Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2024 / 2025**

Chapitre 3 : Formes bilinéaires & formes quadratiques

Objectifs :

Dans le but de définir un produit scalaire, une norme et une distance sur un espace vectoriel, on introduira dans ce chapitre les notions de forme bilinéaire et de forme quadratique et on donnera quelques propriétés sur ces formes.
A l'issue de ce PEG, l'étudiant doit être capable de :

- Déterminer la forme bilinéaire associée à une forme quadratique donnée et réciproquement.
- Déterminer la matrice d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique.
- Déterminer le rang, le noyau d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique.
- Décomposer en carrées une forme quadratique et déterminer la signature.
- Définir un produit scalaire à partir d'une forme bilinéaire.
- Définir une norme et une distance.

Mots clés : formes bilinéaires, formes quadratiques, matrice d'une forme bilinéaire ou d'une forme quadratique, rang, noyau, signature d'une forme quadratique, réduction de Gauss.

1 Activité introductive :

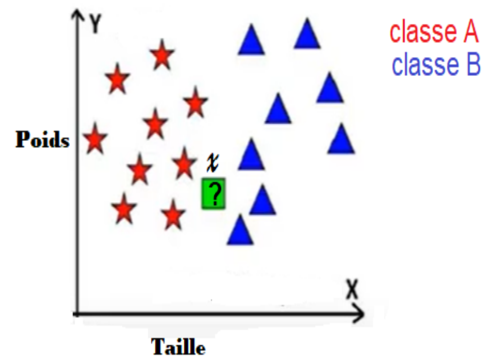
C'est quoi le machine learing ?

Le machine learning est une technique de programmation informatique dont l'objectif de base est de ≪**apprend à apprendre**≫ aux ordinateurs et par la suite à agir et réagir, comme le font les humains, en améliorant leur mode d'apprentissage et leurs connaissances de façon autonome.
Un certain nombre d'algorithme de machine learning utilise les **mesures de distance**. On prend l'exemple de l'algorithme K **Nearest Neighber "KNN"** (K plus proche voisins).

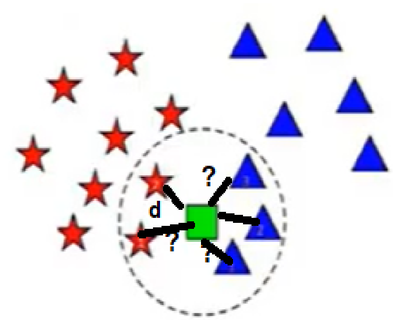
C'est quoi le KNN ?

L'algorithme des K plus proches voisins ou K-nearest neighbors (kNN) est un algorithme d'apprentissage supervisé simple et facile à mettre en œuvre qu'on utilise pour résoudre les problèmes de classification et de régression.

Comment fonctionne l'algorithme KNN ?



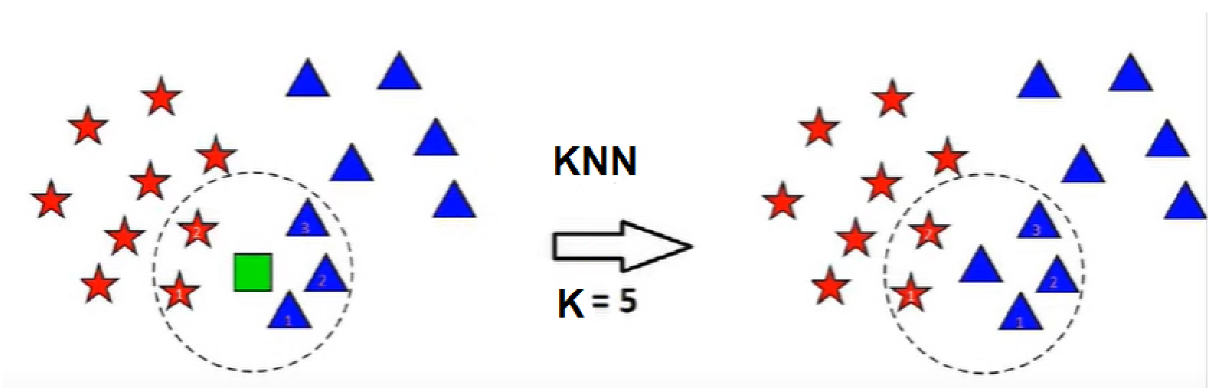
On considère un ensemble de données réparties selon 2 classes : des étoiles et des triangles.
Chacune des données a 2 caractéristiques (par exemple : taille et poids), ce qui nous permet de les représenter dans un repére orthonormé.
Un nouveau point x dont on connaît les caractéristiques se présente. Sa classe est **inconnue**.
L'objectif est de lui attribuer une classe : étoile ou triangle.
L'algorithme recherche dans l'ensemble de données les K points les plus proches de x au sens de la distance d, et attribue x à la classe qui est la plus fréquente parmi ces K voisins.



