



INSTITUT CLÉMENT ADER

**CSMA Juniors**  
18 Mai 2024, Porquerolles, France

# Reconstruction tomographique

## Quelques éléments de théorie et algorithmes associés

John-Eric Dufour<sup>1</sup>

1. Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS/INSA/Mines Albi/UPS/ISAE, Toulouse, France

# Quelques rappels (historiques)



**1895:** W. Röntgen découvre les rayons X



**1917:** J. Radon invente la transformée de Radon



**1937:** S. Kaczmarz développe un algorithme itératif pour la résolution de systèmes linaires [7]

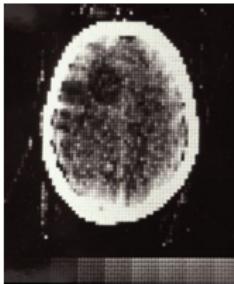


**1959:** W. H. Oldendorf imagine un appareil permettant de radiographier la tête pour obtenir une carte de densité des tissus

**1961:** Premier prototype de CT Scanner



# Quelques rappels (historiques)



**1970:** Premier algorithme de reconstruction ART [6]



(+)



=



(+)



**1971:** Premier CT scanner commercial par Sir G. Hounsfield

**1979:** Prix Nobel commun pour Hounsfield et Cormack (mais pas Oldendorf)

## Quelques chiffres

Première tomographie:

- **160 radios** couvrant  $160^\circ$ , **5 minutes** par images
- **2,5 heures** de reconstruction par l'algorithme ART
- taille des images: **80x80 pixels**

Exemple simple de reconstruction:

- **180 radios** couvrant  $180^\circ$  de taille **500x500**
- Volume de **256x256x256 voxels**
- **100s** sur un ordinateur portable et un algorithme itératif

Exemple "industriel":

- **1800 radios** couvrant  $900^\circ$  de taille **2400x2400** en 35 minutes
- Volume de **1800x2200x850 voxels**
- **2h** de reconstruction avec un algorithme itératif tournant sur un GPU (2020)

L'intensité des rayons X diminue lorsqu'ils traversent la matière. On peut calculer la quantité d'énergie transmise à travers un matériau de coefficient d'atténuation  $\mu$  à l'aide de la loi de Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-\int \mu(x) dx} \quad (1)$$

que l'on écrira également:

$$-\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int \mu(x) dx \quad (2)$$

Le problème à résoudre dans la tomographie se résume donc à:

- Mesurer l'intensité transmise  $I$  connaissant  $I_0$
- Retrouver l'atténuation  $\mu$ , fonction de la densité du matériau

# Images et projections: Shepp-Logan



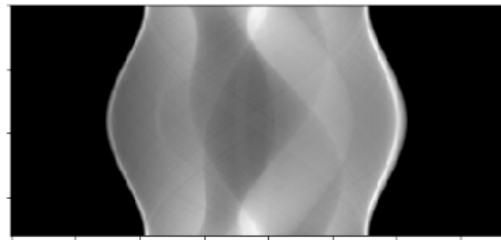
Un cas artificiel classique: le Shepp-Logan phantom [10]

# Images et projections: Shepp-Logan

Ellipse	Center	Major Axis	Minor Axis	Theta	Gray Level
a	(0,0)	0.69	0.92	0	2
b	(0, -0.0184)	0.6624	0.874	0	-0.98
c	(0.22,0)	0.11	0.31	-18°	-0.02
d	( -0.22,0)	0.16	0.41	18°	-0.02
e	(0,0.35)	0.21	0.25	0	0.01
f	(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.01
g	(0,-0.1)	0.046	0.046	0	0.01
h	(-0.08,-0.605)	0.046	0.023	0	0.01
i	(0,-0.605)	0.023	0.023	0	0.01
j	(0.06,-0.605)	0.023	0.046	0	0.01

