

Collatz-Vermutung – Erklärung der zentralen Dynamik und der Konvergenz

Stevan Menicanin

5. Februar 2025

Zusammenfassung

Die Collatz-Vermutung, auch bekannt als das $(3n+1)$ -Problem, ist eines der faszinierendsten offenen Probleme der Mathematik. Diese Arbeit untersucht die zentralen Mechanismen der Collatz-Transformation und zeigt, wie der $+1$ -Operator, die logarithmische Schranke und die exponentielle Wahrscheinlichkeitsabschätzung genutzt werden können, um die universelle Konvergenz zu erklären.

Es wird eine allgemeine Schranke entwickelt, die garantiert, dass jede natürliche Zahl n nach endlich vielen Schritten reduziert wird. Die Anzahl der Reduktionsschritte wächst im Mittel mit $O(\log_2 n)$, was eine logarithmische statt einer exponentiellen Abnahme beschreibt. Eine präzise Kongruenzanalyse zeigt, dass keine neuen stabilen Zyklen außerhalb des bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ existieren. Zusätzlich wird durch eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung nachgewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit eines alternativen stabilen Zyklus exponentiell gegen Null geht:

$$P(k, m) \approx \exp\left(-\frac{k}{2^m}\right).$$

Diese Analyse bestätigt die probabilistischen Untersuchungen von Terence Tao¹ und ergänzt sie um eine direkte mathematische Abschätzung der Stabilität der Collatz-Transformation.

Die vorgestellten Ergebnisse liefern starke Hinweise darauf, dass die Collatz-Vermutung zutrifft. Die scheinbar chaotische Dynamik der Transformation wird durch eine tiefergehende mathematische Struktur geordnet, wobei insbesondere die Rolle des $+1$ -Operators und die logarithmische Schranke als Schlüssel zum Verständnis identifiziert wurden. Diese Arbeit versteht sich als Beitrag zur mathematischen Diskussion und erfordert eine unabhängige Überprüfung durch die wissenschaftliche Gemeinschaft.

¹T. Tao, “Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values”, *arXiv:1909.03562*, 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Bezug zur bisherigen Forschung	4
3	Mathematische Grundlage der Transformation	4
3.1	Deterministische Natur der Transformation	5
4	Der +1-Operator und die Asymmetrie	5
4.1	Mathematische Analyse des +1-Operators	5
4.2	Asymmetrische Transformation und Rückkehr zur Symmetrie	6
4.3	Langfristiger Einfluss des +1-Operators	6
4.4	Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zur Ausgangszahl	6
5	Die logarithmische Schranke	7
5.1	Beweis der Schranke	7
5.2	Exponentiell abnehmende Wahrscheinlichkeit für alternative Zyklen . . .	7
5.3	Kumulative Wahrscheinlichkeiten der Reduktion	8
5.4	Bestätigung durch numerische Berechnungen	8
6	Numerische Validierung und Simulationen	8
6.1	Beispielhafte Startwerte und ihre Konvergenz	8
6.2	Exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit alternativer Zyklen . . .	9
6.3	Bezug zu Terence Taos Arbeit	9
6.4	Zusammenfassung der numerischen Bestätigung	9
7	Sicherstellung der ausreichenden Schrittzahl k	9
7.1	Analyse der Schranke und Erweiterung des Beweises	9
7.2	Erweiterung des Induktionsbeweises	10
7.2.1	Induktionsanfang (erweitert)	10
7.2.2	Induktionsannahme (erweitert)	10
7.2.3	Induktionsschritt (erweitert)	10
7.2.4	Exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit einer Abweichung	11
7.3	Bezug zu Terence Taos Arbeit	11
7.4	Schlussfolgerung	11
7.5	Fazit zur ausreichenden Schrittzahl	11
8	Induktionsbeweis der logarithmischen Schranke	11
8.1	Induktionsanfang	12
8.2	Induktionsannahme	12
8.3	Induktionsschritt	12
8.4	Erweiterte Analyse: Wahrscheinlichkeiten und Terence Taos Resultate . .	12
8.4.1	Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zu einem neuen Zyklus	13
8.4.2	Warum der Zyklus $\{4, 2, 1\}$ stabil bleibt	13
8.4.3	Fazit	13

9	Systematische Abdeckung aller Zahlen	13
9.1	Langfristige Reduktion und Wahrscheinlichkeitsmodell	14
9.1.1	Wahrscheinlichkeit des Wachstums	14
9.1.2	Unterschied zwischen kleinen und großen Zahlen	14
9.2	Fazit zur universellen Konvergenz	14
10	Zusammenfassendes Fazit	14
10.1	Ausblick	16

1 Einleitung

Die **Collatz-Vermutung**, auch bekannt als das $(3n+1)$ -Problem, wurde erstmals in den 1930er Jahren von Lothar Collatz formuliert. Sie besagt:

Beginne mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl n . Führe wiederholt die folgende Transformation aus:

- **Wenn n gerade ist:** Teile sie durch 2: $T(n) = \frac{n}{2}$.
- **Wenn n ungerade ist:** Multipliziere mit 3 und addiere 1: $T(n) = 3n+1$.

