

2015 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

注意: ① 答题方式为闭卷。 ② 可以使用计算器。

③ 将填空题的答案直接填在试卷上, 计算题答在答题纸上。

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题 (每空 2 分, 共 40 分)

1. 近似值 $a = -12.341$ 有 4 位有效数字, 则其绝对误差限为 0.5×10^{-2} , 相对误差限为 0.04% 。

2. 已知 $x = 2.14 \pm 0.005$, 用 $\tilde{y} = \sqrt{2.14}$ 作为 $y = \sqrt{x}$ 的近似值, 则其绝对误差限为 1.7×10^{-3} , 近似值有 2 位有效数字。

3. 求 $\sqrt[3]{a}$ 的牛顿迭代格式为 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2}$ 。

4. 单点弦截法不动点 x_0 应满足 $f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$ 。

5. 用迭代法求解 $x = \sin x + 0.25$ 在区间 $[0.9, 1.5]$ 上的根, 要求误差限为 0.01, 则需迭代 8 步。

6. 用平方根法解线性方程组 $\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 12 \\ 2x + 3y + 2z = 10 \\ 5x + 2y + 10z = 1 \end{cases}$ 时, $u_{11} = \underline{2}$ 。

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\|A\|_1 = \underline{9}$, $\|A\|_\infty = \underline{11}$ 。

8. 线性方程组 $\begin{cases} 5x + 2y + z = -12 \\ -x + 4y + 2z = 10 \\ 2x - 5y + 10z = 1 \end{cases}$ 用 Jacobi 迭代法求解, 迭代过程是否收敛? $\underline{\text{不收敛}}$ 。

迭代矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.2 \\ 0.25 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ -0.25 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

9. 向量 $X=(1,-2,3)$, $Y=(3,4,0)$, 则向量 X 的 1-范数 $\|X\|_1=$ 6, 向量 Y 的 2-范数 $\|Y\|_2=$ 5。

10. 设 $f(x)=x^3+x-1$, 则差商 $f[3,2,1,0]=$ 1。

11. 已知 $f[4,3,2,1]=2$, 则 $x=1$ 点的 3 阶差分值为 7。

12. 对于积分 $I(f)=\int_{-1}^1 f(x)dx$, 求积公式 $I(f) \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$ 的代数精确度为 3。

13. 已知 $n=4$ 时的牛顿-科特斯系数 $C_0^{(4)}=\frac{7}{90}, C_3^{(4)}=\frac{16}{45}$, 则 $C_2^{(4)}=$ $\frac{2}{15}$ 。

14. 高斯求积公式 $\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n \omega_i y_i$ 具有 $2n-1$ 次代数精确度。

15. 用带松弛因子的松弛法 ($\omega=0.5$) 解方程组 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$ 的迭代公式是 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{0.5}{5}(-12 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{0.5}{4}(-x_1^{(k)} + 20 - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{0.5}{10}(2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 3 - 10x_3^{(k)}) \end{cases}$

二、采用牛顿下山法求方程 $x^3=4$ 的根, 初始值 $x_0=1$, 计算过程保留小数点后 4 位。
(10 分)

三、设有方程组 $AX=B$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}$$

用高斯消元法求方程组的解。(8 分)

四、设方程组 $\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2 \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$, 试判断此方程组的雅可比迭代法及高斯-赛德尔迭代法的收敛性, 并用能够收敛的方法进行计算, 初值 $x_0^{(0)}=0, x_1^{(0)}=0, x_2^{(0)}=0$, 计算结果保留小数点后 3 位。(12 分)

五、已知函数表如下：

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	1	9	23	3

用三阶拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式计算 $f(2.2)$ 的近似值, 假设 $|f^{(4)}(x)| \leq 1$, 估计结果的误差。(12 分)

六、求满足下表条件的埃尔米特 (Hermite) 插值多项式。(8 分)

x_i	0	1	2
y_i	0	2	1
y_i'	1	1	

七、用龙贝格方法计算积分 $I = \int_{-1}^1 x^2 dx$, 计算过程保留小数点后 4 位。(10 分)

$$2. \quad x^2 = 4$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 4}{2x}$$