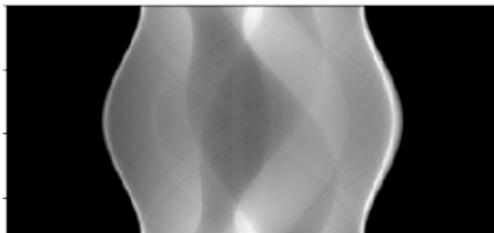


Source



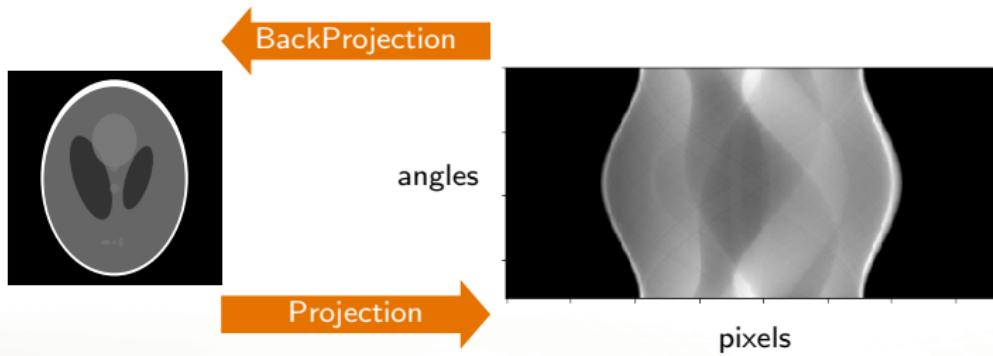


angles

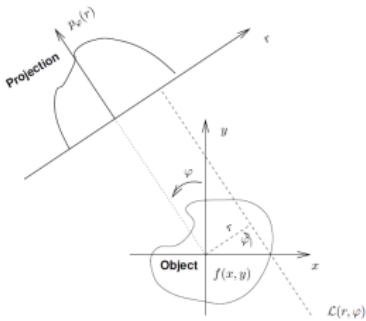


pixels

Projection



# Projection: La transformée de Radon [8]



$$R_f(L) = p_\varphi(r) = \int_{L(r,\varphi)} f(x,y) dx$$

$$p_\varphi(r) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - r) dx dy$$

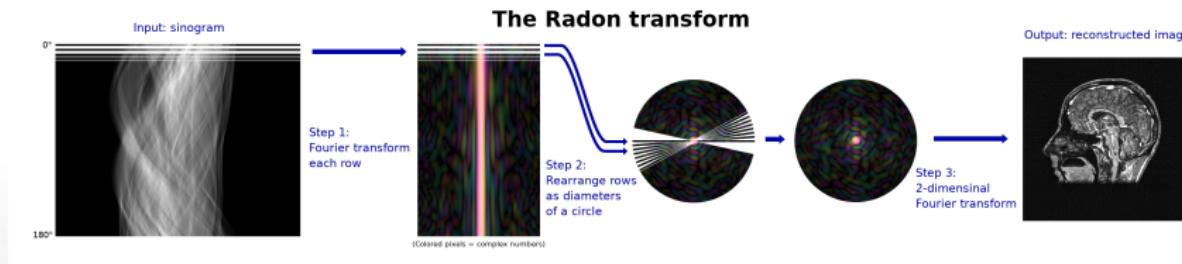
Connaissant  $p$ , on souhaite retrouver  $f$

Il existe plusieurs façons d'effectuer la transformée inverse, qui sont plus ou moins impossible à implémenter en pratique

# Fourier-Slice theorem

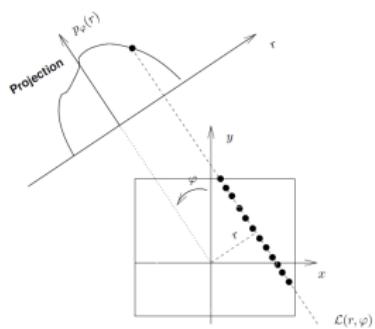
La transformée de Fourier 1D d'une projection  $\rho$  est une portion angulaire de la FFT 2D de  $f$ :

$$P_\varphi(s) = F(s \cos \varphi, s \sin \varphi) \quad (3)$$



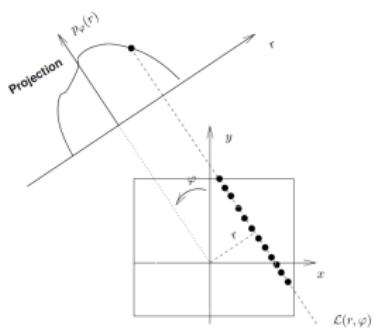
[9]