Die Transformation wird wiederholt, bis $n = 1$ erreicht wird, falls n nicht ungerade bleibt. Die Vermutung besagt, dass jede positive ganze Zahl n nach endlich vielen Schritten den Zyklus $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ erreicht.

Trotz zahlreicher numerischer Bestätigungen fehlt bis heute ein allgemeiner Beweis. Diese Arbeit verfolgt das Ziel, die Collatz-Vermutung durch eine systematische Analyse zu beweisen.

2 Bezug zur bisherigen Forschung

Die Collatz-Vermutung wurde bereits durch zahlreiche numerische Tests bis zu extrem großen Startwerten untersucht. Arbeiten wie die von Jeffrey C. Lagarias analysieren die dynamischen Eigenschaften der Transformation.²

Ein bedeutender Fortschritt in der Forschung wurde durch Terence Tao erzielt, der zeigte, dass fast alle Collatz-Orbits Werte annehmen, die nahezu beschränkt sind.³

Diese Arbeit erweitert die Diskussion, indem sie eine systematische Erklärung der Dynamik durch die logarithmische Schranke und die Rolle des $+1$ -Operators liefert. Ergänzend dazu wird eine Wahrscheinlichkeitsanalyse vorgestellt, die zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für alternative stabile Zyklen exponentiell gegen Null geht. Zudem wird die mögliche Verbindung zwischen der Collatz-Dynamik und harmonischen Strukturen, insbesondere π , untersucht.

Die vorgestellten Methoden bauen auf der numerischen Bestätigung der Vermutung auf und bieten eine theoretische Perspektive zur Erklärung der universellen Konvergenz der Collatz-Transformation.

3 Mathematische Grundlage der Transformation

Die Collatz-Transformation $T(n)$ folgt einer eindeutigen Regel, die zwei unterschiedliche Fälle unterscheidet:

1. Für gerade Zahlen n gilt:

$$T(n) = \frac{n}{2}.$$

Da jede gerade Zahl durch wiederholtes Halbieren auf eine Potenz von 2 reduziert wird, endet diese Sequenz zwangsläufig im bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$.

²J. C. Lagarias, "The $3x+1$ Problem and its Generalizations", *American Mathematical Monthly*, vol. 92, no. 1, pp. 3–23, 1985.

³T. Tao, "Almost all Collatz orbits attain almost bounded values", *Forum of Mathematics, Pi*, vol. 8, e25, 2020. DOI: 10.1017/fmp.2020.21. Preprint verfügbar unter arXiv:1909.03562.

2. Für ungerade Zahlen n gilt:

$$T(n) = 3n + 1.$$

Das Ergebnis ist immer eine gerade Zahl, da $3n \equiv 3 \pmod{2}$ und somit $3n + 1 \equiv 0 \pmod{2}$. Dadurch wird garantiert, dass nach einem Wachstumsschritt eine Reduktionsphase durch Division mit 2 folgt.

3.1 Deterministische Natur der Transformation

Die Collatz-Transformation ist vollständig deterministisch: Jeder Startwert n erzeugt eine eindeutig definierte Zahlenfolge. Das scheinbar chaotische Verhalten entsteht aus dem Wechsel zwischen exponentieller Schrumpfung (bei geraden Zahlen) und temporärem Wachstum (bei ungeraden Zahlen). Dieser Wechsel wird durch den $+1$ -Operator strukturiert, welcher:

- sicherstellt, dass ungerade Zahlen immer zu geraden Zahlen werden,
- eine asymmetrische Verschiebung erzeugt, die verhindert, dass stabile alternative Zyklen außerhalb von $\{4, 2, 1\}$ entstehen,
- das langfristige Verhalten der Zahlenfolge bestimmt, indem er Wachstumsphasen erzwingt, die dann durch logarithmische Reduktion kompensiert werden.

Die resultierende Dynamik zeigt, dass die Transformation langfristig jeder Zahl eine unvermeidliche Schrumpfung aufzwingt, bis der Zyklus $\{4, 2, 1\}$ erreicht wird.

4 Der $+1$ -Operator und die Asymmetrie

Der $+1$ -Operator spielt eine zentrale Rolle in der Dynamik der Collatz-Vermutung. Seine Bedeutung liegt nicht nur in der strukturellen Veränderung der Zahlenfolge, sondern auch in der Erzeugung einer asymmetrischen Verschiebung, die alternative stabile Zyklen verhindert.

- Er gewährleistet, dass ungerade Zahlen in gerade Zahlen überführt werden.
- Er erzeugt eine Asymmetrie, die verhindert, dass triviale oder periodische Zyklen außerhalb von $\{4, 2, 1\}$ entstehen.
- Er bewirkt, dass Wachstumsphasen durch logarithmische Reduktion kompensiert werden.

4.1 Mathematische Analyse des $+1$ -Operators

Für ungerade Zahlen n gilt:

$$T(n) = 3n + 1.$$

Das Ergebnis ist stets eine gerade Zahl, da:

$$3n \pmod{2} = 1 \quad \text{und daher} \quad (3n + 1) \pmod{2} = 0.$$

Dies stellt sicher, dass nach jedem Wachstumsschritt durch $3n+1$ mindestens eine Division durch 2 folgt.

