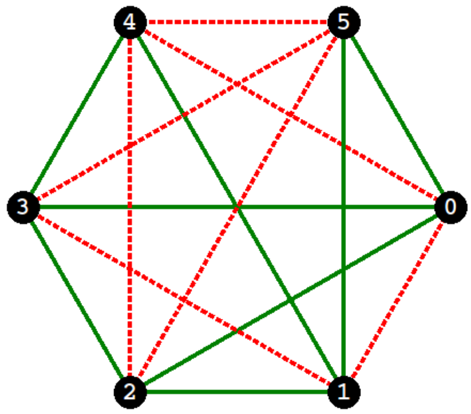
Graphes et combinatoire de Ramsey

Tu vas voir qu'un problème tout simple, qui concerne les relations entre seulement six personnes, va demander énormément de calculs pour être résolu.



Vidéo ■ Graphe et combinatoire de Ramsey

Cours 1 (Le problème de Ramsey)**.**

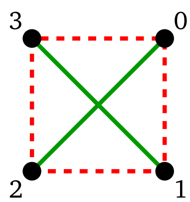
> *Proposition. Dans un groupe de 6 personnes, il y a toujours 3 amis (les trois se connaissent deux à deux) ou 3 étrangers (les trois sont tous des inconnus les uns pour les autres).*

Le but de cette fiche est de faire démontrer à l'ordinateur cet énoncé. Pour cela nous allons modéliser le problème par des graphes, puis nous allons vérifier l'énoncé pour chacun des 32 768 graphes possibles.

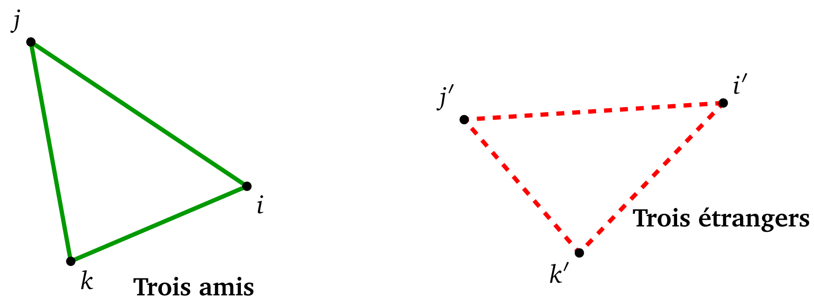
On considère n personnes. Pour deux personnes parmi elles, soit elles se connaissent (elles sont amies), soit elles ne se connaissent pas (elles sont étrangères l'une à l'autre). Nous schématisons cela par un graphe :

- une personne est représentée par un sommet (numéroté de 0 à $n-1$) ;
- si deux personnes sont amies, on relie les sommets correspondants par une arête verte ;
- sinon (elles sont étrangères), on relie les sommets correspondants par une arête pointillée rouge.

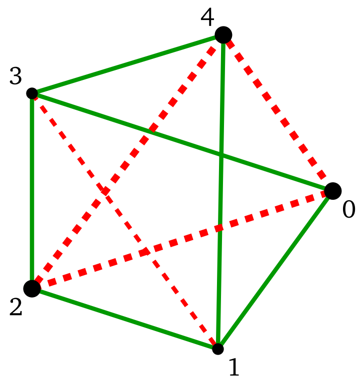
Le graphe ci-dessous signifie que 0 est ami avec 2 ; 1 est ami avec 3. Les autres paires ne se connaissent pas.



Un graphe vérifie le problème de Ramsey, s'il y a parmi ses sommets, ou bien 3 amis, ou bien s'il y a 3 étrangers.



Voici un exemple de graphe à 5 sommets qui vérifie l'énoncé : il possède bien 3 sommets étrangers (les sommets 0, 2 et 4), même s'il ne possède pas trois amis.



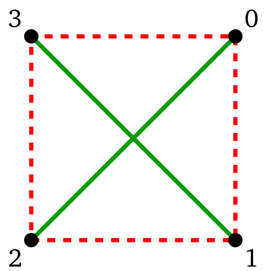
Un graphe avec $n = 5$ qui vérifie l'énoncé de Ramsey

Cours 2 (Modélisation)**.**

Nous modélisons un graphe par un tableau à double entrée, contenant des 0 *et des* 1.