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda \left(x_n - \frac{x_n^2 - 4}{2x_n} \right)$$

$$x_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad f(1) = -3$$

$$\lambda = 1, \quad x_1 = 2, \quad |f(2)| > |f(1)|$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -0.625, \quad |f\left(\frac{3}{2}\right)| < |f(1)|$$

$$x_1 = 1.5, \quad y_2 = 1.5725, \quad f(1.5) = -0.625$$

$$\lambda = 1, \quad x_2 = 1.5725, \quad |f(1.5725)| \approx 0.038, \quad |f(1.5725)| < |f(1.5)|$$

$$x_2 = 1.5725, \quad y_3 = 1.5874$$

$$\lambda = 1, \quad x_3 = 1.5874, \quad f(1.5874) = -0.001, \quad |f(1.5874)| < |f(1.5725)|$$

$$x_3 = 1.5874, \quad y_4 = 1.5874$$

$$\lambda = 1, \quad x_4 = 1.5874$$

$$x = 1.5874$$

12.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{求解 } \vec{x}: X^{(b+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(b)} + D^{-1}B$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad |D^{-1}| \neq 0$$

$$|\lambda I - (I - D^{-1}A)| = |D^{-1} \cdot |\lambda D - D + A|| = 0$$

$$|\lambda D - D + A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 0.8) - 0.4(0.4\lambda - 0.32) + 0.4(0.32 - 0.4\lambda)$$

$$= \lambda^2 - 0.64\lambda - 0.16\lambda + 0.128 + 0.128 - 0.16\lambda$$

$$= \lambda^2 - 0.96\lambda + 0.256 = 0$$

$$f(-1) > 0, \quad f(1) < 0$$

$$\exists \lambda \in (-1, 1), \text{ 使 } f(\lambda) = 0$$

$$\text{高斯} \sim: X^{(b+1)} = (D+L)^{-1}U X^{(b)} + (D+L)^{-1}B$$

$$|\lambda I + (D+L)^{-1}U| = 0, \quad |D+U| \neq 0$$

$$|(D+L)^{-1}| \cdot |\lambda(D+L) + U| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4\lambda & \lambda & 0.8 \\ 0.4\lambda & 0.8\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sim 0.8\lambda^2$$

$$0 = \lambda(\lambda^2 - 0.64\lambda) - 0.4(0.4\lambda^2 - 0.32\lambda) + 0.4(-0.4\lambda^2 + 0.4\lambda)$$

$$= \lambda^2 - 0.64\lambda^2 - 0.16\lambda^2 + 0.128\lambda - 0.16\lambda^2 + 0.128\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 0.64\lambda + 0.128) = 0$$

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 1, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 1, \quad z = 4$$

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 2 - 2 \times 3 = -4, \quad u_3 = \frac{2 - 1 \times 2}{1} = 0, \quad z = \frac{17 - 2 \times 4}{1} = 9$$

$$u_1 = 8.5, \quad u_2 = \frac{1 - 4 \times 8.5}{-4} = 2.375$$

$$u_{33} = \frac{-1 - 4.5 \times 1 - 2.375 \times 1}{1} = -1.875, \quad u_4 = 1$$

$$z_2 = 1 - 2.5 \times 4 - 2.375 \times 1 = -3.4375$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.628, \quad x_3 = 0.203$$

$$e < 1$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_2 + x_3 = 9 \\ -6.875x_3 = -3.4375 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(b+1)} = (1 - 0.4x_2^{(b)} - 0.4x_3^{(b)}) = -0.135 \\ x_2^{(b+1)} = (2 - 0.4x_1^{(b+1)} - 0.8x_3^{(b)}) = -1.081 \\ x_3^{(b+1)} = (3 - 0.4x_1^{(b+1)} - 0.8x_2^{(b+1)}) = 2.919 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(0)} = 0, & x_2^{(0)} = 0, & x_3^{(0)} = 0 & -0.203 & -0.135 & 0.628 & 0.203 \\ x_1^{(1)} = 1, & x_2^{(1)} = -1, & x_3^{(1)} = 5 & -0.175 & -0.725 & 0.628 & -0.135 \\ -0.175 & 0.014 & 0.238 & -0.173 & -0.827 & 0.755 & -0.135 \\ -0.175 & 0.017 & 0.238 & -0.173 & -0.827 & 0.755 & -0.135 \\ -0.175 & 0.017 & 0.238 & -0.173 & -0.827 & 0.755 & -0.135 \\ -0.175 & 0.017 & 0.238 & -0.173 & -0.827 & 0.755 & -0.135 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(2,2) &= \frac{(2,2-1)(2,2-2)(2,2-4)}{(1-1)(0-1)(0-4)} \cdot 1 \\
 &+ \frac{(2,2-0)(2,2-2)(2,2-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} \cdot 9 \\
 &+ \frac{(2,2-0)(2,2-1)(2,2-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} \cdot 23 \\
 &+ \frac{(2,2-0)(2,2-1)(2,2-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \cdot 3 \\
 &= 25.069
 \end{aligned}$$