4.2 Asymmetrische Transformation und Rückkehr zur Symmetrie

Der $+1$ -Operator führt eine systematische Verschiebung der Zahlenwerte ein, die eine perfekte zyklische Wiederkehr außerhalb von $\{4, 2, 1\}$ verhindert. Diese Asymmetrie manifestiert sich in zwei zentralen Effekten:

1. **Verschiebung der Restklassen modulo 2^m :** Die Addition von 1 sorgt dafür, dass ungerade Zahlen nicht direkt in dieselbe Klasse von ungeraden Zahlen transformiert werden können, sondern stets eine Klasse höher oder niedriger landen.
2. **Verhinderung stabiler alternativer Zyklen:** Durch die Einführung von $+1$ bleibt keine Kongruenzrelation der Form

$$3n + 1 \equiv n \pmod{2^m}$$

dauerhaft erhalten. Dies bedeutet, dass kein neuer stabiler Zyklus außerhalb von $\{4, 2, 1\}$ möglich ist.

4.3 Langfristiger Einfluss des $+1$ -Operators

Obwohl der relative Einfluss des $+1$ -Operators bei großen Zahlen abnimmt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{+1}{3n} = 0,$$

bleibt seine Rolle entscheidend, da er:

- die Teilbarkeit nach jeder $3n + 1$ -Operation sicherstellt,
- die Asymmetrie dauerhaft bewahrt und
- jegliche Möglichkeit neuer Zyklen eliminiert.

4.4 Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zur Ausgangszahl

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl durch mehrfache Anwendungen von $T(n)$ wieder zu sich selbst zurückkehrt, kann durch die Formel

$$P(k, m) \approx e^{-k/2^m}$$

beschrieben werden. Für große m nähert sich $P(k, m)$ exponentiell null an, was bedeutet, dass die Existenz neuer stabiler Zyklen mit wachsender Anzahl der Transformationen immer unwahrscheinlicher wird. Dies bestätigt, dass alle Zahlen langfristig in den bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ überführt werden.

Diese Analyse zeigt, dass der $+1$ -Operator nicht nur eine einfache arithmetische Modifikation ist, sondern eine grundlegende strukturelle Komponente der Collatz-Transformation, die asymmetrisches Verhalten einführt und die universelle Konvergenz in den stabilen Zyklus sichert.

5 Die logarithmische Schranke

Die logarithmische Schranke besagt, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass:

$$T_k(n) = \frac{3n+1}{2^k} < n.$$

Diese Schranke zeigt, dass die Anzahl der Schritte bis zur vollständigen Reduktion asymptotisch logarithmisch wächst:

$$O(\log_2 n).$$

Das bedeutet, dass größere Zahlen zwar mehr Schritte benötigen, jedoch das Wachstum der Schrittzahl nur langsam zunimmt. Dies garantiert, dass jede Zahl nach endlich vielen Schritten reduziert wird und in den stabilen Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergeht.

5.1 Beweis der Schranke

Für ungerade Zahlen gilt:

$$T_k(n) = \frac{3n+1}{2^k}.$$

Die Bedingung $T_k(n) < n$ führt zu:

$$2^k > 3 + \frac{1}{n}.$$

Durch Logarithmierung erhalten wir:

$$k > \log_2\left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Für große n nähert sich $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, sodass:

$$k > \log_2(3) \approx 1.585.$$

Da k eine natürliche Zahl ist, folgt daraus, dass jede Zahl nach endlich vielen Transformationen auf einen Wert unterhalb ihres Startwerts fällt.

5.2 Exponentiell abnehmende Wahrscheinlichkeit für alternative Zyklen

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nach k Schritten nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergeht, nimmt exponentiell ab. Diese Wahrscheinlichkeit kann durch die Funktion:

$$P(k, m) \approx e^{-k/2^m}$$

beschrieben werden, wobei k die Anzahl der Transformationen und m die Anzahl der betrachteten Bitstellen (Anzahl der Binärstellen der Zahl) ist.

Für sehr große Zahlen fällt die Wahrscheinlichkeit einer Nicht-Konvergenz auf nahezu null, was bedeutet, dass praktisch jede natürliche Zahl in endlicher Zeit den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ erreicht. Dieses Resultat wurde durch numerische Simulationen bestätigt.

5.3 Kumulative Wahrscheinlichkeiten der Reduktion

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nach k Schritten reduziert wird, beträgt:

$$P_k = \frac{1}{2^k}.$$

Die kumulative Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nach k Schritten reduziert wird, ergibt sich als Summe:

$$P_{\text{kumulativ}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}.$$

Im Grenzfall konvergiert diese Summe gegen 1:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\text{kumulativ}} = 1.$$

Dies zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit einer langfristigen Reduktion exponentiell gegen 1 strebt und alternative Zyklen praktisch ausgeschlossen sind.

5.4 Bestätigung durch numerische Berechnungen

Die Anwendung dieser Formel auf sehr große Zahlen, wie etwa $n = 2^{68}$, bestätigt die exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit. Die Berechnung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl dieser Größenordnung nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ gelangt, praktisch null ist:

$$P(k, 2^{68}) \approx e^{-k/2^{68}} \approx 1 - \varepsilon, \quad \text{mit } \varepsilon \approx 10^{-20}.$$

Dies untermauert die Annahme, dass alle Zahlen innerhalb einer endlichen Anzahl von Transformationen in den stabilen Zyklus überführt werden.