On prend par exemple la **distance Euclidienne** d et $K = 5$ voisins.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

où, n-nombre de variables, x_i et y_i sont les variables des vecteurs x et y respectivement.



Parmi les 5 voisins les plus proches du carrée X, il y a 3 triangles et 2 étoiles. Il y a plus de triangle que d'étoiles donc avec la méthode des $K = 5$ plus proches voisins et en utilisant la distance Euclidienne, on effectera à x la classe triangle.
Le choix de la métrique de la distance peut avoir un effet sur les performences du processus de classification, de regroupement et de recherche d'information.

Questions :

- Comment on définit une distance ? un produit scalaire ?
- Quelle est la relation entre une distance et un produit scalaire ?
- Comment prouver qu'une application est un produit scalaire ?
- Comment peut on construire un produit scalaire à partir d'une forme bilinéraire ?

2 Formes bilinéaires et formes quadratiques

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, une forme bilinéaire est un type particulier d'application qui, à deux vecteurs d'un espace vectoriel associe un scalaire.

2.1 Formes bilinéaires symétriques :

Définition:.

Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et une application $b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que b est :

✔ Une **forme bilinéaire** si

- $\forall x_1 \, , \, x_2 \, , \, y \in \mathbb{E} \, , \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \quad b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y).$
- $\forall x \, , \, y_1 \, , \, y_2 \in \mathbb{E} \, , \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \quad b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2).$

" la bilinéarité = la linéarité par rapport à chacune des deux variables "

✔ **symétrique** si

$$\forall \, x \, , \, y \in \mathbb{E} \, , \qquad b(x, y) = b(y, x)$$

Exercice 1 *Pour $E = \mathbb{R}^2$, on note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ et indiquer celles qui sont symétrique :*

1) $b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ 2) $b_2(x, y) = 2 + x_1 y_1 + 3 x_2 y_2$ 3) $b_3(x, y) = x_1 x_2 + 8 x_2 y_1$

Remarque 1.

Si b est symétrique et linéaire par rapport à **une variable** alors b est une forme bilinéaire.

2.2 Formes Quadratiques

Les formes quadratiques sont des applications liées aux formes bilinéaires symétriques.

Définition:.

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application $q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\forall\, x \in \mathbb{E}$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. L'application $(x, y) \longmapsto \dfrac{1}{2}\Big[q(x+y) - q(x) - q(y)\Big]$ est une forme **bilinéaire symétrique.**

Exercice 2 *Soient l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $P(x_1, x_2, x_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$.*
On note d la distance (euclidienne) OP et on pose $q = d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

1. *Vérifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*

Proposition: (Forme polaire)**.**

Si q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique b telle que

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\Big[q(x+y) - q(x) - q(y)\Big].$$

b est dite la forme bilinéaire symetrique associée à q ou forme polaire associée à q.

Exercice 3 *Soit q le polynôme défini sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. *Montrer que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer la forme bilinéaire associée à q.*

Définition:.

