Session CSMA Junior

Gestion numérique de l'incompressibilité

Mickaël Abbas (Senior) et Nicolas Pignet (Junior) - EDF R&D

2024

Plan

Quasi-incompressibility

When ?

- For special choice of Poisson ratio. Example : hyperelasticity (for elastomer)

$$\nu \approx 0,5$$

- In case of high level of plasticity (generalized plasticity). Plastic flow at constant volume implies incompressibility condition

$$\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right) = 0$$

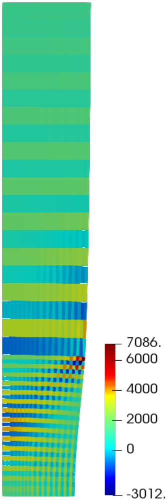
Quasi-incompressibility

Numerical consequences :

- Too rigid behaviour (especillay for linear and/or simplexes elements)
- Possibility of oscillations of the stress (fluctuation on the tensor trace)
- Unphysical results

Quasi-incompressibility

Oscillations in plasticity (large strains) : trace of stress tensor



Quasi-incompressibilité

Une déformation qui se fait à volume constant est caractérisée par le fait que le jacobien de la transformation est unitaire

$$J = det\boldsymbol{F} = 1$$

En petites déformations, la condition d'incompressibilité s'écrit en imposant

$$\mathrm{tr}\,\varepsilon(\underline{u}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0$$

Le tenseur des déformations ε est alors uniquement déviatorique. Par la loi de comportement, il ne sera possible d'exprimer donc que la partie déviatorique des contraintes. Les contraintes totales seront connues à une constante additive près.

Quasi-incompressibilité

Il existe (beaucoup) de méthodes permettant de résoudre plus ou moins facilement ces problèmes numériques. Nous allons en présenter quelques unes parmi lesquelles :

- Les méthodes de projection et leurs cousines (sous-intégration et intégration sélective)
- Les approches mixtes multi-champs
- Les formulations `HHO` (Hybrid-High order method)

Quasi-incompressibilité

Les méthodes de projection

Au début de "simples" astuces mais leur pertinence a été démontré théoriquement par la démonstration de leur équivalence par rapport aux formulations mixtes, voir Malkus et Hughes [12]. En particulier, elles se ramènent à un principe variationnel mixte à deux, trois ou plus d'inconnues (déplacements, contraintes, déformations, variables internes, etc.) : Hu-Washizu, Hellinger-Reissner, etc.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes de modification de l'intégration

Méthodes avec modification de l'intégration

Intégration réduite et intégration sélective

Quasi-incompressibilité

Les méthodes de modification de l'intégration

Rappel : pour calculer les intégrales

To compute continuous sum of a functionnal f, using a quadrature scheme ("Gauss" scheme) (n_g points with weight ω_g)

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega \approx \sum_{g=1}^{n_g} f_g \omega_g$$

La sous-intégration consiste à *réduire* le nombre de points. Introduite par Zienkiewicz en 1971 [17] dans le cadre de la théorie des plaques.
Problème : cette méthode peut conduire à une matrice de rigidité singulière et introduire des modes à énergie nulle (modes "hourglass"), particulièrement sur les éléments finis linéaires.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes de modification de l'intégration

Corrections possibles pour les modes à énergie nulle :

- méthodes de stabilisation de ces modes à énergie nulle
- intégration *sélective*, c'est-à-dire modifier les schémas de quadrature numérique sur une partie seulement des termes de déformation (Doherty *et al.* en 1969, voir [9])y

Problèmes :

- très difficile (voire impossible) pour les cas non-isotropes
- encore des instabilités
- marche uniquement quand on peut séparer déviatorique/sphérique dans la loi

Quasi-incompressibilité

Les méthodes avec modification des opérateurs cinématiques

Méthodes avec modification des opérateurs cinématiques

Techniques `B-Bar` et `F-Bar`, etc.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes avec modification des opérateurs cinématiques

