

以高等数学视角看待函数

Gemini – Google AI

September 10, 2025

Abstract

本笔记旨在从一个更广阔、更深入的视角，重新审视高中数学的核心概念——函数。我们将不仅仅满足于“是什么”，而是要去探索“为什么”和“怎么样”。内容涵盖从基本的函数变换，到抽象函数的性质推理，希望能帮助同学们构建一个更加系统和深刻的函数知识体系，为未来的高等数学学习打下坚实的基础。

Contents

1 函数的本质：从对应法则到“黑箱”模型	2
2 函数图像变换：坐标系的思想	2
2.1 平移变换： $f(x - a)$ 的来历与含义	2
2.1.1 演绎推理：新旧坐标的转换	2
2.2 伸缩变换： $Af(wx)$ 的含义	3
3 函数性质的深刻理解：对称性与周期性	4
3.1 对称性与周期性的关系： $f(x) + f(x + b) = 0$ 意味着什么？	4
3.1.1 第一层含义：周期性	4
3.1.2 第二层含义：对称性	4
4 函数的复合与抽象函数	5
4.1 复合函数 $f(g(x))$ 是什么？	5
4.1.1 复合函数的关键问题	6
4.2 抽象函数是什么？	6
5 结语	7

1 函数的本质：从对应法则到“黑箱”模型

从高等数学的观点看，函数本质上是一种特殊的映射（**Mapping**）。

定义 1.1 (函数). 设 A, B 是两个非空数集，如果存在一个对应法则 f ，使得对于 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和之对应，那么就把对应法则 f 叫作从 A 到 B 的一个函数（**Function**）。记作：

$$y = f(x), \quad x \in A$$

其中， x 称为自变量， y 称为因变量，集合 A 称为函数的定义域，所有函数值 y 构成的集合 $\{y|y = f(x), x \in A\}$ 称为函数的值域。

- 核心三要素：定义域、值域、对应法则。三者缺一不可。
- “黑箱”模型：我们可以把对应法则 f 想象成一个“黑箱”。你输入一个定义域内的 x （原料），它就输出一个唯一确定的 y （产品）。我们关注的是输入与输出之间的确定关系，有时并不需要知道黑箱内部的具体构造。这正是“抽象函数”问题的思想来源。

2 函数图像变换：坐标系的思想

函数图像的变换是高中数学的重点和难点。其核心思想是：改变坐标系中的“度量衡”。

2.1 平移变换： $f(x - a)$ 的来历与含义

对于函数 $y = f(x)$ ，我们如何得到 $y = f(x - a)$ 的图像？

2.1.1 演绎推理：新旧坐标的转换

1. 我们的目标是绘制函数 $y' = f(x')$ 的图像，只不过这里的 $y' = y$, $x' = x - a$ 。
2. 这相当于建立了一个新的坐标系 (x', y') 。新坐标系的原点 $(x' = 0, y' = 0)$ 在旧坐标系 (x, y) 中是哪里呢？

- 由 $x' = x - a = 0 \Rightarrow x = a$
- 由 $y' = y = 0 \Rightarrow y = 0$

所以，新坐标系的原点在旧坐标系的 $(a, 0)$ 点。

3. 我们在新坐标系 (x', y') 中画出最基本的 $y' = f(x')$ 。这与在旧坐标系 (x, y) 中画出 $y = f(x)$ 是一模一样的。

4. 但是, 由于新坐标系的原点是旧坐标系的 $(a, 0)$ 点, 所以整个图像相当于在旧坐标系中向右平移了 a 个单位 (如果 $a > 0$)。

结论: 左右平移法则

对于函数 $y = f(x)$:

- 函数 $y = f(x - a)$ 的图像, 是由 $y = f(x)$ 的图像向右平移 a 个单位得到的 ($a > 0$)。
- 函数 $y = f(x + a)$ 的图像, 是由 $y = f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位得到的 ($a > 0$)。