Soit un graphe ayant n sommets, numérotés de 0 à $n-1$. Le ***tableau du graphe*** est un tableau de taille $n \times n$ dans lequel on place un 1 en position (i, j) si les sommets i et j sont reliés par une arête, sinon on place un 0.

Premier exemple ci-dessous : les sommets 0 et 2 sont amis (car reliés par un arête verte) donc le tableau contient un 1 en position $(0, 2)$ et aussi en $(2, 0)$. De même 1 et 3 sont amis, donc le tableau contient un 1 en position $(1, 3)$ et $(3, 1)$. Le reste du tableau contient des 0.



indice j

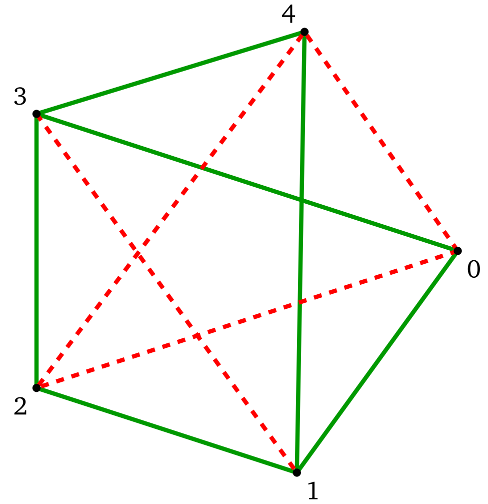
indice i

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=0$	0	0	1	0
$i=1$	0	0	0	1
$i=2$	1	0	0	0
$i=3$	0	1	0	0

n

n

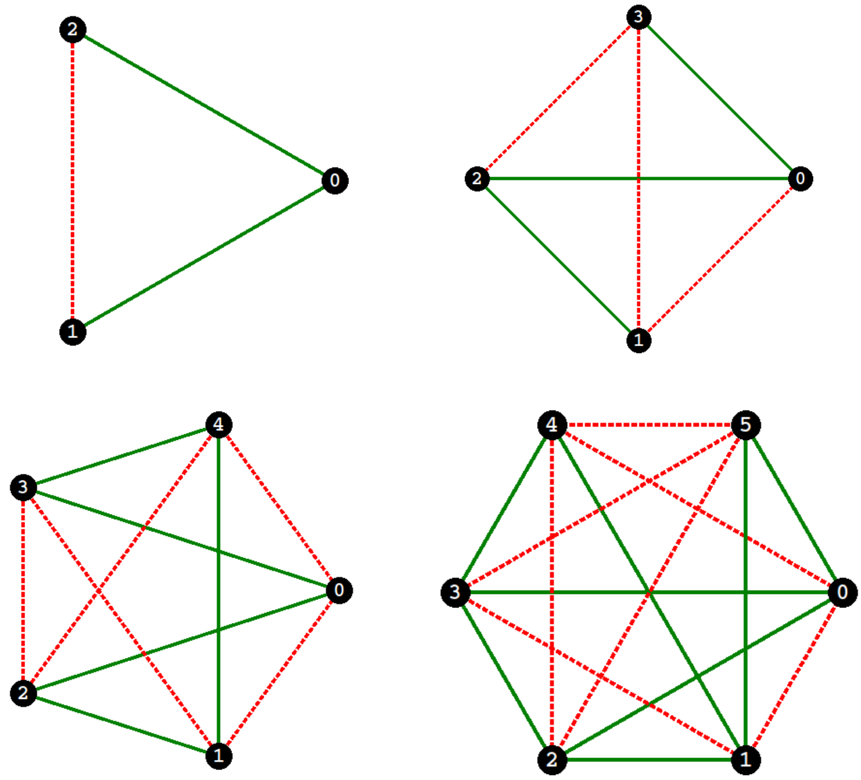
Voici un graphe plus compliqué et son tableau :



	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	0	1	0	1	0
$i=1$	1	0	1	0	1
$i=2$	0	1	0	1	0
$i=3$	1	0	1	0	1
$i=4$	0	1	0	1	0

Activité 1 (Construire des graphes).