# Backprojection



$$f_b(x, y) = \int p_\varphi(r = x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi \quad (4)$$

# Backprojection

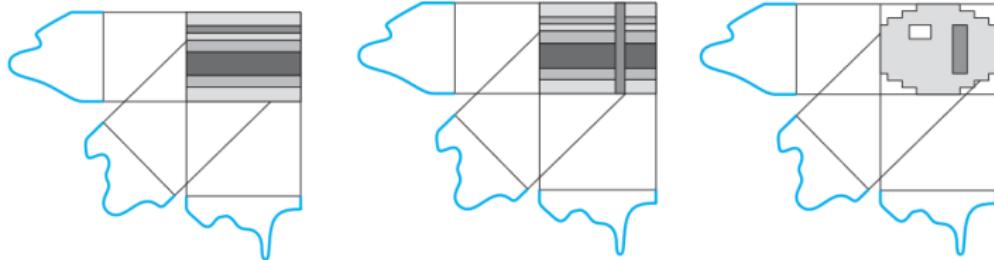


$$f_b(x, y) = \int p_\varphi(r = x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi \quad (4)$$

Concrètement:

On peut retrouver une approximation de  $f$  en étalant  $p$  le long de la ligne  $L$  à travers le domaine qu'occupe l'objet

# Backprojection: illustration



Principe de la rétroposition [11]

# Les méthodes de reconstructions

- Directes (Fourier-based):
  - Filtered BackProjection (FBP)
  - FDK (pour Feldkamp-Davies-Kress [4])
- Itératives:
  - ART: Algebraic Reconstruction Technique [6]
  - SART: Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique [1] (OS-SART,...)
  - SIRT: Simultaneous Iterative Reconstruction Technique
  - PWLS: Penalized Weighted Least-Square
  - CGLS: Conjugate Gradient Weighted Least-Square
  - ...
- Autres:
  - Singular value decomposition
  - IA

# Filtered Backprojection: quelques bases

$$f(x, y) \xrightarrow{\text{Proj}} p_\varphi(r) \xrightarrow{\text{FFT}} P_\varphi(s) \xrightarrow{\text{Filtre}} \hat{P}_\varphi(s) \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \hat{p}_\varphi(r) \xrightarrow{\text{Proj}^{-1}} f_r(x, y)$$

$$\hat{p}_\varphi(r) = \text{FFT}^{-1}\{\text{FFT}(p_\varphi)k(s)|s|\} \quad (5)$$

avec  $k$  un filtre de forme

$$f_r(x, y) = \int \hat{p}_\varphi(x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi \quad (6)$$

- FFT 1D des projections
- Filtrage en fréquence (une rampe par exemple)
- FFT inverse
- Rétroprojection pondérée (pour prendre en compte la forme du faisceau)

Cf: TP part 1

# Représentation algébrique

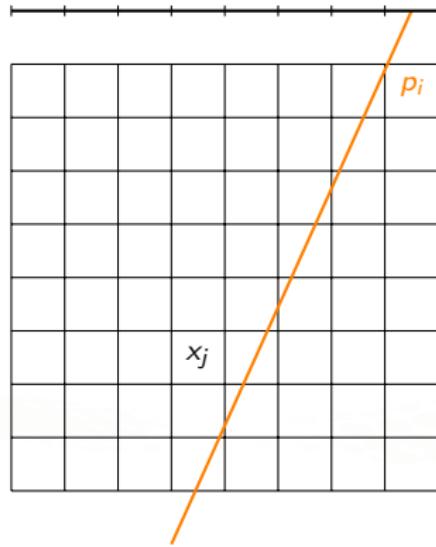
$$Ax = p$$

**x:** volume à reconstruire (taille N)

**p:** projections (taille M)

**A:** opérateur de projection (taille NxM)

$a_{ij}$  représente la contribution de  $x_j$  à  $p_i$



# Représentation algébrique

On souhaite résoudre

$$Ax = p$$

M: taille du détecteur ( $\approx 2000 \times 2000$ )  $\times$  nombres d'angles ( $> 300$ , en pratique  $\approx 900$ )

