}' + \mathfrak{c}) + c = 0$$

und hieraus

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + \mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c = 0.$$

Da  $\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}$  eine (1,1)-Matrix ist, und wir  $\mathfrak{A}$  als symmetrisch vorausgesetzt haben, gilt

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c})^T = \mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x}' = \mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}',$$

womit sich die Summanden in unserer obige Gleichung wie folgt zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot (\underbrace{\mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{b}^T}_{= (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b})^T}) \cdot \mathfrak{x}' + (\underbrace{\mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c}_{=: c'}) &= 0. \end{aligned}$$

Die linearen Glieder von (1) verschwinden folglich durch die Transformation  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{c}$  genau dann, wenn

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \text{ bzw. } \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$$

gilt. Aus unseren Lösbarkeitsbedingungen für LGS ergeben sich somit zwei Fälle:

Fall 1:  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b})$ .

In diesem Fall hat das LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$  mindestens eine Lösung  $\mathfrak{c}$ . Die Gesamtheit dieser Lösungen heißt **singuläres Gebilde** der Hyperfläche  $T$ . Besteht das singuläre Gebilde nur aus einem Punkt, so wird dieser Punkt der **Mittelpunkt** von  $T$  genannt.

Fall 2:  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} < \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b})$ .

In diesem Fall lassen sich die linearen Glieder aus der Gleichung (1) durch eine Koordinatentransformation der Form  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{c}$  nicht vollständig beseitigen.

Nachfolgend sollen nun diese zwei Fälle weiter studiert werden. Wir werden sehen, daß Hyperflächen, die der Bedingung von Fall 1 genügen, durch eine weitere Koordinatentransformation in eine der Normalformen (Ia) oder (Ib) überführt werden können. Für die restlichen Hyperflächen, die die Bedingung von Fall 2 erfüllen, werden dann anschließend zwei Koordinatentransformationen angegeben, die diese in eine Normalform (II) überführen. Wir beginnen mit

**Fall 1:**  $\text{rg} \mathfrak{A} = \text{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b})$ .

Wie wir bereits oben begründet haben, können wir durch die 1. Transformation:  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{c}$ , wobei  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$  ist, die Gleichung (1) auf die Form

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + c' = 0 \quad (2)$$

mit  $c' = \mathfrak{c}^T \cdot \underbrace{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}}_{= -\mathfrak{b}} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c$  bringen.

Als nächstes werden wir die Koordinatenachsen so neu festlegen, daß die Matrix  $\mathfrak{A}$  von (2) in eine Diagonalmatrix übergeht. Genauer: Nachdem wir zunächst  $T$  bez. unseres Ausgangskoordinatensystems  $S = (A; \mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n)$  durch die Gleichung (1) und anschließend durch Wahl eines neuen Koordinatenursprungs  $A'$  die Hyperfläche  $T$  durch (2) bez.  $S' := (A'; \mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n)$  charakterisiert haben, bestimmen wir jetzt ein kartesisches Koordinatensystem  $S'' := (A'; \mathfrak{e}_1'', \dots, \mathfrak{e}_n'')$  derart, daß  $T$  durch die weiter unten stehende Gleichung (3) bez.  $S''$  beschrieben werden kann.

Setzt man  $\mathfrak{b}_i := \mathfrak{e}_i'' / (\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sowie  $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$ , so besteht zwischen  $\mathfrak{x}' := X/S'$  und  $\mathfrak{x}'' := X/S''$  nach Satz 5.2.2 (S. 192) wegen  $A'/S'' = \mathfrak{o}$  folgender Zusammenhang:

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''.$$

Ein Ersetzen von  $\mathfrak{x}'$  in (2) durch  $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$  liefert

$$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'')^T \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'') + c' = 0$$

bzw.

$$\mathfrak{x}''^T \cdot (\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{x}'' + c' = 0.$$

Wählt man nun  $\mathfrak{B}$  als orthogonale Matrix, deren Spalten (bez. Standardskalarprodukt) aus orthonormierten EVen zu den EWe von  $\mathfrak{A}$  besteht, so liefert (wegen Satz 8.3.8, (b)) die sogenannte 2. Transformation:  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$ , einen Übergang von (2) zu der Gleichung

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + c' = 0, \quad (3)$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die EWe von  $\mathfrak{A}$  sind. Für  $c' = 0$  liegt durch (3) eine Normalform des Typs (Ia) (siehe Satz 9.1.1) für  $T$  vor. Ist  $c' \neq 0$ , so liefert die Division durch  $-c'$  aus (3) eine Normalform des Typs (Ib).

Also gilt der Satz 9.1.1 im Fall 1.

Bevor wir uns mit dem noch zu untersuchenden Fall 2 beschäftigen, wollen wir uns zunächst drei **Beispiele** zum Fall 1 ansehen. In sämtlichen Beispielen verwenden wir aus Abkürzungsgründen dieselben Bezeichnungen wie oben.

**1. Beispiel** Seien  $n = 2$  und

$$T_1 : 2x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{3}xy + 8x + 4\sqrt{3}y + 7 = 0.$$

Die Matrizenschreibweise für  $T_1$  lautet:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot (4, 2\sqrt{3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 7 = 0. \quad (1_{B_1})$$

Da offenbar  $\text{rg } \mathfrak{A} = 2$ , liegt Fall 1 vor. Aus dem LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$(\mathfrak{c}^T = (c_1, c_2))$  erhält man  $c_1 = -2$  und  $c_2 = 0$ . Folglich ist  $c' := \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + 7 = -8 + 7 = -1$ . Durch die 1. Transformation:  $\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$  geht  $(1_{B_1})$  damit in

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' - 1 = 0 \quad (2_{B_1})$$

über.

Zwecks Durchführung der 2. Transformation haben wir die EWe und EVen von  $\mathfrak{A}$  zu berechnen. Aus

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 3 = (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 1) = 0.$$

ergeben sich die EW  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = 1$  für  $\mathfrak{A}$ .

Die EVen zum EW 5 sind die nichttrivialen Lösungen  $\mathfrak{y}$  des LGS

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \quad : \quad \mathfrak{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

und die EVen zum EW 1 die nichttrivialen Lösungen  $\mathfrak{y}$  von

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \quad : \quad \mathfrak{y} = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da die EVen zu verschiedenen EWen orthogonal zueinander sind, haben wir (zwecks Bestimmung einer orthogonalen Matrix  $\mathfrak{B}$ ) 2 EVen zu verschiedenen EWen von  $\mathfrak{A}$  zu normieren. Wir erhalten

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

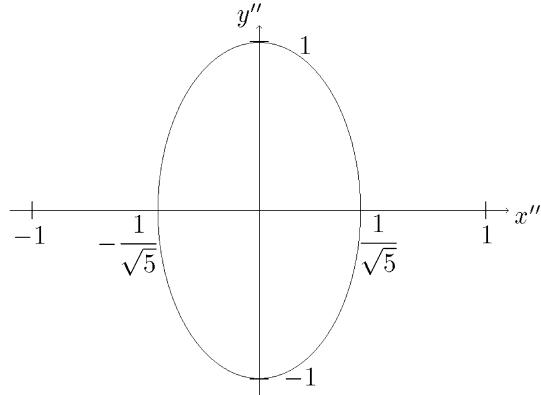
Folglich überführt die 2. Transformation:  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$  die Gleichung  $(2B_1)$  in

$$(x'', y'') \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - 1 = 0 \quad (3B_1)$$

bzw.

$$5 \cdot x''^2 + y''^2 = 1.$$

Wir haben damit die Gleichung einer Ellipse erhalten (siehe dazu auch Abschnitt 9.3, S. 316ff), die sich im Koordinatensystem  $S''$  wie folgt geometrisch darstellen lässt:



Um die konkrete Lage dieser Ellipse im Ausgangskoordinatensystem  $S$  angeben zu können, fassen wir unsere oben vorgenommenen Koordinatentransformationen zusammen:

Aus  $\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$  und  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$  ergibt sich

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$$

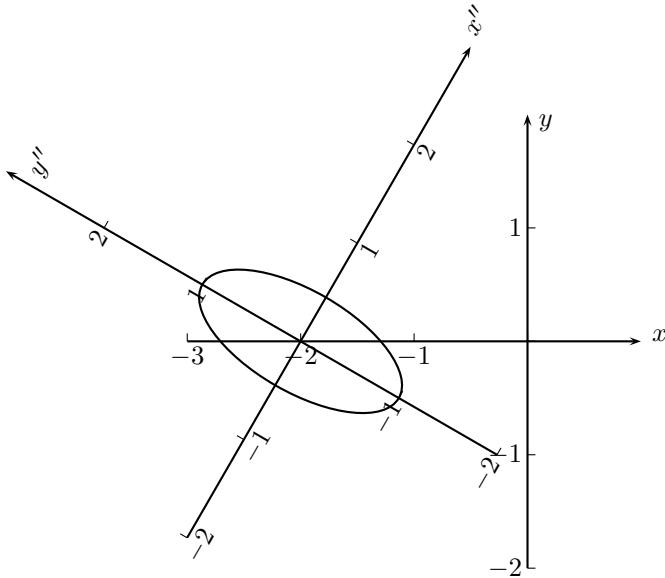
bzw. (siehe Satz 5.2.2)

$$X/S = A'/S + (\mathfrak{e}_1''/B, \mathfrak{e}_2''/B) \cdot X/S'',$$

wobei  $B = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ ,

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ist. Also haben wir:



## 2. Beispiel

Seien  $n = 2$  und

$$T_2 : 8x^2 + 6xy - 14x - 12y - 4 = 0$$

bzw.

$$T_2 : (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot (-7, -6) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0. \quad (1B_2)$$

Da  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} = 2$  ist, liegt Fall 1 vor.

Aus  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$  ergibt sich  $\mathfrak{c}^T = (2, -3)$ , womit  $c' = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} - 4 = 0$  ist. Die 1. Transformation  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$  überführt also  $(1B_2)$  in

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' = 0. \quad (2B_2)$$

Wie man leicht nachrechnet, sind  $\lambda_1 = 9$  und  $\lambda_2 = -1$  die EWe von  $\mathfrak{A}$ . Außerdem prüft man leicht nach, daß  $(3, 1)^T$  ein EV zum EW 9 und  $(1, -3)^T$  ein EV zum EW -1 ist. Die für die 2. Transformation  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$  erforderliche orthogonale Matrix  $\mathfrak{B}$  erhält man folglich durch das Normieren dieser beiden Vektoren:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

$(2_{B_2})$  geht damit über in

$$(x'', y'') \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0 \quad (3_{B_2})$$

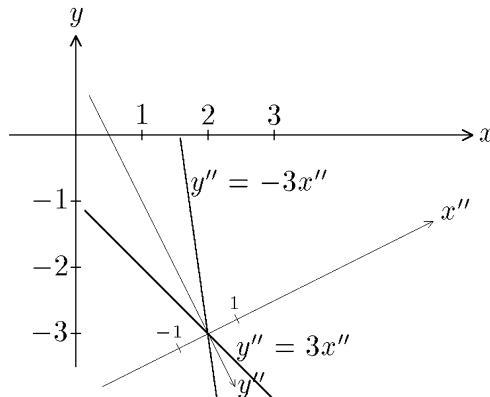
bzw.

$$9 \cdot x''^2 - y''^2 = 0 \\ (\iff y'' = 3x'' \vee y'' = -3x'').$$

Dieser Gleichung ist nun unmittelbar zu entnehmen, daß die Kurve  $T_2$  aus zwei sich schneidende Geraden besteht. Die konkrete Lage dieser Geraden im Ausgangskoordinatensystem läßt sich (wie im obigen 1. Beispiel) durch ein Zusammenfassen der Koordinatentransformationen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}''$$

und der daraus ablesbaren Lage des Koordinatenursprungs  $A'$  und der Koordinatenachsen von  $S''$  ermitteln:



**3. Beispiel** Seien  $n = 3$  und

$$T_3 : 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 1 = 0$$

bzw.

$$T_3 : (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0. \quad (1_{B_3})$$

In diesem Beispiel entfällt die 1. Transformation, da in  $(1_{B_3})$  keine linearen Glieder auftreten. Zwecks Durchführung der 2. Transformation  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$  hat man die EWe von  $\mathfrak{A}$  zu berechnen. Man erhält  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 7$ . Orthonormieren zugehöriger EVen liefert dann die orthogonale Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(siehe auch Beispiel (1.) von S. 279). Wir erhalten dann als Ergebnis der Transformation  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$  die Gleichung:

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 1 = 0$$

bzw.

$$x'^2 + y'^2 + 7 \cdot z'^2 + 1 = 0,$$

die von keinem Punkt  $X$  mit reellen Koordinaten  $(x, y, z)^T$  erfüllt wird. Folglich ist  $T_3$  die leere Menge. Es sei noch bemerkt, daß, falls in  $(1_{B_3})$  das Absolutglied  $+1$  durch  $-1$  ersetzt wird, durch die so erhaltene Gleichung ein Ellipsoid:  $x'^2 + y'^2 + 7 \cdot z'^2 = 1$  beschrieben wird.

Weiter mit dem allgemeinen Beweis.

**Fall 2:**  $r := \text{rg } \mathfrak{A} < \text{rg } \mathfrak{A}, -\mathfrak{b}$ .

In diesem Fall hat das LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$  keine Lösung  $\mathfrak{c}$ .

Außerdem haben wir  $|\mathfrak{A}| = 0$  und wegen unserer Voraussetzung  $r := \text{rg } \mathfrak{A} < n$  ist 0 ein EW mit der Vielfachheit  $n - r$  von  $\mathfrak{A}$ .

Wir beginnen mit der

**1. Transformation:**  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$ .

$\mathfrak{B}$  bezeichne dabei eine orthogonale Matrix, deren Spalten wir mit  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  bezeichnen wollen. Wir überlegen uns zunächst, daß  $\mathfrak{B}$  stets so bestimbar ist, daß durch die 1. Transformation die Gleichung (1) in eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \mathfrak{b}'^T \cdot \mathfrak{x}' + c = 0, \quad (4)$$

wobei

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{b}'^T = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0, b'_n)$  mit  $b'_n \neq 0$  und  $b'_i = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_i$  für  $i \in \{1, \dots, r, n\}$ , überführt werden kann. Ersetzt man  $\mathfrak{x}$  in (1) durch  $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$ , so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{x}'^T \cdot (\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot (\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{x}' + c = 0.$$

Folglich muß  $\mathfrak{B}$  den nachfolgenden Bedingungen genügen:

$$\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.,  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$  sind orthonormierte EVen zu den von 0 verschiedenen EWen von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$  sind orthonormierte EVen zum EW 0 von  $\mathfrak{A}$ , sowie  $\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{B} = (\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_n) = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0, b'_n)$ , d.h., die EVen  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$  zum EW 0 erfüllen noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_{r+1} &= \dots = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_{n-1} = 0 && \text{und} \\ \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_n &\neq 0. \end{aligned}$$

Zusammenfassend sind also  $\mathfrak{b}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) gewisse orthonormierte Lösungen von  $(\mathfrak{A} - \lambda_i \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ , wobei  $\lambda_i \neq 0$ ,  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_{n-1}$  gewisse orthonormierte Lösungen von

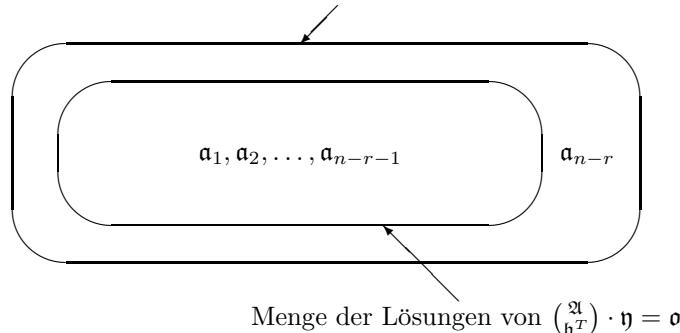
$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \\ \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{y} = 0 \end{array} \right\} \quad \left( \begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{b}^T \end{matrix} \right) \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \quad ((\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o})$$

und  $\mathfrak{b}_n$  eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ , die orthogonal zu  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_{n-1}$  ist, jedoch keine Lösung von  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$  sein darf.

Die Existenz solcher  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  folgt für  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$  unmittelbar aus Satz 8.3.8 (S. 275) und für die restlichen  $\mathfrak{b}_j$  ( $j = r+1, \dots, n$ ) aus folgenden Überlegungen:

Wegen  $\text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T = \text{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b}) = r+1$  besitzt das LGS  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$   $n-r-1$  l.u. Lösungen  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-r-1}$  (siehe Satz 3.4.4, S. 154). Da laut Voraussetzung  $\dim L_{\mathfrak{A}}(0) = n-r$  ist, existieren nach Satz 8.3.11 (S. 278)  $n-r$  l.u. EVen zu dem EW 0 von  $\mathfrak{A}$ , von denen einer (sagen wir  $\mathfrak{a}_{n-r}$ ) keine Lösung von  $\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{y} = 0$  ist.

Menge der Lösungen von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$



Orthonormiert man nun der Reihe nach die Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-r}$ , so erhält man die gewünschten  $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ .

Also läßt sich durch die erste Transformation die Gleichung (1) in die Gleichung (4) überführen.

Das Ziel der

**2. Transformation:**  $\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{x}''$

ist es, in der Gleichung (4) das Absolutglied und – bis auf die  $n$ -te Variable – die linearen Glieder zu beseitigen. Wie mögliche  $\mathbf{c}$  zu wählen sind, ergibt sich aus den sich anschließenden Rechnungen.

Ersetzt man in (4)  $\mathbf{x}'$  durch  $\mathbf{x}'' + \mathbf{c}$ , so erhält man nach einigen Zusammenfassungen, die wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes einmal durchgeführt haben (siehe S. 300), folgende Gleichung:

$$\mathbf{x}''^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathbf{x}'' + 2 \cdot (\mathfrak{D} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}')^T \cdot \mathbf{x}'' + (\mathbf{c}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{b}'^T \cdot \mathbf{c} + c) = 0.$$

Der Vektor  $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n)^T$  mit den Koordinaten des neuen Koordinatenursprungs (bez.  $S'$ ) soll so bestimmt werden, daß

$$\mathfrak{D} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}' = (0, 0, \dots, 0, b'_n)^T$$

und

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{b}'^T \cdot \mathbf{c} + c = 0$$

sind. Aus der ersten Gleichung ergibt sich unmittelbar:

$$c_i = -\frac{b'_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Außerdem sieht man, daß  $c_{r+1}, \dots, c_{n-1}$  beliebig wählbar sind. Wir setzen hier

$$c_j = 0 \quad (j = r+1, \dots, n-1).$$

Die noch fehlende Koordinate  $c_n$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{b}'^T \cdot \mathbf{c} + c = 0,$$

indem man die bereits bestimmten Werte der  $c_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) einsetzt und die Gleichung nach  $c_n$  auflöst:

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot b'_n} \cdot \left( \frac{b'_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{b'_r^2}{\lambda_r} - c \right).$$

Zusammenfassend erhalten wir damit

$$\mathbf{c}^T = \left( -\frac{b'_1}{\lambda_1}, \dots, -\frac{b'_r}{\lambda_r}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2 \cdot b'_n} \cdot \left( \frac{b'_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{b'_r^2}{\lambda_r} - c \right) \right).$$

(4) geht folglich durch die 2. Transformation über in

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot (0, \dots, 0, b'_n) \cdot \mathfrak{x}'' = 0. \quad (5)$$

Division durch  $-b'_n$  ergibt aus (5) eine Normalform des Typs (II).

Nachfolgend einige Beispiele zu Fall 2.

**4. Beispiel** Seien  $n = 3$  und

$$T_4 : 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x - 2y + 2\sqrt{2}z = 0. \quad (1_{B_4})$$

Die Matrizendarstellung von  $T_4$  lautet:

$$\mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot (1, -1, \sqrt{2}) \cdot \mathfrak{x} = 0.$$

Wegen  $\text{rg } \mathfrak{A} = 1 (= r)$  und  $\text{rg } (\mathfrak{A}, -\mathfrak{b}) = 2$  liegt Fall 2 vor. Außerdem ergibt sich aus unseren obigen Überlegungen, daß  $\mathfrak{A}$  genau einen EW  $\neq 0$  besitzt und 0 ein EW von  $\mathfrak{A}$  mit der Vielfachheit 2 ist.

Wir beginnen mit der

1. Transformation:  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$ ,

wobei  $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ ,  $\mathfrak{b}_1$  ein normierter EV zum einzigen EW  $\neq 0$  und  $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$  orthonormierte EVen zum EW 0 sind, die außerdem noch  $\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_2 = 0$  und  $\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_3 \neq 0$  erfüllen.

Zwecks Berechnung von  $\mathfrak{B}$  haben wir zunächst die EWe von  $\mathfrak{A}$  zu bestimmen:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((2 - \lambda)^2 - 4) = -\lambda^2(-4 + \lambda) = 0$$

$$\implies \lambda_1 = 4 \wedge \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

(Dies folgt aber auch unmittelbar aus  $\text{rg } \mathfrak{A} = 1$  und mit Hilfe von Satz 8.2.8, (b).)

Die EVen zum EW 4 erhält man aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} : \quad \mathfrak{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

woraus sich

$$\mathfrak{b}_1 := (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Zwecks Ermittlung von  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  haben wir zunächst zwei LGS zu lösen. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \\ &\iff y_1 + y_2 = 0 \\ &\quad y_1 - y_2 + \sqrt{2} y_3 = 0 \\ &\iff \mathfrak{y} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \\ &\iff y_1 + y_2 + 0 \cdot y_3 = 0 \\ &\iff \mathfrak{y} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wählt man nun  $\mathfrak{a}_1 := (-1, 1, \sqrt{2})^T$  (als eine Lösung des ersten LGS) und  $\mathfrak{a}_2 := (0, 0, 1)^T$  (als eine Lösung des zweiten LGS, die keine Lösung des ersten LGS ist), so erhält man durch Anwenden des ONV auf die Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  (Reihenfolge einhalten!) die noch fehlenden Spalten  $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$  von  $\mathfrak{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_2 &:= \frac{1}{\|\mathfrak{a}_1\|} \cdot \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) \cdot \mathfrak{b}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{b}_3 &:= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathfrak{B}$  hat somit die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} b'_1 &:= \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_1 = 0 \text{ (Zufall!)}, \\ b'_2 &:= \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_2 = 0 \text{ (nach Konstruktion von } \mathfrak{B} \text{) sowie} \\ b'_3 &:= \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_3 = 2 (\neq 0 \text{ nach Konstruktion von } \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Die Gleichung  $(1B_4)$  geht damit durch die 1. Transformation über in die Gleichung

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot (0, 0, 2) \cdot \mathfrak{x}' = 0 \quad (4B_4)$$

bzw.

$$4 \cdot x'^2 + 4 \cdot z' = 0.$$

Die 2. Transformation erübrigts sich, da  $(4B_4)$  (bis auf einen gewissen Faktor) bereits in der gewünschten Normalform (II) vorliegt.

$T$  ist folglich ein sogenannter parabolischer Zylinder. Eine Skizze dieser Fläche im  $x', y', z'$ -Koordinatensystem kann man sich z.B. mit Hilfe der Abbildung eines parabolischen Zylinders von Seite 326 überlegen.

Die Lage der Fläche  $T$  im Ausgangskoordinatensystem ist dann aus der Transformationsformel  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$  ablesbar. Bekanntlich sind die Spalten von  $\mathfrak{B}$  gerade die Koordinaten der neuen Basisvektoren bez. der alten Basis des Koordinatensystems  $S$ . Außerdem ändert sich der Koordinatenursprung nicht.

**5. Beispiel** Seien  $n = 2$  und

$$T_5 : x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 2y - 7 = 0$$

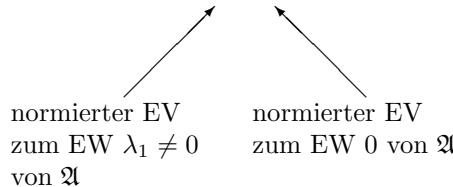
bzw.

$$T_5 : \mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot (1, 1) \cdot \mathfrak{x} - 7 = 0. \quad (1B_5)$$

Da  $r := \operatorname{rg} \mathfrak{A} = 1 < \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b}) = 2$  ist, liegt Fall 2 vor.

Um die 1. Transformation:  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$  mit

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$$



durchführen zu können, haben wir zunächst die EWe und die zugehörigen EVen von  $\mathfrak{A}$  zu berechnen.

EWe  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 5) = 0 \implies \lambda_1 = 5 \wedge \lambda_2 = 0.$$

EVen zum EW  $\lambda_1 = 5$  von  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \implies \mathfrak{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

EVen zum EW  $\lambda_2 = 0$  von  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} \implies \mathfrak{y} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Normieren der entsprechenden EVen liefert

$$\mathfrak{B} = (1/\sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(1B_5)$  geht folglich durch die 1. Transformation in

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot (b'_1, b'_2) \cdot \mathfrak{x}' - 7 = 0 \quad (4B_5)$$

über, wobei  $b'_1 = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_1 = 3/\sqrt{5}$  und  $b'_2 = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_2 = 1/\sqrt{5}$  ist.  
Durch die 2. Transformation  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}''$  mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \begin{pmatrix} -b'_1/\lambda_1 \\ (1/(2b'_2)) \cdot (b'_1)^2/\lambda_1 - c \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -0.268 \\ 8.229 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

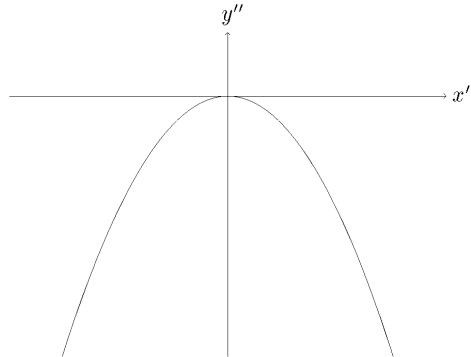
lässt sich  $(4B_5)$  in

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot (0, 1/\sqrt{5}) \cdot \mathfrak{x}'' = 0$$

bzw.

$$5x''^2 + (2/\sqrt{5}) \cdot y'' = 0$$

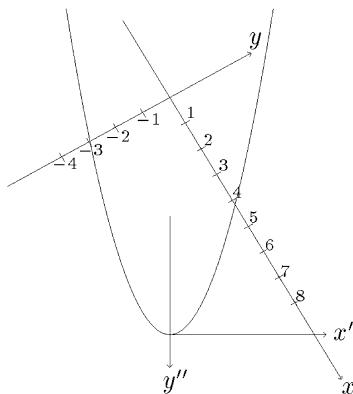
überführen, womit  $T$  eine Parabel ist, die im  $x'', y''$ -Koordinatensystem wie folgt skizzierbar ist:



Die Lage dieser Parabel im Ausgangskoordinatensystem erhält man, indem man die oben durchgeführten Koordinatentransformationen zusammenfaßt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{x}'') \\ &= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'' \\ &\approx \underbrace{\begin{pmatrix} 7.24 \\ -3.92 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten des neuen Koordinatenursprungs im Ausgangskoordinatensystem}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,45 & 0,9 \\ 0,9 & -0,45 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten der neuen Basisvektoren im Ausgangskoordinatensystem}} \cdot \mathfrak{x}'' \end{aligned}$$

Wir erhalten damit folgende Skizze der Kurve  $T_5$ :



Abschließend seien noch einmal die einzelnen Schritte der Hauptachsentransformation zusammengefaßt.

## Hauptachsentransformation (Zusammenfassung)

Seien  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische  $(n, n)$ -Matrix,  $\mathfrak{b}^T = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $S$  ein kartesisches Koordinatensystem des  $R_n$  und  $X^T / S = (x_1, \dots, x_n) =: \mathfrak{x}^T$ . Die Hyperfläche 2. Ordnung

$$T : \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x} + c = 0 \quad (1)$$

lässt sich durch maximal zwei Koordinatentransformationen mit orthogonalen Übergangsmatrizen (bzw. durch geeignete Wahl eines kartesischen Koordinatensystems  $S''$ ) in eine der folgenden Normalformen

$$\begin{aligned} (\text{Ia}) \quad & \alpha_1 x_1''^2 + \alpha_2 x_2''^2 + \dots + \alpha_n x_n''^2 = 0 \\ (\text{Ib}) \quad & \alpha_1 x_1''^2 + \alpha_2 x_2''^2 + \dots + \alpha_n x_n''^2 = 1 \\ (\text{II}) \quad & \alpha_1 x_1''^2 + \dots + \alpha_r x_r''^2 - 2x_n'' = 0 \quad (r < n) \end{aligned}$$

auf folgende Weise überführen:

**1. Fall:**  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b})$ .

**1. Transformation:**  $\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$ .

$\mathfrak{c}$  berechnet man aus  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b}$ . (1) geht dann über in

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + c' = 0, \quad (2)$$

wobei  $c' = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c$ .

**2. Transformation:**  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$ .

$\mathfrak{B}$  ist eine orthogonale Matrix, deren Spalten orthonormierte EVen zu den EWen von  $\mathfrak{A}$  sind. (2) geht durch diese 2. Transformation über in

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + c' = 0, \quad (3)$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die EWen von  $\mathfrak{A}$  sind. Für  $c' = 0$  liegt durch (3) eine Normalform des Typs (Ia) für  $T$  vor. Ist  $c' \neq 0$ , so liefert die Division durch  $-c'$  aus (3) eine Normalform des Typs (Ib).

**2. Fall:**  $\operatorname{rg} \mathfrak{A} =: r < \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, -\mathfrak{b})$ .

**1. Transformation:**  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$ .

$\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_{n-1}, \mathfrak{b}_n)$  und  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$  sind orthonormierte EVen zu den von 0 verschiedenen EWen von  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$  sind orthonormierte EVen zum EW 0 von  $\mathfrak{A}$ , die so gewählt sind, daß  $\mathfrak{b}^T \mathfrak{b}_{r+1} = \dots = \mathfrak{b}^T \mathfrak{b}_{r-1} = 0$  und  $\mathfrak{b}^T \mathfrak{b}_n \neq 0$  gilt, d.h.,  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$  erhält man durch Anwenden des E.-Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens auf gewisse Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-r}$ , wobei  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-r-1}$  linear unabhängige Lösungen von  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  sind und  $\mathfrak{a}_{n-r}$  eine Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ , aber keine von  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ist.

Man kann also nach folgendem Verfahren  $\mathfrak{B}$  berechnen:

- Ermittlung der  $n$  EWe von  $\mathfrak{A}$  (Vielfachheiten mitgezählt):

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\neq 0}, \quad \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}$$

- Zu den EWen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ermittle man  $r$  l.u. EVen und orthonormiere sie anschließend nach dem ONV. Man erhält  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$ .
- Lösen der LGS

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})^T \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} : \quad \mathfrak{y} = t_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + t_{n-r-1} \cdot \mathfrak{a}_{n-r-1}$$

und  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{o} : \quad \mathfrak{y} = s_1 \cdot \mathfrak{a}'_1 + \dots + s_{n-r} \cdot \mathfrak{a}'_{n-r}.$

Wahl der Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-r-1}, \mathfrak{a}'_i$  ( $i \in \{1, \dots, n-r\}$ ), wobei  $\mathfrak{a}'_i \notin [\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-r-1}\}]$  und anschließendes Orthonomieren (dabei unbedingt den Vektor  $\mathfrak{a}'_i$  als letzten Vektor beim ONV einsetzen!) liefert  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$ .

- (1) geht durch die Transformation  $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$  über in

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \mathfrak{b}'^T \cdot \mathfrak{x}' + c = 0, \quad (4)$$

wobei

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{b}'^T = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0, b'_n)$  und  $b'_i = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_i$  für  $i \in \{1, \dots, r, n\}$ .

## 2. Transformation: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}''$ .

$\mathfrak{c}$  berechnet man aus

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b}' = (0, \dots, 0, b'_n)^T \text{ und } \mathfrak{c}^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{c} + 2 \cdot \mathfrak{b}'^T \cdot \mathfrak{c} + c = 0.$$

Z.B. kann man folgendes  $\mathfrak{c}$  wählen:

$$(-b'_1/\lambda_1, \dots, -b'_r/\lambda_r, 0, \dots, 0, (b'_1{}^2/\lambda_1 + \dots + b'_r{}^2/\lambda_r - c)/(2b'_n))^T.$$

- (4) geht durch die 2. Transformation über in

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot (0, \dots, 0, b'_n) \cdot \mathfrak{x}'' = 0. \quad (5)$$

Division durch  $-b'_n$  ergibt aus (5) eine Normalform des Typs (II).

### 9.3 Klassifikation der Kurven 2. Ordnung

Zwecks Klärung der Frage, welche geometrischen Gebilde durch Gleichungen der Form (1) (siehe S. 299) in der Ebene beschrieben werden, haben wir nach Satz 9.1.1 (S. 299) nur folgende drei Gleichungen zu untersuchen:

$$\begin{array}{ll} (\text{Ia}) & \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 = 0 \\ (\text{Ib}) & \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 = 1 \\ (\text{II}) & \alpha \cdot x^2 - 2 \cdot y = 0. \end{array}$$

Die nachfolgende Tabelle gibt mögliche Vorzeichenverteilungen für  $\alpha$  und  $\beta$  an, die wiederum den Typ der durch die oben stehenden Gleichungen beschriebenen Kurven  $T$  bestimmen. Weggelassen wurden dabei Vorzeichenverteilungen, die sich durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  bzw. durch Multiplikation der obigen Gleichungen mit  $-1$  auf die in der Tabelle bereits behandelten Fälle zurückführen lassen. Die mit Ellipse und Hyperbel bezeichneten Kurven 2. Ordnung werden anschließend noch durch gewisse geometrischen Eigenschaften definiert, und dann wird gezeigt, daß die so eingeführten Punktmengen als charakterisierende Gleichungen die in der Tabelle angegebenen besitzen, wenn sich die Kurven in sogenannten Mittelpunktslagen befinden.

Normalform $N$	$\alpha$	$\beta$	durch $N$ beschriebene Punktmenge $\subseteq \Re_2$
(Ia)	0	0	$x, y$ -Ebene
	0	+	Gerade $y = 0$
	+	+	Punkt $(0, 0)$
	+	-	Geradenpaar $y = \pm( \alpha/\beta ) \cdot x$
(Ib)	0	+	Doppelgerade $y = \pm 1/\beta$
	0	-	$\emptyset$ („imaginäres Gebilde“)
	+	+	Ellipse
	+	-	Hyperbel
	-	-	$\emptyset$ („imaginäres Gebilde“)
(II)	0	0	Gerade $y = 0$
	+	0	Parabel

Folglich gilt:

**Satz 9.3.1** Durch Gleichungen der Form  $\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{x} + c = 0$  werden im  $\Re_2$  folgende Punktmengen bzw. geometrische Gebilde beschrieben:

$\emptyset$ , Punkt, Gerade, zwei parallele Geraden, zwei sich schneidende Geraden sowie die sogenannten **nichtausgearteten Kegelschnitte**:

Ellipse (mit Kreis als Spezialfall), Hyperbel, Parabel. ■

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes läßt sich leicht feststellen, um welche Gebilde es sich bei einer vorgegebener Gleichung für eine Kurve 2. Ordnung handelt:

**Satz 9.3.2** Die Kurve  $T$  mit  $\emptyset \neq T \subseteq \Re^2$ , die durch die Gleichung

$$T : ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

beschrieben wird, ist genau dann ein nichtausgearteter Kegelschnitt, wenn

$$\begin{vmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{vmatrix} \neq 0$$

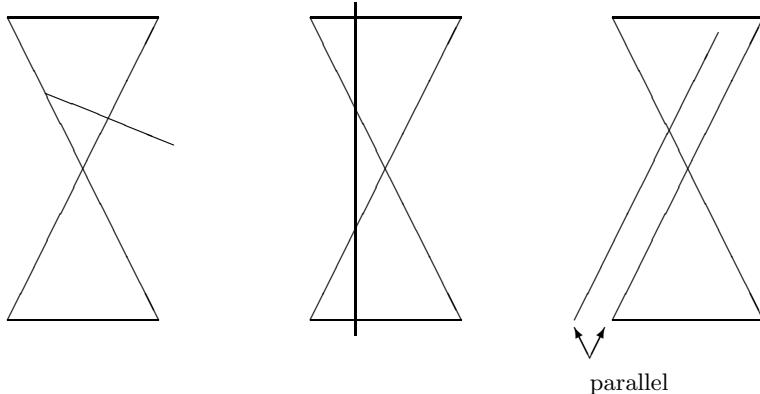
gilt. Und zwar handelt es um eine

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ c = 0 \end{array} \right. \\ \text{Parabel} & \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ c < 0 \end{array} \right. \\ \text{Hyperbel} & \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ c < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

*Beweis.* ÜA. ■

Mit den nichtausgearteten Kegelschnitten wollen wir uns jetzt noch etwas näher beschäftigen. Der Name Kegelschnitt röhrt von folgenden Eigenschaften eines doppelten Kreiskegels her:

Schneidet man einen doppelten Kreiskegel mit einer Ebene auf die unten angegebenen drei verschiedenen Arten:



entstehen als Schnittkurven gerade

Ellipse

Hyperbel

Parabel.

Präzisierungen obiger Konstruktionen kann man natürlich auch zur Definition der nichtausgearteten Kegelschnitte heranziehen, wie es übrigens bereits in der Antike geschah. Wir gehen hier jedoch einen anderen Weg, indem wir andere geometrische Eigenschaften zur Definition der (nichtausgearteten Kegelschnitte) Ellipse bzw. Hyperbel benutzen und anschließend aus diesen Eigenschaften Gleichungen ableiten werden, die diese vollständig charakterisieren.

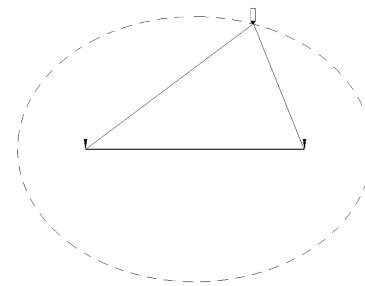
**Definition** Die **Ellipse** ist der geometrische Ort (bzw. die Menge) aller Punkte  $X \in \Re^2$ , die von zwei festen Punkten  $F_1, F_2$  ( $\varrho(F_1, F_2) := |F_1 - F_2| = 2 \cdot e, e \geq 0$ ) die konstante Abstandssumme

$$\varrho(X, F_1) + \varrho(X, F_2) := |X - F_1| + |X - F_2| = 2 \cdot a$$

( $a > 0$ ) haben.<sup>1</sup>

Diese Definition einer Ellipse für  $e > 0$  liefert sofort folgende „**Gärtnerkonstruktion**“:

Man fixiere durch zwei Stäbe die Punkte  $F_1, F_2$ , nehme ein verknotetes Band der Länge  $2a + 2e$  und ziehe mit Hilfe eines weiteren Stabes (wie unten angegeben) die Ellipsenkurve:



Die aus der oben angegebenen Definition einer Ellipse  $E$  folgende beschreibende Gleichung

$$|X - F_1| + |X - F_2| = 2a$$

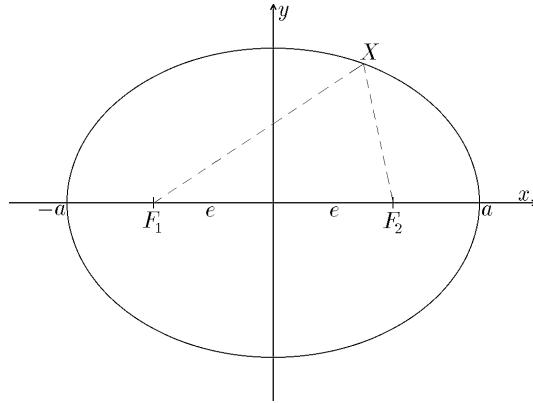
ist für konkrete Rechnungen nicht allzu „handlich“. Wir zeigen deshalb zunächst, daß eine Ellipse in „Mittelpunktslage“ durch eine Gleichung der Art  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  beschreibbar ist, und leiten anschließend noch eine Parameterdarstellung der Ellipse her.

**Satz 9.3.3** Seien  $a > e \geq 0$ ,  $b := \sqrt{a^2 - e^2}$  und  $F_1, F_2 \in \Re^2$  mit  $F_1/S = (-e, 0)^T$ ,  $F_2/S = (0, e)^T$  ( $S$ : kartesisches Koordinatensystem des  $\Re^2$ ) und  $|F_1 - F_2| = 2e$ . Dann gilt für alle  $X \in \Re^2$  mit  $X/S = (x, y)^T$ :

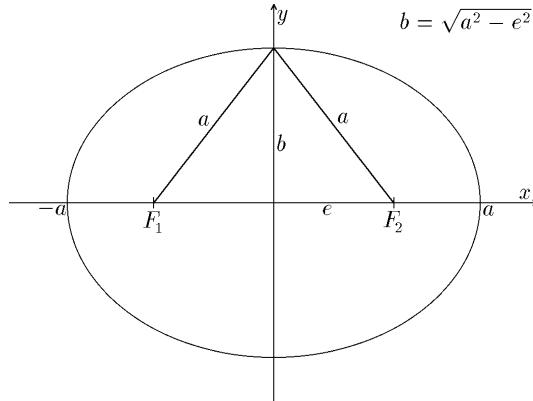
$$X \in E : \iff |X - F_1| + |X - F_2| = 2a \iff x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

---

<sup>1</sup> Für  $e = 0$  ist die Ellipse ein Kreis.



*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $|X - F_1| + |X - F_2| = 2a$ . Wegen  $a > e$  gilt  $a^2 - e^2 > 0$ , womit  $b := \sqrt{a^2 - e^2}$  festlegbar ist. Geometrisch lässt sich  $b$  wie folgt deuten:



Aus den oben vereinbarten Koordinaten von  $X$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  und der Voraussetzung  $|X - F_1| + |X - F_2| = 2a$  ergibt sich nun

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x-e)^2}.$$

Quadriert man diese Gleichung, so erhält man

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{y^2 + (x-e)^2} + y^2 + (x-e)^2$$

sowie (nach einigen Zusammenfassungen)

$$4xe - 4a^2 = -4a \cdot \sqrt{y^2 + (x-e)^2} \text{ bzw. } a^2 - xe = a \cdot \sqrt{y^2 + (x-e)^2}.$$

Erneutes Quadrieren liefert die Gleichung  $(a^2 - xe)^2 = a^2(y^2 + (x-e)^2)$ , die sich wie folgt zusammenfassen lässt:

$$a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2,$$

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2 - e^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 + a^2 \cdot (e^2 - a^2) \\ &= b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2. \end{aligned}$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch  $a^2 \cdot b^2$ , so erhält man  $0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$ , w.z.b.w.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $X \in \Re^2$  ein Punkt, für dessen Koordinaten  $x, y$  (bez. des kartesischen Koordinatensystems  $S := (A; i, j)$ )  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  gilt. Folgende Gleichungen prüft man leicht nach:

$$\begin{aligned} |X - F_1| &= \sqrt{(x + e)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2xe + e^2 + b^2 - (b^2/a^2) \cdot x^2} \\ &\quad (\text{da } y^2 = b^2(1 - (x^2/a^2))) \\ &= \sqrt{x^2 + 2xe + e^2 + a^2 - e^2 - x^2 + (e^2/a^2)x^2} \\ &\quad (\text{wegen } b^2 = a^2 - e^2) \\ &= \sqrt{2xe + a^2 + (e^2/a^2) \cdot x^2} \\ &= \sqrt{(a + (e/a) \cdot x)^2} \\ &= |a + (e/a) \cdot x|. \end{aligned}$$

Analog rechnet man nach, daß

$$|X - F_2| = |a - (e/a) \cdot x|$$

gilt. Wegen  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  ist  $|x| \leq a$ . Hieraus und aus der Voraussetzung  $e < a$  läßt sich nun schlußfolgern, daß  $a + (e/a)x \geq 0$  sowie  $a - (e/a)x \geq 0$ , womit  $|X - F_1| + |X - F_2| = 2a$  gilt. ■

Eine weitere Möglichkeit der Charakterisierung einer Ellipse gibt das folgende Lemma an.

**Lemma 9.3.4** Für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \iff \exists \varphi \in [0, 2\pi) : x = a \cdot \cos \varphi \quad \wedge \quad y = b \cdot \sin \varphi.$$

(Mit anderen Worten:

Eine Ellipse  $E : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  läßt sich auch durch

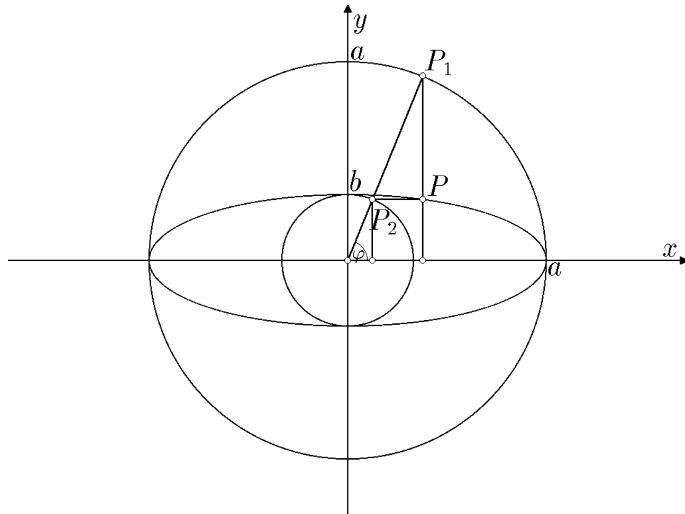
$$E : \begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

(**Parameterdarstellung von E**)

beschreiben, d.h., man erhält alle Punkte einer Ellipse, wenn man  $\varphi$  alle reellen Zahlen aus  $[0, 2 \cdot \pi)$  durchlaufen läßt.)

Beweis. ÜA. ■

Geometrisch läßt sich der Parameter  $\varphi$  aus obigem Lemma wie folgt deuten:



Sei o.B.d.A.  $a > b$ . Zeichnet man nun um den Koordinatenursprung  $A$  einen Kreis mit dem Radius  $a$  und einen Kreis mit dem Radius  $b$ , so schneidet ein von  $A$  ausgehender Strahl, der mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  bildet, den Kreis mit dem Radius  $a$  im Punkt  $P_1$  und den anderen im Punkt  $P_2$ . Der Schnittpunkt der Parallelen zur  $y$ -Achse durch  $P_1$  mit der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $P_2$  ist dann ein Punkt  $P$  der Ellipse mit den Koordinaten  $x = a \cdot \cos \varphi$  sowie  $y = b \cdot \sin \varphi$ .

Aus der oben angegebenen Eigenschaft der Ellipse ist übrigens ein einfaches Verfahren zur Konstruktion von Ellipsenpunkten mit Zirkel und Lineal ablesbar.

**Definition** Die **Hyperbel**  $H$  ist die Menge aller Punkte  $X \in \Re^2$ , für die die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten  $F_1, F_2$  ( $|F_1 - F_2| = 2e$ ,  $e > 0$ ) den festen Betrag  $2a$  ( $a < e$ ) hat.

Es gilt also

$$X \in H : \iff | |X - F_1| - |X - F_2| | = 2a.$$

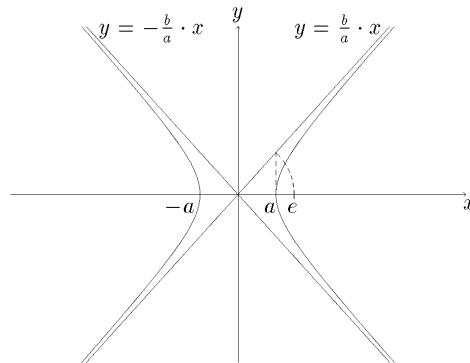
Analog zum Beweis von Satz 9.3.3 lässt sich der folgende Satz beweisen (ÜA A.9.9).

**Satz 9.3.5** Seien  $e > a > 0$ ,  $b := \sqrt{e^2 - a^2}$ ,  $F_{1/S} := (-e, 0)^T$ ,  $F_{2/S} := (e, 0)^T$ . Dann gilt für beliebige  $X \in \Re^2$  mit  $X_S := (x, y)^T$ :

$$X \in H \iff | |X - F_1| - |X - F_2| | = 2a \iff x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

■

Skizzieren läßt sich eine Hyperbel wie folgt:



Dabei sind die Geraden  $y = (b/a) \cdot x$  bzw.  $y = -(b/a) \cdot x$  die sogenannten **Asymptoten** der Hyperbel (also Geraden, denen sich die Hyperbelbögen für  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$  beliebig annähern).

Der Kurvenverlauf läßt sich z.B. auf folgende Weise begründen:

Geht man vom Koordinatensystem  $S := (A; i, j)$  zum Koordinatensystem  $S' := (A; a \cdot i + b \cdot j, a \cdot i - b \cdot j)$  über (d.h., man wählt die Asymptoten als neue Koordinatenachsen), so besteht zwischen den Koordinaten bez.  $S$  und denen bez.  $S'$  folgender Zusammenhang:

$$X/S = \begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \cdot X/S'$$

bzw., falls  $X/S = (x, y)^T$  und  $X'/S = (x', y')^T$ ,

$$\begin{aligned} x &= a \cdot (x' + y') \\ y &= b \cdot (x' - y'). \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem  $S'$  lautet damit die Gleichung der Hyperbel  $H$

$$(x' + y')^2 - (x' - y')^2 = 1$$

bzw.

$$4 \cdot x' \cdot y' = 1.$$

Da diese Gleichung nur für  $x' \neq 0$  erfüllt sein kann, charakterisiert die Gleichung

$$y' = 1/(4 \cdot x')$$

ebenfalls die Hyperbel  $H$  im Koordinatensystem  $S'$ . Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann der oben skizzierte Kurvenverlauf.

Es sei noch bemerkt, daß sich mit Hilfe der **Hyperbelfunktionen**

$$\cosh x := (1/2) \cdot (e^x + e^{-x}), \quad \sinh x := (1/2) \cdot (e^x - e^{-x})$$

(Lies: cosinus hyperbolicus bzw. sinus hyperbolicus) auch eine Parameterdarstellung für  $H$  einführen lässt. Es gilt nämlich (siehe dazu z.B. [Bre-B 66]):

$$\begin{aligned} x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 &\iff \exists t \in \mathbb{R} : x = a \cdot \cosh t \wedge \\ &\quad y = b \cdot \sinh t. \end{aligned}$$

## 9.4 Klassifikation der Flächen 2. Ordnung

Nach Satz 9.1.1 kann man sich bei der Beantwortung der Frage, welche geometrischen Gebilde des  $\mathfrak{R}_3$  durch die Gleichung (1) (S. 299) beschrieben werden können, auf die Untersuchung folgender Gleichungen beschränken:

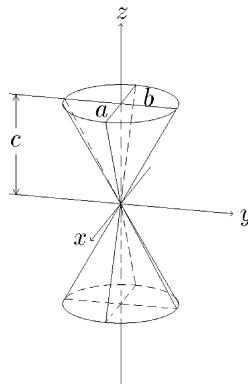
$$\begin{array}{ll} (\text{Ia}) & \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot z^2 = 0 \\ (\text{Ib}) & \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot z^2 = 1 \\ (\text{II}) & \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 - 2 \cdot z = 0. \end{array}$$

O.B.d.A. genügt es (wie im Abschnitt 9.3), nur die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Vorzeichenverteilungen zu untersuchen. Die nicht angegebenen Fälle sind trivial oder lassen sich durch Vertauschen der Variablen oder durch Multiplikation der Gleichungen mit  $-1$  auf die in der Tabelle behandelten Fälle zurückführen.

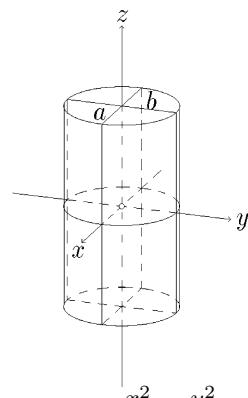
Der besseren Übersicht wegen sind in der Tabelle – neben den Vorzeichenverteilungen – nur noch die allgemein üblichen Bezeichnungen der zugehörigen Flächen angegeben. Skizzen der Flächen findet man ab Seite 324.

Normalform $N$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	durch $N$ beschriebene Punktmenge $\subseteq \mathfrak{R}_3$
(Ia)	+	0	0	Ebene
	+	–	0	zwei sich schneidende Ebenen
	+	+	0	Gerade
	+	+	+	Punkt
	+	+	–	Kegel
(Ib)	+	0	0	Doppelebene
	–	0	0	$\emptyset$ („imaginäres Gebilde“)
	+	+	0	elliptischer Zylinder
	+	–	0	hyperbolischer Zylinder
	–	–	0	$\emptyset$ („imaginäres Gebilde“)
	+	+	+	Ellipsoid
	+	+	–	einschaliges Hyperboloid
	+	–	–	zweischaliges Hyperboloid
	–	–	–	$\emptyset$ („imaginäres Gebilde“)
(II)	+	0	0	parabolischer Zylinder
	+	+	0	elliptisches Paraboloid
	+	–	0	hyperbolisches Paraboloid

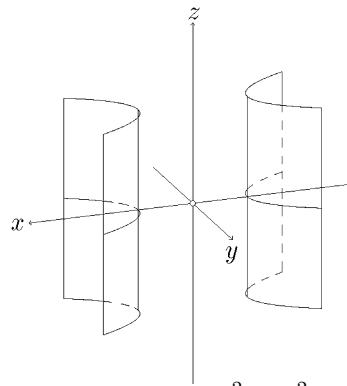
Eine geometrische Vorstellung von den oben durch Gleichungen definierte Flächen erhält man durch Schneiden dieser Flächen mit gewissen Ebenen, die parallel zu zwei Achsen verlaufen. Die Punkte einer solchen Schnittkurve sind dann durch eine gewisse Gleichung charakterisierbar, die aus der vorgegebenen Gleichung der Fläche 2. Ordnung durch Ersetzen einer Variablen durch eine gewisse Konstante entstehen, womit die Schnittkurve offenbar eine Kurve 2. Ordnung ist. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 9.3 lassen sich damit die folgenden Skizzen von (nichtausgearteten) Flächen 2. Ordnung verifizieren:



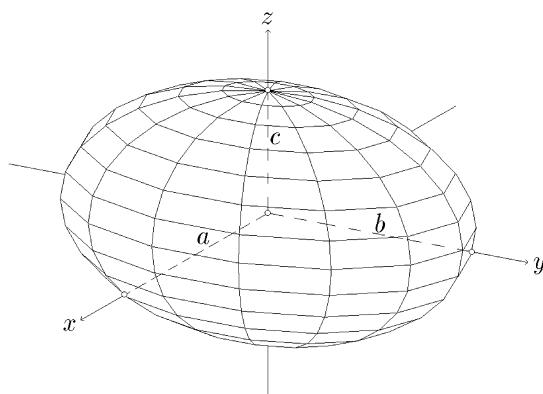
$$\text{Kegel: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



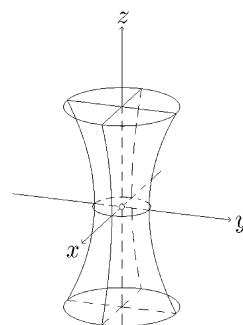
$$\text{elliptischer Zylinder: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



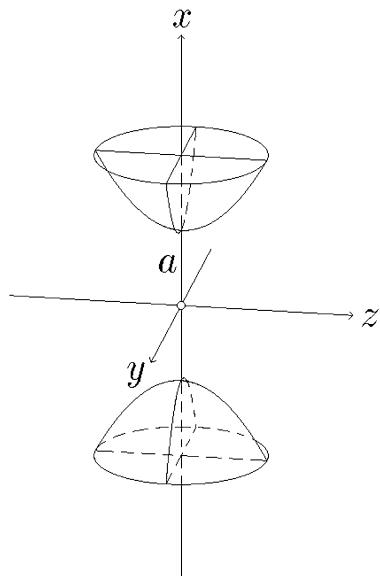
$$\text{hyperbolischer Zylinder: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



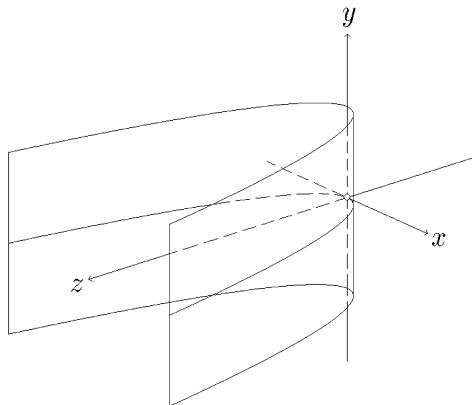
$$\text{Ellipsoid: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



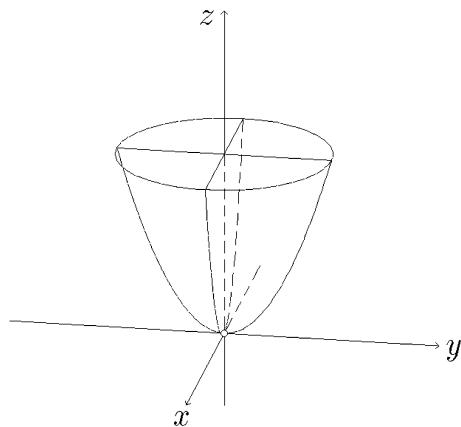
$$\text{einschaliges Hyperboloid: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



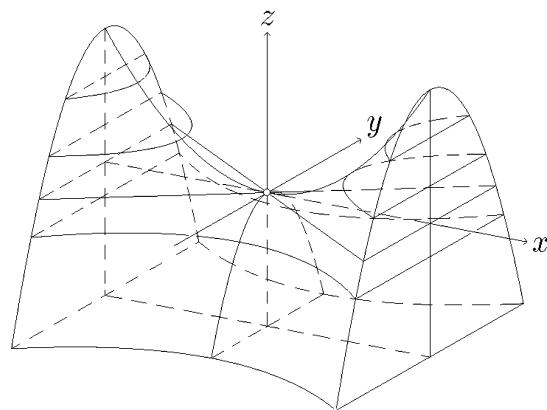
zweischaliges Hyperboloid:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



parabolischer Zylinder:  $\frac{x^2}{a^2} - 2 \cdot z = 0$



$$\text{elliptisches Paraboloid: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \cdot z = 0$$



$$\text{hyperbolisches Paraboloid: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2 \cdot z = 0$$

## Lineare Abbildungen

Nachfolgend sollen die homomorphen Abbildungen zwischen Vektorräumen über dem Körper  $K$  – die *linearen Abbildungen* – studiert werden. Nach einem Abschnitt über allgemeine Eigenschaften von linearen Abbildungen geht es in den folgenden Abschnitten vorrangig um lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , auf denen Skalarprodukte definiert sind. Es werden der Begriff der zu einer linearen Abbildung *adjungierten Abbildung* eingeführt und dann einige grundlegende Eigenschaften von *normalen, selbstadjungierten, antiselbstadjungierten und orthogonalen* (bzw. *unitären*) Abbildungen hergeleitet. Ziel dieser Abschnitte ist es, ein gewisses Grundwissen über die genannten Abbildungen zu vermitteln, da diese Abbildungen in mehreren Gebieten der Mathematik ihre Anwendung finden.

Für einige Typen von linearen Abbildungen werden wir uns anschließend *Normalformen*, d.h. gewisse Möglichkeiten der einfachen Beschreibung der behandelten linearen Abbildungen überlegen.

Im letzten Abschnitt bilden wir dann gewisse Gruppen  $\mathbf{G} := (G; \square)$  aus linearen Abbildungen  $f : V \longrightarrow V$  und führen den Begriff der *Invarianten* einer solchen Gruppe ein. In Kapitel 11 werden wir sehen, daß mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 10.7 Aussagen über Punkträume klassifiziert beziehungsweise geordnet werden können.

### 10.1 Allgemeines über lineare Abbildungen

Wir verallgemeinern den Begriff der isomorphen Abbildung zwischen Vektorräumen aus Abschnitt 4.6.

**Definition** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $f$  von  $V$  in  $W$  heißt **lineare Abbildung** (oder **homomorphe Abbildung**), wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K : f(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) = \lambda \cdot f(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f(\mathfrak{b}). \quad (10.1)$$

Wir bemerken, daß die Bedingung

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V \forall \lambda \in K : f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}) \wedge f(\lambda \cdot \mathfrak{a}) = \lambda \cdot f(\mathfrak{a}) \quad (10.2)$$

zu (10.1) äquivalent ist, d.h.,  $f : V \rightarrow W$  ist genau dann eine lineare Abbildung, wenn sie mit  $+$  und  $\cdot$  verträglich ist.

### Beispiele

(1.) Offenbar ist  $f_1 : V \rightarrow \{\mathfrak{o}\}$ ,  $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{o}$  eine lineare Abbildung.

(2.) Bezeichne  $C[a, b]$  den Vektorraum aller stetigen Funktionen über dem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ <sup>1</sup>. Dann ist die Abbildung

$$f_2 : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) \mapsto \int_a^b g(x) dx$$

linear, da für beliebige  $g_1, g_2 \in C[a, b]$  und beliebige  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} f_2(\lambda \cdot g_1(x) + \mu \cdot g_2(x)) &= \int_a^b (\lambda \cdot g_1(x) + \mu \cdot g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b \lambda \cdot g_1(x) dx + \int_a^b \mu \cdot g_2(x) dx \\ &= \lambda \cdot \int_a^b g_1(x) dx + \mu \cdot \int_a^b g_2(x) dx \\ &= \lambda \cdot f_2(g_1(x)) + \mu \cdot f_2(g_2(x)). \end{aligned}$$

(3.) Bezeichne  $D(a, b)$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen über dem offenen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Da jede Linearkombination von solchen Funktionen aus  $D(a, b)$  bekanntlich wieder beliebig oft differenzierbar ist, ist  $D(a, b)$  ein Untervektorraum des Vektorraums  $C(a, b)$  aller (auf dem Intervall  $(a, b)$  definierten) stetigen Funktionen über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Betrachtet man nun die Abbildung

$$f_3 : D(a, b) \longrightarrow D(a, b), y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y^{(1)} + a_0 \cdot y, \quad (10.3)$$

wobei  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  und  $y^{(i)}$  die  $i$ -te Ableitung der Funktion  $y$  bezeichnet ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), so prüft man leicht nach, daß

$$\forall y_1, y_2 \in D(a, b) \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : f_3(\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2) = \alpha_1 \cdot f_3(y_1) + \alpha_2 \cdot f_3(y_2)$$

gilt. Also ist  $f_3$  eine lineare Abbildung.

