

Binaire II

On continue notre exploration du monde des 0 et des 1.

Activité 1 (Palindromes).

Objectifs : trouver des palindromes en écriture binaire et en écriture décimale.

En français un palindrome est un mot (ou une phrase) qui se lit dans les deux sens, par exemple « **RADAR** » ou « **ENGAGE LE JEU QUE JE LE GAGNE** ». Dans cette activité, un *palindrome* sera une liste, qui a les mêmes éléments lorsqu'on la parcourt de gauche à droite ou de droite à gauche.

Exemples :

- $[1, 0, 1, 0, 1]$ est un palindrome (avec une écriture binaire),
- $[2, 9, 4, 4, 9, 2]$ est un palindrome (avec une écriture décimale).

1. Programme une fonction `est_palindrome(liste)` qui teste si une liste est un palindrome ou pas.
Indications. Tu peux comparer les éléments en position i et $p - 1 - i$ ou bien utiliser `list(reversed(liste))`.

2. On cherche des entiers n tels que leur écriture binaire soit un palindrome. Par exemple l'écriture binaire de $n = 27$ est le palindrome $[1, 1, 0, 1, 1]$. C'est le dixième entier n ayant cette propriété.
Quel est le millièmème entier $n \geq 0$ dont l'écriture binaire est un palindrome ?

3. Quel est le millièmème entier $n \geq 0$ dont l'écriture décimale est un palindrome ?
Par exemple les décimales de $n = 909$ forment le palindrome $[9, 0, 9]$. C'est le centièmème entier n ayant cette propriété.

4. Un entier n est un *bi-palindrome* si son écriture binaire *et* son écriture décimales sont des palindromes. Par exemple $n = 585$ a une écriture décimale qui est un palindrome et son écriture binaire $[1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]$ aussi. C'est le dixième entier n ayant cette propriété.
Quel est le vingtièmème entier $n \geq 0$ à être un bi-palindrome ?

Cours 1 (Opérations logiques).

On considère que 0 représente le « faux » et 1 le « vrai ».

- Avec l'opération logique « OU », le résultat est vrai dès que l'un au moins des deux termes est vrai. Cela s'écrit :
 - $0 \text{ OU } 0 = 0$
 - $0 \text{ OU } 1 = 1$
 - $1 \text{ OU } 0 = 1$
 - $1 \text{ OU } 1 = 1$

- Avec l'opération logique « ET », le résultat est vrai uniquement lorsque les deux termes sont vrais. Cela s'écrit :
 - $0 \text{ ET } 0 = 0$
 - $0 \text{ ET } 1 = 0$
 - $1 \text{ ET } 0 = 0$
 - $1 \text{ ET } 1 = 1$
- L'opération logique « NON », échange vrai et faux :
 - $\text{NON } 0 = 1$
 - $\text{NON } 1 = 0$
- Pour des nombres en écriture binaire, ces opérations s'étendent *bits à bits*, c'est-à-dire chiffre par chiffre (en commençant par les chiffres de droite) comme on poserait une addition (sans retenue). Par exemple :

| | | | |
|----|-----------|----|-----------|
| | 1.0.1.1.0 | | 1.0.0.1.0 |
| ET | 1.1.0.1.0 | OU | 0.0.1.1.0 |
| | 1.0.0.1.0 | | 1.0.1.1.0 |

Si les deux écritures n'ont pas le même nombre de *bits*, on rajoute des 0 non significatifs à gauche (exemple de 1.0.0.1.0 OU 1.1.0 sur la figure de droite).

Activité 2 (Opérations logiques).

Objectifs : programmer les principales opérations logiques.