Objectifs : définir des graphes et tester si trois sommets donnés sont amis.



1. Définis le tableau des graphes des quatre exemples ci-dessus. Tu peux commencer par initialiser le tableau par

   `graphe = [[0 for j in range(n)] for i in range(n)]`

   Puis ajoute des commandes :

   `graphe[i][j] = 1` et `graphe[j][i] = 1`

   N'oublie pas que si le sommet i est relié au sommet j par une arête, alors il faut mettre un 1 en position (i, j) mais aussi en position (j, i).

2. Définis une fonction `voir_graphe(graphe)` qui permet d'afficher à l'écran le tableau d'un graphe. Ainsi le troisième exemple ci-dessus (avec $n = 5$) doit s'afficher ainsi :

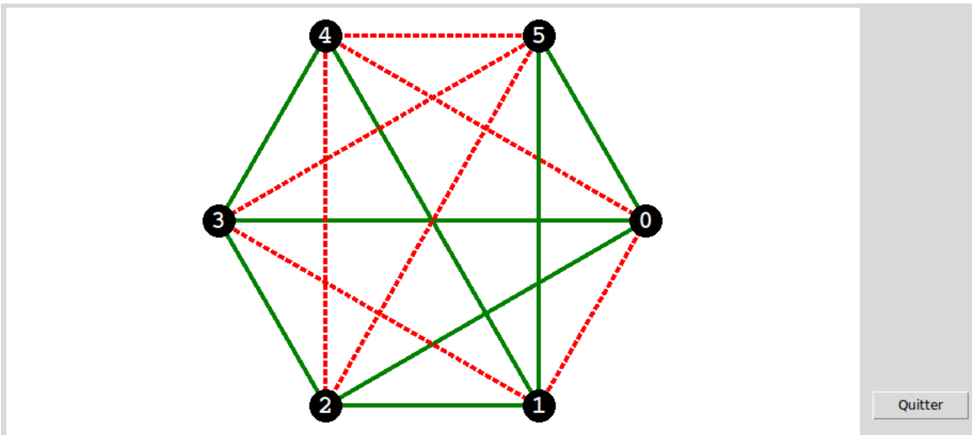
```
00110
00101
11000
10001
01010
```

3. On fixe trois sommets i, j, k d'un graphe. Écris une fonction `contient_3_amis_fixes(graphe,i,j,k)` qui teste si les sommets i, j, k sont trois amis (la fonction renvoie « vrai » ou « faux »). Fais le même travail avec une fonction `contient_3_etrangers_fixes(graphe,i,j,k)` pour savoir si ces sommets sont étrangers.

   Trouve à la main sur le quatrième exemple, trois sommets amis ou étrangers et vérifie ta réponse à l'aide des fonctions que tu viens de définir.

Activité 2 (Afficher des jolis graphes).

Objectifs : dessiner un graphe ! Activité facultative.



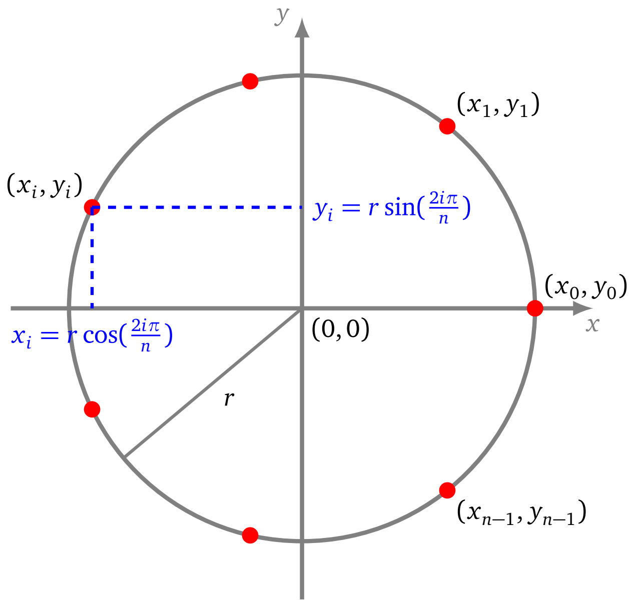
Programme l'affichage graphique d'un graphe par une fonction `afficher_graphe(graphe)`.

