2006 级概率与数理统计期末试题 A 卷答案

一、填空题（ 共 20 分　每题 2 分）

1、 $\frac{1}{3}$；　　2、$b(5,\ 0.5)$；　　3、$\frac{5}{9}$ ，$\frac{8}{9}$　4、1，　3/2；5、 σ^2；

6、 $\frac{1}{2}$；　　　7、不是；　　　8、 $(-0.98,\ 0.98)$.

二、（共 12 分）

解：设 A 表示“目标被击落”， B_1, B_2, B_3 依次表示“甲、乙、丙击中目标”，

C_i 表示“有 i 个人击中目标”， i=1，2，3。

则有题设有：$P(B_1)=0.4,\quad P(B_2)=0.5,\quad P(B_3)=0.7$

$$C_1 = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 \cup \overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3 \cup \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3$$

$$P(C_1) = P(B_1\overline{B}_2\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1 B_2\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1\overline{B}_2 B_3)$$

$$= P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)$$

$$= 0.4\times0.5\times0.3 + 0.6\times0.5\times0.3 + 0.6\times0.5\times0.7 = 0.36$$

$C_2 = B_1B_2\overline{B}_3 \cup B_1\overline{B}_2B_3 \cup \overline{B}_1B_2B_3$　同理　$P(C_2)=0.41$

$C_3 = B_1B_2B_3$　　　$P(C_3)=0.14$

由全概率公式得：

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(C_i)P(A\,|\,C_i)$$ ···························+2

$$= 0.36\times0.2 + 0.41\times0.6 + 0.14\times1 = 0.458$$ ············+10

三、（共 14 分）

解：(1) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

(2) 设X和Y的分布函数分别为$F_X(x), F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0.$

当$y\ge 0$时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], y\ge 0\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, y\ge 0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

(3) $\Phi(1)=0.8413,\Phi(2)=0.9972$

$$P\{Z=1\}=P\{-1\le X\le 1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$$
$$=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$$
$$P\{Z=2\}=P\{-2\le X<-1\}+P\{1<X\le 2\}=2[\Phi(2)-\Phi(1)]$$
$$=2\times(0.9972-0.8413)=0.3118$$
$$P\{Z=3\}=1-P\{Z=1\}-P\{Z=2\}=1-0.6826-0.3118=0.0056$$

Z	1	2	3
P	0.6826	0.3118	0.0056

四、(共 12 分)

解：(1)　D 的面积 m(D) = 2, 所以, (X,Y) 的联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x,y)\in D,\\ 0 & 其它.\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +4$$

(2) 设 X 与 Y 的边际密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_1^x\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(x-1),\qquad (1\le x\le 3).$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^3\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(3-y),\qquad (1\le y\le 3).$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。$\cdots\cdots\cdots$+4

（3） $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x, z-x)\,dx$$

非零区域 $\begin{cases}1 \le x \le 3 \\ 1 \le z-x \le x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 \le x \le 3 \\ 1+x \le z \le x\end{cases}$

当 $2 \le z < 4$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z-1} \frac{1}{2}dx=\frac{z}{4}-\frac{1}{2}$

当 $4 \le z \le 6$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{3} \frac{1}{2}dx \ =-\frac{z}{4}+\frac{3}{2}$

其它，$f_Z(z)=0$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}-\frac{1}{2}, & 2 \le z < 4 \\ -\frac{z}{4}+\frac{3}{2}, & 4 \le z \le 6 \\ 0, & \text{[illegible]}\end{cases}$$ ………+4

五、（共 10 分）

解：(1) $\because X_1 \sim B(1, 0.8)$，　$X_2 \sim B(1, 0.1)$

$$\therefore EX_1=0.8, \qquad DX_1=0.8 \times 0.2=0.16$$

$$EX_2=0.1, \qquad DX_2=0.1 \times 0.9=0.09$$

则 (X_1, X_2) 的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+4$

如 $P\left(X_1=1, X_2=0\right)=\frac{80}{100}=0.8$

（2） X_1X_2 的分布律为

X_1X_2	0	1
P	1	0

$\therefore E\left(X_1X_2\right)=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+2$

$$\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right)=EX_1X_2-EX_1EX_2$$
$$=0-0.08\times 0.1=-0.08 \qquad \cdots\cdots+2$$

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}}=-\frac{2}{3} \cdots\cdots\cdots+2$$

六、（8 分）

解：$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}_n\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $X_{n+1}-\overline{X}_n\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$。

故 $$U=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim N(0,1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+3$$

$$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+2$$

且 X_{n+1} 与 $\overline{X}_n$ 及 S^2 都独立，所以 U 与 W 也独立，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+1$

于是有

$$\frac{U}{\sqrt{W/n-1}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1)\cdots\cdots+2$$

七、（12 分）

解：（1）$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^{\infty}x\frac{2}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\frac{2\theta}{\sqrt{2\pi\theta}}(-e^{-\frac{x^2}{2\theta}})\Big|_0^{\infty}=\frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{\pi}}}$ $\cdots\cdots\cdots+3$

令 $\dfrac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{\pi}}=\bar{X}$ ·········+2

得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\dfrac{\pi}{2}\bar{X}^2$ ·········+1

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}=(0.5\pi\theta)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}}$ ·········+2

$\ln L(\theta)=-\dfrac{n}{2}\ln(0.5\pi\theta)-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}$ ·········+1

$\dfrac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=-\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}=0$ ············+2

得 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}$ ············+1

八、（共 12 分）

解： 作统计假设

$$H_0:\sigma^2=0.108^2,\quad H_1:\sigma^2\neq 0.108^2;$$ ·········+2

选取统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1);$$ ·········+2

拒绝域 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或者 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ·········+3

查表得

$$\chi^2_{0.025}(4)=11.143,\quad \chi^2_{0.975}(4)=0.484,$$

计算得：

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{4\times 0.052}{0.108^2}=17.83>11.43,$$ ··············+4

这表明拒绝 H_0，即不可能认为此公司股价波动仍为 0.108^2. ·········+1