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application $q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ avec $\quad q(x) = b(x,x), \quad \forall x \in \mathbb{E}$

Exercice 4 *Donner le forme quadratique q associée à la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ suivante :*

$$b(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

2.3 Ecriture matricielle

Proposition: (Ecriture matricielle d'une forme bilinéaire symétrique)**.**

Soient b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. On appelle la matrice de b relative à la base B la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Soient $x, y \in \mathbb{E}$, si X et Y désignent respectivement les matrices colonnes composées des coordonnées de x et y dans la base B, alors on a

$$b(x,y) = {}^tXMY = {}^tYMX.$$

Exercice 5 *Revenons à l'exercice* 1 *:*

1. *Ecrire la matrice de la forme bilinéaire b_1.*
2. *Calculer $b_1(X,Y)$ pour $X = (1,2)$ et $Y = (2,-1)$ de deux manières :*
   a) *En utilisant l'expression de b_1.*
   b) *En utilisant le résultat de la proposition basé sur l'écriture matricielle.*

Exercice 6 *Soient les matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B.*
2. *Lesquelles sont symétriques ?*

Comme pour une forme bilinéaire, une forme quadratique admet une écriture matricielle.

Proposition: (Ecriture matricielle d'une forme quadratique).

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, b la forme polaire associée à q et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$.
La matrice de la forme quadratique q dans la base B est la matrice de la forme bilinéaire b dans la base B (i.e $M_{ij} = b(e_i, e_j)$).

Soient $x \in \mathbb{E}$ et X la matrice colonne composée par les coordonnées de x dans la base B. Comme $q(x) = b(x, x)$, alors

$$q(x) = {}^tXMX$$

.

Exercice 7 *Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$q((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

1. *Déterminer la forme polaire b de q.*
2. *Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Soit $x = (3, 1)$, calculer $q(x)$ de deux manières.*

2.4 Rang et noyau d'une forme bilinéaire et une forme quadratique

Définition:.

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ associée à une forme quadratique q.

- ✔ On appelle rang de b (ou de q), noté $rg(b)$ (ou $rg(q)$), le rang de la matrice M de b (ou de q).

$$rg(b) = rg(q) = rg(M)$$

.

- ✔ On appelle noyau de b (ou de q) , noté $ker(b)$ (ou $ker(q)$) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$

$$ker(b) = ker(q) = \{x \in \mathbb{E} / \forall y \in \mathbb{E}, b(x, y) = 0\}$$

Le noyau et le rang d'une forme quadratique sont définis comme ceux de sa forme polaire. En particulier, la notion d'une forme **dégénérée** ou **non dégénérée** est la même pour la forme quadratique et sa forme polaire associée.

Définition: (Forme bilinéaire symétrique / Forme quadratique non dégénérée)**.**

- ✔ La forme bilinéaire symétrique b (ou la forme quadradratique q) est dite non dégénérée si
$$ker(b) = ker(q) = \{0_{\mathbb{E}}\}.$$
- ✔ b est dite dégénérée si elle n'est pas non dégénérée ($ker(b) \neq \{0_{\mathbb{E}}\}$).

Remarque 2.

$$b \text{ est dite non dégénérée } \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{E}, (\forall y \in \mathbb{E}, b(x,y) = 0 \Longrightarrow x = 0).$$

Exercice 8 *On considère la forme bilinéaire*

$$\begin{array}{cccl} b & : & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_4 - 3x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3. \end{array}$$

1. *Ecrire la matrice de b relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et préciser son rang.*
2. *Quel est son noyau ?*
3. *La forme bilinéaire b est-elle dégénérée ou non dégénérée ?*

Exercice 9 *Déterminer le rang et le noyau de chacune des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^2$ et préciser celles qui sont dégénérées et celles qui sont non dégénérées.*

1) $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2.$ 2) $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$ 3) $q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2.$

Proposition:.

$$\begin{array}{lcc} \text{Une forme bilinéaire symétrique } b \text{ est non dégénérée} & \Longleftrightarrow & rg(b) = dim(\mathbb{E}) \\ & \Longleftrightarrow & M \text{ inversible} \end{array}$$

2.5 Formes quadratiques définies positives

Définition:.

Soient b une forme bilinéaire sur $\mathbb{E}$ et q la forme quadratique associée à b. On dit que q (ou b) est

- ✔ **positive** si pour tout $x \in \mathbb{E}$, $q(x) \geq 0$.
- ✔ **définie** si pour tout $x \in \mathbb{E}$, $(q(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$.
- ✔ **définie positive** si elle est à la fois définie et positive.