Indications. Cette activité n'est pas nécessaire pour la suite, elle aide juste à visualiser les graphes. Il faut utiliser le module `tkinter` et les fonctions `create_line()`, `create_oval()` et éventuellement `create_text()`.

Le point le plus délicat est d'obtenir les coordonnées des sommets. Tu auras besoin des fonctions sinus et cosinus (disponibles dans le module `math`). Les coordonnées (x_i, y_i) du sommet numéro i d'un graphe à n éléments peuvent être calculées par les formules :

$$x_i = r\cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad y_i = r\sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right).$$

Ces sommets sont situés sur le cercle de rayon r, centré en $(0,0)$. Tu devras choisir r assez grand (par exemple $r = 200$) et décaler le cercle pour bien l'afficher à l'écran.



Activité 3 (Écriture binaire avec des 0 non significatifs)**.**

Objectifs : convertir un entier en écriture binaire avec éventuellement des zéros non significatifs.

Programme une fonction `decimal_vers_binaire(p,n)` qui affiche l'écriture binaire d'un entier p sur n *bits*. Le résultat est une liste de 0 et de 1.

Exemple.

- L'écriture binaire de $p = 37$ est 1.0.0.1.0.1. Si on veut son écriture binaire sur $n = 8$ *bits* alors il faut rajouter deux 0 non significatifs devant : 0.0.1.0.0.1.0.1.
- Ainsi le résultat de la commande `decimal_vers_binaire(37,8)` doit être `[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1]`.
- La commande `decimal_vers_binaire(37,10)` renvoie l'écriture de 37 en binaire sur 10 *bits* : `[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1]`.

Indications.

- Tu peux utiliser la commande `bin(p)` !
- La commande `list(ma_chaine)` renvoie la liste des caractères composant `ma_chaine`.
- Attention ! On veut une liste d'entiers 0 ou 1, pas des caractères `'0'` ou `'1'`. La commande `int('0')` renvoie 0 et `int('1')` renvoie 1.
- `ma_liste = ma_liste + [element]` ajoute un élément en fin de liste, alors que `ma_liste = [element] + ma_liste` ajoute l'élément en début de liste.

Cours 3 (Sous-ensembles)**.**
Soit $E_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ l'ensemble des entiers de 0 à $n-1$. L'ensemble E_n contient donc n éléments. Par exemple $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$...

Sous-ensembles.
Quels sont les sous-ensembles de E_n ? Par exemple il y a 8 sous-ensembles de E_3, ce sont :

- le sous-ensemble $\{0\}$ composé du seul élément 0 ;
- le sous-ensemble $\{1\}$ composé du seul élément 1 ;

- le sous-ensemble $\{2\}$ composé du seul élément 2 ;
- le sous-ensemble $\{0,1\}$ composé de l'élément 0 et de l'élément 1 ;
- le sous-ensemble $\{0,2\}$;
- le sous-ensemble $\{1,2\}$;
- le sous-ensemble $\{0,1,2\}$ composé de tous les éléments ;
- l'ensemble vide $\varnothing$ qui ne contient aucun élément !

Proposition. L'ensemble E_n contient 2^n sous-ensembles.

Par exemple $E_4 = \{0,1,2,3\}$ possède $2^4 = 16$ sous-ensembles possibles. Amuse-toi à les trouver tous ! Pour E_6 il y a $2^6 = 64$ sous-ensembles possibles.

Sous-ensembles de cardinal fixé.
On cherche seulement les sous-ensembles ayant un nombre k fixé d'éléments.
Exemples :

- Pour $n = 3$ et $k = 2$, les sous-ensembles à deux éléments contenus dans $E_3 = \{0,1,2\}$ sont les trois paires : $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$.
- Pour $n = 5$ et $k = 3$, les sous-ensembles à trois éléments contenus dans $E_5 = \{0,1,2,3,4\}$ sont les 10 triplets : $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{0,1,4\}$, $\{0,2,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{0,3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$.