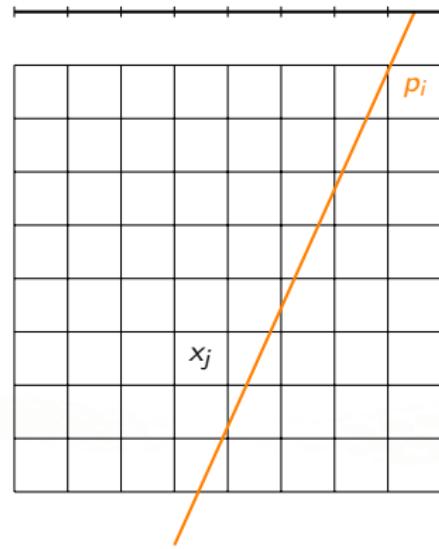
N: taille du volume reconstruit ( $\approx 1000 \times 1000 \times 1000$ )

On peut alors résoudre le problème de manière itérative (cf. ART) ou résoudre un problème de minimisation de la norme d'un résidu de projection :

$$x_{sol} = \operatorname{argmin} \|p - Ax\| \quad (7)$$

# Calcul des projections

$$p_i = \sum_j a_{ij} x_j$$



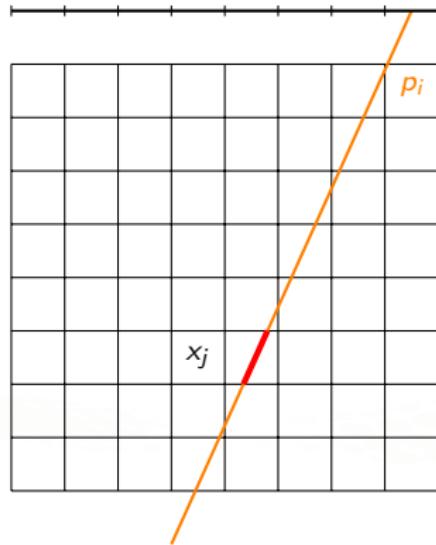
# Calcul des projections

$$p_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

Pixel driven:  
On calcule l'intersection entre le rayon et  
un voxel

Inconvénient:

- Relativement coûteux



# Calcul des projections

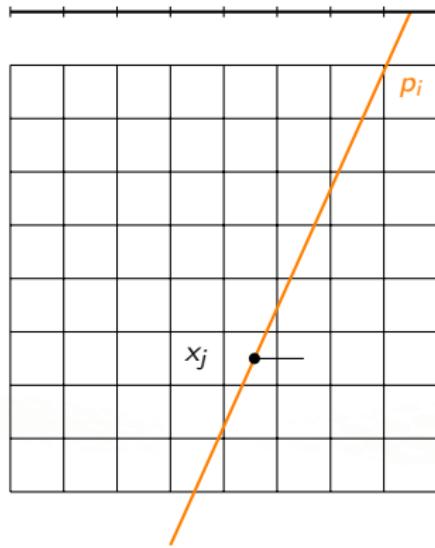
$$p_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

Ray-driven:

Les poids sont calculés à partir de l'interpolation entre les centres des voxels environnants.  
Implémentation simple et algorithme efficace.

