运筹学第一次作业

游小草 2021110933

1 6.1

该问题对应的数学模型如下：

目标函数为：$Min \quad \sum_{i=1}^{12}[f_i(x_i)+g_i(x_i)]$

约束条件为：

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le b, \quad x_i \in N_+ \\ 0 \le y_i \le c, \quad y_i \in N_+ \\ x_1 \ge d_1 \\ x_i + y_{i-1} \ge d_i, \quad i = 2,3,...,12 \end{cases} \tag{1}$$

2 6.5

(a) 有 $|H| = 13 > 0$

二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$

一阶顺序主子式 |2|=2>0

由于该矩阵的所有顺序主子式均为正，因此该矩阵正定。

(b) 有 $|H| = 47 > 0$

二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 < 0$

一阶顺序主子式 |2|=2>0

该矩阵不定。

(c) 有 $|H| = 0$

二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

一阶顺序主子式 |1|=1

由于该矩阵的所有顺序主子式均大于等于零，因此该矩阵半正定。

3 6.9

(a) 由 $f(x)$ 一阶可微, 取任意两点 a,b<=4, 有

$$\begin{aligned} f(b) - [f(a) + \nabla f(a)(b-a)] &= (4-b)^3 - [(4-a)^3 + 3(4-a)^2(b-a)] \\ &= (4-b)^2 + 4(4-a)^2 + (4-a)(4-b) \end{aligned} \tag{2}$$

由于 a,b 均小于等于 4, 上述多项式恒为非负，因此该函数为凸函数。

(b) 由

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2x_2 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= 2x_1 + 6x_2 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} &= 6 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} = 2\end{aligned} \tag{3}$$

其黑塞矩阵为：$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

由于该矩阵正定，因此 f(x) 为严格凸函数。

(c) 由 $f(x)$ 一阶可微, 取任意两点 a,b<=0, 有

$$\begin{aligned} f(b) - [f(a) + \nabla f(a)(b-a)] &= \frac{1}{b} - [\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(b-a)] \\ &= \frac{(a-b)^2}{a^2 b} \end{aligned} \tag{4}$$

由于 a,b<0, 上式小于等于 0, 因此该函数为凹函数。

(d) 由

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= x_2 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= x_1 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} = 1\end{aligned} \tag{5}$$

其黑塞矩阵为：$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

由于该矩阵半负定，因此 f(x) 为凹函数。

4 6.12

由 f(x) 为三元函数，其一阶偏导数分别为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= 2x_2x_3 - 4x_3 + 2x_1 - 2 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= 2x_1x_3 - 2x_3 + 2x_2 - 4 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} &= 2x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4\end{aligned} \tag{6}$$

分别令各阶偏导为零，且联立方程组如下：

$$\begin{cases} 2x_2x_3 - 4x_3 + 2x_1 - 2 = 0 \\ 2x_1x_3 - 2x_3 + 2x_2 - 4 = 0 \\ 2x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

代入题中所给点的坐标进行验证，可知所给点均为驻点。该函数的二阶偏导分别为：

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} = 2x_3$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_3} = 2x_2 - 4$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{2x1}} = 2x_3$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_3} = 2x_1 - 2$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 x_1} = 2x_2 - 4$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_3} = 2x_1 - 2$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} = 2$

其黑塞矩阵为: $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2x_3 & 2x_2 - 4 \\ 2x_3 & 2 & 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 & 2x_1 - 2 & 2 \end{bmatrix}$ 将所给驻点代入判定,知:极大点为 (0,3,1),(2,1,1), 极小点为 (0,1,-1),(1,2,0),(2,3,-1)。

5 6.13

(a) 判定该非线性规划是否为凸规划，即判断下列函数：

$$f(x) = x_1 + 2x_2; \quad g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9; \quad g_2(x) = -x_2$$

是否为凸函数。

由于 $f(x)$ 与 $g_2(x)$ 均为线性函数, 针对 $g_1(x)$:

其黑塞矩阵 $\nabla^2 g_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 正定，即 $g_1(x)$ 为严格凸函数，故该非线性规划为凸规划。

(b) 即判定 $f(x), g_2(x)$ 是否为凸函数即可。

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\nabla^2 g_2(x) = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$,$g_2(x)$ 对应的黑塞矩阵不定，故该非线性规划不是凸规划。

6 6.14

由于该函数为 $[0, 25]$ 上的上单峰函数，且根据一阶导数的单调性可知有且仅有一个极大值点。

由题，缩短后的区间长度不大于原区间长度的 8%, 根据查表所得，需进行 6 次计算可满足要求。

由计算机迭代得到近似极大值点为 **3.84654**，近似极大值为 **39.6977**。

7 6.15

根据黄金分割法使用计算机进行迭代得到近似极大值点为 **3.64737**，近似极大值为 **39.8733**。由该方法所得的极大值大于斐波那契法求得的极大值。

8 6.16

求该函数的极大点即求 $g(x)=(x_1)^2+2(x_2)^2-2x_1x_2-2x_2$ 的极小点。

第一次迭代：由 $\nabla g(X)=(2x_1-2x_2,4x_2-2x_1-2)$, 得:

$$X^0=(0,0)^T,\quad \nabla g(X^0)=(0,-2);$$

第二次迭代：由 $\lambda_0=\frac{1}{4}$, 得:

$$X^1=X^0-\lambda_0\nabla g(X^0)=(0,\tfrac{1}{2})^T,\quad \nabla g(X^1)=(-1,0)$$

第三次迭代：由 $\lambda_1=\frac{1}{2}$, 得:

$$X^2=X^1-\lambda_1\nabla g(X^1)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T,\quad \nabla g(X^2)=(0,-1)$$

第四次迭代：由 $\lambda_2=\frac{1}{4}$, 得:

$X^3=X^2-\lambda_2\nabla g(X^2)=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})^T$，故 X^3 为 $g(x)$ 的近似极小值点，此时函数值 $g(X^3)=-\frac{7}{8}$。

即 $f(x)$ 的近似极大值点为 $X^3=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})^T$，近似极小值为 $f(X^3)=\frac{7}{8}$。

9 6.30

$\nabla f(x)=(\frac{1}{x_1+x_2},\frac{1}{x_1+x_2})$

记 $g_1(x)=x_1+2x_2-5,\quad g_2(x)=-x_1,\quad g_3(x)=-x_2$

$\nabla g_1(x)=(1,2),\quad \nabla g_2(x)=(-1,0),\quad \nabla g_3(x)=(0,-1)$

则其库恩-塔克条件为：

$$\begin{cases}\frac{1}{x_1+x_2}+\mu_1-\mu_2=0\\ \frac{1}{x_1+x_2}+2\mu_1-\mu_3=0\\ \mu_1(x_1+2x_2-5)=0\\ \mu_2x_1=0\\ \mu_3x_2=0\\ \mu_1,\mu_2,\mu_3>=0\end{cases}\tag{8}$$

方程组无解，因此该非线性规划问题无解。

10 6.37

由于该非线性规划的约束条件为等式约束，则建立如下罚函数：

$P(X,M)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+M(x_1^2-x_2)^2$,M 为足够大的正数。

对于固定的 M，令 $\frac{dP(x,M)}{dx}=0,\quad (2,1)$

计算该点处函数的黑塞矩阵，可判断其为正定矩阵，则该点为 P(X,M) 的严格局部极小点。

故该线性规划的最优解为 (2,1)。