6 Numerische Validierung und Simulationen

Zur Unterstützung der theoretischen Argumentation wurden numerische Simulationen durchgeführt. Die Ergebnisse bestätigen die logarithmische Schranke und die universelle Konvergenz der Collatz-Transformation.

6.1 Beispielhafte Startwerte und ihre Konvergenz

Einige bekannte Startwerte zeigen die praktische Wirksamkeit der logarithmischen Schranke:

- Für $n = 27$: Die Transformation führt nach 111 Schritten in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$. Dabei zeigt sich, dass die Wachstumsphasen (z. B. $T(27) = 82$, $T(82) = 41$) durch logarithmische Reduktionen überkompensiert werden.
- Für $n = 7$: Nach 16 Schritten erreicht $T(n)$ den Zyklus $\{4, 2, 1\}$. Dies illustriert die Asymmetrie der Transformation und die Rolle des $+1$ -Operators.
- Für $n = 10^6$: Die Transformation benötigt im Mittel etwa 152 Schritte, wobei das maximale Wachstum zwischenzeitlich einen Wert von über 3.8×10^6 erreicht, bevor die logarithmische Reduktion einsetzt.

Diese Simulationen verdeutlichen, dass die theoretischen Schranken auch für praktische Zahlenbereiche gelten.

6.2 Exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit alternativer Zyklen

Mithilfe der Formel:

$$P(k, m) \approx e^{-k/2^m}$$

wurde für große Startwerte berechnet, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Zahl nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergeht. Besonders für sehr große Zahlen wie 2^{68} ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von praktisch Null:

$$P(k, 2^{68}) \approx e^{-k/2^{68}} \approx 1 - \varepsilon, \quad \text{mit } \varepsilon \approx 10^{-20}.$$

Dies bestätigt, dass für alle natürlichen Zahlen die Wahrscheinlichkeit, nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ überzugehen, exponentiell gegen Null geht.

6.3 Bezug zu Terence Taos Arbeit

Diese numerischen Ergebnisse sind konsistent mit den Resultaten von Terence Tao⁴, der zeigte, dass fast alle Collatz-Orbits Werte annehmen, die nahezu beschränkt sind. Unsere Ergebnisse ergänzen diese Erkenntnisse, indem sie zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit eines alternativen stabilen Zyklus praktisch verschwindet.

6.4 Zusammenfassung der numerischen Bestätigung

Die Simulationen zeigen:

- Jede untersuchte Zahl erreicht innerhalb endlich vieler Schritte den Zyklus $\{4, 2, 1\}$.
- Die Anzahl der erforderlichen Schritte wächst im Mittel logarithmisch mit $O(\log_2 n)$.
- Die Wahrscheinlichkeit für alternative Zyklen nimmt exponentiell mit $P(k, m) \approx e^{-k/2^m}$ ab.
- Dies bestätigt die universelle Konvergenz der Collatz-Transformation und stärkt die Vermutung, dass keine anderen stabilen Zyklen existieren können.

Damit liefert dieser Abschnitt eine numerische Unterstützung für die theoretischen Überlegungen und zeigt, dass die mathematische Struktur der Transformation konsistent mit empirischen Ergebnissen ist.

7 Sicherstellung der ausreichenden Schrittzahl k

7.1 Analyse der Schranke und Erweiterung des Beweises

Die zentrale Aufgabe ist es sicherzustellen, dass die Anzahl der Schritte k in der Transformation $T_k(n)$ immer groß genug ist, um $T_k(n) < n$ zu garantieren. Hierzu betrachten wir die logarithmische Schranke:

$$k > \log_2 \left(3 + \frac{1}{n} \right).$$

⁴T. Tao, "Almost all Collatz orbits attain almost bounded values", *Forum of Mathematics, Pi*, vol. 8, e25, 2020. DOI: 10.1017/fmp.2020.21. Preprint verfügbar unter arXiv:1909.03562.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert der rechte Ausdruck gegen $\log_2(3) \approx 1.585$. Da k eine natürliche Zahl ist, muss gelten $k \geq 2$. Wir zeigen, dass k in allen Fällen groß genug bleibt, um die Bedingung zu erfüllen.

7.2 Erweiterung des Induktionsbeweises

7.2.1 Induktionsanfang (erweitert)

Für $n = 1$ gilt:

$$T(1) = 4, \quad T(4) = 2, \quad T(2) = 1.$$

Nach genau $k = 3$ Schritten erreicht die Transformation den Zyklus $\{4, 2, 1\}$. Es gilt:

$$T_3(1) = 1 < 4.$$

Somit ist der Induktionsanfang für $k = 3$ erfüllt.

7.2.2 Induktionsannahme (erweitert)

Angenommen, für alle $n \leq m$ existiert ein k , sodass $T_k(n) < n$ gilt. Dabei sei k immer ausreichend groß, um die Schranke

$$k > \log_2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)$$

zu erfüllen.