Inconvénient:

- Artefacts haute fréquence (Moiré)



# Calcul des projections

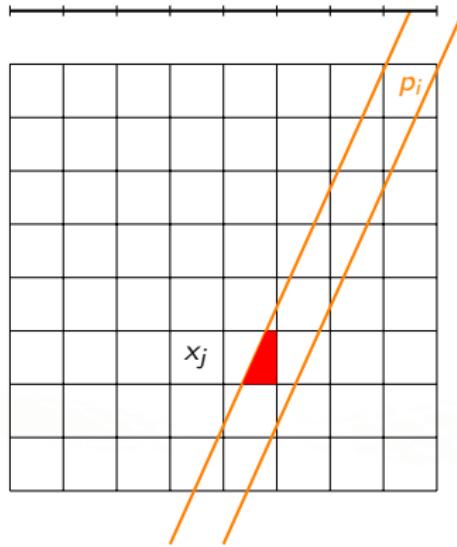
$$p_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

Strip area:

On calcule l'air d'intersection entre un voxel et le faisceau

Inconvénient:

- très couteux, et dépend de la géométrie du faisceau



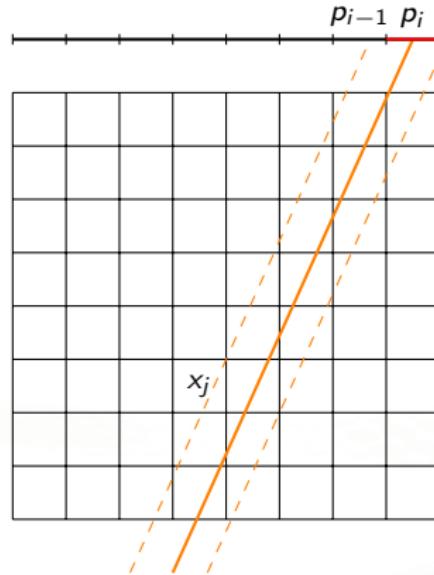
# Calcul des projections

$$p_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

Distance driven [2]:

On calcule l'overlap des projections des voxels et des pixels du détecteur sur un axe commun

Très efficace, implémentation simple,  
boucle sur des intervalles et plus sur les  
voxels ou les pixels



# Reconstruction algébrique: la méthode ART

Principe: Mise à jour de la solution pour chaque (ligne de) pixel de données

- Algorithme de Kaczmarz pour  $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$

- Mise à jour:  $x^{k+1} = x^k + \lambda \frac{p_i - (a_i, x^k)}{\|a_i\|^2} a_i$
- avec  $i = k \% m$ ,  $a_i$ : i-ème ligne de  $A_{m*n}$

- Limitations:

- Système d'équation cohérent
- Nombre d'itération important

# Reconstruction algébrique: la méthode SIRT [5]

Principe: Mise à jour de la solution avec toutes les projections d'un coup

- Méthode

- Mise à jour:  $x^{k+1} = x^k + CA^T R(\mathbf{p} - Ax^k)$
- avec  $C_{jj} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{M-1} a_{ij}}$ ,  $R_{ii} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}}$

- Limitations:

- Système d'équation cohérent
- Toute les projections d'un seul coup
- On doit stocker 2 volumes en parallèles

# Reconstruction algébrique: la méthode SART

Principe: ART with a twist !

On applique à chaque voxel une correction moyenne par projection

- Méthode

$$\text{Mise à jour: } x^{k+1} = x^k + \lambda \frac{\sum_i a_{ij} \frac{p_i - (a_i, x^k)}{\sum_j a_{ij}}}{\sum_i a_{ij}}$$

- Il existe de nombreuses variantes

- Limitations:

- Système d'équation cohérent
- On doit stocker 2 volumes en parallèles

# Reconstruction algébrique: Model-based with PWLS

Principe: On utilise la connaissance de la physique de la formation des projections [3]

