题目

设以下模式类别具有正态概率密度函数：

$$\omega_1:\{(0\ 0)^T,(2\ 0)^T,(2\ 2)^T,(0\ 2)^T\}$$
$$\omega_2:\{(4\ 4)^T,(6\ 4)^T,(6\ 6)^T,(4\ 6)^T\}$$

（1）设$P(\omega_1)=P)\omega_2=\frac{1}{2}$，求这两类模式之间的贝叶斯判别界面方程式。

（2）绘出判别界面。

解

（1）判别界面方程式

由

$$m_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N_i}x_{ij}$$

$$C_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-m_i)(x_{ij}-m_i)^T$$

得：

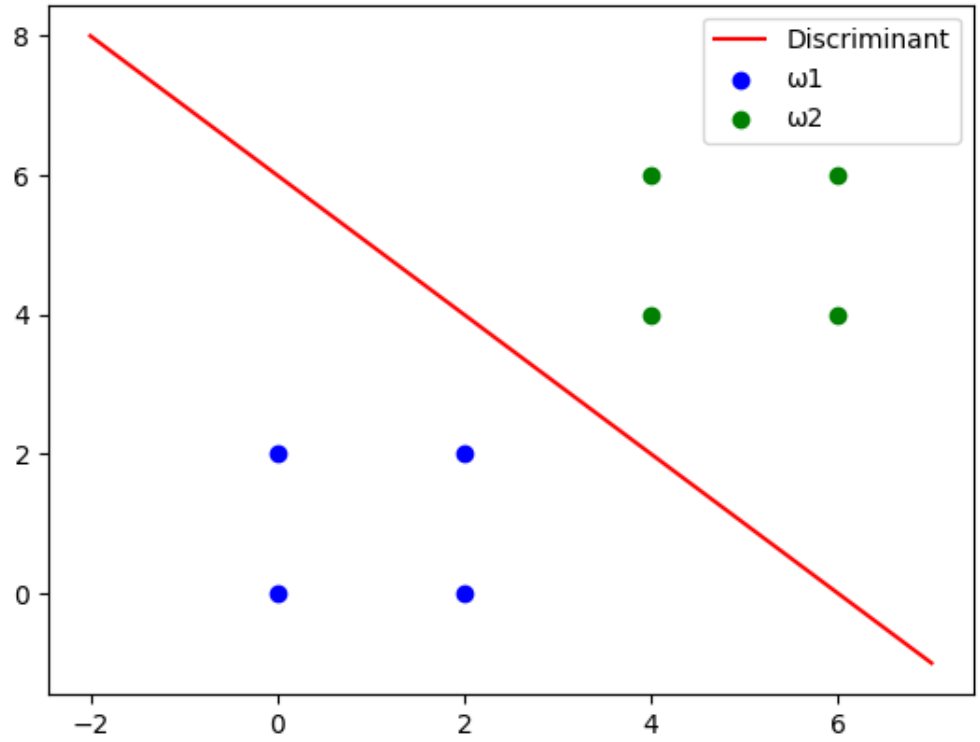
$$m_1=(1\ 1)^T$$
$$m_2=(5\ 5)^T$$
$$C_1=C_2=C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

带入判别式有：

$$\begin{aligned}d_1(x)-d_2(x)&=\ln P(\omega_1)-\ln P(\omega_2)+(m_1-m_2)^TC^{-1}x-\frac{1}{2}m_1^TC_{-1}m_1+\frac{1}{2}m_2^TC^{-1}m_2\\&=-4x_1-4x_2+24=0\end{aligned}$$

（2）绘图

绘制图像如下图所示：



附加

使用python实现：

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w1 = np.array([[0, 0], [2, 0], [2, 2], [0, 2]])
w2 = np.array([[4, 4], [6, 4], [6, 6], [4, 6]])

m1 = np.mean(w1, axis=0)
m2 = np.mean(w2, axis=0)

cov1 = np.cov(w1.T, bias=True)
cov2 = np.cov(w2.T, bias=True)

inv_cov1 = np.linalg.inv(cov1)
inv_cov2 = np.linalg.inv(cov2)

w = np.dot((m1 - m2), inv_cov1)
b = -0.5 * np.dot(m1, np.dot(inv_cov1, m1)) + 0.5 * np.dot(m2,
np.dot(inv_cov2, m2))


def discriminant_function(_x):
    return -(w[0] * _x + b) / w[1]


x = np.linspace(-2, 7, 100)
plt.plot(x, discriminant_function(x), 'r-', label='Discriminant')
```

```
plt.scatter(w1[:, 0], w1[:, 1], c='blue', label='ω1')
plt.scatter(w2[:, 0], w2[:, 1], c='green', label='ω2')
plt.legend()

plt.show()
```