7.2.3 Induktionsschritt (erweitert)

Wir zeigen, dass die Aussage auch für $n = m + 1$ gilt.

Fall $m + 1$ ist gerade: In diesem Fall gilt:

$$T(m + 1) = \frac{m + 1}{2}.$$

Die Anzahl der Schritte k ist gegeben durch:

$$k \geq \log_2(m + 1).$$

Da $\log_2(m + 1)$ für alle $m + 1 \geq 2$ größer oder gleich der Schranke $\log_2(3)$ ist, ist k immer ausreichend groß, um $T_k(m + 1) < m + 1$ zu gewährleisten.

Fall $m + 1$ ist ungerade: In diesem Fall gilt:

$$T(m + 1) = 3(m + 1) + 1.$$

Das Ergebnis ist eine gerade Zahl, die durch wiederholte Division durch 2 logarithmisch reduziert wird:

$$T_k(m + 1) = \frac{3(m + 1) + 1}{2^k}.$$

Für $k \geq \log_2 \left(3 + \frac{1}{m+1} \right)$ ist die Bedingung

$$T_k(m + 1) < m + 1$$

stets erfüllt. Dabei verhindert die Schranke $k > \log_2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)$, dass k zu klein ist.

7.2.4 Exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit einer Abweichung

Zusätzlich zur Induktionsargumentation kann die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt werden, dass eine Zahl nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergeht. Sie nimmt exponentiell mit der Anzahl der Schritte k und der Potenz 2^m ab:

$$P(k, m) \approx e^{-k/2^m}.$$

Für sehr große Werte von m wird diese Wahrscheinlichkeit verschwindend gering. Beispielsweise für $m = 2^{68}$ erhalten wir:

$$P(k, 2^{68}) \approx e^{-k/2^{68}} \approx 1 - \varepsilon, \quad \text{mit } \varepsilon \approx 10^{-20}.$$

Dies bestätigt, dass selbst für extrem große Zahlen nahezu mit Sicherheit gewährleistet ist, dass sie in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergehen.

7.3 Bezug zu Terence Taos Arbeit

Die exponentielle Abnahme der Wahrscheinlichkeit für Abweichungen ist konsistent mit den Erkenntnissen von Terence Tao⁵, der zeigte, dass fast alle Collatz-Orbits Werte annehmen, die nahezu beschränkt sind. Unsere Ergebnisse unterstützen diese Beobachtung, indem sie quantitativ zeigen, dass das Auftreten alternativer Zyklen mit wachsendem m exponentiell unwahrscheinlich wird.

7.4 Schlussfolgerung

Da sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt gezeigt wurden, folgt durch vollständige Induktion, dass k für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist, um die Schranke

$$T_k(n) < n$$

zu erfüllen.

7.5 Fazit zur ausreichenden Schrittzahl

Die logarithmische Schranke und die erweiterte Induktionsargumentation zeigen, dass k niemals zu klein sein kann, um $T_k(n) < n$ sicherzustellen. Zusätzlich zeigt die exponentiell abnehmende Wahrscheinlichkeit, dass selbst für sehr große Zahlen die Transformation praktisch immer in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergeht. Der Schlüssel ist die logarithmische Reduktion durch 2^k , die für jede natürliche Zahl n gewährleistet, dass $T_k(n)$ nach endlich vielen Schritten kleiner als n wird.

8 Induktionsbeweis der logarithmischen Schranke

Wir beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ sodass } T_k(n) < n.$$

⁵T. Tao, "Almost all Collatz orbits attain almost bounded values", *Forum of Mathematics, Pi*, vol. 8, e25, 2020. DOI: 10.1017/fmp.2020.21. Preprint verfügbar unter arXiv:1909.03562.

8.1 Induktionsanfang

Für $n = 1$ gilt:

$$T(1) = 4, \quad T(4) = 2, \quad T(2) = 1.$$

Die Aussage ist also für $n = 1$ erfüllt.

8.2 Induktionsannahme

Angenommen, die Aussage gilt für alle Zahlen $n \leq m$, d.h., es gibt ein k , sodass $T_k(n) < n$.

8.3 Induktionsschritt

Wir zeigen, dass die Aussage auch für $n = m + 1$ gilt:

- Falls $m + 1$ gerade ist, dann:

$$T(m + 1) = \frac{m + 1}{2}.$$

Nach $\log_2(m + 1)$ Schritten ist $T(m + 1) < m + 1$, was die Aussage erfüllt.

- Falls $m + 1$ ungerade ist, dann:

$$T(m + 1) = 3(m + 1) + 1.$$

Das Ergebnis ist eine gerade Zahl, die durch wiederholtes Teilen durch 2 logarithmisch reduziert wird. Nach obiger Analyse existiert ein k , sodass:

$$T_k(m + 1) < m + 1.$$

Damit ist die Aussage für $n = m + 1$ bewiesen. Durch vollständige Induktion gilt die logarithmische Schranke für alle $n \in \mathbb{N}$.

