

Chercher et remplacer

On considère une « phrase » composée de seulement deux lettres possibles 0 et 1. Dans cette phrase nous allons chercher un motif (une sous-chaine) et le remplacer par un autre.

Exemple.

Appliquer la transformation 01 → 10 à la phrase 10110.

On lit la phrase de gauche à droite, on trouve le premier motif 01 à partir de la seconde lettre, on le remplace par 10 :

$$1(01)10 \mapsto 1(10)10$$

On peut recommencer à partir du début de la phrase obtenue, avec toujours la même transformation 01 → 10 :

$$11(01)0 \mapsto 11(10)0$$

Le motif 01 n'apparaît plus dans la phrase 11100 donc la transformation 01 → 10 laisse maintenant cette phrase inchangée.

Résumons : voici l'effet de la transformation itérée 01 → 10 à la phrase 10110 :

$$10110 \mapsto 11010 \mapsto 11100$$

Exemple.

Appliquer la transformation $001 \rightarrow 1100$ à la phrase 0011 .

Une première fois :

$$(001)1 \mapsto (1100)1$$

Une seconde fois :

$$11(001) \mapsto 11(1100)$$

Et ensuite la transformation ne modifie plus la phrase.

Exemple.

Voyons un dernier exemple avec la transformation $01 \rightarrow 1100$ pour la phrase de départ 0001 :

$0001 \mapsto 001100 \mapsto 01100100 \mapsto 1100100100 \mapsto \dots$

On peut itérer la transformation, pour obtenir des phrases de plus en plus longues.

On considère ici uniquement des transformations du type $0^a 1^b \rightarrow 1^c 0^d$, c'est-à-dire un motif avec d'abord des 0 puis des 1 est remplacé par un motif avec d'abord des 1 puis des 0.

Catégories de transformations.

- **Transformation linéaire.** Vérifie expérimentalement que la transformation $0011 \rightarrow 110$ est *linéaire*, c'est-à-dire que pour toutes les phrases de longueur p , il y aura au plus de l'ordre de p itérations au maximum. Par exemple pour $p = 10$, quel est le nombre maximum d'itérations ?
- **Transformation quadratique.** Vérifie expérimentalement que la transformation $01 \rightarrow 10$ est *quadratique*, c'est-à-dire que pour toutes les phrases de longueur p , il y aura au plus de l'ordre de p^2 itérations au maximum. Par exemple pour $p = 10$, quel est le nombre maximum d'itérations ?
- **Transformation exponentielle.** Vérifie expérimentalement que la transformation $01 \rightarrow 110$ est *exponentielle*, c'est-à-dire que pour toutes les phrases de longueur p , il y aura un nombre fini d'itérations, mais que ce nombre peut être très grand (beaucoup plus grand que p^2) avant stabilisation. Par exemple pour $p = 10$, quel est le nombre maximum d'itérations ?
- **Transformation sans fin.** Vérifie expérimentalement que pour la transformation $01 \rightarrow 1100$, il existe des phrases qui ne vont jamais se stabiliser.