Exercice 10 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1y + x_2^2 + x_3^2$$

1. *Ecrire la forme bilinéaire associée et la matrice de q.*
2. *La forme q est-elle définie, positive ?*

Remarque 3.

- ✔ q est définie $\Longrightarrow$ sa forme polaire associée b est non dégénérée.
- ✔ b est positive et non dégénérée $\Longrightarrow$ b est définie positive.

Exercice 11 *Soit la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$*

$$b(x, y) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1$$

1. *Ecrire la forme quadratique q associée à b.*
2. *Ecrire la matrice de q.*
3. *La forme q est-elle définie, positive ?*

La proposition suivante donne un critère simple pour montrer qu'une forme quadratique est définie ou positive en utilisant la notion des valeurs propres.

Proposition:.

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ et M sa matrice dans une base B de $\mathbb{E}$. Alors

- ✔ Toutes les valeurs propres de M sont réelles (son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$).
- ✔ q est positive $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de M sont positives.
- ✔ q est définie $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont non nulles et de même signes.
- ✔ q est définie positive $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Exercice 12 *Revenons à l'exercice précedent, en utilisant maintenant la matrice de q, indiquer si la forme q est définie, positive.*

2.6 Décomposition en carrés d'une forme quadratique : Réduction de Gauss

La décomposition en carrés d'une forme quadratique (appelée aussi réduction de Gauss) est un algorithme qui permet d'écrire toute forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ comme une somme de carrés de combinaisons linéaires indépendantes des variables. La méthode employée est basée sur la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2 admettant une racine ou deux racines.

Supposons que nous avons une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j.$$

On distingue deux cas :

1^{er} cas : La forme quadratique q contient le carré d'une variable

On regroupe alors tous les termes comprenant x_i en les mettant dans un carré

$$c_{ii}(x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j)^2$$

et en soustrayant les termes ne dépendant pas de x_i.

Exemple 1 *Donner la réduction de Gauss de la forme quadratique définie par :*

$$q(x) = \mathbf{x_1^2} - \mathbf{x_2^2} + \mathbf{x_3^2} + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

2^{er} cas : La forme quadratique q ne contient aucun carré de variable

On prend un terme type $c_{ij}x_ix_j$ et on regroupe tous les termes comprenant x_i ou x_j dans un produit

$$c_{ij}(x_i + \sum_{k\neq i,j} \alpha_k x_k)(x_j + \sum_{k\neq i,j} \beta_k x_k).$$

Puis on utilise la formule

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right).$$

Les termes venant de $(a+b)$ et $(a-b)$ sont indépendants et tous les autres termes ne feront plus intervenir x_i et x_j.

Exemple 2 *Donner la réduction de Gauss de la forme quadratique définie par :*

$$q(x) = 2\mathbf{x_1x_2} + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4$$

Rappelons que si on a q sous la forme

$$q(x) = ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2$$

où B et C sont des formes linéaires. On peut la factoriser sous la forme suivante :

$$q(x) = a(x_1 + \frac{C}{a})(x_2 + \frac{B}{a}) - \frac{BC}{a}$$

Exercice 13 *Déterminer une réduction de Gauss pour les formes quadratiques suivantes :*

1) $q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4xy - 8yz.$ 2) $q(x,y,z) = xy + xz + yz + zt$

3) $q(x,y,z) = x^2 + xy + xz$

2.7 Signature d'une forme quadratique

Définition:.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la réduction de Gauss est donnée par :

$$q(x) = \alpha_1(\ell_1(x))^2 + \cdots + \alpha_k(\ell_k(x))^2, \quad k \leq n,$$

avec $(\ell_i)_{i=1\ldots k}$ sont des formes linéaires indépendantes . On note r le nombre des α_i positifs et s le nombre des α_i négatifs. Le couple (r,s) est appelé signature de la forme quadratique q.

Proposition:.

Soient q une forme quadratique de signe (r, s) sur $\mathbb{R}^n$ et b sa forme polaire.