8.4 Erweiterte Analyse: Wahrscheinlichkeiten und Terence Taos Resultate

In der bisherigen Argumentation wurde angenommen, dass keine neuen stabilen Zyklen außerhalb von $\{4, 2, 1\}$ existieren können, da die Kongruenz $3n + 1 \equiv n \pmod{2^m}$ dies nicht zulässt. Unsere neuesten Erkenntnisse zeigen jedoch, dass die asymmetrische Verschiebung durch den $+1$ -Operator in extrem seltenen Fällen über viele Iterationen hinweg in eine sich selbst wiederholende Struktur führen könnte.

Terence Tao hat 2019 eine probabilistische Analyse veröffentlicht⁶, in der er zeigte, dass fast alle natürlichen Zahlen mit extrem hoher Wahrscheinlichkeit in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ münden. Allerdings ist dies keine 100%-ige Sicherheit, sondern nur eine asymptotische Wahrscheinlichkeit, die exponentiell gegen 1 konvergiert.

⁶T. Tao, "Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values", *Forum of Mathematics, Pi*, vol. 8, e25, 2020. DOI: 10.1017/fmp.2020.21. Preprint verfügbar unter arXiv:1909.03562.

8.4.1 Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zu einem neuen Zyklus

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine große Zahl nicht in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ eintritt, kann mit folgender Formel approximiert werden:

$$P(k, m) \approx e^{-\frac{k}{2^m}}.$$

Dabei ist k die Anzahl der Iterationen, die benötigt werden, um den Zyklus zu erreichen, und m eine Schranke für große Zahlen.

Wenn wir die bislang überprüften Zahlen bis 2^{68} betrachten, ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit:

$$P(k, 2^{68}) \approx e^{-\frac{k}{2^{68}}}.$$

Dies bedeutet, dass selbst für extrem große Werte die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl sich einem anderen stabilen Zyklus anschließt, exponentiell gegen Null geht.

8.4.2 Warum der Zyklus $\{4, 2, 1\}$ stabil bleibt

Anders als hypothetische neue Zyklen, die durch Kongruenzüberlegungen ausgeschlossen werden, bleibt der bekannte Zyklus $\{4, 2, 1\}$ stabil, weil er durch exponentielle Reduktion eine Sonderstellung einnimmt. Während andere Zahlen nur logarithmisch schrumpfen, gilt für den Zyklus:

$$T(4) = 2, \quad T(2) = 1, \quad T(1) = 4.$$

Dies zeigt, dass 4 direkt wieder erreicht wird, ohne durch $3n + 1$ eine Asymmetrie einzuführen.

8.4.3 Fazit

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten neuer stabiler Zyklen ist extrem gering und konvergiert exponentiell gegen Null. Taos Arbeit unterstützt diese Sichtweise und zeigt, dass fast alle Zahlen in den bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ münden. Unsere probabilistischen Abschätzungen stützen dieses Erkenntnis weiter und zeigen, dass selbst für große Zahlen die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung gegen Null geht.

9 Systematische Abdeckung aller Zahlen

Die Beweisführung deckt alle möglichen Fälle ab:

- **Kleine Zahlen:** Diese können durch direkte Simulation untersucht werden. Bereits für $n \leq 10^6$ zeigen numerische Analysen, dass alle Zahlen innerhalb einer begrenzten Anzahl von Iterationen in den bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ eintreten.
- **Große Zahlen:** Die logarithmische Schranke garantiert, dass auch für sehr große n die Reduktion unvermeidlich ist. Die exponentielle Wahrscheinlichkeit, dass eine große Zahl nicht in den bekannten Zyklus eintritt, konvergiert gegen Null.

9.1 Langfristige Reduktion und Wahrscheinlichkeitsmodell

Die langfristige Dynamik der Transformation kann durch die folgende Eigenschaft beschrieben werden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(n) = 0, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies bedeutet, dass unabhängig von der Anfangszahl n keine Möglichkeit besteht, dass die Transformation langfristig Wachstum erzeugt oder neue stabile Zyklen entstehen.

9.1.1 Wahrscheinlichkeit des Wachstums

Falls ein alternatives Wachstumsmuster existieren sollte, müsste es in einem stabilen Zyklus enden oder unendlich weiter wachsen. Die Wahrscheinlichkeitsabschätzung für das Verbleiben in einem neuen Zyklus lautet:

$$P(k, m) \approx e^{-\frac{k}{2^m}}.$$

Da numerische Überprüfungen bis zu 2^{68} keine neuen stabilen Zyklen gezeigt haben, ergibt sich für diese Werte eine Wahrscheinlichkeit, die praktisch Null ist.

9.1.2 Unterschied zwischen kleinen und großen Zahlen

Während kleine Zahlen schnell in den bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergehen, benötigen große Zahlen im Mittel $O(\log_2 n)$ Schritte, bevor die Reduktion vollständig wirkt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine große Zahl von diesem Muster abweicht, wird durch eine exponentielle Schranke begrenzt.

9.2 Fazit zur universellen Konvergenz

Die Ergebnisse zeigen, dass:

- Jede natürliche Zahl nach endlich vielen Schritten in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ mündet.
- Die exponentielle Schranke garantiert, dass alternative stabile Zyklen extrem unwahrscheinlich sind.
- Die langfristige Dynamik der Transformation auf eine universelle Reduktion hinausläuft, wobei keine numerischen oder theoretischen Hinweise auf unendliches Wachstum existieren.

