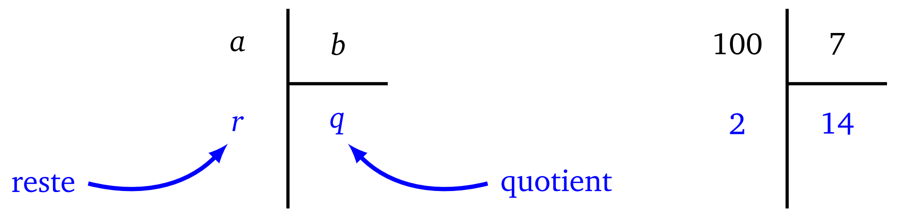
# Arithmétique – Boucle tant que – I

*Les activités de cette fiche sont centrées sur l'arithmétique : division euclidienne, nombres premiers...*
*C'est l'occasion d'utiliser intensivement la boucle « tant que ».*

`Vidéo ■ Arithmétique - Quotient et reste`
`Vidéo ■ Boucle tant que I - partie 1`
`Vidéo ■ Boucle tant que I - partie 2`
`Vidéo ■ Temps de calcul - Module timeit`

**Cours 1** (Arithmétique).
On rappelle ce qu'est la division euclidienne. Voici la division de $a$ par $b$, $a$ est un entier positif, $b$ est un entier strictement positif (avec un exemple de 100 divisé par 7) :




On a les deux propriétés fondamentales qui définissent $q$ et $r$ :

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b$$

Par exemple, pour la division de $a = 100$ par $b = 7$ : on a le quotient $q = 14$ et le reste $r = 2$ qui vérifient bien $a = b \times q + r$ car $100 = 7 \times 14 + 2$ et aussi $r < b$ car $2 < 7$.

Avec `Python` :
- `a // b` renvoie le quotient,
- `a % b` renvoie le reste.

Il est facile de vérifier que :

$b$ est un diviseur de $a$ si et seulement si $r = 0$.

**Activité 1** (Quotient, reste, divisibilité).

*Objectifs : utiliser le reste pour savoir si un entier divise un autre.*

1. Programme une fonction `quotient_reste(a,b)` qui fait les tâches suivantes à partir de deux entiers $a \geqslant 0$ et $b > 0$ :
   - Elle affiche le quotient $q$ de la division euclidienne de $a$ par $b$,
   - elle affiche le reste $r$ de cette division,

- elle affiche `True` si le reste $r$ est bien positif et strictement inférieur à $b$, et `False` sinon,
- elle affiche `True` si on a bien l'égalité $a = bq + r$, et `False` sinon.

Voici par exemple ce que doit afficher l'appel `quotient_reste(100,7)` :

```
Division de a = 100 par b = 7
Le quotient vaut q = 14
Le reste vaut r = 2
Vérification reste 0 <= r < b ? True
Vérification égalité a = bq + r ? True
```

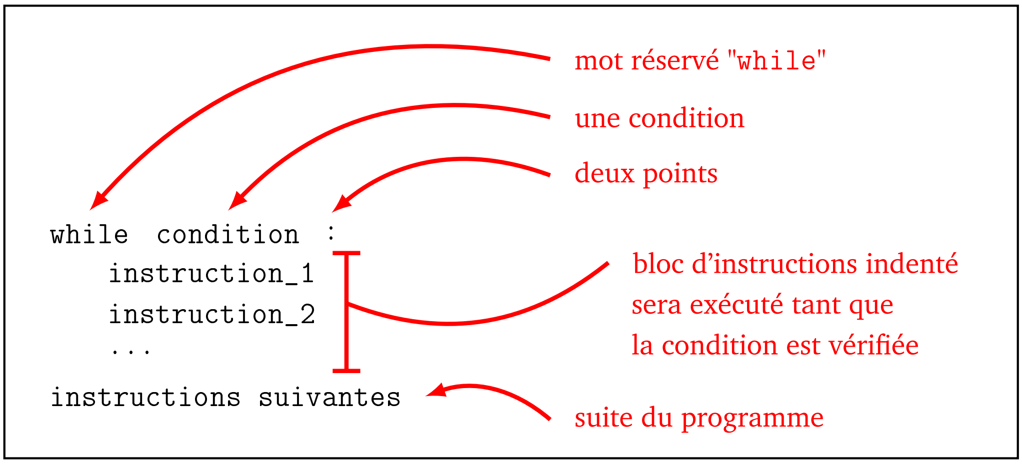
*Remarque.* il faut que tu vérifies sans tricher que l'on a bien $0 \leqslant r < b$ et $a = bq + r$, mais bien sûr cela doit toujours être vrai !