- ✔ On a $r + s = rg(q)$.
- ✔ La forme quadratique q est non dégénérée si et seulement si $r + s = n$.
- ✔ m La forme quadratique q est positive si et seulement si sa signature est de la forme $(r, 0)$ (i.e $s = 0$).
- ✔ La forme quadratique q est non dégénérée positive si et seulement si sa signature est $(n, 0)$ (i.e $r = n$).

Exercice 14 *On revient à l'exercice précédent, déterminer la signature de chacune des formes quadratiques et en déduire si ces formes sont définies positives.*

3 Produit scalaire, Norme et vecteurs orthogonaux

3.1 Produit scalaire :

Dans cette partie, $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition: (Produit scalaire)**.**

On dit qu'une application $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** si :

- ✔ φ est **bilinéaire**.
- ✔ φ est **symétrique** : $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- ✔ φ est **définie** : $\forall x \in \mathbb{E}$, $\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{E}}$.
- ✔ φ est **positive** : $\forall x \in \mathbb{E}$, $\varphi(x, x) \geq 0$.

Autrement dit un **produit scalaire** sur $\mathbb{E}$ est une forme **bilinéaire symétrique définie positive**, on le note souvent $\langle x, y\rangle$ ou $(x \mid y)$.
On appelle **espace euclidien** un espace vectoriel de dimension fini muni d'un produit scalaire.

3.1.1 Exemples fondamentaux

On donne ici une liste de produits scalaires usuels.

- Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, on pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle x, y\rangle = x \times y.$$

L'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

- Plus généralement, sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $(x, y) = ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

L'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- Sur $\mathbb{E} = M_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$,

$$\langle X, Y\rangle = {}^tXY.$$

L'application $(X, Y) \longmapsto \langle X, Y\rangle$ est le produit scalaire canonique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Sur $\mathbb{E} = M_n(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB).$$

L'application $(A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

- Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, on pose pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

L'application $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 *Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Pour $((x, y), (x', y')) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, on pose*

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'.$$

Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Exercice 16

1. *Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\phi(X, Y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que l'application $\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\omega(X, Y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$

définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

3.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition: (Inégalité de Cauchy-Schwartz).

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$. Alors

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \mid \langle x, y\rangle \mid^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Exemple 3

- *Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :*

$$\forall\left((x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_i)_{1\leq i\leq n}\right) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

- *Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :*

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2, \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq (\int_a^b f^2(t)dt)(\int_a^b g^2(t)dt)$$

Exercice 17 *Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Démontrer que*
$$(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$$
Indication : *Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (1, \cdots, 1)$.*

2. *On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \cdots, n\}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Démontrer que*
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$
Indication : *Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $y = (\sqrt{x_1}, \cdots, \sqrt{x_n})$ et $z = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$.*

3.2 Norme et distance :

Définition: (Norme)**.**

On appelle **norme** sur $\mathbb{E}$ toute application N de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall x \in \mathbb{E}$, $N(x) \geq 0$ et $(N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{E}})$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) =\mid \lambda \mid N(x)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Dans ce cas, on dit que le couple $(\mathbb{E}, N)$ est un **espace vectoriel normé**.

Exercice 18 *On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes : Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid \\ N_2(x) &= \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2} \\ N_\infty(x) &= \| x \|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \mid x_i \mid \end{aligned}$$

Montrer que ces applications N_1, N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 19 *Soit $\mathbb{E} = \mathcal{C}^1([0.1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. N et N' les applications définies sur $\mathbb{E}$ par*

$$N(f) = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt, \qquad et \qquad N'(f) =\mid f(0) \mid \int_0^1 \mid f'(t) \mid dt.$$

Montrer que les applications N et N' sont des normes sur $\mathbb{E}$.

Exemple 4 *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, montrer que*

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad N(x) + N(y) \leq N(x+y) + N(x-y).$$

Proposition: (Inégalité sur les normes)**.**

Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad N(x) + N(y) \leq N(x+y) + N(x-y).$$

Définition: (Norme euclidienne).