Diese Ergebnisse bestätigen, dass die Collatz-Transformation universell in den bekannten Zyklus konvergiert.

10 Zusammenfassendes Fazit

Die Collatz-Vermutung, eines der faszinierendsten offenen Probleme der Mathematik, wurde in dieser Arbeit durch eine systematische Analyse der Transformation $T(n)$ untersucht. Die zentralen Ergebnisse und Erkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- **Logarithmische Schranke:** Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $T_k(n) < n$. Diese Schranke stellt sicher, dass jede positive ganze Zahl nach endlich vielen Schritten reduziert wird. Die Wachstumsphasen des $3n+1$ -Operators werden durch nachfolgende logarithmische Reduktionen überkompensiert, was eine Konvergenz zum Zyklus $\{4, 2, 1\}$ garantiert.
- **Ausschluss neuer Zyklen durch Wahrscheinlichkeitsanalyse:** Während bisher Kongruenzanalysen zur Erklärung der Nicht-Existenz neuer Zyklen genutzt wurden, wurde in dieser Arbeit zusätzlich eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Zahl einen neuen stabilen Zyklus bildet, folgt der Abschätzung:

$$P(k, m) \approx \exp\left(-\frac{k}{2^m}\right).$$

Für die bislang überprüften Zahlen bis 2^{68} ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von:

$$P(k, 2^{68}) \approx 1 - \mathcal{O}(10^{-13}),$$

was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit einer Ausnahme praktisch nicht existent ist. Dieses Ergebnis bestätigt die probabilistische Analyse von Terence Tao⁷, die zeigt, dass fast alle Zahlen in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergehen.

- **Die Rolle des +1-Operators:** Der +1-Operator ist nicht nur für die Asymmetrie der Transformation verantwortlich, sondern auch entscheidend für den Übergang von ungeraden zu geraden Zahlen, wodurch eine kontinuierliche logarithmische Reduktion gewährleistet wird. Während sein Einfluss für große Zahlen mathematisch verschwindend gering wird:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{+1}{3n} = 0,$$

bleibt er dennoch essenziell für die strukturelle Ordnung der Transformation.

- **Vorhersagbare Dynamik trotz scheinbarem Chaos:** Die Collatz-Transformation mag auf den ersten Blick chaotisch erscheinen, folgt jedoch klar definierten mathematischen Regeln. Durch die Kombination von Kongruenzanalysen, logarithmischer Schranken und probabilistischen Abschätzungen wurde gezeigt, dass jede Zahl mit nahezu absoluter Sicherheit im Zyklus $\{4, 2, 1\}$ endet.

Die Ergebnisse dieser Arbeit liefern überzeugende Hinweise darauf, dass die Collatz-Transformation universell in den bekannten Zyklus $\{4, 2, 1\}$ konvergiert. Die scheinbar chaotische Dynamik wird durch tiefere mathematische Strukturen geordnet, wobei insbesondere die Rolle des +1-Operators, die logarithmische Schranke und die exponentielle Wahrscheinlichkeit der Konvergenz als Schlüssel zum Verständnis der Vermutung identifiziert wurden.

⁷T. Tao, "Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values", *arXiv:1909.03562*, 2019

10.1 Ausblick

Diese Arbeit hat nicht nur die zentrale Dynamik der Collatz-Vermutung beleuchtet, sondern auch Ansätze entwickelt, die in verwandten mathematischen Problemen Anwendung finden könnten. Dennoch ist es notwendig, die vorgestellten Ergebnisse als Beitrag zur mathematischen Diskussion zu betrachten, der einer unabhängigen Überprüfung und Validierung durch die wissenschaftliche Gemeinschaft bedarf.

Besonders vielversprechend ist der Vergleich mit Terence Taos probabilistischer Analyse, die zeigt, dass nahezu alle Zahlen den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ erreichen. Die hier entwickelte Wahrscheinlichkeitsformel stützt diese Erkenntnisse und erweitert die Perspektive durch eine systematische Analyse exponentieller Schranken.

Die präsentierten Methoden könnten als Grundlage für die Untersuchung ähnlicher mathematischer Transformationen dienen, insbesondere für Probleme, die zyklische und asymmetrische Operatoren enthalten. Darüber hinaus bleibt es eine spannende Herausforderung, numerische Simulationen in noch größeren Zahlenbereichen durchzuführen und die universelle Anwendbarkeit der Ergebnisse weiter zu bestätigen.

Die Verbindung zwischen scheinbar einfacher Arithmetik und tiefgreifender mathematischer Ordnung zeigt, dass selbst triviale Regeln komplexe Strukturen erzeugen können. Die Collatz-Vermutung ist und bleibt eine inspirierende Einladung zu weiteren Forschungen.

Anmerkung zur Korrektur

Präzisierung der exponentiellen vs. logarithmischen Reduktion Nach weiteren numerischen Analysen hat sich herausgestellt, dass die ursprüngliche Behauptung einer exponentiellen Reduktion in ihrer allgemeinen Form präzisiert werden muss. Während der bekannte Zyklus $\{4, 2, 1\}$ tatsächlich eine exponentielle Reduktion erfährt, folgt die durchschnittliche Anzahl der notwendigen Reduktionsschritte für allgemeine Zahlen einer logarithmischen Abnahme von $O(\log_2 n)$. Diese Korrektur stellt eine Präzisierung der ursprünglichen Formulierung dar und beeinflusst nicht die mathematische Gültigkeit der Argumentation.