- $p_i$  provient d'un échantillon de  $\{\text{Poisson}(b_i e^{-[\mathbf{Ax}]_i} + r_i) + \text{Gaussian}(0, \sigma)\}$ 
  - log-likelihood:  $L(\mathbf{x}) = \sum_i g_i([\mathbf{Ax}]_i)$ , avec  $g_i = y_i \log(b_i e^{-[\mathbf{Ax}]_i} + r_i) - (b_i e^{-[\mathbf{Ax}]_i} + r_i)$
- on réécrit le problème:

$$\mathbf{x} = \operatorname{argmin} \left( \sum_i \frac{w_i}{2} ([\mathbf{Ax}]_i - \hat{l}_i)^2 + \beta R(\mathbf{x}) \right)$$

$$\text{avec } w_i = \frac{(y_i - r_i)^2}{y_i} \text{ et } \hat{l}_i = \log \frac{b_i}{y_i - r_i}$$

- Mise à jour:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \left[ \frac{\sum_i a_{ij} w_i (\hat{l}_i - [\mathbf{Ax}^k]_i) + \beta \nabla R(\mathbf{x}^k)}{\sum_i a_{ij} w_i \sum_j a_{ij} + \beta \nabla^2 R(\mathbf{x}^k)} \right]_+$$

- soit:  $\Delta \mathbf{x} = A^T W (\hat{l} - A \mathbf{x})$

# Conclusions

- La reconstruction tomographique est un vieux problème ...
- ...qui a trouvé beaucoup de solutions différentes
- L'un des axes de recherche principal reste l'efficacité des algorithmes

# Conclusions

- La reconstruction tomographique est un vieux problème ...
- ...qui a trouvé beaucoup de solutions différentes
- L'un des axes de recherche principal reste l'efficacité des algorithmes

## Pendant le TP (en Python):

- Implémentation de 2 algos en 2D
- L'impact du bruit ou des artefacts de mesures

## References |

- [1] A Andersen. "Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm". en. In: Ultrasonic Imaging 6.1 (Jan. 1984), pp. 81–94. ISSN: 01617346. DOI: 10.1016/0161-7346(84)90008-7.
- [2] B. De Man and S. Basu. "Distance-driven projection and backprojection". In: 2002 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record. Vol. 3. Norfolk, VA, USA: IEEE, 2003, pp. 1477–1480. ISBN: 978-0-7803-7636-6. DOI: 10.1109/NSSMIC.2002.1239600.
- [3] I.A. Elbakri and J.A. Fessler. "Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography". In: IEEE Trans. Med. Imaging 21.2 (Feb. 2002), pp. 89–99. ISSN: 02780062. DOI: 10.1109/42.993128. (Visited on 05/09/2024).
- [4] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. "Practical cone-beam algorithm". en. In: J. Opt. Soc. Am. A 1.6 (June 1984), p. 612. ISSN: 1084-7529, 1520-8532. DOI: 10.1364/JOSAA.1.000612.
- [5] Peter Gilbert. "Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections". en. In: Journal of Theoretical Biology 36.1 (July 1972), pp. 105–117. ISSN: 00225193. DOI: 10.1016/0022-5193(72)90180-4.
- [6] Richard Gordon, Robert Bender, and Gabor T. Herman. "Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography". en. In: Journal of Theoretical Biology 29.3 (Dec. 1970), pp. 471–481. ISSN: 00225193. DOI: 10.1016/0022-5193(70)90109-8.

## References II

- [7] S. Kaczmarz. "Angenäherte auflösung von systemen linearer Gleichungen". In: *Bulletin International de l' Académie Polonaise des Sciences et des Lettres* 35 (1937), pp. 355–357.
- [8] Johann Radon. "On the determination of functions from their integral values along certain manifolds". In: *IEEE Trans. Med. Imaging* 5.4 (Dec. 1986), pp. 170–176. ISSN: 0278-0062, 1558-254X. DOI: 10.1109/TMI.1986.4307775.
- [9] Peter Selinger.  
Computing the 2-dimensional Radon transform in terms of two Fourier transforms.
- [10] L. A. Shepp and B. F. Logan. "The Fourier reconstruction of a head section". In: *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 21.3 (June 1974), pp. 21–43. ISSN: 0018-9499, 1558-1578. DOI: 10.1109/TNS.1974.6499235.
- [11] Christian Thiery. "Tomographie à rayons X". fr. In: Techniques d'analyse (Dec. 2013). DOI: 10.51257/a-v3-p950.