(4.) Es sei  $K$  ein beliebiger Körper und  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Dann ist

$$f_4 : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$$

linear, da für alle  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in K^{n \times 1}$  und  $\lambda, \mu \in K$

---

<sup>1</sup> Siehe Abschnitt 4.1, Beispiel (3.).

$$\begin{aligned}
f_4(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) &= \mathfrak{A} \cdot (\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) \\
&= \mathfrak{A} \cdot (\lambda \cdot \mathfrak{a}) + \mathfrak{A} \cdot (\mu \cdot \mathfrak{b}) \\
&= \lambda \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} \\
&= \lambda \cdot f_4(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f_4(\mathfrak{b})
\end{aligned}$$

gilt. Keine lineare Abbildung wird durch

$$f_5 : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

definiert, falls  $\mathfrak{b} \in K^{m \times 1} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ .

**(5.)** Sind  $U$ ,  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$  sowie  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen, so ist  $f \square g$  eine lineare Abbildung von  $U$  in  $W$ , da für beliebige  $\lambda, \mu \in K$  und beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$  gilt:

$$\begin{aligned}
(f \square g)(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) &= g(f(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b})) = g(\lambda \cdot f(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f(\mathfrak{b})) = \\
&\lambda \cdot g(f(\mathfrak{a})) + \mu \cdot g(f(\mathfrak{b})) = \lambda \cdot (f \square g)(\mathfrak{a}) + \mu \cdot (f \square g)(\mathfrak{b}).
\end{aligned}$$

**(6.)** Falls die lineare Abbildung  $f : {}_K V \rightarrow {}_K W$  eine bijektive Abbildung ist, existiert bekanntlich die inverse Abbildung  $f^{-1} : {}_K W \rightarrow {}_K V$ . Diese inverse Abbildung ist dann ebenfalls linear, da sich aus der Annahme  $f^{-1}(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) \neq \lambda \cdot f^{-1}(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f^{-1}(\mathfrak{b})$  für gewisse  $\lambda, \mu \in K$  und  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in W$  wegen der Bijektivität von  $f^{-1}$  die Ungleichung  $\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b} \neq f(\lambda \cdot f^{-1}(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f^{-1}(\mathfrak{b}))$  ergibt, die wegen der Linearität von  $f$  nicht gelten kann.

**Satz 10.1.1** Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist

$$f(V) := \{\mathfrak{y} \mid \exists \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}\},$$

der Wertebereich der Abbildung  $f$ , ein Untervektorraum von  $W$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $f(V) \neq \emptyset$ . Nach Satz 4.2.1 bleibt damit zu zeigen, daß  $f(V)$  bez.  $+$  und  $\cdot$  abgeschlossen ist. Seien dazu  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in f(V)$  und  $\lambda, \mu \in K$  beliebig gewählt. Dann gibt es  $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}' \in V$  mit  $f(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$  und  $f(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}$ . Folglich haben wir  $\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b} = \lambda \cdot f(\mathfrak{a}') + \mu \cdot f(\mathfrak{b}') = f(\lambda \cdot \mathfrak{a}' + \mu \cdot \mathfrak{b}') \in V(f)$ . ■

**Satz 10.1.2** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Seien außerdem  $B := \{\mathfrak{b}_i \mid i \in I\}$  eine Basis von  $V$  und  $A := \{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$  eine Teilmenge von  $W$ . Dann gilt:

- (a) Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist vollständig durch die Angabe von  $f(B) := \{f(\mathfrak{b}_i) \mid i \in I\}$  bestimmt.
- (b) Es gibt genau eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{a}_i$  für alle  $i \in I$ . Diese Abbildung läßt sich wie folgt mit Hilfe der Basis  $B$  definieren:

$$\mathfrak{x} \in V \implies$$

$$\exists \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n \in B \exists x_1, \dots, x_n \in K :$$

$$f(\mathfrak{x}) = f(x_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{b}_n) = x_1 \cdot f(\mathfrak{b}_1) + \dots + x_n \cdot f(\mathfrak{b}_n)$$

$$= x_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{a}_n.$$

*Beweis.* Die Behauptungen folgen unmittelbar aus unseren Sätzen des Kapitels 4 über Basen eines Vektorraums und der Definition einer linearen Abbildung. ■

**Satz 10.1.3** Sei  $f$  eine lineare Abbildung von  $K^{n \times 1}$  in  $K^{m \times 1}$ . Dann existiert eine Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$  mit

$$\forall \mathfrak{x} \in K^{n \times 1} : f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}. \quad (10.4)$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in V$ . Als Basis  $B$  von  $V$  wählen wir die Standardbasis  $\mathfrak{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \mathfrak{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ . Außerdem sei  $f(\mathfrak{e}_j) := (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T, j = 1, 2, \dots, n$ . Dann gilt nach Satz 10.1.2

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{x}) &= f(x_1 \cdot \mathfrak{e}_1 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{e}_n) \\ &= x_1 \cdot f(\mathfrak{e}_1) + \dots + x_n \cdot f(\mathfrak{e}_n) \\ &= (f(\mathfrak{e}_1) \ f(\mathfrak{e}_2) \ \dots \ f(\mathfrak{e}_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der obige Satz lässt sich noch etwas verallgemeinern:

**Satz 10.1.4** Sei  $f$  eine lineare Abbildung von  $KV_n$  in  $KW_m$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Außerdem bezeichne  $B_V := (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis für  $V$  und  $B_W$  eine Basis für  $W$ . Dann existiert eine Matrix  $\mathfrak{A}_f \in K^{m \times n}$  (**Abbildungsmatrix** genannt) mit

$$\mathfrak{A}_f := (f(\mathfrak{b}_1)/B_W, f(\mathfrak{b}_2)/B_W, \dots, f(\mathfrak{b}_n)/B_W) \quad (10.5)$$

und

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})/B_W = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B_V. \quad (10.6)$$

(Anstelle von  $\mathfrak{A}_f$  wird auch  $\mathfrak{A}_f(B_V, B_W)$  geschrieben, um die Abhängigkeit der Matrix  $\mathfrak{A}_f$  von den gewählten Basen  $B_V$  und  $B_W$  anzugeben.)

*Beweis.* Indem man von einer Darstellung  $\mathfrak{x} = x_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \dots + x_n \mathfrak{b}_n$  für ein beliebiges  $\mathfrak{x} \in V$  ausgeht und von der Gleichung  $f(\mathfrak{x}) = x_1 \cdot f(\mathfrak{b}_1) + \dots + x_n \cdot f(\mathfrak{b}_n)$  die Koordinatendarstellung bezüglich der Basis  $B_W$  betrachtet, kann man

diesen Satz analog zu Satz 10.1.3 beweisen (ÜA). ■

Zur Illustration von Satz 10.1.4 noch ein **Beispiel**:

Sei  $V$  der Vektorraum aller Polynome, die höchstens den Grad  $n$  haben, mit Koeffizienten aus  $\mathbb{R}$  über dem Körper  $\mathbb{R}$ :

$$V := \mathfrak{P}_n = \{p_n \mid \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0\}.$$

Als lineare Abbildung von  $V$  in  $V$  wählen wir

$$f(p_n)(x) := \left( \frac{dp_n}{dx} \right) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1. \quad (10.7)$$

Indem wir  $B_V = B_W = (x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$  setzen und  $f(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ , ...,  $f(x) = 1$ ,  $f(1) = 0$  berücksichtigen, erhalten wir für  $\mathfrak{A}_f$  aus Satz 10.1.4 die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist nach Satz 10.1.1  $f(V)$  ein Vektorraum. Folglich können wir den folgenden Begriff einführen:

**Definition** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Die Dimension von  $f(V)$  heißt der **Rang** von  $f$  und sie wird mit

$$\operatorname{rg} f$$

abgekürzt.

**Satz 10.1.5** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, die die Voraussetzungen aus Satz 10.1.4 erfüllt. Dann gilt

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \mathfrak{A}_f. \quad (10.8)$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $B_V = (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis für  $V$ , womit nach Satz 10.1.2  $f(V) = [\{f(\mathfrak{b}_1), \dots, f(\mathfrak{b}_n)\}]$  gilt. Folglich ist  $\operatorname{rg} f = \dim f(V)$  gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Vektoren  $f(\mathfrak{b}_1), \dots, f(\mathfrak{b}_n)$ . Wegen Satz 4.7.1, (b) stimmt diese Maximalzahl mit dem Rang der Matrix  $\mathfrak{A}_f = (f(\mathfrak{b}_1)/B_W, \dots, f(\mathfrak{b}_n)/B_W)$  überein. Also gilt (10.8). ■

**Satz 10.1.6** Sei  $f : V_n \rightarrow W_m$  die durch

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})/B_W = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B_V \quad (10.9)$$

definierte lineare Abbildung, wobei  $B_V$  eine Basis des Vektorraums  $V$  und  $B_W$  eine Basis des Vektorraums  $W$  ist. Wählt man die neuen Basen  $B'_V$  bzw.  $B'_W$  für  $V$  bzw.  $W$ , so lässt sich  $f$  mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}'_f := \mathfrak{M}^{-1}(B_W, B'_W) \cdot \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{M}(B_V, B'_V) \quad (10.10)$$

auch wie folgt beschreiben:

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})/B'_W = \mathfrak{A}'_f \cdot \mathfrak{x}/B'_V. \quad (10.11)$$

*Beweis.* Nach Satz 4.7.2 existieren die sogenannten Übergangsmatrizen  $\mathfrak{M}(B_V, B'_V)$  und  $\mathfrak{M}(B_W, B'_W)$  mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{x}/B_V = \mathfrak{M}(B_V, B'_V) \cdot \mathfrak{x}/B'_V, \quad f(\mathfrak{x})/B_W = \mathfrak{M}(B_W, B'_W) \cdot f(\mathfrak{x})/B'_W.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man aus (10.9) die Gleichung

$$\mathfrak{M}(B_W, B'_W) \cdot f(\mathfrak{x})/B'_W = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{M}(B_V, B'_V) \cdot \mathfrak{x}/B'_V,$$

aus der sich die Behauptung (10.11) ergibt. ■

**Definition** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann heißt die Menge

$$\text{Ker } f := \{\mathfrak{a} \mid f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}\} \quad (10.12)$$

**Kern** von  $f$ .

**Beispiel** Sei  $f$  die durch

$$\forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : f(\mathfrak{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} \quad (10.13)$$

definierte Abbildung von  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  in  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Dann gilt

$$\text{Ker } f = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Satz 10.1.7** Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  über  $K$  ist  $\text{Ker } f$  ein Untervektorraum von  $V$ .

*Beweis.* Wegen

$$f(\mathfrak{o}) = f(\mathfrak{a} - a) = f(\mathfrak{a}) - f(a) = \mathfrak{o}$$

ist  $\mathfrak{o} \in \text{Ker } f$  und damit  $\text{Ker } f \neq \emptyset$ .

Seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$  und  $\lambda, \mu \in K$ . Dann gilt

$$f(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) = f(\lambda \cdot \mathfrak{a}) + f(\mu \cdot \mathfrak{b}) = \underbrace{\lambda \cdot f(\mathfrak{a})}_{=\mathfrak{o}} + \underbrace{\mu \cdot f(\mathfrak{b})}_{=\mathfrak{o}} = \mathfrak{o},$$

d.h.,  $\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b} \in \text{Ker } f$ . Nach Satz 4.2.1 ist  $\text{Ker } f$  folglich ein Untervektorraum von  $V$ . ■

Wegen Satz 10.1.7 lässt sich folgender Begriff einführen.

**Definition** Für endlich-dimensionale Vektorräume  $V$  und einer beliebigen linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt

$$\text{def } f := \dim (\text{Ker } f)$$

der **Defekt** von  $f$ .

**Beispiel** Für die lineare Abbildung (10.13) haben wir  $\text{def } f = 1$ .

**Satz 10.1.8** Sei  $f$  eine lineare Abbildung von  $_K V_n$  in  $_K W_m$ . Dann gilt

$$\text{def } f + \text{rg } f = \dim V. \quad (10.14)$$

*Beweis.* Nach Satz 10.1.4 existiert für  $f$  eine Matrix  $\mathfrak{A}_f \in K^{m \times n}$  mit  $f(\mathfrak{x})/B_W = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B_V$ .  $\text{Ker } f$  ist dann die Menge aller Lösungen von  $f(\mathfrak{x})/B_W = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B_V = \mathfrak{o}$  und die Dimension dieses Lösungsraumes ist nach Satz 3.4.4 gleich  $n - \text{rg } \mathfrak{A}_f$ . Also gilt (10.14). ■

Durch eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  (wie durch jede andere Abbildung auch) wird  $V$  (wie in Satz 1.4.4 beschrieben) in disjunkte Teilmengen zerlegt und man kann auf  $V$  die sogenannte von  $f$  induzierte Äquivalenzrelation (kurz: Abbildungsäquivalenz)  $R_f$

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R_f \iff f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) \quad (10.15)$$

definieren, die wir nachfolgend näher untersuchen wollen.

**Lemma 10.1.9** Für die in (10.15) definierte Äquivalenzrelation gilt:

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R_f \iff \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in \text{Ker } f. \quad (10.16)$$

*Beweis.* (10.16) ergibt sich aus folgenden Äquivalenzen:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R_f \iff f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) \iff \underbrace{f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b})}_{f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})} = \mathfrak{o} \iff \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in \text{Ker } f.$$

**Lemma 10.1.10** Bezeichne  $U$  einen Untervektorraum des Vektorraums  $V$  über  $K$  und sei  $R$  die wie folgt definierte Relation auf  $V$ :

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R \iff \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U. \quad (10.17)$$

Dann gilt:

(a)  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Für beliebiges  $\mathfrak{a} \in V$  ist die Äquivalenzklasse  $[\mathfrak{a}]_R := \{\mathfrak{x} \in V \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) \in R\}$  auch wie folgt beschreibbar:

$$[\mathfrak{a}]_R = \mathfrak{a} + U := \{\mathfrak{a} + \mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in U\}. \quad (10.18)$$

(c)  $R$  ist mit den Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  von  $V$  verträglich.

(d) Für  $U = \text{Ker } f$  ist  $R = R_f$ .

*Beweis.* (a):  $R$  ist reflexiv, da  $\mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \in U$  für alle  $\mathfrak{a} \in V$ .  $R$  ist symmetrisch, da aus  $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U$  auch  $-(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \in U$  und damit  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \in R$  folgt. Die Transitivität von  $R$  lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R \wedge (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \in R &\implies \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U \wedge \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \in U \\ &\implies (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{c} \in U \\ &\implies (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \in R. \end{aligned}$$

(b) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}]_R &\iff (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R \iff \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U \\ &\iff \exists \mathfrak{c} \in U : \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \iff \exists \mathfrak{c} \in U : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} - \mathfrak{c} \\ &\iff \mathfrak{b} \in \mathfrak{a} + U. \end{aligned}$$

(c): Wegen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R \wedge (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \in R &\implies \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U \wedge \mathfrak{c} - \mathfrak{d} \in U \\ &\implies (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{d}) \in U \\ &\implies (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) - (\mathfrak{b} + \mathfrak{d}) \in U \\ &\implies (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}, \mathfrak{b} + \mathfrak{d}) \in R \end{aligned}$$

ist  $R$  mit  $+$  und wegen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R &\implies \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U \\ &\implies \forall \lambda \in K : \lambda \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \in U \\ &\implies \forall \lambda \in K : \lambda \cdot \mathfrak{a} - \lambda \cdot \mathfrak{b} \in U \\ &\implies \forall \lambda \in K : (\lambda \cdot \mathfrak{a}, \lambda \cdot \mathfrak{b}) \in R \end{aligned}$$

mit  $\cdot$  verträglich. ■

(d) folgt aus Lemma 10.1.9.

Wir betrachten nun für einen beliebigen Untervektorraum  $U$  des Vektorraums  $V$  über  $K$  die Faktormenge

$$V/U := \{\mathfrak{a} + U \mid \mathfrak{a} \in U\}, \quad (10.19)$$

auf der sich nach Satz 1.4.5 und Lemma 10.1.10, (c) folgende Verknüpfungen definieren lassen:

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V \quad & \forall \lambda \in K : \\ (\mathfrak{a} + U) \oplus (\mathfrak{b} + U) &:= (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + U \quad (10.20) \\ \lambda \odot (\mathfrak{a} + U) &:= (\lambda \cdot \mathfrak{a}) + U. \end{aligned}$$

**Lemma 10.1.11** Für jeden Untervektorraum  $U$  eines Vektorraums  $_K V$  ist die Menge  $V/U$  (siehe (10.19)) mit den Verknüpfungen  $\oplus, \odot$  aus (10.20) ein Vektorraum über dem Körper  $K$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $\oplus$  eine innere Verknüpfung und  $\odot$  eine äußere Verknüpfung auf  $V/U$ .

$(V/U; \oplus)$  ist eine kommutative Gruppe, da  $U = \mathfrak{o} + U \in V/U$  ein neutrales Element ist,  $-\mathfrak{a} + U$  das zu  $\mathfrak{a} + U$  inverse Element und

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} + U) \oplus ((\mathfrak{b} + U) \oplus (\mathfrak{c} + U)) &= (\mathfrak{a} + U) \oplus ((\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + U) \\ &= (\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})) + U \\ &= ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}) + U \\ &= ((\mathfrak{a} + U) \oplus (\mathfrak{b} + U)) \oplus (\mathfrak{c} + U) \end{aligned}$$

wegen der Assoziativität von  $+$  sowie

$$(\mathfrak{a} + U) \oplus (\mathfrak{b} + U) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + U = (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}) + U = (\mathfrak{b} + U) \oplus (\mathfrak{a} + U)$$

wegen der Kommutativität von  $+$  gilt. Außerdem haben wir

$$1 \odot (\mathfrak{a} + U) = (1 \cdot \mathfrak{a}) + U = \mathfrak{a} + U,$$

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \mu) \odot (\mathfrak{a} + U) &= ((\lambda \cdot \mu) \cdot \mathfrak{a}) + U = (\lambda \cdot (\mu \cdot \mathfrak{a})) + U = \lambda \odot ((\mu \cdot \mathfrak{a}) + U) \\ &= \lambda \odot (\mu \odot (\mathfrak{a} + U)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \odot (\mathfrak{a} + U) &= ((\lambda + \mu) \cdot \mathfrak{a}) + U = (\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{a}) + U \\ &= ((\lambda \cdot \mathfrak{a}) + U) \oplus ((\mu \cdot \mathfrak{a}) + U), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \odot ((\mathfrak{a} + U) \oplus (\mathfrak{b} + U)) &= \lambda \odot ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + U) = (\lambda \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})) + U \\ &= (\lambda \cdot \mathfrak{a} + \lambda \cdot \mathfrak{b}) + U \\ &= (\lambda \odot (\mathfrak{a} + U)) \oplus (\lambda \odot (\mathfrak{b} + U)). \end{aligned}$$

■

**Satz 10.1.12 (Homomorphiesatz für Vektorräume)**

- (a) Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung des Vektorraums  $V$  in den Vektorraum  $W$  über dem Körper  $K$ . Dann sind  $\text{Ker } f (\subseteq V)$  sowie  $V/\text{Ker } f$  (mit den Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$ ) Vektorräume, und es gilt

$$V/\text{Ker } f \cong f(V). \quad (10.21)$$

*Umgekehrt:*

- (b) Sei  $U$  ein Untervektorraum des Vektorraums  $KV$ . Dann ist  $V/U$  ein Vektorraum über  $K$ , und es existiert eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V/U$  mit

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \varphi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + U. \quad (10.22)$$

*Beweis.* (a): Nach Satz 10.1.7 ist  $\text{Ker } f$  ein Untervektorraum von  $V$  und damit  $U := V/\text{Ker } f$  nach Lemma 10.1.11 ein Vektorraum über  $K$  mit den Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$ . Für den Nachweis von (10.21) betrachten wir die Abbildung  $g$  mit

$$g : V/\text{Ker } f \rightarrow f(V), \quad g(\mathfrak{a} + U) := f(\mathfrak{a}).$$

Die Abbildung  $g$  ist offenbar nach Definition surjektiv und wegen

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{a} + U) = g(\mathfrak{b} + U) &\implies f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) \\ &\implies (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in R_f \\ &\implies [\mathfrak{a}]_{R_f} = [\mathfrak{b}]_{R_f} \\ &\implies \mathfrak{a} + U = \mathfrak{b} + U \end{aligned}$$

(siehe Lemma 10.1.10 und Satz 1.3.1) auch injektiv. Also ist  $g$  eine bijektive Abbildung. Die Verträglichkeit von  $\oplus$  und  $\odot$  mit  $g$  und damit unsere Behauptung (10.21) folgt dann aus

$$\begin{aligned} g(\lambda \odot (\mathfrak{a} + U) \oplus \mu \odot (\mathfrak{b} + U)) &= g((\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) + U) \\ &= f(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) \\ &= \lambda \cdot f(\mathfrak{a}) + \mu \cdot f(\mathfrak{b}) \\ &= \lambda \cdot g(\mathfrak{a} + U) + \mu \cdot g(\mathfrak{b} + U). \end{aligned}$$

(b): Sei  $U$  ein Untervektorraum von  $KV$ . Dann ist nach Lemma 10.1.11  $V/U$  mit den Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$  ein Vektorraum über  $K$ . Wir haben zu zeigen, daß die durch (10.22) definierte Korrespondenz  $\varphi$  linear ist. Offenbar ist  $\varphi$  eine Abbildung, und für beliebige  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ ,  $\lambda, \mu \in K$  gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) &= (\lambda \cdot \mathfrak{a} + \mu \cdot \mathfrak{b}) + U = (\lambda \cdot a + U) \oplus (\mu \cdot \mathfrak{b} + U) \\
&= (\lambda \odot (\mathfrak{a} + U)) \oplus (\mu \odot (\mathfrak{b} + U)) \\
&= (\lambda \odot \varphi(\mathfrak{a})) \oplus (\mu \odot \varphi(\mathfrak{b})).
\end{aligned}$$

■

**Satz 10.1.13** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann eine isomorphe Abbildung von  $V$  auf  $W$ , wenn  $f$  surjektiv ist und  $\text{Ker } f = \{\mathfrak{o}\}$  gilt.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $f : V \rightarrow W$  eine isomorphe Abbildung. Folglich ist  $f$  surjektiv. Angenommen,  $\text{Ker } f \neq \{\mathfrak{o}\}$ . Dann gibt es zwei verschiedene  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$  mit  $f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ , was der Injektivität von  $f$  widerspricht.

„ $\Leftarrow$ “: Die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  sei surjektiv, und es gelte  $\text{Ker } f = \{\mathfrak{o}\}$ . Die zu zeigende Injektivität von  $f$  ergibt sich aus:

$$f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}) \Rightarrow f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{o} \Rightarrow \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in \text{Ker } f \Rightarrow \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

■

**Satz 10.1.14** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $B := \{\mathfrak{b}_i \mid i \in I\}$  eine Basis von  $V$ . Dann ist  $f$  genau dann eine isomorphe Abbildung von  $V$  auf  $W$ , wenn  $\{f(\mathfrak{b}_i) \mid i \in I\}$  eine Basis von  $B$  ist.

*Beweis.* ÜA. ■

## 10.2 Adjungierte Abbildungen

**Definition** Seien  $_K V$  bzw.  $_K W$  Vektorräume mit den Skalarprodukten  $\varphi$  bzw.  $\psi$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Falls nichts anderes angegeben ist, wählen wir im Fall  $V = W$  stets  $\varphi = \psi$ . Außerdem sei  $f$  eine lineare Abbildung von  $V$  in  $W$ . Dann heißt eine Abbildung  $f^* : W \rightarrow V$  mit der Eigenschaft

$$\forall \mathfrak{x} \in V \quad \forall \mathfrak{y} \in W : \psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) = \varphi(\mathfrak{x}, f^*(\mathfrak{y})) \tag{10.23}$$

eine zu  $f$  adjungierte Abbildung.

**Beispiel** Wählt man  $K := \mathbb{C}$ ,  $V := \mathbb{C}^{n \times 1} = W$ ,

$$f(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x},$$

$\varphi = \psi$  und  $\varphi$  als Standardskalarprodukt (d.h.,  $\varphi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) := \mathfrak{x}_1^T \cdot \overline{\mathfrak{x}_2}$  für alle  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in V$ ), so ist

$$f^*(\mathfrak{y}) := \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \mathfrak{y}$$

( $\mathfrak{y} \in W$ ) die zu  $f$  adjungierte Abbildung, da

$$\psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) = (f(\mathfrak{x}))^T \cdot \overline{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x})^T \cdot \overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}}$$

und

$$\varphi(\mathfrak{x}, f^*(\mathfrak{y})) = \mathfrak{x}^T \cdot \overline{(f^*(\mathfrak{y}))} = \mathfrak{x}^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}}.$$

Im allgemeinen muß zu einer linearen Abbildung keine adjungierte Abbildung gehören. Falls sie jedoch existiert, ist sie eindeutig bestimmt, wie im nächsten Satz gezeigt wird. Wie dann für endlich-dimensionale VRe über  $\mathbb{C}$  solche adjungierten Abbildungen aussehen, hat bereits das obige Beispiel gezeigt. Genauer:

**Satz 10.2.1** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  ${}_K V$  sowie  ${}_K W$  Vektorräume mit den Skalarprodukten  $\varphi$  bzw.  $\psi$ . Dann gilt:

- (a) Existiert zu einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  die adjungierte Abbildung  $f^* : W \rightarrow V$ , dann ist sie eindeutig bestimmt.
- (b) Sind  $V$  und  $W$  endlich-dimensionale Vektorräume, dann gibt es zu jeder linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  orthonormierte Basen  $B_V$  bzw.  $B_W$  für  $V$  bzw.  $W$  sowie eine Matrix  $\mathfrak{A} \in K^{(\dim W) \times (\dim V)}$  mit der Eigenschaft

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})_{/B_W} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_{/B_V}. \quad (10.24)$$

Die zugehörige (eindeutig bestimmte) adjungierte Abbildung  $f^*$  lässt sich dann wie folgt beschreiben:

$$\forall \mathfrak{y} \in W : f^*(\mathfrak{y})_{/B_V} = \mathfrak{A}^* \cdot \mathfrak{y}_{/B_W}, \quad (10.25)$$

wobei

$$\mathfrak{A}^* := \begin{cases} \mathfrak{A}^T, & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ \overline{\mathfrak{A}}^T, & \text{falls } K = \mathbb{C}. \end{cases}$$

*Beweis.* (a): Angenommen, es gibt zu  $f$  zwei verschiedene adjungierte Abbildungen  $f_1^*$  und  $f_2^*$ . Wegen

$$\varphi(\mathfrak{x}, f_1^*(\mathfrak{y}) - f_2^*(\mathfrak{y})) = \varphi(\mathfrak{x}, f_1^*(\mathfrak{y})) - \varphi(\mathfrak{x}, f_2^*(\mathfrak{y})) = \psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) - \psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) = \mathfrak{o}$$

gilt

$$\varphi(\mathfrak{x}, f_1^*(\mathfrak{y}) - f_2^*(\mathfrak{y})) = \mathfrak{o} \quad (10.26)$$

für alle  $\mathfrak{x} \in V$  und alle  $\mathfrak{y} \in W$ . Indem wir  $\mathfrak{x} = f_1^*(\mathfrak{y}) - f_2^*(\mathfrak{y})$  in (10.26) wählen, erhalten wir aus der positiven Definitheit von  $\varphi$  und (10.26)  $f_1^*(\mathfrak{y}) - f_2^*(\mathfrak{y}) = \mathfrak{o}$  für alle  $\mathfrak{y} \in W$ , im Widerspruch zu  $f_1^* \neq f_2^*$ . Also gilt (a).

(b): (10.24) wurde bereits im Satz 10.1.4 gezeigt. Da  $B_V$  und  $B_W$  orthonormierte Basen sind, gilt nach Satz 6.5.3

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{x}' \in V \ \forall \mathfrak{y}, \mathfrak{y}' \in W : \\ \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = \mathfrak{x}_{/B_V}^T \cdot \overline{\mathfrak{x}'_{/B_V}} \wedge \psi(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = \mathfrak{y}_{/B_W}^T \cdot \overline{\mathfrak{y}'_{/B_W}}. \end{aligned}$$

Analog zum obigen Beispiel prüft man leicht nach, daß die durch (10.25) definierte Abbildung  $f^*$  eine zu  $f$  adjungierte Abbildung ist, die nach (a) eindeutig bestimmt ist. ■

**Satz 10.2.2** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, für die die adjungierte Abbildung  $f^*$  existiert. Dann gilt:

- (a)  $(f^*)^* = f$ , d.h.,  $\varphi(f^*(\mathfrak{y}), \mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{y}, f(\mathfrak{x}))$  für alle  $\mathfrak{x} \in V$  und alle  $\mathfrak{y} \in W$ ;
- (b)  $\text{Ker } f^* = (f(V))^\perp$ ;
- (c)  $\text{Ker } f = (f^*(W))^\perp$ ;
- (d)  $f$  surjektiv  $\implies f^*$  injektiv;
- (e)  $f^*$  surjektiv  $\implies f$  injektiv;
- (f) falls  $\text{rg } f$  (bzw.  $\text{rg } f^*$ ) endlich ist, gilt:

$$f \text{ (bzw. } f^*) \text{ surjektiv} \iff f^* \text{ (bzw. } f) \text{ injektiv.}$$

*Beweis.* Seien  $f$  und  $f^*$  lineare Abbildungen, die (10.23) erfüllen.

(a) folgt aus

$$\varphi(f^*(\mathfrak{y}), \mathfrak{x}) = \overline{\varphi(\mathfrak{x}, f^*(\mathfrak{y}))} = \overline{\psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})} = \psi(\mathfrak{y}, f(\mathfrak{x})).$$

(b) folgt aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{y} \in \text{Ker } f^* &\iff f^*(\mathfrak{y}) = \mathfrak{o} \\ &\iff \forall \mathfrak{x} \in V : \varphi(\mathfrak{x}, f^*(\mathfrak{y})) = 0 = \psi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) \\ &\iff \mathfrak{y} \in (f(V))^\perp. \end{aligned}$$

(c) folgt aus (a) und (b), da

$$\text{Ker } f \stackrel{(a)}{=} \text{Ker } (f^*)^* \stackrel{(b)}{=} (f^*(W))^\perp.$$

(d): Sei  $f$  surjektiv. Dann gilt  $(f(V))^\perp = \{\mathfrak{o}\}$  und (wegen (b))  $\text{Ker } f^* = \{\mathfrak{o}\}$ . Nach Satz 10.1.13 ist dies nur für eine injektive Abbildung  $f$  möglich.

(e) folgt aus (d) und (a):

$$f^* \text{ surjektiv} \stackrel{(d)}{\implies} (f^*)^* \text{ injektiv} \stackrel{(a)}{\implies} f \text{ injektiv.}$$

(f): Wegen (d) und (e) haben wir bei beiden Aussagen nur „ $\Leftarrow$ “ zu beweisen. (f) folgt somit aus

$$\begin{aligned} f^* \text{ injektiv} &\implies \text{Ker } f^* = \{\mathfrak{o}\} \stackrel{(b)}{\implies} (f(V))^\perp = \{\mathfrak{o}\} \\ &\stackrel{6.5.12}{\implies} f(V) = \{\mathfrak{o}\}^\perp = W \implies f \text{ surjektiv} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\implies \{\mathfrak{o}\} = \text{Ker } f \stackrel{(c)}{=} (f^*(W))^\perp \\ &\stackrel{6.5.12}{\implies} f^*(W) = \{\mathfrak{o}\}^\perp = W \implies f^* \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

■

## 10.3 Normale Abbildungen

**Definition** Sei  $_KV$  ein VR mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt **normal**, wenn die zu  $f$  adjungierte Abbildung  $f^*$  existiert und die Eigenschaft

$$f^* \square f = f \square f^*$$

besitzt.

**Beispiel** Wählt man als  $\text{VR } \kappa V := \mathbb{R}^{n \times 1}$ , so hat eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  die Gestalt  $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$  mit einer passend gewählten Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Nach Satz 10.2.1, (b) ist dann  $f^*(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x}$  die zu  $f$  gehörende adjungierte Abbildung. Es gilt dann

$$(f^* \square f)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x}, \quad \text{und} \quad (f \square f^*)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x},$$

womit  $f$  nur dann normal sein kann, wenn  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T$  ist. Damit sind z.B. alle linearen Abbildungen  $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$  normal, für die  $\mathfrak{A}$  eine Diagonalmatrix oder eine symmetrische oder orthogonale Matrix ist.

**Satz 10.3.1** Sei  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung.  $f$  ist genau dann normal, wenn eine zu  $f$  adjungierte Abbildung  $f^*$  mit

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : \varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{y})) = \varphi(f^*(\mathfrak{x}), f^*(\mathfrak{y})). \quad (10.27)$$

existiert.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $f$  normal, d.h., die zu  $f$  adjungierte Abbildung  $f^*$  existiert, und es gilt  $f^* \square f = f \square f^*$ . Hieraus, aus der Definition von  $f^*$  und Satz 10.2.2, (a) folgt dann

$$\varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{y})) = \varphi(\mathfrak{x}, \underbrace{f^*(f(\mathfrak{y}))}_{(f \square f^*)(\mathfrak{y})}) = \varphi(\mathfrak{x}, (f^* \square f)(\mathfrak{y})) = \varphi(\mathfrak{x}, f(f^*(\mathfrak{y}))) = \varphi(f^*(\mathfrak{x}), f^*(\mathfrak{y})).$$

„ $\Leftarrow$ “: Es gelte (10.27). Dann haben wir unter Beachtung von Satz 10.2.2, (a)

$$\varphi(f(f^*(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})) = \varphi(f^*(\mathfrak{x}), f^*(\mathfrak{y})) = \varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{y})) = \varphi(f^*(f(\mathfrak{x})), \mathfrak{y}),$$

woraus sich

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : \varphi((f^* \square f)(\mathfrak{x}) - (f \square f^*)(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) = \mathfrak{o} \quad (10.28)$$

ergibt. Da man in (10.28) auch  $\mathfrak{y} = (f^* \square f)(\mathfrak{x}) - (f \square f^*)(\mathfrak{x})$  wählen kann, folgt aus (10.28) und der positiven Definitheit von  $\varphi$ , daß  $(f^* \square f)(\mathfrak{x}) = (f \square f^*)(\mathfrak{x})$  für alle  $\mathfrak{x} \in V$  gilt. Also ist  $f$  normal. ■

**Satz 10.3.2** Für jede normale Abbildung  $f : V \rightarrow V$  ist  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$ .

*Beweis.* Ist  $f$  eine normale Abbildung, so gilt  $\varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{x})) = \varphi(f^*(\mathfrak{x}), f^*(\mathfrak{x}))$  nach Satz 10.3.1. Aus der positiven Definitheit von  $\varphi$  ergibt sich dann

$$\varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{x})) = 0 \iff f(\mathfrak{x}) = 0 \iff f(\mathfrak{x}) = 0,$$

womit  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$  ist. ■

Als nächstes verallgemeinern wir einige Begriffe und Sätze aus Kapitel 6.

**Definition** Es sei  $V$  einen Vektorraum über  $K$ ,  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $\lambda \in K$ . Dann heißt  $\lambda$  ein **Eigenwert** von  $f$ , wenn es ein  $\mathfrak{x} \in V \setminus \{\mathfrak{o}\}$ , einen sogenannten **Eigenvektor** von  $\lambda$ , mit  $f(\mathfrak{x}) = \lambda \cdot \mathfrak{x}$  gibt.

Offenbar gilt nach Satz 3.4.5:

**Satz 10.3.3** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$ . Sei  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, die mittels einer Basis  $B$  von  $V$  und einer Matrix  $\mathfrak{A}_f \in K^{n \times n}$  (gemäß Satz 10.1.6) durch

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})_{/B} = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_{/B} \quad (10.29)$$

beschrieben ist. Dann ist  $\lambda \in K$  genau dann eine Eigenwert von  $f$ , wenn  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathfrak{A}_f$  ist bzw. wenn  $\det(\mathfrak{A}_f - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) = 0$  gilt. ■

**Satz 10.3.4** Sei  $f : V \rightarrow V$  eine normale Abbildung. Dann gilt:

- (a)  $f$  und  $f^*$  besitzen dieselben Eigenvektoren.
- (b)  $\mathfrak{a} \in V$  ist genau dann ein Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn  $\mathfrak{a}$  ein Eigenvektor von  $f^*$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$  ist.

*Beweis.* Aus der Definition einer adjungierten Abbildung und aus Satz 10.3.1 folgt

$$\begin{aligned} & \varphi(f(\mathfrak{a}) - \lambda \cdot \mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}) - \lambda \cdot \mathfrak{a}) \\ &= \varphi(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a})) - \varphi(\lambda \cdot \mathfrak{a}, f(\mathfrak{a})) - \varphi(f(\mathfrak{a}), \lambda \cdot \mathfrak{a}) + \varphi(\lambda \cdot \mathfrak{a}, \lambda \cdot \mathfrak{a}) \\ &= \varphi(f^*(\mathfrak{a}), f^*(\mathfrak{a})) - \lambda \cdot \varphi(f^*(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) - \bar{\lambda} \cdot \varphi(\mathfrak{a}, f^*(\mathfrak{a})) + |\lambda|^2 \cdot \varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \\ &= \varphi(f^*(\mathfrak{a}) - \bar{\lambda} \cdot \mathfrak{a}, f^*(\mathfrak{a}) - \bar{\lambda} \cdot \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$f(\mathfrak{a}) = \lambda \cdot \mathfrak{a} \iff f^*(\mathfrak{a}) = \bar{\lambda} \cdot \mathfrak{a},$$

woraus sich unmittelbar die Behauptungen des Satzes ergeben. ■

**Satz 10.3.5** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler VR über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  mit dem Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann gilt:

- (a) Im Fall  $K = \mathbb{C}$  ist eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  genau dann normal, wenn es eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis für  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$  gibt.
- (b) Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  genau dann normal, wenn  $f$  genau  $n$  reelle Eigenwerte (Vielfachheiten mitgezählt) und eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis für  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.

*Beweis.* (a): Da auf  $V$  ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert ist, besitzt  $V$  nach Satz 6.5.2 eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis  $B$ . Wegen Satz 6.5.3 gilt dann  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_{/B})^T \cdot \overline{\mathfrak{y}_{/B}}$  für alle  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ . Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  existiert außerdem eine Matrix  $\mathfrak{A}_f \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit der Eigenschaft (10.5) aus Satz 10.1.4, wobei  $B_V = B_W := B$ .

„ $\implies$ “: Sei  $f : V \rightarrow V$  eine normale Abbildung. Aus obigen Bemerkungen über  $f$  und  $\varphi$ , Satz 10.3.1 und Satz 10.2.1 folgt dann die Gleichung  $\mathfrak{A}_f^T \cdot \overline{\mathfrak{A}_f} = \overline{\mathfrak{A}_f} \cdot \mathfrak{A}_f$ , aus der sich die Bedingung (a) aus Satz 8.3.8 ergibt. Nach Satz 8.3.8, (a) existiert folglich eine unitäre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit

$$\overline{\mathfrak{B}}^T \cdot \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (10.30)$$

wobei für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  die  $j$ -te Spalte von  $\mathfrak{B}$  ein EV zum EW  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  von  $\mathfrak{A}_f$  ist (siehe Satz 8.1.4). Da  $\mathfrak{B}$  offensichtlich regulär ist, kann sie als Übergangsmatrix  $\mathfrak{M}(B, B')$  von  $B$  zu einer anderen Basis  $B' := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_n)$  von  $V$  aufgefaßt werden. Wegen  $\mathfrak{M}(B, B') = ((\mathfrak{b}'_1)/B \dots (\mathfrak{b}'_n)/B)$  (siehe Satz 4.6.2), ist  $B'$  durch  $B$  und  $\mathfrak{B}$  eindeutig bestimmt. Mit Hilfe von (10.30) und Satz 7.3.1, (a<sub>2</sub>) ist dann leicht zu zeigen, daß  $B'$  eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis für  $V$  aus EVen von  $f$  ist.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\mathfrak{B}$  eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis, die aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $f$  besteht. Dann gilt nach Satz 10.1.4

$$\mathfrak{A}_f = (f(\mathfrak{b}_1)/B \dots f(\mathfrak{b}_n)/B) = (\lambda_1 \cdot (\mathfrak{b}_1)/B \dots \lambda_n \cdot (\mathfrak{b}_n)/B),$$

womit  $\mathfrak{A}_f$  eine Diagonalmatrix ist. Mit Hilfe von Satz 10.2.1 prüft man nun nach, daß  $f$  eine normale Abbildung ist. ■

## 10.4 Selbstadjungierte und antiselbstadjungierte Abbildungen

**Definition** Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt **selbstadjungiert**, falls  $f = f^*$  ist.

Offenbar sind selbstadjungierte Abbildungen auch normal.

Der folgende Satz ergibt sich unmittelbar aus der obigen Definition und Satz 10.2.1:

**Satz 10.4.1** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\kappa V$  ein  $n$ -dimensionaler VR,  $B$  eine orthonormierte Basis von  $V$  bez. des Skalarproduktes  $\varphi$  und  $f$  die durch  $f(\mathfrak{x})/B := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}/B$  definierte lineare Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\mathfrak{A}_f = \begin{cases} \mathfrak{A}_f^T, & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ \overline{\mathfrak{A}_f}^T, & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

gilt. ■

Einen Spezialfall des nachfolgenden Satzes hatten wir bereits im Satz 8.2.9 behandelt:

### Satz 10.4.2

- (a) Eine selbstadjungierte Abbildung  $f$  eines Vektorraums  $V$  über  $\mathbb{C}$  besitzt nur reelle Eigenwerte.
- (b) Ist  $f$  eine selbstadjungierte Abbildung eines VR  $V$  über  $\mathbb{R}$ , so hat die sogenannte komplexe Fortsetzung  $\widehat{f} : V + i \cdot V \longrightarrow V + i \cdot V$  von  $f$ , die definiert ist durch

$$\widehat{f}(\mathfrak{x}) = \widehat{f}(\mathfrak{a} + i \cdot \mathfrak{b}) := f(\mathfrak{a}) + i \cdot f(\mathfrak{b})$$

für alle  $\mathfrak{x} \in V + i \cdot V$ , nur reelle Eigenwerte.

*Beweis.* (a): Sei  $\lambda$  ein beliebig gewählter EW von  $f$  und  $\mathfrak{x}$  ein zugehöriger EV. Aus Satz 10.3.4 folgt dann, daß  $\overline{\lambda}$  eine EW von  $f^*$  mit dem EV  $\mathfrak{x}$  ist. Wegen  $f = f^*$  ist damit  $\mathfrak{x}$  sowohl EV zum EW  $\lambda$  als auch zum EW  $\overline{\lambda}$ . Hieraus folgt  $(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \mathfrak{x} = 0$ , was nur für  $\lambda = \overline{\lambda}$  gelten kann. Also ist  $\lambda$  reell.

(b): Als ÜA überlege man sich, daß  $\hat{f}$  selbstadjungiert ist. Folglich ergibt sich (b) aus (a). ■

**Definition** Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  über einem VR  $V$  mit Skalarprodukt heißt **antiselbstadjungiert**, falls die adjungierte Abbildung  $f^*$  existiert und  $f^* = -f$  ist.

Als Folgerung aus obiger Definition und Satz 10.2.1 erhält man:

**Satz 10.4.3** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  ${}_K V$  ein  $n$ -dimensionaler VR,  $B$  eine orthonormierte Basis von  $V$  bez. des Skalarproduktes  $\varphi$  und  $f$  die durch  $f(\mathfrak{x})_B := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_B$  definierte lineare Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann antiselbstadjungiert, wenn

$$\mathfrak{A}_f = \begin{cases} -\mathfrak{A}_f^T, & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ -\overline{\mathfrak{A}_f}^T, & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

ist. ■

Eine Verallgemeinerung von Satz 8.3.10 ist der folgende Satz.

**Satz 10.4.4** Bezeichne  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung über den VR  ${}_K V$  mit Skalarprodukt  $\varphi$ . Dann ist  $f$  genau dann antiselbstadjungiert, wenn

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \operatorname{Re}(\varphi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{x})) = 0$$

gilt.

*Beweis.* ÜA. ■

## 10.5 Unitäre und orthogonale Abbildungen, Isometrien

**Definitionen** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  ${}_K V$  ein VR mit dem Skalarprodukt  $\varphi$  und  ${}_K W$  ein VR mit dem Skalarprodukt  $\psi$ . Die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **orthogonal** (bzw. **unitär**), falls  $K = \mathbb{R}$  (bzw.  $K = \mathbb{C}$ ) und

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \psi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{x})) \quad (10.31)$$

gilt.

Ist speziell  $V = W$ , so nennt man eine orthogonale (bzw. unitäre) Abbildung eine **Isometrie** oder eine **isometrische** Abbildung.

**Satz 10.5.1** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  ${}_K V$  ein  $n$ -dimensionaler VR,  $B$  eine orthonormierte Basis von  $V$  bez. des Skalarproduktes  $\varphi$  und  $f$  die durch  $f(\mathfrak{x})_B := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_B$  definierte lineare Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann eine Isometrie, wenn

$$\mathfrak{A}_f \begin{cases} \text{orthogonal (d.h., } \mathfrak{A}_f^{-1} = \mathfrak{A}_f^T\text{), falls } K = \mathbb{R}, \\ \text{unitär (d.h., } \mathfrak{A}_f^{-1} = \overline{\mathfrak{A}_f}^T\text{), falls } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

gilt.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $K = \mathbb{C}$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $f$  eine Isometrie. Dann folgt aus (10.31) und der Tatsache, daß  $B$  bezüglich  $\varphi$  orthonormiert ist,

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \mathfrak{x}_B^T \cdot \overline{\mathfrak{x}}_B = \mathfrak{x}_B^T \cdot (\mathfrak{A}_f^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}_f) \cdot \overline{\mathfrak{x}}_B,$$

was nur für  $\mathfrak{A}_f^T \cdot \overline{\mathfrak{A}}_f = \mathfrak{E}_n$  möglich ist. Folglich gilt  $\overline{\mathfrak{A}_f}^T \cdot \mathfrak{A}_f = \mathfrak{E}_n$  und damit  $\mathfrak{A}_f^{-1} = \overline{\mathfrak{A}_f}^T$ , was zu zeigen war.

„ $\Leftarrow$ “:  $\ddot{\text{U}}\text{A}$ . ■

**Satz 10.5.2** Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $_K V$  ein VR mit dem Skalarprodukt  $\varphi$  und  $_K W$  ein VR mit dem Skalarprodukt  $\psi$ . Außerdem seien die nachfolgend angegebenen Normen mit Hilfe der auf  $V$  bzw.  $W$  definierten Skalarprodukte erklärt (siehe Satz 6.3.1) und  $f : V \rightarrow W$  sei eine lineare Abbildung. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

(a)  $f : V \rightarrow W$  ist eine orthogonale (unitäre) Abbildung.

(b)  $\forall \mathfrak{x} \in V : \|\mathfrak{x}\| = 1 \Rightarrow \|f(\mathfrak{x})\| = 1$ .

(c)  $\forall \mathfrak{x} \in V : \|\mathfrak{x}\| = \|f(\mathfrak{x})\|$ .

(d) Sind  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$  orthonormierte Vektoren von  $V$ , so sind  $f(\mathfrak{e}_1), f(\mathfrak{e}_2), \dots, f(\mathfrak{e}_n)$  orthonormierte Vektoren von  $W$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $K = \mathbb{C}$ .

„(a)  $\Rightarrow$  (b)“ folgt aus der Definition einer unitären Abbildung.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Für  $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  gilt offenbar (c). Sei nun  $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ . Dann ist  $\|\frac{1}{\|\mathfrak{x}\|} \cdot \mathfrak{x}\| = 1$  und wegen (b) erhalten wir hieraus  $\|f(\frac{1}{\|\mathfrak{x}\|} \cdot \mathfrak{x})\| = 1$  beziehungsweise  $\|f(\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\|$ , w.z.b.w.

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“: Seien  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$  orthonormierte Vektoren aus  $V$ . Dann gilt  $\|\mathfrak{e}_i\| = 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , was wegen (c)  $f(\|\mathfrak{e}_i\|) = 1$  zur Folge hat. Im Fall  $i \neq j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ) rechnet man leicht nach, daß

$$\|f(\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j)\|^2 = \psi(f(\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j), f(\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j)) = 2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\psi(f(\mathfrak{e}_i), f(\mathfrak{e}_j)))$$

und

$$\|\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j\|^2 = 2$$

gilt. Wegen (c) folgt hieraus  $\operatorname{Re}(\psi(f(\mathfrak{e}_i), f(\mathfrak{e}_j))) = 0$ . Indem man oben  $\mathfrak{e}_i + i \cdot \mathfrak{e}_j$  anstelle von  $\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j$  wählt, kann man analog zu oben  $\operatorname{Im}(\psi(f(\mathfrak{e}_i), f(\mathfrak{e}_j))) = 0$  zeigen. Also ist  $\psi(f(\mathfrak{e}_i), f(\mathfrak{e}_j)) = 0$  und damit (d) gezeigt.

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“: Sei  $\mathfrak{x} \in V$  beliebig gewählt. Dann existieren gewisse orthonormierte Vektoren  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n \in V$  und gewisse  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit  $\mathfrak{x} = x_1 \cdot \mathfrak{e}_1 + x_2 \cdot \mathfrak{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathfrak{e}_n$ . Mit Hilfe dieser Darstellung von  $\mathfrak{x}$  rechnet man nun leicht (unter Verwendung von (d)) nach, daß  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \psi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{x}))$  gilt. Folglich ist  $f$  eine unitäre Abbildung. ■

## 10.6 Normalformen linearer Abbildungen

Wir betrachten hier nur lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen VRen. Solche Abbildungen lassen sich bekanntlich mit Hilfe von Matrizen

beschreiben. Unter der *Normalform einer linearen Abbildung*  $f$  versteht man dann eine solche Beschreibung von  $f$ , in der die Matrix  $\mathfrak{A}_f$  in möglichst einfacher Struktur vorliegt, d.h., die Matrix  $\mathfrak{A}_f$  ist eine Diagonalmatrix oder eine Quasi-Diagonalmatrix.

Am einfachsten sind die Normalformen von linearen Abbildungen zwischen verschiedenen Vektorräumen, wie der nächste Satz zeigt.

**Satz 10.6.1** Seien  $V$  und  $W$  zwei **verschiedene**  $n$ -dimensionale Vektorräume über dem Körper  $K$  und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann existieren Basen  $B_V$  und  $B_W$  von  $V$  beziehungsweise  $W$  mit  $f(\mathfrak{x})_{/B_W} = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_{/B_V}$  für beliebige  $\mathfrak{x} \in V$  und

$$\mathfrak{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.32)$$

wobei  $\text{rg } \mathfrak{A}_f = \text{rg } f (= \dim f(V))$ .

*Beweis.* Es sei  $r := \dim f(V)$  und  $U := \text{Ker } f$ . Nach Satz 10.1.7 ist  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  mit der Dimension  $n - r$  und  $V$  lässt sich mit Hilfe gewisser Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$  in die Nebenklassen  $U, \mathfrak{b}_1 + U, \dots, \mathfrak{b}_r + U$  zerlegen. Wählt man dann noch eine Basis  $\mathfrak{b}_{r+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$  für  $U$  aus, so ist  $B_V := (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n)$  eine Basis für  $V$  und die Abbildung  $f$  ist durch die Bilder der Basiselemente von  $B_V$  eindeutig bestimmt. Insbesondere ist  $B_{f(V)} := (\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_r)$  mit  $\mathfrak{b}'_i := f(\mathfrak{b}_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) eine Basis für  $f(V)$ , die sich zu einer Basis  $B_W$  von  $W$  ergänzen lässt. Wegen  $f(\mathfrak{b}_i) = 1 \cdot \mathfrak{b}'_i$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $f(\mathfrak{b}_j) = \mathfrak{o}$  für  $j = r + 1, \dots, n$  folgt unsere Behauptung (10.32) damit aus Satz 10.1.4. ■

Für die linearen Abbildungen  $f : {}_K V_n \rightarrow {}_K V_n$  ist der Aufwand zur Bestimmung einer Normalform erheblich größer. Wir werden uns nachfolgend mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 8 nur Normalformen für den Fall  $K = \mathbb{C}$  überlegen. Dem Leser sei es als ÜA überlassen, sich mit Hilfe von Sätzen aus Abschnitt 8.5 ähnliche Aussagen für den Fall  $K = \mathbb{R}$  oder für einen beliebigen Körper  $K$  zu überlegen.

Eine Folgerung aus Satz 10.1.4, dem Fundamentalsatz der Algebra, Satz 8.5.4 und Satz 4.7.2 ist der folgende Satz:

**Satz 10.6.2** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler VR über dem Körper  $\mathbb{C}$  mit der Basis  $B$  und  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Die Abbildung  $f$  sei (gemäß Satz 10.1.4) mit Hilfe einer gewissen Matrix  $\mathfrak{A}_f \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch

$f(\mathfrak{x})_{/B} := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_{/B}$  für alle  $\mathfrak{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  beschrieben.

Dann existieren eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und eine gewisse Jordan-Matrix  $\mathfrak{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{J}$ . Die aus der Übergangsmatrix  $\mathfrak{M}(B, B') := \mathfrak{B}^2$  ablehbare Basis  $B'$  von  $V$  hat dann die Eigenschaft:

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(\mathfrak{x})_{/B'} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{x}_{/B'}. \quad (10.33)$$

■

Auf dem  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  über dem Körper  $\mathbb{C}$  sei ab jetzt auch ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert. Außerdem bezeichne  $B$  eine bezüglich  $\varphi$  orthonormierte Basis von  $V$ . Mit Hilfe der Sätze 10.2.1, 10.3.1, 10.4.1 und 10.5.1 überlegt man sich nun leicht die folgenden Eigenschaften zweier linearer Abbildungen  $f$  und  $f^*$ , die durch  $f(\mathfrak{x})_{/B} := \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}_{/B}$  beziehungsweise  $f^*(\mathfrak{x})_{/B} := \mathfrak{A}_{f^*} \cdot \mathfrak{x}_{/B}$  für alle  $\mathfrak{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  beschrieben sind:

$$\begin{aligned} f^* \text{ ist die zu } f \text{ adjungierte Abbildung} &\iff \mathfrak{A}_{f^*} = \overline{\mathfrak{A}_f}^T, \\ f \text{ ist normal} &\iff \mathfrak{A}_f \cdot \overline{\mathfrak{A}_f}^T = \overline{\mathfrak{A}_f}^T \cdot \mathfrak{A}_f, \\ f \text{ ist selbstadjungiert} &\iff \mathfrak{A}_f = \overline{\mathfrak{A}_f}^T, \\ f \text{ ist antiselbstadjungiert} &\iff \mathfrak{A}_f = -\overline{\mathfrak{A}_f}^T, \\ f \text{ ist isometrisch} &\iff \mathfrak{A}_f^{-1} = \overline{\mathfrak{A}_f}^T. \end{aligned}$$

Aus obigen Überlegungen und Satz 8.3.8 folgt dann (unter Beachtung der oben angegebenen Vereinbarungen) der

**Satz 10.6.3** Eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{C}V_n \rightarrow \mathbb{C}V_n$  ist genau dann **unitär diagonalisierbar** (d.h., die Matrix  $\mathfrak{J}$  aus (10.33) ist eine Diagonalmatrix und die Transformationsmatrix  $\mathfrak{B}$  ist eine unitäre Matrix), wenn  $f$  eine normale Abbildung ist. ■

Da selbstadjungierte, antiselbstadjungierte oder isometrische Abbildungen auch normale Abbildungen sind, ist eine Folgerung aus Satz 10.6.3 der

**Satz 10.6.4** Ist die lineare Abbildung  $f : \mathbb{C}V_n \rightarrow \mathbb{C}V_n$  selbstadjungiert, antiselbstadjungiert oder isometrisch, so ist sie unitär diagonalisierbar. ■

## 10.7 Gruppen aus linearen Abbildungen

Nachfolgend werden nur Abbildungen von einem VR  $V$  in  $V$  (sogenannte **Endomorphismen**) betrachtet. Wir fassen diese Abbildungen zu einer Menge

$$E_V := \{f \mid f : V \rightarrow V \text{ ist lineare Abbildung}\}$$

zusammen. Da für beliebige  $f, g \in E_V$  stets  $f \square g \in E_V$  gilt<sup>3</sup>,  $\square$  nach Satz 1.4.1 assoziativ ist und offenbar die identische Abbildung zur Menge  $E_V$  gehört, gilt:

<sup>2</sup> Siehe Satz 4.6.2.

<sup>3</sup> Siehe Beispiel 5 aus 10.2.

**Lemma 10.7.1**  $\mathbf{Ev} := (Ev; \square)$  ist ein Monoid, d.h., eine Halbgruppe mit Einselement. ■

Im Monoid  $\mathbf{Ev}$  sind nun gewisse Teilmengen sogar Gruppen. Einige Beispiele für solche Mengen gibt der nachfolgende Satz an.

**Satz 10.7.2** Es sei

$$\begin{aligned} B_V &:= \{f \in Ev \mid f \text{ ist bijektiv}\}, \\ I_V &:= \{f \in Ev \mid f \text{ ist isometrisch und surjektiv}\}, \\ F_V &:= \{f \in Ev \mid \exists g \in I_V \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : f = \lambda \cdot g\}. \end{aligned}$$

Dann ist für jedes  $G \in \{B_V, I_V, F_V\}$  die Struktur  $\mathbf{G} := (G; \square)$  eine Gruppe.

*Beweis.* Wegen Lemma 10.7.1 ist nur zu zeigen, daß  $\square$  eine innere Verknüpfung auf den angegebenen Mengen ist und zu jedem  $f \in G$  die inverse Abbildung  $f^{-1}$  existiert, die ebenfalls zu  $G$  gehören muß. Für  $G = B_V$  ist dies eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1.4.2 und Beispiel 6 aus Abschnitt 10.1.

Sei nun  $G = I_V$ . Dann ist  $\square$  eine innere Verknüpfung von  $G$ , da für beliebige  $f, g \in I$  und beliebige  $\mathfrak{x} \in V$

$$\varphi((f \square g)(\mathfrak{x}), (f \square g)(\mathfrak{x})) = \varphi(g(f(\mathfrak{x})), g(f(\mathfrak{x}))) = \varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{x})) = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

gilt. Da jede isometrische Abbildung  $f$  die Eigenschaft (c) aus Satz 10.5.2 besitzt, ist  $\text{Ker } f = \{\mathfrak{o}\}$  für alle  $f \in I_V$ . Nach Satz 10.1.13 existiert folglich zu jedem  $f \in I_V$  die inverse Abbildung. Wegen

$$\varphi(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}) = \varphi(f(\mathfrak{x}), f(f^{-1}(\mathfrak{y}))) = \varphi(\mathfrak{x}, f^{-1}(\mathfrak{y}))$$

ist  $f^{-1}$  die zu  $f \in I_V$  adjungierte Abbildung, womit  $f$  auch eine normale Abbildung ist. Hieraus ergibt sich dann  $f^{-1} \in I_V$  für alle  $f \in I_V$  mit Hilfe von Satz 10.3.1. Also ist  $(I_V; \square)$  eine Gruppe. Daß auch  $(F_V; \square)$  eine Gruppe ist, beweist man analog (ÜA). ■

Abschließend soll noch kurz erläutert werden, wie man mit Hilfe von Gruppen aus linearen Abbildungen Aussagen über Vektorräume sortieren bzw. klassifizieren kann. Die Idee dazu wurde zunächst für „Geometrien“ (Punkträume) von Felix Klein (1849-1925) im sogenannten **Erlanger Programm** 1872 entwickelt. Da wir hier nur affine Punkträume, die mit Hilfe von Vektorräumen definiert wurden, behandeln, und sich die meisten Aussagen über affine Punkträume aus Aussagen über Vektorräume ergeben, können wir hier schon einen Begriff einführen, der in Kapitel 11 – wie viele andere Ergebnisse über lineare Abbildungen auch – auf Punkträume übertragen wird und mit dem die Grundidee des Erlanger Programms beschreibbar ist.

**Definition** Es sei  ${}_K V$  ein VR und  $\mathbf{G} := (G; \square)$  eine gewisse Gruppe aus linearen Abbildungen. Außerdem bezeichne  $A(U)$  eine gewisse Aussage über die Vektoren einer Teilmenge  $U$  von  $V$ . Dann nennt man die Aussage  $A(U)$  eine **Invariante von  $\mathbf{G}$** , wenn der Wahrheitsgehalt von  $A(U)$  mit dem von  $A(f(U))$  ( $f(U) := \{f(\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in U\}$ ) für jedes  $f \in G$  übereinstimmt.

**Beispiel** Sind auf dem VR  $V$  ein Skalarprodukt  $\varphi$  sowie mittels  $\varphi$  eine Norm  $\|..\|$  definiert, so sind Aussagen der Form  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = a$  oder  $\|\mathfrak{x}\| = b$  Invarianten der Gruppe  $\mathbf{Iv}$ .

Seien  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  Gruppen aus linearen Abbildungen mit  $G_1 \subseteq G_2$ . Faßt man dann sämtliche zugehörigen Invarianten zu Klassen  $\text{Inv } \mathbf{G}_1$ ,  $\text{Inv } \mathbf{G}_2$  zusammen, so gilt  $\text{Inv } \mathbf{G}_2 \subseteq \text{Inv } \mathbf{G}_1$ . Speziell bedeutet dies, daß eine große Gruppe eine kleine Klasse von Invarianten besitzt und umgekehrt. Mit Hilfe von Gruppen aus linearen Abbildungen können folglich Aussagen über Vektoren zu Invariantenklassen zusammengefaßt werden, und die Inklusionen bei den Gruppen sagen etwas über den Zusammenhang zwischen den Sätzen aus den Invariantenklassen aus. Eine solche Sortierung ist nur dann sinnvoll, wenn man viele Aussagen hat und die Zusammenhänge zwischen diesen Aussagen klären möchte. Eine solche Situation bestand z.B. in der Mitte des 19. Jahrhunderts, wo eine Vielzahl von Arbeiten zu neuen „Geometrien“ vorlag, jedoch der Überblick über die wechselseitigen Zusammenhänge verloren zu gehen schien. Das viele Material zu den „Geometrien“ erhielt damals durch die gruppentheoretische Denkweise eine klare, logisch durchsichtige Struktur.<sup>4</sup> Einige Details dazu findet man im nächsten Kapitel.

Es sei noch bemerkt, daß die Idee, gewissen Objekten Invarianten zuzuordnen, bei der Lösung einer Reihe von Problemen die entscheidende Lösungsidee war. Beispiele dazu findet man im Band 2.

---

<sup>4</sup> Inzwischen gibt es jedoch Geometrien (z.B. die Riemannsche Geometrie), die durch das Erlanger Programm nicht erfaßt werden.

## Affine Abbildungen

In diesem kurzen Kapitel sollen Abbildungen zwischen affinen Punkträumen studiert werden. Dabei interessieren uns nur solche Abbildungen, die Zusammenhänge zwischen Aussagen über Teilmengen von affinen Punkträumen herstellen. Wir werden sehen, daß letztlich die zu den affinen Punkträumen gehörenden Vektorräume und die linearen Abbildungen zwischen diesen Vektorräumen die uns interessierenden Abbildungen bestimmen.