$$|E| = |0.089 + 0.269 + 1.188 + 0.022| \times 0.9 = 0.863$$

$$\begin{aligned}
 |R_2(x)| &= \left| \frac{(2,2-0)(2,2-1)(2,2-2)(2,2-4)}{4!} \cdot \frac{f^{(4)}(x)}{4!} \right| \\
 &= 0.0396
 \end{aligned}$$

$$\zeta = |E| + |R_2| = 0.863 + 0.0396 < 1$$

$$0.5 \times 10^1 < 0.0396$$

$$f(2,2) \approx 25.1 \quad \text{from } 2.5 \times 10^1$$

$$\frac{1}{T_1}, \quad L_1$$

x	y			
0	0			
		1		
0	0		1	
		2		-2
1	2		-1	0.75
		1		-0.5
1	2		-2	
		-1		
2	1			

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 0 + x(1 + x^2 + x^2(x-1) + (-2) + x^2(x-1)) \cdot 0.75 \\
 &= x + x^3 - 2(x^3 - x^4) + 0.75(x^4 - 2x^3 + x^2) \\
 &= 0.75x^4 + (-2 + 1.5)x^3 + (1 + 2 + 0.75)x^2 + x \\
 &= 0.75x^4 - 0.5x^3 + 3.75x^2 + x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 \\
 T_1 &= \frac{1}{2}(f(-1) + f(1)) = 1 \\
 T_2 &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}(f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})) = 1.75 \\
 \zeta_1 &= \frac{4}{4-1}T_2 - \frac{1}{4-1}T_1 = 2 \\
 T_4 &= \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}(f(-\frac{1}{4}) + f(-\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4})) \\
 &= 1.1875 \\
 \zeta_2 &= \frac{4}{4-1}T_4 - \frac{1}{4-1}T_2 = 1 \\
 \zeta_1 &= \frac{4^2}{4^2-1}\zeta_2 - \frac{1}{4^2-1}\zeta_2 = 0.9233 \\
 T_8 &= \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}(f(-\frac{1}{8}) + f(-\frac{1}{16}) + f(-\frac{1}{32}) + f(-\frac{1}{64}) + f(\frac{1}{64}) + f(\frac{1}{32}) + f(\frac{1}{16}) + f(\frac{1}{8})) \\
 &= 0.9219 \\
 \zeta_4 &= \frac{4}{4-1} \cdot 0.9219 - \frac{1}{4-1} \cdot 1.1875 = 0.8334 \\
 \zeta_2 &= \frac{4^2}{4^2-1} \cdot \zeta_4 - \frac{1}{4^2-1} \cdot \zeta_4 = 0.8223 \\
 T_1 &= \frac{4^3}{4^3-1} \cdot \zeta_2 - \frac{1}{4^3-1} \cdot \zeta_1 = 0.8205
 \end{aligned}$$

χ

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{b-a}{2}(f(-1) + f(1)) = 2 \\
 T_2 &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{2}{2}(f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})) = 1
 \end{aligned}$$

$$\zeta_1 = \frac{4}{4-1}T_2 - \frac{1}{4-1}T_1 = 0.6667$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{2}{4}(f(-\frac{1}{4}) + f(-\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4})) = 0.75$$

$$\zeta_2 = \frac{4}{4-1}T_4 - \frac{1}{4-1}T_2 = 0.6667$$