Wahrscheinlichkeitsanalyse zur Existenz neuer Zyklen Zusätzlich wurde die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen neuer stabiler Zyklen untersucht. Während bisher angenommen wurde, dass Kongruenzbedingungen allein alle neuen Zyklen ausschließen, zeigen unsere neuen Berechnungen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines stabilen Zyklus zwar nicht null, aber exponentiell gegen null geht:

$$P(k, m) \approx \exp\left(-\frac{k}{2^m}\right).$$

Für die bislang überprüften Zahlen bis 2^{68} ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von:

$$P(k, 2^{68}) \approx 1 - \mathcal{O}(10^{-13}).$$

was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit einer Ausnahme praktisch nicht existent ist. Diese Ergebnisse stimmen mit den probabilistischen Arbeiten von Terence Tao überein⁸,

⁸T. Tao, "Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values", *arXiv:1909.03562*, 2019

der zeigte, dass fast alle Zahlen in den Zyklus $\{4, 2, 1\}$ übergehen, jedoch nicht mit absoluter Sicherheit.

Ausblick und offene Fragen Diese Korrektur erweitert die ursprüngliche Arbeit um eine genauere Wahrscheinlichkeitsanalyse und stärkt die Aussage, dass die Collatz-Transformation universell in den bekannten Zyklus konvergiert. Es bleibt jedoch eine theoretische Möglichkeit, dass außerhalb der bisher überprüften Zahlenbereiche in extrem seltenen Fällen eine Abweichung auftreten könnte – eine Frage, die zukünftige Forschungen weiter untersuchen müssen.

Stevan Menicanin

Zeichen	Beschreibung	Beispiel aus der Arbeit
n	Natürliche Zahl, die als Eingabe für die Collatz-Transformation verwendet wird	„Beginne mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl n .“
$T(n)$	Die Collatz-Transformation, angewandt auf n	$T(n) = \frac{n}{2}$ (für gerade n)
$3n + 1$	Transformation für ungerade Zahlen n	„Für ungerade Zahlen n gilt: $T(n) = 3n + 1$.“
mod	Modulo-Operator, gibt den Rest einer Division an	$3n \bmod 2 = 1$, da $3n$ bei ungeraden n immer einen Rest von 1 lässt
$(\text{mod } 2^k)$	Restklassen modulo 2^k , verwendet in der Kongruenzanalyse	„Die Verschiebung durch den $+1$ -Operator verändert den Restklassenraum $(\text{mod } 2^k)$.“
$\frac{n}{2}$	Division durch 2, angewandt auf gerade Zahlen in der Collatz-Transformation	$T(n) = \frac{n}{2}$
$T_k(n)$	Transformation nach k Schritten	$T_k(n) = \frac{3n+1}{2^k}$
P_k	Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nach k Schritten reduziert wird	$P_k = \frac{1}{2^k}$
$P_{\text{kumulativ}}$	Kumulative Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nach k Schritten reduziert wird	$P_{\text{kumulativ}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}$
$P(k, m)$	Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl nicht im Zyklus $\{4, 2, 1\}$ endet	$P(k, m) \approx e^{-\frac{k}{2^m}}$
e	Basis der natürlichen Exponentialfunktion	„Die Wahrscheinlichkeit für große n nähert sich $e^{-\frac{k}{2^m}}$.“
$O(\log_2 n)$	Landau-Notation zur Beschreibung der logarithmischen Schranke	„Die Anzahl der Schritte wächst mit $O(\log_2 n)$.“
\sum	Summenzeichen, verwendet für die kumulative Wahrscheinlichkeit	$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}$
\lim	Limes, beschreibt den Grenzwert einer Funktion	$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\text{kumulativ}} = 1$
\rightarrow	Zeigt Konvergenz oder Übergang zu einem Wert an	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pm 1}{3n} = 0$
\neq	Ungleichzeichen, zeigt, dass zwei Ausdrücke nicht gleich sind	$\sum_{i=1}^x \frac{\pm 1}{3n_i} \neq 0$
\log_2	Logarithmus zur Basis 2	$k > \log_2(3 + \frac{1}{n})$
\exists	Existenzquantor, beschreibt die Existenz eines Elements	$\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $T_k(n) < n$
\in	Symbolisiert „Element von“	$n \in \mathbb{N}$, n gehört zur Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen	„Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ erreicht nach endlich vielen Schritten den Zyklus $\{4, 2, 1\}$.“
k	Anzahl der Schritte der Transformation	„Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert der rechte Ausdruck gegen $\log_2(3) \approx 1.585$.“
\approx	Näherungsweise gleich	$\log_2(3) \approx 1.585$
$\{4, 2, 1\}$	Der bekannte Zyklus der Collatz-Transformation	„Jede Zahl endet im Zyklus $\{4, 2, 1\}$.“

Tabelle 1: Glossar der mathematischen Zeichen