Binaire I

Les ordinateurs transforment toutes les données en nombres et manipulent uniquement ces nombres. Ces nombres sont stockés sous la forme de listes de 0 et de 1. C'est l'écriture binaire des nombres ! Pour mieux comprendre l'écriture binaire, tu vas d'abord mieux comprendre l'écriture décimale.

Cours 1 (Écriture décimale)**.**
L'écriture habituelle des entiers se fait dans le système décimal (en base 10). Par exemple, 70 685 c'est $7 \times 10\,000 + 0 \times 1\,000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$:

7	0	6	8	5
10000	1000	100	10	1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

(on voit bien que 5 est le chiffre des unités, 8 celui des dizaines, 6 celui des centaines...).
Il faut bien comprendre les puissances de 10. On note 10^k pour $10 \times 10 \times \cdots \times 10$ (avec k facteurs).

d_{p-1}	d_{p-2}	$\cdots$	d_i	$\cdots$	d_2	d_1	d_0
10^{p-1}	10^{p-2}	$\cdots$	10^i	$\cdots$	10^2	10^1	10^0

On calcule donc l'entier correspondant aux chiffres $[d_{p-1}, d_{p-2}, \ldots, d_2, d_1, d_0]$ par la formule :

$$n = d_{p-1} \times 10^{p-1} + d_{p-2} \times 10^{p-2} + \cdots + d_i \times 10^i + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$

Activité 1 (De l'écriture décimale vers l'entier)**.**

Objectifs : à partir de l'écriture décimale, retrouver l'entier.

Écris une fonction `decimale_vers_entier(liste_decimale)` qui à partir d'une liste représentant l'écriture décimale calcule l'entier correspondant.

`decimale_vers_entier()`

Usage : `decimale_vers_entier(liste_decimale)`
Entrée : une liste de chiffres entre 0 et 9
Sortie : l'entier dont l'écriture décimale est la liste

Exemple : si l'entrée est `[1,2,3,4]`, la sortie est `1234`.

Indications. Il faut faire la somme d'éléments du type

$$d_i \times 10^i \quad \text{pour } 0 \leqslant i < p$$

où p est la longueur de la liste et d_i est le chiffre en position i *en comptant à partir de la fin* (c'est-à-dire de droite à gauche). Pour gérer le fait que l'indice i utilisé pour parcourir la liste ne correspond pas à la puissance de 10, il y a deux solutions :

- comprendre que $d_i =$`liste`$[p-1-i]$ où `liste` est la liste des p chiffres,
- ou bien commencer par inverser `liste`.

Cours 2 (Binaire)**.**

- **Puissances de 2.** On note 2^k pour $2\times 2\times\cdots\times 2$ (avec k facteurs). Par exemple, $2^3 = 2\times 2\times 2 = 8$.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

- **Écriture binaire : un exemple.**
  Tout entier admet une écriture binaire, c'est-à-dire une écriture où les seuls chiffres sont des 0 ou des 1. En binaire, les chiffres sont appelés des ***bits***. Par exemple, 1.0.1.1.0.0.1 (prononce les chiffres un par un) est l'écriture binaire de l'entier 89. Comment faire ce calcul ? C'est comme pour la base 10, mais en utilisant les puissances de 2 !

1	0	1	1	0	0	1
64	32	16	8	4	2	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

  Donc l'écriture 1.0.1.1.0.0.1 représente l'entier :

$$1\times 64+0\times 32+1\times 16+1\times 8+0\times 4+0\times 2+1\times 1 = 64+16+8+1 = 89.$$

- **Écriture binaire : formule.**

b_{p-1}	b_{p-2}	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_2	b_1	b_0
2^{p-1}	2^{p-2}	$\cdots$	2^i	$\cdots$	2^2	2^1	2^0

  On calcule donc l'entier correspondant aux *bits* $[b_{p-1}, b_{p-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0]$ comme une somme de termes $b_i\times 2^i$, par la formule :

$$n = b_{p-1}\times 2^{p-1} + b_{p-2}\times 2^{p-2} + \cdots + b_i\times 2^i + \cdots + b_2\times 2^2 + b_1\times 2^1 + b_0\times 2^0$$

- `Python` **et le binaire.** `Python` accepte que l'on écrive directement les entiers en écriture binaire, il suffit d'utiliser le préfixe « `0b` ». Exemples :
  — avec `x = 0b11010`, alors `print(x)` affiche 26,
  — avec `y = 0b11111`, alors `print(y)` affiche 31,
  — et `print(x+y)` affiche 57.

Activité 2 (De l'écriture binaire vers l'entier)**.**

Objectifs : à partir de l'écriture binaire, retrouver l'entier (en écriture décimale usuelle).

