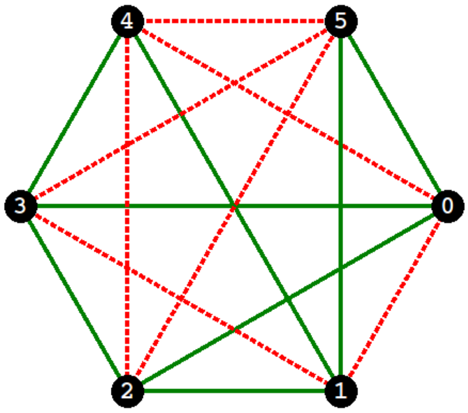
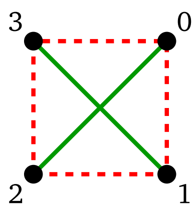
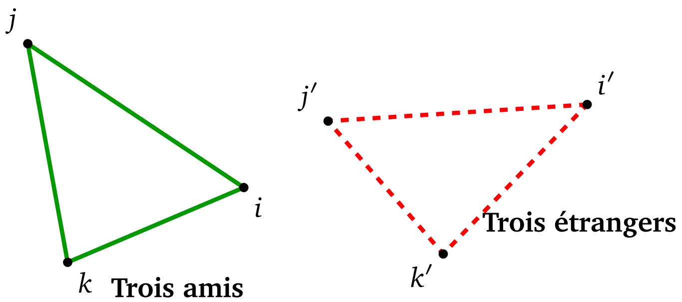
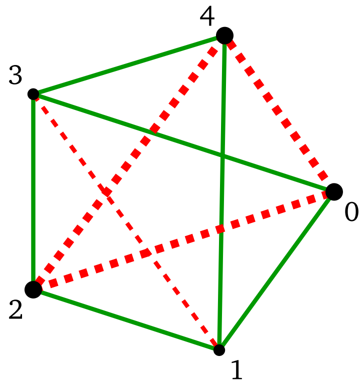
Graphes et combinatoire de Ramsey





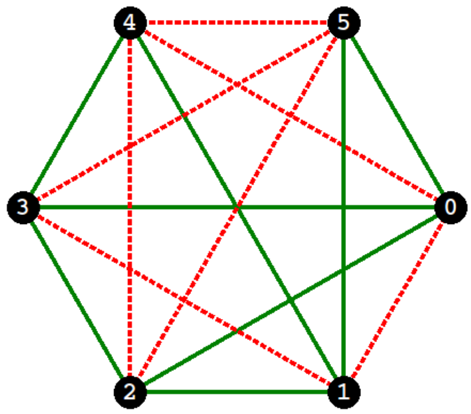


Voici un exemple de graphe à 5 sommets qui possède 3 sommets étrangers (les sommets 0, 2 et 4), même s'il ne possède pas trois amis.



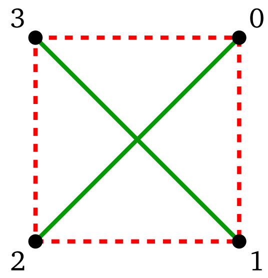
Un graphe avec $n = 5$ qui vérifie l'énoncé de Ramsey

> **Proposition.** Dans un groupe de 6 personnes, il y a toujours 3 amis (les trois se connaissent deux à deux) ou 3 étrangers (les trois sont tous des inconnus les uns pour les autres).



Nombre de sommets	Nombre de graphes	Temps de calcul approximatif
$n = 6$	32 768	$<$ 1 seconde
$n = 7$	2 097 152	$<$ 1 minute
$n = 8$	268 435 456	$<$ 1 heure
$n = 9$	68 719 476 736	$<$ 10 jours

Modélisation



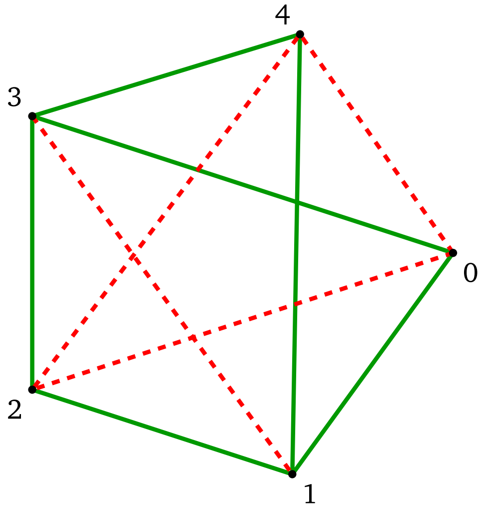
indice j

indice i

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=0$	0	0	1	0
$i=1$	0	0	0	1
$i=2$	1	0	0	0
$i=3$	0	1	0	0

n

n



	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	0	1	0	1	0
$i=1$	1	0	1	0	1
$i=2$	0	1	0	1	0
$i=3$	1	0	1	0	1
$i=4$	0	1	0	1	0

```
graphe = [[0 for j in range(n)] for i in range(n)]
```

`graphe[i][j] = 1` et `graphe[j][i] = 1`

Sous-ensembles

Soit $E_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ l'ensemble des entiers de 0 à $n-1$. L'ensemble E_n contient donc n éléments.

Par exemple $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$...

Exemple.

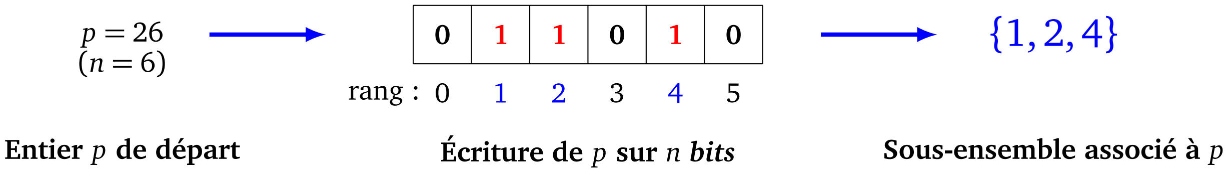
Il y a 8 sous-ensembles de E_3, ce sont :

- le sous-ensemble $\{0\}$ composé du seul élément 0 ;
- le sous-ensemble $\{1\}$ composé du seul élément 1 ;
- le sous-ensemble $\{2\}$ composé du seul élément 2 ;
- le sous-ensemble $\{0, 1\}$ composé de l'élément 0 et de l'élément 1 ;
- le sous-ensemble $\{0, 2\}$;
- le sous-ensemble $\{1, 2\}$;
- le sous-ensemble $\{0, 1, 2\}$ composé de tous les éléments ;
- l'ensemble vide $\varnothing$ qui ne contient aucun élément !

Proposition. L'ensemble E_n contient 2^n sous-ensembles.

Exemple. $n = 6$ et $p = 26$.

- L'écriture binaire de $p = 26$ sur $n = 6$ *bits* est `[0,1,1,0,1,0]`,
- il y a des 1 au rang 1, 2 et 4 (en commençant au rang 0 à gauche),
- le sous-ensemble associé est alors $\{1, 2, 4\}$.



Exemple. $n = 8$ et $p = 57$

- L'écriture binaire sur 8 *bits* est `[0,0,1,1,1,0,0,1]`,
- le sous-ensemble associé correspond aux rangs $2, 3, 4, 7$,
- c'est donc $\{2, 3, 4, 7\}$.