المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية

ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵙⵙⵏⵉⵏ ⵜⵉⵙⵏⵙⵉⵏ

Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès

Année universitaire : 2024 – 2025

Module : Math. Ing

Pr. A. Aberqi

$1^{ère}$ *Année GDNC*

TD N° : 2

Exercice 1 :

Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soient $a\,;b\,;c \in \mathbb{R}$ et$A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant et déterminer à quelle(s) condition(s) la matrice A est inversible.

Exercice 3 :

Déterminer l'inverse de la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ? Déterminer son inverse.
2. Déterminer une matrice N telle que $A = (I_3 + N)$.
3. Calculer N^2 et N^3. Que remarquez vous ?
4. Exprimer A^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.
5. En déduire l'expression de A^p pour tout entier $p > 0$.

Exercice 5 :

Soit $(e_1; e_2; e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs e'_1 ; e'_2 et e'_3 définis par

$$e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$$

;

$$e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$$

;

$$e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

:

1. Déterminer la matrice de passage de B vers la base B'
2. Montrer que $B' = (e'_1; e'_2; e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de passage de B' vers la base B.
4. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle A dans la base $(e_1; e_2; e_3)$. est donnée par

$$1/2 \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de φ dans la base $(e'_1; e'_2; e'_3)$.

Exercice 6 :

Matrices et opérations sous $\mathcal{R}$.
Commençons par regarder comment définir une matrice. Nous avons vu que cela pouvait être la concaténation de plusieurs vecteurs. Prenons l'exemple de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On peut faire cela de plusieurs façons :
Concaténation en ligne ...

$$A = rbind(c(1,2,3), c(4,5,6), c(7,8,9))$$

ou en colonne.

$$A = cbind(c(1,4,7), c(2,5,8), c(3,6,9))$$

On peut aussi écrire :

$$A = matrix(c(1:9), nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE)$$

Affichage
A
• la fonction rbind permet de concaténer des vecteurs en ligne (r pour row)).
• la fonction cbind permet de concaténer des vecteurs en colonne (c pour column)
Il est également possible d'accéder à un élément particulier d'une matrice, que cela soit une ligne (resp. une colonne), un ensemble de lignes (resp. de colonnes) ou encore une entrée spécifique de la matrice

Première ligne
$A[1,]$
$[1] \quad 1 \quad 2 \quad 3$
Deuxième colonne
$A[,2]$
$[1] \quad 2 \quad 5 \quad 8$
a_{23} : deuxième ligne, troisième colonne
$A[2,3]$
$[1] \quad 6$
Lignes 1 et 3
$A[c(1,3),]$
Colonnes 2 et 3
$A[,c(2,3)]$
le produit matriciel : on considère la matrice A définie précédemment et la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices
$B = rbind(c(1,0,0), c(0,3,0), c(0,0,2))$
$A\% * \%B$
le produit d'Hadamard
Produit de deux matrices
$A * B$
Transposée
$t(A)$
Rang, trace, déterminant et inverse
Installation du package
$install.packages("Matrix")$
Chargement de la librairie
$library(Matrix)$
$C = rbind(c(2,4,-3,5),$
$c(4,1,-2,7),$
$c(6,2,4,1),$
$c(8,-5,-2,1))$
Calcul du rang
$rankMatrix(C)$
Calcul de la trace
$sum(diag(A))$
Calcul du déterminant
$det(A)$
Extraction de la diagonale de A
$diag(A)$
$A = rbind(c(5,2,2), c(0,3,5), c(0,0,1))$
Calcul de l'inverse
$solve(A)$