简记为: “左加右减”。

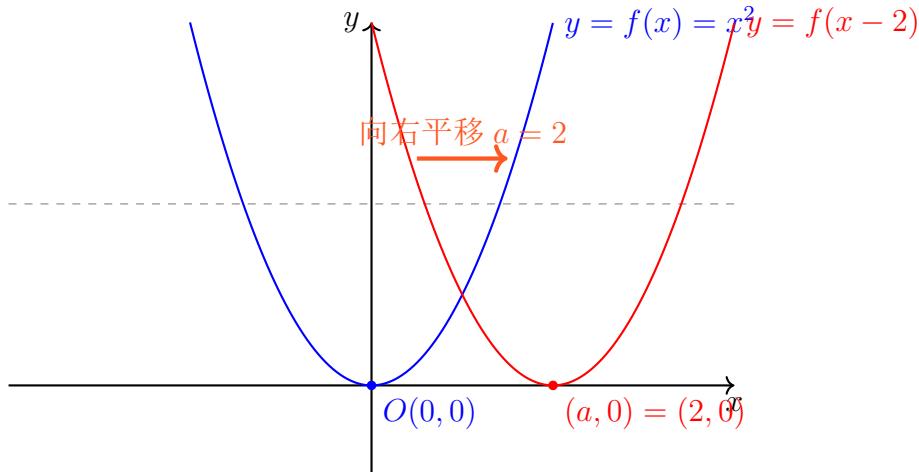


Figure 1: $y = x^2$ 与 $y = (x - 2)^2$ 的图像关系

2.2 伸缩变换: $Af(wx)$ 的含义

伸缩变换改变的是坐标轴的“刻度”。

- $y = Af(x)$: 纵向伸缩。 $A > 1$ 时伸长为原来的 A 倍; $0 < A < 1$ 时缩短为原来的 A 倍。
- $y = f(wx)$: 横向伸缩。 $w > 1$ 时缩短为原来的 $1/w$ 倍; $0 < w < 1$ 时伸长为原来的 $1/w$ 倍。

推理方式与平移变换类似, 都是通过建立新旧坐标系的转换关系。对于 $y = f(wx)$, 令 $x' = wx$, 则 $x = x'/w$ 。新坐标系 x' 轴上的一个单位长度, 对应旧坐标系 x 轴上的 $1/w$ 个单位长度, 因此图像被横向压缩。

结论：伸缩变换法则

对于函数 $y = f(x)$:

- $y = Af(x)$: 纵向伸缩到原来的 A 倍，简记为“纵伸”。
- $y = f(wx)$: 横向伸缩到原来的 $1/w$ 倍，简记为“横缩”。

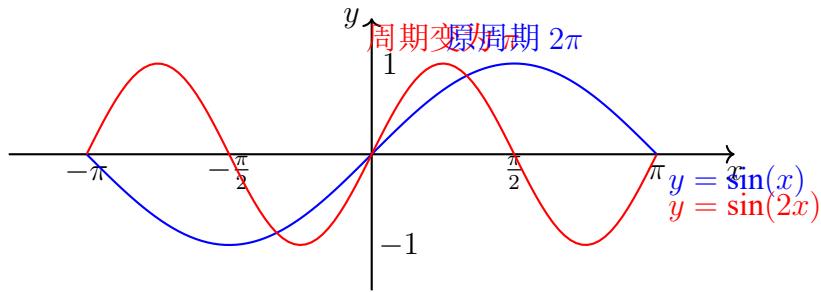


Figure 2: $y = \sin(x)$ 与 $y = \sin(2x)$ 的图像关系（横向压缩）

3 函数性质的深刻理解：对称性与周期性

3.1 对称性与周期性的关系: $f(x) + f(x + b) = 0$ 意味着什么?

我们来分析这个抽象的函数方程: $f(x) + f(x + b) = 0$ 。

3.1.1 第一层含义: 周期性

1. 由 $f(x + b) = -f(x)$, 我们可以继续推导:

$$f(x + 2b) = f((x + b) + b) = -f(x + b) = -(-f(x)) = f(x)$$

2. 根据周期函数的定义, 我们发现 $2b$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期。

3.1.2 第二层含义: 对称性

1. 我们来考察 x 与 $x + b$ 的中点。中点的横坐标是 $\frac{x+(x+b)}{2} = x + \frac{b}{2}$ 。
2. 方程 $f(x) = -f(x + b)$ 表明, 在对称中心 x_0 左右对称的两个点 $x_0 - t$ 和 $x_0 + t$ 处的函数值互为相反数。
3. 设 $x_0 = \frac{b}{2}$ 。令 $x = \frac{b}{2} - t$, 则 $x + b = \frac{b}{2} + t$ 。
4. 原方程变为 $f(\frac{b}{2} - t) + f(\frac{b}{2} + t) = 0$ 。

5. 这个形式表明，函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{b}{2}, 0)$ 中心对称。

结论： $f(x) + f(x + b) = c$ 的内涵

一般地，对于函数方程 $f(x) + f(x + b) = c$ ：

- 函数图像关于点 $(\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ 中心对称。
- 函数具有周期性，周期为 $T = 2b$ 。

特别地，当 $c = 0$ 时，对称中心为 $(\frac{b}{2}, 0)$ 。

示例 3.1. 函数 $f(x) = \sin(x)$ 满足 $f(x) + f(x + \pi) = \sin(x) + \sin(x + \pi) = \sin(x) - \sin(x) = 0$ 。这里 $b = \pi, c = 0$ 。

- 图像关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 中心对称。
- 周期为 $T = 2\pi$ 。