- La technique `B-Bar` a été proposée par Hughes [8]. Elle consiste à modifier l'opérateur $\mathcal{B}$ qui lie les déplacements avec les déformations en le séparant en une partie déviatorique et une partie hydrostatique.
- Une version pour les grandes déformations, la méthode `F-Bar`, a été développée en particulier par de Souza *et al.* [15], utilisable uniquement sur des éléments linéaires (simplexes)

Ces méthodes permettent en particulier de s'affranchir des contraintes sur l'isotropie du comportement et sur la nécessité de non-séparation explicite des termes hydrostatiques et déviatoriques

Version grandes transformations

La méthode `F-Bar` a été étendue à des ordres plus élevés par Elguedj *et al.*[7] mais dans le cadre de l'analyse iso-géométrique (IGA).

Quasi-incompressibilité

Les méthodes avec enrichissement de la cinématique

Méthodes avec enrichissement de la cinématique

Techniques EAS, ANS et leurs cousines

Quasi-incompressibilité

Les méthodes avec enrichissement de la cinématique

La plus connue et la plus répandue est la méthode Enhanced Assumed Strain (EAS) qui a été introduite par Simo et Rifai [14] dans le cadre des petites déformations.
L'idée de cette méthode est d'enrichir le champ de déformation de sorte qu'il dérive d'un champ de déplacements et d'un champ complémentaire $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^s \, \underline{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Cette décomposition est ensuite injectée dans la formulation variationnelle de Hu-Washizu.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes de projection : modification des opérateurs cinématiques

On ajoute une condition d'orthogonalité entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations enrichies

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

$\rightarrow$ on se ramène à une formulation à deux champs, avec comme inconnues les déplacements et les déformations enrichies
$\rightarrow$ condensation statique pour les déformations enrichies, on se ramène à une formulation en déplacement pur
Robuste et économique, mais son extension aux grandes transformations par Simo et Armero [13] fait ré-apparaître des verrouillages ...

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes

Formulations mixtes

Basées sur le principe variationnel mixte à deux, trois ou plus d'inconnues (déplacements, contraintes, déformations, variables internes, etc.) : Hu-Washizu, Hellinger-Reissner, etc.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes

Écriture du lagrangien mixte (sans chargement, pour simplifier) :

$$L(\underline{u}, p, g) = \int_\Omega \left[\sigma : (\varepsilon^D(\underline{u}) + \frac{g}{3} I) + p(\underline{\nabla} \cdot \underline{u} - g)\right] d\Omega$$

Conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \underline{u}} = \displaystyle\int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma}^D + p\boldsymbol{I}\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial p} = \displaystyle\int_\Omega (\underline{\nabla} \cdot \underline{u} - g) : \delta p\, d\Omega & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial g} = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} - p\right) : \delta g\, d\Omega & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes

Dans le cas où il existe une relation biunivoque entre la pression et le gonflement comme par exemple pour un matériau élasto-plastique avec un critère de plasticité de type von Mises, il est possible d'expliciter le gonflement et donc de supprimer la troisième équation du système. On obtient alors le système de deux équations à deux inconnues qui suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \underline{u}} = \displaystyle\int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma}^D + p\boldsymbol{I}\right) : \delta\varepsilon \, d\Omega & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial p} = \displaystyle\int_\Omega (\underline{\nabla}\cdot\underline{u} - p) : \delta p \, d\Omega & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes

Ces méthodes mixtes doivent respecter un critère de stabilité LBB (Ladyjenskaia-Brezzi-Babuska) (dans un cadre discret en particulier).
Pour le choix des approximations optimales, voir la bible : Brezzi et Fortin [4].
Dans certaines situations, ces conditions ne sont pas remplies. Il existe donc des méthodes de stabilisation.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes - Stabilisation

Quelques méthodes de stabilisation des formulations mixtes :

- Le mini-élément a été introduit dans le cadre de la mécanique des fluides par Arnold [2]. On introduit une fonction bulle qui peut être condensée localement. Ne fonctionne que sur les simplexes.
- Les méthodes Galerkin Least-Square (GLS) proviennent aussi de la méca. flu. [11]. Stabilisation avec un terme de pénalisation. Marche en grands transformations, mais difficultés du choix du coefficient
- Méthode de stabilisation "mixed-enhanced strain" (MES), qui applique EAS sur une formulation mixte, introduite par Taylor et Zienkiewicz en 2000 [16]

Les méthodes GLS et MES ont été unifiées dans un cadre commun appelé "Variational Muti-Scale" (VMS)par Hughes et Stewart en 1996, voir [10]. C'est une représentation multi-échelle qui consiste à séparer la partie non-soluble par les éléments finis en la "sortant" de la discrétisation.