2. Programme une fonction `est_pair(n)` qui teste si l'entier $n$ est pair ou pas. La fonction renvoie `True` ou `False`.

   *Indications*
   - Première possibilité : calculer `n % 2` et discuter selon les cas.
   - Seconde possibilité : calculer `n % 10` (qui renvoie le chiffre des unités) et discuter.
   - Les plus malins arriveront à écrire la fonction sur deux lignes seulement (une pour `def...` et l'autre pour `return...`)

3. Programme une fonction `est_divisible(a,b)` qui teste si $b$ divise $a$. La fonction renvoie `True` ou `False`.

**Cours 2** (Boucle « tant que »).
La boucle « tant que » exécute des instructions tant qu'une condition est vraie. Dès que la condition devient fausse, elle passe aux instructions suivantes.



**Exemple.**
Voici un programme qui affiche le compte à rebours $10, 9, 8, \dots 3, 2, 1, 0$. Tant que la condition $n \geqslant 0$ est vraie, on diminue $n$ de 1. La dernière valeur affichée est $n = 0$, car ensuite $n = -1$ et la condition « $n \geqslant 0$ » devient fausse donc la boucle s'arrête.

```
n = 10
while n >= 0:
    print(n)
    n = n - 1
```

On résume ceci sous la forme d'un tableau :

Entrée : $n = 10$

| $n$ | « $n \geqslant 0$ » ? | nouvelle valeur de $n$ |
|---|---|---|
| 10 | oui | 9 |
| 9 | oui | 8 |
| ... | ... | ... |
| 1 | oui | 0 |
| 0 | oui | $-1$ |
| $-1$ | non | |

Affichage : $10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$

**Exemple.**

Ce bout de code cherche la première puissance de 2 plus grande qu'un entier $n$ donné. La boucle fait prendre à $p$ les valeurs $2, 4, 8, 16, \dots$ Elle s'arrête dès que la puissance de 2 est supérieure ou égale à $n$, donc ici ce programme affiche 128.

```
n = 100
p = 1
while p < n:
    p = 2 * p
print(p)
```

Entrées : $n = 100$, $p = 1$

| $p$ | « $p < n$ » ? | nouvelle valeur de $p$ |
|---|---|---|
| 1 | oui | 2 |
| 2 | oui | 4 |
| 4 | oui | 8 |
| 8 | oui | 16 |
| 16 | oui | 32 |
| 32 | oui | 64 |
| 64 | oui | 128 |
| 128 | non | |

Affichage : 128

**Exemple.**
Pour cette dernière boucle on a déjà programmé une fonction `est_pair(n)` qui renvoie `True` si l'entier $n$ est pair et `False` sinon. La boucle fait donc ceci : tant que l'entier $n$ est pair, $n$ devient $n/2$. Cela revient à supprimer tous les facteurs 2 de l'entier $n$. Comme ici $n = 56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$, ce programme affiche 7.

```
n = 56
while est_pair(n) == True:
    n = n // 2
print(n)
```

Entrée : $n = 56$

| $n$ | « $n$ est pair » ? | nouvelle valeur de $n$ |
|---|---|---|
| 56 | oui | 28 |
| 28 | oui | 14 |
| 14 | oui | 7 |
| 7 | non | |

Affichage : 7

Pour ce dernier exemple il est beaucoup plus naturel de démarrer la boucle par

```
while est_pair(n):
```

En effet `est_pair(n)` est déjà une valeur « vrai » ou faux ». On se rapproche d'une phrase « tant que $n$ est pair... »

**Opération « += ».** Pour incrémenter un nombre tu peux utiliser ces deux méthodes :

`nb = nb + 1` ou `nb += 1`

La seconde écriture est plus courte mais rend le programme moins lisible.