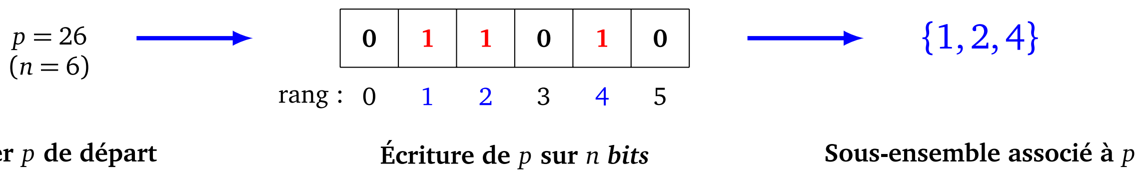
Activité 4 (Sous-ensembles)**.**

Objectifs : générer tous les sous-ensembles afin de tester tous les triplets de sommets. Pour cela nous utiliserons l'écriture binaire.

Voici comment nous associons à chaque entier p vérifiant $0 \leqslant p < 2^n$ un sous-ensemble de $E_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$.

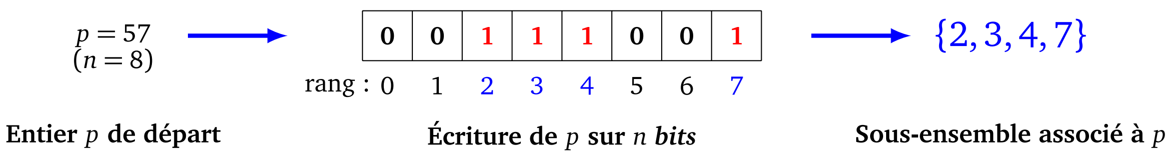
Commençons par un exemple, avec $n = 6$ et $p = 26$:

- l'écriture binaire de $p = 26$ sur $n = 6$ *bits* est `[0,1,1,0,1,0]` ;
- il y a des 1 au rang 1, 2 et 4 (en commençant au rang 0 à gauche) ;
- le sous-ensemble associé est alors $\{1,2,4\}$.



Autres exemples.

- Avec $n = 8$ et $p = 57$ dont l'écriture binaire sur 8 *bits* est `[0,0,1,1,1,0,0,1]`, le sous-ensemble associé correspond aux rangs $2,3,4,7$, c'est donc $\{2,3,4,7\}$.



- Avec $p = 0$, l'écriture binaire est formée uniquement de 0, le sous-ensemble associé est l'ensemble vide.
- Avec $p = 2^n - 1$, l'écriture binaire est formée uniquement de 1, le sous-ensemble associé est $E_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ tout entier.

Nous modélisons un ensemble comme une liste d'éléments. Par exemple :

- L'ensemble E_4 est pour nous la liste `[0,1,2,3]`.
- Un sous-ensemble de E_4 est par exemple la paire `[1,3]`.
- L'ensemble vide est représenté par la liste vide `[]`.

1. Programme la fonction `sous_ensembles(n)` qui renvoie la liste de tous les sous-ensembles possibles de $E_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

   Par exemple, pour $n = 3$, `sous_ensembles(n)` renvoie la liste (qui contient elle-même des listes) :

   `[ [], [2], [1], [1, 2], [0], [0, 2], [0, 1], [0, 1, 2] ]`

   C'est-à-dire les 8 sous-ensembles (en commençant par l'ensemble vide) :

   $$\varnothing \quad \{2\} \quad \{1\} \quad \{1,2\} \quad \{0\} \quad \{0,2\} \quad \{0,1\} \quad \{0,1,2\}.$$

   Indication. Pour tester ton programme, vérifie que la liste renvoyée contient bien 2^n sous-ensembles.

2. Déduis-en une fonction `sous_ensembles_fixe(n,k)` qui renvoie seulement les sous-ensembles de E_n ayant k éléments.

   Par exemple, pour $n = 3$ et $k = 2$, `sous_ensembles_fixe(n,k)` renvoie la liste des paires :

   `[ [0, 1], [0, 2], [1, 2] ]`

   Teste ton programme :
   - Pour $n = 4$ et $k = 3$, la liste renvoyée par `sous_ensembles_fixe(n,k)` contient 4 triplets.
   - Pour $n = 5$ et $k = 3$, il y a 10 triplets possibles.
   - Pour $n = 10$ et $k = 4$, il y a 210 sous-ensembles possibles !