- (a) Programme une fonction `NON()` qui correspond à la négation pour une liste donnée. Par exemple `NON([1,1,0,1])` renvoie `[0,0,1,0]`.
- (b) Programme une fonction `OUeg()` qui correspond au « OU » avec en entrée deux listes qui ont la même longueur. Par exemple, avec `liste1 = [1,0,1,0,1,0,1]` et `liste2 = [1,0,0,1,0,0,1]`, la fonction renvoie `[1,0,1,1,1,0,1]`.
- (c) Même travail avec `ETeg()` pour deux listes de longueurs égales.
- Écris une fonction `ajouter_zeros(liste,p)` qui rajoute des zéros au début de la liste afin d'obtenir une liste de longueur `p`. Exemple : si `liste = [1,0,1,1]` et `p = 8`, alors la fonction renvoie `[0,0,0,0,1,0,1,1]`.
- Écris deux fonctions `OU()` et `ET()` qui correspondent aux opérations logiques « OU » et « ET », mais avec deux listes qui n'ont pas nécessairement la même longueur.

Exemple :

- `liste1 = [1,1,1,0,1]` et `liste2 = [1,1,0]`,
- il faut considérer que `liste2` est équivalente à la liste `liste2bis = [0,0,1,1,0]` de même longueur que `liste1`,
- donc `OU(liste1,liste2)` renvoie `[1,1,1,1,1]`,
- puis `ET(liste1,liste2)` renvoie `[0,0,1,0,0]` (ou bien `[1,0,0]` selon ton choix).

Indications : tu peux reprendre le contenu de tes fonctions `OUeg` et `ETeg`, ou bien tu peux d'abord ajouter des zéros à la liste la plus courte.

Activité 3 (Lois de Morgan).

Objectifs : générer toutes les listes possibles de 0 et 1 afin de vérifier une proposition.

1. Première méthode : utiliser l'écriture binaire.

On souhaite générer toutes les listes possibles de 0 et de 1 d'une taille p donnée. Voici comment faire :

- Un entier n parcourt tous les entiers de 0 à $2^p - 1$.
- Pour chacun de ces entiers n , on calcule son écriture binaire (sous la forme d'une liste).
- On rajoute (si besoin) des 0 en début de liste, afin d'obtenir une liste de longueur p .

Exemple : avec $n = 36$, son écriture binaire est $[1, 0, 0, 1, 0, 0]$. Si on veut une liste de $p = 8$ bits, on rajoute deux 0 : $[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$.

2. Seconde méthode (optionnelle) : un algorithme récursif.

On souhaite de nouveau générer toutes les listes possibles de 0 et de 1 d'une taille donnée. On adopte la procédure suivante : si on sait trouver toutes les listes de taille $p - 1$, alors pour obtenir toutes les listes de taille p , il suffit de rajouter un 0 en début de chacune des listes de taille $p - 1$, puis de recommencer en rajoutant un 1 en début de chacune des listes de taille $p - 1$.

Par exemple : il y a 4 listes de longueur 2 : $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$. J'en déduis les 8 listes de longueur 3 :

- 4 listes en rajoutant un 0 devant : $[0, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 1, 1]$,
- 4 listes en rajoutant un 1 devant : $[1, 0, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 1, 1]$.

Cela donne l'algorithme suivant, qui est un algorithme récursif (car la fonction s'appelle elle-même).

Algorithme.

Usage : tous_les_binaires(p)

Entrée : un entier $p > 0$

Sortie : la liste de toutes les listes possibles de 0 et de 1 de longueur p

- Si $p = 1$ renvoyer la liste $[[0], [1]]$.
- Si $p \geq 2$, alors :
 - obtenir toutes les listes de taille $p-1$ par l'appel tous_les_binaires($p-1$)
 - pour chaque élément de cette liste, construire deux nouveaux éléments :
 - d'une part ajouter 0 en début de cet élément ;
 - d'autre part ajouter 1 en début de cet élément ;
 - ajouter ensuite ces deux éléments à la liste des listes de taille p .
- Renvoyer la liste des listes de taille p .

3. Les lois de Morgan.

Les lois de Morgan affirment que pour des booléens (vrai/faux) ou des bits (1/0), on a toujours les égalités :

$$\text{NON}(b_1 \text{ OU } b_2) = \text{NON}(b_1) \text{ ET } \text{NON}(b_2), \quad \text{NON}(b_1 \text{ ET } b_2) = \text{NON}(b_1) \text{ OU } \text{NON}(b_2).$$

Vérifie expérimentalement que ces égalités sont encore vraies pour n'importe quelles listes ℓ_1 et ℓ_2 d'exactly 8 bits.