TD N° : 3

Exercice 1 :

Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
2. Déterminer ses valeurs propres (sachant que 2 est racine du polynôme caractéristique)
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 :

Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A et déterminer la matrice de passage P permettant de passer de la matrice A à sa version diagonale. A nouveau, on remarquera que **2** est une valeur propre de la matrice A

Exercice 3 :

Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les puissances de la matrice $A - I_3$.
2. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_k = Ker((u - id)^k)$.
   a) Montrer que $dim(E_k) = k$. Pour cela on utilisera le fait que si f et g sont deux endormorphismes, alors $Ker(f) \subset Ker(gof)$ et on pensera au théorème du rang qui fait le lien entre le rang et la dimension du noyau. Aucun calcul n'est nécessaire
   b) En déduire une base (e_1, e_2, e_3) de E_3 telle que (e_1) est une base de E_1 et (e_1, e_2) est une base de E_2.

3. En déduire l'expression de la matrice de passage P formée par les trois vecteurs précédents. Peut-on dire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale ? Pour rappel, deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^{-1}AP$$

Exercice 4 :

Matrices et diagonalisation sous $\mathcal{R}$.
On va maintenant regarder comment on peut aisément déterminer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice sous . On considère la matrice B donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Définir la matrice B dans $\mathcal{R}$.

$$B = matrix(c(2,0,4,3,-4,12,1,-2,5), nrow = 3, byrow = TRUE)$$

Vérifiez que les vecteurs suivants sont des vecteurs propres de B.
$w_1 = (-4,3,2)$, $w_2 = (-4,0,1)$ et $w_3 = (2,1,0)$
Définition des vecteurs
$w_1 = c(-4,3,2)$
$w_2 = c(-4,0,1)$
$w_3 = c(2,1,0)$
Vérification vecteurs propres
$B\% * \%w_1$ valeur propre nulle
$[,1]$
$[1,]$ 0
$[2,]$ 0
$[3,]$ 0
$B\% * \%w_2$ valeur propre égale à 1
$[,1]$
$[1,]$ -4
$[2,]$ 0
$[3,]$ 1
$B\% * \%w_3$ valeur propre égale à 2
$[,1]$
$[1,]$ 4
$[2,]$ 2
$[3,]$ 0
Exécuter les lignes de codes suivantes et commenter Réduction d'un endomorphisme
$eig = eigen(B)$
$eig\$values$
$[1]$ $2.000000e+00$ $1.000000e+00$ $.093148e-15$
$eig\$vectors$
$[,1]$ $,2]$ $[,3]$
$[1,]$ $8.944272e-01$ $-9.701425e-01$ $.7427814\_$
$[2,]$ $4.472136e-01$ $3.539979e-15$ -0.5570860
$[3,]$ $-1.119535e-16$ $2.425356e-01$ -0.3713907
On retrouve pas les même vecteurs propres que précédemment ! Bien que l'on ait les mêmes valeurs propres.

Calculer la norme des vecteurs propres de B. Que constatez-vous ?
$vecp = eig\$vectors$
$apply(vecp^2, 2, sum)$
$[\mathbf{1}] \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1}$
On remarque que les vecteurs propres données par la fonction eigen sont des vecteurs propres de norme égale à 1