**Activité 2** (Nombres premiers).

*Objectifs : tester si un entier est (ou pas) un nombre premier.*

1. **Plus petit diviseur.**

   Programme une fonction `plus_petit_diviseur(n)` qui renvoie, le plus petit diviseur $d \geqslant 2$ de l'entier $n \geqslant 2$.

   Par exemple `plus_petit_diviseur(91)` renvoie 7, car $91 = 7 \times 13$.

   **Méthode.**
   - On rappelle que $d$ divise $n$ si et seulement si `n % d` vaut 0.
   - La mauvaise idée est d'utiliser une boucle « pour $d$ variant de 2 à $n$ ». En effet, si par exemple on sait que 7 est diviseur de 91 cela ne sert à rien de tester si $8, 9, 10\ldots$ sont aussi des diviseurs car on a déjà trouvé le plus petit.
   - La bonne idée est d'utiliser une boucle « tant que » ! Le principe est : « tant que je n'ai pas obtenu mon diviseur, je continue de chercher ». (Et donc, dès que je l'ai trouvé, j'arrête de chercher.)
   - En pratique voici les grandes lignes :
     — Commence avec $d = 2$.
     — Tant que $d$ ne divise pas $n$ alors, passe au candidat suivant ($d$ devient $d + 1$).
     — À la fin $d$ est le plus petit diviseur de $n$ (dans le pire des cas $d = n$).

2. **Nombres premiers (1).**

Modifie légèrement ta fonction `plus_petit_diviseur(n)` pour écrire une première fonction `est_premier_1(n)` qui renvoie « vrai » (`True`) si $n$ est un nombre premier et « faux » (`False`) sinon.

Par exemple `est_premier_1(13)` renvoie `True`, `est_premier_1(14)` renvoie `False`.

3. **Nombres de Fermat.**

   Pierre de Fermat (∼1605–1665) pensait que tous les entiers $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ étaient des nombres premiers. Effectivement $F_0 = 3$, $F_1 = 5$ et $F_2 = 17$ sont des nombres premiers. S'il avait connu `Python` il aurait sûrement changé d'avis ! Trouve le plus petit entier $F_n$ qui n'est pas premier.

   *Indication.* Avec `Python` $b^c$ s'écrit `b ** c` et donc $a^{(b^c)}$ s'écrit `a ** (b ** c)`.

   *On va améliorer notre fonction qui teste si un nombre est premier ou pas, cela nous permettra de tester plus vite plein de nombres ou bien des nombres très grands.*

4. **Nombres premiers (2).**

   Améliore ta fonction en une fonction `est_premier_2(n)` qui ne teste pas tous les diviseurs $d$ jusqu'à $n$, mais seulement jusqu'à $\sqrt{n}$.

   *Explications.*

   - Par exemple pour tester si 101 est un nombre premier, il suffit de voir s'il admet des diviseurs parmi $2, 3, \ldots, 10$. Le gain est appréciable !
   - Cette amélioration est due à la proposition suivante : si un entier n'est pas premier alors il admet un diviseurs $d$ qui vérifie $2 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}$.
   - Au lieu de tester si $d \leqslant \sqrt{n}$, il est plus facile de tester $d^2 \leqslant n$ !

5. **Nombres premiers (3).**

   Améliore ta fonction en une fonction `est_premier_3(n)` à l'aide de l'idée suivante. On teste si $d = 2$ divise $n$, mais à partir de $d = 3$, il suffit de tester les diviseurs impairs (on teste $d$, puis $d + 2 \ldots$).

   - Par exemple pour tester si $n = 419$ est un nombre premier, on teste d'abord si $d = 2$ divise $n$, puis $d = 3$ et ensuite $d = 5$, $d = 7 \ldots$
   - Cela permet de faire environ deux fois moins de tests !
   - Explications : si un nombre pair $d$ divise $n$, alors on sait déjà que 2 divise $n$.

