المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية

ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵙⵙⵏⵉ ⵜⵓⵙⵏⵉⵙⵉⵏ

Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès

Année universitaire : 2024 – 2025

Module : Math. Ing

Pr. A. Aberqi

$1^{ère}$ *Année GDNC*

TD N° : 4

Exercice 1 :

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs singulières de A.

Exercice 2 :

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Nous obtenons une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$.

Exercice 3 :

1. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.
2. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 5 & 10 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 :

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. On va essayer de déterminer la décomposition en valeurs singulières de cette matrice, ses vecteurs singuliers contenus dans les matrices U et U' ainsi que la qualité d'une approximation de rang 1.

Exercice 5 :

SVD sous $\mathcal{R}$.

Décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire relativement à des métriques classiques définies par la matrice identité.

Génération d'un matrice $n \times p$

$X = matrix(runif(100), 20, 5)$

SVD

$res = svd(X)$

Valeurs singulières

$res\$d$

Vérifier l'orthonormalité des vecteurs
$t(res\$u)\% * \%res\$u$
$t(res\$v)\% * \%res\$v$
Vérifier la reconstruction de X
à l'erreur machine près
$X - res\$u\% * \%diag(res\$d)\% * \%t(res\$v)$
Comparer ci-dessous les valeurs propres des matrices X^tX et XX^t
. Que dire des dimensions, du rang de ces matrices, de la multiplicité de la valeur propre nulle ?
Comparer avec les valeurs propres et les valeurs singulières de X.
Valeurs et vecteurs propres
$dec1 = eigen(t(X)\% * \%X)$
$dec2 = eigen(X\% * \%t(X))$
$dec1\$values$
$dec2\$values$
$sqrt(dec1\$values)$
$U = dec2\$vectors$
$V = dec1\$vectors$
Orthonormalité des vecteurs
$t(V)\% * \%V$
$t(U)\% * \%U$
Vérifier la bonne cohérence des dimensions de ces vecteurs puis comparer les vecteurs singuliers à droite et à gauche de X avec les vecteurs propres de ces matrices. D'où viennent les différences ?
$V - res\$v$
$U[, 1 : 5] - res\$u$
Vérifier que les premiers termes de la SVD sont la meilleure approximation de X par une matrice de rang inférieure.
approximation de rang 4
$Xhat = res\$u[, 1 : 4]\% * \%diag(res\$d[1 : 4])\% * \%t(res\$v[, 1 : 4])$
calcul de la norme $VertX - Xhat||^2$
$sum((X - Xhat) * *2)$
Comparer cette norme avec les carrés des valeurs singulières, que vaudrait cette norme avec une approximation de rang 3 ?
Retrouver la matrice des vecteurs singuliers à droite à partir de celle des vecteurs singuliers à gauche et réciproquement.
Vecteurs singuliers à gauche :
$Ug = res\$u$
vecteurs singuliers à droites
calculés à partir de U
$Vd = t(X)\% * \%Ug$
Vérifier l'orthogonalité
$t(Vd)\% * \%Vd$
mais pas l'orthonormalité
Que vaut la diagonale ?
$diag(t(Vd)\% * \%Vd) - res\$d * *2$
Il faut normaliser
$Vd = Vd\% * \%diag(1/res\$d)$
$t(Vd)\% * \%Vd$
Vérifier
$Vd - res\$v$