### 11.1 Allgemeines über affine Abbildungen

Der nachfolgend eingeführte Begriff der *affinen Abbildung*  $f$  zwischen zwei affinen Punkträumen ist so gewählt, daß das Bild  $f(g)$  einer Geraden  $g$  ein Punkt oder wieder eine Gerade ist und – wie wir später noch sehen werden – die Eigenschaft der Parallelität von zwei Geraden sich durch Anwenden von  $f$  nicht ändert sowie das sogenannte Teilverhältnis von Punkten auf einer Geraden beim Abbilden durch  $f$  erhalten bleibt. Der Richtungssinn einer Geraden, Streckenlängen, Flächeninhalte und Winkel können sich dagegen beim Anwenden von  $f$  i.allg. ändern.<sup>1</sup>

**Definition** Seien  $R$  und  $R'$  Punkträume mit den zugehörigen Vektorräumen  $V$  und  $V'$  über dem gleichen Körper  $K$ .

Die Abbildung  $f : R \rightarrow R'$  heißt **affine Abbildung** von  $R$  in  $R'$ , wenn es eine lineare Abbildung  $\vec{f} : V \rightarrow V'$  mit der Eigenschaft

$$\forall P, Q \in R : \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \quad (11.1)$$

bzw.

$$\forall P, Q \in R : \vec{f}(Q - P) = f(Q) - f(P) \quad (11.2)$$

gibt (siehe Abbildung 11.1).

---

<sup>1</sup> Ohne Beweis sei hier noch erwähnt, daß affine Abbildungen Figuren verzerren, aber nicht zerreißen können.

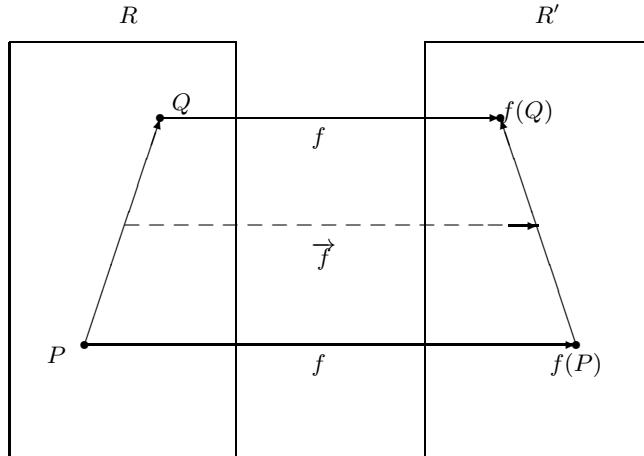


Abb. 11.1

**Beispiel** Seien

$$R = R' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \forall i : x_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = V' := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \forall i : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

und die Abbildung  $f$  durch

$$f : R \rightarrow R, X \mapsto A + \mathfrak{A} \cdot X \quad (11.3)$$

sowie

$$f \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:A} \right) := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}}_{=:A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:X}$$

definiert. Diese Abbildung ist affin, da die mit Hilfe von  $\mathfrak{A}$  definierbare Abbildung

$$\forall \mathfrak{x} \in V : \vec{f}(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$$

offenbar eine lineare Abbildung ist und sich (11.2) für die obigen  $f$  und  $\vec{f}$  wie folgt (unter Verwendung bekannter Rechenregeln für Matrizen) leicht nachprüfen lässt:

$$\vec{f}(Q - P) = \mathfrak{A} \cdot (Q - P) = \mathfrak{A} \cdot Q - \mathfrak{A} \cdot P = \vec{f}(P) - \vec{f}(Q).$$

Mit unserem obigen Beispiel haben wir bereits die Struktur der affinen Abbildung i.w. erfaßt, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 11.1.1** Seien  $R$  und  $R'$  affine Punkträume mit den zugehörigen Vektorräumen  $V$  und  $V'$ . Dann gilt:

- (a) Sei  $f : R \rightarrow R'$  eine affine Abbildung mit der zugehörigen linearen Abbildung  $\vec{f} : V \rightarrow V'$ . Dann gilt:

$$\forall P \in R \quad \forall \mathfrak{x} \in V : f(P + \mathfrak{x}) = f(P) + \vec{f}(\mathfrak{x}). \quad (11.4)$$

- (b) Ist umgekehrt  $\vec{f} : V \rightarrow V'$  eine lineare Abbildung und  $T \in R$  sowie  $T' \in R'$  fest gewählt, definiert

$$\forall \mathfrak{x} \in V : f(T + \mathfrak{x}) := T' + \vec{f}(\mathfrak{x}) \quad (11.5)$$

eine affine Abbildung.

*Beweis.* (a): Seien  $P \in R$  und  $\mathfrak{x} \in V$  beliebig gewählt. Wir setzen  $Q := P + \mathfrak{x}$ , d.h., es ist  $\mathfrak{x} = Q - P$ . Nach Definition von  $f$  gilt dann  $\vec{f}(\mathfrak{x}) = f(Q) - f(P) = f(P + \mathfrak{x}) - f(P)$ . Hieraus folgt dann unmittelbar (11.4).

(b): Seien  $P, Q \in R$  beliebig gewählt. Dann gilt  $P = T + \vec{T}\vec{P}$  und  $Q = T + \vec{T}\vec{Q}$ . Aus der Voraussetzung (11.5) erhält man dann  $f(P) = T' + \vec{f}(\vec{T}\vec{P})$  und  $f(Q) = T' + \vec{f}(\vec{T}\vec{Q})$ . Folglich gilt  $f(Q) - f(P) = \vec{f}(\vec{T}\vec{Q}) - \vec{f}(\vec{T}\vec{P}) = \vec{f}(\vec{T}\vec{Q}) - \vec{f}(\vec{T}\vec{P}) = \vec{f}(Q - P)$ , womit die durch (11.5) definierte Abbildung affin ist. ■

**Satz 11.1.2** Seien  $R$  und  $R'$  affine Räume mit den zugehörigen Vektorräumen  $V$  und  $V'$  über dem Körper  $K$ . Ferner sei  $f : R \rightarrow R'$  eine affine Abbildung. Dann gilt:

- (a) Ist  $\mathcal{A}$  ein affiner Unterraum von  $R$ , so ist  $f(\mathcal{A}) := \{f(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$  ein affiner Unterraum von  $R'$  mit  $\dim f(\mathcal{A}) \leq \dim \mathcal{A}$ .
- (b) Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  parallele affine Unterräume, so sind  $f(\mathcal{A})$  und  $f(\mathcal{B})$  ebenfalls parallel.

*Beweis.* (a): Ein affiner Unterraum läßt sich in der Form  $\mathcal{A} = P + U$  darstellen, wobei  $P \in \mathcal{A}$  und  $U$  ein gewisser UVR von  $V$  ist. Mit Hilfe von Satz 11.1.1 folgt hieraus  $f(\mathcal{A}) = f(P) + \vec{f}(U)$ . Wegen der Linearität von  $\vec{f}$ , Satz 10.1.1 und Satz 10.1.2 gilt damit (a).

(b): Seien  $\mathcal{A} = P + U$  und  $\mathcal{B} = Q + W$  mit  $P \in \mathcal{A}$ ,  $Q \in \mathcal{B}$  und  $U, W$  passend gewählten UVRen von  $V$ . Nach Definition sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  parallel, wenn  $U \subseteq W$  oder  $W \subseteq U$ . Sei o.B.d.A.  $U \subseteq W$ . Dann gilt  $\vec{f}(U) \subseteq \vec{f}(W)$ , was nach Definition die Parallelität von  $f(\mathcal{A})$  und  $f(\mathcal{B})$  zur Folge hat. ■

## 11.2 Gruppen gewisser affiner Abbildungen

Zur Vorbereitung:

**Lemma 11.2.1** Seien  $f : R \rightarrow R'$  und  $g : R' \rightarrow R''$  affine Abbildungen. Dann gilt:

- (a)  $f \square g$  ist eine affine Abbildung mit  $\vec{f} \square \vec{g} = \vec{f} \circ \vec{g}$ .
- (b)  $f$  ist injektiv  $\iff \vec{f}$  ist injektiv.
- (c)  $f$  ist surjektiv  $\iff \vec{f}$  ist surjektiv.
- (d)  $f$  ist bijektiv  $\iff \vec{f}$  ist bijektiv.
- (e)  $f$  ist bijektiv  $\implies f^{-1}$  ist eine affine Abbildung mit  $\vec{f}^{-1} = (\vec{f})^{-1}$ .

*Beweis.* (a): Da  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$  lineare Abbildungen sind, ist nach Abschnitt 10.1 (Beispiel 5) auch  $\vec{f} \square \vec{g}$  eine lineare Abbildung. (a) folgt damit aus

$\forall P, Q \in R :$

$$\begin{aligned} (\vec{f} \square \vec{g})(Q - P) &= \vec{g}(\vec{f}(Q - P)) = \vec{g}(f(Q) - f(P)) = g(f(Q) - g(f(P)) \\ &= (f \square g)(Q) - (f \square g)(P). \end{aligned}$$

(b)–(e) überlege man sich als ÜA. ■

**Satz 11.2.2** Sei  $R_n$  ein affiner Punktraum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V_n$  über dem Körper  $K$ . Dann gilt:

- (a) Sei  $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{EV}_n$ <sup>2</sup> eine Untergruppe der Gruppe  $\mathbf{EV}_n$ . Dann ist auch  $\mathbf{G}_a := (G_a, \square)$  mit

$$G_a := \{f \mid f : R_n \rightarrow R_n \wedge f \text{ ist affin} \wedge \vec{f} \in G\}$$

ebenfalls eine Gruppe.

- (b) Ist  $\mathbf{A} := (\{f \mid f : R_n \rightarrow R_n \wedge f \text{ affin}\}; \square)$  eine Gruppe, so ist  $(\vec{A}; \square)$  mit

$$\vec{A} := \{\vec{f} \mid f \in A\}$$

ebenfalls eine Gruppe.

*Beweis.* (a): Wegen Lemma 11.2.1, (a) ist  $\square$  eine innere Verknüpfung von  $\mathbf{G}_a$ , die nach Satz 1.4.1 assoziativ ist. Nach Voraussetzung gehört die identische Abbildung  $id_V$  zu  $G$ , womit die identische Abbildung  $id_{R_n}$  zu  $G_a$  gehört, die wiederum das Einselement von  $\mathbf{G}_a$  ist. Mit Hilfe von Lemma 11.2.1, (e) zeigt man leicht, daß zu jeder affinen Abbildung  $f \in G_a$  die inverse Abbildung in  $G_a$  existiert. Folglich ist  $\mathbf{G}_a$  eine Gruppe.

(b): ÜA. ■

**Satz 11.2.3 (mit Definitionen)** Seien  $R_n$  ein affiner Punktraum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V_n$  über dem Körper  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und

$$G_1 := (\{\vec{f} \mid \vec{f} : V_n \rightarrow V_n \wedge \vec{f} \text{ bijektive Abbildung}\}; \square),$$

$$G_2 := (\{\vec{f} \in G_1 \mid \exists \vec{g} : V_n \rightarrow V_n \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \vec{g} \text{ isometrisch} \wedge \vec{f} = \lambda \cdot \vec{g}\}; \square),$$

$$G_3 := (\{\vec{f} \in G_1 \mid \vec{f} \text{ isometrisch}\}; \square).$$

Dann sind folgende algebraische Strukturen  $\mathbf{A}_i := (A_i, \square)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , mit

---

<sup>2</sup> Siehe Abschnitt 10.7.

- (a)  $A_1 := \{f \mid f : R_n \rightarrow R_n \wedge \vec{f} \in G_1\}$ , die Menge der **Affinitäten** des  $R_n$ ,<sup>3</sup>  
 (b)  $A_2 := \{f \in A_1 \mid \vec{f} \in G_2\}$ , die Menge der **Ähnlichkeitsabbildungen** des  $R_n$ ,  
 (c)  $A_3 := \{f \in A_1 \mid \vec{f} \in G_3\}$ , die Menge der **Kongruenzen** (bzw. **Bewegungen**) des  $R_n$ ,

Gruppen.

*Beweis.* (a) und (c) folgen aus Satz 11.2.2 und Satz 10.7.2.

(b) prüft man mit Hilfe von (a) leicht nach (ÜA). ■

**Satz 11.2.4** Es sei  $f : R_n \rightarrow R_n$  eine affine Abbildung und auf dem zugehörigen Vektorraum  $V_n$  von  $R_n$  sei eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert. Dann gilt:

$$f \in A_3 \iff \forall P, Q \in R_n : \|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|, \quad (11.6)$$

d.h., die Abbildung  $f$  ist genau dann eine Kongruenz, wenn sie beim Abbilden den Abstand zweier beliebiger Punkte nicht ändert.

*Beweis.* „ $\implies$ “: Sei  $f \in A_3$ , d.h., es existiert eine isometrische Abbildung  $\vec{f}$  mit  $f(X + \mathfrak{x}) = f(X) + \vec{f}(\mathfrak{x})$  für beliebige  $X \in R_n$  und  $\mathfrak{x} \in V_n$ . Für beliebige  $P, Q \in R_n$  mit  $\mathfrak{y} := Q - P$  gilt dann

$$f(Q) - f(P) = f(P + \mathfrak{y}) - f(P) = f(P) + \vec{f}(\mathfrak{y}) - f(P) = \vec{f}(\mathfrak{y}).$$

Unter Verwendung von Satz 10.5.2 folgt hieraus  $\|f(Q) - f(P)\| = \|\vec{f}(\mathfrak{y})\| = \|\mathfrak{y}\|$ . „ $\impliedby$ “: Angenommen, für alle  $P, Q \in R_n$  gilt  $\|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ . Wegen  $\|f(Q) - f(P)\| = \|\vec{f}(P - Q)\|$  folgt hieraus  $\|\vec{f}(\mathfrak{x})\| = \|\mathfrak{x}\|$  für alle  $\mathfrak{x} \in V_n$ . Nach Satz 10.5.2 ist damit  $\vec{f}$  orthogonal oder unitär und damit  $\vec{f}$  isometrisch. ■

Analog kann man den folgenden Satz beweisen.

**Satz 11.2.5 (mit Definition)** Sei  $f : R_n \rightarrow R_n$  eine affine Abbildung und auf dem zugehörigen Vektorraum  $V_n$  von  $R_n$  sei eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert. Dann gilt:

$$f \in A_2 \iff \exists c > 0 : \forall P, Q \in R_n : \|f(Q) - f(P)\| = c \cdot \|Q - P\|. \quad (11.7)$$

Das  $c$  aus (11.7) nennt man **Ähnlichkeitsfaktor**. ■

## 11.3 Einige Invarianten affiner Abbildungen

Analog zu Kapitel 10 lassen sich Invarianten affiner Abbildungen definieren.

**Definition** Es sei  $R_n$  ein affiner Punktraum und  $\mathbf{G}$  eine gewisse Gruppe von auf  $R_n$  definierten affinen Abbildungen. Außerdem bezeichne  $\mathcal{A}(T)$  eine gewisse Aussage über  $T \subseteq R_n$ . Dann nennt man die Aussage  $\mathcal{A}(T)$  eine **Invariante von  $G$** , wenn der Wahrheitsgehalt von  $\mathcal{A}(T)$  mit dem von  $\mathcal{A}(f(T))$  ( $f(T) := \{f(X) \mid X \in T\}$ ) für jedes  $f \in G$  übereinstimmt.

Aus der obigen Definition ergibt sich unmittelbar die folgende Eigenschaft von Invarianten:

---

<sup>3</sup>  $A_1$  ist auch für einen beliebigen Körper  $K$  eine Gruppe.

**Lemma 11.3.1** Es sei  $\mathbf{U}$  eine Untergruppe der Gruppe  $\mathbf{G}$ , die aus affinen Abbildungen eines  $R_n$  auf sich besteht. Dann ist jede Invariante von  $\mathbf{G}$  auch eine von  $\mathbf{U}$ . ■

Beispiele für Invarianten gibt der folgende Satz an.

**Satz 11.3.2 (mit Definition)** Es sei  $R_n$  ein affiner Punktraum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V_n$  über dem Körper  $K = \mathbb{R}$ . Außerdem seien  $\mathbf{A}_i$  für  $i = 1, 2, 3$  die im Satz 11.2.3 definierten Gruppen aus affinen Abbildungen des  $R_n$  auf sich. Dann gilt:

- (a) Aussagen über die Parallelität von Punkträumen sind Invarianten der Gruppe  $\mathbf{A}_1$ .
- (b) Aussagen über Winkel zwischen Punktmenge sind Invarianten von  $\mathbf{A}_2$ .<sup>4</sup>
- (c) Aussagen über die Abstände von Punkten sind Invarianten von  $\mathbf{A}_3$ .
- (d) Seien  $P_0, P_1, R$  Punkte des  $R_n$  mit den Eigenschaften:  $P_0 \neq P_1$  und  $R$  liegt auf der Geraden durch  $P_0$  und  $P_1$ . Die dann existierende Zahl  $r \in \mathbb{R}$  mit  $\overrightarrow{P_0R} = r \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$  heißt **Teilverhältnis** des Tripels  $(P_0, P_1, R)$  und ist eine Invariante von  $\mathbf{A}_1$ .

*Beweis.* (a) folgt aus Satz 11.1.2 und (c) aus Satz 11.2.4.

(b): Seien  $P, P_1, P_2 \in R_n$ ,  $\mathfrak{a} := \overrightarrow{PP_1}$  und  $\mathfrak{b} := \overrightarrow{PP_2}$ . Dann berechnet sich der Winkel  $\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$  durch

$$\cos \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\|}$$

(Siehe 6.4 und 7.2). Ist nun  $f$  eine Ähnlichkeitsabbildung auf  $R_n$ , so läßt sich  $\vec{f}$  mit Hilfe einer Basis  $B$  von  $V_n$ , einer gewissen orthogonalen Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eines  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  wie folgt beschreiben:

$$\forall \mathfrak{x} \in V_n : \vec{f}(\mathfrak{x})_{/B} = \lambda \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{x}_{/B}).$$

Mit Hilfe dieser Darstellung rechnet man leicht nach, daß

$$\cos \angle(\vec{f}(\mathfrak{a}), \vec{f}(\mathfrak{b})) = \cos \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

gilt.

(d): ÜA. ■

Ausgehend von Satz 11.3.2 findet man nun eine Reihe von Sätzen (wie z.B. den aus der Schule her bekannten Strahlensatz), die weitere Invarianten der von uns definierten Gruppen sind. Das Zusammenfassen sämtlicher Invarianten einer Gruppe liefert die zur Gruppe gehörende „Geometrie“:

Die Invarianten von  $\mathbf{A}_1$  bilden die sogenannte **affine Geometrie**, die von  $\mathbf{A}_2$  die **Ähnlichkeitsgeometrie** und die von  $\mathbf{A}_3$  die **euklidische Geometrie (Kongruenzgeometrie)**.

Mit Hilfe von Lemma 11.3.1 sieht man, daß sich die Inklusionen beim Übergang von den Gruppen zu den zugehörigen Geometrien (oder von den Geometrien zu den Gruppen, die aus all den affinen Abbildungen bestehen, die sämtlichen Aussagen der Geometrien als Invarianten haben) umkehren. In der Allgemeinen Algebra

<sup>4</sup> Zur Definition der Winkel zwischen Punktmenge siehe die Abschnitte 7.2 und 6.4.

nennt man einen solchen Zusammenhang eine Galois-Beziehung, die nicht nur bei Geometrien und ihren Invarianten, sondern auch in anderen Teilen der Mathematik auftritt. Mehr dazu im Band 2.

Die Idee zu obigen Klassifizierungen von Geometrien stammt aus dem sogenannten Erlanger Programm von Felix Klein. Eine Übersicht über die durch dieses Programm bewirkte Entwicklung der klassischen Invariantentheorie findet man z.B. in [Olv 99].

## **Teil III**

---

**Numerische Algebra und Kombinatorik**

## Einführung in die Numerische Mathematik

Unter *Numerischer Mathematik* bzw. unter *Numerik* versteht man diejenigen Teile der Mathematik, in denen mathematische Größen aus gegebenen Zahlen auch zahlenmäßig berechnet werden. Insbesondere beschäftigt sich die Numerik mit dem Aufstellen von Rechenvorschriften, nach denen aus Eingangsdaten, die oft mit (bekannten) Fehlern behaftet sind, die gewünschten Ausgangsdaten mit abschätzbarer Genauigkeit berechnet werden.

Die Numerik setzt in der Regel dort ein, wo ein Problem (z.B. der Algebra oder Analysis) als gelöst angesehen werden kann, weil z.B. die Existenz einer Lösung nachgewiesen oder ein Lösungsalgorithmus (möglicherweise aus unendlich vielen Schritten bestehend) gefunden wurde. Bei der konkreten Ermittlung der Lösung eines Problems ergeben sich dann aber eine Reihe von Schwierigkeiten. Oft sind die Ausgangsdaten reelle Zahlen, die man durch endliche Dual- oder Dezimalbrüche annähern muß, oder gewisse Meßdaten, von denen man in etwa weiß, mit welchen Fehlern sie behaftet sind. Da man nicht unendlich lange rechnen kann, muß man sich bei Lösungsalgorithmen mit unendlich vielen Schritten natürlich mit einer endlichen Schrittzahl begnügen. Besteht der Lösungsalgorithmus nur aus endlich vielen Schritten, so kann es passieren, daß dieser Algorithmus numerisch instabil ist, d.h., durch die fehlerhaften Eingangsdaten können Ergebnisse entstehen, die – selbst wenn die Fehler der Eingangsdaten sehr klein sind – stark von den wahren Lösungen abweichen. Die Numeriker suchen in solch einem Fall nach neuen Lösungsalgorithmen, die diese unangenehme Eigenschaft nicht besitzen.

Man sieht also, daß man bei konkreten Berechnungen in der Regel ständig gezwungen ist, Fehler zu machen. Da diese Fehler aber meist unvermeidbar sind, besteht die Aufgabe der Numerik darin, die Fehler in berechenbare Schranken zu halten.

In den folgenden drei Kapiteln soll eine kurze Einführung in die Numerik geben werden, wobei wir uns auf diejenigen Teile beschränken, die sich mit dem nähерungsweisen Lösen von gewissen Gleichungen beschäftigen.

Grundlage fast aller angegebenen Verfahren ist dabei der sogenannte *Banachsche Fixpunktsatz*. Insbesondere setzen wir dann unsere Überlegungen zu den

Gleichungssystemen aus Teil II fort, indem wir uns Näherungsverfahren für LGS überlegen werden.

In diesem Kapitel sollen anschließend noch möglichen Fehlertypen angegeben, in einfachen Fällen die Fehlerfortpflanzung analysiert und gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Intervallarithmetik die Fehler während einer numerischen Rechnung (meist recht grob) unter Kontrolle halten kann.

## 12.1 Fehlertypen

Bei Fehlern in der Numerik meint man nicht logische Fehler, Rechenfehler u.ä., sondern die Unterschiede zwischen Näherungswerten und exakten Werten. Falls der exakte Wert und der Näherungswert Zahlen sind, definieren wir

$$\text{Absoluter Fehler} := |\text{Näherungswert} - \text{exakter Wert}|$$

und

$$\text{Relativer Fehler} := \frac{\text{absoluter Fehler}}{|\text{exakter Wert}|}$$

bzw. (falls der exakte Wert nicht bekannt ist und wir Abschätzungen für den Fehler vornehmen müssen)

$$\text{Relativer Fehler} := \frac{\text{absoluter Fehler}}{|\text{Näherungswert}|}.$$

Etwas allgemeiner (und auf die nachfolgenden Abschnitte zugeschnitten) lassen sich diese Begriffe wie folgt einführen.

**Definitionen** Seien  $x$  und  $\tilde{x}$  Elemente eines Vektorraums  $V$ , auf dem eine Norm  $\| \cdot \|$  definiert ist, und sei  $\Delta x := \tilde{x} - x$ .

Dann heißt

$$\|\Delta x\| = \|\tilde{x} - x\|$$

der **absolute Fehler** zwischen Näherungswert  $\tilde{x}$  und exaktem Wert  $x$ .

Falls  $x \neq 0$  und  $x$  bekannt bzw.  $\tilde{x} \neq 0$  und  $x$  unbekannt ist, versteht man unter dem **relativen Fehler** den Ausdruck

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \text{ bzw. } \frac{\|\Delta x\|}{\|\tilde{x}\|}.$$

Auftreten können Fehler bei der mathematischen Behandlung eines Problems als

- **Modellfehler, Fehler bei den Ausgangsdaten**  
(Z.B. wird bei der Herleitung einer Differentialgleichung, die den freien Fall charakterisiert, nicht der Luftwiderstand berücksichtigt; irrationale Zahlen (wie etwa  $\pi$  oder  $e$ ) sind nur näherungsweise angebar.);
- **Fehler durch Rechnen mit Maschinenzahlen, Rundungsfehler**  
(siehe dazu Abschnitt 12.3);

- **Verfahrensfehler**

(Z.B. durch Ersetzen eines Grenzwertprozesses durch einen finiten Prozeß).

Oft treten bei der mathematischen Behandlung gewisser Probleme alle drei Fehlertypen auf. Ihre Gesamtanalyse ist dabei meist recht aufwendig, manchmal auch unmöglich. Die nachfolgenden Abschnitte 12.2–12.4 geben deshalb nur einige (sehr allgemeine) Methoden der Fehleranalyse bei gewissen Schritten der Abarbeitung von Algorithmen an. Später (bei der Behandlung konkreter numerischer Verfahren) werden wir dann Fehleranalysen konkreter Algorithmen vornehmen.

## 12.2 Fehlerfortpflanzung bei differenzierbaren Funktionen

Wir beginnen mit Abschätzungen für die absoluten Fehler beim Rechnen mit den elementaren Rechenoperationen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  und  $:$ .

Es sei dazu für  $\circ \in \{+, -, \cdot, :\}$  und  $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ :

$$\Delta x := \tilde{x} - x, \quad \Delta y := \tilde{y} - y$$

und

$$\Delta(x \circ y) := (x + \Delta x) \circ (y + \Delta y) - (x \circ y).$$

Dann folgt offensichtlich im Fall  $\circ = +$  aus  $\Delta(x + y) := (x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x + y) = \Delta x + \Delta y$ , daß  $|\Delta(x + y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$  ist.

Ähnlich leicht überlegt man sich die folgenden Abschätzungen bzw. Näherungen für den absoluten Fehler bei Anwendung der anderen Grundrechenarten.

$$|\Delta(x + y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$|\Delta(x - y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$|\Delta(x \cdot y)| \approx |y| \cdot |\Delta x| + |x| \cdot |\Delta y|$$

$$|\Delta(x : y)| \approx \frac{1}{|y|} \cdot |\Delta x| + \frac{|x|}{|y|^2} \cdot |\Delta y|$$

Bei den Abschätzungen für die relativen Fehler benutzen wir das sogenannte **Landausche O-Symbol**<sup>1</sup>, das wie folgt definiert ist:

Seien  $f_1$  und  $f_2$  einstellige Funktionen von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .  $f_1$  heißt dann für  $x \rightarrow 0$  von der Größenordnung  $f_2$  mit der Bezeichnung

---

<sup>1</sup> Edmund Landau (1877–1938), deutscher Mathematiker. Sein Arbeitsfeld war vor allem die analytische und algebraische Zahlentheorie. Besonders Landaus sieben Bücher haben eine große Wirkung gehabt.

$$f_1(x) = O(f_2(x)),$$

wenn eine positive Konstante  $c$  existiert, so daß in einer Umgebung von  $x = 0$  die Ungleichung

$$|f_1(x)| \leq c \cdot |f_2(x)|$$

erfüllt ist.

Es gilt dann (Beweis: ÜA):

$$\left| \frac{\Delta(x+y)}{x+y} \right| \leq \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x+y|}$$

$$\left| \frac{\Delta(x-y)}{x-y} \right| \leq \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x-y|}$$

$$\left| \frac{\Delta(x \cdot y)}{x \cdot y} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| + O(|\Delta x| + |\Delta y|)^2$$

$$\left| \frac{\Delta(x:y)}{x:y} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| + O(|\Delta x| + |\Delta y|)^2$$

Noch einige **Bemerkungen** zu obigen Abschätzungen der absoluten und relativen Fehler:

Aus der Ungleichung für die Subtraktion ist ablesbar, daß bei Subtraktion fast gleicher Zahlen der relative Fehler sehr groß ist. („Auslöschung gültiger Ziffern“).

Gleiches gilt für den absoluten Fehler bei der Division durch (betragsmäßig) kleine Zahlen. Ein kleiner Divisor liefert i.allg. einen großen absoluten Fehler. Die  $O$ -Terme in den Ungleichungen haben in der Regel keinen Einfluß auf die Fehlerschranken und können deshalb meist weggelassen werden. (Sind z.B.  $\Delta x$  und  $\Delta y$  von der Größenordnung  $10^{-6}$ , so sind die  $O$ -Terme von der Größenordnung  $10^{-12}$ .)

Seien nun  $x, x_1, x_2, \dots, x_n$  gewisse reelle Zahlen und  $\tilde{x}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \dots, \tilde{x_n}$  ihre Näherungen. Wie läßt sich dann bei gegebener (ein- bzw. mehrstelliger) Funktion  $f$  die Genauigkeit von  $f(\tilde{x})$  bzw.  $f(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \dots, \tilde{x_n})$  abschätzen?

Ist  $f$  einstellig und eine stetig differenzierbare Funktion, so erhält man als direkte Folgerung aus dem *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* bzw. als Folgerung aus dem *Satz von Taylor*<sup>2</sup> für ein gewisses  $\vartheta \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$  die folgende Gleichung:

$$f(\tilde{x}) = f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x,$$

aus der sich die folgende Abschätzung ergibt:

---

<sup>2</sup> Siehe dazu ein beliebiges Buch über Analysis oder Differential- und Integralrechnung, das für Studenten an Universitäten oder Fachhochschulen geschrieben wurde.

$$|\Delta f(x)| := |f(\tilde{x}) - f(x)| \leq M \cdot |\Delta x|,$$

$$\text{wobei } |f'(x + \vartheta \cdot \Delta x)| \leq M.$$

**Beispiele** Seien  $f(x) := x^3 + 2x$ ,  $x := \sqrt{2}$  und  $\tilde{x} := 1.41$ . Es gilt dann:  $|\tilde{x} - x| \leq 0.01$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 2$  und die Werte von  $f'$  in der Umgebung von  $x := \sqrt{2}$  lassen sich (sehr grob) betragsmäßig mit  $M := 9$  abschätzen. Damit erhalten wir als Abschätzung für den Fehler bei der Bildung von  $f(1.41)$  anstelle von  $f(\sqrt{2})$ :  $|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq 9 \cdot 0.01 = 0.09$ .

Verallgemeinern lässt sich die oben angegebene Abschätzung für differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen mit Hilfe des Satzes von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Für eine  $n$ -stellige Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , deren partielle Ableitungen  $f_{x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) existieren und stetig sind, gilt für ein gewises  $\vartheta \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} & f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1 + \vartheta \cdot \Delta x_1, \dots, x_n + \vartheta \cdot \Delta x_n) \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} |\Delta f(x_1, \dots, x_n)| &:= |f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - f(x_1, \dots, x_n)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot |\Delta x_i|, \\ \text{wobei } & |f_{x_i}(x_1 + \vartheta \cdot \Delta x_1, \dots, x_n + \vartheta \cdot \Delta x_n)| \leq M_i \\ & (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Taylor für Funktionen zweier Veränderlicher lassen sich übrigens unsere eingangs angegebenen Abschätzungen für die elementaren Rechenoperationen ebenfalls leicht begründen. Ist z.B.  $f(x, y) := x \cdot y$ , so haben wir  $f_x(x, y) = y$  und  $f_y(x, y) = x$ , womit  $\Delta f(x, y) = \Delta(x \cdot y) = (y + \vartheta \cdot \Delta y) \cdot \Delta x + (x + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta y$  und damit  $|\Delta(x \cdot y)| \approx |y| \cdot |\Delta x| + |x| \cdot |\Delta y|$  gilt.

Es sei noch bemerkt, daß die Resultate bei der Berechnung von Funktionswerten in der Regel nicht nur durch Fehler bei den Argumenten, sondern zumeist auch noch durch genäherte Funktionswertberechnung verfälscht werden. Möglichen Methoden der Fehleranalyse für solche Fälle entnehme man [Mae 84].

### 12.3 Maschinenzahlen, Rundungsfehler

Maschinenzahlen sind die mit einer bestimmten Codierung darstellbaren Zahlen in einem Computer.

Wir wollen hier nur einen Typ von Maschinenzahlen behandeln.

Für  $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ( „**Basis**“ ) und  $l, m \in \mathbb{N}$  sei

$$\mathbb{M}(p, l, m)$$

die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x = 0$  oder es existieren gewisse  $\alpha, \beta \in \{+, -\}$ ,  $d_i, e_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  mit

$$x = \alpha(d_1 \cdot p^{-1} + d_2 \cdot p^{-2} + \dots + d_l \cdot p^{-l}) \cdot p^{\beta(e_1 \cdot p^{m-1} + e_2 \cdot p^{m-2} + \dots + e_m \cdot p^0)}$$

und  $d_1 \neq 0$  (zwecks eindeutiger Darstellung der Zahlen  $\neq 0$ ).

Die Elemente  $x \in \mathbb{M}(p, l, m) \setminus \{0\}$  schreiben wir kurz in der sogenannten **halblogarithmischen Darstellung**

$$\alpha 0.d_1 d_2 \dots d_l (\beta e_1 e_2 \dots e_m)$$

oder (etwas verkürzt) in der Form

$$\alpha d_1 d_2 \dots d_l (\beta e_1 e_2 \dots e_m)$$

auf, wobei wir die Vorzeichen  $\alpha$  oder  $\beta$  weglassen, falls sie gleich  $+$  sind.

Den Ausdruck

$$\alpha d_1 d_2 \dots d_l$$

nennt man auch **Mantisse** von  $x$  und

$$\beta e_1 e_2 \dots e_m$$

wird **Exponent** von  $x$  genannt.

#### Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(2, 2, 1) &= \{0\} \cup \{\alpha 0.d_1 d_2 (\beta e) \mid \alpha \in \{+, -\} \wedge \{d_1, d_2, e\} \subseteq \{0, 1\} \wedge d_1 \neq 0\} \\ &= \{-0.11(+1), -0.11(0), -0.11(-1), -0.10(+1), -0.10(0), -0.10(-1), 0, \\ &\quad 0.10(-1), 0.10(0), 0.10(+1), 0.11(-1), 0.11(0), 0.11(+1)\} \\ &= \left\{ -\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Beim Umgang mit Maschinenzahlen hat man folgende wesentliche Unterschiede zwischen  $\mathbb{M}(p, l, m)$  und  $\mathbb{R}$  zu beachten:

- $\mathbb{M}(p, l, m)$  ist endlich.

Genauer:  $|\mathbb{M}(p, l, m)| = 2 \cdot (p-1) \cdot p^{l-1} \cdot (2 \cdot p^m - 1) + 1$ .

- In  $\mathbb{M}(p, l, m)$  gibt es eine eindeutig bestimmte größte Zahl

$$x_{\max} (:= 0.hhh \dots h (+hhh \dots h)) \text{ mit } h := p - 1$$

und eine eindeutig bestimmte positive kleinste Zahl

$$x_{\min} (:= 0.100 \dots 0 (-hhh \dots h)) \text{ mit } h := p - 1.$$

- Die Zahlen von  $\mathbb{M}(p, l, m)$  liegen nicht gleichabständig auf der Zahlengeraden verteilt. Ihre Abstände nehmen mit wachsendem Exponenten zu. Jedoch ist grob betrachtet der relative Abstand  $\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}$  zweier benachbarter Maschinenzahlen  $x_{i+1}$  und  $x_i$  ( $\neq 0$ ) überall ungefähr derselbe, so daß unabhängig von der Größenordnung etwa die gleiche relative Genauigkeit bei der Approximation einer beliebigen Zahl durch eine Maschinenzahl möglich ist.
- Durch die Forderung  $d_1 \neq 0$  in der obigen halblogarithmischen Darstellung von  $x \in \mathbb{M}(p, l, m)$  befindet sich in der Umgebung des Nullpunktes ein „Loch“, d.h., in den Intervallen  $[0, x_{\min}]$  und  $[-x_{\min}, 0]$  sind nur die Randpunkte aus  $\mathbb{M}(p, l, m)$ .
- Benutzt man anstelle von Elementen aus  $\mathbb{R}$  Maschinenzahlen (eines Computers), so können erste Fehler schon beim Einlesen der Zahlen entstehen. Wir wollen hier dieses „Einlesen“ nur durch zwei mögliche **Einleseabbildungen**  $\hat{\gamma}$  („Abschneiden“, „Abbruch“) und  $\tilde{\gamma}$  („Runden“) für den Fall

$$p = 10$$

beschreiben und dann anschließend einige Fehlerabschätzungen vornehmen.

Zwecks genauer Definition von  $\hat{\gamma}$  und  $\tilde{\gamma}$  unterteilen wir  $\mathbb{R}$  in die Intervalle

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{\infty} &:= (-\infty, -x_{\max}) \cup (x_{\max}, +\infty), \\ \mathbb{R}_{\min} &:= (-x_{\min}, x_{\min})\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{R}_M := \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}_{\infty} \cup \mathbb{R}_{\min}).$$

Die Einleseabbildung  $\hat{\gamma}$  läßt sich dann für eine reelle Zahl  $x$  mit dem Vorzeichen  $\text{sign}(x)$  wie folgt definieren:

$$\hat{\gamma}(x) := \begin{cases} \alpha 0.d_1d_2\dots d_l(\beta e_1e_2\dots e_m), & \text{falls } \alpha 0.d_1d_2\dots d_ld_{l+1}\dots(\beta e_1e_2\dots e_m) \in \mathbb{R}_M, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}_{\min}, \\ \text{sign}(x)x_{\max}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}_{\infty}. \end{cases}$$

$\hat{\gamma}(x)$  ist also die zu  $x$  in Richtung des Nullpunktes nächstgelegene Maschinenzahl. Die Einleseabbildung  $\tilde{\gamma}$  liefert dagegen die folgenden Maschinenzahlen:

$$\tilde{\gamma}(x) := \begin{cases} \text{die betragsmäßig größte, am nächsten an } x \\ \text{gelegene Maschinenzahl aus } \mathbb{M}(p, l, m), & \text{falls } x \in \mathbb{R}_M, \\ \hat{\gamma}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls  $x \in \mathbb{R}_M$  und

$$x = \underbrace{\alpha 0.d_1 d_2 \dots d_l d_{l+1} d_{l+2} \dots}_{=: a} (\beta e_1 e_2 \dots e_m), \quad \underbrace{(\beta e_1 e_2 \dots e_m)}_{=: k}$$

d.h.,  $x = a \cdot p^k$ , gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$|\gamma(x) - x| \leq \begin{cases} p^{-l} \cdot p^k & \text{für } \gamma = \hat{\gamma}, \\ \frac{1}{2} \cdot p^{-l} \cdot p^k & \text{für } \gamma = \tilde{\gamma} \end{cases}$$

für den absoluten Fehler und

$$\frac{|\gamma(x) - x|}{|x|} \leq \begin{cases} p^{-l+1} & \text{für } \gamma = \hat{\gamma}, \\ \frac{1}{2} \cdot p^{-l+1} & \text{für } \gamma = \tilde{\gamma} \end{cases}$$

für den relativen Fehler, da  $a \cdot p > 1$  und damit

$$\frac{|\gamma(x) - x|}{|a \cdot p^k|} = \frac{|\gamma(x) - x|}{|(a \cdot p) \cdot p^{k-1}|} \leq \frac{|\gamma(x) - x|}{|p^{k-1}|}$$

gilt.

Eine Maschinenzahlmenge  $\mathbb{M}(p, l, m)$ , zu der die Einleseabbildung  $\gamma \in \{\hat{\gamma}, \tilde{\gamma}\}$  gehört, bezeichnen wir mit

$$(\mathbb{M}(p, l, m); \gamma).$$

- Definiert man für  $(\mathbb{M}(p, l, m); \gamma)$  als Operationen

$$x \otimes y := \gamma(x \times y),$$

wobei  $\times \in \{+, \cdot\}$ , so gelten für diese genäherten rationalen Operationen i.allg. das Assoziativ- und das Distributivgesetz nicht mehr, wie man sich anhand von Beispielen leicht überlegen kann (siehe ÜA A.12.3). Mit Hilfe eines Computers ist also nur eine sogenannte *Pseudoarithmetik* möglich.

## 12.4 Intervallarithmetik

Es ist naheliegend zu versuchen, dem Computer selbst die Buchhaltung über den durch Fehlerfortpflanzung entstehenden Genauigkeitsverlust zu übertragen. Anstelle von Näherungswerten, die mit Fehlern behaftet sind, verwendet man Intervalle, in denen die exakten Werte liegen. Z.B. rechnet man anstelle der durch Runden bzw. Abbruch entstandenen Zahl  $\tilde{x} = 0.947$  mit dem Intervall

$$I := [0.9465, 0.9475]$$

bzw.

$$I := [0.9470, 0.9480],$$

in denen der exakte Wert liegt.

Nachfolgend soll kurz das Rechnen mit solchen Intervallen erklärt werden. Zunächst kann man natürlich leicht für beliebige Intervalle  $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$  und  $\circ \in \{+, -, \cdot, :\}$  festlegen:

$$[a, b] \circ [c, d] := \{x \circ y \mid x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\}.$$

Da sich aus

$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

bzw.

$$a \leq x \leq b, -d \leq y \leq -c$$

die Ungleichungen

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

bzw.

$$a - d \leq x - y \leq b - c$$

ergeben, gilt

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

Bei der Multiplikation und Division hängen die Intervallgrenzen der Ergebnissintervalle von den Vorzeichen von  $a, b, c, d$  ab. Man erhält:<sup>3</sup>

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

$$[a, b] : [c, d] = \left[ \min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\}, \max \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\} \right]$$

Die Intervallarithmetik umfaßt die Arithmetik der reellen Zahlen, denn man kann wegen  $[a, a] = \{a\}$  setzen:

$$a = [a, a].$$

---

<sup>3</sup> Die nachfolgend benutzte Abbildung  $\min : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich unter Verwendung der auf  $\mathbb{R}$  üblicherweise definierten Ordnung  $\leq$  wie folgt definieren:  $\min A = \alpha \iff ((\forall x \in A : \alpha \leq x) \wedge (\forall u \in \mathbb{R} (\forall x \in A : u \leq x \implies u \leq \alpha)))$ . Analog definiert man  $\max$ .

Die Intervallrechnung kann auch auf Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher ausgedehnt werden.

Falls  $x \in [a, b]$  und  $f$  eine über  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  erklärte einstellige Funktion ist, so sei

$$f([a, b]) := \{f(t) \mid t \in [a, b]\}$$

der Ersatz von  $f(x)$  bei der Intervallrechnung.

Verallgemeinern läßt sich diese Definition zu der folgenden:

Seien  $x_i \in [a_i, b_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine für  $x_i \in [a_i, b_i]$  erklärte  $n$ -stellige Funktion. Dann sei

$$f([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]) := \{f(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \forall i : t_i \in [a_i, b_i]\}.$$

Ist speziell  $f$  im betrachteten Intervall stetig, so gilt<sup>4</sup>

$$f([a, b]) := [\min_{t \in [a, b]} f(t), \max_{t \in [a, b]} f(t)]$$

$$f([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]) :=$$

$$\left[ \min_{t_1 \in [a_1, b_1]} f(t_1, t_2, \dots, t_n), \max_{t_1 \in [a_1, b_1]} f(t_1, t_2, \dots, t_n) \right]$$

Bei der Intervallrechnung hat man einiges zu beachten:

Muß gerundet werden, so ist stets bei den unteren Intervallgrenzen abzurunden und bei den oberen Intervallgrenzen aufzurunden, damit das exakte Ergebnis mit Sicherheit innerhalb des Ergebnisintervalls liegt.

Während Kommutativ- und Assoziativgesetze für die Intervalladdition und die Intervallmultiplikation gültig bleiben, gilt das Distributivgesetz nur in der abgeschwächten Form:

$$[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) \subseteq [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f]$$

(Beweis: ÜA A.12.6).

Weitere Überlegungen sowie Literaturhinweise zur Intervallarithmetik findet man z.B. in [Mae 84].

Abschließend eine kurze Zusammenfassung der Vorgehensweise bei der Intervallrechnung:

- (a) Ersetzen der fehlerhaften Eingangsgrößen  $x_i$  durch Intervalle  $[a_i, b_i]$  mit  $x_i \in [a_i, b_i]$ .

---

<sup>4</sup> Wir verwenden die Schreibweise

$$\min_{t \in [a, b]} f(t)$$

anstelle von  $\min\{f(t) \mid t \in [a, b]\}$ . Entsprechendes sei für  $\max$  definiert.

- (b) Durchführen der Rechnung mit den Intervallen  $[a_i, b_i]$  anstelle der  $x_i$  gemäß obiger Regeln. Man erhält ein Ergebnisintervall  $[a, b]$ .
- (c) Berechnung eines Näherungswertes  $\tilde{y}$  für das gesuchte Ergebnis  $y$  und einer Fehlerschranke für  $\Delta y$ . Z.B. kann dies für  $y \in [a, b]$  nach der Vorschrift

$$\tilde{y} := \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

und

$$|\Delta y| = |\tilde{y} - y| \leq \frac{1}{2} \cdot (b - a)$$

erfolgen.

# 13

---

## Gleichungsauflösung

### 13.1 Problemstellung, geometrische Deutung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Lösung des folgenden Problems befassen:

**Gegeben:** Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$ ,  $A \subseteq V$ ,  
Abbildung  $f : A \rightarrow A$

**Gesucht:**  $x_* \in A$  mit  $f(x_*) = x_*$   
( $x_*$  heißt **Fixpunkt** der Abbildung  $f$ .)

Die Gleichung  $f(x) = x$  kann auch in der Form  $g(x) := f(x) + (-x) = 0$  aufgeschrieben werden, wobei  $0$  das Nullelement des Vektorraums und  $-x$  das zu  $x$  inverse Element bez.  $+$  bezeichnet.

Umgekehrt kann man eine Gleichung der Form  $g(x) = 0$  durch Addition von  $x$  in die Form  $f(x) := g(x) + x = x$  überführen.

Damit handelt es sich also bei dem obigen Problem letztlich um das Problem der Nullstellenberechnung bzw. der Auflösung von Gleichungen der Form  $g(x) = 0$ , wobei  $g$  eine Abbildung aus  $V$  in  $V$  ist. Wie wir weiter unten sehen werden, gestattet uns die Überführung der Nullstellenberechnungs- in eine Fixpunktberechnungsaufgabe den Einsatz eines Iterationsverfahrens, das wir uns im nächsten Abschnitt herleiten wollen. Vorher jedoch einige

#### Beispiele

$$g(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (V = \mathbb{R}) \quad (13.1)$$

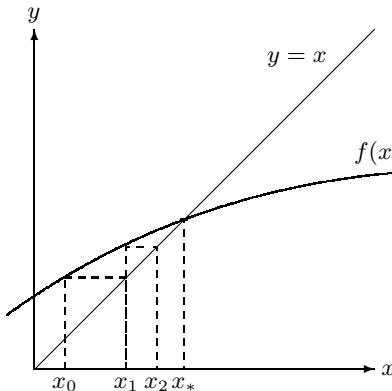
$$f(x) := \cos x + \sin x + x^2 = x \quad (V = \mathbb{R}) \quad (13.2)$$

$$g(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \quad (\mathfrak{x} \in V := K^{n \times 1}, \mathfrak{A} \in K^{m \times n}, \mathfrak{b} \in K^{m \times 1}) \quad (13.3)$$

Bei der Gleichung (13.1) handelt es sich um eine Polynomgleichung, Gleichung (13.2) ist ein Beispiel für eine sogenannte transzendenten Gleichung und Gleichung (13.3) ist die Matrzenschreibweise eines linearen Gleichungssystems.

Im Gegensatz zu den LGS, für die wir uns bereits Lösbarkeitskriterien und Lösungsverfahren überlegt haben, kann man in den seltensten Fällen die Lösungen von nichtlinearen Gleichungen mit Hilfe von Formeln angeben, womit wir auf Näherungsverfahren angewiesen sind.

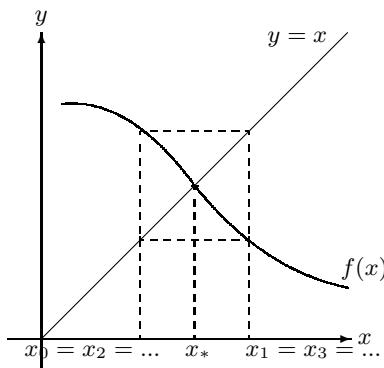
Ein mögliches Verfahren kann man sich für den Fall  $V = \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt geometrisch überlegen:



**Abb. 13.1**

Jede Lösung  $x_*$  der Gleichung  $f(x) = x$  ist Schnittpunkt der Geraden  $y = x$  mit dem Graphen der Funktion  $y = f(x)$ .

Gibt man sich nun als erste Näherung für  $x_*$  ein gewisses  $x_0$  vor und bildet  $x_1 := f(x_0)$ ,  $x_2 := f(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $x_{n+1} := f(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), so erhalten wir in dem in Abbildung 13.1 skizzierten Fall eine Folge von Näherungswerten  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) für  $x_*$ , die gegen  $x_*$  konvergiert. Dieses Verfahren liefert aber nicht in jedem Fall eine Lösung, wie das Beispiel aus Abbildung 13.2 zeigt.



**Abb. 13.2**

Im nächsten Abschnitt soll nun für beliebige Vektorräume geklärt werden, unter welchen Bedingungen das oben angegebene Iterationsverfahren Lösungen liefert. In nachfolgenden Abschnitten werden wir dann dieses Verfahren für konkrete Aufgaben modifizieren.

## 13.2 Der Banachsche Fixpunktsatz

In diesem Abschnitt bezeichne  $V$  stets einen Vektorraum über dem Körper  $K$ , auf dem eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert ist.

In Verallgemeinerung bekannter Konvergenzbegriffe für Folgen reeller Zahlen definieren wir:

**Definition** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} (= (x_1, x_2, x_3, \dots))$  eine Folge von Elementen  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) aus  $V$ . Dann heißt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} :\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

**Definition** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Elementen aus  $V$  und  $x_* \in V$ . Dann heißt

$$x_* \text{ Grenzwert von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} :\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \|x_n - x_*\| < \varepsilon).$$

Wir schreiben wie üblich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*.$$

Man kann leicht beweisen, daß eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, konvergiert. Jedoch besitzt nicht jede konvergente Folge eines Vektorraums  $V$  auch einen Grenzwert in  $V$ , wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei  $V = \mathbb{Q}$  und  $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .<sup>1</sup>

**Definition** Ein Vektorraum  $KV$ , in dem jede konvergente Folge einen Grenzwert in  $V$  besitzt, heißt **Banach-Raum**<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Kurz zum Beweis, den man ausführlich in Büchern über Analysis nachlesen kann. Indem man die Monotonie und Beschränktheit der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zeigt, folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert. Man kann auf diese Weise die Zahl  $e$  durch  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  definieren. Mit Hilfe der Zahl  $e$  läßt sich die Potenzfunktion  $f(x) := e^x$  definieren, deren Ableitung wieder  $f(x)$  ist. Nach dem Satz von Taylor (für die Funktion  $f(x) = e^x$  und  $x = 0$  sowie unter Verwendung des Restglieds von Lagrange) existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  ein reelle Zahl  $\vartheta \in (0, 1)$  mit

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\vartheta}{(n+1)!}$$

Angenommen,  $e \in \mathbb{Q}$ , d.h., es existieren  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $e = \frac{p}{q}$ . Die Zahl  $n$  läßt sich so groß wählen, daß  $e \cdot n! = \frac{p}{q} \cdot n! \in \mathbb{N}$ . Aus obiger Gleichung für  $e$  folgt dann für  $n \geq 2$  ein Widerspruch:

$$\underbrace{e \cdot n!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{e^\vartheta}{n+1}}_{\notin \mathbb{N}, \text{ da } 1 < e^\vartheta < 3}.$$

Also gilt  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

<sup>2</sup> Stefan Banach (1892–1945), polnischer Mathematiker. Verfaßte Arbeiten über die Theorie der reellen Funktionen, über Orthogonalreihen, über Maßtheorie und zur Theorie der linearen Operatoren in abstrakten Räumen.

**Satz 13.2.1 (Banachscher Fixpunktsatz)**

Sei  $A$  eine (bez. Grenzwertbildung) abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes  $KV$  und bezeichne  $f$  eine Abbildung von  $A$  in  $A$ . Außerdem existiere ein

$$k \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (13.4)$$

das die sogenannte **Lipschitz-Bedingung**<sup>3</sup>

$$\forall x, x' \in A : \|f(x) - f(x')\| \leq k \cdot \|x - x'\| \quad (13.5)$$

erfüllt. Dann besitzt die Abbildung  $f$  in  $A$  genau einen Fixpunkt  $x_*$  und die Folge

$$\begin{cases} x_0 \text{ gegeben,} \\ x_{n+1} := f(x_n) \ (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases} \quad (13.6)$$

konvergiert für beliebig gewähltes  $x_0 \in A$  gegen  $x_*$ .

*Beweis.* Zum Beweis genügt es, die folgenden drei Aussagen zu beweisen:

- (1.) Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- (2.)  $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ist Fixpunkt von  $f$ .
- (3.)  $x_*$  ist eindeutig bestimmt.

**Zu (1.):**

Wir haben zu zeigen, daß  $\|x_n - x_m\|$  beliebig klein wird, wenn  $n, m$  nur hinreichend groß gewählt werden.

Zunächst ergibt sich aus der Lipschitz-Bedingung die folgende Abschätzung für  $\|x_{n+1} - x_n\|$ :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\stackrel{\text{Def.}}{=} \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} k \cdot \|x_n - x_{n-1}\| \stackrel{\text{Def.}}{=} k \cdot \|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\| \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} k^2 \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \dots \leq k^n \cdot \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \cdot \|x_1 - x_0\|. \quad (13.7)$$

Hieraus erhalten wir unter Verwendung der Normeigenschaften („Dreiecksungleichung“) für  $m > n$ :

---

<sup>3</sup> Rudolf Lipschitz (1832–1903), deutscher Mathematiker. Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen, zur Potentialtheorie und zur Reihenlehre.

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq k^{m-1} \cdot \|x_1 - x_0\| + k^{m-2} \cdot \|x_1 - x_0\| + \dots + k^n \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&= \underbrace{k^n \cdot (k^{m-n-1} + k^{m-n-2} + \dots + k + 1)}_{k^n \cdot \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k}} \cdot \|x_1 - x_0\|,
\end{aligned}$$

womit gilt:

$$\forall m > n \geq 1 : \|x_m - x_n\| \leq \frac{k^n - k^m}{1 - k} \cdot \|x_1 - x_0\|. \quad (13.8)$$

Wegen der Voraussetzung (13.4) streben  $k^n$  und  $k^m$  für  $n, m \rightarrow \infty$  gegen 0, d.h., die rechte Seite von (13.8) kann bei passender Wahl von  $n, m$  stets kleiner als ein beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  werden. Folglich ist unsere Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent.

### Zu (2.):

Da in jedem Banach-Raum die Grenzwerte von konvergenten Folgen zum Raum gehören und  $A$  abgeschlossen ist, existiert in  $A$  ein  $x_*$  mit  $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Zum Nachweis von  $f(x_*) = x_*$  betrachten wir die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
\|f(x_*) - x_*\| &= \|f(x_*) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - x_*\| \\
&\leq \|f(x_*) - f(x_{n-1})\| + \|\underbrace{f(x_{n-1}) - x_*}_{= x_n}\| \\
&\leq k \cdot \|x_* - x_{n-1}\| + \|x_n - x_*\|.
\end{aligned} \quad (13.9)$$

Aus der Konvergenz der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt nun, daß die rechte Seite von (13.9) beliebig klein bei einem passend gewählten  $n$  werden kann. Da  $\|\cdot\| \geq 0$ , ergibt sich hieraus  $\|f(x_*) - x_*\| = 0$ , was nach den Normaxiomen nur für  $f(x_*) - x_* = 0$  bzw.  $f(x_*) = x_*$  möglich sein kann.

### Zu (3.):

Angenommen, es existiert ein von  $x_*$  verschiedener zweiter Fixpunkt  $x_{**}$  von  $f$ . Dann gilt (unter Verwendung von (13.5)):

$$\|x_* - x_{**}\| = \|f(x_*) - f(x_{**})\| \leq k \cdot \|x_* - x_{**}\|,$$

woraus sich

$$(1 - k) \cdot \|x_* - x_{**}\| \leq 0 \quad (13.10)$$

ergibt. Da  $1 - k > 0$  und  $\|\cdot\| \geq 0$  ist (13.10) nur im Fall  $\|x_* - x_{**}\| = 0$  erfüllbar, d.h., es gilt  $x_* = x_{**}$ , im Widerspruch zu unserer Annahme  $x_* \neq x_{**}$ . ■

Dem Beweis von Satz 13.2.1 kann man zwar bereits Fehlerabschätzungen entnehmen, jedoch wollen wir uns nachfolgend noch eine Abschätzung überlegen, in der nur  $k$  und die ersten Näherungen  $x_0$  sowie  $x_1$  für  $x$  vorkommen.

**Satz 13.2.2** *f erfülle die Voraussetzungen von Satz 13.2.1, und es sei  $f(x_*) = x_*$ . Dann gilt*

$$\|x_* - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot \|x_1 - x_0\| \quad (13.11)$$

für alle  $n \geq 2$ .

*Beweis.* Aus der Definition der  $x_i$  und den Voraussetzungen erhält man

$$\begin{aligned} \|x_* - x_n\| &= \|f(x_*) - f(x_n) + f(x_n) - x_n\| \\ &\leq \|f(x_*) - f(x_n)\| + \|\underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} - x_n\| \\ &\leq k \cdot \|x_* - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|. \end{aligned}$$

Folglich (unter Verwendung von (13.7) aus dem Beweis von Satz 13.2.1):

$$(1-k) \cdot \|x_* - x_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Hieraus folgt dann unsere Behauptung. ■

Wie kann man aber nun feststellen, ob eine gegebene Abbildung die Lipschitz-Bedingung erfüllt?

Wir werden diese Frage für gewisse Klassen von Abbildungen  $f$  in den sich anschließenden Abschnitten beantworten. Ein erstes einfaches Beispiel liefert der folgende Satz.

**Satz 13.2.3** *Bezeichne f eine Funktion aus  $C[a, b]$  (d.h., f ist eine stetige Funktion über dem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ), die für alle  $x \in (a, b)$  differenzierbar ist und deren Ableitung  $f'$  zu  $C[a, b]$  gehört. Dann gilt*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq (\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|) \cdot |x_1 - x_2|. \quad (13.12)$$

*Beweis.* Die Behauptung unseres Satzes ist eine direkte Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung<sup>4</sup>, nach dem (unter den gegebenen Voraussetzungen) für beliebig ausgewählte  $x_1, x_2 \in [a, b]$  ein gewisses  $\tau \in (x_1, x_2)$  mit

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\tau)$$

existiert. ■

<sup>4</sup> Siehe ein beliebiges Buch über Analysis.

### 13.3 Das Newton-Verfahren, die Regula falsi

Sei nachfolgend  $g \in C[a, b]$ , d.h.,  $g$  ist eine (reellwertige) stetige Funktion über dem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Gilt  $g(a) \cdot g(b) < 0$  (d.h.,  $g(a)$  und  $g(b)$  haben unterschiedliche Vorzeichen), so besitzt  $g$  in  $[a, b]$  mindestens eine Nullstelle, die man durch das sogenannte **Bisektionsverfahren (Methode der Intervallhalbierung)** grob annähern (bzw., falls man nur lange genug rechnet, auch berechnen) kann:

Gegeben:  $g$  (Funktion)

$a, b$  (Intervallgrenzen mit  $a < b$ ,  $g(a) > 0$  und  $g(b) < 0$ )

$\varepsilon$  (Genauigkeitsschranke)

**Bisektionsverfahren:**

$$1. x := \frac{a+b}{2} \quad (\text{Intervallhalbierung})$$

2. falls  $g(x) \leq 0$ , dann  $b := x$ , sonst  $a := x$  (Auswahl des neuen Intervalls)

3. falls  $|b - a| > \varepsilon$ , dann Schritt 1.,                   (Rücksprung, falls Intervall noch zu groß)

sonst drucke  $a, b$

Das Ergebnis dieses Verfahrens sind neue Intervallgrenzen  $a, b$  einer Nullstelle von  $g$ , für die  $|b - a| \leq \varepsilon$  gilt. Offenbar konvergiert das Bisektionsverfahren für jede Funktion  $g$  gleich langsam. Aus diesem Grunde ist dieses Verfahren zumeist nur dazu geeignet, erste Näherungen für die Nullstellen von  $g$  zu ermitteln.

Nachfolgend sollen nun zwei Verfahren vorgestellt werden, mit denen man vorhandene Nullstellen von  $g$  unter Kenntnis gewisser Anfangsnäherungen berechnen kann. Herleiten lassen sich diese Verfahren mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes unter Verwendung der folgenden Überlegung, die man leicht nachprüft.

**Lemma 13.3.1** Sei  $\mu$  eine Funktion mit  $\mu(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  und

$$f(x) := x - \mu(x) \cdot g(x).$$

Dann gilt für beliebige  $x \in [a, b]$ :

$$g(x) = 0 \iff f(x) = x,$$

d.h., die Berechnung einer Nullstelle von  $g$  ist gleichbedeutend mit der Berechnung eines Fixpunktes von  $f$ . ■

Wir wollen jetzt die Funktion  $\mu$  so festlegen, daß die Berechnung des Fixpunktes von  $f$  möglichst gut durch das im Abschnitt 13.2 beschriebene Iterationsverfahren (13.6) möglich wird.

Falls die erste Ableitung  $g'$  von  $g$  existiert und für alle  $x \in [a, b]$  von Null verschieden ist, können wir

$$\mu(x) := \frac{1}{g'(x)}$$

wählen. Dann gilt

$$f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

und als Spezialfall von Satz 13.2.1 erhalten wir:

**Newton-Verfahren<sup>5</sup>:**

$x_0$	(vorgegebene Näherung)
$n = 0, 1, 2, \dots$	(Schrittnummer)
$x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$	

Geometrisch lässt sich dieses Verfahren wie folgt deuten (siehe Abbildung 13.3):

Zu vorgegebenen  $x_0$  lege man im Punkt  $(x_0, g(x_0))$  die Tangente an den Graph der Funktion  $g$ , die sich bekanntlich durch die Gleichung  $y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0)$  beschreiben lässt.  $x_1 := x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$  ist dann der Schnittpunkt dieser Tangente mit der  $x$ -Achse. Konstruktion der Tangente im Punkt  $(x_1, g(x_1))$  und Berechnung des Schnittpunktes mit der  $x$ -Achse liefert dann  $x_2$ , usw. Offenbar konvergiert dieses Verfahren in dem in der Abbildung 13.3 angegebenen Fall. Ein Beispiel für das Versagen dieses Verfahrens kann man der Abbildung 13.4 entnehmen.

