Probabilités – Paradoxe de Parrondo

Tu vas programmer deux jeux simples. Lorsque tu joues à ces jeux, tu as plus de chances de perdre que de gagner. Pourtant lorsque tu joues aux deux jeux en même temps, tu as plus de chances de gagner que de perdre ! C'est une situation paradoxale.

Vidéo ■ Probabilités - Paradoxe de Parrondo

Cours 1 (Hasard – Gain – Espérance).
Un joueur joue à un jeu de hasard : il lance une pièce de monnaie ; en fonction du résultat il gagne ou perd de l'argent. On ne peut pas prévoir combien le joueur va gagner ou perdre à coup sûr, mais on va introduire une valeur qui estime combien le joueur peut espérer gagner en moyenne s'il joue de nombreuses fois.

- Au départ le total de gain du joueur est nul : $g = 0$.
- À chaque tirage, il lance une pièce de monnaie. S'il gagne, il obtient un euro, s'il perd il doit un euro.
- Dans les jeux que l'on étudie, la pièce n'est pas équilibrée (elle est un peu truquée). Le joueur n'a pas autant de chances de gagner que de perdre.
- On répète des tirages un certain nombre N de fois. Au bout de N tirages, on totalise le gain du joueur (qui peut être positif ou négatif).
- L'***espérance***, c'est la somme que peut espérer gagner le joueur à chaque lancer. On estime l'espérance par la moyenne des gains d'un grand nombre de tirages. Autrement dit, on a la formule :
$$\text{espérance} \simeq \frac{\text{gain après } N \text{ tirages}}{N} \qquad \text{avec } N \text{ grand.}$$
Pour nos jeux, l'espérance sera un nombre réel entre -1 et $+1$.
- Exemples :
  — Si la pièce est bien équilibrée (50 chances sur 100 de gagner), alors pour un grand nombre N de tirages, le joueur va gagner à peu près autant de fois qu'il va perdre ; ses gains seront proches de 0 et donc l'espérance sera proche de $\frac{0}{N} = 0$. En moyenne il gagne 0 euro par tirage.
  — Si la pièce est truquée et que le joueur gagne tout le temps, alors au bout de N tirages, il a empoché N euros. L'espérance est donc $\frac{N}{N} = 1$.
  — Si la pièce est truquée afin que le joueur perde tout le temps, alors au bout de N tirages, son gain est de $-N$ euros. L'espérance est donc $\frac{-N}{N} = -1$.
  — Un espérance de -0.5 signifie qu'en moyenne le joueur perd 0.5 euro par tirage. C'est possible avec une pièce déséquilibrée qui fait gagner dans un cas sur quatre seulement. (Vérifie le calcul !) Si le joueur joue 1000 fois, on peut estimer qu'il va perdre 500 euros ($-0.5 \times 1000 = -500$).

Activité 1 (Jeu A : premier jeu perdant).

Objectifs : modéliser un premier jeu simple, qui en moyenne est perdant pour le joueur.

Jeu A. Dans ce premier jeu, on lance une pièce de monnaie légèrement déséquilibrée : le joueur gagne un euro dans 49 cas sur 100 ; il perd un euro dans 51 cas sur 100.

1. **Tirage.** Écris une fonction `tirage_jeu_A()` qui ne dépend d'aucun argument et qui modélise un tirage du jeu A. Pour cela :
   - Tire un nombre au hasard $0 \leqslant x < 1$ à l'aide de la fonction `random()` du module `random`.
   - Renvoie $+1$ si x est plus petit que 0.49 ; et -1 sinon.
2. **Gain.** Écris une fonction `gain_jeu_A(N)` qui modélise N tirages du jeu A et renvoie le gain total de ces tirages. Bien sûr, le résultat dépend des tirages, il peut varier d'une fois sur l'autre.
3. **Espérance.** Écris une fonction `esperance_jeu_A(N)` qui renvoie une estimation de l'espérance du jeu A selon la formule :

$$\text{espérance} \simeq \frac{\text{gain après } N \text{ tirages}}{N}, \qquad \text{avec } N \text{ grand.}$$

4. **Conclusion.**
   (a) Estime l'espérance en effectuant au moins un million de tirages.
   (b) Que signifie le fait que l'espérance soit négative ?
   (c) Déduis de la valeur de l'espérance, le gain (ou la perte) que je peux espérer en jouant 1000 fois au jeu A.

Activité 2 (Jeu B : second jeu perdant).

Objectifs : modéliser un second jeu un peu plus compliqué et qui, en moyenne, est encore perdant pour le joueur.

Jeu B. Le second jeu est un peu plus compliqué. Au début, le joueur part avec un gain nul : $g = 0$. Puis en fonction du gain, il joue à un des deux sous-jeux suivants :

- **Sous-jeu B1.** Si le gain g est un multiple de 3, alors il lance un pièce très désavantageuse : le joueur gagne un euro dans seulement 9 cas sur 100 (il perd donc un euro dans 91 cas sur 100).
- **Sous-jeu B2.** Si le gain g n'est pas un multiple de 3, alors il lance un pièce avantageuse : le joueur gagne un euro dans 74 cas sur 100 (il perd donc un euro dans 26 cas sur 100).

1. **Tirage.** Écris une fonction `tirage_jeu_B(g)` qui dépend du gain déjà acquis et modélise un tirage du jeu B. Tu peux utiliser le test `g%3 == 0` pour savoir si g est multiple de 3.
2. **Gain.** Écris une fonction `gain_jeu_B(N)` qui modélise N tirages du jeu B (en partant d'un gain initial nul) et renvoie le gain total de ces tirages.
3. **Espérance.** Écris une fonction `esperance_jeu_B(N)` qui renvoie une estimation de l'espérance du jeu B.
4. **Conclusion.**
   (a) Estime l'espérance en effectuant au moins un million de tirages.
   (b) Combien puis-je espérer gagner ou perdre en jouant 1000 fois au jeu B ?

Activité 3 (Jeux A et B : un jeu gagnant !).

Objectifs : inventer un nouveau jeu en jouant à chaque tour au jeu A ou au jeu B ; bizarrement ce jeu est en moyenne gagnant ! C'est le paradoxe de Parrondo.

Jeux AB. Dans ce troisième jeu, on joue à chaque tour ou bien au jeu A ou bien au jeu B (le choix est fait au hasard). Au début le joueur part avec un gain nul : $g = 0$. À chaque étape, il choisit au hasard (50% de chance chacun) :

- de jouer une fois au jeu A,
- ou de jouer une fois au jeu B ; plus précisément avec le sous-jeu B1 ou le sous-jeu B2 en fonction du gain déjà acquis g.

1. **Tirage.** Écris une fonction `tirage_jeu_AB(g)` qui dépend du gain déjà acquis et modélise un tirage du jeu AB.
2. **Gain.** Écris une fonction `gain_jeu_AB(N)` qui modélise N tirages du jeu AB (en partant d'un gain initial nul) et renvoie le gain total de ces tirages.
3. **Espérance.** Écris une fonction `esperance_jeu_AB(N)` qui renvoie une estimation de l'espérance du jeu AB.
4. **Conclusion.**
   (a) Estime l'espérance en effectuant au moins un million de tours de jeu.
   (b) Que dire cette fois du signe de l'espérance ?
   (c) Combien puis-je espérer gagner ou perdre en jouant 1000 fois au jeu AB ? Surprenant, non ?

Référence : « Paradoxe de Parrondo », Hélène Davaux, La gazette des mathématiciens, juillet 2017.