Dans la suite nous utiliserons surtout les sous-ensembles à 3 éléments. En particulier, pour $n = 6$, les triplets inclus dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sont au nombre de 20 :

```
[[3, 4, 5], [2, 4, 5], [2, 3, 5], [2, 3, 4], [1, 4, 5],
 [1, 3, 5], [1, 3, 4], [1, 2, 5], [1, 2, 4], [1, 2, 3],
 [0, 4, 5], [0, 3, 5], [0, 3, 4], [0, 2, 5], [0, 2, 4],
 [0, 2, 3], [0, 1, 5], [0, 1, 4], [0, 1, 3], [0, 1, 2]]
```

Activité 5 (Théorème de Ramsey pour $n = 6$).

Objectifs : vérifier que tous les graphes ayant 6 *sommets contiennent trois amis ou bien trois étrangers.*

1. Programme une fonction `graphe_contient_3(graphe)` qui teste si un graphe contient 3 amis ou bien 3 étrangers. Il faut donc appeler les fonctions `contient_3_amis_fixes(graphe,i,j,k)` et `contient_3_etrangers_fixes(graphe,i,j,k)` de la première activité pour tous les triplets possibles de sommets (i, j, k).

   Pour les quatre exemples de la première activité, seul le quatrième (avec 6 sommets) vérifie le test.

2. Programme une fonction `voir_tous_graphes(n)` qui affiche tous les tableaux possibles de graphes à n sommets. Il y a $N = \frac{(n-1)n}{2}$ tableaux possibles. Tu peux les générer par une méthode similaire à celle pour les sous-ensembles :
   - pour chaque entier p qui vérifie $0 \leqslant p < 2^N$,
   - calcule l'écriture binaire de p sur N *bits*,
   - remplis le tableau élément par élément, avec les 0 et les 1 de l'écriture binaire.

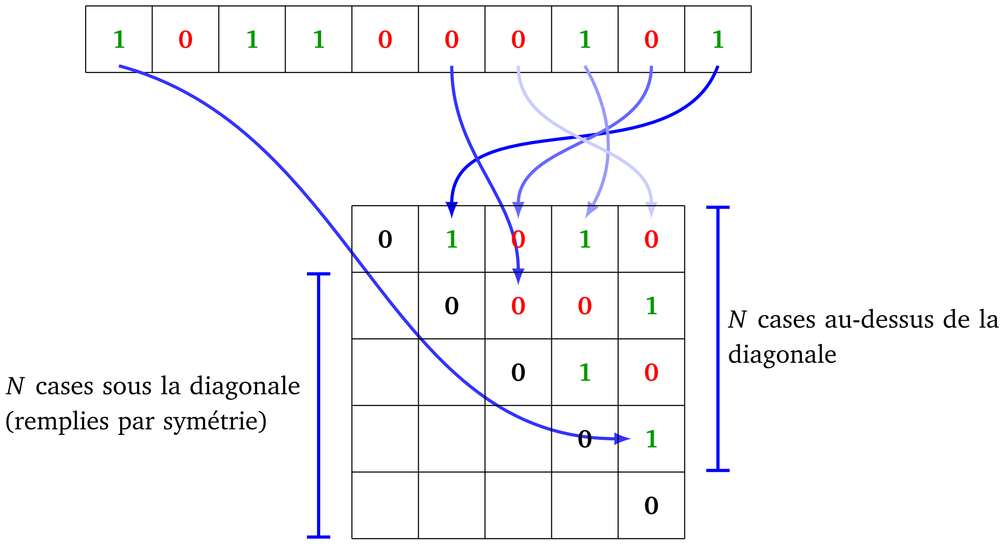
   Indications. Pour remplir un tableau à partir d'une écriture binaire `b` donnée, tu peux utiliser une double boucle du type :

```
for j in range(0,n):
    for i in range(j+1,n):
```

```
        b = liste_binaire.pop()
        graphe[i][j] = b
        graphe[j][i] = b
```

Voici le principe de cette boucle qui remplit la partie au-dessus de la diagonale (et aussi la partie en-dessous par symétrie). Cette boucle prend le dernier *bit* de la liste et le place sur la première case libre au-dessus de la diagonale ; puis l'avant-dernier *bit* est placé sur la seconde case libre… ; le premier *bit* de la liste remplit la dernière case libre.