1. Calcule les entiers dont l'écriture binaire est donnée ci-dessous. Tu peux le faire à la main ou t'aider de `Python`. Par exemple 1.0.0.1.1 vaut $2^4+2^1+2^0 = 19$ ce que confirme la commande `0b10011` qui renvoie 19.
   - 1.1, 1.0.1, 1.0.0.1, 1.1.1.1
   - 1.0.0.0.0, 1.0.1.0.1, 1.1.1.1.1
   - 1.0.1.1.0.0, 1.0.0.0.1.1
   - 1.1.1.0.0.1.0.1

2. Écris une fonction `binaire_vers_entier(liste_binaire)` qui à partir d'une liste représentant l'écriture binaire calcule l'entier correspondant.

`binaire_vers_entier()`

Usage : `binaire_vers_entier(liste_binaire)`
Entrée : une liste de *bits* 0 et 1
Sortie : l'entier dont l'écriture binaire est la liste

Exemples :
- entrée `[1,1,0]`, sortie 6
- entrée `[1,1,0,1,1,1]`, sortie 55
- entrée `[1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,1,1]`, sortie 3383

Indications. Il faut cette fois faire la somme d'éléments du type

$$b_i \times 2^i \quad \text{pour } 0 \leqslant i < p$$

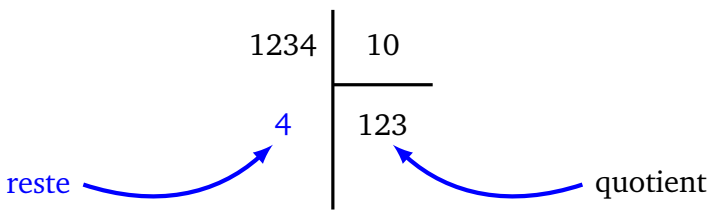
où p est la longueur de la liste et b_i est le *bit* (0 ou 1) en position i de la liste en comptant à partir de la fin.

3. Voici un algorithme qui effectue le même travail : il permet le calcul de l'entier à partir de l'écriture binaire, mais il a l'avantage de ne jamais calculer directement des puissances de 2. Programme cet algorithme en une fonction `binaire_vers_entier_bis()` qui a les mêmes caractéristiques que la fonction précédente.

Algorithme.
Entrée : `liste` : une liste de 0 et de 1
Sortie : le nombre binaire associé
- Initialiser une variable n à 0.
- Pour chaque élément b de `liste` :
  — si b vaut 0, alors faire $n \leftarrow 2n$,
  — si b vaut 1, alors faire $n \leftarrow 2n+1$.
- Le résultat est la valeur de n.

Cours 3 (Écriture décimale (bis))**.**
Bien sûr, quand tu vois le nombre 1234 tu sais tout de suite trouver la liste de ses chiffres $[1,2,3,4]$. Mais comment faire en général à partir d'un entier n ?

1. On aura besoin de la division euclidienne par 10 :
   - on calcule par `n % 10` le ***reste***, on l'appelle aussi *n* ***modulo*** 10
   - on calcule par `n // 10` le ***quotient*** de cette division.



2. Les commandes Python sont simplement `n % 10` et `n // 10`.
   Exemple : `1234 % 10` vaut 4 ; `1234 // 10` vaut 123.

3.
- Le chiffre des unités de n s'obtient comme le reste modulo 10 : c'est $n\%10$. Exemple $1234\%10 = 4$.
- Le chiffre des dizaines s'obtient à partir du quotient de la division de n par 10, puis en prenant le chiffre des unités de ce nombre : c'est donc $(n//10)\%10$. Exemple : $1234//10 = 123$, puis on a $123\%10 = 3$; le chiffre des dizaines de 1234 est bien 3.
- Pour le chiffre de centaines, on calcule le quotient de la division de n par 100, puis on prend le chiffre des unités. Exemple $1234//100 = 12$; 2 est le chiffre des unités de 12 et c'est le chiffre des centaines de 1234. Remarque : diviser par 100, c'est diviser par 10, puis de nouveau par 10.
- Pour le chiffre des milliers on calcule le quotient de la division par 1000 puis on prend le chiffre des unités…

Activité 3 (Trouver les chiffres d'un entier)**.**

Objectifs : décomposer un entier en la liste de ses chiffres (en base 10*).*

Programme l'algorithme suivant en une fonction `entier_vers_decimale()`.

`entier_vers_decimale()`

Usage : `entier_vers_decimale(n)`
Entrée : un entier positif
Sortie : la liste de ses chiffres

Exemple : si l'entrée est `1234`, la sortie est `[1,2,3,4]`.

Algorithme.
Entrée : un entier $n > 0$
Sortie : la liste de ses chiffres
- Partir d'une liste vide.
- Tant que n n'est pas nul :
  — ajouter $n\%10$ au début de la liste,
  — faire $n \leftarrow n//10$.
- Le résultat est la liste.

Cours 4 (Écriture binaire avec `Python`)**.**
`Python` calcule très bien l'écriture binaire d'un entier grâce à la fonction `bin()`.

