TD3 : Formes bilinéaires & formes quadratiques

Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2024 / 2025**

Exercice 1 :

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression analytique de q dans la base canonique $\mathcal{B}$ et expliciter sa forme polaire ϕ.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. En appliquant l'algorithme de Décomposition de Gauss en somme de carrées de formes linéaires indépendantes. Déterminer les formes l_1, l_2 et l_3 telle que :

$$q(x) = 2(l_1(x))^2 + \frac{1}{2}(l_2(x))^2 + (l_3(x))^2.$$

4. Déterminer la signature et le rang de q.
5. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
6. On notera N la norme induite par le produit scalaire $\phi(.,.)$. Soient $V_1 = (1, 2, -1)$ et $V_2 = (0, 3, 1)$.
   a) Calculer $N(V_1)$ et $N(V_2)$.
   b) Calculer la distance $d(V_1, V_2)$.

Exercice 2 :

Soit b l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} b & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & 3x_1x_2 + 3y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) \end{array}$$

1. Vérifier que b est une forme biliéaire symétrique.
2. Déterminer A la matrice de b dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les valeurs propres de A.
4. b est-elle définie ? positive ?
5. b est-elle un produit scalaire ?
6. Donner la norme $||\ .\ ||$ associée à ce produit scalaire.
7. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, à quelle condition on a

$$|| X_1 + X_2 ||^2 = || X_1 ||^2 + || X_2 ||^2 ?$$

Exercice 3 :

Soit q l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} q & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & ((x, y, z)) & \mapsto & 2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2 \end{array}$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire ϕ associée à q.
2. Déterminer M la matrice de ϕ dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. ϕ est-elle non dégénrée ?
4. Décomposer q en somme des carrés.
5. En déduire la signature de q.
6. q est-elle définie positive ?
7. ϕ est-elle bien un produit scalaire ?
8. Donner N la norme associée à ϕ, et d la distance assiciée à N.

Exercice 4 :

Soit Φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \mapsto & P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \end{array}$$

1. Vérifier que Φ est une forme biliéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Φ est-elle un produit scalaire ?
4. Préciser le rang et la signature de Φ.
5. Soient $P_1(X) = -X + \dfrac{8}{3}$ et $P_2(X) = X^2 + X - 2$ deux polynomes de $\mathbb{R}_2[X]$, vérifier l'orthogonalité des deux pôlynomes P_1 et P_2.