Écriture de p sur N *bits*



Remplissage du tableau

3. Transforme la fonction précédente en une fonction `test_tous_graphes(n)` qui teste la conjecture « il y a trois amis ou trois étrangers » pour tous les graphes à n sommets. Tu dois trouver que :
   - pour $n = 4$ et $n = 5$ la conjecture est fausse. Donne un graphe à 4 sommets (puis à 5 sommets) qui n'a ni 3 amis, ni 3 étrangers ;
   - pour $n = 6$ laisse l'ordinateur vérifier que, pour chacun des $N = 2^{\frac{5\times 6}{2}} = 32\,768$ graphes ayant 6 sommets, soit il possède 3 amis, soit il possède 3 étrangers.

Activité 6 (Pour aller plus loin)**.**

Objectifs : améliorer ton programme et prouver d'autres conjectures. Activité facultative.

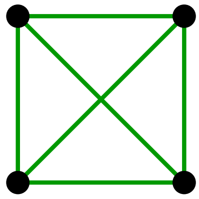
1. Améliore ton programme afin qu'il vérifie la conjecture pour $n = 6$ en moins d'une seconde.

   Idées.
   - Il faut générer la liste des triplets une fois pour toute au début du programme (et non à chaque nouveau graphe).
   - Il ne faut pas générer une liste de tous les graphes possibles, puis les tester dans un second temps. Il faut en générer un puis le tester avant de passer au suivant.
   - Dès que tu as trouvé 3 amis (ou 3 étrangers) c'est gagné ! Stoppe immédiatement la boucle quitte à utiliser l'instruction `break` et passe au graphe suivant.
   - Tu peux seulement tester les graphes qui correspondent à p entre 0 et $2^N/2$ (car pour les p suivants cela revient à échanger les segments verts en rouges et inversement).

Avec ces conseils voici les temps de calcul auxquels tu peux t'attendre :

Nombre de sommets	Nombre de graphes	Temps de calcul approximatif
$n = 6$	32 768	$<$ 1 seconde
$n = 7$	2 097 152	$<$ 1 minute
$n = 8$	268 435 456	$<$ 1 heure
$n = 9$	68 719 476 736	$<$ 10 jours

2. Il existe un énoncé plus difficile. Il s'agit de trouver à partir de quelle taille n un graphe contient toujours ou bien 4 amis ou bien 3 étrangers. Être 4 amis signifie que deux à deux ils sont reliés par un segment vert, comme ci-dessous :



   (a) Trouve des graphes à $n = 6$ (puis $n = 7$) sommets qui ne vérifient pas cet énoncé.

   (b) En cherchant un peu avec la machine trouve des graphes à 8 sommets qui ne vérifient pas cet énoncé.

   (c) Prouve que n'importe quel graphe ayant 9 sommets contient 4 amis ou bien 3 étrangers !

   Indications. Il faut tester tous les graphes correspondants aux entiers p compris entre 0 et $2^N = 2^{\frac{8\times 9}{2}} = 68\,719\,476\,736$. Le temps total de calcul est d'environ 20 jours ! Tu peux partager les calculs entre plusieurs ordinateurs : un ordinateur fait les calculs pour $0 \leqslant p \leqslant 1\,000\,000$, un deuxième ordinateur pour $1\,000\,001 \leqslant p \leqslant 2\,000\,000$,...

3. - Il existe des raisonnements pour pouvoir démontrer à la main que pour $n = 6$ il y a toujours 3 amis ou 3 étrangers. Cherche un tel raisonnement ! Avec un peu plus d'efforts, on prouve aussi que c'est $n = 9$ qui répond au problème des 4 amis/3 étrangers.
   - On sait prouver qu'il faut $n = 18$ sommets pour avoir toujours 4 amis ou 4 étrangers.
   - Par contre personne dans le monde ne sait quelle est la valeur du plus petit n pour le problème des 5 amis/5 étrangers !