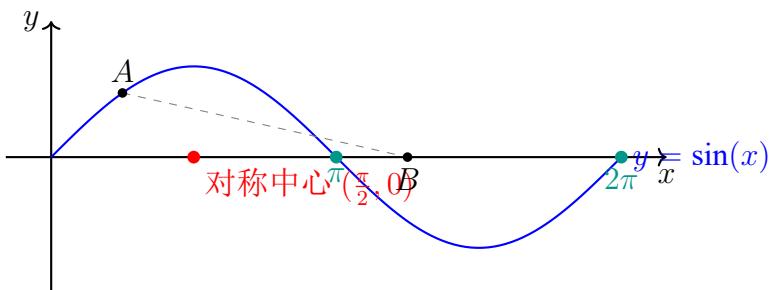


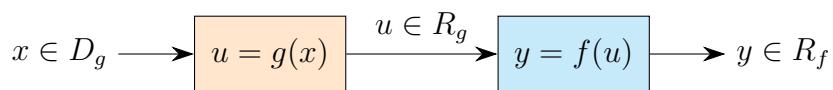
Figure 3: $f(x) + f(x + \pi) = 0$ 在 $y = \sin(x)$ 上的体现

4 函数的复合与抽象函数

4.1 复合函数 $f(g(x))$ 是什么？

复合函数可以看作是“黑箱”的串联。

定义 4.1 (复合函数). 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f ，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g ，且其值域 $R_g \subseteq D_f$ 。则由 $y = f(g(x))$ 所确定的函数称为由函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 复合而成的复合函数。其中 u 称为中间变量。



4.1.1 复合函数的关键问题

1. 定义域问题: 求 $f(g(x))$ 的定义域, 必须满足两个条件:
 - x 必须在内层函数 $g(x)$ 的定义域内, 即 $x \in D_g$ 。
 - 内层函数的值域 $g(x)$ 必须在外层函数 $f(u)$ 的定义域内, 即 $g(x) \in D_f$ 。
2. 单调性问题:
 - 设 $u = g(x), y = f(u)$ 。如果 $g(x)$ 和 $f(u)$ 在相应区间上单调性相同 (同增或同减), 则复合函数 $y = f(g(x))$ 为增函数。
 - 如果 $g(x)$ 和 $f(u)$ 在相应区间上单调性相反 (一增一减), 则复合函数 $y = f(g(x))$ 为减函数。
 - 简记为: “同增异减”。

4.2 抽象函数是什么?

抽象函数是指没有给出具体解析式, 只给出部分性质或关系的函数。解决抽象函数问题的核心, 就是紧扣定义, 将给定的性质 (如奇偶性、单调性、周期性、特殊函数值等) 作为解题的“已知条件”, 进行严密的逻辑推理。

示例 4.1. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时 $f(x) > 0$ 。

1. 求 $f(0)$ 的值。
2. 证明 $f(x)$ 是奇函数。
3. 证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数。

Proof. 1. 求 $f(0)$:

在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $x = y = 0$, 得 $f(0+0) = f(0) + f(0)$, 即 $f(0) = 2f(0)$ 。
解得 $f(0) = 0$ 。

2. 证明奇偶性:

在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y = -x$, 得 $f(x-x) = f(x) + f(-x)$ 。
即 $f(0) = f(x) + f(-x)$ 。因为 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$, 即 $f(-x) = -f(x)$ 。
故 $f(x)$ 是奇函数。

3. 证明单调性:

设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$ 。则 $x_2 - x_1 > 0$ 。
 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1)$ (因为 $f(x)$ 是奇函数)
令 $x = x_2, y = -x_1$ 代入原方程, 似乎不奏效。我们换个思路。

$$f(x_2) = f((x_2 - x_1) + x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1)。$$

所以 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1)$ 。

因为 $x_2 - x_1 > 0$, 根据题设, 当自变量大于 0 时函数值大于 0, 所以 $f(x_2 - x_1) > 0$ 。

即 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 也就是 $f(x_2) > f(x_1)$ 。

故 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数。

□

抽象函数解题技巧

解决抽象函数问题的关键在于赋值法和结构变换。

- 赋值法: 巧妙地选取特殊值 (如 $0, 1, -1, x, -x$ 等) 代入已知等式, 以求得特定函数值或揭示函数性质。
- 结构变换: 将待求的目标, 通过代数变形, 溜成已知函数方程的结构, 从而利用其性质。例如证明单调性时, 将 $f(x_2)$ 变为 $f((x_2 - x_1) + x_1)$ 的形式。

常见的抽象函数模型有:

- 正比例函数模型 ($f(x) = kx$): $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- 指数函数模型 ($f(x) = a^x$): $f(x+y) = f(x)f(y)$
- 对数函数模型 ($f(x) = \log_a x$): $f(xy) = f(x) + f(y)$
- 幂函数模型 ($f(x) = x^n$): $f(xy) = f(x)f(y)$

在解决选择填空题时, 可以利用这些模型进行快速判断。

5 结语

函数是描述变量之间依赖关系的数学模型, 是整个高中数学乃至高等数学的基石。希望本笔记能够帮助同学们跳出题海, 从更高的视角审视和理解函数的内在规律与核心思想。掌握了这些思想, 无论是面对熟悉的题型还是陌生的挑战, 都能够更加从容不迫, 游刃有余。