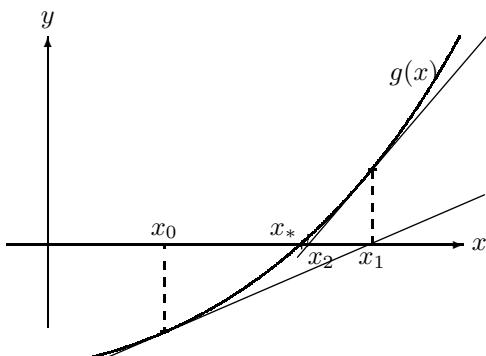


Abb. 13.3

---

<sup>5</sup> Isaac Newton (1642–1727), englischer Physiker und Mathematiker. Begründer der theoretischen Physik und der Himmelsmechanik, Mitbegründer der Infinitesimalrechnung.

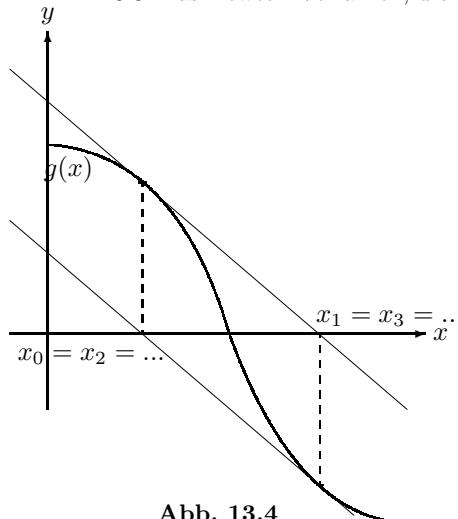


Abb. 13.4

**Satz 13.3.2** Das Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle  $x_* \in [a, b]$  von  $g(x)$  konvergiert für eine beliebige Anfangsnäherung  $x_0 \in [a, b]$ , falls  $g$  zweimal differenzierbar ist,  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  ist und ein  $k \in [0, 1)$  mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$\forall x \in [a, b] : \left| \frac{g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} \right| \leq k.$$

*Beweis.* Unser Satz läßt sich mit Hilfe der Sätze 13.2.1 und 13.2.3 beweisen. Dazu sei daran erinnert, daß wir das Newton-Verfahren durch Wahl von  $f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$  aus Satz 13.2.1 erhalten haben. Wegen Satz 13.2.3 konvergiert folglich unser Verfahren, wenn wir zeigen können, daß die erste Ableitung der Funktion  $f(x)$  im betrachteten Intervall betragsmäßig echt kleiner 1 ist. Offenbar gilt

$$f'(x) = 1 - \frac{(g'(x))^2 - g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2}.$$

Erfüllt also  $g$  die im Satz genannten Voraussetzungen, so konvergiert das Newton-Verfahren nach Satz 13.2.3. ■

**Beispiel** Seien  $g(x) := x^2 - a$  und  $a > 0$ . Da in diesem Fall  $g'(x) = 2 \cdot x$  und damit  $f(x) = x - \frac{x^2-a}{2x} = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{a}{x})$  ist, läßt sich eine der zwei Nullstellen von  $g$  – wir wählen  $\sqrt{a}$  – mit dem Newton-Verfahren wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} x_0 &:= \frac{1+a}{2} \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ (n &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$x_0 := \frac{1+a}{2}$  wurde gewählt, weil in diesem Fall  $x_0 \in [\sqrt{a}, b]$  mit  $b > \sqrt{a}$ ,  $x_n \in [\sqrt{a}, x_0]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in [\sqrt{a}, b]$

$$\left| \frac{g(x) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} \right| \leq \frac{1}{2} - \frac{a}{2b^2} < 1$$

gilt, woraus sich nach Satz 13.3.2 die Konvergenz des oben stehenden Verfahrens ergibt.

**Bemerkung** Da der Nachweis der Konvergenz für das Newton-Verfahren meist aufwendig ist, verschafft man sich mit Hilfe des Bisektionsverfahrens zunächst gewisse Intervallgrenzen  $a_0, b_0$  und beginnt mit der Iteration nach dem Newton-Verfahren, wobei  $x_0 := a_0$  gewählt wird. Liegt das berechnete  $x_1$  außerhalb des Intervalls  $[a_0, b_0]$ , so verkleinert man das Intervall  $[a_0, b_0]$  durch Wahl eines  $c$  (z.B. indem man das Intervall halbiert und  $c := \frac{a+b}{2}$  wählt). Ist  $g(c) \cdot g(a_0) < 0$ , so setzt man  $a_1 := a_0$  und  $b_1 := c$ , ist  $g(c) \cdot g(a_0) > 0$ , so setzt man  $a_1 := c$  und  $b_1 := b_0$  und beginnt die Iteration von neuem, usw.

Ist die Funktion  $g$  nicht differenzierbar oder die erste Ableitung von  $g$  schwer berechenbar, so kann man z.B.

$$\mu := \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$$

wählen und erhält als neues Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von  $g$ :

**Regula falsi, erste Form:**

$x_0, x_1$	(vorgegebene Näherungen)
$n = 1, 2, \dots$	(Schrittnummer)
$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n - x_0}{g(x_n) - g(x_0)} \cdot g(x_n)$	

Geometrisch lässt sich dieses Verfahren analog zum Newton-Verfahren deuten, indem man anstelle der Tangente im Punkt  $x_0$  die Gerade durch die Punkte  $(x_0, g(x_0))$  und  $(x_1, g(x_1))$  betrachtet und als neue Näherung  $x_2$  für die gesuchte Nullstelle von  $g$  den Schnittpunkt dieser Geraden mit der  $x$ -Achse wählt (siehe Abbildung 13.5; Beweis: ÜA).

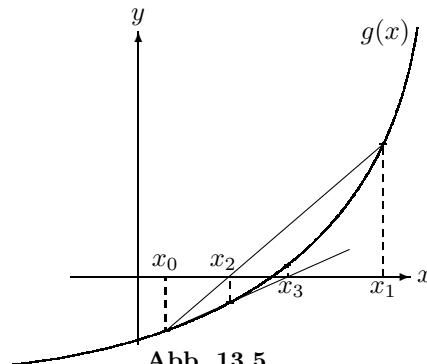


Abb. 13.5

Im allgemeinen konvergiert die Regula falsi (1. Form) schlechter als das Newton-Verfahren. Auch die Modifikation dieses Verfahrens

### **Regula falsi, zweite Form:**

$$\begin{array}{ll} x_0, x_1 & (\text{vorgegebene Näherungen}) \\ n = 1, 2, \dots & (\text{Schrittnummer}) \\ x_{n+1} := x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{g(x_n) - g(x_{n-1})} \cdot g(x_n) & \end{array}$$

liefert keine wesentliche Verbesserung, jedoch ist auch hier – wie bei der ersten Form – der Rechenaufwand in einem einzelnen Schritt i.allg. geringer als beim Newton-Verfahren. Ein Konvergenzkriterium für den Fall, daß die Funktion  $g$  zweimal differenzierbar ist, läßt sich analog zum Beweis von Satz 13.3.2 (unter Verwendung von Satz 13.2.3) herleiten (ÜA). Sämtliche in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren zur Nullstellenberechnung sind natürlich auch kombinierbar.

Nachfolgend geben wir hier als Beispiel ein Verfahren an, das man ausführlich in [Mae 88], S. 24–25 erläutert findet.

Regula-falsi-Newton-Verfahren zum Einschließen von Nullstellen:

$g$	differenzierbare Funktion (muß als Unterprogramm vorliegen)
$g'$	erste Ableitung von $g$ (muß als Unterprogramm vorliegen)
$a, b$	Intervallgrenzen mit $g(a) > 0$ und $g(b) \leq 0$
$\varepsilon$	Genauigkeitsschranke
$MAX$	maximale Schrittanzahl
$\alpha$	Steuerparameter mit $0 \leq \alpha < 0.25$
$g_a := g(a), g_b := g(b)$	Funktionswerte
$n = 1, 2, \dots, MAX$	Schrittzhäler
$x := a - \frac{b-a}{g_b-g_a} \cdot g_a$	Regula falsi
$g_x := g(x)$	Funktionswert
falls $g_x \leq 0$ , dann $b := x, g_b := g_x, x := a, g_x := g_a,$ sonst $a := x, g_a := g_x, x := b, g_x := g_b.$	
$g_1 := g'(x)$	Wert der 1. Ableitung
falls $ g_1  < \varepsilon$ , dann Schritt 4	
$x := x - \frac{g_x}{g_1}$	Newton-Schritt
$q_1 := \frac{x-a}{b-a}, q_2 := \frac{b-x}{b-a}$	
falls $q_1 \cdot q_2 > \alpha$ , dann Schritt 5	
$x := a + (b-a) \cdot 0.5$	Intervalhalbierung, falls Newton-Näherung ungeeignet
$g_x := g(x)$	Funktionswert zur Newton- oder Bisektionsnäherung
falls $g_x \leq 0$ , dann $b := x, g_b := g_x,$ sonst $a := x, g_a := g_x$	
drucke $n, a, b$	
falls $ b-a  < \varepsilon$ , dann stop	
drucke: Geforderte Genauigkeit nicht erreicht.	

Obiger Algorithmus findet wie das Bisektionsverfahren eine Einschließung für eine Nullstelle aus dem Startintervall. Das gilt auch, wenn sich im Startintervall mehrere Nullstellen befinden.

## 13.4 Polynomgleichungen

Wegen ihrer leichten Berechenbarkeit treten Polynome in vielen Bereichen der angewandten Mathematik auf. Oft werden sie als Näherungen für kompliziertere Funktionen benutzt.<sup>6</sup>

Eine erste Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften von Polynomen erfolgte bereits im Kapitel 8. Nachfolgend wollen wir einiges dazu ergänzen und uns kurz mit Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung von Polynomen befassen.

Bezeichne in diesem Abschnitt  $p_m$  das folgende Polynom  $m$ -ten Grades:

$$p_m(x) := a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0, \quad (13.13)$$

wobei  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) und  $a_m \neq 0$ .

Für viele Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung benötigt man (grobe) Näherungen dieser Nullstellen. Wir beginnen deshalb mit dem Ermitteln von Intervallen, in denen sich die Nullstellen von  $p_m$  befinden. Anschließend wird dann das für unsere Näherungsverfahren benötigte Horner-Schema wiederholt und etwas modifiziert.

### 13.4.1 Abschätzungen für Polynomnullstellen

Eine erste Grobabschätzung liefert der

**Satz 13.4.1.1** Bezeichne  $\alpha$  ( $\in \mathbb{C}$ ) eine beliebige Nullstelle des Polynoms (13.13) und seien

$$A := \max_{i \in \{0, 1, \dots, m-1\}} |a_i| \quad (13.14)$$

sowie

$$B := \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |a_i|. \quad (13.15)$$

Dann gilt

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + A} \leq |\alpha| \leq \frac{|a_m| + B}{|a_m|}. \quad (13.16)$$

*Beweis.* Siehe [Kie-M 74], S. 113. ■

**Beispiel** Sei

$$p_4(x) := x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 17x - 4.$$

---

<sup>6</sup> Siehe auch Kapitel 15.

Da  $|a_0| = 4$ ,  $|a_m| = 1$  und  $A = B = 17$ , erhalten wir aus (13.16) für beliebige Nullstellen  $\alpha$  dieses Polynoms die Abschätzung  $0.19 \leq |\alpha| \leq 18$ , d.h.,  $\alpha$  befindet sich in einem Ringgebiet der komplexen Zahlenebene mit dem inneren Radius 0.19 und dem äußeren Radius 18. Diese Abschätzung ist sehr grob, da die betragsmäßig größte Nullstelle 5.1972 ist.

Weitere Abschätzungen für die Nullstellen findet man in [Mae 88], S. 38.

Ohne Beweis sei hier noch auf eine Eigenschaft der Nullstellen spezieller Polynome hingewiesen:

**Satz 13.4.2 (Satz von Laguerre<sup>7</sup>)**

Ist (13.13) ein Polynom mit nur reellen Nullstellen und ist  $a_m = 1$ , so liegen alle Nullstellen von  $p_m$  in dem Intervall, das von den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$m \cdot x^2 + 2 \cdot a_{m-1} \cdot x + 2 \cdot (m-1) \cdot a_{m-2} - (m-2) \cdot a_{m-1}^2 = 0 \quad (13.17)$$

gebildet wird. ■

**Beispiel** Das Polynom

$$p_3(x) := x^3 - 2x^2 - 12x + 4$$

ist das charakteristische Polynom der symmetrischen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bekanntlich besitzt  $p_3$  dann nur reelle Nullstellen. Nach Satz 13.4.2 liegen folglich die Nullstellen dieses Polynoms im Intervall  $[x_1, x_2]$ , wobei  $x_1$  und  $x_2$  die Nullstellen des Polynoms

$$3x^2 - 4x - 52$$

sind, die sich leicht berechnen lassen. Es gilt  $x_{1/2} := \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{160}{9}}$ . Also  $x_2 \approx 4.883$  und  $x_1 \approx -3.550$ . (Zum Vergleich: Näherungswerte für die drei Nullstellen von  $p_3$  sind: -2.79859, 0.31907 und 4.47952.)

In den ermittelten Intervallen für die Nullstellen kann man dann durch Wertetabellen eine Skizze des Polynoms herstellen und daraus Näherungen der Nullstellen ablesen. Verbessern lassen sich diese ersten Näherungen für die Nullstellen durch das im Abschnitt 13.3, S. 379 angegebene Bisektionsverfahren.

### 13.4.2 Das Horner-Schema und das zweizeilige Horner-Schema

Wie wir uns bereits im Kapitel 8 überlegt haben, lassen sich die Koeffizienten des Polynoms  $q_{m-1}(x) := b_{m-1} \cdot x^{m-1} + b_{m-2} \cdot x^{m-2} + \dots + b_1 \cdot x + b_0$  und  $p_m(\alpha)$  mit

$$p_m(x) = (x - \alpha) \cdot q_{m-1}(x) + p_m(\alpha)$$

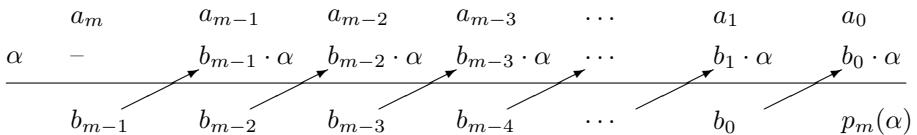
---

<sup>7</sup> Edmond Laguerre (1834–1886), französischer Mathematiker.

mittels der Vorschrift

$$\begin{aligned} b_{m-1} &:= a_m \\ b_{m-i-1} &:= a_{m-i} + b_{m-i} \cdot \alpha \quad (i = 1, \dots, m-1) \\ \text{und} \\ p_m(\alpha) &:= a_0 + b_0 \cdot \alpha \end{aligned} \tag{13.18}$$

berechnen. Für die Handrechnung benutzt man dabei das (sogenannte) **Horner-Schema**:



Wie man leicht nachrechnet, gilt für den Wert der 1. Ableitung von  $p_m(x)$  an der Stelle  $x = \alpha$ :

$$p'_m(\alpha) = q_{m-1}(\alpha),$$

womit sich dieser Wert nach (13.18) wie folgt berechnen lässt:

$$\begin{aligned} c_{m-2} &:= b_{m-1} \\ c_{m-i-2} &:= b_{m-i-1} + c_{m-i-1} \cdot \alpha \quad (i = 1, \dots, m-2) \\ \text{und} \\ p'_m(\alpha) &:= b_0 + c_0 \cdot \alpha \end{aligned} \tag{13.19}$$

Für die Handrechnung ergibt sich damit zusammengefaßt das folgende Schema zur Berechnung von  $p_m(\alpha)$  und  $p'_m(\alpha)$ :

$a_m$	$a_{m-1}$	$a_{m-2}$	$a_{m-3}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$\alpha$	$-$	$b_{m-1} \cdot \alpha$	$b_{m-2} \cdot \alpha$	$b_{m-3} \cdot \alpha$	$\dots$	$b_1 \cdot \alpha$
	$b_{m-1}$	$b_{m-2}$	$b_{m-3}$	$b_{m-4}$	$\dots$	$b_0$
						$p_m(\alpha)$

$b_{m-1}$	$b_{m-2}$	$b_{m-3}$	$b_{m-4}$	$\dots$	$b_0$	$p_m(\alpha)$
$\alpha$	$-$	$c_{m-2} \cdot \alpha$	$c_{m-3} \cdot \alpha$	$c_{m-4} \cdot \alpha$	$\dots$	$c_0 \cdot \alpha$
	$c_{m-2}$	$c_{m-3}$	$c_{m-4}$	$c_{m-5}$	$\dots$	$p'_m(\alpha)$

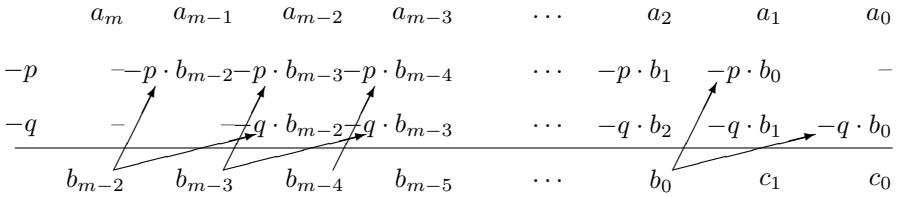
Das Horner-Schema kann natürlich auch zur Berechnung komplexer Werte eines Polynoms herangezogen werden, um die (eventuell vorkommenden) komplexen Nullstellen zu berechnen. Diese Rechnungen sind jedoch meist sehr aufwendig. Wir werden uns deshalb anschließend ein etwas modifiziertes Horner-Schema für diese Zwecke überlegen. Zur Herleitung eines solchen Verfahrens dividieren wir zunächst  $p_m(x)$  durch das Polynom  $x^2 + p \cdot x + q$  und erhalten

$$p_m(x) = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot (b_{m-2} \cdot x^{m-2} + b_{m-3} \cdot x^{m-3} + \dots + b_1 \cdot x + b_0) + c_1 \cdot x + c_0, \tag{13.20}$$

wobei

$$\begin{aligned}
b_{m-2} &:= a_m \\
b_{m-3} &:= a_{m-1} - p \cdot b_{m-2} \\
b_{m-4} &:= a_{m-2} - p \cdot b_{m-3} - q \cdot b_{m-2} \\
b_{m-5} &:= a_{m-3} - p \cdot b_{m-4} - q \cdot b_{m-3} \\
&\vdots \\
b_1 &:= a_3 - p \cdot b_2 - q \cdot b_3 \\
b_0 &:= a_2 - p \cdot b_1 - q \cdot b_2 \\
c_1 &:= a_1 - p \cdot b_0 - q \cdot b_1 \\
c_0 &:= a_0 - q \cdot b_0
\end{aligned} \quad . \quad (13.21)$$

Verifizieren lassen sich obige Formeln (13.21) auch durch Ausrechnen der rechten Seite von (13.20), anschließendem Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich mit der linken Seite von (13.20). Für die Handrechnung ist das sogenannte **zweizeilige Horner-Schema** geeignet:



**Beispiel** Sei  $p_m(x) := x^4 - 3 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 17 \cdot x - 4$ ,  $p = 2$  und  $q = 3$ . Mit Hilfe des zweizeiligen Horner-Schemas

$$\begin{array}{r}
1 \quad -3 \quad -8 \quad -17 \quad -4 \\
-2 \quad - \quad -2 \quad 10 \quad 2 \quad - \\
-3 \quad - \quad - \quad -3 \quad 15 \quad 3 \\
\hline
1 \quad -5 \quad -1 \quad 0 \quad -1
\end{array}$$

erhält man dann

$$x^4 - 3 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 17 \cdot x - 4 = (x^2 + 2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 - 5 \cdot x - 1) - 1.$$

Das zweizeilige Horner-Schema ist nun verwendbar bei der Berechnung von

$$p_m(\alpha + i \cdot \beta)$$

mit  $\alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C}$ , wobei sämtliche Zwischenergebnisse reell sind. Wir wählen dazu

$$p := -2 \cdot \alpha \text{ und } q := \alpha^2 + \beta^2. \quad (13.22)$$

Das Polynom  $x^2 + p \cdot x + q$  hat dann die Nullstellen  $\alpha + i \cdot \beta$  und  $\alpha - i \cdot \beta$ , wie man nachrechnen kann. Aus (13.20) ergibt sich folglich:

$$p_m(\alpha + i \cdot \beta) = c_1(\alpha + i \cdot \beta) + c_0,$$

wobei sich die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_0$  nach (13.21) berechnen lassen.

**Beispiel** Seien  $p_m(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  und  $\alpha + i \cdot \beta = 2 + i$ . Nach (13.22) haben wir dann  $p = -4$  und  $q = 5$  und aus dem Schema

$$\begin{array}{r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & - & 4 & 20 & - \\ -5 & - & - & -5 & -25 \\ \hline 1 & 5 & 14 & -24 \end{array}$$

erhalten wir  $p_m(2 + i) = 14 \cdot (2 + i) - 24 = 4 + 14 \cdot i$ .

Zum Vergleich sei noch die Rechnung mit dem einfachen Horner-Schema angegeben:

$$\begin{array}{r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2+i & 2+i & 5+5 \cdot i & 3+14 \cdot i \\ \hline 1 & 3+i & 4+5 \cdot i & 4+14 \cdot i \end{array}$$

### 13.4.3 Verfahren zur Nullstellenberechnung von $p_m$

Nach den Vorbereitungen aus den Abschnitten 13.4.1 und 13.4.2 lassen sich unsere Verfahren aus Abschnitt 13.3 leicht ergänzen. Nachfolgend sei hier nur das Newton-Verfahren zur Berechnung einer reellen Nullstelle des Polynoms  $p_m$  angegeben:

**Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle  $\alpha$  von  $p_m(x)$ :**

$m$  Polynomgrad

$\mathbf{a} := (a_m, a_{m-1}, \dots, a_0)$  Koeffizienten von  $p_m$

$MAX$  vorgegebene maximale Schrittzahl

$\varepsilon$  Genauigkeitsschranke

$x_0$  erste Näherung für  $\alpha$

$x := x_0$

$n = 1, 2, \dots, MAX$	Schrittzähler
$b_{m-1} := a_m, c_{m-2} := a_m$	Startwerte
$j = 2, 3, \dots, m$	Horner-Schema zur
$b_{m-j} := a_{m-j+1} + x \cdot b_{m-j+1}$	Berechnung der
$p_x := a_0 + x \cdot b_0$	Hilfsgrößen $b_j$
falls $ p_x  < \varepsilon$ , dann 1	$p_m(x)$
$k = 3, 4, \dots, m$	Horner-Schema zur
$c_{m-k} := b_{m-k+1} + x \cdot c_{m-k+1}$	Berechnung der
$p'_x := b_0 + x \cdot c_0$	Hilfsgrößen $c_k$
falls $ p'_x  < \varepsilon$ , dann drucke „ $x_0$ ändern“, stop	$p'_m(x)$
$x := x - \frac{p_x}{p'_x}$	Newton-Schritt

drucke „Genauigkeit nach  $MAX$  Schritten nicht erreicht“

1: drucke  $n, x$ .

**Beispiel** Sei  $p_5(x) := 3 \cdot x^5 - 2 \cdot x^4 + x^2 - 7 \cdot x - 4$ . Nach Satz 13.4.1.1 gilt für die Nullstellen  $\alpha$  von  $p_5$ :  $0.36 \leq |\alpha| \leq 3.34$ . Ermitteln einiger Werte von  $p_m(x)$  aus dem Intervall  $[-3.34, 3.34]$  liefert die in Abbildung 13.6 angegebene Skizze der Funktion  $p_5$ .

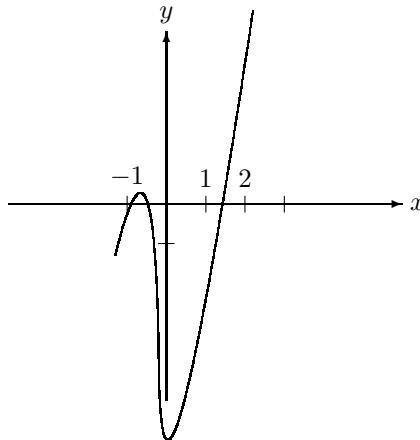


Abb. 13.6

Die größte (reelle) Nullstelle von  $p_5$  lässt sich dann mit  $x_0 := 1.3$  nach dem Newton-Verfahren berechnen. Wir erhalten (bei Rechnung auf 10 Stellen nach dem Punkt genau):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5867609211, p_m(x_1) = 4.9089328451 \\ x_2 &= 1.5039834213, p_m(x_2) = 0.5864525474 \\ x_3 &= 1.4911055770, p_m(x_3) = 0.0124710275 \\ x_4 &= 1.4908196230, p_m(x_4) = 0.00000060316 \\ x_5 &= 1.4908194846, p_m(x_5) = 0.0000000000 \end{aligned}$$

Analog erhält man (nach maximal 5 Schritten) die beiden anderen reellen Nullstellen des Polynoms  $p_m$ , indem man als Startwert  $x_0 := -1$  bzw.  $x_0 = 0$  wählt.  $p_5$  hat damit (bei Rechnung auf 10 Stellen nach dem Punkt genau) die reellen Nullstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= -0.9037672474 \\ \alpha_2 &:= -0.5855311056 \\ \alpha_3 &:= 1.4908194846 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der komplexen Nullstellen  $z$  von  $p_m$ , die, da  $p_m$  nur reelle Koeffizienten besitzt, in der Form  $z$  und  $\bar{z}$  auftreten, ist das sogenannte **Bairstow-Verfahren** (siehe [Kie-M 74], S. 109 oder [Mae 88], S. 51) geeignet, das das zweizeilige Horner-Schema mit dem Newton-Verfahren kombiniert und mit dessen Hilfe vom Polynom  $p_m$  (bei Vorgabe eines Polynoms 2. Grades bzw. von Näherungswerten für zwei Nullstellen) ein Polynom 2. Grades abgespalten wird.

Sind alle Nullstellen eines Polynoms geraden Grades  $p_m(x)$  gesucht, so besteht auch die Möglichkeit, durch simultane Aufspaltung von  $p_m(x)$  in Quadratfaktoren, sich Näherungen für die Nullstellen zu verschaffen (siehe [Mae 88], S. 53/54).

Es sei noch erwähnt, daß es auch Näherungsverfahren gibt, die ohne Näherungswerte für die gesuchten Nullstellen des Polynoms  $p_m$  auskommen. Eines dieser Verfahren ist der sogenannte **Quotienten-Differenzen-Algorithmus** (kurz: **QD-Algorithmus**), den man z.B. in [Kie-M 74], S. 115 oder [Mae 88], S. 55 erläutert findet. Allerdings konvergiert dieses Verfahren sehr langsam, so daß man in der Regel dieses Verfahren nur benutzt, um sich Startwerte für die oben genannten Verfahren zu verschaffen.

## Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Wir haben zwar in einem vorangegangenen Abschnitt bereits ein Lösungskriterium sowie den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für beliebige Gleichungssysteme kennengelernt, wollen jedoch die LGS noch einmal unter numerischen Aspekten betrachten. Insbesondere auch deshalb, weil viele andere numerische Verfahren als Kernstücke das Lösen von LGS beinhalten, wie man den im Literaturverzeichnis angegebenen Büchern über Numerische Mathematik entnehmen kann.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur LGS der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{14.1}$$

über dem Körper der reellen Zahlen, die wir kurz (unter Verwendung von Matrizen) in der Form

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{14.2}$$

aufschreiben werden.

Bekanntlich besitzt ein solches LGS genau eine Lösung, wenn  $|\mathfrak{A}| \neq 0$  ist. Für unsere nachfolgenden Überlegungen nehmen wir deshalb

$$|\mathfrak{A}| \neq 0$$

an. Diese Voraussetzung muß jedoch bei konkreten Rechnungen nicht unbedingt sichern, daß man das LGS auch lösen kann. Durch Rechnen mit Maschinenzahlen kann nämlich als Näherung  $|\tilde{\mathfrak{A}}| = 0$  auftreten, was man insbesondere bei der Programmierung exakter Verfahren zu berücksichtigen hat. Nachfolgend soll zunächst der Gauß-Algorithmus in etwas modifizierter Form wiederholt werden. Anschließend werden einige Hilfsmittel (wie z.B. Normen für Vektoren und Matrizen) für die folgenden Abschnitte mit elementaren Iterationsverfahren zum Lösen von LGS der Form (14.1) bereitgestellt. Den Abschluß bilden dann gewisse Projektionsverfahren, von denen eines auch ein exaktes Verfahren zum Lösen von LGS ist.

## 14.1 Der Gauß-Algorithmus (mit Pivotisierung)

Wir knüpfen an unsere Überlegungen aus Kapitel 3 an. Als allgemeines und auch wichtigstes Verfahren zum Lösen von LGS hatten wir dort den Gauß-Algorithmus kennengelernt. Hat das LGS (14.1) genau eine Lösung, so überführt man (zwecks Einsparung von Rechenschritten) das Ausgangsgleichungssystem durch äquivalente Umformungen am besten in ein System der Gestalt

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \dots & \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned} \tag{14.3}$$

bzw. (in Matrzenschreibweise)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{14.4}$$

wobei  $c_{11} \cdot c_{22} \cdots \cdot c_{nn} \neq 0$  ist.

Aus (14.3) erhält man dann leicht die Lösung von (14.3) durch Lösen der Gleichungen von unten nach oben:

$$\begin{aligned} x_n &= d_n / c_{nn} \\ x_{n-1} &= (d_{n-1} - c_{n-1,n} \cdot x_n) / c_{n-1,n-1} \\ \dots & \\ x_1 &= (d_1 - c_{12} \cdot x_2 - \dots - c_{1n} \cdot x_n) / c_{11} \end{aligned}.$$

Wenn alle hierbei auftretenden Rechenschritte exakt ausgeführt werden, dann ist es egal, auf welche Weise man vom Ausgangsgleichungssystem (14.1) zu (14.3) gelangt. In der Regel hat man es jedoch mit approximierten Dezimal- bzw. Dualzahlen zu tun und die Fehlerfortpflanzung ist stark abhängig von der Art der konkreten Rechnung. Wie wir im Abschnitt 12.2 gesehen haben, wirken sich insbesondere Divisionen durch betragsmäßig kleine Elemente und Differenzen von nahezu gleichgroßen Zahlen ungünstig aus. Durch eine geschickte Wahl der Umformungen (die sogenannte **Pivotisierung**) kann man jedoch diese Fehler verkleinern.

Zwecks Beschreibung der Pivotisierung sei noch einmal an den entscheidenden Umformungsschritt beim Gauß-Algorithmus („**Gauß-Schritt**“) erinnert:

Man subtrahiert geeignete Vielfache einer ausgewählten  $i$ -ten Gleichung des LGS, der **Pivotgleichung**, zu den anderen Gleichungen des LGS. Die neuen Gleichungen berechnen sich dann nach folgender Vorschrift:

$$\text{neue } j\text{-te Gleichung} := \text{alte } j\text{-te Gleichung} - \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ii}} \cdot (\text{Pivotgleichung}),$$

wobei  $\alpha_{ji}$  bzw.  $\alpha_{ii}$  Koeffizienten der  $i$ -ten Variablen in der  $j$ -ten bzw.  $i$ -ten Gleichung bezeichnen. Das Element  $\alpha_{ii}$  bezeichnet man auch als **Pivotelement**.

Bei der **allgemeinen Pivotisierung** wird dann als Pivotgleichung unter den möglichen auswählbaren Gleichungen, die in ihrer Reihenfolge und in der Anordnung der Summanden verändert werden können, eine solche  $i$ -te Gleichung ausgewählt, deren Koeffizient  $\alpha_{ii}$  ein betragsmäßig größtes Element unter den möglichen Elementen ist. Man spricht von **Zeilen- bzw. Spaltenpivotisierung**, wenn man die Reihenfolge der Summanden in den Gleichungen bzw. die Reihenfolge der Gleichungen feststellt und folglich Pivotelemente nur innerhalb gewisser (bezogen auf die Matrizenbeschreibung des Gauß-Algorithmus) „Zeilen“ bzw. „Spalten“ sucht. Dabei ist Zeilenpivotisierung nur sinnvoll, wenn vorher in allen Gleichungen die Koeffizienten auf die gleiche Größenordnung gebracht worden sind. Andernfalls könnte jedes von Null verschiedene Element einer festen Spalte durch Multiplikation der betreffenden Gleichung mit einem gewissen Faktor zum betragsmäßig größten Element gemacht werden. Als Beispiel betrachten wir hier nur eine Spaltenpivotisierung. Ausführlich erläutert findet man dieses Beispiel auch in [Mae 84], S. 55–61.

#### Gauß-Algorithmus (mit Spaltenpivotisierung):

$\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (Koeffizientenmatrix)

$\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  (Matrix der rechten Seite)

$\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  (Matrix des Lösungsvektors)

$\mathfrak{S} := (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = (s_{ij})_{n,n+1}$  (Systemmatrix)

$p := (p_1, \dots, p_n) = (1, 2, \dots, n)^T$  (Indexvektor)

$\varepsilon$  (Testgröße)

$j = 1, 2, \dots, n - 1$  (Schrittzähler)

Pivotisierung: Bestimmung eines Index  $t$  mit

$\forall i \in \{j, j + 1, \dots, n\} : |s_{p_t, j}| \geq |s_{p_i, j}|$

Tausch der Komponenten  $p_t$  und  $p_j$

Regularitätsprüfung:

Falls  $|s_{p_j, j}| < \varepsilon$ , dann Abbruch: „Matrix numerisch singulär“

Gauß-Schritt:

$i = j + 1, j + 2, \dots, n$  (Zeilenindex)

$l := s_{p_i, j} / s_{p_j, j}$

$k = j + 1, j + 2, \dots, n + 1$  (Spaltenindex)

$s_{p_i, k} := s_{p_i, k} - l \cdot s_{p_j, k}$

Rückwärtseinsetzen:

$j = 0, 1, \dots, n - 1$

$m := n - j$  (Zeilenindex)

$x_m := (s_{p_m, n+1} - \sum_{\alpha=m+1}^n s_{p_m, \alpha} \cdot x_\alpha) / s_{p_m, m}$

Schlußkontrolle:

$q = 1, 2, \dots, n$

$r_q := b_q - \sum_{j=1}^n a_{qj} \cdot x_j$

## 14.2 Vektor- und Matrixnormen

Sei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Element aus dem Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ . In Verallgemeinerung der Länge (des Betrages) von Vektoren verwenden wir in diesem Kapitel folgende Normen:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} (= \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}; \text{ „Euklidische Norm“}), \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| (\text{, „Maximumnorm“}), \\ \|\mathbf{x}\|_1 &:= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| (\text{, „Betragssummennorm“}).\end{aligned}$$

Trotz der unterschiedlichen Werte, die man bei der Berechnung der Normen ein und desselben Vektors erhält, besteht eine gewisse qualitative Übereinstimmung: Für einen Vektor mit „kleiner Länge“ werden alle Normen klein ausfallen und für einen Vektor mit „großer Länge“ groß.

Mit Hilfe einer Vektornorm kann man nun eine Norm für Matrizen wie folgt einführen.

**Definition** Bezeichne  $\|\cdot\|$  eine zu dem VR  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  gehörende Norm (z.B.  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\alpha$  mit  $\alpha \in \{1, 2, \infty, \dots\}$ ) und sei  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die **kleinste** Zahl  $k \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \|\mathfrak{A} \cdot \mathbf{x}\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}\|$$

sei mit  $\|\mathfrak{A}\|$  bezeichnet und heißt die zur Norm  $\|\cdot\|$  gehörende **Matrixnorm**.

### Lemma 14.2.1

(a) Eine Matrixnorm lässt sich auch wie folgt definieren:

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \|\mathfrak{A}\| := \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathfrak{A} \cdot \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

(b) Für beliebige Matrizen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$\|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\| \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{B}\|.$$

Beweis. ÜA. ■

**Satz 14.2.2** Die zu einer Vektornorm  $\|\cdot\|$  des VRs  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  gehörende Matrixnorm bildet eine Norm für den Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times n}$  aller Matrizen des Typs  $(n, n)$  über  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* ÜA A.6.22. ■

Matrixnormen werden wir beispielsweise im Abschnitt 14.4.3 benutzen, um Konvergenzbedingungen für gewisse Näherungsverfahren für LGS aufzustellen. Eine erste Anwendung erfolgt bereits im nächsten Abschnitt.

Die nachfolgenden drei Sätze zeigen zunächst, wie man (unabhängig von der Definition) konkrete Matrixnormen berechnen kann.

**Satz 14.2.3** Sei  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt

$$\|\mathfrak{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

d.h.,  $\|\mathfrak{A}\|_\infty$  ist die maximale Zeilenbetragssumme.

*Beweis.* Zum Beweis haben wir zu zeigen:

- (1.)  $\forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_\infty \leq (\max_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)) \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty$
- (2.)  $\exists \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{\mathfrak{0}\} : \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_\infty = (\max_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)) \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty$

**Zu (1.):**

Falls  $\mathfrak{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , erhält man nach Definition der Maximumnorm sowie durch Anwenden der Dreiecksungleichung für den Betrag:

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n| \\ &\leq (\max_{1 \leq i \leq n} (|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}|)) \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}|) \cdot \underbrace{(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|)}_{= \|\mathfrak{x}\|_\infty} \end{aligned}$$

**Zu (2.):**

Bezeichne  $k$  die Nummer einer Zeile von  $\mathfrak{A}$ , deren Zeilenbetragssumme maximal ist. Ein Element  $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_n)^T$ , das die Bedingung (2.) erfüllt, erhält man dann wie folgt:

$$x_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{ki} > 0, \\ -1, & \text{falls } a_{ki} < 0, \\ 0, & \text{falls } a_{ki} = 0 \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ . ■

**Satz 14.2.4** Sei  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt

$$\|\mathfrak{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right),$$

d.h.,  $\|\mathfrak{A}\|_1$  ist die maximale Spaltenbetragssumme.

*Beweis.* ÜA. ■

**Satz 14.2.5** Sei  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt

$$\|\mathfrak{A}\|_2 = \sqrt{\tau},$$

wobei  $\tau$  den größten Eigenwert der Matrix  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  bezeichnet.

*Beweis.* Wir zeigen:

- (1.) Sämtliche Eigenwerte von  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  sind nicht negativ.
- (2.)  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  ist symmetrisch.
- (3.)  $\forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_2^2 \leq \tau \cdot \|\mathfrak{x}\|_2^2$ .
- (4.)  $\exists \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{0\} : \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_2^2 = \tau \cdot \|\mathfrak{x}\|_2^2$ .

Aus (3.) und (4.) ergibt sich dann unmittelbar die Behauptung des Satzes.

**Zu (1.):**

Bezeichne  $\lambda$  einen EW von  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  mit dem zugehörigen EV  $\mathfrak{x}$ . Dann gilt  $(\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x}$ , woraus sich (durch Multiplikation mit  $\mathfrak{x}^T$ )

$$\mathfrak{x}^T \cdot (\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot (\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{x})$$

bzw.

$$\underbrace{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x})^T \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x})}_{= \|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_2^2} = \lambda \cdot \underbrace{(\mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{x})}_{= \|\mathfrak{x}\|_2^2}$$

ergibt. Hieraus und aus  $\|\mathfrak{x}\|_2 > 0$  (wegen  $\mathfrak{x} \neq 0$ ) sowie den Normeigenschaften ergibt sich unmittelbar, daß  $\lambda \geq 0$  ist.

**Zu (2.):**

Aus den Rechenregeln für Matrizen (siehe Kapitel 3) folgt  $(\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A})^T = \mathfrak{A}^T \cdot ((\mathfrak{A}^T)^T) = \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$ , d.h.,  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  ist symmetrisch.

**Zu (3.):**

Nach (2.) und den Eigenschaften symmetrischer Matrizen (siehe Kapitel 8) besitzt  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$   $n$  reelle EWe  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , zu denen  $n$  orthonormierte EVen  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$  gehören, d.h., es gilt:

$$\forall i : (\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{e}_i = \tau_i \cdot \mathfrak{e}_i$$

und

$$\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

$B := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  ist dann eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , womit für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  gewisse  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  mit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{e}_i$$

existieren. Folglich haben wir

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{e}_i \right)^T \cdot \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \underbrace{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j}_{\tau_j \cdot \mathbf{e}_j} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \tau_i, \quad (14.5)$$

woraus

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 &\leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)}_{= \|\mathbf{x}\|_2^2} \cdot \underbrace{\left( \max_{1 \leq i \leq n} \tau_i \right)}_{=: \tau} \\ &= \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

folgt.

### Zu (4.):

Bezeichne  $r$  den Index eines Eigenwerts  $\tau_i$  mit  $\tau_r = \tau$  und sei

$$\mathbf{x} := (\mathbf{e}_r)_{/B} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{r\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T.$$

Dann gilt (unter Verwendung von (14.5))

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 &= \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \tau_r = \tau_r \cdot \underbrace{\|\mathbf{x}\|_2^2}_{= 1} = \tau, \end{aligned}$$

womit (4.) und damit auch unser Satz bewiesen ist. ■

## 14.3 Die Kondition von LGS

**Satz 14.3.1** Seien  $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $|\mathbf{A}| \neq 0$  und  $|\tilde{\mathbf{A}}| \neq 0$ .

(a) Falls  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ , so gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\| \\ &\quad (\text{Abschätzung des absoluten Fehlers}) \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \quad (14.7)$$

*(Abschätzung des relativen Fehlers).*

(b) Falls  $\mathfrak{A} \cdot x = b$  und  $\tilde{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ , so gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|\tilde{x} - x\| \leq \|\tilde{\mathfrak{A}}^{-1} - \mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|b\| \quad (14.8)$$

*(Abschätzung des absoluten Fehlers)*

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}}\|}{\|\mathfrak{A}\|} \quad (14.9)$$

*(Abschätzung des relativen Fehlers).*

*Beweis.* (a): Aus  $\mathfrak{A} \cdot x = b$  und  $\tilde{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$  ergeben sich (wegen  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ) die Gleichungen  $x = \mathfrak{A}^{-1} \cdot b$  und  $\tilde{x} = \tilde{\mathfrak{A}}^{-1} \cdot \tilde{b}$ .

Folglich haben wir

$$\|\tilde{x} - x\| = \|\mathfrak{A}^{-1} \cdot \tilde{b} - \mathfrak{A}^{-1} \cdot b\| = \|\mathfrak{A}^{-1}(\tilde{b} - b)\|,$$

woraus sich nach Definition der Norm einer Matrix zunächst die Abschätzung des absoluten Fehlers

$$\|\tilde{x} - x\| \leq \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$$

und dann (unter Verwendung von  $\|b\| = \|\mathfrak{A} \cdot x\| \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|x\|$ ) die Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|}{\|x\|} \leq \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|\mathfrak{A}\| \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

ergibt.

(b): Offenbar gilt

$$\|\tilde{x} - x\| = \|\tilde{\mathfrak{A}}^{-1} \cdot b - \mathfrak{A}^{-1} \cdot b\| = \|(\tilde{\mathfrak{A}}^{-1} - \mathfrak{A}^{-1}) \cdot b\| \leq \|\tilde{\mathfrak{A}}^{-1} - \mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|b\|.$$

Außerdem folgt aus  $\tilde{\mathfrak{A}} \cdot x = b = \mathfrak{A} \cdot x$ , daß  $\mathfrak{A}^{-1} \cdot \tilde{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{x} = x$  ist. Hieraus ergibt sich nun unter Verwendung der obigen Abschätzung und Lemma 14.2.1, (b):

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x\| &= \|\mathfrak{A}^{-1} \cdot \tilde{x} - \mathfrak{A}^{-1} \cdot x\| = \|\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \tilde{x} - \mathfrak{A}^{-1} \cdot \tilde{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{x}\| = \|\mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}}) \cdot \tilde{x}\| \\ &\leq \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}}\| \cdot \|\tilde{x}\|, \end{aligned}$$

womit

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \|\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}}\| = \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}}\|}{\|\mathfrak{A}\|}$$

gilt. ■

Aus den Abschätzungen (14.7) und (14.9) der relativen Fehler aus Satz 14.3.1 ist erkennbar, daß diese Fehler abhängig sind vom Faktor  $\|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|$ . Ist dieser Faktor groß (bzw. klein), so ist auch der entsprechende relative Fehler groß (bzw. klein). Erfassen wollen wir dies mit den folgenden Begriffen.

**Definitionen** Sei  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}_r^{n \times n}$ . Die Zahl

$$\|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|$$

heißt **Kondition** des LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ .

Das LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  wird **gut** (bzw. **schlecht**) **konditioniert** genannt, wenn die Kondition  $\|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|$  klein (bzw. groß) ist.

### Beispiele

(1.): Sei

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Wählt man im LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  als rechte Seite  $\mathfrak{b} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})^T$ , so ist  $x_3 = 0$ . Im Fall  $\mathfrak{b} = (\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{3} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon)^T$  erhält man dagegen  $x_3 = 1500 \cdot \varepsilon$ . Ein kleiner Fehler  $\varepsilon$  bei den Eingangsdaten führt also zu einem 1500-fachen bei den Ausgangsdaten. Bei der Kondition des LGS spiegelt sich dies auf folgende Weise wieder:

Da

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 70 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix},$$

haben wir (unter Verwendung von Satz 14.2.3)

$$\|\mathfrak{A}\|_\infty = \frac{13}{12}$$

und

$$\|\mathfrak{A}^{-1}\|_\infty = 1860,$$

woraus sich als Kondition

$$\|\mathfrak{A}\|_\infty \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|_\infty = 2015$$

ergibt.

(2.): Seien

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} := \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{b}} := \begin{pmatrix} 1.989903 \\ 1.970106 \end{pmatrix}.$$

Bei exakter Rechnung erhält man

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.0203 \end{pmatrix}$$

als Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \tilde{\mathfrak{x}} = \tilde{\mathfrak{b}}$ . Die Datenänderung

$$\tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -0.000097 \\ 0.000106 \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Änderung der Lösung von

$$\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0203 \end{pmatrix}.$$

Also gilt:

$$\frac{\|\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}\|_\infty}{\|\mathfrak{x}\|_\infty} = 2.0203 \quad \text{bei} \quad \frac{\|\tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b}\|_\infty}{\|\mathfrak{b}\|_\infty} = 0.000053266 \dots,$$

was einem „Konditionsfaktor“ von

$$\frac{2.0203}{0.000053266} \approx 37928$$

entspricht.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix}$$

erhält man als Kondition

$$\|\mathfrak{A}\|_\infty \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|_\infty = 1.99 \cdot 19900 = 39601.$$

## 14.4 Elementare Iterationsverfahren

In diesem Abschnitt werden zwei elementare Iterationsverfahren, und zwar das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren, vorgestellt.

Das Jacobi-Verfahren werden wir uns aus dem Banachschen Fixpunktsatz herleiten. Das Gauß-Seidel-Verfahren ist dann ein bez. Konvergenz verbessertes Jacobi-Verfahren.

### 14.4.1 Das Jacobi-Verfahren

Um das Jacobi<sup>1</sup>-Verfahren zum Lösen des LGS (14.1) anwenden zu können, muß die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  folgende *Voraussetzung* erfüllen, die wir im Abschnitt 14.4.3 noch etwas präzisieren werden.

---

<sup>1</sup> Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), deutscher Mathematiker, der zu den fleigigsten und vielseitigsten Mathematikern der Geschichte gezählt wird.

Die Diagonalelemente  $a_{ii}$  von  $\mathfrak{A}$  sind alle  $\neq 0$  und dem Betrage nach wesentlich größer als die übrigen Elemente  $a_{ij}$  ( $i \neq j$ ) von  $\mathfrak{A}$ .

Schreibweise:  $\forall i \neq j : |a_{ii}| \gg |a_{ij}|$ .

Man sagt: „Das LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  ist **diagonal dominant**“.

### Beispiel

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 13x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (14.10)$$

bzw. in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

Um unser Iterationsverfahren

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 \text{ gegeben,} \\ \mathfrak{x}_{m+1} := f(\mathfrak{x}_m), m \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (14.12)$$

aus dem Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, haben wir unser LGS in eine gewisse Form  $\mathfrak{x} = f(\mathfrak{x})$  zu überführen. Beim Jacobi-Verfahren geschieht dies dadurch, daß man die  $i$ -te Gleichung des LGS (14.1) nach der  $i$ -ten Variablen  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) auflöst.

Im obigen Beispiel erhalten wir auf diese Weise

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{7} - \frac{2}{7} \cdot x_2 + \frac{1}{7} \cdot x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cdot x_1 - \frac{1}{10} \cdot x_3 \\ x_3 &= \frac{-1}{13} + \frac{1}{13} \cdot x_1 + \frac{1}{13} \cdot x_2 \end{aligned}$$

bzw. in Matrizenform:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{10} & 0 & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}.$$

Im allgemeinen Fall läßt sich das Ergebnis dieser Umformung in Matrizenform wie folgt beschreiben:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}. \quad (14.13)$$

Mit Hilfe von (14.12) ergibt sich hieraus das folgende Verfahren.

Sei

$$\mathfrak{x}_0 := \left( \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right)^T \quad (14.14)$$

oder  $\mathfrak{x}_0$  irgendwie gewählt. Als Näherungen für die Lösung  $\mathfrak{x}$  des LGS (14.1) erhält man dann für  $m \in \mathbb{N}_0$ :

$$\mathfrak{x}_{m+1} := \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}_m. \quad (14.15)$$

Ohne vollständige Verwendung der Matrizenschreibweise lässt sich dieses Verfahren auch wie folgt aufschreiben.

**Jacobi-Verfahren:**

$\mathfrak{x}_0$  (gegebene Näherung für  $\mathfrak{x}$ , z.B. (14.14))

$m = 0, 1, 2, \dots$  (Nummern der Schritte)

$i = 1, 2, \dots, n$  (Nummern der Komponenten)

$\mathfrak{x}_m := (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})^T$

$$x_i^{(m+1)} := \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \cdot x_k^{(m)}$$

**Beispiel** Für das LGS (14.1) erhalten wir das folgende Iterationsverfahren zur Berechnung der Lösung:

$$\mathfrak{x}_0 := \left( \frac{4}{7}, \frac{1}{10}, \frac{-1}{13} \right)^T$$

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{4}{7} - \frac{2}{7} \cdot x_2^{(m)} + \frac{1}{7} \cdot x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cdot x_1^{(m)} - \frac{1}{10} \cdot x_3^{(m)} \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{-1}{13} + \frac{1}{13} \cdot x_1^{(m)} + \frac{1}{13} \cdot x_2^{(m)} \end{aligned}$$

wobei  $m = 0, 1, 2, \dots$

Die ersten Näherungen (auf 5 Stellen nach dem Punkt genau angegeben) der Lösung des LGS sind dann:

$$\mathfrak{x}_0 = (0.57143, 0.10000, -0.07692),$$

$$\mathfrak{x}_1 = (0.53187, 0.05055, -0.02527),$$

$$\mathfrak{x}_2 = (0.55338, 0.04934, -0.03212),$$

$$\mathfrak{x}_3 = (0.55274, 0.04787, -0.03056),$$

$$\mathfrak{x}_4 = (0.55338, 0.04778, -0.03072),$$

$$\mathfrak{x}_5 = (0.55339, 0.04773, -0.03068),$$

$$\mathfrak{x}_6 = (0.55341, 0.04773, -0.03068),$$

$\vdots$

Zum Vergleich: Die exakte Lösung des LGS (14.10) lautet:

$$\mathbf{x}^T = \left( \frac{487}{880}, \frac{42}{880}, \frac{-27}{880} \right) = (0.55340909 \dots, 0.0477272 \dots, -0.03068181 \dots).$$

Konvergenzbedingungen für das Jacobi-Verfahren überlegen wir uns im Abschnitt 14.4.3. Zunächst wollen wir jedoch das Jacobi-Verfahren etwas verbessern.

### 14.4.2 Das Gauß-Seidel-Verfahren

Hat man  $x_1^{(m+1)}$  nach dem Jacobi-Verfahren berechnet, so liegt es nahe, diese bereits bekannte Näherung anstelle von  $x_1^{(m)}$  in die weitere Rechnung einzubeziehen. Allgemein kann man dann bei der Berechnung von  $x_i^{(m+1)}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) die schon bekannten Werte  $x_1^{(m+1)}, \dots, x_{i-1}^{(m+1)}$  verwenden. Ein solches abgeändertes Jacobi-Verfahren nennt man Gauß-Seidel-Verfahren.<sup>2</sup>

**Beispiel** Für (14.10) ergibt sich

$$\mathbf{x}_0 := (0, 0, 0)^T,$$

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{4}{7} & - \frac{2}{7} \cdot x_2^{(m)} &+ \frac{1}{7} \cdot x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{10} & - \frac{1}{10} \cdot x_1^{(m+1)} &- \frac{1}{10} \cdot x_3^{(m)}, \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{-1}{13} & + \frac{1}{13} \cdot x_1^{(m+1)} &+ \frac{1}{13} \cdot x_2^{(m+1)} \end{aligned}$$

wobei  $m = 0, 1, 2, \dots$

Als erste Näherungen (auf 10 Stellen nach dem Punkt genau angegeben) erhalten wir in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (0.0000000000, 0.0000000000, 0.0000000000), \\ \mathbf{x}_1 &= (0.5714285714, 0.0428571429, -0.0296703297), \\ \mathbf{x}_2 &= (0.5549450549, 0.0474725275, -0.0305832629), \\ \mathbf{x}_3 &= (0.5534959546, 0.0477087308, -0.0306765627), \\ \mathbf{x}_4 &= (0.5534151394, 0.0477261423, -0.0306814399), \\ \mathbf{x}_5 &= (0.5534094679, 0.0477271972, -0.0306817950), \\ \mathbf{x}_6 &= (0.5534091158, 0.0477272679, -0.0306818166), \\ \mathbf{x}_7 &= (0.5534090925, 0.0477272724, -0.0306818181), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein lässt sich dieses Verfahren wie folgt beschreiben:

---

<sup>2</sup> Carl Friedrich Gauß (1777–1855); Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896). Seidel bewies 1874 die Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens.

**Gauß-Seidel-Verfahren:**

$\mathfrak{x}_0$  (gegebene Näherung für  $\mathfrak{x}$ , z.B.  $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$ )

$m = 0, 1, 2, \dots$  (Nummern der Schritte)

$i = 1, 2, \dots, n$  (Nummern der Komponenten)

$$\mathfrak{x}_m := (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})^T$$

$$x_i^{(m+1)} := \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \cdot x_k^{(m+1)} - \sum_{k=i+1}^n \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \cdot x_k^{(m)}$$

Für den nächsten Abschnitt benötigen wir noch eine Matrizendarstellung des Gauß-Seidel-Verfahrens. Seien

$$\mathfrak{L} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-a_{31}}{a_{33}} & \frac{-a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}} & \frac{-a_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}} & \frac{-a_{n-1,3}}{a_{n-1,n-1}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & \frac{-a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{R} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1,n-1}}{a_{11}} & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{-a_{2,n-1}}{a_{22}} & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{c} := \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen lässt sich die Iterationsvorschrift des Gauß-Seidel-Verfahrens auch wie folgt aufschreiben:

$$\mathfrak{x}_{m+1} = \mathfrak{c} + \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_{m+1} + \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{x}_m.$$

Da diese Gleichung nicht zum Rechnen geeignet ist, lösen wir sie nach  $\mathfrak{x}_{m+1}$  auf und erhalten:

$$\mathfrak{x}_{m+1} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{c} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{x}_m, \quad (14.16)$$

womit wir durch Wahl von

$$f(\mathfrak{x}) := (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{c} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{x} \quad (14.17)$$

das Gauß-Seidel-Verfahren auch aus dem Banachschen Fixpunktsatz hätten herleiten können.

### 14.4.3 Konvergenzbedingungen

Unsere obigen Iterationsverfahren zum Lösen von LGS entstanden aus Gleichungen der Form  $\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}$ , wie man den Gleichungen (14.13) und (14.15) für das Jacobi-Verfahren sowie den Gleichungen (14.16) und (14.17) für das Gauß-Seidel-Verfahren entnehmen kann. Aussagen über die Konvergenz dieser Verfahren folgen demnach aus:

**Satz 14.4.3.1** Sei  $f(\mathfrak{x}) := \mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}$ , wobei  $\mathfrak{x}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Das Iterationsverfahren

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 \text{ gegeben,} \\ \mathfrak{x}_{m+1} := f(\mathfrak{x}_m), \quad m \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (14.18)$$

konvergiert, falls  $\|\mathfrak{B}\| < 1$  ist.

*Beweis.* Für beliebig gewählte  $\mathfrak{x}_1$  und  $\mathfrak{x}_2$  aus  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  gilt:

$$\|f(\mathfrak{x}_1) - f(\mathfrak{x}_2)\| = \|\mathfrak{c} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{c} - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}_2\| = \|\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\| \leq \|\mathfrak{B}\| \cdot \|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\|.$$

Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatz ergibt sich hieraus unsere Behauptung. ■

Im allgemeinen ist es nicht schwierig,  $\|\mathfrak{B}\|_\infty$  oder  $\|\mathfrak{B}\|_1$  für das Jacobi-Verfahren zu ermitteln.

**Beispiel** Für das LGS

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

haben wir

$$\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Sätze 14.2.3 und 14.2.4 erhält man dann:  $\|\mathfrak{B}\|_\infty = 1$  und  $\|\mathfrak{B}\|_1 = \frac{11}{12}$ .

Für das Gauß-Seidel-Verfahren mit

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{R}$$

ist es viel zu aufwendig, erst  $\mathfrak{B}$  und dann  $\|\mathfrak{B}\|$  zu berechnen. Günstiger ist das folgende Abschätzungsverfahren für die Maximumsnorm.

**Satz 14.4.3.2** Seien

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right|, \\ \forall k \in \{2, 3, \dots, n\} : \alpha_k &:= \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| \cdot \alpha_j + \sum_{j=k+1}^n \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right|\end{aligned}\tag{14.19}$$

und

$$\alpha := \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k.\tag{14.20}$$

Dann gilt

$$\|(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{R}\|_\infty \leq \alpha.\tag{14.21}$$

*Beweis.* Seien

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &:= (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} \cdot \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{y} &:= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}\end{aligned}\tag{14.22}$$

und

$$\mathfrak{y}^T := (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Zum Beweis haben wir zu zeigen, daß  $\|\mathfrak{y}\|_\infty = \|\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}\|_\infty \leq \alpha \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty$  für alle  $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  gilt.

Durch Umformungen von (14.22) erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{y} := \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{x},$$

aus der sich für  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$y_k = - \left( \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \cdot y_j + \sum_{j=k+1}^n \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \cdot x_j \right)$$

und hieraus die Abschätzung

$$|y_k| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| \cdot |y_j| + \sum_{j=k+1}^n \left| \frac{a_{kj}}{a_{kk}} \right| \cdot |x_j| \tag{14.23}$$

ergibt. Speziell für  $k = 1$  folgt aus (14.23)

$$|y_1| \leq \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{1j}}{a_{22}} \right| \cdot |x_j| \leq \underbrace{\left( \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \right)}_{= \alpha_1} \cdot \underbrace{\left( \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right)}_{= \|\mathfrak{x}\|_\infty}.$$

Angenommen, für  $k \in \{2, \dots, i-1\}$  gelten analoge Abschätzungen

$$|y_k| \leq \alpha_k \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty.\tag{14.24}$$

Wir zeigen, daß (14.24) dann auch für  $k = i$  richtig ist.

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \cdot |y_j| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \cdot |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \cdot \alpha_j \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty + \left( \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty = \alpha_i \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty. \end{aligned}$$

Folglich gilt (14.24) für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , und wir können  $\|\mathfrak{y}\|_\infty$  durch

$$\|\mathfrak{y}\|_\infty \leq (\max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i) \cdot \|\mathfrak{x}\|_\infty$$

abschätzen, woraus (14.21) folgt. ■

## 14.5 Projektionsverfahren

In diesem Abschnitt sei unser Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  ergänzt durch ein Skalarprodukt  $\varphi$  und die Norm sei stets in der Form  $\|\mathfrak{x}\| := \sqrt{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$  gewählt.

Nachfolgend sollen drei sogenannte *Projektionsverfahren* zum iterativen Lösen des LGS (14.1) vorgestellt werden.

### 14.5.1 Grundidee der Projektionsverfahren

Die Grundidee der Projektionsverfahren lässt sich einfach geometrisch veranschaulichen (siehe Abbildung 14.1). Der Einfachheit halber deuten wir uns dabei die Lösung  $\mathfrak{x}_*$  sowie ihre Näherungen  $\mathfrak{x}_m$  als Punkte in einem  $n$ -dimensionalen Raum (bzw. wir deuten  $\mathfrak{x}_*$  und  $\mathfrak{x}_m$  als Ortsvektoren gewisser Punkte). Angenommen, wir haben bereits eine Näherung  $\mathfrak{x}_m$  für die Lösung  $\mathfrak{x}_*$  ermittelt. Wir suchen eine neue Näherung  $\mathfrak{x}_{m+1}$ , die einen geringeren Abstand als  $\mathfrak{x}_m$  zu  $\mathfrak{x}_*$  hat, d.h., für die

$$\|\mathfrak{x}_{m+1} - \mathfrak{x}_*\| < \|\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*\|$$

gilt. Geht man nun von  $\mathfrak{x}_m$  längs einer Geraden, die durch  $\mathfrak{x}_m$  geht und den (gegebenen) Richtungsvektor  $\mathfrak{p}_{m+1}$  hat, so ist ein Punkt  $\mathfrak{x}_{m+1}$  dieser Geraden, für den

$$\varphi(\mathfrak{x}_{m+1} - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{m+1}) = 0 \tag{14.25}$$

und

$$\varphi(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{m+1}) \neq 0$$

gilt, sicher dichter an  $\mathfrak{x}_*$  als  $\mathfrak{x}_m$ . (Man überlege sich dazu, daß der Satz des Pythagoras auch in allgemeinen Vektorräumen mit Skalarprodukt gilt!).