Quasi-incompressibilité

Les méthodes mixtes - Stabilisation

Les méthodes les plus utilisées et semblant les plus robustes sont les méthodes "Orthogonal Sub-Grid Scale" (OSGS) est une méthode multi-échelle, introduite par Codina [6] dans le cadre de la mécanique des fluides, puis étendue à la mécanique des solides dans le cadre des petites déformations Cervera *et al.* [5] puis étendu aux cas des grandes transformations par de Saracibar *et al.*. [1]

Quasi-incompressibilité

Les méthodes Galerkine discontinues

L'article d'Auricchio *et al.* [3] démontre qu'en grandes transformations, même les formulations réputées stables ne le sont plus (difficulté à trouver dans l'espace discret les domaines de stabilité).

Les méthodes Galerkine discontinues

Retour aux formulations primales avec HHO !

Références I

C. Agelet de Saracibar, M. Chiumenti, Q. Valverde et M. Cervera. « On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation J2 plasticity ». In : *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 195 (2006), p. 1224-1251.

D. N. Arnold, F. Brezzi et M. Fortin. « A stable finite element for the stokes equations ». In : *CALCOLO* 21.4 (déc. 1984), p. 337-344. issn : 1126-5434. doi : 10.1007/BF02576171.

F. Auricchio, da Velga L.B., C. Lovadina, A. Reali, R. L. Taylor et P. Wriggers. « Approximation of incompressible large deformation elastic problems : some unresolved issues ». In : *Computational Mechanics* 52 (2013), p. 1153-1167.

D. Boffi, F. Brezzi et M. Fortin. *Mixed finite element methods and applications*. Springer series in computational mathematic 44. Springer, 2013.

M. Cervera, M. Chiumenti et R. Codina. « Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics : Part i : Formulation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 199 (2010), p. 2559-2570.

R. Codina. « Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.13 (2000), p. 1579-1599. issn : 0045-7825. doi : https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00254-1.

Références II

T. Elguedj, Y. Bazilevs, V. Calo et T. J. Hughes. « B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements ». In : *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 197 (2008), p. 2732-2762.

T. J. R. Hughes. « Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15.9 (1980), p. 1413-1418. doi : https://doi.org/10.1002/nme.1620150914.

T. J. R. Hughes. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Dover, 2003. isbn : 978-0-486-41181-1.

T. J. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei et J.-B. Quincy. « The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 166.1 (1998). Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics, p. 3-24. issn : 0045-7825. doi : https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00079-6.

T. J. Hughes, L. P. Franca et G. M. Hulbert. « A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 73.2 (1989), p. 173-189. issn : 0045-7825. doi : https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90111-4.

D. Malkus et T. J. Hughes. « Mixed finite element methods reduced and selective integration techniques : A unification of concepts ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 15.1 (1978), p. 63-81.

Références III

J. C. Simo et F. Armero. « Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), p. 1413-1449.

J. C. Simo et M. Rifai. « A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (1990), p. 1595-1638.

E. de Souza Neto, D. Peric, M. Dutko et D. Owen. « Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids ». In : *International journal of solids and structures* 33.20 (1996), p. 3277-3296.

O. Zienkiewicz et R. Taylor. *Finite Element Method : Volume 1 - The Basis*. 5th. Butterworth-Heinemann, 2000.

O. Zienkiewicz, R. Taylor et J. Too. « Reduced integration technique in general analysis of plates and shells ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3 (1971), p. 275-290.