

NP-Completo y NP-Hard

Alejandro Lamelas Delgado

December 2024

1 Clique (Optimización)

NP-Hard

Resolver el problema de optimización implica que automáticamente podemos resolver el problema de decisión.

Si podemos encontrar el tamaño máximo de un clique, podemos determinar si existe una clique de tamaño k comparando el tamaño máximo con k .

2 Retroalimentación de arcos

2.1 Definición del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de arcos es un subconjunto de arcos $F \subseteq E$ tal que al eliminar todos los arcos en F , el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido).

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo.

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es ver si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño k .

2.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir Cobertura de vértices a Retroalimentación de Arcos:

La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

- $V' = V \cup \{v' | v \in V\}$
- $E' = \{(v, v'), (u, u'), (v', u), (u', v) | (u, v) \in E\}$

Este es la entrada al problema de Retroalimentación de Arcos.

Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $k \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de arcos en G' de tamaño k .

- \Leftarrow Sea S' un conjunto de retroalimentación de arcos de G' de tamaño k , si $\exists e \in S'$ tal que e no es una arista (v, v') entonces e es una arista de la forma (v', u) . Si e es una arista (v', u) , como $e \in S'$, abarca todos los ciclos $[v', u, \dots, v']$. Todos los caminos $u \rightarrow v'$ pasan por v , ya que el único arco incidente en v' es v . Por tanto si sustituimos (v', u) por (v, v') , se abarcan los mismos ciclos de G' . Por tanto, es posible crear un nuevo conjunto S' de tamaño k formado solamente por arcos de la forma (v, v') . Dado el nuevo conjunto S' , como S' abarca

todos los ciclos, también abarca los ciclos c de la forma $c = [v, v', u, u', v]$ en G' . A cada ciclo c en G' se le asocia una arista $\langle u, v \rangle \in E$ y viceversa. Como por cada ciclo c se cumple que $(v, v') \in S'$ o $(u, u') \in S'$, entonces es posible crear un conjunto S formado por los vértices de V correspondientes a las aristas de S' , el cual abarca todas las aristas de G , por tanto, S' es una cobertura de vértices de G .

- \Rightarrow Sea S una cobertura de vértices de G , entonces $\forall \langle u, v \rangle \in E$ se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Sea S' un conjunto de arcos formado por las arcos que (v', v) correspondientes a los vértices v que pertenecen a S , demostremos que $G' - S'$ no tiene ciclos. Dado un ciclo c de G' ; si $v' \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que en v' solo incide v ; si $v \in c$, entonces $(v, v') \in c$, ya que v solo incide en v' . Por tanto, en cada ciclo de G' existe un arco de la forma (v, v') , por lo que S' es una retroalimentación de arcos de G' .

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de arcos en G de tamaño k , con $k \geq 0$.

- \Leftarrow Se cumple por Principio del Buen Orden.
- \Rightarrow Si existe un conjunto de retroalimentación de arcos de tamaño mínimo l , al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que es un conjunto de retroalimentación de arcos.

3 Número Domatic

3.1 Definición del problema

El número de domatic de un grafo G , denotado como $\text{domatic}(G)$, es el número máximo k tal que los vértices de G pueden dividirse en k conjuntos disjuntos D_1, D_2, \dots, D_k donde cada D_i es dominante.

Hallar el número de Domatic de un grafo..

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es demostrar que el número domático de G es k .

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es demostrar que el número domático de G es $\geq k$.

3.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir 3-SAT a Número Domatic:

Sea $\phi : C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ una instancia de 3-SAT con n variables x_1, \dots, x_n . Creemos un grafo $G = (V, E)$ tal que por cada cláusula $C_i \in \{C_1, \dots, C_m\}$ exista un vértice vc_i , y por cada variable $x_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$ existan tres vértices a_j, b_j , y c_j . Estos tres vértices a_j, b_j , y c_j forman un triángulo.