6. **Temps de calcul.**

   Compare les temps de calcul de tes différentes fonctions `est_premier()` en répétant par exemple un million de fois l'appel `est_premier(97)`. Voir le cours ci-dessous pour savoir comment faire.

**Cours 3** (Temps de calcul)**.**
Il existe deux façons de faire tourner plus rapidement des programmes : une bonne et une mauvaise. La mauvaise, c'est d'acheter un ordinateur plus puissant. La bonne, c'est de trouver un algorithme plus efficace !
Avec `Python`, c'est facile de mesurer le temps d'exécution d'une fonction afin de le comparer avec le temps d'exécution d'une autre. Il suffit d'utiliser le module `timeit`.
Voici un exemple : on mesure le temps de calcul de deux fonctions qui ont le même but, tester si un entier $n$ est divisible par 7.

```
# Première fonction (pas très maligne)
def ma_fonction_1(n):
    divis = False
    for k in range(n):
```

```
        if k*7 == n:
            divis = True
    return divis

# Seconde fonction (plus rapide)
def ma_fonction_2(n):
    if n % 7 == 0:
        return True
    else:
        return False

import timeit

print(timeit.timeit("ma_fonction_1(1000)",
    setup="from __main__ import ma_fonction_1",
    number=100000))
print(timeit.timeit("ma_fonction_2(1000)",
    setup="from __main__ import ma_fonction_2",
    number=100000))
```

**Résultats.**
Le résultat dépend de l'ordinateur, mais permet la comparaison des temps d'exécution des deux fonctions.

- La mesure pour la première fonction renvoie 5 secondes. L'algorithme n'est pas très malin. On teste si $7 \times 1 = n$, puis on teste $7 \times 2 = n$, $7 \times 3 = n$...
- La mesure pour la seconde fonction renvoie 0.01 seconde ! On teste si le reste de $n$ divisé par 7 est 0. La seconde méthode est donc 500 fois plus rapide que la première.

**Explications.**

- On appelle le module `timeit`.
- La fonction `timeit.timeit()` renvoie le temps d'exécution en seconde. Elle prend comme paramètres :
  — une chaîne pour l'appel de la fonction à tester (ici est-ce que 1000 est divisible par 7),
  — un argument `setup="..."` qui indique où trouver cette fonction,
  — le nombre de fois qu'il faut répéter l'appel à la fonction (ici `number=100000`).
- Il faut que le nombre de répétitions soit assez grand pour éviter les incertitudes.

**Activité 3** (Plus de nombres premiers).

*Objectifs : programmer davantage de boucles « tant que » et étudier différentes sortes de nombres premiers à l'aide de ta fonction* `est_premier()`.

1. Écris une fonction `nombre_premier_apres(n)` qui renvoie le premier nombre premier $p$ supérieur ou égal à $n$.

   Par exemple, le premier nombre premier après $n = 60$ est $p = 61$. Quel est le premier nombre premier après $n = 100\,000$ ?

2. Deux nombres premiers $p$ et $p + 2$ sont appelés ***nombres premiers jumeaux***. Écris une fonction `nombres_jumeaux_apres(n)` qui renvoie le premier couple $p, p+2$ de nombres premiers jumeaux, avec $p \geqslant n$.

Par exemple, le premier couple de nombres premiers jumeaux après $n = 60$ est $p = 71$ et $p + 2 = 73$. Quel est le premier couple de nombres premiers jumeaux après $n = 100\,000$ ?

3. Un entier $p$ est un ***nombre premier de Germain*** si $p$ et $2p + 1$ sont des nombres premiers. Écris une fonction `nombre_germain_apres(n)` qui renvoie le couple $p$, $2p + 1$ où $p$ est le premier nombre premier de Germain $p \geqslant n$.

   Par exemple, le premier nombre premier de Germain après $n = 60$ est $p = 83$ avec $2p + 1 = 167$. Quel est le premier nombre premier de Germain après $n = 100\,000$ ?