`python : bin()`

Usage : `bin(n)`
Entrée : un entier
Sortie : l'écriture binaire de n sous la forme d'une chaîne de caractères commençant par `'0b'`

Exemple :
- `bin(37)` renvoie `'0b100101'`
- `bin(139)` renvoie `'0b10001011'`

Cours 5 (Calcul de l'écriture binaire)**.**
Pour calculer l'écriture binaire d'un entier n, c'est la même méthode que pour calculer l'écriture décimale mais en remplaçant les divisions par 10 par des divisions par 2.
Nous avons donc besoin :

- de $n\%2$: le reste de la division euclidienne de n par 2 (appelé aussi n modulo 2) ; le reste vaut soit 0 soit 1.
- de $n//2$: le quotient de cette division.

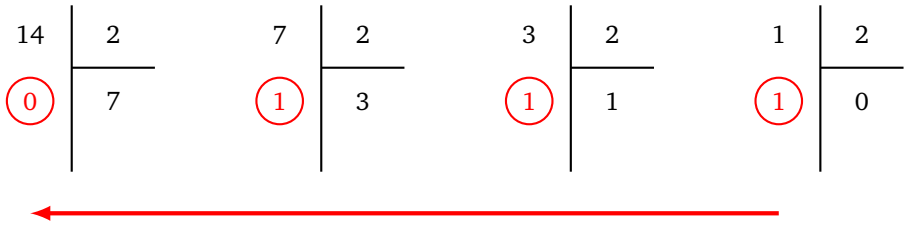
Note que le reste $n\%2$ vaut soit 0 (quand n est pair) soit 1 (quand n est impair).
Voici la méthode générale pour calculer l'écriture binaire d'un entier :

- On part de l'entier dont on veut l'écriture binaire.
- On effectue une suite de divisions euclidiennes par 2 :
  — à chaque division, on obtient un reste qui vaut 0 ou 1 ;
  — on obtient un quotient que l'on divise de nouveau par 2… On s'arrête quand ce quotient est nul.
- On lit l'écriture binaire comme la suite des restes, mais en partant du dernier reste.

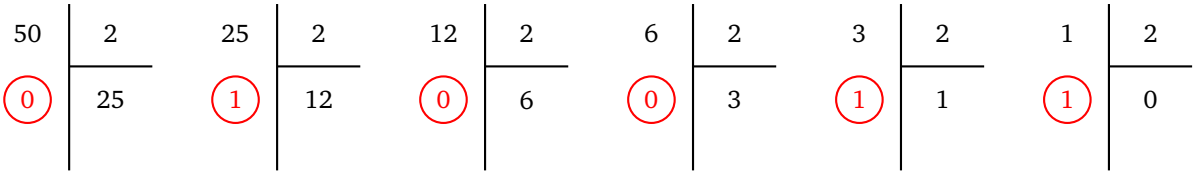
Exemple.
Calcul de l'écriture binaire de 14.

- On divise 14 par 2, le quotient est 7, le reste est 0.
- On divise 7 (le quotient précédent) par 2 : le nouveau quotient est 3, le nouveau reste est 1.
- On divise 3 par 2 : quotient 1, reste 1.
- On divise 1 par 2 : quotient 0, reste 1.
- C'est terminé (le dernier quotient est nul).
- Les restes successifs sont 0, 1, 1, 1. On lit l'écriture binaire à l'envers c'est 1.1.1.0.

Les divisions se font de gauche à droite, mais on lit les restes de droite à gauche.



Exemple.
Écriture binaire de 50.



Les restes successifs sont 0, 1, 0, 0, 1, 1, donc l'écriture binaire de 50 est 1.1.0.0.1.0.

Activité 4.

Objectifs : trouver l'écriture binaire d'un entier.

1. Calcule à la main l'écriture binaire des entiers suivants. Vérifie tes résultats à l'aide de la fonction

`bin()` de `Python`.

- 13, 18, 29, 31,
- 44, 48, 63, 64,
- 100, 135, 239, 1023.

2. Programme l'algorithme suivant en une fonction `entier_vers_binaire()`.

Algorithme.
Entrée : un entier $n > 0$
Sortie : son écriture binaire sous la forme d'une liste

- Partir d'une liste vide.
- Tant que n n'est pas nul :
  — ajouter $n\%2$ au début de la liste,
  — faire $n \leftarrow n//2$.
- Le résultat est la liste.

`entier_vers_binaire()`

Usage : `entier_vers_binaire(n)`
Entrée : un entier positif
Sortie : son écriture binaire sous forme d'une liste

Exemple : si l'entrée est 204, la sortie est `[1,1,0,0,1,1,0,0]`.

Vérifie que tes fonctions marchent bien :

- pars d'un entier n,
- calcule son écriture binaire,
- calcule l'entier associé à cette écriture,
- tu dois retrouver l'entier de départ !