El vértice a_j corresponde al literal positivo x_j y el vértice b_j al literal negativo \bar{x}_j . Hay una arista entre los vértices vc_i y a_j si y solo si x_j aparece en la cláusula C_i . De igual forma, hay una arista entre vc_i y b_j si y solo si \bar{x}_j aparece en la cláusula C_i . Además, hay un vértice r que tiene un camino $[r, s_i, vc_i]$ por cada $i \in \{1, \dots, m\}$. También creamos una arista de r a a_j y b_j por cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

Correctitud

ϕ es satisfacible $\iff G$ tiene número domático de al menos 3.

- \Leftarrow Si el grafo G tiene número domático al menos 3, este número no puede ser mayor que 3, ya que el grado de c_i es 2, por lo que los c_i solo puede ser dominado por tres conjuntos como máximo. Sean $V_1, V_2, V_3 \subseteq V$ una partición de los vértices de V tal que cada conjunto de vértices es un conjunto dominante. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $r \in V_1$. Entonces hay dos posibilidades:

- (1) $vc_i \in V_2$ and $s_i \in V_3$

(2) $vc_i \in V_3$ and $s_i \in V_2$

En caso contrario, s_i no puede ser dominado por uno de los conjuntos V_2 o V_3 , ya que s_i solo es adyacente a r y a vc_i . Sin pérdida de generalidad, analicemos la posibilidad 1. vc_i debe ser dominado por algún vértice en V_1 . Por lo tanto, al menos uno de los a_j/b_j que son adyacentes a vc_i debe estar en V_1 . Notemos que para cualquier j , a_j y b_j no pueden estar en V_1 a la vez, pues ser así uno de los dos no podría ser dominado por V_2 o V_1 . Por tanto, $V_1 \cap \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ es una asignación válida de variables que satisface ϕ .

- \Rightarrow Si ϕ es satisfacible, sin pérdida de generalidad, digamos que las variables que toman valor True son x_1, \dots, x_k y las restantes x_{k+1}, \dots, x_n son False. Demostremos que G tiene número domático 3. El conjunto de vértices V puede ser particionado en tres conjuntos $V_1 = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\} \cup \{r\}$, $V_2 = \{b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n, vc_1, \dots, vc_m\}$, y $V_3 = \{c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_m\}$. Cada uno de estos conjuntos de vértices es un conjunto dominante del grafo G .

4 Retroalimentación de vértices

4.1 Definición del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de retroalimentación de vértices es un subconjunto de vértices $F \subseteq V$ tal que al eliminar todos los vértices en F (y sus aristas incidentes), el grafo resultante no contiene ciclos (es un grafo acíclico o un bosque, si es no dirigido).

Problema de Optimización:

El objetivo del problema es encontrar el conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo.

Problema de Decisión:

El objetivo del problema es ver si existe un conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño k .

4.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir Cobertura de vértices a Retroalimentación de vértices:

La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

- $V' = V$
- $E' = \{(u, v), (v, u) \mid < u, v > \in E\}$

Este es la entrada de la Retroalimentación de vértices.

Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $k \iff$ existe una retroalimentación de vértices en G' de tamaño k .

- \Leftarrow Sea S' una retroalimentación de vértices de tamaño k , entonces S' contiene al menos un vértice de cada ciclo, entonces \forall ciclo $[u, v, u] \in G'$, se cumple que $u \in V'$ o $v \in V'$. Como existe un ciclo de este tipo por cada arista de G , entonces S' cubre todos los vértices de G .
- \Rightarrow Sea S una cobertura de vértices de tamaño k , entonces $\forall < u, v > \in E$, se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Demostremos que S es una retroalimentación de vértices de G' . Sea c un ciclo de G' de tamaño q $c = [v_1, v_2, \dots, v_q, v_1]$, entonces entre todo par de vértices consecutivos de c existe un arco (v_i, v_j) en G' y su correspondiente arista $< v_i, v_j >$ o $< v_j, v_i >$ en G . Como $v_i \in S$ o $v_j \in S$, entonces al menos un vértice de c pertenece a S , por lo que todos los ciclos de G' están cubiertos en S .