Soit $(\mathbb{E}, <,>)$ un espace euclidienne. L'application, $x \longmapsto \sqrt{<x,x>}$ est une norme sur $\mathbb{E}$ dite la **norme euclidienne** associée au produit scalaire $< .,. >$.
On note $\| x \| = \sqrt{<x,x>}$

Proposition: (Inégalité sur les normes euclidiennes).

Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, où N est une norme euclidienne associée au produit scalaire $< .,. >$.

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad (N(x)+N(y))^2 \leq N(x+y)^2 + N(x-y)^2.$$

Exemple 5

1. *La norme* $N_2(x) = \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2}$ *est une nome euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$.
2. *La norme* $N_1(x) = \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ *n'est pas une norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$.

Définition: (Distance).

A partir de toute norme N sur $\mathbb{E}$, on peut construire une distance d définie par :

$$\begin{array}{rcl} d & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & N(x-y) \end{array}$$

L'application $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie les propriétés suivantes : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{E}^3$,

1. $d(x,y) = d(y,x)$.
2. $d(x,y) \geq 0$.
3. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Exercice 20 *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel. Pour* x, y*, on définit :*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Montrer que d *définit une distance.*

Remarque 4.

Soit $(\mathbb{E}, \| \, . \, \|)$ est un espace vectoriel normé, avec $\| \, . \, \|$ est une norme euclidienne associée à produit scalaire $< ., . >$ (i.e$\| \, x \, \| = \sqrt{< x, x >}$) alors la distance euclidienne entre x et y est définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \quad d(x, y) = \| \, x - y \, \|$$

Exemple 6 *Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \| \, x - y \, \|_2$, est une distance euclidienne.*

3.3 Orthogonalité :

3.3.1 Vecteurs orthogonaux :

Définition: (Vecteurs orthogonaux)**.**

Deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\langle x, y \rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

Exercice 21 *Soit l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, défini par*

$$< X, Y > = < \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} > = aa' + bb' + cc'$$

Supposant que $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha - 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, chercher α tel que X et Y soient orthogonaux.

Exercice 22 *Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degrés $\leq n$.*

1. *Montrer que $\phi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.*
2. *Déterminer la norme associée à ϕ.*
3. *Donner l'expression de la distance $d(P, Q)$ associée à ϕ.*
4. *Soit $P(X) = X^3$ et $Q(X) = aX^2 + bX + c$*

   a) *Calculer $\phi(P - Q, 1)$; $\phi(P - Q, X)$ et $\phi(P - Q, X^2)$.*

b) *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} \phi(P-Q,1)=0 \\ \phi(P-Q,X)=0 \\ \phi(P-Q,X^2)=0 \end{cases}$$

c) *Que représente le polynôme Q (pour P) ?.*

Définition:.

Deux parties A et B d'un espace vectoriel euclidien sont dites orthogonales si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B :

$$\langle x,y\rangle = 0 \qquad \text{pour tout } (x,y)\in A\times B\,.$$

On appelle orthogonal d'une partie A de E, et on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x\in E \mid \langle x,y\rangle = 0 \text{ pour tout } y\in A\}\,.$$

Définition:.

On appelle base orthonormée (ou orthonormale) d'un espace vectoriel euclidien E toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de E vérifiant

$$\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intérêt des bases orthonormales vient de ce que le produit scalaire et la norme ont même expression dans toute base orthonormale : si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E et $x=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ sont deux vecteurs de E, alors, les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ sont données par :

$$x_i=\langle e_i,x\rangle \qquad \text{pour tout } i=1,\dots,n.$$

et on a

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

3.3.2 Matrices orthogonales

Définition:.

Une matrice réelle A carrée d'ordre n est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

$$^{t}AA = I_n \iff A^{t}A = I_n \iff A\text{est inversible et } A^{-1} = {}^{t}A$$

Proposition: (Condition suffisante)**.**

Toute matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1.

Attention : (la réciproque est trivialement fausse). Toute matrice de déterminant ± 1 n'est toujours orthogonale ! Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 23 *On considère une matrice diagonalisable* $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique.*
2. *Déterminer ses valeurs propres et donner leurs ordres de multiplicité.*
3. *Vérifier que A est diagonalisable.*

Proposition:.

Soit A une matrice symétrique orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 ou -1.