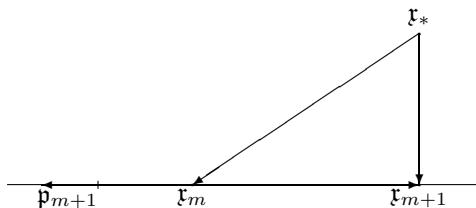


Abb. 14.1

Rechnerisch erhält man  $\mathfrak{x}_{m+1}$  wie folgt: Offenbar gilt für einen gewissen Faktor  $\mu \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\mathfrak{x}_{m+1} - \mathfrak{x}_* = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_* - \mu \cdot \mathfrak{p}_{m+1}, \quad (14.26)$$

aus der man durch Bildung des Skalarproduktes mit dem Vektor  $\mathfrak{p}_{m+1}$  unter Beachtung von (14.25) den Faktor  $\mu$  berechnen kann, der wiederum in (14.26) eingesetzt die folgende Berechnungsvorschrift für  $\mathfrak{x}_{m+1}$  liefert:

$$\mathfrak{x}_{m+1} = \mathfrak{x}_m - \mu \cdot \mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{x}_m - \frac{\varphi(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{m+1})}{\|\mathfrak{p}_{m+1}\|^2} \cdot \mathfrak{p}_{m+1}. \quad (14.27)$$

Eine auf diese Weise mit Hilfe von gewissen Projektionsvektoren

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots$$

konstruierte Folge

$$\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$$

konvergiert offensichtlich gegen  $\mathfrak{x}_*$ , da nach Konstruktion die Folge  $(\|x_m - x_*\|)_{m \in \mathbb{N}_0}$  eine streng monoton fallende Nullfolge bildet. Es gilt sogar:

**Satz 14.5.1.1** *Verwendet man zyklisch  $t$  Projektionsvektoren  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_t$  (d.h., für die Folge  $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots)$  gilt:  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j \iff i = j \pmod t$ ), so konvergiert die Folge*

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 \text{ gegeben;} \\ \mathfrak{x}_{m+1} := \mathfrak{x}_m - \frac{\varphi(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{m+1})}{\|\mathfrak{p}_{m+1}\|^2} \cdot \mathfrak{p}_{m+1}, m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

für einen beliebig gegebenen Vektor  $\mathfrak{x}_0$  gegen einen Vektor  $\mathfrak{x}'$  mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} : \varphi(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_i) = 0.$$

Enthält die Menge  $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_t\}$   $n$  linear unabhängige Vektoren, so ist  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_*$  die gesuchte Lösung von  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ .

*Beweis.* Siehe [Kie-M 74], 61–63. ■

Um ein Projektionsverfahren praktisch durchführen zu können, muß natürlich

$$\varphi(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{m+1})$$

ohne Kenntnis von  $\mathfrak{x}_*$  berechenbar sein. Dies gelingt durch

- geeignete Wahl der Projektionsvektoren und durch
- Verwendung geeigneter Skalarprodukte.

Die nachfolgenden Abschnitte bringen dazu jeweils ein Beispiel.

### 14.5.2 Projektion auf Hyperebenen

Als Skalarprodukt wählen wir das Standardskalarprodukt

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{y}.$$

Jede Gleichung

$$a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k \quad (14.28)$$

$k \in \{1, 2, \dots, n\}$  des LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  beschreibt eine Hyperebene des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R_n$ , da  $(a_{k1}, \dots, a_{kn}) \neq \mathfrak{o}^T$  wegen  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ . Bekanntlich kann (14.28) auch in einer Hesseschen Form

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{c})^T \cdot \mathfrak{e} = \mathfrak{o}$$

dargestellt werden, wobei  $\mathfrak{c}$  die Koordinatendarstellung eines festen Punktes der Hyperebene und  $\mathfrak{e}$  die Koordinatendarstellung eines auf der Hyperebene senkrechten Vektors, z.B.  $\mathfrak{e} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})^T$ , ist.

Wir wählen nun diese zu den Hyperebenen (14.28) orthogonalen Vektoren als Projektionsvektoren:

$$\mathfrak{p}_k := \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dann sind diese Vektoren (wegen der Voraussetzung  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ) linear unabhängig und unser Projektionsverfahren konvergiert (bei zyklischer Anwendung der gegebenen Projektionsvektoren).

Da  $\mathfrak{x}_* := (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$  Lösung des LGS (14.1) ist, haben wir außerdem für  $m+1 = k \pmod{n}$

$$\mathfrak{x}_*^T \cdot \mathfrak{p}_{m+1} = a_{k1} \cdot x_1^* + a_{k2} \cdot x_2^* + \dots + a_{kn} \cdot x_n^* = b_k,$$

woraus sich

$$(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_*)^T \cdot \mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{x}_m^T \cdot \mathfrak{p}_{m+1} - b_k$$

ergibt. Zusammengefaßt erhalten wir damit das Verfahren

#### Projektion auf Hyperebenen:

$\mathfrak{x}_0$  (gegebener Näherungsvektor)

$t = 0, 1, 2, \dots$  ( $t$  Nummer des Zyklus)

$k = 1, 2, \dots, n$  ( $k$  Nummer des Teilschritts innerhalb eines Zyklus)

$m+1 := t \cdot n + k$  ( $m+1$  Nummer des Schrittes)

$\mathfrak{p}_{m+1} := (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})^T$  (Projektionsvektor)

$$\mathfrak{x}_{m+1} := \mathfrak{x}_m - \frac{\mathfrak{x}_m^T \cdot \mathfrak{p}_{m+1} - b_k}{\|\mathfrak{p}_{m+1}\|^2} \cdot \mathfrak{p}_{m+1}$$

Die Konvergenz dieses Verfahrens ergibt sich aus Satz 14.5.1.1 und der Voraussetzung  $|\mathfrak{A}| \neq 0$ . Geometrisch lässt sich das Verfahren „Projektion auf Hyperebenen“ z.B. für  $n = 2$  wie folgt deuten:

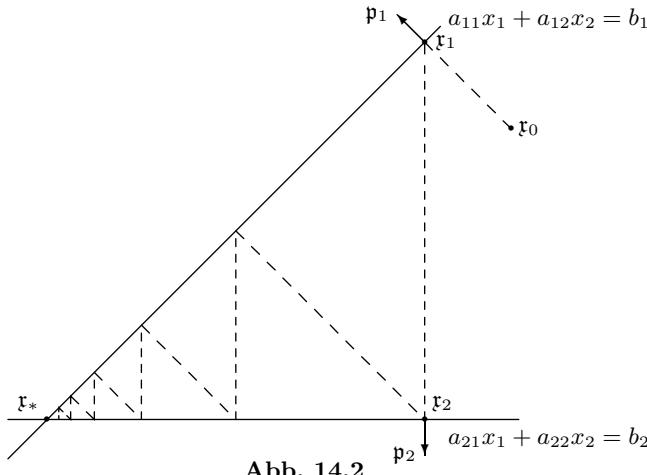


Abb. 14.2

Aus dieser geometrischen Deutung ist bereits ablesbar, daß dieses Verfahren i.allg. langsam konvergiert. Ausgenommen der Fall, wo die Projektionsvektoren orthogonal oder „fast“ orthogonal zueinander sind.

### 14.5.3 Gradientenverfahren

Nachfolgend sei die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  unseres LGS (14.1) eine symmetrische und positiv definite Matrix, d.h., es gilt

$$\mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}$$

und

$$\forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{\mathfrak{o}\} : \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} > 0.$$

(Erfüllt  $\mathfrak{A}$  diese Voraussetzungen nicht, so lässt sich (14.2) durch Multiplikation mit  $\mathfrak{A}^T$  in eine Matrixgleichung  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{b}$  überführen, wobei  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  symmetrisch und positiv definit ist, was man leicht nachprüft (ÜA A.3.17).) Wählt man nun als Skalarprodukt

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}$$

und als Projektionsvektoren

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{p}_1 &:= \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{b} \\
 \mathfrak{p}_2 &:= \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{b} \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{p}_{i+1} &:= \mathfrak{r}_i = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i - \mathfrak{b} \\
 &\vdots,
 \end{aligned}$$

so gilt (wegen der Symmetrie von  $\mathfrak{A}$ )

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_*, \mathfrak{p}_{i+1}) &= (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_*)^T \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i - \mathfrak{b}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i - \underbrace{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_*}_{= \mathfrak{b}})^T \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i - \mathfrak{b}) = \mathfrak{r}_i^T \cdot \mathfrak{r}_i.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

**Gradientenverfahren:**

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} &(\text{symmetrische, positiv definite Matrix}) \\
 \mathfrak{x}_0 &(\text{gegebener Näherungsvektor}) \\
 m &:= 0, 1, 2, 3, \dots (m \text{ Nummer des Schrittes}) \\
 \mathfrak{r}_m &:= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_m - \mathfrak{b} \text{ (Restvektor)} \\
 \mathfrak{x}_{m+1} &:= \mathfrak{x}_m - \frac{\mathfrak{r}_m^T \cdot \mathfrak{r}_m}{\mathfrak{r}_m^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}_m} \cdot \mathfrak{r}_m
 \end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß man bei jedem Schritt zwei Vektoren, nämlich  $\mathfrak{x}_m$  und  $\mathfrak{r}_m$ , mit der Matrix  $\mathfrak{A}$  zu multiplizieren hat. Man kann eine Multiplikation einsparen, wenn man  $\mathfrak{r}_m$  direkt aus  $\mathfrak{r}_{m-1}$  und  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}_{m-1}$  aus dem vorangegangenen Schritt nach der Formel

$$\mathfrak{r}_m = \mathfrak{r}_{m-1} - \frac{\mathfrak{r}_{m-1}^T \cdot \mathfrak{r}_{m-1}}{\mathfrak{r}_{m-1}^T \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}_{m-1})} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}_{m-1}) \quad (14.29)$$

berechnet (Beweis: ÜA).

Eine bessere Konvergenz liefert das Verfahren der konjugierten Gradienten, das abschließend erläutert werden soll.

Wir beginnen wie beim Gradientenverfahren:

$$\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{x}_1 := \mathfrak{x}_0 - \frac{\mathfrak{r}_0^T \cdot \mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}_0^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}_0} \cdot \mathfrak{r}_0$$

Beim zweiten Schritt und bei allen folgenden nehmen wir als Projektionsvektoren  $\mathfrak{p}_{m+1}$  die folgenden Linearkombination:

$$\mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{r}_m - \alpha_m \cdot \mathfrak{p}_m,$$

wobei  $\alpha_m$  sich aus der Forderung

$$\varphi(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1}) = 0$$

ermitteln läßt:

$$\alpha_m = \frac{\mathbf{r}_m^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m}{\mathbf{p}_m^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m}.$$

Folglich gilt:

$$\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{r}_m - \frac{\mathbf{r}_m^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m)}{\mathbf{p}_m^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m)} \cdot \mathbf{p}_m.$$

Weiter wie gehabt (siehe obige Rechnungen zur Herleitung des Gradientenverfahrens):

$$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m - \frac{\mathbf{r}_m^T \cdot \mathbf{p}_{m+1}}{\mathbf{p}_{m+1}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{m+1})} \cdot \mathbf{p}_{m+1}.$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

### Verfahren der konjugierten Gradienten:

$\mathbf{A}$  (symmetrische, positiv definite Matrix)

$\mathbf{x}_0$  (gegebener Näherungsvektor)

$\mathbf{p}_1 := \mathbf{r}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$  (Projektionsvektor)

$$\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{r}_0^T \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0)} \cdot \mathbf{r}_0$$

$m := 1, 2, 3, \dots$  ( $m$  Nummer des Schrittes)

$$\mathbf{r}_m := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_m - \mathbf{b} = \mathbf{r}_{m-1} - \frac{\mathbf{r}_{m-1}^T \cdot \mathbf{p}_m}{\mathbf{p}_m^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m)} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m) \quad (\text{Restvektor})$$

$$\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{r}_m - \frac{\mathbf{r}_m^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m)}{\mathbf{p}_m^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_m)} \cdot \mathbf{p}_m \quad (\text{Projektionsvektor})$$

$$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m - \frac{\mathbf{r}_m^T \cdot \mathbf{p}_{m+1}}{\mathbf{p}_{m+1}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{m+1})} \cdot \mathbf{p}_{m+1}$$

**Satz 14.5.3.1** Das Verfahren der konjugierten Gradienten konvergiert und führt bei exakter Rechnung nach höchstens  $n + 1$  Schritten zum Lösungsvektor  $\mathbf{x}_*$  von (14.1).

*Beweis.* Für die Restvektoren gilt (siehe [Mae 84], S. 129/130):

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\} : \mathbf{r}_m^T \cdot \mathbf{r}_i = 0. \quad (14.30)$$

Aus (14.30) ergibt sich ein einfacher Beweis für unseren Satz:

Falls  $\mathbf{r}_m = \mathbf{o}$  für ein gewisses  $m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  gilt, sind alle weiteren Restvektoren ebenfalls gleich  $\mathbf{o}$  und  $\mathbf{x}_m$  ist die Lösung von (14.1), womit unser Satz bewiesen wäre. Wir können also im folgenden annehmen, daß  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}$  alle von  $\mathbf{o}$  verschieden sind und damit (wegen (14.30)) eine orthonormierte Basis (bez. Standardskalarprodukt) für den Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  bilden. Aus dem Spezialfall

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \mathbf{r}_n^T \cdot \mathbf{r}_i = 0 \quad (14.31)$$

von (14.30) folgt dann  $\tau_n = 0$ , d.h., das Verfahren der konjugierten Gradienten ist ein direktes Verfahren, denn es führt nach höchstens  $n + 1$  Schritten zur Lösung. ■

Es sei noch bemerkt, daß bei Rundungsfehlern das Verfahren der konjugierten Gradienten in der Regel noch keine Lösung liefert, so daß man einige weitere Schritte durchzurechnen hat, um die Rundungsfehler auszugleichen.

Bei allen Vorzügen des Verfahrens der konjugierten Gradienten muß beachtet werden, daß der Rechenaufwand für jeden Schritt recht groß ist, vor allem bei Gleichungssystemen mit vielen Unbekannten und Koeffizientenmatrizen, die nur wenige Nullen enthalten. Deshalb lohnt sich dieses Verfahren nur bei LGS spezieller Struktur.

## Interpolation

In diesem kurzen Kapitel werden noch einige weitere Eigenschaften von Polynomen hergeleitet, die man z.B. benötigt, um numerisch integrieren zu können.<sup>1</sup> Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist das im nächsten Abschnitt erläuterte Problem.

### 15.1 Einführung

Bei der Auswertung von Meßwerten (in der Technik oder Physik) bzw. beim Versuch, komplizierte Funktionen durch einfache näherungsweise zu ersetzen, ist die Lösung des folgenden Problems hilfreich.

#### Allgemeines Interpolationsproblem

**Gegeben:** Eine nichtleere Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , eine **Referenz**  $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$ , d.h., es gilt

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

gewisse Abbildungswerte  $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}$  und gewisse Abbildungen  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  von  $A$  in  $\mathbb{R}$ .

**Gesucht:**  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , so daß die Funktion

$$g(x) := \sum_{i=0}^n c_i \cdot y_i(x)$$

die Eigenschaft

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : g(x_i) = f(x_i)$$

hat.

---

<sup>1</sup> Siehe dazu auch ÜA A.15.6.

**Satz 15.1.1** Das obige allgemeine Interpolationsproblem ist genau dann für beliebige Referenzen  $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$  und beliebig vorgegebene  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  eindeutig lösbar, wenn die sogenannte **Haarsche Bedingung**<sup>2</sup>

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in A :$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \implies$$

$$H := \begin{vmatrix} y_0(x_0) & y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_0(x_1) & y_1(x_1) & \dots & y_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_0(x_n) & y_1(x_n) & \dots & y_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Wir betrachten das aus  $n + 1$  Gleichungen bestehende LGS

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} : \sum_{i=0}^n c_i \cdot y_i(x_k) = f(x_k) \quad (15.1)$$

mit den Unbekannten  $c_0, c_1, \dots, c_n$ . Offenbar ist unser Interpolationsproblem mit der Aufgabe identisch, dieses LGS zu lösen. Wie man leicht nachprüft, ist die Koeffizientendeterminante von (15.1) gleich der Determinante  $H$  aus der Haarschen Bedingung. Obiger Satz ist folglich eine Folgerung aus dem Satz 3.1.11. ■

Nach obigem Beweis ist das Interpolationsproblem mit Hilfe der Cramerschen Regel lösbar, was jedoch viel zu aufwendig ist. Im folgenden Abschnitt soll deshalb gezeigt werden, wie man das Interpolationsproblem für die Funktionen  $y_i(x) := x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ohne Verwendung von Verfahren zum Lösen von LGS lösen kann.

## 15.2 Interpolation mit Polynomen

In diesem Abschnitt wählen wir  $A = \mathbb{R}$  und setzen

$$y_0(x) := 1, \quad y_1(x) := x, \quad y_2(x) := x^2, \quad \dots, \quad y_n(x) := x^n,$$

d.h., wir suchen ein Polynom  $g(x) := \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$ , das an vorgegebenen Stellen  $x_i$  mit  $f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) übereinstimmt.

Da die Determinante  $H$  aus Satz 15.1.1 bei dieser Wahl der  $y_i$  die Vandermondesche Determinante ist, die – wie im Abschnitt 3.1 gezeigt wurde – wegen der paarweisen Verschiedenheit der  $x_i$  stets ungleich 0 ist, folgt aus Satz 15.1.1 unmittelbar der

---

<sup>2</sup> Alfréd Haar (1885–1933), ungarischen Mathematiker.

**Satz 15.2.1** Das Interpolationsproblem mit Polynomen ist für eine beliebige Referenz  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  und eine beliebig gegebene Funktion  $f$  (bzw. beliebig gegebenen Werten  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ) eindeutig lösbar. ■

Eine erste Möglichkeit der konkreten Berechnung von Interpolationspolynomen liefert der folgende Satz.

**Satz 15.2.2** Für eine beliebige Referenz  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  ( $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ) und beliebige Funktionswerte  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}$  erfüllt das sogenannte **Lagrangesche Interpolationspolynom**

$$g(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x)$$

mit den **Lagrange-Koeffizienten**

$$L_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

die Bedingung

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : g(x_i) = f(x_i).$$

*Beweis.* Wegen

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

$(i, k \in \{0, 1, \dots, n\})$  gilt  $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x_k) = f(x_k)$  für alle  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . ■

**Beispiel** Für  $n = 2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 7$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(4) = 16$  und  $f(7) = 49$  erhält man nach Satz 15.2.2 das folgende Interpolationspolynom:

$$g(x) = 4 \cdot \frac{(x - 4)(x - 7)}{(2 - 4)(2 - 7)} + 16 \cdot \frac{(x - 2)(x - 7)}{(4 - 2)(4 - 7)} + 49 \cdot \frac{(x - 2)(x - 4)}{(7 - 2)(7 - 4)}.$$

**Bemerkung** Eine Folgerung aus den Sätzen 15.2.1 und 15.2.2 ist  $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ . (Beweis: ÜA A.15.3).

Wie das obige Beispiel zu Satz 15.2.2 bereits zeigte, ist das Lagrangesche Interpolationspolynom zwar leicht aufschreibbar, jedoch für konkrete Berechnungen nicht besonders gut geeignet. Man nutzt es deshalb meist nur zu Beweiszwecken.

Ohne Beweis findet man nachfolgend noch eine andere Methode zur Berechnung von Interpolationspolynomen kurz erläutert:

### Interpolation nach Newton

Bei dieser Methode hat das Interpolationspolynom (das sogenannte **Newton-sche Interpolationspolynom**) die Gestalt

$$\begin{aligned} g(x) = & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (x - x_0) + \alpha_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + \\ & \alpha_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei sich die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  iterativ mit Hilfe der Hilfspolynome

$$\begin{aligned} g_i(x) := & \alpha_i + \alpha_{i+1}(x - x_i) + \alpha_{i+2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) + \dots + \\ & \alpha_n(x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei  $i = 0, 1, \dots, n$  und  $g_0 = g$ , wie folgt berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= f(x_0), \\ \alpha_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = g_1(x_1) \\ \alpha_2 &= \frac{g_1(x_2) - g_1(x_1)}{x_2 - x_1} = g_2(x_2) \\ &\dots \\ \alpha_{k+1} &= \frac{g_k(x_{k+1}) - g_k(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = g_{k+1}(x_{k+1}) \\ &\dots \\ \alpha_n &= g_n(x_n) \end{aligned}$$

Für die Handrechnung kann man folgendes Rechenschema verwenden:

$x_0$	$f(x_0) = \alpha_0$				
$x_1$	$f(x_1)$	$g_1(x_1) = \alpha_1$			
$x_2$	$f(x_2)$	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2) = \alpha_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$x_n$	$f(x_n)$	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$		$g_n(x_n) = \alpha_n$

Bezeichnet man die erste Spalte dieses Rechenschemas als Abszisse und setzt  $g_0(x_i) := f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), so steht in der  $(k+3)$ -ten Spalte des obigen Schemas für  $k \geq 0$  in der  $(i-1)$ -ten Zeile:

$$g_{k+1}(x_i) := \frac{g_k(x_i) - g_k(x_k)}{x_i - x_k},$$

d.h., gerechnet wird wie folgt:

(linker Nachbar) – (oberstes Element der linken Nachbarspalte)

Differenz der entsprechenden Elemente der Abszisse

**Beispiel** Es sei

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2, & x_3 &= 3, & x_4 &= 4, \\f(0) &= 1, & f(1) &= 1, & f(2) &= 11, & f(3) &= 61, & f(4) &= 205.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Newtonschen Interpolationspolynoms berechnen sich dann mit Hilfe des obigen Schemas wie folgt:

0	1					
1	1	0				
2	11	5	5			
3	61	20	10	5		
4	205	51	17	6	1	

Es gilt damit

$$\begin{aligned}g(x) &= 1 + 5x(x-1) + 5x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.\end{aligned}$$

Noch eine abschließende **Bemerkung** (ohne Beweis):

Der Wert des Interpolationspolynoms  $g$  an der Stelle  $a \in \mathbb{R}$  kann unmittelbar aus den Daten

$$(x_i, f(x_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

berechnet werden, ohne daß vorher die Koeffizienten von  $g(x)$  bestimmt werden müssen. Der folgende

### Neville-Algorithmus<sup>3</sup>

liefert den Wert  $g(a)$ :

$$\begin{aligned}P_{0,0} &:= f(x_0) \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : P_{i,0} &:= f(x_i) \quad \wedge \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, i\} : P_{i,k} &:= P_{i,k-1} + (a - x_i) \cdot \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} \\ g(a) &= P_{n,n}\end{aligned}$$

**Beispiel** Es sei

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2 \\f(0) &= 1, & f(1) &= 3, & f(2) &= 7.\end{aligned}$$

Den Wert  $g(3)$  erhält man dann mit Hilfe des Neville-Algorithmus wie folgt:

---

<sup>3</sup> Eric Harold Neville (1889–1961), englischer Mathematiker.

$$P_{0,0} = 1, \quad P_{1,0} = 3, \quad P_{2,0} = 7,$$

$$P_{1,1} = P_{1,0} + (3 - 1) \cdot \frac{P_{1,0} - P_{0,0}}{1 - 0} = 3 + 2 \cdot \frac{3 - 1}{1} = 7,$$

$$P_{2,1} = P_{2,0} + (3 - 2) \cdot \frac{P_{2,0} - P_{1,0}}{2 - 1} = 7 + 1 \cdot \frac{7 - 3}{1} = 11,$$

$$P_{2,2} = P_{2,1} + (3 - 2) \cdot \frac{P_{2,1} - P_{1,1}}{2 - 0} = 11 + 1 \cdot \frac{11 - 7}{2} = 13 = g(3).$$

Ist  $n$  bei dem Interpolationsproblem von oben sehr groß, so ist die Berechnung des Interpolationspolynoms entsprechenden Grades sehr aufwendig. Außerdem führt eine Graderhöhung des interpolierenden Polynoms i.allg. nicht zu einer besseren Näherung für die Funktion  $f$ . Man verzichtet deshalb oft darauf, Polynome hohen Grades zu verwenden und setzt die Interpolationsfunktion aus Polynomstücken mit kleinem Grad zusammen. Ausführlich findet man dies und Verallgemeinerungen der obigen Überlegungen z.B. in [Sto 99] erläutert.

---

## Grundlagen der Kombinatorik

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, in dem es – grob gesagt – um das Abzählen geht. Beispiele für Fragen, die mit Methoden der Kombinatorik behandelt werden können, sind:

- (a) Wie viele Wörter lassen sich aus der vorgegebenen Buchstabenfolge  $abcde$  bilden?
- (b) Auf wie viele verschiedene Weisen lassen sich 8 unterschiedliche Bücher in einem Regal anordnen?
- (c) Wie viele 10stellige Zahlen gibt es, die dreimal die 1, zweimal die 3 und fünfmal die 7 enthalten?
- (d) Auf wieviel verschiedene Weisen lassen sich aus 12 Mannschaften 3 Gruppen aus jeweils 4 Mannschaften bilden?
- (e) Wie viele Rechenschritte (Addition und Multiplikation) benötigt ein Programm (ein Algorithmus) zur Durchführung?

Obige Aufgaben lassen sich so umformulieren, daß die gesuchten Anzahlen den Mächtigkeiten gewisser Mengen entsprechen. In der (abzählenden) Kombinatorik beschäftigt man sich deshalb vorrangig mit der (möglichst expliziten) Bestimmung der Mächtigkeit endlicher Mengen und mit den Beziehungen zwischen solchen Mächtigkeiten. Damit die Anzahlbestimmung nicht trivial ist, sind dabei natürlich nur solche Mengen interessant, die nicht durch Aufzählung ihrer Elemente gegeben sind.

Die nachfolgend behandelten Abzählmethoden bilden nicht nur die Grundlage für Komplexitätsuntersuchungen von Computerprogrammen (bzw. Algorithmen), sondern auch die Grundlage für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  ( $\subseteq \Omega$ ) in einem klassischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ , wobei  $\Omega$  eine nichtleere endliche Menge (die Menge der Elementarereignisse),  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die Menge der uns interessierenden Ereignisse (die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$ ) und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das eine durch  $P : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : A \mapsto P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$  definierte Abbildung ist, bezeichnen.

## 16.1 Grundregeln des Abzählens

Für beliebige endliche Mengen  $A$  und  $B$  gilt (siehe Kapitel 1):

Eigenschaft	Bezeichnung
$\exists$ bijektive Abbildung von $A$ auf $B \implies  A  =  B $	Gleichheitsregel
$A \cap B = \emptyset \implies  A \cup B  =  A  +  B $	Summenregel
$ A \setminus B  =  A  -  A \cap B $	
$ A \cup B  =  A  +  B  -  A \cap B $	
$ A \times B  =  A  \cdot  B $	Produktregel
Ist $\mathfrak{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von $A$ , so gilt $ \mathfrak{P}(A)  = 2^{ A }$	
Ist $B^A$ die Menge aller Abbildungen von $A$ in $B$ , so gilt $ B^A  =  B ^{ A }$	Potenzregel

## 16.2 Permutationen, Kombinationen und Variationen

Bezeichne  $M$  in diesem Abschnitt eine endliche Menge mit der Mächtigkeit  $m$ . Nachfolgend sollen aus den Elementen der Menge  $M$  gewisse Anordnungen (mit oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Anordnung) gebildet werden, wobei uns stets nur die Anzahl der Möglichkeiten für diese Anordnungen interessieren. Unterscheiden werden wir dabei die folgenden (noch näher zu definierenden) Anordnungen: Permutationen, Variationen und Kombinationen, jeweils untergliedert nach der Zusatzeigenschaft „mit“ bzw. „ohne Wiederholung“. Beginnen wollen wir mit

### 16.2.1 Permutationen (Anordnungen) von $M$

Wie bereits im Kapitel 3 definiert wurde, versteht man unter einer **Permutation der Menge  $M$**  eine bijektive Abbildung der Menge  $M$  auf  $M$ .

Aufschreiben lassen sich solche Permutationen auch in Form von  $m$ -Tupeln  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , wobei  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = M$  ist. Wegen dieser Tupelschreibweise hätte man auch definieren können: Eine Permutation ist eine Anordnung von  $m$  unterschiedlichen Elementen auf  $m$  Plätzen, wobei die Reihenfolge der Anordnung eine Rolle spielt.

Bezeichnet man mit  $P_m$  die Anzahl aller möglichen Permutationen der Menge  $M$ , so gilt

$$P_m = m!.$$

Zum Beweis überlege man sich, daß es für die Belegung des ersten Platzes in einer Permutation  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  genau  $m$  Möglichkeiten gibt, für den zweiten Platz dann nur noch genau  $m - 1$  Möglichkeiten, ... sowie für den  $m$ -ten Platz nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt also  $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdots \cdot 2 \cdot 1 = m!$  Möglichkeiten.

### 16.2.2 Permutationen mit Wiederholung

Bei dieser Art von „Permutationen“ handelt es sich um Anordnungen von  $k$  Elementen, die jedoch nicht alle unterschiedlich sind. Seien also  $k_1, k_2, \dots, k_n$  gleiche Elemente von  $n$  verschiedenen Arten gegeben, wobei  $\sum_{i=1}^n k_i = k$  sei. Jedes  $k$ -Tupel mit  $k_1, k_2, \dots, k_n$  jeweils gleichen Elementen heißt dann eine **Permutation mit Wiederholung**. Für die Anzahl  $P_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}$  der Möglichkeiten solcher  $k$ -Tupel gilt

$$P_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Wir überlegen uns die Anzahlformel anhand des Beispiels

$$k = 10, k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 5.$$

Der allgemeine Beweis verläuft analog. Seien zunächst 10 paarweise verschiedene Elemente

$$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$$

gegeben, von denen es  $10!$  Permutationen gibt. Streicht man die Indizes bei den Elementen  $a_1$  und  $a_2$  (beseitigt man also die Unterschiede bei diesen Elementen), so fallen jeweils  $2!$  Anordnungen zusammen, d.h., es bleiben dann nur noch

$$\frac{10!}{2!}$$

verschiedene Anordnungen übrig. Beseitigt man anschließend die Unterscheidung bei den  $b_1, b_2, b_3$ , so fallen jeweils  $3!$  Anordnungen zusammen und es verbleiben:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3!}$$

verschiedene Permutationen mit Wiederholung. Streichen der Indizes bei den  $c_i$ -Elementen liefert dann als Anzahl

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$$

für die möglichen Permutationen mit Wiederholung der Elemente

$$a, a, b, b, b, c, c, c, c, c.$$

### 16.2.3 Variationen mit Wiederholung

Unter einer **Variation von Elementen aus  $M$  zur Klasse  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) mit Wiederholung** versteht man eine Abbildung der Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$  in  $M$ .

Aufschreiben lassen sich diese Variationen mit Wiederholung in Form von Tupeln  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , wobei  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M$ . Bezeichnet  $V_m^{k,W}$  die Anzahl

der möglichen Variationen der Elemente von  $M$  zur Klasse  $k$  mit Wiederholung, so gilt

$$V_m^{k,W} = m^k.$$

Auch in diesem Fall ergibt sich die Anzahlformel aus einer einfachen Überlegung: Für jeden Platz in einem  $k$ -Tupel aus Elementen von  $M$  gibt es genau  $m$  Möglichkeiten der Belegung, also insgesamt  $\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{k\text{-mal}} = m^k$  Möglichkeiten.

#### 16.2.4 Variationen ohne Wiederholung

Unter einer **Variation von Elementen aus  $M$  zur Klasse  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ohne Wiederholung** versteht man eine injektive Abbildung der Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$  in  $M$ .

Aufschreiben lassen sich diese Variationen ohne Wiederholung in Form von Tupeln

$$(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ wobei } \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M \text{ und } |\{x_1, \dots, x_k\}| = k.$$

Bezeichnet  $V_m^k$  die Anzahl der möglichen Variationen der Elemente von  $M$  zur Klasse  $k$  ohne Wiederholung, so gilt

$$V_m^k = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot (m - k + 1) = \frac{m!}{k!},$$

da es für den ersten Platz im Tupel  $(x_1, \dots, x_k)$  bei diesem Anordnungstyp genau  $m$ , für den zweiten Platz  $m - 1, \dots$ , für den  $k$ -ten Platz genau  $m - k + 1$  Möglichkeiten gibt.

#### 16.2.5 Kombinationen ohne Wiederholung

Unter einer **Kombination von Elementen aus  $M$  zur Klasse  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ohne Wiederholung** versteht man eine  $k$ -elementige Teilmenge der Menge  $M$ :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq M, \text{ wobei } |\{x_1, \dots, x_k\}| = k.$$

Bezeichnet  $C_m^k$  die Anzahl der möglichen Kombinationen der Elemente von  $M$  zur Klasse  $k$  ohne Wiederholung, so gilt

$$\begin{aligned} C_m^k &= \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \binom{m}{k}. \end{aligned}$$

Obige Anzahlformel ergibt sich aus der für die Variationen ohne Wiederholung, indem man sich überlegt, daß jeweils  $k!$  Variationen bei Nichtberücksichtigung der Reihenfolge der Anordnung eine Kombination ohne Wiederholung liefert.

### 16.2.6 Kombinationen mit Wiederholung

Falls man alle Variationen der Menge  $M$  zur Klasse  $k$  mit Wiederholung zu einer Äquivalenzklasse zusammenfaßt, die aus den gleichen Elementen in der jeweils gleichen Anzahl (ohne Berücksichtigung der Anordnung) bestehen, so nennt man jede solche Äquivalenzklasse eine **Kombination von Elementen der Menge  $M$  zur Klasse  $k$  mit Wiederholung**.

**Beispiel:** Sei  $M := \{1, 2, 3, \dots, m\}$  und  $k = 2$ . Dann sind

$\{(1, 1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \dots, \{(1, m), (m, 1)\}$   
 $\{(2, 2)\}, \{(2, 3), (3, 2)\}, \{(2, 4), (4, 2)\}, \dots, \{(2, m), (m, 2)\}$   
 .....  
 $\{(m, m)\}$

die Kombinationen mit Wiederholung zur zweiten Klasse. Wählt man aus jeder Äquivalenzklasse  $(x, y)$  einen Vertreter aus und schreibt  $xy$  anstelle von  $(x, y)$ , so lassen sich die oben angegebenen Variationen auch wie folgt angeben:

11	12	13	...	$1m$
22	23	...		$2m$
	33	...		$3m$
.....				$m$

Offenbar gibt es genau  $1+2+\dots+m = \frac{m}{2} \cdot (m+1)$  von solchen Kombinationen. Allgemein gilt für die Anzahl  $C_m^{k,W}$  aller möglichen Kombinationen der Menge  $M$  zur Klasse  $k$  mit Wiederholung

$$C_m^{k,W} = \binom{m+k-1}{k}.$$

Zum Beweis dieser Formel für  $k \geq 3$  überlegen wir uns zunächst eine mögliche Codierung einer beliebigen Kombination  $K$  von Elementen der Menge  $M := \{a_1, \dots, a_m\}$  zur Klasse  $k$ :

Ist  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_k)$  ein Vertreter der Äquivalenzklasse  $K$  und  $t_i$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  die Anzahl des Auftretens des Elements  $a_i$  im Tupel  $\mathbf{x}$ , so ist  $K$  vollständig durch den Inhalt von  $m$  Fächern, in denen  $k$  (gleichartige) Kugeln so verteilt sind, daß sich im  $i$ -ten Fach genau  $t_i$  Kugeln befinden, charakterisiert. Beispiele solcher Darstellungen für  $M := \{1, 2, \dots, 6\}$  und  $k = 5$  sind

$$(2, 2, 3, 4, 4) \longleftrightarrow | \quad | \circ \circ \quad | \circ \quad | \circ \circ \quad | \quad | \quad |$$

$$(1, 1, 1, 5, 5) \longleftrightarrow | \circ \circ \circ | \quad | \quad | \quad | \circ \circ \quad | \quad |$$

Die untere Linie und die links und rechts gezeichneten Begrenzungsstriche sind zur eindeutigen Charakterisierung von  $K$  überflüssig. Also genügen  $m - 1$  Striche und  $k$  Kugeln (also insgesamt  $m + k - 1$  Symbole) zur eindeutigen Beschreibung der Kombination  $K$ , die dadurch festgelegt wird, daß man unter  $m + k - 1$  Symbolen  $k$  als Kugeln (und den Rest als Striche) deutet. Unsere Formel für  $C_m^{k,W}$  ergibt sich folglich aus der für  $C_{m+k-1}^k$ .

### 16.2.7 Einige Beispiele für Anwendungen obiger Formeln

**1.** Wie viele unterschiedliche siebenstellige Zahlen  $z$  aus lauter unterschiedlichen Ziffern können aus den Ziffern  $0, 1, \dots, 6$  gebildet werden?

Es gibt genau  $7!$  Permutationen der Ziffern  $0, 1, 2, \dots, 6$ . Von diesen Permutationen beginnen  $6!$  mit einer  $0$ . Also gibt es  $7! - 6! = 6 \cdot (6!)$  paarweise verschiedene siebenstellige Zahlen, die alle Ziffern aus der Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  enthalten.

**2.** Könnte ein Skatspieler sämtliche möglichen Spiele im Laufe seines Lebens spielen?

Um diese sehr ungenau formulierte Frage beantworten zu können, muß man von einem Skatspiel nur wissen, daß zu einem Skatspiel drei Spieler gehören, die zu Beginn des Spiels von 32 paarweise verschiedenen Karten jeweils 10 Karten erhalten. Die restlichen zwei Karten bilden den „Skat“.

Nachfolgend sei ein Skatspiel ein Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_{32}) \in \{1, 2, 3, S\}^{32}$ , das genau zehnmal jeweils die 1, 2 und 3 sowie zweimal den Buchstaben  $S$  enthält, d.h.,  $a_t = i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  bedeutet, daß die  $t$ -te Karte der gegebenen 32 Karten der Spieler  $i$  erhält, entsprechend ist durch  $a_t = S$  codiert, daß die  $t$ -te Karte zum Skat gehört. Aus unserer Formel für Permutationen mit Wiederholung erhalten wir folglich als Anzahl der möglichen Skatspiele:

$$\frac{32!}{(10!)^3 \cdot (2!)} = 2\,753\,294\,408\,504\,640.$$

Würde ein Spieler täglich 200 Spiele spielen, so würde er in 100 Jahren gerade mal 7 300 000 Spiele schaffen, falls man das Jahr mit 365 Tagen annimmt. Damit ist unsere obige Frage mit „Nein“ zu beantworten und auch die obige Definition eines Skatspiels gerechtfertigt, auch wenn es bei einer Betrachtung des Skatspielens weit aus mehr Möglichkeiten gibt.

- 3.** Wie viele Permutationen können aus den Buchstaben des Wortes ALGEBRA gebildet werden? An wievielter Stelle bei einer lexikographischen Anordnung dieser Permutationen steht das Wort ALGEBRA?

Aus den Buchstaben AABEGLR lassen sich  $\frac{7!}{2}$  verschiedene Wörter mit 7 Buchstaben (Permutationen mit Wiederholung) bilden. Ordnet man diese Wörter lexikographisch, so erhält man die 568. Stelle, an der sich das Wort ALGEBRA befindet, wie folgt:

1.	<b>A A <math>\underbrace{B E G L R}_{5!}</math></b> mögл. Perm.	529.	<b>A L E <math>\underbrace{A B G R}_{4!}</math></b>
...	...	...	...
121.	<b>A B A <math>\underbrace{E G L R}_{5!}</math></b>	553.	<b>A L G A <math>\underbrace{B E R}_{3!}</math></b>
...	...	...	...
241.	<b>A E A <math>\underbrace{B G L R}_{5!}</math></b>	559.	<b>A L G B <math>\underbrace{A E R}_{3!}</math></b>
...	...	...	...
361.	<b>A G A <math>\underbrace{B E L R}_{5!}</math></b>	565.	<b>A L G E A <math>\underbrace{B R}_{2!}</math></b>
...	...	...	...
481.	<b>A L A <math>\underbrace{B E G R}_{4!}</math></b>	567.	<b>A L G E B A R</b>
505.	<b>A L B A <math>\underbrace{E G R}_{4!}</math></b>	568.	<b>A L G E B R A</b>

- 4.** In der klassischen Braille-Schrift<sup>1</sup> für Blinde werden auf den 6 Plätzen des Rasters

⋮ ⋮

gewisse Punkte der Form · durch erhabene Punkte •, die mit dem Tastsinn der Finger erfährlbar sind, ersetzt und diesen Zeichen Buchstaben, Ziffern sowie Satzzeichen zugeordnet. Unter Verwendung des deutschen Braille-Alphabets erhält man z.B. die folgende Codierung für das Wort Kombinatorik:

<i>k</i>	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>t</i>	<i>o</i>	<i>r</i>	<i>i</i>	<i>k</i>
• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :	• :

<sup>1</sup> Benannt nach dem Franzosen Louis Braille, der 1829 diese Schrift entwickelte.

Wie viele verschiedene Symbole kann man nach der Braille-Methode Blinden erfährlbar machen?

Da die Reihenfolge der Anordnung eine Rolle spielt und pro Platz des Rasters zwei Zeichen zur Auswahl stehen, gibt es  $(V_2^{6,W} =) 2^6 = 64$  Möglichkeiten nach der Braille-Methode gewisse Symbole zu codieren.

**5.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest gewählt. Mit Hilfe eines Zufallsgenerators kann eine nichtleere Teilmenge  $M$  von  $N := \{z \in \mathbb{N} \mid 1 \leq z \leq n\}$  bestimmt werden. In welchem Verhältnis stehen die Chancen, daß  $|M|$  eine gerade Zahl ist, zu den Chancen, daß  $|M|$  ungerade ist?

Es gibt  $\binom{n}{m}$  Möglichkeiten, eine  $m$ -elementige Teilmenge von  $N$  auszuwählen. Bezeichnet man mit  $A_g$  die Anzahl der Möglichkeiten, daß der Zufallsgenerator eine Teilmenge von  $N$  mit gerader Mächtigkeit liefert, und entsprechend mit  $A_u$  die Anzahl der Möglichkeiten mit ungerader Mächtigkeit, gilt:<sup>2</sup>

$$A_g = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{k_1} = 2^{n-1} - \binom{n}{0} = 2^{n-1} - 1,$$

wobei

$$k_1 := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

sowie

$$A_u = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k_2} = 2^{n-1},$$

wobei

$$k_2 := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Demnach verhalten sich die Chancen für eine gerade Zahl  $|M|$  zu den Chancen für ungerades  $|M|$  wie  $2^{n-1} - 1$  zu  $2^{n-1}$ .

### 16.3 Das Prinzip der Inklusion-Exklusion

In diesem Abschnitt wollen wir uns eine Formel zur Berechnung der Mächtigkeit von Mengen der Art  $\bigcup_{i=1}^n M_i$ , wobei die  $M_i$  endliche Mengen sind, überlegen. Wir beginnen mit den Spezialfällen  $n = 2$  und  $n = 3$ .

Offenbar gilt (siehe Abschnitt 16.1):

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|.$$

---

<sup>2</sup> Zum Beweis der angegebenen Ausdrücke für  $A_g$  und  $A_u$  benutze man den Binomiallehrsatz (kurz: Binomi) wie folgt:

Zunächst bilde man  $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$  und  $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-1)^i$ . Addiert bzw. subtrahiert man die erhaltenen Gleichungen und formt sie etwas um, so erhält man die angegebenen Darstellungen von  $A_g$  und  $A_u$ .

Mit Hilfe dieser Anzahlformel läßt sich der Fall  $n = 3$  wie folgt behandeln: Es gilt

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup M_3| &= |M_1 \cup (M_2 \cup M_3)| \\ &= |M_1| + |M_2 \cup M_3| - \underbrace{|M_1 \cap (M_2 \cup M_3)|}_{(M_1 \cap M_2) \cup (M_2 \cap M_3)} \\ &= |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_2 \cap M_3| - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_2 \cap M_3|) \\ &= |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|. \end{aligned}$$

Allgemein haben wir dann

**Satz 16.3.1 (Inklusion-Exklusion-Formel)**

Für beliebige endliche Mengen  $M_1, \dots, M_n$  gilt

$$|\bigcup_{k=1}^n M_k| = \sum_{t=1}^n \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N}, \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n}} (-1)^{t-1} |M_{k_1} \cap M_{k_2} \cap \dots \cap M_{k_t}|. \quad (16.1)$$

*Beweis.* Zum Beweis überlegen wir uns, daß ein beliebiges  $x \in \bigcup_{i=1}^n M_i$  auf der linken und rechten Seite von (16.1) nur jeweils einmal gezählt wird. Angenommen,  $x$  liegt in genau  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) der Mengen  $M_1, \dots, M_n$ . Dann wird  $x$  in

$$|M_1| + |M_2| + \dots + |M_n|$$

genau  $i = \binom{i}{1}$ -mal gezählt. In

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q \leq n} |M_p \cap M_q| = |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + \dots + |M_{n-1} \cap M_n|$$

passiert dies genau  $\binom{i}{2}$ -mal. In

$$\sum_{p,q,r \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q < r \leq n} |M_p \cap M_q \cap M_r|$$

wird  $x$  genau  $\binom{i}{3}$ -mal gezählt. Diese Überlegung läßt sich bis zu den Durchschnitten von genau  $i$  Mengen fortsetzen, wo  $x$  genau  $1 = \binom{i}{i}$ -mal gezählt wird. Danach liegt  $x$  in keiner der angegebenen Durchschnittsmengen mehr. Insgesamt wird damit  $x$  auf der rechten Seite von (16.1) genau einmal gezählt, da

$$\sum_{t=1}^i (-1)^{t-1} \binom{i}{t} = - \underbrace{\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \cdot (-1)^k}_{\substack{\text{Binomial} \\ (1+(-1))^i}} + \binom{i}{0} = 1$$

ist. ■

Es sei noch bemerkt, daß man die Formel (16.1) auch wie folgt aufschreiben kann:

$$\left| \bigcup_{k=1}^n M_k \right| = \sum_K (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} M_k \right|. \quad (16.2)$$

$K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, K \neq \emptyset$

### Satz 16.3.2 (Siebformel)

*Es sei  $M$  eine endliche Menge und  $T_1, T_2, \dots, T_t$  Teilmengen von  $M$ . Dann gilt*

$$\left| M \setminus \left( \bigcup_{i=1}^t T_i \right) \right| = |M| + \sum_K (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} T_k \right|. \quad (16.3)$$

$K \subseteq \{1, 2, \dots, t\}, K \neq \emptyset$

*Beweis.* Aus der Inklusion-Exklusion-Formel (16.2) folgt

$$\left| \bigcup_{i=1}^t T_i \right| = \sum_K (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} T_k \right|.$$

$K \subseteq \{1, 2, \dots, t\}, K \neq \emptyset$

Wegen

$$\left| M \setminus \left( \bigcup_{i=1}^t T_i \right) \right| = |M| - \left| \bigcup_{i=1}^t T_i \right|$$

ergibt sich hieraus

$$\left| M \setminus \left( \bigcup_{i=1}^t T_i \right) \right| = |M| - \sum_K (-1)^{|K|+1} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} T_k \right|.$$

$K \subseteq \{1, 2, \dots, t\}, K \neq \emptyset$

Klammert man  $(-1)$  in der obigen Summe aus, erhält man (16.3). ■

Erste Anwendungen von (16.2) und (16.3) findet man im nächsten Abschnitt.

## 16.4 Mächtigkeiten von einigen Abbildungsmengen

Seien in diesem Abschnitt  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $M := \{1, 2, \dots, m\}$  und  $N := \{1, 2, \dots, n\}$ . Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= \{f \mid f \text{ ist Abbildung von } M \text{ in } N\}, \\ I_{m,n} &:= \{f \in A_{m,n} \mid f \text{ ist injektiv}\}, \\ S_{m,n} &:= \{f \in A_{m,n} \mid f \text{ ist surjektiv}\}, \\ P_{m,n} &:= \{f \in A_{m,n} \mid f \text{ ist bijektiv}\}. \end{aligned}$$

Mächtigkeiten dieser Mengen, die nicht leer sind, faßt der folgenden Satz zusammen.

**Satz 16.4.1** Für beliebige  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:

- (a)  $|A_{m,n}| = n^m$ ,
- (b)  $|I_{m,n}| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$  für  $m \leq n$ ,
- (c)  $|S_{m,n}| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^m$  für  $n \leq m$ ,
- (d)  $|P_{n,n}| = n!$ .

*Beweis.* Die Aussagen (a), (b) und (d) haben wir uns bereits im Abschnitt 16.2 überlegt. (c) lässt sich für  $n \leq m$  z.B. wie folgt beweisen:

Sei

$$T_\alpha := \{f \in A_{m,n} \mid \alpha \notin W(f)\}.$$

Offenbar gilt dann

$$S_{m,n} = A_{m,n} \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in N} T_\alpha \right).$$

Anwenden der Siebformel (16.3) liefert:

$$|S_{m,n}| = |A_{m,n}| + \sum_{K, \emptyset \subset K \subseteq N} (-1)^{|K|} \cdot |\bigcap_{k \in K} T_k|.$$

Da

$$\bigcap_{k \in K} T_k = \{f \in A_{m,n} \mid f : M \longrightarrow N \setminus K\},$$

gilt nach (a)

$$|\bigcap_{k \in K} T_k| = (n - |K|)^m.$$

Folglich

$$|S_{m,n}| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^m,$$

weil es genau  $\binom{n}{i}$  Möglichkeiten gibt, aus einer  $n$ -elementigen Menge eine  $i$ -elementige Menge  $K$  auszuwählen. ■

## 16.5 Lineare Rekursionsgleichungen (bzw. Differenzengleichungen)

Sei nachfolgend  $\mathcal{F}$  die Menge aller Abbildungen der Art

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n).$$

Die Elemente von  $\mathcal{F}$  heißen auch **Folgen** und man schreibt

$$f = (f(n))_{n \in \mathbb{N}} = (f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots).$$

**Satz 16.5.1** Die Menge  $\mathcal{F}$  bildet zusammen mit den Verknüpfungen  $+ : \mathcal{F}^2 \longrightarrow \mathcal{F}$  und  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ , die definiert sind durch

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2, f \in \mathcal{F} \forall c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : \\ (f_1 + f_2)(n) := f_1(n) + f_2(n), \\ (c \cdot f)(n) := c \cdot f(n), \end{aligned}$$

einen Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* ÜA. ■

Wie wir weiter unten anhand von Beispielen sehen werden, gibt es eine Reihe von kombinatorischen Problemen, die auf das folgende Problem zurückgeführt werden können.

**Gegeben:**  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_k \neq 0$ ,  
 $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n, \dots \in \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > k$ ).

**Gesucht:** Eine Abbildung  $f \in \mathcal{F}$  in **expliziter** Beschreibung, die die folgende **lineare Rekursionsgleichung** (kurz: **LRG**)  $k$ -ter **Ordnung mit konstanten Koeffizienten** für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$  erfüllt:

$$\underbrace{f(n) + \alpha_1 \cdot f(n-1) + \alpha_2 \cdot f(n-2) + \dots + \alpha_k \cdot f(n-k)}_{=: R_{n,k}(f)} = \beta_n. \quad (16.4)$$

Die LRG (16.4) heißt **homogen**, falls  $\beta_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$ , ansonsten **inhomogen**.

Gleichungen der Form (16.4), in denen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  durch die Elemente  $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,k}$  der Folgen  $(\alpha_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ersetzt werden, heißen **lineare Rekursionsgleichungen  $k$ -ter Ordnung**, die analog zu oben in homogene und inhomogene unterschieden werden,

Läßt man die Forderung „ $f$  in expliziter Beschreibung“ weg, so erhält man alle möglichen Lösungen  $f \in \mathcal{F}$  des obigen Problems, wenn man die **Anfangswerte**

$$f(1), f(2), \dots, f(k)$$

auf alle nur mögliche Weisen festlegt und in Abhängigkeit von dieser Festlegung die restlichen  $f(n)$  gemäß

$$\forall n \geq k+1 : f(n) := \beta_n - \alpha_1 \cdot f(n-1) - \alpha_2 \cdot f(n-2) - \dots - \alpha_k \cdot f(n-k)$$

berechnet.

Nachfolgend sind **vier Beispiele** angegeben, die zeigen, wie man auf lineare Rekursionsgleichungen beim Lösen gewisser Probleme kommt.

**(1.)** Die Zinseszinsrechnung läßt sich mit Hilfe einer homogenen LRG erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten wie folgt anhand eines Spezialfalls beschreiben:

Ein Bankkunde schließt mit seiner Bank den folgenden Vertrag für ein neues Konto ab: Die Summe Geldes, die sich zu Beginn eines Jahres auf dem neuen Konto des Kunden befindet, wird am Ende des Jahres mit  $\alpha$  Prozent verzinst und dem neuen Konto des Kunden gutgeschrieben. Vereinbart wird außerdem, daß der Kunde bei Vertragsabschluß an einem 31. Dezember eine gewisse Geldsumme  $k_0$  auf sein neues Konto einzahlt, weitere Einzahlungen nicht erfolgen und Auszahlungen zum Ende eines Jahres nach Vertragskündigung möglich sind. Bezeichne  $f(n)$  mit  $n \geq 1$  die Summe Geldes, die der Kunde am Ende des  $n$ -ten Jahres nach Vertragsabschluß auf seinem Konto hat. Dann gilt offenbar  $f(1) = k_0 + \frac{\alpha}{100} \cdot k_0$  und

$$\forall n \geq 2 : f(n) = f(n-1) + \frac{\alpha}{100} \cdot f(n-1)$$

bzw.

$$\forall n \geq 2 : f(n) - (1 + \frac{\alpha}{100}) \cdot f(n-1) = 0.$$

Obige Gleichung ist offenbar eine homogene LRG erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und dem Anfangswert  $f(1) = (1 + \frac{\alpha}{100}) \cdot k_0$ . Per Induktion erhält man

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (1 + \frac{\alpha}{100})^n \cdot k_0.$$

**(2.)** Sei  $f(n)$  die Anzahl der Möglichkeiten, der Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ein Tupel  $(a_1, \dots, a_t) \in \{1, 2\}^t$  mit  $t \in \mathbb{N}$  und  $\sum_{i=1}^t a_i = n$  zuzuordnen.

Offenbar gilt  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$  (wegen  $2 = 1 + 1$  und  $2 = 2$ ) und  $f(3) = 3$  (wegen  $3 = 1 + 1 + 1$ ,  $3 = 1 + 2$  und  $3 = 2 + 1$ ). Jede Darstellung von  $n \geq 3$  als Summe von Einsen und Zweien endet mit 1 oder 2. Die Zahl  $n \geq 3$  wird also in der Form  $n = (n-1) + 1$  oder  $n = (n-2) + 2$  dargestellt. Folglich gilt

$$\forall n \geq 3 : f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Also ist die Abbildung  $f$  die Lösung der homogenen LRG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\forall n \geq 3 : f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0,$$

die die Anfangswerte  $f(1) = 1$  und  $f(2) = 2$  besitzt. Die Lösung dieser Aufgabe findet man im Anschluß von Satz 16.5.2.

(3.) Es sei

$$S_n := \{s \mid s : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ ist bijektive Abbildung}\}$$

die Menge aller Permutationen, die über der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  definiert sind. Ein  $a \in \{1, 2, \dots, n\}$  heißt **Fixpunkt** der Permutation  $s \in S_n$ , wenn  $s(a) = a$  gilt.

Sei  $f(n)$  die Anzahl aller  $s \in S_n$  ohne Fixpunkte ( $n \in \mathbb{N}$ ). Offenbar gilt  $f(1) = 0$  und  $f(2) = 1$ . Um  $f(n)$  für  $n \geq 3$  durch eine LRG zu beschreiben, ordnen wir jeder fixpunktfreien Permutation  $s \in S_n$  auf folgende Weise eine Permutation  $t_s$  aus  $S_{n-1}$  auf eineindeutige (injektive) Weise zu:

$$t_s(x) := \begin{cases} s(n) & \text{für } x = s^{-1}(n), \\ s(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzt man  $\alpha := f(n)$  und beachtet  $s(n) \neq n$ , läßt sich die oben definierte Zuordnung wie folgt veranschaulichen:

$x$	$s(x)$		$x$	$t_s(x)$
1	$s(1)$	→	1	$s(1)$
2	$s(2)$		2	$s(2)$
⋮	⋮		⋮	⋮
$s^{-1}(n)$	$n$		$s^{-1}(n)$	$\alpha$
⋮	⋮		⋮	⋮
$n - 1$	$s(n - 1)$		$n - 1$	$s(n - 1)$
$n$	$\alpha$			

Da  $s$  keine Fixpunkte besitzt, gibt es für  $\alpha$  genau  $n - 1$  Möglichkeiten. Sei  $\alpha$  festgelegt. Dann existieren im Fall  $s^{-1}(n) \neq \alpha$  genau  $f(n - 1)$  Möglichkeiten für  $t_s$  sowie im Fall  $s^{-1}(n) = \alpha$  genau  $f(n - 2)$  Möglichkeiten für  $t_s$ . Folglich haben wir

$$\forall n \geq 3 : f(n) = (n - 1) \cdot (f(n - 1) + f(n - 2)).$$

Das Problem, die Anzahl  $f(n)$  aller fixpunktfreien Permutationen aus der Menge  $S_n$  zu bestimmen, ist also zurückführbar auf das Problem, die homogene LRG

$$\forall n \geq 3 : f(n) - (n - 1) \cdot f(n - 1) - (n - 1) \cdot f(n - 2) = 0,$$

die keine konstanten Koeffizienten hat, mit den Anfangswerten  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$  zu lösen.

(4.) Sei  $f(n)$  die Anzahl der Gebiete in der (Anschaungs-)Ebene, die entstehen, wenn  $n$  Geraden in **allgemeiner Lage** (d.h., keine zwei Geraden

parallel und keine drei Geraden mit einem gemeinsamen Schnittpunkt) gezeichnet werden ( $n \in \mathbb{N}$ ). Man prüft anhand von Skizzen leicht nach, daß  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4 = f(1) + 2$  und  $f(3) = 7 = f(2) + 3$  gilt. Allgemein kann man sich überlegen, daß die  $n$ -te Gerade  $g_n$  alle  $n - 1$  bereits festgelegten Geraden  $g_1, \dots, g_{n-1}$  in genau  $n - 1$  Punkten schneidet. Dadurch wird  $g_n$  in  $n$  Teilstücke zerlegt. Jedes dieser Teilstücke zerlegt ein bereits durch  $g_1, \dots, g_{n-1}$  bestimmtes Gebiet in zwei neue. Folglich

$$\forall n \geq 2 : f(n) = f(n-1) + n.$$

Unser vierter Beispiel liefert also die inhomogene LRG erster Ordnung

$$\forall n \geq 2 : f(n) - f(n-1) = n$$

mit dem Anfangswert  $f(1) = 2$ . Durch vollständige Induktion kann man

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2)$$

beweisen.

Allgemeine Aussagen über die Lösungen einer LRG (16.4) faßt der folgende Satz zusammen:

**Satz 16.5.2** Es seien

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &:= \{f \in \mathcal{F} \mid \forall n \geq k+1 : R_{n,k}(f) = 0\}, \\ \mathcal{L} &:= \{f \in \mathcal{F} \mid \forall n \geq k+1 : R_{n,k}(f) = \beta_n\}.\end{aligned}$$

Dann gilt:

- (a)  $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_0 \forall n \geq k+1 : R_{n,k}(f_1 + f_2) = R_{n,k}(f_1) + R_{n,k}(f_2)$ .
- (b)  $\forall f \in \mathcal{L}_0 \forall c \in \mathbb{R} \forall n \geq k+1 : R_{n,k}(c \cdot f) = c \cdot R_{n,k}(f)$ .
- (c)  $\mathcal{L}_0$  ist ein Untervektorraum des Vektorraums  $\mathcal{F}$  der Dimension  $k$ , womit es  $k$  linear unabhängige Lösungen  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{L}_0$  mit

$$\mathcal{L}_0 = \{c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_k \cdot f_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

gibt. Die Formel

$$c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_k \cdot f_k$$

nennt man **allgemeine Lösung** der homogenen LRG  $R_{n,k}(f) = 0$ .

- (d) Mit einer beliebig wählbaren **speziellen Lösung**  $f_0 \in \mathcal{L}$  läßt sich  $\mathcal{L}$  wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{L} = f_0 + \mathcal{L}_0 := \{f_0 + f \mid f \in \mathcal{L}_0\},$$

d.h., die **allgemeine Lösung der inhomogenen LRG** (16.4) hat die Form

$$f_0 + c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_k \cdot f_k, \quad (16.5)$$

wobei

$$c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_k \cdot f_k$$

$(c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$  die allgemeine Lösung der zu (16.4) gehörenden homogenen LRG  $R_{n,k}(f) = 0$  ist.

(e) Sind für  $f \in \mathcal{F}$  gewisse **Anfangswerte**

$$f(1) = \beta_1, f(2) = \beta_2, \dots, f(k) = \beta_k$$

gegeben, so ist die Lösung der LRG (16.4) eindeutig bestimmt und die Konstanten  $c_1, \dots, c_k$  aus der allgemeinen Lösung (16.5) erhält man als Lösung des (in Matrzenschreibweise angegebenen) LGS

$$\begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) & \dots & f_k(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & \dots & f_k(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(k) & f_2(k) & \dots & f_k(k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 - f_0(1) \\ \beta_2 - f_0(2) \\ \vdots \\ \beta_k - f_0(k) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Die Aussagen (a) und (b) prüft man leicht nach. (c) ist eine Folgerung aus (a) und (b) (ÜA). (d) und (e) beweist man analog zu entsprechenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme (siehe u.a. die Beweise der Sätze 3.2.9–3.2.11). ■

Wie bei linearen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung lassen sich  $k$  linear unabhängige Lösungen der homogenen LRG (16.4) mit Hilfe eines gewissen Ansatzes bestimmen, was zunächst an einem Beispiel erläutert werden soll:  
Wir wählen die LRG

$$\forall n \geq 3 : R_{n,2}(f) = f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0 \quad (16.6)$$

(siehe Beispiel (2.) von Seite 433) und untersuchen, ob  $f(n) = \lambda^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) für gewisse  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Lösung dieser LRG ist. Einsetzen des Ansatzes in die LRG liefert

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0.$$

Division durch  $\lambda^{n-2}$  ergibt die Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}), \lambda_2 := \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{5}).$$

Also sind

$$\forall n \geq 3 : f_1(n) = \lambda_1^n, f_2(n) = \lambda_2^n$$

Lösungen der betrachteten LRG, die wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  offenbar linear unabhängig sind, womit

$$\forall n \geq 3 : c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$$

bzw.

$$\forall n \geq 3 : c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (16.7)$$

die allgemeine Lösung der LRG (16.6) ist.

Um die Lösung  $f$  unseres Beispiels (2.) zu finden, haben wir  $c_1, c_2$  aus der Gleichung  $f(n) = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$  so zu bestimmen, daß  $f(1) = 1$  und  $f(2) = 2$  gilt, d.h., wir haben das (in Matrzenschreibweise angegebene) LGS

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

zu lösen. Wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist die Koeffizientendeterminante dieses LGS ungleich Null, womit die Cramersche Regel anwendbar ist. Es gilt

$$A := \begin{vmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{vmatrix} = \frac{(1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5})}{8} \cdot (1-\sqrt{5} - (1+\sqrt{5})) = \sqrt{5},$$

$$A_1 := \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{vmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

und

$$A_2 := \begin{vmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Unter Verwendung der Cramerschen Regel folgt hieraus:

$$c_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{A_2}{A} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

womit

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

die Lösung des Beispiels (2.) von Seite 433 ist.