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto de retroalimentación de vértices de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto de retroalimentación de vértices en G de tamaño k , con $k \geq 0$.

- \Leftarrow Se cumple por Principio del Buen Orden.
- \Rightarrow Si existe un conjunto de retroalimentación de tamaño mínimo l , al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que para todos los ciclos del grafo existe un vértice en el conjunto, por lo que va a ser un conjunto de retroalimentación de tamaño k .

5 Conjunto Dominante

5.1 Definición del problema

En un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices $D \subseteq V$ es un conjunto dominante si cada vértice de V que no está en D es adyacente a al menos un vértice en D .

Una partición de los vértices V en k conjuntos D_1, D_2, \dots, D_k es una partición domática si cada D_i (para $i = 1, 2, \dots, k$) es un conjunto dominante. El número dominante es la cardinalidad del menor conjunto dominante de G .

Problema de Optimización:

Hallar el número dominante de G .

Problema de Decisión:

Ver si existe un conjunto dominante de tamaño k .

5.2 Demostrar que es NP-Hard

Reducir Cobertura de vértices a Conjunto Dominante:

La entrada del problema Cobertura de Vértices es un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Dado $G = (V, E)$, creamos un grafo no dirigido $G' = (V', E')$, tal que:

- $V' = V \cup \{uv \mid \langle u, v \rangle \in E\}$
- $E' = E \cup \{\langle uv, u \rangle, \langle uv, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}$

Este es la entrada al problema de Conjunto Dominante.

Correctitud

Existe una cobertura de vértices en G de tamaño $k \iff$ existe un conjunto dominante en G' de tamaño k .

- \Leftarrow Sea S' un conjunto dominante de G' de tamaño k , si $\exists x \in S'$ tal que $x \notin V$, entonces es de la forma uv . Como x solo es adyacente a u y a v , significa que x solo abarcaba a los vértices u, v y x . Por tanto, al sustituir en S' , x por u o v , como los tres vértices forman un triángulo, se siguen abarcando los mismos vértices que se abarcaban inicialmente. Esto significa que es posible obtener un conjunto dominante S' de tamaño k formado solamente por vértices v tal que $v \in V$. Dado el nuevo conjunto dominante S' , como los vértices de la forma $uv \notin S'$ y $\forall x$ tal que $x \notin S'$ se cumple que x es adyacente a al menos un vértice de S' , entonces por cada vértice de la forma uv , se cumple que $u \in S'$ o $v \in S'$, ya que de no pertenecer ninguno de los dos a S' , no existiría forma de abarcar el vértice uv , ya que este solo es adyacente a esos dos vértices. Por tanto S es una cobertura de vértices de G de tamaño k .
- \Rightarrow Sea S una cobertura de vértices de tamaño k de G , entonces $\forall \langle u, v \rangle \in E$ se cumple que $u \in S$ o $v \in S$. Por tanto, todos los vértices que pertenecen a V y a V' estarán abarcados en G' . Como los vértices $x \in V'$ de la forma uv son adyacentes a u y a v , y se cumple que $u \in S$ o $v \in S$, estos vértices x también están siendo abarcados en G' , por lo que S es un conjunto dominante de G' de tamaño k .

Extensión al problema de Optimización

Existe conjunto dominante de tamaño mínimo en $G \iff$ existe un conjunto dominante en G de tamaño k , con $k \geq 0$.

- \Leftarrow Se cumple por Principio del Buen Orden.
- \Rightarrow Si existe un conjunto dominante de tamaño mínimo l , al agregar $k - l$ vértices al conjunto, este va a seguir cumpliendo que es un conjunto dominante.