Allgemein erhält man  $k$  linear unabhängige Lösungen der homogenen LRG (16.4) wie folgt (ohne Beweis):

*Ansatz:*  $f(n) = \lambda^n$ , wobei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$  und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
Einsetzen des Ansatzes in die LRG liefert

$$\lambda^n - \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} - \alpha_2 \cdot \lambda^{n-2} - \dots - \alpha_k \cdot \lambda^{n-k} = 0.$$

Division durch  $\lambda^{n-k}$  ergibt die **charakteristische Gleichung**

$$\underbrace{\lambda^k - \alpha_1 \cdot \lambda^{k-1} - \alpha_2 \cdot \lambda^{k-2} - \dots - \alpha_{k-1} \cdot \lambda - \alpha_k = 0}_{=:p(\lambda)},$$

wobei  $p(\lambda)$  das **charakteristische Polynom** heißt.

Bekanntlich besitzt die Gleichung  $p(\lambda) = 0$  genau  $k$  Lösungen (bzw. Nullstellen von  $p(\lambda)$ ) in  $\mathbb{C}$ , falls man die Vielfachheiten der Nullstellen mitzählt.

Folgende zwei Fälle sind möglich:

*Fall 1:*  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  ist  $t$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$ .

In diesem Fall erhält man  $t$  linear unabhängige Lösungen  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) von (16.4) wie folgt:

$$\boxed{\forall n \geq 1 : f_i(n) := n^{i-1} \cdot \lambda^n.}$$

*Fall 2:*  $a+b \cdot i$  und  $a-b \cdot i$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $b \neq 0$  sind jeweils  $t$ -fache Nullstellen von  $p(\lambda)$ .

Unter Verwendung der trigonometrischen Darstellung

$$a + b \cdot i = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

erhält man in diesem Fall  $2 \cdot t$  Lösungen  $f_i$  und  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) von (16.4) wie folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \geq 1 : f_i(n) &:= n^{i-1} \cdot (r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi)) \\ \forall n \geq 1 : g_i(n) &:= n^{i-1} \cdot (r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)). \end{aligned}}$$

### Bestimmung einer speziellen Lösung einer inhomogenen LRG mit konstanten Koeffizienten (ohne Beweis):

Ähnlich wie bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung kann man spezielle Lösungen der inhomogenen LRG (16.4) mittels der Methode *Variation der Konstanten*<sup>3</sup> oder (bei speziellen rechten Seiten) mittels der *Ansatzmethode* bestimmen. Nachfolgend sind nur **zwei Beispiele** für die zweite Methode angegeben.

**(1.)** Gilt in (16.4)  $\beta_n = b^n$  für alle  $n \geq k+1$  und ist  $b$  keine Nullstelle des zugehörigen charakteristischen Polynoms  $p(\lambda)$ , so erhält man mittels des Ansatzes

$$f_s(n) = A \cdot b^n$$

eine spezielle Lösung der LRG. Betrachtet man z.B. die inhomogene LRG

$$\forall n \geq 3 : f(n) + 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) = 2^n,$$

---

<sup>3</sup> Siehe z.B. [Gel 58], Seite 267–269

so erhält man durch den Ansatz  $f(n) = A \cdot 2^n$  nach Einsetzen in die LRG durch leichte Rechnung  $A = \frac{4}{9}$ .

(2.) Gilt in (16.4)  $\beta_n = a_t \cdot n^t + a_{t-1}n^{t-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$  für alle  $n \geq k+1$ , so liefert der Ansatz

$$\forall n \geq k+1 : f_s(n) = A_t \cdot n^t + A_{t-1}n^{t-1} + \dots + A_1 \cdot n + A_0 \quad (16.8)$$

mit den unbekannten Koeffizienten  $A_0, \dots, A_t$  nach Einsetzen in die LRG und Koeffizientenvergleich stets eine spezielle Lösung der LRG, falls  $g_i \in \mathcal{F}$  mit  $g_i(n) := n^i$  für kein  $i \in \{0, 1, \dots, t\}$  eine Lösung der zu (16.4) gehörenden homogenen Gleichung ist. Falls es jedoch gewisse Zahlen  $i \in \{0, 1, \dots, t\}$  gibt, für die die Funktion  $g_i$  Lösung der zu (16.4) gehörenden homogenen Gleichung ist, hat man die kleinste Zahl  $q \in \mathbb{N}$  zu bestimmen, für die  $g_j$  für alle  $j \in \{q, q+1, \dots, q+t\}$  keine Lösung der zur LRG (16.4) gehörenden homogenen Gleichung ist, und den Ansatz (16.8) durch

$$\forall n \geq k+1 : f_s(n) = n^s \cdot (A_t \cdot n^t + A_{t-1}n^{t-1} + \dots + A_1 \cdot n + A_0) \quad (16.9)$$

zu ersetzen, um eine spezielle Lösung der LRG (16.4) mit

$$\beta_n = a_t \cdot n^t + a_{t-1}n^{t-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$$

für alle  $n \geq k+1$  zu erhalten.

Auf diese Weise lässt sich z.B. die inhomogene LRG

$$\forall n \geq 3 : f(n) + 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) = 3 \cdot n + 1$$

durch den Ansatz

$$f_s(n) = A \cdot n + B$$

lösen, da  $C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot (n \cdot (-1)^n)$  für  $n \geq 3$  die allgemeine Lösung der homogenen LRG

$$\forall n \geq 3 : f(n) + 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) = 0$$

ist.

Man erhält durch den Ansatz  $f_s(n) = A \cdot n + B$  die spezielle Lösung

$$\forall n \geq 3 : f_s(n) = \frac{3}{4} \cdot n + 1$$

der LRG  $f(n) + 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) = 3 \cdot n + 1$  für  $n \geq 3$ .

Wählt man dagegen die LRG

$$\forall n \geq 2 : f(n) - f(n-1) = n,$$

so liefert der Ansatz  $f_s(n) = A \cdot n + B$  keine Lösung, da beim Einsetzen des Ansatzes in die LRG ein Widerspruch entsteht. Wir haben also einen

Ansatz der Form (16.9) zu wählen. Dazu benötigen wir die allgemeine Lösung  $f(n) = C \cdot 1$  der homogenen LRG  $f(n) - f(n-1) = 0$  für  $n \geq 2$  und beliebig wählbarer Konstanten  $C$ . Weil damit  $g_0(n) := n^0$  ( $n \geq 2$ ) eine Lösung von  $f(n) - f(n-1) = 0$  für  $n \geq 2$  ist, kann man erst durch den neuen Ansatz  $f_s(n) = n \cdot (A \cdot n + B)$  wie folgt eine spezielle Lösung der betrachteten LRG berechnen:

Einsetzen des Ansatzes in die LRG  $f(n) - f(n-1) = n$  liefert die Gleichung

$$n^2 \cdot A + n \cdot B - (n-1)^2 \cdot A - (n-1) \cdot B = n,$$

die sich umformen lässt zu

$$n \cdot (2A) + (-A + B) = n.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man  $A = B = \frac{1}{2}$ , womit  $f_s(n) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n)$  für  $n \geq 2$  gilt.

Um mehr über Rekursionsgleichungen zu erfahren, lese man z.B. [Gel 58], [Ber 79], [Spi 82], [Rom 86] oder [Rom 2006].

Weitere Literaturhinweise entnehme man [Aig 2006].

## **Teil IV**

---

### **Übungsaufgaben**

## Übungsaufgaben zum Teil I

### 17.1 Aufgaben zum Kapitel 1

- A.1.1 Sei  $M$  eine Menge. Geben Sie umgangssprachliche Formulierungen an, die inhaltlich mit
- $\exists x \in M : E$  („Es existiert ein  $x \in M$  mit der Eigenschaft  $E$ .“);
  - $\forall x \in M : A$  („Für alle  $x \in M$  gilt die Aussage  $A$ .“)
- übereinstimmen.

- A.1.2 Erläutern Sie anhand eines Beispiels, daß es beim Verwenden der Symbole  $\forall$  und  $\exists$  auf die Reihenfolge dieser Symbole in einer Formel ankommt, d.h., in dem zu findenden Beispiel sind  $\forall x \exists y : A$  und  $\exists y \forall x : A$  inhaltlich verschiedene Aussagen über die Elemente  $x, y \in M$ .

- A.1.3 Man drücke die folgenden Sätze mit Hilfe der Zeichen  $\forall, \exists, \exists!, \neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$  und bekannten weiteren mathematischen Sybolen wie z.B.  $+, \cdot, \dots, \mathbb{N}, \dots$  so weit wie möglich aus.

- Zu jedem  $x$  und jedem  $y$  gibt es ein  $z$  mit  $x + y = z$ .
- Kein  $x$  ist kleiner als  $y$ .
- Es gibt ein  $x$  mit  $x + y = y$  für alle  $y$ .
- Für jedes  $x$  ist  $x + y = y + x$  für alle  $y$ .
- Jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade.
- Nicht alle Primzahlen sind ungerade.
- Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere Primzahl.
- Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  hat kein größtes Element.
- Es gilt  $x + z < y + z$ , falls  $x < y$  und  $x, y, z$  beliebige natürliche Zahlen sind.
- Aus  $x \leq y$  und  $y \leq x$  folgt  $x = y$  und umgekehrt.
- Es gibt genau eine Lösung  $x \in \mathbb{N}$  der Gleichung  $x^2 = 1$ .
- Für das Potenzieren der natürlichen Zahlen gilt das Kommutativgesetz  $a^b = b^a$  nicht.

(m) Jede der Zahlenmengen  $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  enthält 0 oder 1 und -1.  
Außerdem negiere man die Aussagen (h), (i) und (k).

- A.1.4 Man beweise, daß die folgenden Aussagen falsch sind:
- Jede Primzahl ist eine ungerade Zahl.
  - Jede natürliche Zahl größer als 1 ist Primzahl oder die Summe von zwei Primzahlen.

A.1.5 Man beweise die folgenden Aussagen für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ :

- (a) Wenn  $n$  ungerade ist, so ist auch  $n^2$  ungerade.
- (b) Wenn  $n^2$  gerade ist, so ist auch  $n$  gerade.

A.1.6 Man beweise:

- (a) Wenn  $p \in \mathbb{P}$ ,  $a \in \mathbb{N}$  und  $a \notin \{n \cdot p \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dann existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha \cdot p + \beta \cdot a = 1$ .
- (b) Wenn eine Primzahl ein Produkt aus zwei ganzen Zahlen teilt, dann teilt sie mindestens einen Faktor dieses Produktes.

*Hinweise:* Zu (a): Siehe auch Satz 2.2.3. Zu (b): Man verwende (a).

A.1.7 Man beweise: Für jede Primzahl  $p \in \mathbb{P}$  gilt:  $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ .

*Hinweise:* (1.) Für  $p = 2$  läßt sich die Behauptung z.B. durch einen indirekten Beweis wie folgt zeigen: Angenommen,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Dann existieren gewisse teilerfremde natürliche Zahlen  $s$  und  $t$  mit  $\sqrt{2} = \frac{s}{t}$ . Hieraus ergibt sich die Gleichung  $2 \cdot t^2 = s^2$ . Folglich ist  $s^2$  gerade und (wegen A.1.5, (b)) auch  $s$  gerade. Es gibt also eine natürliche Zahl  $\alpha$  mit  $s = 2 \cdot \alpha$ . Aus  $s = 2 \cdot \alpha$  und  $s^2 = 2 \cdot t^2$  folgt dann die Gleichung  $2 \cdot \alpha^2 = t^2$ . Analog zu oben folgt aus der Gleichung  $2 \cdot \alpha^2 = t^2$ , daß 2 ein Teiler von  $t$  ist. Wir haben damit 2 als Teiler von  $s$  und  $t$  nachgewiesen, was jedoch unserer Voraussetzung „ $s$  und  $t$  sind teilerfremd“ widerspricht. Also war die Annahme  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  falsch.

(2.) Für den allgemeinen Beweis verwende man A.1.6, (b).

A.1.8 Man beweise durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen:

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .
- (d)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ .
- (e)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ .
- (f)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$ .
- (g)  $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
- (h) Es sei  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n - a_{n-1})$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ .
- (i) Jede natürliche Zahl  $n$ , welche größer als 7 ist, läßt sich mit geeigneten  $a, b \in \mathbb{N}_0$  in der Form  $n = 3a + 5b$  darstellen.
- (j)  $n^2 - 1$  ist für ungerade  $n \geq 3$  durch 8 teilbar.
- (k) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $n^3 - n$  durch 6 teilbar.
- (l) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  durch 133 teilbar.
- (m) Die Summe der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender Zahlen aus  $\mathbb{N}_0$  ist durch 9 teilbar.
- (n) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 5$  gilt  $2^n > n^2$ .
- (o) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 10$  gilt  $2^n > n^3$ .
- (p) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt:  $n! > 2^{n-1}$ .
- (q) Sei  $a > 0$  oder  $-1 < a < 0$ . Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : (1+a)^n > 1 + n \cdot a \quad (\text{„Bernoullische Ungleichung“})$$

- (r) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ .

- A.1.9 (*Turm von Hanoi*) Gegeben seien drei Stäbe, die senkrecht auf einer Unterlage befestigt sind. Außerdem sind  $n$  hölzerne Kreisscheiben mit Bohrungen durch die Mittelpunkte und paarweise verschiedenen Durchmessern gegeben, die auf dem ersten Stab der Größe nach gesteckt sind, wobei sich die größte Scheibe unten befindet. Ziel eines Spiels ist es, die  $n$  Scheiben auf einen anderen Stab so umzusetzen, daß sie sich in der gleichen Reihenfolge wie auf den ersten Stab befinden. Für das Umsetzen gelten folgende zwei Regeln: (1) Man darf in jedem Spielschritt immer nur eine Scheibe von einem Stab auf einen anderen Stab legen. (2) Man darf eine größere Scheibe nicht auf eine kleinere Scheibe legen. Wie viele Spielschritte reichen aus, um alle  $n$  Scheiben in der genannten Art vom ersten auf einen zweiten Stab (unter Verwendung des dritten Stabs) umzusetzen?

*Hinweis:* Sei  $u(n) := 2^n - 1$ . Man zeige durch Induktion, daß  $u(n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Einzelbewegungen von Scheiben ausreichen, um alle  $n$  Scheiben in der genannten Art vom ersten auf den zweiten Stab umzusetzen.

- A.1.10 Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?  
Behauptung: Wenn von  $n$  Mädchen eines blauen Augen hat, dann haben alle  $n$  Mädchen blaue Augen ( $n \in \mathbb{N}$ ).

„Beweis“:

1. Induktionsanfang:  $n = 1$  richtig (klar!)
2. Induktionsannahme: Die Behauptung sei richtig für  $k \leq n$ .
3. Induktionsbehauptung: Die Behauptung ist richtig für  $n + 1$ .
4. Induktionsbeweis: Wir betrachten  $n + 1$  Mädchen, von denen eins blauäugig ist und bezeichnen sie mit  $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ , wobei  $M_1$  die Blauäugige sein soll. Wir betrachten die beiden Mengen  $\{M_1, \dots, M_n\}$  und  $\{M_1, \dots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ . Beide enthalten  $M_1$  und haben  $n$  Elemente, bestehen also laut Induktionsannahme aus lauter blauäugigen Mädchen. Da jedes der  $n + 1$  Mädchen in einer dieser beiden Mengen vorkommt, sind alle  $n + 1$  Mädchen blauäugig.

- A.1.11 Man beweise Satz 1.2.3.  
A.1.12 Man beweise Satz 1.2.5.  
A.1.13 Man ermittle die Anzahl  $d_n$  der Diagonalen in einem ebenen  $n$ -Eck ( $n \geq 4$ ) und beweise die gefundene Formel per Induktion.  
A.1.14 Man beschreibe die folgenden Mengen durch die Angabe wenigstens einer Eigenschaft  $E(x)$  in der Form  $\{x \mid E(x)\}$ .
- (a)  $\{7, 35, 14, 42, 28, 21\}$ ,
  - (b)  $\{2, 3, 5, 9, 17, 33, 65\}$ ,
  - (c)  $\{2, 11, 101, 1001, 10001\}$ ,
  - (d)  $\{-12, -7, -2, 3, 8, 13, 18\}$ ,
  - (e)  $\{a, bab, bbabb, bbbabbb, bbbbabbbb\}$ ,
  - (f)  $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\}$ ,
  - (g)  $\{1, -1\}$ .

- A.1.15 Für die Menge aller Dreiecke  $G$  seien folgende Teilmengen definiert:

$$A := \{x \in G \mid x \text{ ist gleichseitiges Dreieck}\}$$

$$B := \{x \in G \mid x \text{ ist gleichschenkliges Dreieck}\}$$

$$C := \{x \in G \mid x \text{ ist rechtwinkliges Dreieck}\}$$

$$D := \{x \in G \mid x \text{ ist Dreieck mit wenigstens einem } 45^\circ\text{-Winkel}\}$$

Man stelle die Beziehungen zwischen diesen Mengen durch ein Venn-Diagramm dar!

A.1.16 Gegeben seien die Mengen

$$A := \{1, 2\}, B := \{1, 2, 3, 4\}, C := \{2\}, D := \{1, A, B, C\}.$$

Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

- (a)  $4 \in B$
- (b)  $A \subset B$
- (c)  $A \in D$
- (d)  $A \subset D$
- (e)  $2 \in D$
- (f)  $1 \in D$
- (g)  $\emptyset \in C$
- (h)  $\emptyset \subset D$
- (i)  $C \in B$
- (j)  $1 \subset D$
- (k)  $\{1, B\} \subseteq D$
- (l)  $A \cup C \subset B$
- (m)  $C \subset D$
- (n)  $C \in D$
- (o)  $\{C\} \subset D$

A.1.17 Welche der folgenden Mengengleichungen sind für beliebige Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  richtig?

- (a)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ,
- (b)  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ ,
- (c)  $(A \Delta B) \setminus C = (A \cup B) \Delta (B \cup C)$ .

A.1.18 Seien  $A$ ,  $B$ ,  $C$  Mengen. Man beweise:

- (a)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ ;
- (b)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ;
- (c)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .

A.1.19 Seien  $A_1, A_2, B_1, B_2$  Mengen. Man beweise

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) \quad (17.1)$$

und gebe ein Beispiel an, für das in (17.1)  $\subseteq$  anstelle von  $\subset$  steht.

A.1.20 Seien  $A, B, C$  Mengen. Folgt aus  $A \cup B = A \cup C$ , daß  $B = C$  ist? Folgt aus  $A \cap B = A \cap C$ , daß  $B = C$  ist?

A.1.21 Ein Meinungsforscher sendet seinem Chef das Ergebnis seiner Umfrage über die Beliebtheit von Bier und Wein:

Anzahl der Befragten:	100
Anzahl derer, die Bier trinken:	75
Anzahl derer, die Wein trinken:	68
Anzahl derer, die beides trinken:	42

Warum wurde der Mann entlassen? (Begründung mittels Mengen!)

A.1.22 Man zeige, daß die Mengen  $\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\}$  und  $\{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\}$  genau dann gleich sind, wenn  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$  gilt.

A.1.23 Welche der Eigenschaften

Symmetrie, Asymmetrie, Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität

sind bei den folgenden Relationen vorhanden?

- (a)  $R_1 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y\}$ ,
- (b)  $R_2 := \{(X, Y) \mid X \subseteq M \wedge Y \subseteq M \wedge Y = M \setminus X\}$  ( $M$  bezeichne eine gewisse nichtleere Menge),
- (c)  $R_3 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x < y\}$ ,
- (d)  $R_4 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \text{ teilt } y\}$ ,
- (e)  $R_5 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge x + y \text{ gerade}\}$ .

A.1.24 Welche Relation  $R \subseteq A \times A$  ( $A$  nichtleere Menge) ist reflexiv, symmetrisch, transitiv und antisymmetrisch?

A.1.25 Man gebe auf der Menge  $A := \{1, 2, 3, 4\}$  eine binäre Relation  $R$  an, die nicht reflexiv, nicht irreflexiv, jedoch transitiv und symmetrisch ist.

- A.1.26 Man begründe, wo in dem folgenden „Beweis“ der Herleitung der Reflexivität aus der Symmetrie und Transitivität einer Relation  $R$  über der Menge  $A$  der Fehler steckt.

Behauptung: Jede symmetrische und transitive Relation  $R \subseteq A \times A$  ist auch reflexiv (d. h.,  $\forall a \in A : aRa$ ).

„Beweis“: Wir betrachten ein beliebiges  $a$  aus  $A$  und ein  $b \in A$  mit  $aRb$ . Wegen der Symmetrie von  $R$  ist dann auch  $bRa$  und aus  $aRb$  und  $bRa$  folgt dann wegen der Transitivität von  $R$  die Beziehung  $aRa$ . Daher ist  $R$  reflexiv.

- A.1.27 Sei  $M$  die Menge aller Menschen (tot oder lebendig). Seien die Relationen  $R$  und  $S$  definiert durch:

$$\begin{aligned}(x, y) \in R &\iff x \text{ ist Schwester von } y, \\ (x, y) \in S &\iff x \text{ ist Vater von } y\end{aligned}$$

Was bedeuten umgangssprachlich  $(x, y) \in R \square S$  und  $(x, y) \in S \square R$ ?

- A.1.28 Ein Theater verfüge über 27 Reihen zu je 19 Plätzen. Jeder Platz ist durch seine Reihennummer  $r$  und seine Sitznummer  $s$ , also das Paar  $(r, s)$  eindeutig festgelegt. Seien  $R := \{1, 2, \dots, 27\}$  und  $S := \{1, 2, \dots, 19\}$ . Demzufolge kann man jede Vorstellung  $M$  als Menge der verkauften Plätze ansehen und es gilt  $M \subseteq R \times S$ . Man mathematisiere damit folgende Sachverhalte:  
(a) von jeder Reihe wurde mindestens ein Platz verkauft; (b) die Vorstellung ist ausverkauft; (c) die Menge aller möglichen Vorstellungen; (d) keine Karte wurde verkauft; (e) wenigstens eine Reihe ist vollständig besetzt; (f) keine Reihe ist vollständig besetzt.

- A.1.29 Seien  $R$ ,  $S$  und  $T$  binäre Relationen über  $A$ . Man beweise:

$$\begin{aligned}(a) \quad (R \cup S) \square T &= (R \square T) \cup (S \square T), \\ (b) \quad (R \setminus S)^{-1} &= R^{-1} \setminus S^{-1}.\end{aligned}$$

- A.1.30 Sei  $A := \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ . Wie hat man  $x, y \in A$  zu wählen, damit

$$R := \{(x, 7), (1, 8), (4, 4), (9, 8), (7, 3), (5, 5), (9, 1), (8, 9), (8, 1), (1, 9), (3, 3), (8, 8), (7, 7), (1, 1), (y, y)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $A$  ist? Man gebe außerdem

- (a) die Äquivalenzklassen von  $R$ ,
- (b) die zu  $R$  gehörende Zerlegung  $Z$  von  $A$  und
- (c) die zu den Äquivalenzrelationen  $Q \subset R$  gehörenden Zerlegungen an!

- A.1.31 Man gebe die durch die folgenden Zerlegungen  $Z_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) der Menge  $\mathbb{R}$  charakterisierten Äquivalenzrelationen  $R_i$  an:

- (a)  $Z_1 := \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,
- (b)  $Z_2 := \{\{y + x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 1\} \mid y \in \mathbb{Z}\}$ ,
- (c)  $Z_3 := \{\{y + x \mid y \in \mathbb{Z}\} \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 1\}$ .

- A.1.32 Man gebe Eigenschaften der nachfolgenden Relationen  $R \subseteq A \times A$  an und bestimme, falls  $R$  eine Äquivalenzrelation ist, die zugehörige Zerlegung von  $A$ .

- (a)  $\{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a + c = b + d\}$ ,
- (b)  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b \text{ ist eine gerade Zahl oder } a = b\}$ ,
- (c)  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b \text{ ist eine ungerade Zahl oder } a = b\}$ ,
- (d)  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists c \in \mathbb{N} : b = c \cdot a\}$ ,
- (e)  $\{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid (a < c \vee a = c) \wedge b \leq d\}$ .

- A.1.33 Es seien  $R$  und  $Q$  Äquivalenzrelationen auf der Menge  $A$ . Man beweise, daß dann  $R \cap Q$  ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf  $A$  ist und beschreibe die Äquivalenzklassen von  $R \cap Q$  durch die von  $R$  und  $Q$ . Ist  $R \cup Q$  auch eine Äquivalenzrelation auf  $A$ ?

- A.1.34 Auf der Menge  $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sei die Relation  $R$  wie folgt erklärt:

$$(a, b)R(c, d) : \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ .

- (a) Man zeige, daß  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$  ist.
- (b) Wie lauten die Äquivalenzklassen von  $R$ ?
- (c) Man gebe eine geometrische Deutung der Äquivalenzklassen von  $R$  an.

- A.1.35 Man wähle auf alle Arten zwei der drei Bedingungen „reflexiv“, „symmetrisch“, „transitiv“ aus und gebe jeweils ein Beispiel für eine Relation an, die diese zwei Bedingungen, aber nicht die dritte Bedingung erfüllt.

- A.1.36 Man zeige, daß die sogenannte Kongruenz modulo  $n$  (Bezeichnung:  $\equiv_n$ ) eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$  ist, die mit der üblichen Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  verträglich (kompatibel) ist.

- A.1.37 Man bestimme alle Äquivalenzrelationen auf  $\{1, 2, 3, 4\}$ , die mit der folgenden inneren Verknüpfung  $\circ$  auf  $\{1, 2, 3, 4\}$  verträglich sind:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	2	4
3	3	2	1	4
4	4	4	4	4

- A.1.38 (a) Man gebe alle Äquivalenzrelationen auf der Menge  $M := \{1, 2, 3, \dots, m\}$  für  $m \in \{2, 3, 4\}$  an.  
 (b) Bezeichne  $\mu(k)$  die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf einer  $k$ -elementigen Menge ( $k \in \mathbb{N}$ ). Nach der von W. Harnau gefundenen Formel kann man  $\mu(k)$  wie folgt berechnen:

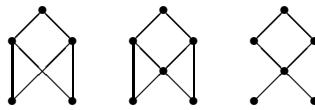
$$\mu(k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \sum_{t=1}^i (-1)^t \frac{t^k}{t!(i-t)!}. \quad (17.2)$$

Mit Hilfe von (17.2) berechne man  $\mu(k)$  für  $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

- A.1.39 Es seien  $R$  und  $Q$  Äquivalenzrelationen auf der Menge  $A$ . Man beweise:  $R \square Q$  ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn  $R \square Q = Q \square R$  gilt.
- A.1.40 Bei welchen der folgenden Relationen  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) handelt es sich um eine reflexive, teilweise Ordnung auf der Menge  $A := \{1, 2, 3\}$ ?

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}, \\ R_2 &:= \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}, \\ R_3 &:= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}, \\ R_4 &:= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

- A.1.41 Welche der folgenden Diagramme sind Hasse-Diagramme einer halbgeordneten Menge?



- A.1.42 Auf  $A = \{a, b, c\}$  sei eine reflexive teilweise Ordnung  $R$  definiert. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das zugehörige Hasse-Diagramm  $H_R$  dieser Relation, wobei die Knoten (Punkte) dieses Diagramms nicht bezeichnet sein sollen. Man gebe für jedes gefundene Diagramm auch ein Beispiel für  $R \subseteq A^2$  in Relationenschreibweise an.

- A.1.43 Sei  $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Auf  $A$  seien durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

eine Addition und eine Multiplikation definiert. Man zeige, daß man auf  $A$  keine irreflexive Halbordnung  $<$  mit den folgenden drei Eigenschaften definieren kann:

- (a)  $\forall z \in A : z = (0, 0) \vee z < 0 \vee (0, 0) < z$ ,
- (b)  $\forall z, w \in A : ((0, 0) < z \wedge (0, 0) < w) \implies ((0, 0) < z \cdot w \wedge (0, 0) < z + w)$ ,
- (c)  $\forall z, w \in A : ((z < (0, 0) \wedge w < (0, 0)) \implies (0, 0) < z \cdot w)$ .

- A.1.44 Man wähle auf alle Arten zwei der drei Bedingungen „reflexiv“, „antisymmetrisch“, „transitiv“ aus und gebe jeweils ein Beispiel für eine Relation an, die diese zwei Bedingungen, aber nicht die dritte Bedingung erfüllt.

- A.1.45 Seien  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  und

$$f_1 : A \longrightarrow A, x \mapsto \sin x, \\ f_2 : A \longrightarrow A, x \mapsto x^2, \\ f_3 : A \longrightarrow A, x \mapsto \sqrt{x}.$$

Durch welche Zuordnungsvorschriften sind dann  $f_i \square f_j$  für  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$  und  $i \neq j$  bestimmt?

- A.1.46 Man untersuche, ob die angegebene Abbildung  $f$  injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:

- (a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 1$ ,
- (b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto -z + 3$ ,
- (c)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, q \mapsto 5q + 9$ ,
- (d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto (r - 1)(r - 2)(r - 3)$ .

- A.1.47 Man gebe eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  an, die surjektiv, aber nicht bijektiv ist.

- A.1.48 Man löse die folgende Aufgabe für die Menge  $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ .

Es sei  $c \in A$  und  $f_c$  die durch  $f_c : A \longrightarrow A, x \mapsto x + c - x \cdot c$  definierte Abbildung. Für welche  $c \in A$  ist

- (a)  $f_c$  surjektiv;
- (b)  $f_c$  injektiv?

- A.1.49 Sei  $f$  eine Abbildung von  $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  in  $B := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vermöge

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gewisse fest gewählte Zahlen aus  $\mathbb{R}$  sind. Unter welchen Bedingungen für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ist  $f$  eine bijektive Abbildung? Wie lautet in diesem Fall  $f^{-1}$ ?

- A.1.50 Welche der folgenden Relationen  $R_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) sind Abbildungen von  $D(R_i) \subseteq \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ ?

- (a)  $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}, D(R_1) := \mathbb{R}$
- (b)  $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan x\}, D(R_2) := \mathbb{R}$
- (c)  $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge y = \frac{1}{x^2 - 1}\}, D(R_3) := [0, 1]$
- (d)  $R_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y = \ln x\}, D(R_4) := \mathbb{R}^+$
- (e)  $R_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq 5 \wedge x^2 + y^2 = 25\}, D(R_5) = [-5, 5]$
- (f)  $R_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 0\}, D(R_6) = \mathbb{R}$ .

- A.1.51 Sei  $A$  eine endliche Menge und sei  $f : A \rightarrow A$  eine Abbildung. Man beweise:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist bijektiv.}$$

- A.1.52 Es sei  $F$  die Menge der Paare  $(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ , die den folgenden Ungleichungen genügen:

$$10x - 2y \geq 0,$$

$$10y - 2x \geq 0,$$

$$x + y \leq 12.$$

Offenbar ist  $F$  eine Korrespondenz aus  $\mathbb{N}_0$  in  $\mathbb{N}_0$  und die Elemente  $(x, y) \in F$  kann man als Koordinaten von Punkten in der  $x, y$ -Ebene auffassen. Man gebe (a) eine Skizze für  $F$  an und bestimme (b)  $D(F)$  und  $W(F)$ , (c)  $F^{-1}$ , (d)  $F \square F$ .

- A.1.53 Seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  Abbildungen. Man beweise:

$$f, g \text{ surjektiv (injektiv)} \implies f \square g \text{ surjektiv (injektiv).}$$

- A.1.54 Man beweise: Ist  $M$  eine unendliche Menge, dann ist auch  $\mathfrak{P}(M)$  eine unendliche Menge.

- A.1.55 Man beweise, daß die Intervalle  $(0, 1)$  und  $[0, 1]$  aus reellen Zahlen gleichmächtig sind.

- A.1.56 Man beweise: Je zwei der Mengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  sind gleichmächtig (und damit abzählbar).

- A.1.57 Seien  $A_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  abzählbare Mengen. Man beweise, daß dann auch  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  eine abzählbare Menge ist.

- A.1.58 Man beweise: Die Menge

$$F := \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0, 1\}\}$$

(Menge aller Folgen, deren Folgeglieder 0 oder 1 sind) ist nicht abzählbar.

(Bemerkung:  $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots) \iff \forall i \in \mathbb{N} : a_i = b_i$ )

- A.1.59 Sei  $F$  wie in A.1.58 definiert. Man zeige, daß die Menge  $F \times F$  zu  $F$  gleichmächtig ist.

- A.1.60 Sei  $F$  wie in A.1.58 definiert. Man zeige, daß  $F$  sowohl zu  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  als auch zu  $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$  gleichmächtig ist.

A.1.61 Sei  $F$  wie in A.1.58 definiert und bezeichne  $F^*$  die Menge derjenigen Tupel aus  $F$ , die keine 1-Perode besitzen, d.h., für kein  $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in F^*$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 1$  ist. Man beweise, daß  $F$  und  $F^*$  gleichmächtig sind.

A.1.62 Man beweise, daß die Menge  $M$  aller reellen Zahlen  $x$  mit  $0 < x < 1$  zur Menge  $F$  (siehe A.1.58) gleichmächtig ist.

A.1.63 Man beweise, daß  $\mathbb{R}$  zur Menge  $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$  gleichmächtig ist.

A.1.64 Man überführe den folgenden Satz in einen aussagenlogischen Term: *Sonntags besuchen wir unsere Freunde und, sofern es nicht gerade regnet, machen wir eine Wanderung oder eine Radpartie.*

A.1.65 Oft sind Sätze der Umgangssprache unpräzise oder mehrdeutig, was man meist erst bei der logischen Analyse entdeckt. Man erläutere dies anhand der folgenden zwei Aussagen  $A_1$  und  $A_2$ .

$A_1$ : *Unsere Zimmer sind mit Fernseher und Telefon oder Internetanschluß ausgestattet.*

$A_2$ : *Werktags außer samstags verkehrt um 23.20 Uhr entweder ein Zug oder ein Bus von X nach Y.*

A.1.66 Man entscheide, ob der folgende Schluß korrekt ist, wenn man die Voraussetzungen als Aussagen aufschreibt und nachprüft, ob die Konjunktion dieser Aussagen die Behauptung impliziert.

*Falls die Beschäftigten eines Betriebes nicht streiken, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine Gehaltserhöhung, daß die Arbeitsstundenzahl erhöht wird. Im Falle einer Gehaltserhöhung wird nicht gestreikt. Falls die Arbeitstundenzahl erhöht wird, so gibt es keine Gehaltserhöhung. Folglich werden die Gehälter nicht erhöht.*

A.1.67 Ein Polizeibericht enthält folgende Informationen über einen Einbruchs:  
*Der/Die Täter ist/sind mit Sicherheit unter den drei Personen A, B, C zu finden.*

*Wenn A und B nicht beide zugleich am Einbruch beteiligt waren, scheidet C als Täter aus.*

*Ist B schuldig oder C unschuldig, so kommt A als Täter nicht in Frage.*

*Wer hat den Einbruch begangen?*

A.1.68 Man überführe den folgenden Satz in einen aussagenlogischen Term und untersuche, unter welchen Umständen das Verhalten eines Teilnehmers an der Klausur nach dieser Formulierung korrekt ist:

*A: Zugelassene Hilfsmittel bei der Klausur sind Vorlesungsmitschriften oder das Buch zur Vorlesung.*

A.1.69 Gegeben seien die Aussagen

$A_1$ : *Die Sonne scheint.*

$A_2$ : *Ein Auftrag liegt vor.*

$A_3$ : *Miss Peel übt Karate.*

$A_4$ : *Miss Peel besucht Mr. Steed.*

$A_5$ : *Mr. Steed spielt Golf.*

$A_6$ : *Mr. Steed luntcht mit Miss Peel.*

Mit Hilfe der Aussagen  $A_1, \dots, A_6$  und Aussagenverbindungen stelle man die folgenden Aussagen dar.

*A: Wenn die Sonne scheint, spielt Mr. Steed Golf.*

B: Wenn die Sonne nicht scheint und kein Auftrag vorliegt, lunct Mr. Steed mit Miss Peel.

C: Entweder übt Miss Peel Karate oder sie besucht Mr. Steed.

D: Miss Peel übt Karate genau dann, wenn Mr. Steed Golf spielt – oder ein Auftrag liegt vor.

E: Entweder scheint die Sonne und Mr. Steed spielt Golf – oder Miss Peel besucht Mr. Steed und dieser lunct mit ihr.

F: Es trifft nicht zu, daß Miss Peel Mr. Steed besucht, wenn ein Auftrag vorliegt.

G: Nur dann, wenn kein Auftrag vorliegt, lunct Mr. Steed mit Miss Peel.

- A.1.70 Man gebe für jede der folgenden Äquivalenzen eine sprachliche (verbale) Interpretation an!

- (a)  $(x \wedge x) \iff x$ ,
- (b)  $(\neg \neg x) \iff x$ ,
- (c)  $(\neg(x \wedge y)) \iff (\neg x \vee \neg y)$ ,
- (d)  $(\neg x \vee y) \iff (x \Rightarrow y)$ ,
- (e)  $(x \wedge (x \vee y)) \iff x$ ,
- (f)  $((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)) \iff (x \iff y)$ .

- A.1.71 Die Booleschen Funktionen  $f$  bzw.  $g$  seien durch

$$f(x, y) := (\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$$

bzw.

$$g(x, y, z) := (x \Leftrightarrow \bar{z}) + y$$

definiert.

- (a) Man gebe die Wertetabellen und die disjunktiven Normalformen von  $f$  und  $g$  an.

- (b) Wie läßt sich  $f$  nur unter Verwendung der Zeichen  $\wedge$  und  $\neg$  darstellen?

- A.1.72 Man vereinfache mit Hilfe der algebraischen Methode die folgenden Booleschen Terme:

- (a)  $t_1(x, y) := ((x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})) \vee (\bar{x} \vee y)$ ,
- (b)  $t_2(x, y, z) := \underline{((x \vee y) \vee z)} \wedge \underline{(\bar{x} \vee z)}$ ,
- (c)  $t_3(x, y, z) := (x \wedge (y \wedge z)) \vee \underline{(\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}))} \vee \underline{((x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{z}))}$ ,
- (d)  $t_4(x, y, z, u) := \underline{((x \wedge y) \vee \bar{z})} \vee \underline{((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge u))}$ .

- A.1.73 Eine Aussage, deren Negation eine Tautologie ist, heißt *Kontradiktion*. Eine Aussage, die weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist, nennt man *Kontingenzen*. Man entscheide anhand von Wahrheitstafeln, welche der folgenden Aussagen Tautologien, Kontradiktionen oder Kontingenzen sind.

- (a)  $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \iff ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z)$ ,
- (b)  $((x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})) \iff ((x \wedge \bar{z}) \wedge (y \vee z))$ ,
- (c)  $((x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})) \vee (\bar{x} \wedge y)$ ,
- (d)  $(x \wedge \bar{x}) \wedge ((y \vee \bar{y}) \Rightarrow z)$ ,
- (e)  $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$ ,
- (f)  $(x \vee \bar{x}) \wedge ((y \wedge \bar{y}) \Rightarrow z)$ .

- A.1.74 Für Abstimmungen in einem vierköpfigen Gremium gelten folgende Regeln: Stimmenthaltung unzulässig; die Abstimmung erfolgt dadurch, daß jedes Mitglied des Gremiums einen bei seinem Platz angebrachten Schalter in eine der beiden möglichen Stellungen „Ja“ oder „Nein“ bringt. Ein grünes Licht leuchtet bei Annahme eines Antrags auf, ein rotes bei Ablehnung. Bei Stimmengleichheit leuchten beide Lichter auf. Man erstelle die disjunktiven Normalformen der beiden Stromführungsfunctionen und vereinfache diese.

- A.1.75 Eine  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  heißt *selbstdual* (oder *autodual*), wenn für alle  $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$  gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}.$$

Eine  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  heißt *linear*, wenn es gewisse  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$  gibt, so daß

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n \pmod{2}$$

für alle  $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$  gilt.

Eine  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  heißt *monoton*, wenn

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\} : (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$a_i \leq b_i \implies f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n))$$

gilt.

- (a) Wie viele selbstduale ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
- (b) Wie viele lineare ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
- (c) Wie viele monotone ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
- (d) Man beweise: Eine lineare  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  mit

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n \pmod{2}$$

ist genau dann selbstdual, wenn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \pmod{2}$$

gilt.

- (e) Man beweise: Eine lineare,  $n$ -stellige Boolesche Funktion  $f$  der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := a_0 + x_1 + x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n,$$

wobei  $a_0, a_3, a_4, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ , ist nicht monoton.

- (f) Welche der folgenden Booleschen Funktionen sind selbstdual, welche Funktionen sind linear und welche Funktionen sind monoton?
  - $f_1(x, y, z) := (x \iff y) \iff z$ ,
  - $f_2(x, y, z) := (x \implies y) \implies z$ ,
  - $f_3(x, y, z) := (x \iff y) + z$ ,
  - $f_4(x, y, z) := (x + y) \iff z$ ,
  - $f_5(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ .

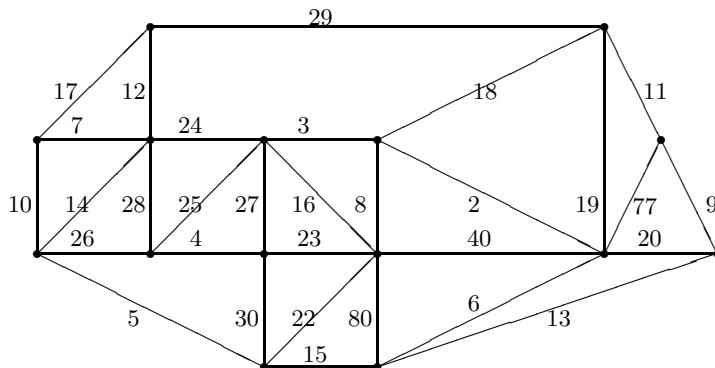
- A.1.76 Sei  $M$  eine nichtleere Menge und  $R$  eine reflexive und symmetrische Relation auf  $M$ . Man gebe das durch  $R$  induzierte zweistelliges Prädikat  $P$  auf  $M$  an. Wie überträgt sich die Reflexivität und die Symmetrie von  $R$  auf  $P$ ?

- A.1.77 Es sei  $\mathfrak{A}$  eine Struktur, zu der eine einstellige Operation  $f : A \rightarrow A$ , die bijektiv ist, und eine zweistellige Relation  $R := \{(a, a) | a \in A\}$  gehört. Man beschreibe die Eigenschaft „ $f$  ist bijektiv“ durch eine prädikatenlogischen Formel, die in  $\mathfrak{A}$  wahr ist.

- A.1.78 Man beweise, daß für beliebige  $\alpha, \beta \in FORM$  die folgenden Äquivalenzen nicht gelten:

- (a)  $(\forall x_k \alpha) \vee (\forall x_k \beta) \equiv \forall x_k(\alpha \vee \beta)$ ,
- (b)  $(\exists x_k \alpha) \wedge (\exists x_k \beta) \equiv \exists x_k(\alpha \wedge \beta)$ .

- A.1.79 Bei der Beschreibung der nachfolgenden Formeln aus *FORM* sind  $\alpha, \beta \in FORM$ ,  $\{x, y, z\} \subseteq Var$  und das Operationszeichen  $f$  wie auch das Prädikatzeichen  $P$  zweistellig. Welche der folgenden Formeln aus *FORM* sind dann erfüllbar und welche sind allgemeingültig?
- $P(x, y) \wedge P(y, x)$ ,
  - $\forall x \forall y \forall z P(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)))$ ,
  - $(\forall x P(x, z)) \Rightarrow (\forall y (P(y, z)))$ ,
  - $\neg((\neg(\exists x \alpha)) \Rightarrow (\forall x (\neg\alpha)))$ ,
  - $\neg((\exists x \alpha) \vee (\forall y \beta)) \Leftrightarrow ((\forall x \neg\alpha) \wedge (\forall y \neg\beta))$
- A.1.80 Geplant ist ein Tischtennisturnier mit den 5 Teilnehmern  $A, B, C, D, E$  und nur einer Tischtennisplatte. Außerdem soll gelten:
- Jeder Teilnehmer spielt gegen jeden anderen genau einmal,
  - kein Teilnehmer spielt in zwei aufeinanderfolgenden Spielen.
- Mittels Graphen kläre man, ob ein solches Tischtennisturnier möglich ist.
- A.1.81 Man gebe die Menge aller Bäume mit der Knotenmenge  $\{1, 2, 3, 4\}$  an und zerlege diese Menge in Klassen bez. Isomorphie, d.h., man entscheide, welche der Bäume untereinander isomorph sind.
- A.1.82 Mit Hilfe der im Abschnitt 1.7 beschriebenen zwei Verfahren ermittle man ein Minimalgerüst für folgenden Graphen (Zwischenstufen angeben!).



## 17.2 Aufgaben zum Kapitel 2

- A.2.1 Man berechne den größten gemeinsamen Teiler  $d := a \sqcap b$  und gewisse ganze Zahlen  $\alpha, \beta$  mit  $d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$  für
- $a = 362$  und  $b = 22$ , (b)  $a = 1033$  und  $b = 52$ ,
  - $a = 3584$  und  $b = 498$ , (d)  $a = 4823$  und  $b = 975$ .
- A.2.2 Welche  $x \in \mathbb{Z}$  erfüllen jeweils eine der folgenden Gleichungen der Form  $a \cdot x = b \pmod{n}$ , wobei  $a, b \in \mathbb{Z}$  ?
- $8 \cdot x = 1 \pmod{5}$ ,
  - $20 \cdot x = 10 \pmod{25}$ ,
  - $8 \cdot x = 3 \pmod{14}$ ,

- (d)  $271 \cdot x = 25 \pmod{119}$ ,  
 (e)  $12 \cdot x = 21 \pmod{97}$ ,  
 (f)  $18 \cdot x = 17 \pmod{71}$ .
- A.2.3 Für eine beliebige natürliche Zahl  $n > 1$ , die keine Primzahl ist, gebe man eine Gleichung der Form  $a \cdot x = b \pmod{n}$  an, die
- (a) keine Lösung,
  - (b) mindestens zwei Lösungen hat.
- A.2.4 Mit Hilfe von Zahlenkongruenzen beweise man:
- (a) Für keine natürliche Zahl  $n$  ist die Zahl  $6 \cdot n + 2$  das Quadrat einer ganzen Zahl.
  - (b) Für keine natürliche Zahl  $n$  ist die Zahl  $7 \cdot n + 3$  das Quadrat einer ganzen Zahl.
- (Hinweis zu (a): Man nehme indirekt  $z^2 = 6 \cdot n + 2$  an und betrachte die Restklassen modulo 6.)
- A.2.5 Seien  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  und  $d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ . Gibt es dann gewisse  $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z} \setminus \{\alpha, \beta\}$  mit  $d = \alpha' \cdot a + \beta' \cdot b$ ?
- A.2.6 Sei  $\mathbf{H} := (H; \circ)$  eine endliche Halbgruppe. Wie erkent man anhand der Verknüpfungstafel, ob  $\mathbf{H}$
- (a) ein neutrales Element besitzt,
  - (b) ein Nullelement besitzt,
  - (c) zu jedem  $x \in H$  ein inverses Element existiert,
  - (d) kommutativ ist?
- A.2.7 Sei  $\mathbf{G} := (G; \circ)$  eine endliche Gruppe. Können in der Verknüpfungstafel von  $\mathbf{G}$  in einer Zeile (oder Spalte) an verschiedenen Stellen zwei gleiche Elemente stehen?
- A.2.8 In einer „Rindergesellschaft“ von schwarzen und braunen Rindern, die ganzfarbig oder gescheckt sein können, weiß man, daß bei Kreuzungen von zwei Rindern die schwarze Farbe die braune „dominiert“ und daß die Ganzfarbigkeit dominant gegenüber der Scheckung ist. Es gibt also vier mögliche Rindertypen:
- (a): schwarz, ganzfarbig,
  - (b): schwarz, gescheckt,
  - (c): braun, ganzfarbig,
  - (d): braun, gescheckt.

Bei Kreuzung eines schwarzen, gescheckten Rindes (b) mit einem braunen, ganzfarbigen Rind (c) ist also ein schwarzes, ganzfarbiges Rind (a) zu erwarten; dies kann man durch  $b \star c = a$  symbolisieren. Man stelle für die Verknüpfung  $\star$  eine Tabelle auf, aus der alle möglichen Paarungen ablesbar sind und zeige (unter Verwendung des *Light-Test*), daß  $(\{a, b, c, d\}; \star)$  eine kommutative Halbgruppe mit einem Nullelement und einem Einselement ist.

- A.2.9 Sei  $H := (\mathbb{Q}; \circ)$ , wobei

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \circ b := a + b - a \cdot b.$$

Man zeige, daß  $H$  eine Halbgruppe ist und bestimme (falls vorhanden) Nullelemente, Einselemente und invertierbare Elemente von  $H$ . Ist  $H$  eine Gruppe?

A.2.10 Man zeige durch Bestätigung der Gruppenaxiome, daß die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : x = 2^n\}$$

zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet, die zu  $(\mathbb{Z}, +)$  isomorph ist.

A.2.11 Sei  $\mathbf{G}$  die Gruppe der primen Restklassen modulo 14. Man berechne:

- (a) die Verknüpfungstafel von  $\mathbf{G}$ ,
- (b) die Ordnungen der Elemente von  $\mathbf{G}$ ,
- (c) die Untergruppen von  $\mathbf{G}$ .

Gibt es eine Gruppe der Form  $(\mathbb{Z}_n; + (\text{mod } n))$ , die zu  $\mathbf{G}$  isomorph ist?

A.2.12 Sei  $\mathbf{G}$  die Gruppe der primen Restklassen modulo 20. Man berechne:

- (a) die Verknüpfungstafel von  $\mathbf{G}$ ,
- (b) die Ordnungen der Elemente von  $\mathbf{G}$ ,
- (c) die Untergruppen von  $\mathbf{G}$ .

Gibt es eine Gruppe der Form  $(\mathbb{Z}_n; + (\text{mod } n))$ , die zu  $\mathbf{G}$  isomorph ist?

A.2.13 Bezeichne  $\mathbf{G} := (G; \circ)$  eine Gruppe und seien die Abbildungen  $f$  und  $g_a$  für  $a \in G$  wie folgt definiert:

$$f : G \longrightarrow G, x \mapsto x \circ x,$$

$$g_a : G \longrightarrow G, x \mapsto a^{-1} \circ x \circ a.$$

Man beweise:

- (a)  $f$  ist genau dann ein Homomorphismus, wenn  $\circ$  kommutativ ist.
- (b)  $g_a$  ist eine isomorphe Abbildung von  $\mathbf{G}$  auf  $\mathbf{G}$ .

A.2.14 Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Durch

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \alpha \cdot x + \beta \cdot y$$

ist auf  $\mathbb{R}$  eine innere Verknüpfung definiert. Wie hat man  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  zu wählen, damit

- (a)  $(\mathbb{R}; \circ)$  eine Halbgruppe,
  - (b)  $(\mathbb{R}; \circ)$  eine Gruppe
- ist.

A.2.15 Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Auf der Potenzmenge von  $M$  seien außerdem die folgenden zwei Operationen definiert:

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$A \circ B := (A \cap B) \cup (M \setminus (A \cup B))$$

Man zeige, daß  $(\mathfrak{P}(M); \Delta)$  und  $(\mathfrak{P}(M); \circ)$  kommutative Gruppen sind.

A.2.16 Ist  $e$  neutrales Element einer vierelementigen Gruppe  $(G; \circ)$  mit  $G := \{a, b, c, e\}$ , so ist die Verknüpfungstafel mit der Angabe  $c \circ c = b$  bereits eindeutig bestimmt. Wie lautet demnach die Tafel?

A.2.17 Seien  $\mathbf{H} := (H; \circ)$  und  $\mathbf{H}' := (H'; \circ')$  Halbgruppen und  $f : H \longrightarrow H'$  eine homomorphe Abbildung von  $\mathbf{G}$  auf  $\mathbf{G}'$ . Man beweise:

- (a) Besitzt  $\mathbf{H}$  das neutrale Element  $e$  und  $\mathbf{H}'$  das neutrale Element  $e'$ , so gilt  $f(e) = e'$ .
- (b) Besitzt  $\mathbf{H}$  das Nullelement  $o$  und  $\mathbf{H}'$  das Nullelement  $o'$ , so gilt  $f(o) = o'$ .

- (c) Falls  $e$  neutrales Element von  $\mathbf{H}$  und  $a \in H$  ein invertierbares Element von  $\mathbf{H}$ , ist  $f(e)$  das neutrale Element von  $\mathbf{H}'$  und  $f(a)$  ein invertierbares Element von  $\mathbf{H}'$ .  
 (d) Sind  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{H}'$  endliche Gruppen und ist  $f$  bijektiv, so gilt für alle  $a \in H$ :  $\text{ord } f(a) = \text{ord } a$ .

A.2.18 Seien  $\mathbf{G}_i := (G_i; \circ_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $r \geq 2$ ) Gruppen. Die Gruppe  $\mathbf{G} := (G; \circ)$  mit

$$G := G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r$$

und

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_r), (b_1, b_2, \dots, b_r) \in G :$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \circ (b_1, b_2, \dots, b_r) := (a_1 \circ_1 b_1, a_2 \circ_2 b_2, \dots, a_r \circ_r b_r).$$

heißt dann das *direkte Produkt* der Gruppen  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_r$ , das auch mit  $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 \times \dots \times \mathbf{G}_r$  bezeichnet wird.

Bezeichne nachfolgend  $\mathbb{Z}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die Restklassengruppe  $(\mathbb{Z}_n; +)$ .

- (a) Man gebe die Verknüpfungstafel der Gruppe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  an und zeige, daß die Gruppe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  zur Gruppe  $\mathbb{Z}_6$  isomorph ist.  
 (b) Man beweise, daß  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  nicht zu  $\mathbb{Z}_4$  isomorph ist.  
*(Bemerkung* (Nicht als Beweishilfsmittel bei (a) und (b) verwenden!):  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  ist genau dann zu  $\mathbb{Z}_{n \cdot m}$  isomorph, wenn  $n \sqcap m = 1$  gilt.)

A.2.19 Für eine natürliche Zahl  $n$  sei

$$\begin{aligned} Par(n) := & \{(a_1, \dots, a_t) \mid t \in \mathbb{N} \wedge \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{N} \wedge \\ & a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_t \wedge a_1 + a_2 + \dots + a_t = n\} \end{aligned}$$

(die Menge aller Partitionen der Zahl  $n$ ). Z.B.:

$$Par(5) = \{(5), (1, 4), (2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)\}.$$

Der *Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen*, der im Band 2 bewiesen wird, besagt:

Falls  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$  ( $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}$  paarweise verschieden;  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ ) ist, so gibt es (bis auf Isomorphie) genau  $m := |Par(k_1)| \cdot |Par(k_2)| \cdot \dots \cdot |Par(k_r)|$  verschiedene abelsche Gruppen mit  $n$  Elementen. Beispiele für  $m$  paarweise nichtisomorphe abelsche Gruppen mit  $n$  Elementen lassen sich nach folgendem Rezept bilden:

Für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und eine Partition  $(a_1, \dots, a_s) \in Par(k_i)$  bilde man das direkte Produkt

$$\mathbf{H}_i := \mathbb{Z}_{p_i^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p_i^{a_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_i^{a_s}}.$$

Man erhält  $r$  (Hilfs-)Gruppen, aus denen sich die  $n$ -elementige Gruppe  $\mathbf{H}_1 \times \dots \times \mathbf{H}_r$  konstruieren läßt.

Man bestimme nach diesem Rezept (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen mit  $n = 600$  Elementen.

A.2.20 Seien

$$d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutationen der Gruppe  $\mathbf{S}_4$ . Man zeige

$$G := \langle \{d, s\} \rangle = \{e, d, d^2, d^3, s, s \square d, s \square d^2, s \square d^3\},$$

indem man die Verknüpfungstafel dieser Untergruppe der  $S_4$  aufstellt. Man bestimme die Ordnungen der Elemente von  $G$ . Außerdem gebe man möglichst viele Untergruppen von  $G$  der Ordnung 2 und 4 an.

- A.2.21 Man beweise: Der Durchschnitt von Untergruppen einer Gruppe  $\mathbf{G} := (G; \circ)$  ist wieder eine Untergruppe von  $\mathbf{G}$ .
- A.2.22 Man charakterisiere die möglichen homomorphen Abbildungen von der Gruppe  $\mathbf{G}$  auf eine andere Gruppe  $\mathbf{G}'$  durch die Angabe der auf  $\mathbf{G}$  existierenden Normalteiler für
- (a)  $\mathbf{G} := (S_3; \square)$ ,
  - (b)  $\mathbf{G} := (\mathbb{Z}_{10}; + \pmod{10})$ ,
  - (c)  $\mathbf{G} := (\mathbb{Z}_{12}; + \pmod{12})$ .
- A.2.23 Seien

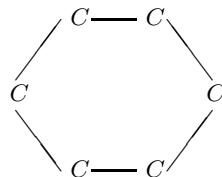
$$d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \text{ und } s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Untergruppe

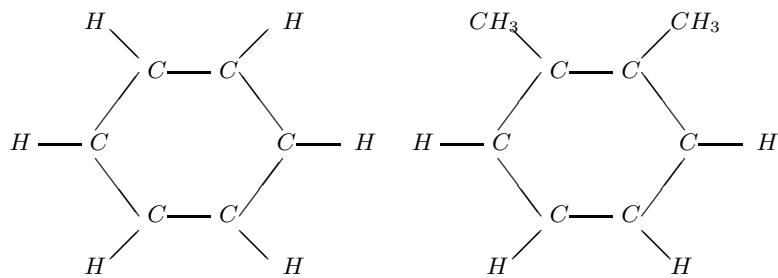
$$D_n := \langle \{d, s\} \rangle = \{d, d^2, \dots, d^n, s \square d, s \square d^2, \dots, s \square d^n\}$$

von  $S_n$  heißt *Diedergruppe*. Nachfolgend soll diese Gruppe bei der Bestimmung der Anzahl gewisser chemischer Verbindungen benutzt werden.

Gegeben sei ein Kohlenstoffring aus  $n$  Kohlenstoffatomen (im Beispiel  $n = 6$ ):



Durch „Anhängen“ von Wasserstoffatomen ( $-H$ ) oder Methylgruppen ( $-CH_3$ ) an die Kohlenstoffatome kann man zahlreiche organische Verbindungen gewinnen. Z.B.

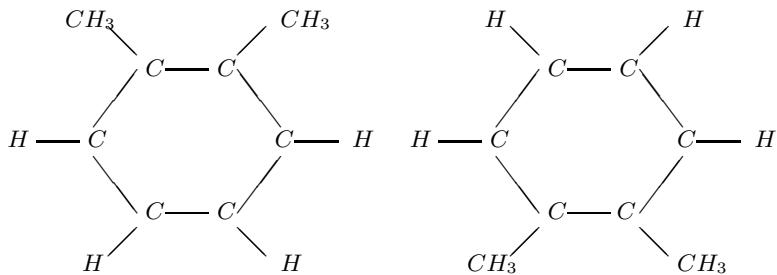


Benzol

Xylol

*Problem:* Wie viele chemische Verbindungen kann man durch das oben beschriebene „Anhängen“ erhalten?

Offenbar kann man für einen Ring aus  $n$  Elementen  $2^n$  verschiedene Bilder der oben angegebenen Form zeichnen. Verschiedene Bilder müssen jedoch nicht immer verschiedene chemische Verbindungen charakterisieren. Z.B. repräsentieren die nachfolgenden zwei Bilder die chemische Verbindung Xylol:



Seien  $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$  Bezeichnungen für die möglichen Bilder solcher chemischen Verbindungen und sei  $A := \{a_1, a_2, \dots, a_{2^n}\}$ . Zwei Bilder  $a_i, a_j$  liefern genau dann die gleiche chemische Verbindung (Bezeichnung:  $(a_i, a_j) \in R$ ), wenn es eine *Deckbewegung* (d.h., eine Kombination aus Drehungen und Spiegelungen) gibt, die das Bild  $a_i$  in das Bild  $a_j$  überführt. Genauer:

$$(a_i, a_j) \in R \iff \exists g \in D_n : g(a_i) = a_j.$$

Die Relation  $R$  ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $A$ , die die Menge  $A$  in die Äquivalenzklassen

$$B_a := \{ \alpha \in A \mid \exists g \in D_n : g(a) = \alpha \}$$

$(a \in A)$  zerlegt. Die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen (Bezeichnung:  $t_n$ ) ist dann offenbar gleich der gesuchten Anzahl der chemischen Verbindungen, die sich nach dem *Satz von Burnside* auf folgende Weise berechnen lässt:

$$t_n := (\sum_{g \in D_n} \varphi_g) / |D_n| = (\sum_{a \in A} |U_a|) / |D_n|,$$

wobei

$$\varphi_g := |\{a \in A \mid g(a) = a\}| \text{ und } U_a := \{g \in D_n \mid g(a) = a\}.$$

Man berechne

- (a)  $t_5$
- (b)  $t_6$

mit Hilfe der oben angegebenen Formel.

(c) Man beweise den Satz von Burnside.

*Hinweis:* Man beweise die folgenden Aussagen:

- (1.)  $U_a$  ist für jedes  $a \in A$  eine Untergruppe von  $D_n$ .
- (2.)  $\forall a \in A : |B_a| = |D_n : U_a|$ .
- (3.)  $B_a = B_{a'} \implies |U_a| = |U_{a'}|$ .
- (4.)  $t_n = (\sum_{a \in A} |U_a|) / |D_n|$ .
- (5.)  $\sum_{a \in A} |U_a| = \sum_{g \in D_n} \varphi_g$ .

- A.2.24 Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Sind  $(\mathfrak{P}(M); \Delta, \cap)$  und  $(\mathfrak{P}(M); \Delta, \cup)$  Ringe?  
 A.2.25 Sei  $\mathbf{R} := (\{o, a, b\}; +, \cdot)$  ein Ring. Wie viele Möglichkeiten (bis auf Isomorphie) gibt es für  $\mathbf{R}$ ?  
 A.2.26 Auf der Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  seien die folgenden Operationen definiert:

$$(x, y) \oplus (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \odot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u).$$

Man zeige, daß  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \odot)$  ein Körper ist.

- A.2.27 Sei  $\mathbf{R} := (R; +, \cdot)$  ein Ring mit der Eigenschaft, daß die Halbgruppe  $(R; \cdot)$  kommutativ ist und ein Einselement 1 besitzt. Außerdem bezeichne  $E$  die Menge

$$\{x \in R \mid \exists y \in R : x \cdot y = 1\}.$$

Man beweise:  $(E; \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe.

- A.2.28 Man berechne für

$$(a) z_1 = 1 - 2 \cdot i \text{ und } z_2 = 3 + 4 \cdot i,$$

$$(b) z_1 = 1 - 2 \cdot i \text{ und } z_2 = 3 + 5 \cdot i$$

die komplexen Zahlen  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2^{-1}$  und  $z_1^4$ .

- A.2.29 Für die nachfolgend angegebenen komplexen Zahlen berechne man die trigonometrische Darstellung:

$$1 + \sqrt{3} \cdot i, -3 + 7 \cdot i, -3 - 7 \cdot i, (1 + i)^{100}.$$

- A.2.30 Man berechne sämtliche komplexen Lösungen der Gleichungen:

$$(a) z^2 + z + 1 = 0,$$

$$(b) z^3 + 1 = 0,$$

$$(c) z^6 + 64 = 0,$$

$$(d) z^6 + 729 = 0.$$

- A.2.31 Man beweise:

$$\forall a, b, r, s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a + b \cdot i = (r + s \cdot i)^n \implies a^2 + b^2 = (r^2 + s^2)^n.$$

- A.2.32 Welche komplexen Zahlen  $z$  erfüllen die Gleichung  $|z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re} z = 3$  ?

- A.2.33 Es sei  $E := \{a \in \mathbb{C} \mid a^n = 1\}$  die Menge aller komplexen Lösungen der Gleichung  $x^n = 1$ . Man zeige, daß diese Menge zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation, die für komplexe Zahlen definiert ist, eine Gruppe bildet.

- A.2.34 Man beweise Satz 2.3.5.

---

## Übungsaufgaben zum Teil II

### 18.1 Aufgaben zum Kapitel 3

A.3.1 Mit Hilfe der Cramerschen Regel löse man das folgende LGS über dem Körper  $\mathbb{R}$ :

$$5x + 3y = -5$$

$$7x - 3y = 2$$

A.3.2 Mit Hilfe der Cramerschen Regel löse man das folgende LGS über dem Körper  $\mathbb{C}$ :

$$2 \cdot i \cdot x + y = -3 + i$$

$$(1 - i) \cdot x + (4 + 2 \cdot i) \cdot y = 1$$

A.3.3 Berechnen Sie die Inversionszahl  $I(s_i)$  ( $i = 1, 2$ ) für die folgenden Permutationen:

$$(a) s_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(b) s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 3 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

A.3.4 Man berechne die folgenden Determinanten über dem Körper  $\mathbb{R}$ :

$$(a) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 10 \\ -11 & 4 & -5 \\ 10 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 13 & 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A.3.5 Sei  $A := |a_{i,j}|_n$  eine Determinante mit

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = n - i + 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Man berechne  $A$ .

- A.3.6 Wie ändert sich die Determinante  $|\mathfrak{A}|$  für die  $(n,n)$ -Matrix  $\mathfrak{A} := (a_{ij})_{n,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wenn man für alle  $i, j$  die Elemente  $a_{ij}$  von  $\mathfrak{A}$  durch  $t^{i-j} \cdot a_{ij}$  ( $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) ersetzt?

- A.3.7 Sei

$$\mathfrak{C} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Man gebe  $\mathfrak{C}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  an und beweise diese Formel für  $\mathfrak{C}^n$  durch vollständige Induktion über  $n \geq 1$ .

- A.3.8 Man berechne  
(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{mit Hilfe von Adjunkten}),$$

(b)

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 15 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 12 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- A.3.9 Man berechne in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  den Rang der Matrix

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & t & t+1 & 2t & 5 \\ 2 & t^2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4-t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}.$$

- A.3.10 Man gebe zwei  $(2,2)$ -Matrizen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  über dem Körper  $(\mathbb{Z}_5; +, \cdot)$  an, für die  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \neq \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$  gilt.

- A.3.11 Man berechne die Determinante von

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

indem man von der Determinante  $|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T|$  ausgeht.

A.3.12 Man beweise: Seien  $n$  ungerade,  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^T$ . Dann gilt  $|\mathfrak{A}| = 0$ .

A.3.13 Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $(n, n)$ -Matrix, die mehr als  $n^2 - n$  Elemente besitzt, die gleich 0 sind. Man zeige, daß dann die Determinante von  $\mathfrak{A}$  gleich 0 ist.

A.3.14 Eine Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt *symmetrisch*, wenn  $\mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}$  ist. Eine Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt *schiefsymmetrisch*, wenn  $\mathfrak{A}^T = -\mathfrak{A}$  gilt.

Man beweise: Jede  $(n, n)$ -Matrix  $\mathfrak{A}$  läßt sich als Summe einer symmetrischen Matrix  $\mathfrak{A}_s$  und einer schiefsymmetrischen Matrix  $\mathfrak{A}_t$  darstellen.

A.3.15 Seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$   $(n, n)$ -Matrizen. Man beweise:

(a) Ist  $\mathfrak{A}$  symmetrisch, so ist auch  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  symmetrisch.

(b) Ist  $\mathfrak{A}$  schiefsymmetrisch, so ist auch  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  schiefsymmetrisch.

A.3.16 Sei  $\mathfrak{A}$  eine reguläre Matrix. Man beweise:  $(\mathfrak{A}^{-1})^T = (\mathfrak{A}^T)^{-1}$ .

A.3.17 Eine Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\mathfrak{D}_{n,n}\}$  heißt *positiv definit*, wenn

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \mathfrak{x}^T \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x} &\geq 0 \quad \wedge \\ (\mathfrak{x}^T \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x} = 0 &\iff \mathfrak{x} = \mathfrak{o}) \end{aligned}$$

gilt. Man zeige, daß für eine beliebige reguläre Matrix  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Matrix  $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  symmetrisch und positiv definit ist.

A.3.18 Man berechne mit Hilfe der zwei im Kapitel 3 angegebenen Verfahren die zur Matrix

$$(a) \quad \mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix.

A.3.19 Zum Verschlüsseln einer Nachricht kann man folgendes Verfahren verwenden. Den 26 Buchstaben des Alphabets werden Zahlen von 0 bis 25 zugeordnet:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
19	2	21	0	4	7	6	9	17	24	11	15	14
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	12	16	18	1	25	20	3	22	5	8	23	10

Der Klartext (z.B. ALGEBRA) wird in Blöcke zu je zwei Buchstaben unterteilt, wobei man nach Bedarf eventuell noch einen Buchstaben (etwa X) hinzufügt: AL GE BR AX. Jedem Buchstabenpaar entspricht nach der obigen Tabelle ein gewisses Zahlenpaar  $(a_1, a_2)$ , dem man mittels

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

ein anderes Paar  $(b_1, b_2)$  zuordnen kann, denen wiederum nach obiger Tabelle ein gewisses Buchstabenpaar entspricht. Auf diese Weise läßt sich Algebra zu SFDOLMBH codieren.

(a) Man decodiere SIVNXBMHNOTE.

(b) Welche Eigenschaften müssen Matrizen  $\mathfrak{A} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2}$  besitzen, damit jede durch  $(b_1, b_2)^T = \mathfrak{A} \cdot (a_1, a_2)^T$  codierte Nachricht entschlüsselt werden kann?

- A.3.20 Bezeichne  $G$  einen ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Für diesen Graphen lassen sich folgende drei Matrizen bilden:

$$\mathfrak{B} := (b_{ij})_{n,n} \text{ („Adjazenzmatrix von } G\text“),$$

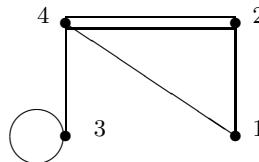
wobei  $b_{i,j}$  für  $i \neq j$  die Anzahl der Kanten, die den Knoten  $i$  mit den Knoten  $j$  verbinden, bezeichnet, und  $b_{ii}$  gleich der doppelten Anzahl der mit dem Knoten  $i$  inzidierenden Schlingen ist;

$$\mathfrak{V} := (v_{i,j})_{n,n} \text{ („Valenzmatrix von } G\text“),$$

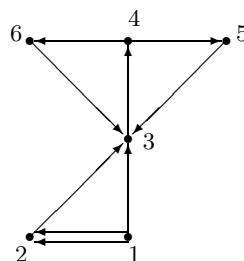
wobei  $v_{i,j} = 0$  für  $i \neq j$  und  $v_{ii}$  die Anzahl der Kanten ist, die vom Knoten  $i$  ausgehen und Schlingen dabei doppelt gezählt werden;

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{V} - \mathfrak{B} \text{ („Admittanzmatrix von } G\text“).}$$

Dann gilt der *Matrix-Gerüst-Satz (Satz von Kirchhoff-Trent)*<sup>1</sup>: Für beliebiges  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  gibt die Adjunkte  $A_{ii}$  der Determinante  $A := |\mathfrak{A}|$  die Anzahl der Gerüste des Graphen  $G$  an. (Gerüste sind zusammenhängende spannende Teilgraphen von  $G$  mit minimaler Kantenzahl.) Man verifiziere diesen Satz für den Graphen



- A.3.21 Jedem schlichten gerichteten Graphen  $G$  mit der Knotenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  kann man eine sogenannte *Adjazenzmatrix*  $\mathfrak{B} := (b_{ij})_{n,n}$  zuordnen, wobei  $b_{ij}$  die Anzahl der Bögen angibt, die vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$  gerichtet sind. Für die Matrix  $\mathfrak{B}^k =: (c_{ij})_{n,n}$  gilt dann, daß  $c_{ij}$  die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge  $k$  vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$  angibt. Man verifiziere diese Aussage für den Graphen



und  $k = 3$ .

---

<sup>1</sup> Den Beweis dieses Satzes wie auch den Beweis der Aussage aus der Aufgabe A.3.21 findet man im Band 2.

A.3.22 Sei  $K = \mathbb{R}$ . Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden LGS:

(a)

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 & = & 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 7 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1 + x_3 + x_4 & = & 6 \\ x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 & = & 10 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & & + x_6 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 10x_4 & = & 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 11 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 & = & 123 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 16x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 & = & 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 3 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 7 \end{array}$$

A.3.23 Sei  $K = \mathbb{R}$ . Man begründe mit Hilfe des Rangkriteriums, daß das LGS

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1 + 6x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 & = & 4 \end{array}$$

keine Lösungen besitzt.

A.3.24 Sei  $K = \mathbb{R}$ . Welchen Einfluß hat der Wert  $a \in \mathbb{R}$  auf die Struktur der allgemeinen Lösung des LGS

$$\begin{array}{rcl} 7x_1 - 3x_2 - 5x_3 + ax_4 - 2x_5 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 5x_5 & = & b \end{array}$$

und für welche  $b \in \mathbb{R}$  ist dieses LGS bei festem  $a \in \mathbb{R}$  lösbar?

Für den Fall  $a = 4$  gebe man außerdem sämtliche Lösungen des LGS an.

A.3.25 Sei  $K = \mathbb{R}$ . Für welche  $t \in \mathbb{R}$  hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 - t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 - t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nichttriviale Lösungen?

A.3.26 Sei  $K = \mathbb{Z}_7$ . Man berechne die Anzahl der Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 18.2 Aufgaben zum Kapitel 4

A.4.1 Man beweise, daß die Menge der Lösungen der Matrixgleichung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  ( $\mathfrak{A} \in K^{m \times n}$ ) einen Untervektorraum des Vektorraums  $K^{n \times 1}$  bildet. Gilt dies auch für die Lösungen der Gleichung  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ , falls  $\mathfrak{b} \in K^{m \times 1} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ ?

A.4.2 Welche der folgenden Teilmengen  $T_i \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind Untervektorräume von  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ ?

$$(a) T_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\},$$

$$(b) T_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_1 + x_2 = 1\},$$

$$(c) T_3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}.$$

A.4.3 Seien

$$\mathfrak{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 := \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 2i \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_3 := \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_4 := \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren des Vektorraums  $\mathbb{C}^{4 \times 1}$  über dem Körper  $\mathbb{C}$ . Man bestimme die Dimension des UVRs  $U := [\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4\}]$  und gebe eine Basis für diesen UVR an.

A.4.4 Seien

$$\mathfrak{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren des Vektorraums  $K^{5 \times 1}$  über dem Körper  $K$  mit  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}_2\}$ . Man bestimme die Dimension des UVRs  $U := [\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5\}]$  und gebe eine Basis für diesen UVR an.

A.4.5 Mit Hilfe von Vektoren beweise man, daß durch die Verbindung der Mittelpunkte benachbarter Seiten in einem Viereck stets ein Parallelogramm entsteht.

A.4.6 In einem Vektorraum  $\mathbb{R}V$  seien die Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  fixiert. Außerdem seien

$$\mathfrak{x} := \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{y} := \mathfrak{c} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{z} := \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Man beweise:

- (a)  $[\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}] = [\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}]$ .
- (b)  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  linear unabhängig sind.

Sind die Aussagen (a) und (b) auch für Vektorräume über einem beliebigen Körper richtig?

A.4.7 In dem Vektorraum  $\mathbb{R}V$  seien drei linear unabhängige Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$  gegeben. Für welche  $k \in \mathbb{R}$  sind die Vektoren

$$\mathfrak{b}_1 := \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 - 2\mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{b}_2 := \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_1 - 2\mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{b}_3 := \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - k \cdot \mathfrak{a}_3$$

linear abhängig? Gibt es einen Vektor  $\mathfrak{a} \in V$ , ein  $k \in \mathbb{R}$  und gewisse  $\mu_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit  $\mathfrak{b}_i = \mu_i \cdot \mathfrak{a}$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ ?

A.4.8 Seien  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n \in {}_K V$ ,  $\alpha \in K$  mit  $\alpha + \alpha \neq 0$  und  $\mathfrak{c}_j := \mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_j$ ,  $\mathfrak{d}_j := \alpha \cdot (\mathfrak{b}_j - \mathfrak{a}_j)$  für  $j = 1, \dots, n$ . Man beweise: Sind die Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  l.u., so auch die Vektoren  $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_n$ .

A.4.9 Man verifiziere die Dimensionsformel für Untervektorräume im Fall  $V = \mathbb{R}\mathbb{R}^{4 \times 1}$  und für die Untervektorräume

$$U = [ \{(1, 0, 1, 2)^T, (0, 1, 1, 1)^T \} ]$$

und

$$W = [ \{(1, 1, 4, 0)^T, (2, -3, -1, 1)^T, (3, 1, 0, 0)^T \} ]$$

von  $V$ .

A.4.10 Seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  Vektoren des Vektorraums  $KV$  und  $\alpha, \beta, \gamma \in K$ . Man beweise, daß

$$\alpha \cdot \mathfrak{a} - \beta \cdot \mathfrak{b}, \quad \gamma \cdot \mathfrak{b} - \alpha \cdot \mathfrak{c}, \quad \beta \cdot \mathfrak{c} - \gamma \cdot \mathfrak{a}$$

linear abhängig sind.

A.4.11 Die folgenden Mengen sind UVRe des VRs  $\mathbb{R}\mathbb{R}^{4 \times 1}$ :

$$U := [ \{(1, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 0, 3)^T \} ],$$

$$W := [ \{(1, -1, 1, 1)^T, (4, 0, 1, 1)^T \} ].$$

Ist  $U + W$  eine direkte Summe?

A.4.12 Seien  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$  linear unabhängige Vektoren des Vektorraums  $KV$ . Außerdem sei  $\mathfrak{a}$  eine Linearkombination dieser Vektoren, d.h., es existieren gewisse  $a_1, \dots, a_n \in K$  mit

$$\mathfrak{a} = a_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + a_2 \cdot \mathfrak{b}_2 + \dots + a_n \cdot \mathfrak{b}_n.$$

Man beweise, daß die  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) in dieser Darstellung von  $\mathfrak{a}$  durch die Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$  eindeutig bestimmt sind.

Gilt obige Aussage auch, wenn die Vektoren  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$  linear abhängig sind?

A.4.13 Bezeichne  $V$  den Vektorraum  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$  über  $\mathbb{R}$ .

- (a) Man beweise, daß  $\mathfrak{b}_1 := (1, 0, 1, 0)^T, \mathfrak{b}_2 := (1, 0, 0, 1)^T, \mathfrak{b}_3 := (0, 1, 1, 0)^T, \mathfrak{b}_4 := (1, 1, 1, 2)^T$  eine Basis  $B$  von  $V$  bilden.

- (b) Man gebe die Koordinaten von  $\alpha := (1, 2, 3, 4)^T$  bezüglich der Basis  $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$  an.  
(c) Man berechne die Übergangsmatrix  $\mathfrak{M}(B, B')$ , wobei  $B'$  die Standardbasis  $(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_4) = ((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$  von  $V$  bezeichnet.

A.4.14 Bezeichne  $V$  den Vektorraum  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$  über  $\mathbb{R}$ .

- (a) Man beweise, daß  $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{b}_4 = (1, 1, 1, 0)^T$  eine Basis  $B$  von  $V$  bildet.  
(b) Man berechne die Koordinaten von  $\alpha := (0, 5, 2, -1)^T$  bezüglich  $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ .  
(c) Man berechne die Übergangsmatrix  $\mathfrak{M}(B, B')$ , wobei  $B'$  die Standardbasis

$$(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_4) = ((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$$

von  $V$  bezeichnet.

### 18.3 Aufgaben zum Kapitel 5

A.5.1 Bezeichne  $R_3$  einen dreidimensionalen affinen Raum über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$ . Wie viele Punkte, Geraden und Ebenen enthält  $R_3$ ? Wie viele Punkte enthält eine Gerade? Wie viele Punkte und Geraden enthält eine Ebene? Wie viele parallele Geraden gibt es zu einer gegebenen Geraden?

A.5.2 Man bestimme eine parameterfreie Darstellung für die 2-Ebene  $E$  des 5-dimensionalen affinen Raumes  $R_5$  über dem Körper  $\mathbb{R}$ , die gegeben ist durch:

$$E : X = (1; 1, 0, 1, 2, 0)^T + r \cdot (0; 1, 0, 1, 1, 1)^T + s \cdot (0; 1, 2, 1, 1, 2)^T$$

(Koordinatendarstellung bezüglich eines Koordinatensystems  $S$  des  $R_5$ ).

A.5.3 Sei  $R_4$  ein 4-dimensional affiner Raum über dem Körper  $\mathbb{R}$  und  $S$  ein Koordinatensystem des  $R_4$ . Beziiglich  $S$  seien die folgenden Punkte des  $R_4$  gegeben:  $P_0 := (1; 3, -4, 1, 6)^T$ ,  $P_1 := (1; 3, -2, -10, 0)^T$ ,  $P_2 := (1; 2, 0, -3, 2)^T$  und  $P_3 := (1; 1, 2, 4, 4)^T$ . Man bestimme:

- (a) die Dimension des von den Punkten  $P_0, P_1, P_2, P_3$  aufgespannten affinen Unterraums  $E$ ;  
(b) den Durchschnitt von  $E$  mit der durch die Gleichung  $4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 6 = 0$  gegebenen Hyperebene  $H$ .

A.5.4 Es sei  $R_n$  ein affiner Punktraum über dem Körper  $K$  mit dem Koordinatensystem  $S$ . Eine Hyperfläche  $E$  des  $R_n$  ist durch  $n$  ihrer Punkte  $P_1, \dots, P_n$  in allgemeiner Lage eindeutig bestimmt (siehe Satz 5.4.3). Andererseits ist  $E$  parameterfrei durch eine Gleichung der Form  $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$  beschreibbar, wobei  $X/S = (1; x_1, \dots, x_n)^T$  für  $X \in R_n$ . Man beweise, daß man eine  $E$  beschreibende Gleichung erhalten kann, indem man

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bildet, wobei  $(P_i)_S := (1; p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

- A.5.5 Wie können zwei verschiedene 2-Ebenen  $E$  und  $E'$  im (a)  $R_3$ , (b)  $R_4$ , (c)  $R_5$  über dem Körper  $K$  zueinander gelegen sein? Bei der Fallunterscheidung verwende man: Parallelität,  $E \cap E'$ ,  $E + E'$ .
- A.5.6 Seien  $\mathfrak{A} \in K^{r \times n}$ ,  $\mathfrak{B} \in K^{s \times n}$ ,  $\mathfrak{b} \in K^{r \times 1}$ ,  $\mathfrak{c} \in K^{s \times 1}$  und  $\mathfrak{x} \in K^{n \times 1}$ . Durch die LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$  seien zwei Unterräume  $E$  und  $E'$  eines  $n$ -dimensionalen Punktraumes  $R_n$  über dem Körper  $K$  gegeben. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Koeffizienten dieser LGS (beziehungsweise für Matrizen an, die aus diesen Koeffizienten gebildet werden können), unter der  $E$  und  $E'$  parallel sind.
- A.5.7 Seien  $E$  und  $E'$  zwei affine 2-Ebenen im  $R_4$  mit  $E \cap E' \neq \emptyset$ . Man zeige:
- Gilt  $\dim E \cap E' = 0$ , so schneidet  $E$  jede zu  $E'$  parallele affine 2-Ebene  $E''$  in genau einem Punkt.
  - Gilt  $\dim E \cap E' = 1$ , so gibt es zu  $E'$  eine parallele affine 2-Ebene  $E'''$ , die  $E$  nicht schneidet.
- A.5.8 Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 3$ . Man zeige, daß für jedes  $q \in \mathbb{R}$  sämtliche Punkte des affinen  $n$ -dimensionalen Raumes  $R_n$  über  $\mathbb{R}$ , deren Summe der Koordinaten gleich  $q$  ist, in einer Hyperebene  $E_q$  liegen und gebe die Parameterdarstellung für  $E_q$  an.
- A.5.9 Es sei  $R_5 := \{(1, x_1, \dots, x_5)^T \mid x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}\}$  ein affiner Raum über  $\mathbb{R}$  mit dem zugehörigen Vektorraum  $V_5 := \{(0, x_1, \dots, x_5)^T \mid x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}\}$  (das Standardbeispiel eines 5-dimensionalen affinen Raumes über  $\mathbb{R}$ ). In diesem Raum sei die Ebene  $E$  durch den Punkt  $A$  und die Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in V_5$  bestimmt und die Ebene  $E'$  durch den Punkt  $B$  und die Vektoren  $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4 \in V_5$ . Wie kann man die gegenseitige Lage der Ebenen  $E$  und  $E'$  durch die linearen Abhängigkeiten zwischen den Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \overrightarrow{AB}$  ausdrücken?
- A.5.10 Seien  $P, P', Q, Q' \in R_n$  die Ecken eines Vierecks  $PP'QQ'$ . Man beweise: Die Punkte  $P, P', Q, Q'$  bilden genau dann ein Parallelogramm  $PQQ'P'$ , wenn sich die Diagonalen in diesem Parallelogramm halbieren, d.h., es gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \iff P + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = Q + \frac{1}{2} \overrightarrow{QP'}$$

- A.5.11 Man zeige: Zu beliebigen  $k+1$  paarweise verschiedenen Punkten  $P_1, \dots, P_{k+1}$  eines affinen Raumes  $R_n$ , die nicht in einem affinen Unterraum einer Dimension  $\leq k-1$  liegen, gibt es genau einen Unterraum  $E$  der Dimension  $k$ , der diese  $k+1$  Punkte enthält. Man sagt,  $E$  wird von  $P_1, \dots, P_{k+1}$  aufgespannt. Welche Aussagen der Schulgeometrie werden durch obige Aussage verallgemeinert?

## 18.4 Aufgaben zum Kapitel 6

- A.6.1 Seien  $S := (A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ein Koordinatensystem für  $\mathfrak{R}_3$  und  $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  orthonormiert. Außerdem seien (in Koordinaten bez.  $S$  bzw.  $B$ ):  
 $P := (1; 1, 2, 3)^T$ ,  $Q := (1; 0, 3, -1)^T$ ,  $R := (1; -1, 2, 0)^T$ ,  
 $h : X := (1; 0, 1, 1)^T + t \cdot (0; 1, 1, 1)^T$ ,  
 $E : x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$ ,  
 $E' : X := (1; 2, 3, 1)^T + t_1 \cdot (0; 1, 0, 1)^T + t_2 \cdot (0; 0, 2, 1)^T$ .  
Man berechne:
- eine Parameterdarstellung der Geraden  $g(P, Q)$ ;

- (b) eine Parameterdarstellung der Ebene  $\varepsilon(P, Q, R)$ ;  
 (c) eine Hessesche Form der Ebene  $\varepsilon(P, Q, R)$ ;  
 (d) die Hessesche Normalform von  $E$ ;  
 (e) den Abstand von  $A$  zu  $h$ ;  
 (f) den Abstand von  $A$  zu  $E$ ;  
 (g) zwei Ebenen in Hessescher Form, deren Schnitt die Gerade  $h$  ist;  
 (h) den Abstand von  $g$  zu  $h$ ;  
 (i) die Fußpunkte  $T_1, T_2$  des Lotes von  $g$  auf  $h(T_1, T_2)$ <sup>2</sup>;  
 (j) eine Parameterdarstellung für  $E$ ;  
 (k) einen Vektor aus  $\vec{V}_3$ , der auf  $E$  senkrecht steht;  
 (l) eine Ebene, die durch  $A$  geht und auf  $h$  senkrecht steht;  
 (m)  $E \cap E'$ ;  
 (n) die Koordinaten des Punktes  $P \in \varepsilon(P, Q, R)$  bez. des Koordinatensystems  $(R; \vec{PQ}, \vec{PR})$  für die Punkte der Ebene  $\varepsilon$ ;
- (o) die Parameterdarstellung einer zu  $E$  parallelen Ebene, die von  $E$  den Abstand 2 hat;  
 (p) den Schnittpunkt von  $h$  mit  $E$ .

A.6.2 Man beweise, daß durch  $\varphi: \mathbb{C}^{n \times 1} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \mathfrak{x}^T \cdot \bar{\mathfrak{y}}$  ein Skalarprodukt des Vektorraums  $\mathbb{C}^{n \times 1}$  über  $\mathbb{C}$  definiert ist.

A.6.3 Es sei  $V := \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $\varphi$  die wie folgt definierte Abbildung von  $V \times V$  in  $\mathbb{R}$ :  
 $\varphi((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) := 3 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + 2 \cdot x_3 \cdot y_3$ .  
 Man zeige, daß  $\varphi$  ein Skalarprodukt ist und bestimme eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormierte Basis mit Hilfe des Schmidtschen ONVs, indem man von der Basis  $\mathfrak{a}_1 := (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathfrak{a}_2 := (0, 1, 0)^T$ ,  $\mathfrak{a}_3 := (0, 0, 1)^T$  ausgeht.

A.6.4 Man bestimme mit Hilfe des Schmidtschen ONVs eine orthonormierte Basis für den Untervektorraum  $[\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4\}]$  von  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ , wobei  $\mathfrak{a}_1 := (2, 1, 3, -1)^T$ ,  $\mathfrak{a}_2 := (7, 4, 3, -3)^T$ ,  $\mathfrak{a}_3 := (1, 1, -6, 0)^T$ ,  $\mathfrak{a}_4 := (5, 7, 7, 8)^T$ .

A.6.5 Man beweise: Die durch ein Skalarprodukt  $\varphi$  (eines VRs  $V$  über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) definierte Norm  $\|\mathfrak{a}\| := \sqrt{\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$  ( $\mathfrak{a} \in V$ ) erfüllt die sogenannte Parallelogrammeigenschaft:

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V : \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2).$$

Außerdem zeige man anhand eines Beispiels, daß die Maximumnorm diese Eigenschaft nicht besitzt.

A.6.6 Seien  $B := (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$  und  $\mathfrak{a}_{/B} := (0; 1, 0, 3)^T$ ,  $\mathfrak{b}_{/B} := (0; 2, -6, 1)^T$ ,  $\mathfrak{c}_{/B} := (0; -1, 0, 2)^T$ .

- (a) Welche Orientierung besitzt die Basis  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ ?  
 (b) Welche der 5 aus  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$  durch Ändern der Reihenfolge der Vektoren bildbaren Basen sind rechtsorientiert?  
 (c) Man ermittle das Volumen und die Oberfläche des von den Vektoren  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{c}$  aufgespannten Spats.

A.6.7 Seien  $S := (A; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$  und  $P_{/S} := (1; 7, 0, 3)^T$ ,  $Q_{/S} := (1; 14, 2, -1)^T$ ,  $R_{/S} := (1; 1, 5, 1)^T$ .

Man gebe die Plückersche Normalform der Geraden  $g(P, Q)$  an und berechne den Abstand des Punktes  $R$  zu  $g$ .

A.6.8 Man zeige, daß das Vektorprodukt keine assoziative Operation auf  $\vec{V}_3$  ist.

---

<sup>2</sup> Diese Fußpunkte sind eindeutig bestimmt, da  $g$  und  $h$  windschief zueinander sind.

- A.6.9 Man bestimme den Winkel zwischen zwei verschiedenen Raumdiagonalen eines Würfels.
- A.6.10 Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , auf dem ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert ist. Außerdem bezeichne  $B$  eine Menge von Vektoren aus  $V$ , die nicht den Nullvektor enthält und für die gilt:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in B : \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \implies \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Man beweise, daß  $B$  linear unabhängig ist.

- A.6.11 Es seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei Skalarprodukte eines unitären Vektorraums  $V$  über dem Körper  $\mathbb{C}$ . Man beweise, daß aus

$$\forall \mathbf{x} \in V : \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

stets  $\varphi_1 = \varphi_2$  folgt.

- A.6.12 Man gebe die Gleichung einer Ebene  $E \subset \mathfrak{R}_3$  an, die vom Punkt  $Q := (1; 3, 5, 7)^T$  (in Koordinaten bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem  $S$  des  $\mathfrak{R}_3$ ) den Abstand 4 hat und auf den Koordinatenachsen von  $S$  Abschnitte abtrennt, die proportional zu 1, 2, 3 sind.
- A.6.13 Von dem Dreieck  $\Delta ABC$  aus dem Anschauungsraum  $\mathfrak{R}_3$  weiß man, daß der Mittelpunkt der Strecke  $AC$  (beziehungsweise  $BC$ ) auf der  $y$ -Achse (beziehungsweise in der  $x, z$ -Ebene) des verwendeten affinen Koordinatensystems  $S$  liegt. Außerdem kennt man die Koordinaten der Punkte  $A$  und  $B$ :  $A/S := (1; -4, -1, 2)^T$ ,  $B/S := (1; 3, 5, -16)^T$ . Man bestimme die Koordinaten von  $C$  bezüglich  $S$ .
- A.6.14 Die Ecken eines Tetraeders  $T$  im Anschauungsraum  $\mathfrak{R}_3$  seien durch ihre Koordinaten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben:  $P_1 := (1; 1, 0, 1)^T$ ,  $P_2 := (1; 2, 1, -1)^T$ ,  $P_3 := (1; 5, -2, -4)^T$ ,  $P_4 := (1; -4, 2, 5)^T$ . Man berechne:
- (a) die von  $P_1$  ausgehende Höhe  $h$ ,
  - (b) den Fußpunkt  $S$  und die Länge  $l$  des von  $P_1$  auf die Kante  $P_2P_3$  gefällten Lotes,
  - (c) den Winkel zwischen den Gegenflächen von  $P_2$  und  $P_3$ .
- A.6.15 Mit Hilfe von Vektoren und dem Skalarprodukt in der Anschauungsebene beweise man
- (a) den Satz des Pythagoras;
  - (b) den Satz: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.
- A.6.16 Man beweise: Im Parallelogramm ist die Summe der Diagonalquadrate gleich der Summe der 4 Seitenquadrate.
- A.6.17 Es sei  $S := (A; \mathbf{i}, \mathbf{j})$  ein kartesisches Koordinatensystem für die Anschauungsebene  $\mathfrak{R}_2$ . In Koordinaten bezüglich  $S$  seien die Punkte  $B := (1; -3, 2)^T$  und  $P := (1; 2, -3)^T$  gegeben. Wie lauten die Koordinaten von  $P$  bezüglich des Koordinatensystems  $S' := (B; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ , wobei die Basis  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  aus der Basis  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  durch Drehung um den Winkel  $\varphi := 60^\circ$  im mathematisch positiven Drehsinn entsteht?
- A.6.18 Es seien  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Einheitsvektoren des  $\mathfrak{V}_3$ , die einen Winkel von  $45^\circ$  miteinander einschließen. Man bestimme den Flächeninhalt  $F$  des Parallelogramms, dessen Diagonalen durch die Vektoren  $\mathbf{d}_1 := 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$  und  $\mathbf{d}_2 := 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  beschrieben sind.

- A.6.19 Bezeichne  $V$  einen Vektorraum über dem Körper  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , auf dem ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert ist. Seien außerdem  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_t \in V$  gewisse Vektoren mit der Eigenschaft  $\{\mathfrak{y} \in V \mid \forall i \in \{1, \dots, t\} : \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_i) = 0\} = \{\mathfrak{o}\}$ . Man beweise, daß dann  $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_t\}$  ein Erzeugendensystem für  $V$  ist.

- A.6.20 Man beweise:

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \vec{V}_3 : (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a}.$$

- A.6.21 Man berechne das Volumen eines Tetraeders mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$ , die in Koordinaten bezüglich  $S := (O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$  wie folgt angebar sind:  $A := (1; 1, 4, 4)^T$ ,  $B := (1; -1, 3, 2)^T$ ,  $C := (1; 0, 5, 7)^T$ ,  $D := (1; 1, -2, 3)^T$ .

*Hinweis:* Der Rauminhalt eines Tetraeders ist ein Sechstel des Inhalts eines Spats, der von drei seiner Seitenvektoren aufgespannt wird.

- A.6.22 Seien  $\|\cdot\|$  eine Norm des Vektorraums  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Beweisen Sie, daß durch

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}, \|\mathfrak{A}\| := \max_{\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}} \frac{\|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|}{\|\mathfrak{x}\|}$$

eine Norm („Matrixnorm“) auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^{n \times n}$  definiert ist.

## 18.5 Aufgaben zum Kapitel 7

- A.7.1 Ist die für einen affinen Raum  $\mathcal{R}$  definierte Abbildung  $d$  mit

$$d(P, Q) := \begin{cases} 0 & \text{für } P = Q, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle  $P, Q \in \mathcal{R}$  eine Metrik?

- A.7.2 In einem 4-dimensionalen affinen Raum

$$R_4 := \{(1, x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

mit dem zugehörigen VR  $V_4 := \{(0, x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$  (auf dem das Standardskalarprodukt definiert sei) über dem Körper  $\mathbb{R}$  seien  $P := (1, 1, -1, 0, 6)^T$ ,  $Q := (1, 4, 2, 4, -3)^T$ ,  $\mathfrak{a} := (0, 1, 2, -1, 0)^T$ ,  $\mathfrak{b} := (0, 0, 1, 1, 1)^T$  und  $\mathfrak{c} := (0, 2, -1, 0, 1)^T$ . Man berechne eine orthonormierte Basis  $B := (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4)$  von  $V_4$  mit den Eigenschaften:  $\mathfrak{e}_1 \in [\{\mathfrak{a}\}]$ ,  $\mathfrak{e}_2 \in [\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}]$  und  $\mathfrak{e}_3 \in [\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}]$ . Bezuglich des kartesischen Koordinatensystems  $S := (P, B)$  berechne man außerdem die Koordinaten von  $Q$ .

- A.7.3 Seien  $R_4$ ,  $V_4$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{c}$  wie in A.7.2 gewählt. Außerdem seien zwei Unterräume  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  durch  $\mathcal{E} = P + [\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}]$  und  $\mathcal{E}' = Q + [\{\mathfrak{c}\}]$  beschrieben. Man berechne:

- (a) den Abstand von  $P$  zu  $\mathcal{E}'$ ,
- (b) den Abstand von  $Q$  zu  $\mathcal{E}$ ,
- (c) ein Lot und die Fußpunkte des Lotes von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$ ,
- (d) den Abstand von  $\mathcal{E}$  zu  $\mathcal{E}'$ ,
- (e) das Volumen des Spats  $\text{Sp}(P, P + \mathfrak{a}, P + \mathfrak{b}, P + \mathfrak{c})$ .

*Hinweis zu (c):* Siehe Beweis von Satz 7.1.3.

A.7.4 Man bestimme  $x, y, z \in \mathbb{R}$  so, daß

$$\mathfrak{A} := \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist. Außerdem verifiziere man Satz 7.3.5 für diese orthogonale Matrix.

## 18.6 Aufgaben zum Kapitel 8

- A.8.1 Sei  $p_4(x) := x^4 - 3x^3 - 24x^2 - 25x - 21$ . Man berechne:
- (a)  $p_4(9)$  und  $\frac{p_4(x)}{x-9}$  mittels Horner-Schema;
  - (b)  $p_4(8)$  und  $\frac{p_4(x)}{x-8}$  mittels Horner-Schema;
  - (c) die Nullstellen von  $p_4(x)$ . (Hinweis: Zwei der Nullstellen von  $p_4$  sind ganzzahlig.)
- A.8.2 Sei  $\alpha$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Polynoms  $p(x) \in \mathfrak{P}_n$  ( $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ). Man zeige, daß dann  $\alpha$  eine  $(k-1)$ -fache Nullstelle der Ableitung  $p'(x)$  ist.
- A.8.3 Man beweise: Besitzt ein Polynom  $p$  mit nur reellen Koeffizienten eine Nullstelle  $z := a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist auch die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{z} = a - b \cdot i$  eine Nullstelle von  $p$ .
- A.8.4 Man beweise: Jedes Polynom ungeraden Grades mit nur reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.
- A.8.5 Sei  $K = \mathbb{R}$ . Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix  $\mathfrak{A}$  über  $\mathbb{R}$  für

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(e)} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & -4 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \end{array}$$

A.8.6 Für die in Aufgabe A.8.5, (c) angegebene symmetrische Matrix  $\mathfrak{A}$  berechne man eine orthogonale Matrix  $\mathfrak{B}$  mit der Eigenschaft, daß  $\mathfrak{B}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  eine Diagonalmatrix ist.

A.8.7 Man beweise, daß die Matrix

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

diagonalisierbar ist und gebe eine Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  an, die mittels  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}$  die Matrix  $\mathfrak{A}_1$  in eine Diagonalmatrix überführt. Man begründe außerdem die Nichtdiagonalisierbarkeit der Matrix

$$\mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

A.8.8 Sei  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Man zeige:

- (a) Besitzt  $\mathfrak{A}$  einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\dim L_{\mathfrak{A}}(\lambda) = 2$ , so existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .
- (b) Besitzt  $\mathfrak{A}$  einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\dim L_{\mathfrak{A}}(\lambda) = 1$ , so existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .
- (c) Besitzt  $\mathfrak{A}$  zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , so existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .
- (d) Besitzt  $\mathfrak{A}$  keinen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so existiert eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & s \end{pmatrix}$ , wobei  $s$  die Spur von  $\mathfrak{A}$  ist und  $d := \det \mathfrak{A}$ .

A.8.9 Seien  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A}$ . Man zeige, daß  $\lambda^r$  für jedes  $r \in \mathbb{N}$  ein EW von  $\mathfrak{A}^r$  ist. Außerdem gebe man ein Beispiel dafür an, daß die Vielfachheit von  $\lambda^r$  als EW von  $\mathfrak{A}^r$  größer sein kann als die Vielfachheit von  $\lambda$  als EW von  $\mathfrak{A}$ .

A.8.10 Sei  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ . Man beweise:

- a)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^T$  haben die gleichen Eigenwerte.
- b) Sind  $K = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{A}$  orthogonal und  $\lambda$  ein EW von  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\lambda \neq 0$  und  $\frac{1}{\lambda}$  ebenfalls ein EW von  $\mathfrak{A}$ .

A.8.11 Man beweise: Es sei  $n \in \mathbb{N}$  gerade,  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^T$ . Dann treten in dem charakteristischen Polynom von  $\mathfrak{A}$  nur gerade  $\lambda$ -Potenzen auf.

A.8.12 Für  $\mathfrak{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  seien  $n - 1$  EWe bekannt. Wie kann man dann einen weiteren EW von  $\mathfrak{A}$  bestimmen?

A.8.13 Man beweise, daß  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$  genau dann regulär ist, wenn 0 kein EW von  $\mathfrak{A}$  ist.

A.8.14 Für die folgende Matrix  $\mathfrak{A}$  berechne man eine Jordan-Matrix  $\mathfrak{J}$  sowie eine reguläre Matrix  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{J}$ .

(a)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 8 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 7 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 & -3 & -21 \\ 3 & 29 & 0 & 19 & 31 & 217 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & 6 & -1 & 6 & 7 & 49 \\ 42 & -34 & 60 & 26 & -36 & -266 \\ -6 & 1 & -8 & -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

*Hinweis zu (c):* Es gilt  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_6| = (2 - \lambda)^6$ .

- A.8.15 Seien  $y, y_1, \dots, y_n$  nachfolgend die Bezeichnungen für differenzierbare Funktionen mit einem gewissen Definitionsbereich  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Die Ableitungen dieser Funktionen seien mit  $y', y'_1, \dots, y'_n$  bezeichnet. Außerdem seien  $\alpha, C \in \mathbb{R}$  und  $f$  eine über  $A$  stetige Funktion. Wie man leicht nachprüft, ist dann  $y(x) = C \cdot e^{\alpha \cdot x}$  für jedes  $C \in \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y'(x) = \alpha \cdot y(x)$ , und  $y(x) = C \cdot e^{\alpha \cdot x} + e^{\alpha \cdot x} \cdot (\int f(x) \cdot e^{-\alpha \cdot x} dx)$  für beliebiges  $C \in \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y'(x) - \alpha \cdot y(x) = f(x)$ . Diese Lösungsformeln kann man benutzen, um ein Differentialgleichungssystem (mit den unbekannten Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  und gegebener Konstanten  $\alpha$ ) der Form

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= \alpha \cdot y_1(x) \\ y'_2(x) &= y_1(x) + \alpha \cdot y_2(x) \\ y'_3(x) &= y_2(x) + \alpha \cdot y_3(x) \\ \dots & \\ y'_n(x) &= y_{n-1}(x) + \alpha \cdot y_n(x) \end{aligned}$$

zu lösen. Man berechne eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems für  $n = 3$  und  $\alpha = 2$ .

Es sei nun  $\mathfrak{y}' := (y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x))^T$ ,  $\mathfrak{y} := (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$  und  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zwecks Lösung der Gleichung  $\mathfrak{y}' = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}$  kann man  $\mathfrak{y} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{z}$  mit einer geeigneten regulären Matrix  $\mathfrak{B}$  substituieren und erhält aus  $\mathfrak{y}' = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}$  die Gleichung  $\mathfrak{z}' = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{z}$  mit der neuen Unbekannten  $\mathfrak{z} := (z_1(x), \dots, z_n(x))^T$ . Wie hat man  $\mathfrak{B}$  zu wählen, um zunächst  $\mathfrak{z}$  und dann  $\mathfrak{y}$  bestimmen zu können?

## 18.7 Aufgaben zum Kapitel 9

- A.9.1 Man berechne für die folgende Kurve 2. Ordnung  $T_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ) eine Normalform. Insbesondere gebe man die zugehörigen Koordinatentransformationen und die Art der Kurve an. Außerdem skizziere man die Kurve im  $x, y$ -Koordinatensystem.

- (a)  $T_1 : 7x^2 - y^2 + 6xy + 52x + 4y + 58 = 0$ ,
- (b)  $T_2 : 6x^2 + 3y^2 + 4xy - 4x + 8y + 9 = 0$ ,
- (c)  $T_3 : x^2 + y^2 + 8xy - 10x + 20y - 35 = 0$ ,
- (d)  $T_4 : x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{7}xy - 2y = 0$ ,
- (e)  $T_5 : 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 6y = 0$ .

- A.9.2 Man berechne für die folgende Fläche 2. Ordnung  $T_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) eine Normalform. Insbesondere gebe man die zugehörigen Koordinatentransformationen und die Art der Fläche an.

- (a)  $T_1 : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xz - 2yz - 12x - 6\sqrt{2}y + 6\sqrt{2}z - 1 = 0,$
- (b)  $T_2 : x^2 + y^2 + 16z^2 + 8xz + 2x - 2y + 2z = 0,$
- (c)  $T_3 : x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y + 6z + 183 = 0,$
- (d)  $T_4 : x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 8xz + 24yz + 2x - 12y - 16z + 1 = 0,$
- (e)  $T_5 : xy + xz + yz + x + y + z = 0,$
- (f)  $T_6 : 3x^2 + 3y^2 + 6xy + 2x + 2y - 4z + 3 = 0.$

- A.9.3 Gegeben seien zwei Koordinatensysteme  $S := (A; i, j)$  und  $S' := (A', a, b)$  der Ebene, wobei  $A' := A + 3 \cdot i + j$ ,  $a := \frac{1}{2} \cdot i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot j$  und  $b := -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i + \frac{1}{2} \cdot j$ . Weiter sei bezüglich des Koordinatensystems  $\tilde{S}'$  eine Ellipse

$$E : \frac{1}{4} \cdot x'^2 + y'^2 = 1$$

gegeben. Berechnen Sie die beschreibende Gleichung für  $E$  bezüglich des Koordinatensystems  $S$ .

- A.9.4 Gegeben seien zwei Koordinatensysteme  $S := (A; i, j)$  und  $S' := (A', a, b)$  der Ebene, wobei  $A' := A + i - j$ ,  $a := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot j$  und  $b := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot j$ . Weiter sei bezüglich des Koordinatensystems  $\tilde{S}'$  eine Parabel

$$P : x'^2 - 2 \cdot y' = 0$$

gegeben. Berechnen Sie die beschreibende Gleichung für  $P$  bezüglich des Koordinatensystems  $S$ .

- A.9.5 Zeichnen (nicht skizzieren) Sie

- (a) die Ellipse  $E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;
- (b) die Hyperbel  $H : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$  und ihre Asymptoten.

Außerdem gebe man die Parametergleichungen der Ellipse und Hyperbel an.

- A.9.6 Für die durch  $F : \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - z^2 = 1$  gegebene Fläche 2. Ordnung bestimme man

- (a) ihre Schnittpunkte mit der Geraden  $g : X = (1; 4, 9, 2)^T + t \cdot (0; 2, 6, 1)^T$ ,
- (b) ihre Schnittkurve  $S$  mit der Ebene  $E : y + 3z - 3 = 0$ ,
- (c) die Gestalt von  $S$  und das singuläre Gebilde von  $S$ .

- A.9.7 Durch  $x^2 + y^2 - z^2 = 49$  ist ein einschaliges Hyperboloid  $H$  gegeben und es seien  $P_1 := (1; 7, 0, 0)^T$  und  $P_2 := (1; 20, 15, 24)^T$ . Man berechne Geraden  $g, g', g'', g''' \subseteq H$ , für die

- (a)  $P_1 \in g$ ,  $P_1 \in g'$  und  $g \neq g'$ ,
- (b)  $P_1 \in g''$ ,  $P_2 \in g'''$  und  $g'' \cap g''' \neq \emptyset$

gilt. Außerdem zeige man, daß  $g$  und  $g'''$  windschief zueinander sind.

- A.9.8 Man berechne für die folgende Hyperfläche 2. Ordnung  $T_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) des  $R_4$  eine Normalform und gebe die zugehörigen Koordinatentransformationen an.

- (a)  $2(x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_2 - 2x_3 - 3x_4) + 5 = 0$ ,
- (b)  $4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 3x_4^2 + 14x_4 + 11 = 0$ .

- A.9.9 Man beweise Satz 9.3.5.

## 18.8 Aufgaben zum Kapitel 10

A.10.1 Sei  $K$  ein Körper und  $K^{m \times 1}$  wie im Kapitel 4 definiert. Welche der folgenden Abbildungen  $f_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) sind linear?

- (a)  $f_1 : K^{n \times 1} \rightarrow K^{2 \times 1}, (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_1, x_2 - x_3)^T,$
- (b)  $f_2 : K^{n \times 1} \rightarrow K, (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n,$
- (c)  $f_3 : K^{n \times 1} \rightarrow K, (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto x_1^2 + x_2.$

A.10.2 Man beweise, daß  $f : K \rightarrow K, x \mapsto x^2$  ( $K$  Körper) genau dann linear ist, wenn  $|K| = 2$  gilt.

A.10.3 Sei  $V$  ein eindimensionaler VR über dem Körper  $K$ . Man beweise, daß eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  genau dann linear ist, wenn es ein gewisses Element  $c \in K$  gibt, so daß  $f(\mathfrak{x}) = c \cdot \mathfrak{x}$  für alle  $\mathfrak{x} \in V$  gilt.

A.10.4 Sei  $V$  ein 4-dimensionaler VR über dem Körper  $\mathbb{R}$  mit der Basis  $B := (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4)$ . Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  besitze außerdem bezüglich  $B$  die Abbildungsmatrix

$$\mathfrak{A}_f(B, B) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Abbildungsmatrizen von  $f$  bezüglich der Basis

- (a)  $(\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1)$
- (b)  $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_4).$

A.10.5 Es sei  $_K V := \mathbb{R}\mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Durch

$$f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} t-2 & 2 & -1 \\ 2 & t & 2 \\ 2t & 2t+2 & t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung von  $V$  in  $V$  definiert. Man bestimme  $\text{rg } f$  in Abhängigkeit von  $t$  und  $f(V)$  für diejenigen Zahlen  $t$ , für die  $\text{rg } f \leq 2$  gilt.

A.10.6 Es sei  $U$  ein  $t$ -dimensionaler UVR des  $n$ -dimensionalen VRs  $V$  über  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  mit Skalarprodukt  $\varphi(t, n \in \mathbb{N})$ . Wie im Abschnitt 6.5 vereinbart, sei die orthogonale Projektion von  $\mathfrak{x} \in V$  in  $U$  mit  $\mathfrak{x}_U$  bezeichnet. Man beweise, daß die Abbildung

$$f : V \rightarrow V, \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x}_U$$

eine lineare Abbildung ist.

Speziell für  $_K V := \mathbb{R}\mathbb{R}^{4 \times 1}$  mit dem Standardskalarprodukt und  $U := \{(1, 1, 1, 1)^T\}$  berechne man außerdem die Matrix  $\mathfrak{A}_f$  mit der Eigenschaft  $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}_f \cdot \mathfrak{x}$  für alle  $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ .

A.10.7 Im Vektorraum  $\mathfrak{P}_2$  aller Polynome, die höchstens den Grad 2 haben und die auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert sind, über dem Körper  $K = \mathbb{R}$ , sei durch

$$\forall s, t \in \mathfrak{P}_2 : \varphi(s, t) := \int_{-1}^1 s(x) \cdot t(x) dx$$

ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert. Außerdem sei

$$f : \mathfrak{P}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_2, ax^2 + bx + c \mapsto 2ax + b$$

der sogenannte *Ableitungsoperator*, der eine lineare Abbildung ist. Man bestimme die Matrizen  $\mathfrak{A}_f$  und  $\mathfrak{A}_{f^*}$  (siehe Satz 10.1.4) bezüglich der Basis

- (a)  $B := (1, x, x^2)$ ,  
 (b)  $B' := (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, x^2 - 1, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x)$ .

A.10.8 Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\kappa V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\varphi$  und  $f, g$  lineare Abbildungen von  $V$  in  $V$ , für die die adjungierten Abbildungen  $f^*, g^*, (f+g)^*$  und  $(f \square g)^*$  existieren (siehe Abschnitt 10.2). Man beweise:

- (a)  $(f+g)^* = f^* + g^*$ ,  
 (b)  $\forall \lambda \in K : (\lambda \cdot f)^* = \bar{\lambda} \cdot f^*$ ,  
 (c)  $(f \square g)^* = g^* \square f^*$ .

A.10.9 Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $\kappa V$  ein Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt  $\varphi$  definiert ist. Man beweise: Ist ein UVR  $U \subseteq V$  invariant bezüglich der linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$ , so ist das orthogonale Komplement  $U^\perp$  von  $U$  invariant bezüglich der zu  $f$  adjungierten Abbildung  $f^*$ .

A.10.10 Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein euklidischer  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt  $\varphi$ . Man beweise: Haben zwei Vektoren  $\mathfrak{y}$  und  $\mathfrak{z}$  aus  $V$  gleiche Länge, so gibt es eine orthogonale Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mit  $f(\mathfrak{y}) = \mathfrak{z}$ .

A.10.11 Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein euklidischer  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt  $\varphi$  und der Norm  $\|\cdot\|_\varphi$ . Außerdem sei  $f$  eine lineare Abbildung von  $V$  in  $V$ . Man beweise, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $f$  ist eine orthogonale Abbildung.  
 (b)  $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \varphi(f(\mathfrak{x}), f(\mathfrak{y}))$ .  
 (c) Es existiert eine Basis  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$  von  $V$  mit  $\varphi(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j) = \varphi(f(\mathfrak{b}_i), f(\mathfrak{b}_j))$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

A.10.12 Es sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\kappa V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\varphi$  und  $f : V \rightarrow V$  eine normale Abbildung (siehe Abschnitt 10.3). Nach Definition existiert dann zu  $f$  die adjungierte Abbildung  $f^*$  (siehe Abschnitt 10.2). Man zeige, daß  $\|f(\mathfrak{x})\|_\varphi = \|f^*(\mathfrak{x})\|_\varphi$  für beliebige  $\mathfrak{x} \in V$  gilt.

A.10.13 Sei  $V$  ein  $2k+1$ -dimensionaler VR über dem Körper  $\mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Man beweise, daß jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mindestens einen Eigenwert besitzt.

A.10.14 Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Körper  $K$  und  $f : V \rightarrow W$  eine injektive lineare Abbildung. Außerdem seien  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n \in V$  linear unabhängig. Man beweise, daß dann auch die Vektoren  $f(\mathfrak{b}_1), \dots, f(\mathfrak{b}_n) \in W$  linear unabhängig sind.

## 18.9 Aufgaben zum Kapitel 11

A.11.1 Sei  $R_n$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Raum mit dem zugehörigen VR  $V_n$  über dem Körper  $K$ . Man zeige, daß die nachfolgend definierten Abbildungen  $f_T$  („Translation“) und  $f_P$  („Parallelprojektion“) affine Abbildungen von  $R_n$  in  $R_n$  sind.

- (a)  $f_T : R_n \rightarrow R_n$  sei eine Abbildung mit der Eigenschaft:  $f_T(P) - P = f_T(Q) - Q$  für alle  $P, Q \in R_n$ .  
 (b) Auf  $V_n$  sei ein Skalarprodukt definiert. Zwecks Definition von  $f_P$  seien ein  $Q \in R$  und ein UVR  $U$  von  $V_n$  fest gewählt. Nach Definition eines affinen Raumes existiert zu jedem  $X \in R_n$  ein  $\mathfrak{x} \in V_n$  mit  $X = Q + \mathfrak{x}$ . Da  $V_n$  endlichdimensional ist, läßt sich  $\mathfrak{x}$  auf eindeutige Weise als Linearkombination zweier Vektoren  $\mathfrak{x}_U \in U$  und  $\mathfrak{x}_{U^\perp} \in U^\perp$  mittels  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_U + \mathfrak{x}_{U^\perp}$  darstellen (siehe Satz 6.5.12). Die Abbildung  $f_P$  sei dann durch  $f_P(X) := Q + \mathfrak{x}_U$  definiert.

- A.11.2 Man beweise, daß eine affine Abbildung Parallelogramme in Parallelogramme überführt.
- A.11.3 Seien  $f : R \rightarrow R'$  eine affine Abbildung,  $g \subseteq R$  und  $h \subseteq R$  Geraden und  $P \in R$ . Man beweise:
- Die Menge  $f(g) := \{f(X) \mid X \in g\}$  ist eine Gerade oder besteht nur aus einem Punkt.
  - Sind  $g$  und  $h$  parallel sowie  $|f(g)| = 1$ , dann ist auch  $|f(h)| = 1$ .
- A.11.4 Sei  $f : R_n \rightarrow R_n$  eine affine Abbildung. Wie viele Punkte  $P_i$  ( $i \in I$ ) mit welchen Eigenschaften benötigt man mindestens, damit  $f$  durch die Festlegung  $f(P_i) := Q_i$  eindeutig bestimmt ist?
- A.11.5 Seien  $R$  ein affiner Raum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$  und  $f$  eine affine Abbildung von  $R$  in  $R$ . Man beweise, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- $f$  ist eine Translation, d.h., für beliebige  $P, Q \in R$  gilt  $f(P) - P = f(Q) - Q$ .
  - Für alle Punkte  $P, Q \in R$  gilt  $\overset{\rightarrow}{f}(Q) - \overset{\rightarrow}{f}(P) = Q - P$ .
  - $\overset{\rightarrow}{f} = \text{id}_V$ .
- A.11.6 Ein Punkt  $P$  eines affinen Raumes  $R$  heißt *Fixpunkt* einer affinen Abbildung  $f : R \rightarrow R$ , wenn  $f(P) = P$  ist.
- Man beweise: Bei fixiertem  $P \in R_n$  kann jede Affinität  $f \in A_1$  in der Form  $f = g \square h$  dargestellt werden, wobei  $h \in A_1$  eine Translation und  $g \in A_1$  den Fixpunkt  $P$  besitzt.
  - Sind  $g$  und  $h$  aus (a) bei gegebenen  $f$  und  $P$  eindeutig bestimmt?
- A.11.7 Sei  $f : R_n \rightarrow R_n$  eine affine Abbildung ( $n \in \mathbb{N}$ ). Man beweise:
- Falls  $f$  genau einen Fixpunkt hat, dann ist 1 kein Eigenwert von  $\overset{\rightarrow}{f}$ .
  - Besitzt  $f$  mindestens zwei verschiedene Fixpunkte, so ist 1 ein Eigenwert von  $\overset{\rightarrow}{f}$ .
- A.11.8 Ist die Dimension von Unterräumen eine Invariante von
- surjektiven,
  - injektiven
- affinen Abbildungen?
- A.11.9 Die Anschauungsebene  $\mathfrak{R}_2$  mit dem zugehörigen Vektorraum  $\overrightarrow{V}_2$  ist ein affiner Raum. Auf  $\overrightarrow{V}_2$  sei das Skalarprodukt  $\cdot$  aus Abschnitt 6.1 definiert. Man beweise, daß für eine beliebige affine Abbildung  $f : \mathfrak{R}_2 \rightarrow \mathfrak{R}_2$  und beliebige linear unabhängige Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \overrightarrow{V}_2$  gilt:
- $$\begin{aligned} f \text{ ist eine Kongruenz (Bewegung) des } \mathfrak{R}_2 &\iff \\ |\mathfrak{a}| = |\overset{\rightarrow}{f}(\mathfrak{a})| \wedge |\mathfrak{b}| = |\overset{\rightarrow}{f}(\mathfrak{b})| \wedge \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &= \overset{\rightarrow}{f}(\mathfrak{a}) \cdot \overset{\rightarrow}{f}(\mathfrak{b}). \end{aligned}$$
- A.11.10 Sei als affiner Raum  $R$  die Anschauungsebene  $\mathfrak{R}_2$  gewählt. Man beweise die Kongruenzsätze für Dreiecke, d.h., man beweise, daß zwei Dreiecke aus  $\mathfrak{R}_2$  genau dann durch eine Kongruenz (siehe Satz 11.2.3) aufeinander abgebildet werden können, wenn sie in folgenden Stücken übereinstimmen:
- den Längen aller Seiten,
  - den Längen zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
  - der Länge einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln oder
  - den Längen zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.

---

## Übungsaufgaben zum Teil III

### 19.1 Aufgaben zum Kapitel 12

A.12.1 Man überführe die rationalen Zahlen

- (a)  $-55$ ,
- (b)  $4520$ ,
- (c)  $\frac{8}{7}$

mit der Einleseabbildung  $\hat{\gamma}$  in die Kodierung des Maschinenzahlbereichs  $\mathbb{M}(2, 9, 3)$ .

A.12.2 Wie sehen die Zahlen

- (a)  $+0.110100001(+011)$ ,
- (b)  $-0.100110011(+101)$ ,
- (c)  $-0.100000001(-001)$

aus  $\mathbb{M}(2, 9, 3)$  in Dezimalschreibweise aus?

A.12.3 Seien  $a := 0.4872 \cdot 10^2$ ,  $b := 0.4671 \cdot 10^{-2}$  und  $c := 0.5505 \cdot 10^{-2}$ . Man zeige, daß bei 4-stelliger dezimaler Rechnung (mit Runden) nicht mehr  $a + (b + c) = (a + b) + c$  gilt.

A.12.4 Welcher der folgenden (algebraisch äquivalenten) Ausdrücke

$$A_1 := (y + z) - 2 \cdot x, \quad A_2 := (y - x) + (z - x)$$

ist beim Rechnen mit Maschinenzahlen für  $x \approx y \approx z$  günstiger? Man erläutere die Beantwortung der Frage durch Beispiele aus  $(\mathbb{M}(10, 3, 1); \hat{\gamma})$  und  $(\mathbb{M}(2, 4, 2); \hat{\gamma})$ .

A.12.5 Man berechne das Intervall, in dem

$$z := \frac{x + y}{u \cdot v}$$

liegt, falls  $x \in [1.45, 1.55]$ ,  $y \in [-0.005, 0.005]$ ,  $u \in [0.95, 1.05]$  und  $v \in [-2.05, -1.95]$ .

A.12.6 Man begründe, daß für die Intervalladdition und Intervallmultiplikation das Distributivgesetz nur in der abgeschwächten Form der sogenannten Subdistributivität

$$[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) \subseteq [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f] \quad (19.1)$$

gültig ist. Anhand eines Beispiels zeige man insbesondere „ $\subseteq$ “ in (19.1).

## 19.2 Aufgaben zum Kapitel 13

A.13.1 Man bestimme für die Funktion  $f \in C[a, b]$  mit

- (a)  $f(x) := x^3 + x^2 - 1$ ,  $[a, b] = [0, \frac{1}{4}]$ ,
- (b)  $f(x) := 1 + \frac{1}{7} \cdot e^x + \frac{1}{9} \cdot x^3$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ ,
- (c)  $f(x) := \cos x - \frac{1}{x^2} + 1$ ,  $[a, b] = [\frac{\pi}{2}, \pi]$

ein möglichst kleines  $k$  mit  $0 \leq k < 1$  und  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$  für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$ .

A.13.2 Sei  $g(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ . Man zeige, daß  $g(x)$  für  $x \in [1.4, 1.5]$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und berechne den Fixpunkt von  $g$

- (a) direkt,
- (b) mit Hilfe des Iterationsverfahrens aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

A.13.3 Sei

$$f(x) := \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot \frac{1}{x} + 1.$$

Eine Lösung  $x_*$  der Gleichung  $f(x) = x$  aus dem Intervall  $[1.8, 2]$  läßt sich mit Hilfe des Iterationsverfahrens aus dem Banachschen Fixpunktsatz berechnen, wobei sich die Lipschitz-Konstante  $k$  grob mit  $k \leq 0.7$  abschätzen läßt. Wie viele Iterationsschritte  $n$  (beginnend mit  $x_0 = 2$ ) hat man mindestens zur näherungsweisen Berechnung von  $x_*$  auszuführen, damit die  $n$ -te Näherung  $x_n$  für  $x_*$  der Abschätzung  $\|x_n - x_*\| \leq 10^{-4}$  genügt?

A.13.4 Die Lösung  $x_*$  der Gleichung

$$f(x) := \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + 0.7 = x$$

aus dem Intervall  $[0.9; 1.1]$  läßt sich mit Hilfe des Iterationsverfahrens aus dem Banachschen Fixpunktsatz berechnen. Man bestimme eine Abschätzung  $k' < 1$  für die Konstante  $k$  aus der Lipschitzbedingung. Wie viele Iterationsschritte  $n$  (beginnend mit  $x_0 := 1$ ) hat man zu berechnen, damit für die  $n$ -te Näherung  $x_n$  der Lösung  $x_*$  die Abschätzung  $\|x_n - x_*\| \leq 10^{-4}$  gilt? Näherungen für  $x_*$  lassen sich auch mit Hilfe des Newton-Verfahrens berechnen. Man gebe dieses Verfahren an!

A.13.5 Seien  $A := [0, 3] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \longrightarrow A$ ,  $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x+2} + 2$ .  $f$  besitzt den Fixpunkt  $\sqrt{5}$ .

- (a) Zeigen Sie, daß  $f(x)$  für  $x \in [0, 3]$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
- (b) Geben Sie ein Iterationsverfahren zur Berechnung von  $\sqrt{5}$  an. Wie viele Iterationsschritte hat man bei diesem Verfahren auszuführen, um  $\sqrt{5}$  auf vier Stellen nach dem Punkt genau zu berechnen?

A.13.6 Man skizziere den Graphen der Funktion  $f(x) := x^3 - 2x^2 - 26x - 14$  für  $x \in [-4, 7]$  und berechne mit Hilfe des Newton-Verfahrens die betragsmäßig größte Nullstelle von  $g$  auf drei Stellen nach dem Punkt genau.

A.13.7 Man berechne Nullstellenschranken für das Polynom

$$p_4(x) := \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3x^2 - 4x + 1$$

und bestimme mit Hilfe des Bisektionsverfahrens Intervalle, in denen sich jeweils genau eine der Nullstellen von  $p_4$  befindet.

Wie lassen sich die Nullstellen mit Hilfe des Newton-Verfahrens oder der Regula falsi berechnen?

- A.13.8 Unter geeigneten Voraussetzungen für die Funktion  $g$  (wie z.B. Differenzierbarkeit) stelle man Konvergenzkriterien für die Regula falsi, 1. Form auf und beweise sie.

- A.13.9 Sei

$$p_6(x) := x^6 - 4x^4 - 7x^2 + 3x - 1.$$

Mit Hilfe des zweizeiligen Horner-Schemas berechne man

- (a) ein Polynom  $q(x)$  und gewisse  $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$  mit

$$p_6(x) := (x^2 + 4x + 20) \cdot q(x) + c_1 \cdot x + c_0;$$

- (b)  $p_6(2 - 4 \cdot i), p_6(-1 + 3 \cdot i)$ .

## 19.3 Aufgaben zum Kapitel 14

- A.14.1 Für die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

berechne man  $\|\mathfrak{A}\|_1, \|\mathfrak{A}\|_\infty$  und  $\|\mathfrak{A}\|_2$ .

- A.14.2 Für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

berechne man  $\|\mathfrak{A}\|_1$  und  $\|\mathfrak{A}\|_\infty$  exakt sowie  $\|\mathfrak{A}\|_2$  näherungsweise.

*Hinweis:* Zur näherungsweisen Berechnung von  $\|\mathfrak{A}\|_2$  siehe A.14.3 und A.14.4.

- A.14.3 Man beweise die folgende Abschätzung für  $\|\mathfrak{A}\|_2 = \sqrt{\tau}$ , wobei  $\tau$  der größte Eigenwert der Matrix  $\mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A}$  ist und  $\mathfrak{A} := (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (siehe Satz 14.2.5).

$$\|\mathfrak{A}\|_2 \leq \sqrt{\mathfrak{a}_1^T \cdot \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2^T \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + \mathfrak{a}_n^T \cdot \mathfrak{a}_n}$$

*Hinweis:* Siehe Satz 8.2.8, (b).

- A.14.4 Für eine Matrix  $\mathfrak{B} := (b_{ij})_{n,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  seien die folgenden Mengen definiert:

$$K_i := \{x \in \mathbb{C} \mid |b_{ii} - x| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |b_{ij}|\}$$

und

$$K'_i := \{x \in \mathbb{C} \mid |b_{ii} - x| \leq \sum_{i=1, i \neq j}^n |b_{ij}|\}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Man beweise, daß dann alle Eigenwerte von  $\mathfrak{B}$  zur Menge

$$(K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n) \cap (K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_n)$$

gehören.

A.14.5 Man löse das LGS

$$\begin{aligned} 0.89x - 0.87y &= 3.4 \\ -0.96x + 0.97y &= -3.6 \end{aligned}$$

durch eine

- (a) 2-stellige,
- (b) 10-stellige

Rechnung und bestimme die Kondition dieses LGS.

A.14.6 Seien

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} -0.025 & 0.075 \\ 0.05 & -0.125 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} := \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.075 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{b}} := \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.07 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{A} \cdot \tilde{\mathfrak{x}} = \tilde{\mathfrak{b}}$ . Man berechne eine Abschätzung für den relativen Fehler

$$\frac{\|\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}}\|_\infty}{\|\mathfrak{x}\|_\infty}.$$

Wie groß ist die Kondition des LGS  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ ?

A.14.7 Für die nachfolgenden Aufgaben sei als LGS

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ -x + 4y &= 10. \end{aligned}$$

gewählt.

(a) Man berechne bzw. gebe an:

- (α) die Kondition (bez. der Maximumnorm) des LGS;
- (β) das Gauß-Seidel-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung  $\mathfrak{x}_*$  des LGS sowie die Näherung  $\mathfrak{x}_1$ , wobei  $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$  gewählt sei;
- (γ) den relativen Fehler von  $\mathfrak{x}_1$  bez. Maximumnorm (*Hinweis*: Die exakte Lösung des LGS ist  $x = 2, y = 3$ );

(b) Man begründe die Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens.

(c) Wie viele Iterationsschritte sind beim Gauß-Seidel-Verfahren erforderlich, damit für die Näherung  $\mathfrak{x}_n$  für  $\mathfrak{x}_*$  die Abschätzung  $\|\mathfrak{x}_* - \mathfrak{x}_n\| < 10^{-4}$  gilt?

(d) Man fertige eine Skizze zum Verfahren „Projektion auf Hyperebenen“ ( $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$ ) für das obige LGS an.

A.14.8 Gegeben sei das folgende LGS

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 &= 9. \end{aligned}$$

Man gebe für dieses LGS das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren an und berechne jeweils  $\mathfrak{x}_1$  und  $\mathfrak{x}_2$  auf 5 Stellen nach dem Punkt genau, indem man mit  $\mathfrak{x}_0 := \mathfrak{o}$  beginnt.

Man begründe die Konvergenz dieser Verfahren.

Man gebe für beide Verfahren ein (möglichst kleines)  $i$  mit  $\|\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_*\|_\infty < 10^{-6}$  an.

## A.14.9 Das LGS

$$\begin{array}{rcl} \alpha \cdot x_1 + x_2 - 7x_3 & = & 2 \\ x_1 - 13x_2 - 5x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 13x_3 & = & 7 \end{array}$$

soll näherungsweise gelöst werden. Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  konvergiert das

- (a) Jacobi-Verfahren ,
- (b) Gauß-Seidel-Verfahren
- bezüglich der Maximumnrm?

A.14.10 Man berechne mit Hilfe der Projektion auf Hyperebenen drei Näherungen  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$  für die Lösung  $\mathfrak{x} (= (1, 1, 1)^T)$  des LGS

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ x_1 - 2x_2 & = & -1 \\ x_2 + 3x_3 & = & 4, \end{array}$$

wobei  $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$  gewählt sei.

## A.14.11 Man berechne mit Hilfe des Gradientenverfahrens die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{array}{rcl} 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 & = & 2 \end{array}$$

## A.14.12 Man berechne mit Hilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

## 19.4 Aufgaben zum Kapitel 15

## A.15.1 Ist das Interpolationsproblem mit

$$n := 2, [a, b] := [0, \frac{\pi}{2}], y_1(x) := \sin x, y_2(x) := \cos x$$

für beliebige Referenzen aus dem Intervall  $[a, b]$  und einer beliebigen Funktion  $f \in C[a, b]$  lösbar?

A.15.2 Seien  $x_i := 2 \cdot i$  für  $i = 0, 1, 2, 3$  und

$$f(0) = 7, f(2) = 2, f(4) = -6, f(6) = 0.$$

Geben Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom  $p_3(x)$  mit  $p_3(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  an.

A.15.3 Seien  $L_i(x)$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  die Lagrangekeoeffizienten zu einer gegebenen Referenz  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Man beweise  $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ .A.15.4 Seien  $x_i := i$  für  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  und  $f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 13, f(3) = 146, f(4) = 723, f(5) = 2404$ . Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom  $g(x)$  mit  $\text{Grad}(g) \leq 5$  und  $g(x_i) = f(x_i)$  für alle  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- A.15.5 Mit Hilfe des Neville-Algorithmus berechne man den Wert des Polynoms  $p_5(x)$  aus A.15.4 für  $x = 6$ .
- A.15.6 Interpolationspolynome lassen sich auf folgende Weise benutzen, um Integrale näherungsweise zu berechnen: Zu gegebener Referenz

$$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

und den Funktionswerten

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

lässt sich das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$g(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x),$$

bestimmen. Integriert man anstelle von  $f$  die Funktion  $g$ , so erhält man

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \int_a^b L_i(x) dx. \quad (19.2)$$

Setzt man  $h := \frac{b-a}{n}$  und  $x_i := a + i \cdot h$ , so folgen aus (19.2) die sogenannten **Newton-Cotes-Formeln** zur numerischen Integration von  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(a + i \cdot h) \cdot \int_a^b L_i(x) dx \quad (19.3)$$

mit

$$L_i(x) := \frac{(x-a)(x-(a+h))\dots(x-(a+(i-1)h))(x-(a+(i+1)h))\dots(x-b)}{(ih)((i-1)h)\dots(h)(-h))\dots((i-n)h)}$$

Man verifiziere die folgenden drei Spezialfälle von (19.3):

$n$	$h$	Newton-Cotes-Formel	Bezeichnung
1	$b - a$	$\frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b))$	Trapezregel
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{h}{3} \cdot (f(a) + 4f(a+h) + f(b))$	Simpson-Regel
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3h}{8} \cdot (f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b))$	$\frac{3}{8}$ -Regel

## 19.5 Aufgaben zum Kapitel 16

- A.16.1 Ein Computer-Paßwort bestehe aus  $n$  Zeichen, die aus einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  gewählt sind, wobei  $m \geq n$  und  $\{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\} \subseteq M$ . Man bestimme die Anzahl der möglichen Paßwörter  $p := p_1p_2\dots p_n$  mit  $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq M$ , die genau eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllen.
- Die Zeichen des Paßwortes  $p$  sind paarweise verschieden.
  - Das Paßwort  $p$  enthält nur die Zeichen  $a, b$  und  $4$ , wobei  $a$  genau  $5$ mal,  $b$  genau  $10$ mal und  $4$  genau  $(n - 15)$ -mal vorkommt.
  - Die Zeichen von  $p$  sind paarweise verschieden und nur die ersten beiden Zeichen von  $p$  sind aus der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
  - Es gilt  $p = p_np_{n-1}p_{n-2}\dots p_2p_1$ , d.h.,  $p$  ist ein sogenanntes *Palindrom*.
  - An keiner Stelle steht im Paßwort  $p$  das Zeichen  $3$ .
  - An genau einer Stelle steht im Paßwort  $p$  das Zeichen  $3$ .
  - An mindestens zwei Stellen steht im Paßwort  $p$  das Zeichen  $3$ .
- A.16.2 Wie viele Permutationen können aus den Buchstaben  $a, b, b, c, d, e, f, f, g, g, g$  gebildet werden? Wie lautet die 2011te Permutation bei einer lexikographischen Anordnung dieser Permutationen?
- A.16.3 Ein Unternehmen hat 15 Mitarbeiter, die in den Abteilungen  $A, B$  oder  $C$  arbeiten, wobei 4 Personen zur Abteilung  $A$ , 5 Personen zur Abteilung  $B$  und 6 Personen zur Abteilung  $C$  gehören. Zum Erledigen eines Auftrags soll ein Team aus 9 Personen zusammengestellt werden. Man bestimme die Anzahl der Möglichkeiten zur Bildung dieses Teams, wenn jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.
- Es ist egal aus welchen Abteilungen die Mitglieder des Teams kommen.
  - Aus jeder Abteilung gehören genau 3 Personen zum Team.
  - Aus der Abteilung  $A$  gehören genau 2 Personen und aus Abteilung  $B$  genau 3 Personen zum Team.
  - Keine Person aus Abteilung  $A$  gehört zum Team.
  - Genau eine Person aus Abteilung  $A$  gehört zum Team.
  - Mindestens zwei Personen aus Abteilung  $A$  gehören zum Team.
  - Das Team besteht nur aus Mitgliedern von genau zwei Abteilungen.
  - Aus jeder Abteilung gehört mindestens ein Mitglied zum Team.
- A.16.4 Es seien  $k, m, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq k \leq n$ . Man beweise die folgenden Eigenschaften der Binomialkoeffizienten unter Verwendung der Eigenschaft  $C_n^k = \binom{n}{k}$ :
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,
  - $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$ ,
  - $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,
  - $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ ,
  - $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ ,
  - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

A.16.5 Für beliebige  $m, n \in \mathbb{N}$  seien

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m \mid x_1 + x_2 + \dots + x_m = n\}, \\ B_{m,n} &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m \mid x_1 + x_2 + \dots + x_m = n\}. \end{aligned}$$

Man beweise

- (a)  $|A_{m,n}| = |B_{m,m+n}|$ ,
- (b)  $|B_{m,n}| = \binom{n-1}{m-1}$ ,
- (c)  $|A_{m,n}| = \binom{m+n-1}{m-1}$ .

A.16.6 Mit Hilfe der Inklusion-Exklusion-Formel bestimme man die Anzahl aller

$$n \in A := \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 30\},$$

die teilerfremd zu 30 sind.

A.16.7 Unter Verwendung der Siebformel bestimme man die Mächtigkeit der Menge

$$P := \{x \in \mathbb{P} \mid x \leq 100\}.$$

*Hinweis:* Es sei

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\}, \\ A_t &:= \{x \in A \mid t \text{ ist Teiler von } x\}, \quad t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Außerdem sei  $\lfloor x \rfloor$  das *größte Ganze von  $x \in \mathbb{R}$* , d.h., mit  $\lfloor x \rfloor$  wird die größte ganze Zahl  $z$  bezeichnet, für die  $z \leq x < z+1$  gilt.

Man überlege sich zunächst, daß

$$|P| = |A \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)| + 4 - 1,$$

$|A_t| = \lfloor \frac{100}{t} \rfloor$  und  $A_m \cap A_n = A_{m \cdot n}$  gilt, falls  $m$  und  $n$  teilerfremd sind.

A.16.8 Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden homogenen LRG

$$\forall n \geq 4 : f(n) + 6 \cdot f(n-1) + 12 \cdot f(n-2) + 8 \cdot f(n-3) = 0$$

A.16.9 Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden homogenen LRG:

$$\forall n \geq 5 : f(n) - 3 \cdot f(n-1) - 6 \cdot f(n-2) - 12 \cdot f(n-3) - 40 \cdot f(n-4) = 0$$

A.16.10 Man verifiziere, daß im Fall

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \text{ und } 2 + \alpha_1 \neq 0$$

die Abbildung  $f_s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_s(n) := \frac{\beta}{2 + \alpha_1} \cdot n$$

eine spezielle Lösung der LRG mit konstanten Koeffizienten

$$\forall n \geq 3 : f(n) + \alpha_1 \cdot f(n-1) + \alpha_2 \cdot f(n-2) = \beta$$

ist.

- A.16.11 Sei  $f(n)$  die Anzahl aller  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ , in denen keine zwei aufeinander folgende Nullen vorkommen. Bestimmen Sie
- (a)  $f(1)$  und  $f(2)$ ,
  - (b) eine LRG für  $f(n)$  für beliebige  $n \geq 3$ ,
  - (c) die Lösung der LRG aus (b), die den Anfangsbedingungen aus (a) genügt.

A.16.12 Bestimmen Sie diejenige Lösung der LRG

$$\forall n \geq 3 : f(n) - 7 \cdot f(n-1) + 10 \cdot f(n-2) = 3^n,$$

die der Anfangsbedingung

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 16$$

genügt.

---

## Literaturverzeichnis

- [Aig 84] Aigner, M.: Graphentheorie. Teubner, Stuttgart 1984
- [Aig 2006] Aigner, M.: Diskrete Mathematik. 6. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006
- [Alt 2003] Alten, H.-W., Djafari-Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H., Wußing, H.: 4000 Jahre Algebra. Springer-Verlag 2003
- [Ale 67] Alexandroff, P. S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. DVW, Berlin 1967
- [Ass 59] Asser, G.: Einführung in die mathematische Logik. Bd. 1, 2, Teubner, Leipzig 1959, 1972
- [Ass 75] Asser, G.: Grundbegriffe der Mathematik, MfL 1, DVW, Berlin 1975
- [Bar-K 89] Baron, G., Kirschenhofer, P.: Einführung in die Mathematik für Informatiker, Bd. 1–3. Springer-Verlag, Wien New York 1989
- [Ber 89] Berendt, G.: Mathematische Grundlagen für Informatiker. Bd. 1, 2. BI Wissenschaftsverlag Mannheim Wien Zürich 1989, 1990
- [Ber 79] Berg, L.: Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen. DVW, Berlin 1979
- [Böh 81-1] Böhme, G.: Einstieg in die Mathematische Logik. C. Hanser Verlag, München Wien 1981
- [Böh 81-2] Böhme, G.: Algebra. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1981
- [Bos 73] Boseck, H.: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume. DVW, Berlin 1973
- [Bre-B 66] Brehmer, S., Belkner, H.: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra. DVW, Berlin 1966
- [Bri 83] Brieskorn, E.: Lineare Algebra und analytische Geometrie I und II. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden 1983, 1985
- [Bro-S 91] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Teubner Stuttgart, Leipzig und Verlag Nauka Moskau 1991
- [Bur-S 81] Burris, S., Sankappanavar, H. P.: A course in universal algebra. Springer-Verlag, New York 1981
- [Cig 95] Cigler, J.: Körper - Ringe - Gleichungen. Spektrum Akad. Verl., Heidelberg Berlin Oxford 1995

- [Dal-E 91] Dallmann, H., Elster, K.-H.: Einführung in die höhere Mathematik. G. Fischer Verlag, Jena 1991
- [Das 2005] Dassow, J.: Logik für Informatiker. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden 2005
- [Den-T 96] Denecke, K., Todorov, K.: Allgemeine Algebra und Anwendungen. Shaker Verlag, Aachen 1996
- [Deu 99] Deutsch, M.: Einführung in die Grundlagen der Mathematik (Theorie der Berechenbarkeit, Mathematische Logik, Mengenlehre). Universitätsdruckerei Bremen, Bremen 1999
- [Dör-P 88] Dörfler, W., Peschek, W.: Einführung in die Mathematik für Informatiker, Carl Hanser Verlag, München Wien 1988
- [Dor-M 84] Dorninger, D., Müller, W.: Allgemeine Algebra und Anwendungen. Teubner, Stuttgart 1984
- [Dre 75] Drews, K.-D.: Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben. DVW, Berlin 1975
- [Eis 80] Eisenreich, G.: Lineare Algebra und geometrische Geometrie. Akademie-Verlag, Berlin 1980
- [End 85] Endl, K.: Analytische Geometrie und lineare Algebra. VDI Verlag, Düsseldorf 1985
- [End 87] Endl, K.: Analytische Geometrie und lineare Algebra. Aufgaben und Lösungen. VDI Verlag, Düsseldorf 1987
- [Ern 82] Erné, M.: Einführung in die Ordnungstheorie. B.I., Mannheim, 1982
- [Enz 68] Kleine Enzyklopädie Mathematik (Herausgeber: W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich, H. Kästner). BI Leipzig 1968
- [Fet-F 85] Fetzer, A., Fränkel, H. (Hrsg.): Mathematik, Lehrbuch für Fachhochschulen, Band 1–3. VDI-Verlag, Düsseldorf 1985
- [Fis-G-H 84] Fischer, W., Gamst, J., Horneffer, K.: Skript zur Linearen Algebra I, II. Universität Bremen, Mathematik-Arbeitspapiere, 1983, 1984
- [Fla-P 75] Flachsmeyer, J., Prohaska, L.: Algebra. DVW, Berlin 1975
- [Gan 70] Gantmacher F. R.: Matrizenrechnung I. DVW, Berlin 1970
- [Gei 79] Geise, G.: Grundkurs lineare Algebra, BSB B.G. Teubner, Leipzig 1979
- [Gel 58] Gelfond, A. O.: Differenzenrechnung. DVW, Berlin 1958
- [Hei-R 73] Heinholt, J., Riedmüller, B.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Teil 2. Carl Hanser Verlag, München 1973
- [Hai 85] Hainzel, J.: Mathematik für Naturwissenschaftler. Teubner, Stuttgart 1985
- [Hei-W 92] Heinemann, B., Weihrauch, K.: Logik für Informatiker. 2. durchges. Aufl., B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 1992
- [Hup 90] Huppert, B.: Angewandte Lineare Algebra. Walter de Gruyter & Co., Berlin New York 1990
- [Ihr 93] Ihringer, Th.: Allgemeine Algebra. Teubner, Stuttgart 1993
- [Ihr 94] Ihringer, Th.: Diskrete Mathematik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen. Teubner, Stuttgart 1994
- [Ihr 2002] Ihringer, Th.: Diskrete Mathematik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen. Korr. u. erw. Auflage, Heldermann Verlag 2002
- [Ihr 2003] Ihringer, Th.: Allgemeine Algebra. Mit einem Anhang über Universal Coalgebra von H. P. Gumm. Heldermann Verlag 2003
- [Jab-L 80] Jablonski, S. W., Lupanow, O. B.: Diskrete Mathematik und Fragen der Kybernetik. Akademie-Verlag 1980

- [Jus 64] Juschkewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Teubner, Leipzig 1964
- [Kai-M-Z 81] Kaiser, H., Mlitz, R., Zeilinger, G.: Algebra für Informatiker. Springer-Verlag, Wien New York 1981
- [Kel 68] Keller, O.-H.: Analytische Geometrie und lineare Algebra. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Porting K.G., Leipzig 1968
- [Ker 85] Kerner, I. O.: Numerische Mathematik mit Kleinrechnern. Studienbücherei Mathematik für Lehrer, Band 19, DVW, Berlin 1985
- [Kie-M 74] Kiesewetter, H., Maeß, G.: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Akademie-Verlag, Berlin 1974
- [Kin 96] King, R. B.: Beyond the Quartic Equation. Birkhäuser, Boston Basel Berlin 1996
- [Kiy-S 91] Kiyek, K.-H., Schwarz, F.: Mathematik für Informatiker, Bd. 1, 2. Teubner, Stuttgart, 1991
- [Kli 84] Klingenberg, W.: Lineare Algebra und Geometrie. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984
- [Koc 57] Kochendörffer, R.: Determinanten und Matrizen. Teubner, Leipzig 1957
- [Koc 74] Kochendörffer, R.: Einführung in die Algebra. DVW, Berlin 1974
- [Kop 88] Koppelberg, S.: Handbook of Boolean Algebras I: General Theory of Boolean Algebras (ed. by J. D. Monk). North-Holland, Amsterdam 1988
- [Kuh 76] Kuhnert, F.: Vorlesung über lineare Algebra. DVW, Berlin 1976
- [Kow 65] Kowalsky, H.-J.: Lineare Algebra. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1965
- [Kur 64] Kuros, A.G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra. Teubner, Leipzig 1964
- [Lau 2004] Lau, D.: Algebra und Diskrete Mathematik 1 und 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2004
- [Lau 2007] Lau, D.: Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007
- [Lid-P 82] Lidl, R., Pilz, G.: Angewandte Algebra I, II. Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich 1982
- [Lug-W 57] Lugowski, H., Weinert, H.-J.: Grundzüge der Algebra I–III. Teubner, Leipzig 1957, 1958, 1960
- [Mae 84] Maeß, G.: Vorlesungen über numerische Mathematik I. Akademie-Verlag, Berlin 1984
- [Mae 88] Maeß, G.: Vorlesungen über numerische Mathematik II. Akademie-Verlag, Berlin 1988
- [Man-K 66] v. Mangoldt, H., Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1–3, S. Hirzel Verlag, Leipzig 1966, 1967, 1970
- [Man-S-V 75] Manteuffel, K., Seifart, E., Vettters, K.: Lineare Algebra. MINÖL Bd. 13, Teubner, Leipzig 1975
- [Mat-S 68] Mathiak, K., Stingl, P.: Gruppentheorie für Chemiker, Physiochemiker, Mineralogen. F. Vieweg & Sohn, DVW, Braunschweig Berlin 1968
- [Mat 1878] Matthiessen, L.: Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen. Teubner 1878
- [Mes 73] Meschkowsky, H.: Mathematiker-Lexikon. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich 1973

- [Nov 73] Novikov, P. S.: Grundzüge der mathematischen Logik. Vieweg, Braunschweig 1973
- [Obe-W 76] Oberschelp, W., Wille, D.: Mathematischer Einführungskurs für Informatiker. Teubner, Stuttgart 1976
- [Olv 99] Olver, P. J.: Classical Invariant Theory. London Mathematical Society Student Texts 44. Cambridge, 1999
- [Oni-S 77] Oniscik, A. L., Sulanke, R.: Algebra und Geometrie. DVW, Berlin 1977
- [Par 2000] Paraigis, B.: Lineare Algebra für Informatiker. I. Grundlagen, diskrete Mathematik; II. Lineare Algebra. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2000
- [Pic 53] Pickert, G.: Analytische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig 1953
- [Pla 2000] Plato, R.: Numerische Mathematik kompakt. Grundlagenwissen für Studium und Praxis. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig Wiesbaden 1996
- [Pös-K 79] Pöschel, R., Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. DVW, Berlin 1979
- [Pos-B-H 86] Posthoff, C., Bochmann, D., Haubold, K.: Diskrete Mathematik. Teubner, Leipzig 1986
- [Rau 96] Rautenberg, W.: Einführung in die Mathematische Logik. Ein Lehrbuch mit Berücksichtigung der Logikprogrammierung. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig Wiesbaden 1996, 2. verb. und erw. Aufl. Vieweg 2002
- [Red 53] Redei, L.: Algebra I. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig 1953
- [Rei 72] Reichardt, H.: Vorlesung über Vektor- und Tensorrechnung. DVW, Berlin 1972
- [Ric 78] Richter, M. M.: Logikkalküle. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 1978
- [Rom 86] Rommelfanger, H.: Differenzengleichungen. B.I.- Wissenschaftsverlag 1986
- [Rom 2006] Rommelfanger, H.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag, München 2006
- [Rut 76] Rutishauser, H.: Vorlesungen über Numerische Mathematik. Band 1 und 2. Birkhäuser Verlag, Basel 1976
- [Sac 70] Sachs, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen I. Teubner, Leipzig 1970
- [Sch 87] Schöning, U.: Logik für Informatiker. B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim Wien Zürich 1987. 5. Aufl. Spektrum Akademischer Verlag, Mannheim 2000
- [Scr-S 2003] Scriba, C., Schreiber, P.: 5000 Jahre Geometrie. Springer-Verlag 2001
- [Sie 73] Sieber, N., Sebastian, H.-J., Zeidler, G.: Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen. MINÖL Bd. 1. Teubner, Leipzig 1973
- [Sko 73] Skornjakow, L. A.: Elemente der Verbandstheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1973
- [Spi 82] Spiegel, M. R.: Endliche Differenzen und Differenzengleichungen. McGraw-Hill Book Company 1982

- [Ste 2001] Steger, A.: Diskrete Strukturen 1. Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001
- [Ste 76] Stetter, H. J.: Numerik für Informatiker. Computergerechte numerische Verfahren. R. Oldenbourg Verlag, München Wien 1976
- [Sto 99] Stoer, J.: Numerische Mathematik 1. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1999
- [Sto 2000] Stoer, J.: Numerische Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2000
- [Wae 50] van der Waerden, B. L.: Algebra I, II. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg 1950
- [Vie 72] Vierecke, H.: Einführung in die klassische Algebra. DVW, Berlin 1972
- [Wag-B 89] Wagner, K., Bodendiek, R.: Graphentheorie I–III, BI-Verlag, Mannheim 1989, 1990, 1993
- [Whi 64] Whitesitt, J. E.: Boolesche Algebren und ihre Anwendungen. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1964
- [Wil 76] Wilson, R. J.: Einführung in die Graphentheorie. Vanderhoeck und Ruprecht, Göttingen 1976
- [Wuß-A 89] Wußing, H., Arnold, W.: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk u. Wissen, Berlin 1989
- [Wuß 89] Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. DVW, Berlin 1989
- [Wuß 2008] Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik 1 und 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008 und 2009
- [Zur 65] Zumühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1965

---

## Glossar

$\wedge$	3	$\cap$	10
$\vee$	3	$\cup$	10
$\neg$	3	$\setminus$	10
$\Rightarrow$	3	$\overline{A}$	11
$\iff$	3	$\triangle$	11
$::=$	3	$\bigcap_{i \in I} A_i$	12
$::\iff$	3	$\bigcup_{i \in I} A_i$	12
$\exists$	3	$\bigcap_{A \in S}$	12
$\exists!$	3	$\bigcup_{A \in S}$	12
$\forall$	3	$\times$	14
$\in$	5	$=$	14
$\notin$	5	$\bigotimes_{i=1}^n A_i$	14
$\cdots   \cdots$	5	$\prod_{i=1}^n A_i$	14
$\mathbb{N}$	6	$A^i$	14
$\mathbb{N}_0$	6	$aRb$	15
$\mathbb{P}$	6	$\leq_R$	18
$\mathbb{Z}$	6	$<_R$	18
$\mathbb{Q}$	6	$R_0$	18
$\mathbb{R}$	6	$R_1$	18
$\mathbb{C}$	6	$[a]_R$	18
$[a, b]$	6	$[a]$	18
$[a, b)$	6	$R_Z$	20
$(a, b]$	6	$A/R$	21
$(a, b)$	6	$\equiv_R$	21
$X_0^+$	6	$ $	21
$X^+$	6	$\equiv_n$	21
$\emptyset$	9	$\equiv (\text{mod } n)$	21
$\subseteq$	9	$\mathbb{Z}_n$	21
$=$	9	$D(F)$	22
$\neq$	9	$W(F)$	22
$\subset$	9	$F^{-1}$	22
$\mathfrak{P}(A)$	9	$\square$	22
$2^{ M }$	9	$f : A \longrightarrow B$	23

$a \mapsto b$	23	$f_G$	52
$f _{A_0}$	24	$d(x)$	52
$\text{id}_A$	24	$V(G)$	53
$R_f$	25	$E(G)$	53
$\wedge_K$	26	$f_G$	53
$[a] + [b]$	27	$\circ$	60
$[a] \cdot [b]$	27	(A)	60
$A \sim B$	28	(K)	62
$ A $	30	$\circ$	62
$=$	30	$\langle H \rangle$	63
card $A$	30	$\approx$	65
$\aleph_0$	30	(E)	66
$\mathfrak{c}$	30	(I)	66
$\aleph_1$	30	(E')	66
$B^A$	33	(I')	66
$f^{(n)}$	35	$\circ$	66
$\text{non}(x)$	36	$e$	66
$\bar{x}$	36	$x^{-1}$	66
$\wedge$	36	$-x$	66
$\vee$	36	$S_n$	67
$+$	36	$P_n$	69
$\Rightarrow$	36	$a \sqcap b$	69
$\neg$	36	$D_n$	73
$\iff$	36	$a^n$	74
$=$	39	$a^0$	74
$x^\alpha$	40	$a^{-n}$	74
$\delta$	47	ord $G$	75
$Var$	47	$\langle U \rangle$	75
$\mathfrak{F}$	47	$x \circ U$	79
$\mathfrak{F}^{(n)}$	47	$U \circ x$	79
$\mathfrak{P}$	47	$ G : U $	80
$\mathfrak{J}$	47	ker $f$	81
$\exists$	47	$G/N$	81
$\forall$	47	(D)	83
$\mathfrak{J}_0$	47	$\mathbb{C}$	84
$T(Var)$	47	$i$	85
$FORM$	47	Re $z$	85
$Var(t)$	48	Im $z$	85
$Var(\varphi)$	48	$\overline{z}$	87
$fr(\varphi)$	48	$ z $	87
$bd(\varphi)$	48	$z^n$	90
$\mathfrak{A} := (A; (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$	49	$\wedge$	93
$\tilde{u}$	49	$\vee$	93
$=_{x_k}$	49	$\leq$	94
$v_{\mathfrak{A}, u}$	49	sup $A$	94
$\mathfrak{A}(\varphi)$	50	inf $A$	94
$\mathfrak{A} \models \varphi$	50	(D1)	96
$V(G)$	52	(D2)	96
$E(G)$	52		

(B1) .....	96	$\mathfrak{R}_2$ .....	159
(B2) .....	96	$\mathfrak{R}_3$ .....	159
(B3) .....	96	$\mathfrak{R}$ .....	159
$\mathbf{B}^\oplus$ .....	101	$\mathfrak{o}$ .....	159
$\mathbf{R}^\oplus$ .....	101	$ \alpha $ .....	160
LGS .....	107	$\alpha \parallel \beta$ .....	160
LGS (*) .....	108	$\alpha \uparrow\!\!\! \uparrow \beta$ .....	160
$I(s)$ .....	111	$\alpha \uparrow\!\!\! \downarrow \beta$ .....	160
$ a_{ij} _n$ .....	112	$\overrightarrow{V}_2$ .....	160
sign $s$ .....	113	$\overrightarrow{V}_3$ .....	160
$A_{ij}$ .....	118	$\overline{V}$ .....	160
$A_j$ .....	120	$\alpha + \beta$ .....	160
$V_n(x_1, \dots, x_n)$ .....	125	$\lambda \cdot \alpha$ .....	160
$(a_{ij})_{m,n}$ .....	126	UVR .....	161
$K^{m \times n}$ .....	126	$[M]$ .....	162
$\mathfrak{A}$ .....	127	$U_1 + U_2$ .....	163
$(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ .....	127	$\sum_{i=1}^n U_i$ .....	163
$\mathfrak{b}$ .....	127	$U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ .....	163
$\mathfrak{D}_{m,n}$ .....	129	$U_1 + \dots + U_n$ .....	163
$\mathfrak{E}_n$ .....	129	l.u. .....	164
$\mathfrak{D}_n$ .....	129	l.a. .....	165
det $\mathfrak{A}$ , $ \mathfrak{A} $ .....	129	dim $_K V$ .....	173
$ \mathfrak{A} $ .....	129	l.u. .....	175
$+$ .....	130	l.a. über $U$ .....	175
$\cdot$ .....	130	$\cong$ .....	179
$\mathfrak{D}_{n,s,t;\lambda}$ .....	133	$\mathfrak{a}/B$ .....	181
$\mathfrak{D}_{s,t;\lambda}$ .....	133	${}^0(\cdot)$ .....	181
$\mathfrak{A}^{-1}$ .....	137	$\mathfrak{M}(B, B')$ .....	183
$\mathfrak{A}^T$ .....	137	$P + \mathfrak{a}$ .....	183
$\lambda \cdot \mathfrak{A}$ .....	138	$Q - P$ .....	184
$\mathfrak{o}$ .....	138	$g(P, Q)$ .....	185
rg .....	139	$\varepsilon(P, Q, R)$ .....	185
LGS (**) .....	143	$\overrightarrow{PQ}$ .....	184
$L$ .....	154	$R_n$ .....	189
$L_0$ .....	154	$+$ .....	189
VR .....	157	(R1) .....	189
(V1) .....	157	(R2) .....	189
(V2) .....	157	(R3) .....	189
$+ \cdot$ .....	157	$Q - P$ .....	189
$a \cdot \mathfrak{a}$ .....	157	$\overrightarrow{PQ}$ .....	189
$_K V$ .....	157	$X/S$ .....	191
$K^{m \times n}$ .....	157	${}^1(\cdot)$ .....	191
$\mathfrak{o}$ .....	158	$\dot{P} + W$ .....	192
$-\mathfrak{x}$ .....	158	$E(P_1, \dots, P_{r+1})$ .....	196
$LK$ .....	158	l.u. .....	196
$\mathfrak{P}_n$ .....	158	$E^{(1)} + \dots + E^{(t)}$ .....	196
$f + g$ .....	158		
$c \cdot f$ .....	158		
$C[a, b]$ .....	159		

$\dim(P + W)$	197	$\text{Grad}(p_n)$	260
$E\ E'$	197	$D$	265
$\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$	199	$r(\lambda)$	270
$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$	200	$E_{\mathfrak{A}}(\lambda)$	271
$\mathfrak{i}$	200	$\mu_a$	278
$\mathfrak{j}$	200	$\mu_g$	278
$\mathfrak{k}$	200	$J_n(\lambda)$	283
$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$	200	$J_{n_j}^*(a_j, b_j)$	293
$\mathfrak{b}'$	203	$J_{2 \cdot n}(z, \overline{z})$	293
$\mathfrak{b}''$	203	$D(a, b)$	330
$\ell$	203	$f(V)$	331
$\varphi$	210	$\mathfrak{A}_f$	332
(S1)	210	$\mathfrak{A}_f(B_V, B_W)$	332
(S2)	211	$\text{rg } f$	333
(S3)	211	$\text{Ker } f$	334
$\mathfrak{A}_\varphi$	212	$\text{def } f$	335
$ \cdot ,  \mathfrak{a} $	218	$R_f$	335
$\ \mathfrak{x}\ $	218	$V/U$	336
(N1)	218	$f^*$	339
(N2)	218	$\mathfrak{A}^*$	340
(N3)	218	$\widehat{f}$	344
(N4)	218	$E_V$	348
$\ \mathfrak{a}\ _2$	219	$B_V$	349
$\ \mathfrak{a}\ _\infty$	219	$I_V$	349
$\ \mathfrak{a}\ _1$	219	$F_V$	349
$\ \mathfrak{a}\ _\varphi$	219	$\text{Inv } \mathbf{G}$	350
$\varrho(X, Y)$	220	$\overset{\rightarrow}{f}$	351
(M1)	220	$A_1$	355
(M2)	220	$A_2$	355
(M3)	220	$A_3$	355
(M4)	220	$\tilde{x}$	362
$\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$	221	$\Delta x$	362
$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$	221	$\Delta(x \circ y)$	363
ONV	223	$f_1(x) = O(f_2(x))$	364
$<\mathfrak{x}, \mathfrak{y}>$	226	$\mathbb{M}(p, l, m)$	366
$M \perp N$	228	$\widehat{\gamma}$	367
$M^\perp$	229	$\mathbb{R}_\infty$	367
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$	232	$\mathbb{R}_{min}$	367
$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$	237	$\widetilde{\gamma}$	367
$R_{or}$	238	$(\mathbb{M}(p, l, m); \gamma)$	368
$d(P, Q)$	241	$x \odot y$	368
$d(M, N)$	241	$x_*$	373
$\text{Sp}(P_0, \dots, P_k)$	244	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	375
$\mathfrak{E}_{n;r,s}(\alpha)$	249	$\ \mathfrak{x}\ _2$	394
EW	256	$\ \mathfrak{x}\ _\infty$	394
$L_{\mathfrak{A}}(\lambda)$	256	$\ \mathfrak{x}\ _1$	394
EV	256	$\ \mathfrak{A}\ $	394
$L_{\mathfrak{A}}^i(\lambda)$	256	$L_i(x)$	417
vEV	256		

$P_m$	422	$I_{m,n}$	431
$P_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}$	423	$S_{m,n}$	431
$V_m^k, W$	423	$\mathcal{F}$	432
$V_m^k$	424	LRG	432
$C_m^k$	425	$R_{n,k}(f)$	432
$C_m^{k,W}$	425	$\mathcal{L}_0$	435
$A_{m,n}$	431	$\mathcal{L}$	435

---

# Index

- Abbildung, 23
  - adjungierte, 339
  - affine, 351
  - antiselbstadjungierte, 345
  - bijektive, 25
  - Bild der, 24
  - eindeutige, 23
  - eineindeutige, 24
  - Einschränkung, 24
  - Fixpunkt, 373
  - homomorphe, 329
  - identische, 24
  - injektive, 24
  - isometrische, 345
  - lineare, 329
  - normale, 341
  - orthogonale, 345
  - selbstadjungierte, 344
  - surjektive, 25
  - unitär diagonalisierbare, 348
  - unitäre, 345
  - Urbild der, 24
- Abbildungsmatrix, 332
- Abel, N. H., 62, 266
- Abschluß, 63, 75
- absoluter Fehler, *siehe* Fehler
- Abstand im affinen Raum, 241
- abzählbar (unendlich), 31
- Addition modulo n, 27
- adjazent, 52
- Adjunkte, 118
- ähnliche Matrizen, 255
- Ähnlichkeitsabbildung, 355
- Ähnlichkeitsfaktor, 355
- Ähnlichkeitsgeometrie, 356
- äquivalente Formeln, 50
- Äquivalenz, 38
- Äquivalenz von Relationen und Prädikaten, 35
- Äquivalenzklasse, 18
  - Vertreter, 27
- Äquivalenzrelation, 16
- affine Abbildung, 351
- affiner Raum, 189
  - Abstand, 241
  - Achsenrichtungen, 191
  - affiner Unterraum, 193
    - Ebene, 193
    - Gerade, 193
    - Hyperebene, 193
  - allgemeine Lage, 196
  - euklidischer, 241
  - $k$ -Ebene, 193
  - Koordinatensystem, 191
    - kartesisches, 245
  - Koordinatenursprung, 191
  - Lot, 242
  - paralleler, 197
  - senkrechter, orthogonaler, 200
  - unitärer, 241
  - Verbindung, 196
  - Winkel zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , 199
- Affinität, 355
- algebraische Gleichung in  $x$ , 260
- antisymmetrisch, 15
- asymmetrisch, 15

- Asymptote, 322
- Atom, 47
- Ausdruck, *siehe* Term
- Aussage, 37
  - Äquivalenz, 38
  - Disjunktion, 37
  - Implikation, 38
  - Konjunktion, 37
  - Kontravalenz, 37
  - Negation, 37
- Bahn, *siehe* Weg
- Bairstow-Verfahren, 389
- Banach, S., 375
- Banach-Raum, 375
- Bessel, F. W., 228
- Besselsche Ungleichung, 227
- Bewegung, 355
- Bewertung, 49
- bijektiv, 25
- bilinear, 210
- Bilinearform, 210
  - hermitische, 211
  - positiv definite, 211
  - symmetrische, 211
- binäre Funktion, 35
- Bisektionsverfahren, 379
- Block, 19
- Boolesche Funktion, 35
- Boolesche Algebra, 96
- Boolescher Ring, 100
- Cantor, G., 4
- Cardanische Formel, 265
- Cardano, G., 265
- Cauchy, A. L., 217
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 202, 217
- Cayley, A., 77, 269
- charakteristisches Polynom, 259
- Cohen, P. J., 35
- Cramer, G., 120
- Cramersche Regel, 120
- de Moivre, A., 90
- Defekt einer linearen Abbildung, 335
- Definitionsbereich, 22
- del Ferro, S., 265
- Determinante, 109, 110, 112
- diagonal dominant, 401
- diagonalisierbar, 254
- Diagonalkästchen, 254
- Differenz, 10
- disjunkt, 10
- Disjunktion, 37
- disjunktive Normalform, 41
- DNF, 41
- Durchschnitt, 10
- Eigenraum, 256
- Eigenvektor
  - einer linearen Abbildung, 342
- Eigenvektor (EV), 256
- Eigenwert
  - einer linearen Abbildung, 342
- Eigenwert (EW), 256
- Einheitsvektor, 200
- Einleseabbildung, 367
- einschaliges Hyperboloid, 325
- Element, *siehe* Menge
- elementare Jordan-Matrix, 283
- Ellipse, 318
- Ellipsoid, 325
- elliptischer Zylinder, 324
- elliptisches Paraboloid, 327
- Endknoten, 52
- endlich, 31
- Endomorphismus, 254
- Erlanger Programm, 349
- Euklid, 70
- Euklidischer Algorithmus, 70
- Euler, L., 10
- Eulersche Linie, 55
- exakter Wert, *siehe* Fehler
- Exponent, *siehe* Maschinenzahlen
- Faktorgruppe, 81
- Faktormenge, 21
- Falk, S., 131
- Falksches Schema, 131
- Fehler
  - absoluter, 362
  - exakter Wert, 362
  - Modell-, 362
  - Näherungswert, 362
  - relativer, 362
  - Rundungs-, 362
  - Verfahrens-, 363

- Fehler bei den Ausgangsdaten, *siehe*  
 Modellfehler
- Fehler durch Rechnen mit Maschinenzahlen, *siehe* Rundungsfehler
- Fixpunkt, *siehe* Abbildung
- Fläche, 297
- Folge, 432
- Grenzwert, 375
  - konvergent, 375
- FORM, 47
- Formel, *siehe* Term
- äquivalente, 50
  - durch  $u$  erfüllte, 50
  - in  $\mathfrak{A}$  wahre, 50
- Formel, abgeschlossene, 48
- Formel, offene, 48
- Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe, 48
- Fundamentalsatz der Algebra, 260
- Funktion, 23
- Gauß, C. F., 146, 403
- Gauß-Algorithmus, 146, 393
- Gauß-Schritt, 392
- Gauß-Seidel-Verfahren, 403
- Geometrie
- affine, 356
  - geordnetes Paar, 14
- ggT, *siehe* größter gemeinsamer Teiler
- gleichmächtig, *siehe* Menge
- gleichorientierte Basen, 238
- größter gemeinsamer Teiler, 69
- Grad  $d(x)$ , 52
- Gradientenverfahren, 411
- Gram, J. P., 212
- Gramsche Matrix, 212
- Graph, 51
- adjazenter, 52
  - Adjazenzmatrix, 127
  - einfach, 52
  - Endknoten, 52
  - endlicher, 52
  - Eulersche Linie, 55
  - Gerüst, 56
  - gerichteter, 53
  - Grad, 52
  - inzidenter, 52
  - isolierter Knoten, 52
  - Kante, 52
- Knoten, 52
- Mehrfachkante, 52
- Minimalgerüst, 55, 56
- Schlinge, 52
- spannender Teil-, 54
- stark zusammenhängender, 55
- Teil-, 54
- ungerichteter, 52
- zusammenhängender, 55
- Grenzwert, *siehe* Folge
- Gruppe, 66
- Abschluß, 75
  - Dieder-, 71
  - Faktor-, 81
  - Index, 80
  - Nebenklasse, 79
  - Normalteiler, 79
  - Ordnung von  $a$ , 75
  - Ordnung von  $G$ , 75
  - prime Restklassen modulo  $n$ , 69
  - Restklassen modulo  $n$ , 68
  - symmetrische, 67
  - Unter-, 76
- Haar, A., 416
- Haarsche Bedingung, 416
- Halbgruppe, 60
- Einselement, 62
  - homomorphe Abbildung, 65
  - homomorphes Bild, 65
  - Homomorphismus, 65
  - isomorphe, 65
  - kommutative, 62
  - Nullelement, 62
  - Unter-, 62
- halblogarithmischen Darstellung, *siehe* Maschinenzahlen
- Hamilton, W. R., 269
- Hasse, H., 17
- Hasse-Diagramm, 17
- Hauptachsentransformation, 314
- Hermite, C., 211
- hermitisch, 211
- Hesse, L. O., 204
- Hessesche Form, 204, 205
- Hintereinanderausführung, *siehe* Verkettung
- homogen, 108
- homogene LRG

- allgemeine Lösung, 435
- charakteristische Gleichung, 438
- charakteristisches Polynom, 438
- Homomorphismus, 65
- Horner, W. G., 263
- Horner-Schema, 263, 386
  - zweizeiliges, 387
- Hyperbel, 321
  - Asymptoten, 322
- Hyperbelfunktionen, 322
- hyperbolischer Zylinder, 325
- hyperbolisches Paraboloid, 327
- Hyperebene, *siehe* affiner Raum
- Hyperfläche 2. Ordnung, 297
  - einschaliges Hyperboloid, 325
  - Ellipsoid, 325
  - elliptischer Zylinder, 324
  - elliptisches Paraboloid, 327
- Fläche, 297
- hyperbolischer Zylinder, 325
- hyperbolisches Paraboloid, 327
- Kegel, 324
- Kurve, 297
- Mittelpunkt, 300
- nichtausgeartete Kegelschnitte, 316
- parabolischer Zylinder, 326
- quadratische Form, 299
- singuläres Gebilde, 300
- zweischaliges Hyperboloid, 326
- Implikation, 38
- Index, 80
- Infimum, 94
- inhomogen, 108
- inhomogene LRG
  - allgemeine Lösung, 435
  - spezielle Lösung, 435
- Injektion, 24
- injektiv, 24
- Inklusion-Exklusion, 428
- Inklusion-Exklusion-Formel, 429
- inneres Produkt, 211
- Interpolationspolynom
  - Lagrangesches, 417
  - Newtonssches, 418
- Interpolationsproblem, 415
- Invariante
  - einer Gruppe aus affinen Abbildungen, 355
- Invariante von **G**, 349
- inverse Korrespondenz, *siehe* Korrespondenz
- inverses Element, 62
- Inversion, 111
- invertierbar, 62
- inzident, 52
- irreflexiv, 15
- isolierter Knoten, 52
- Isometrie, 345
- isomorph, 99, 179
- isomorphe Graphen, 54
- Jacobi-Verfahren, 401
- Jordan, M. E. C., 283
- Jordan-Kästchen, 283
- Jordan-Matrix, 283
- Jordansche Normalform, 283
- k*-Ebene, *siehe* affiner Raum
- Körper, 83
  - der komplexen Zahlen, 84
- Kantenfolge, 54
  - geschlossene, 54
  - Kreis, 55
  - offene, 54
  - Weg, 55
- Kardinalzahl, 30
- kartesisches Koordinatensystem, 245
- kartesisches Produkt, 14
- Kegel, 324
- Kern, 81
- Kern einer linearen Abbildung, 334
- Kette, 94, 170
  - maximales Element, 170
- Klasseneinteilung, *siehe* Zerlegung
- Klein, F., 349, 357
- Kombination
  - mit Wiederholung, 425
  - ohne Wiederholung, 424
- kompatibel, 26
- Komplement, 11
- komplexe Zahlen, 84
  - Betrag, 87
  - Eulersche Formel, 93
  - Exponentialdarstellung, 93
  - imaginäre Einheit, 85
  - Imaginärteil, 85
  - komplexe Zahleebene, 86

- konjugierte, 87
- Moivresche Formel, 90
- Realteil, 85
- trigonometrische Darstellung, 87
- Kondition, 399
  - gute, 399
  - schlechte, 399
- Kongruenz, 27, 355
- Kongruenz modulo  $n$ , 21
- Kongruenzgeometrie, 356
- Konjunktion, 37
- Kontravalenz, 37
- konvergent, *siehe* Folge
- Koordinatensystem
  - kartesisches, 245
- Korrespondenz, 21
  - aus  $A$  in  $B$ , aus  $A$  auf  $B$ , von  $A$  in  $B$ ,
  - von  $A$  auf  $B$ , 22
- Definitionsbereich, 22
- inverse, Umkehr-, 22
- Verkettung, 22
- Wertebereich, 22
- Kosinussatz, 202
- Kreis, 55
- Kronecker, L., 222
- Kurve, 297
- Lagrange, J. L., 80
- Lagrangekoeffizienten, 417
- Laguerre, E., 385
- Landausches  $O$ -Symbol, 363
- leere Menge, 9
- LGS, *siehe* lineares Gleichungssystem
  - nichttriviale Lösung, 121
  - triviale Lösung, 121
- Light, F. W., 63
- linear, 15
  - abhängig über  $U$ , 175
  - unabhängig über  $U$ , 175
- lineare Abbildung, 254, 329
  - adjungierte, 339
  - antiselbstadjungierte, 345
- Defekt, 335
- diagonalisierbare, 254
- isometrische, 345
- Kern, 334
- normale, 341
- orthogonale, 345
- Rang, 333
- selbstadjungierte, 344
- unitär diagonalisierbare, 348
- unitäre, 345
- lineare Glieder, 299
- lineare Hülle, 162
- lineare Rekursionsgleichung (LRG)
  - homogene, 432
  - inhomogene, 432
- lineares Gleichungssystem (LGS), 107
  - äquivalente, 145
  - Absolutglieder, 108
  - allgemeine Pivotisierung, 393
  - diagonal dominant, 401
  - Gauß-Algorithmus, 146
  - Gauß-Schritt, 392
  - homogenes, 108
  - inhomogenes, 108
  - Koeffizienten, 108
  - Kondition, 399
    - gute, 399
    - schlechte, 399
  - Pivotelement, 152, 393
  - Pivotgleichung, 392
  - Pivotisierung, 392
  - Unbekannte, 108
  - Zeilen- bzw. Spaltenpivotisierung, 393
- Linearkombination (LK), 158
- Linkssystem, 232
- Lipschitz, R., 376
- Lipschitz-Bedingung, 376
- Lot, 229, 242
- LRG, 432
- Mächtigkeit, Kardinalzahl, 30
- Mantisse, *siehe* Maschinenzahlen
- Maschinenzahlen, 366
  - Basis, 366
  - halblogarithmischen Darstellung, 366
    - Exponent, 366
    - Mantisse, 366
- Matrix, 126
  - Ähnlichkeitsrelation, 255
  - ähnliche, 255
  - Addition, 130
  - Additions-, 133
  - Adjazenz-, 127
  - charakteristisches Polynom, 259
  - Diagonal-, 129

- diagonalisierbare, 254
- Eigenraum, 256
- Eigenvektor, 256
- Eigenwert, 256
- Einheits-, 129
- elementare Jordan-Matrix, 283
- erweiterte Koeffizienten-, System-, 127
- Gleichheit, 129
- inverse, 137
- Jordan-Matrix, 283
- Jordansche Normalform, 283
- Koeffizienten-, 127
- Multiplikation, 130
- Multiplikation mit Skalar, 138
- Normalform, 255
- Null-, 129
- orthogonale, 246
- Permutations-, 133
- quasi-diagonalisierbare, 255
- Rang, 139
- reguläre, 134
- singuläre, 134
- Spur, 268
- symmetrische, 137
- transponierte, 137
- Trapez-, 140
- unitäre, 246
- Unterdeterminante, 139
- verallgemeinerter Eigenraum, 256
- verallgemeinerter Eigenvektor, 256
- verkettete, 130
- Matrixnorm, 394
- Menge, 4
  - überabzählbare, 31
  - abzählbare, 31
  - echte Teil-, 9
  - Element, 4
  - endliche, 31
  - Faktor-, 21
  - leere, 9
  - Ober-, 9
  - partiell geordnete, *siehe* Poset
  - Potenz-, 9
  - Teil-, 9
  - total geordnete, *siehe* Kette
  - unendliche, 31
  - Zerlegung, 19
- Mengen
  - disjunkte, 10
  - gleichmächtige, 28
  - Mengenoperationen
    - Differenz, 10
    - Durchschnitt, 10
    - kartesisches Produkt, 14
    - Komplement, 11
    - symmetrische Differenz, 11
    - Vereinigung, 10
  - Methode der Intervallhalbierung, *siehe* Bisektionsverfahren
  - Mittelpunkt einer Hyperfläche, 300
  - Modell einer Formel (Formelmenge), 50
  - Modellfehler, *siehe* Fehler
  - Moivresche Formel, 90
  - Monoid, 62
  - Multiplikation modulo n, 27
  - Näherungswert, *siehe* Fehler
  - Nebenklasse, 79
  - Negation, 37
  - Neville, E. H., 419
  - Neville-Algorithmus, 419
  - Newton, I., 380
  - Newton-Verfahren, 380, 388
  - nichtausgeartete Kegelschnitte, 316
  - Normalform einer Matrix, 255
  - Normalkomponente, 203
  - Normalteiler, 79
  - Nullstelle, 260
    - k*-fache, 264
  - Nullteiler, 83
  - Obermenge, 9
  - Operation, 26
  - Operator, 23
  - Ordnung, 75
    - irreflexive teilweise, 16
    - lineare, 16
    - reflexive teilweise, 16
    - totale, 16
  - Orientierung einer Basis, 238
  - orthogonale Matrix, 246
  - orthogonale Projektion, 229
  - orthogonales Komplement, 229
  - Orthogonalsystem, 222
  - parabolischer Zylinder, 326
  - Parallelkomponente, 203
  - Parseval, M.-A., 228

- Parsevalsche Gleichung, 228  
 Partition, *siehe* Zerlegung  
 Permutation, 67  
     der Menge  $M$ , 422  
     mit Wiederholung, 423  
 Pivotelement, 152, 393  
 Pivotgleichung, 392  
 Pivotisierung, 392  
 Plücker, J., 236  
 Plückersche Form, 236  
 Polynom, 158, 260  
     algebraische Gleichung, 260  
     Grad, 260  
     Koeffizienten, 260  
     Wurzel, Nullstelle, 260  
 Poset, 94  
 Potenzmenge, 9  
 Prädikat, 35  
 Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, 37  
 Produkt, *siehe* Verkettung  
 Projektion auf Hyperebenen, 409  
 Punkt, 159, 189  
 quadratische Form, 299  
 quasi-diagonalisierbar, 255  
 Quine-McCluskey-Verfahren, 41  
 Quotienten-Differenzen-Algorithmus  
     (QD-Algorithmus), 390  
 Rang, 333  
 Rang einer linearen Abbildung, 333  
 Raum  
     metrischer, 242  
 Rechtssystem, 232  
 Referenz, 415  
 reflexiv, 15  
 regulär, 134  
 Regula falsi  
     erste Form, 382  
     zweite Form, 382  
 Regula-falsi-Newton-Verfahren, 383  
 Rekursionsgleichung  
     lineare, 432  
 Relation, 15  
     Äquivalenz-, 16  
     antisymmetrische, 15  
     asymmetrische, 15  
     binäre, 15  
     induzierte Äquivalenz-, 25  
     irreflexive, 15  
     lineare, 15  
     reflexive, 15  
     symmetrische, 15  
     transitive, 15  
 relativer Fehler, *siehe* Fehler  
 Ring, 82  
     kommutativer, 83  
     Nullteiler, 83  
     nullteilerfreier, 84  
 Rundungsfehler, *siehe* Fehler  
 Russell'sches Paradoxon, 6  
 Sarrus, P.-F., 110  
 Schmidt, E., 223  
 Schmidtsches Orthonormierungsverfahren (ONV), 223  
 Schwarz, H. A., 217  
 Seidel, L., 403  
 Siebformel, 430  
 Signatur, 47  
 singulär, 134  
 singuläres Gebilde, 300  
 Skalarprodukt, 200, 210  
     Standard-, 211  
 spannender Teilgraph, 54  
 Spat, 237, 244  
 Steinitz, E., 172  
 Struktur, 49  
 Supremum, 94  
 surjektiv, 25  
 symmetrisch, 15, 211  
 symmetrische Differenz, 11  
 Tartaglia, 265  
 Tautologie, 40  
 Teiler  
     größter gemeinsamer, 69  
 Teilformel, 48  
 Teilmenge, 9  
     echte, 9  
 Teilverhältnis, 356  
 Term, 38, 47  
     gleiche, äquivalente, gleichwertige, 39  
 Thalessatz, 202  
 Trägermenge einer Struktur, 49  
 transitiv, 15  
 Tupel, 14

- $n$ -Tupel, 14
- überabzählbar, 31
- Umkehrkorrespondenz, *siehe* Korrespondenz
- unendlich, 31
- unitäre Matrix, 246
- Untergruppe, 76
- Untervektorraum
  - $\mathfrak{A}$ -invariante, 256
  - $\mathfrak{A}$ -unzerlegbare, 256
  - $\mathfrak{A}$ -zerlegbare, 256
- UVR, 161
- Vandermonde, A. T., 125
- Vandermondesche Determinante, 125
- Variable
  - freie, 48
  - gebundene, 48
- Variation
  - mit Wiederholung, 423
  - ohne Wiederholung, 424
- Vektor, 157
  - Betrag, 160
  - Einheits-, 200
  - Koordinaten, 181
  - linear abhängig über  $U$ , l.a. über  $U$ , 175
  - linear abhängig, l.a., 165
  - linear unabhängig über  $U$ , l.u. über  $U$ , 175
  - linear unabhängig, l.u., 164
  - Lot, 229
  - Normalen-, 236
  - normierter, 200, 221
  - Null-, 159
  - orthogonale Projektion, 229
  - Repräsentant, 160
  - Skalarprodukt, 200, 210
    - Standard-, 211
  - Spatprodukt, 237
  - Vektorprodukt, 232
- Vektoren
  - negativ orientierte, 232
  - orthogonale, 221
  - orthonormierte, 222
  - positiv orientierte, 232
- Vektorprodukt, 232, 239
- Vektorraum, 157
- Basis, 166
  - Übergangsmatrix, 183
  - Orientierung, 238
- Basis über  $U$ , 175
- Dimension, 173
- euklidischer, 199, 212
- gleichorientierte Basen, 238
- isomorpher, 179
- lineare Hülle, 162
- Linearkombination (LK), 158
- Norm, 218
  - euklidische, 219
  - Maximum-, 219
- normierter Raum, 218
- orientiert, 239
- orthogonal, 228
- orthogonale Projektion, 229
- orthogonales Komplement, 229
- Parallelverschiebung, 159
- unitärer, 199, 212
- Unter-, 161
  - direkte Summe, 163
  - Projektion, 163
  - Summe, 163
- Verschiebung, 159
- Venn, J., 10
- verallgemeinerter Eigenraum, 256
- verallgemeinerter Eigenvektor (vEV), 256
- Verband, 93
  - distributiver, 96
  - erste Definition, 93
  - zweite Definition, 94
- Vereinigung, 10
- Verfahren der konjugierten Gradienten, 412
- Verfahrensfehler, *siehe* Fehler
- verkettete Matrizen, 130
- Verkettung, 22
- Verknüpfung, 26
  - äußere, 26
  - innere, 26
  - kompatible, 26
  - verträgliche, 26
- verträglich, 26
- Viète, F., 267
- Vietascher Wurzelsatz, 267
- vollständige Induktion, 7

- Weg, 55  
Wertebereich, 22  
Wurzel, 260  
Zerlegung, 19
- Block einer, 19  
Zorn, M. A., 170  
zweischaliges Hyperboloid, 326  
Zyklus, *siehe* Kreis