高中数学复习笔记：导数与切线问题

Gemini 生成

2025 年 9 月 23 日

摘要

本笔记旨在系统梳理高中阶段“导数与切线问题”的核心知识点，内容涵盖导数的定义、几何意义、常见函数的导数公式、导数的运算法则，并详细阐述了求解切线方程的各类题型与方法。笔记结合公式、图像与例题，力求以综合性、指导性的方式，帮助同学们深入理解并掌握相关知识，提升解题能力。

目录

1 导数的概念与几何意义

1.1 导数的定义

定义 1.1 (导数). 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时,相应地,因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称这个极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**(或瞬时变化率),记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$。

注意 1.1. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示的是函数 $f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的**平均变化率**,而导数 $f'(x_0)$ 则是函数在点 x_0 处的**瞬时变化率**。

1.2 导数的几何意义

定理 1.1 (导数的几何意义). 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是:曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的**切线的斜率**。

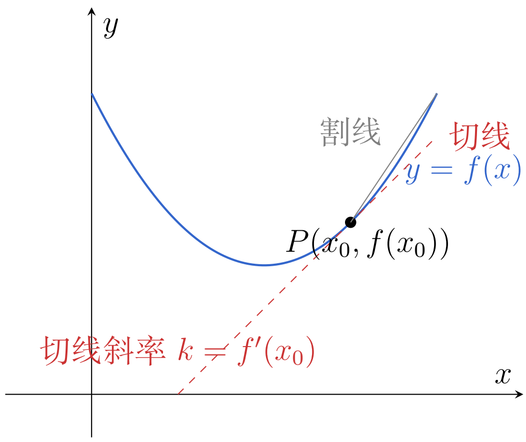

figure 导数的几何意义示意图

注意 1.2. 理解导数的几何意义是解决切线问题的关键。它将一个分析概念(导数)与一个几何概念(切线斜率)紧密联系起来。

2 基本初等函数的导数公式与运算法则

2.1 常见函数的导数公式

熟练掌握以下基本初等函数的导数公式是求导的基础。

1. **常数函数**: 若 $f(x) = c$ (c 为常数)，则 $f'(x) = 0$。
2. **幂函数**: 若 $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Q}^*)$，则 $f'(x) = nx^{n-1}$。
3. **正弦函数**: 若 $f(x) = \sin x$，则 $f'(x) = \cos x$。
4. **余弦函数**: 若 $f(x) = \cos x$，则 $f'(x) = -\sin x$。
5. **指数函数**:
   - 若 $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$，则 $f'(x) = a^x \ln a$。
   - 特例：若 $f(x) = e^x$，则 $f'(x) = e^x$。
6. **对数函数**:
   - 若 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$，则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$。
   - 特例：若 $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$，则 $f'(x) = \frac{1}{x}$。

2.2 导数的运算法则

设函数 $u(x), v(x)$ 均可导，则有以下运算法则：

1. **和差法则**: $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$。
2. **积法则**: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$。
3. **商法则**: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ $(v(x) \neq 0)$。

3 求解切线方程

求解曲线的切线方程问题是导数应用的核心题型。根据切点是否已知，主要分为两类。

3.1 类型一：已知切点求切线方程

这是最基本的情形，即已知曲线 $y = f(x)$ 及曲线上的一点 $P(x_0, y_0)$，求过该点的切线方程。

解题步骤:

1. **求导数**: 计算函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。

2. **求斜率**: 将切点横坐标 x_0 代入导函数，得到切线的斜率 $k = f'(x_0)$。

3. **写方程**: 利用点斜式写出切线方程：$y - y_0 = k(x - x_0)$，其中 $y_0 = f(x_0)$。

例题 3.1. 求曲线 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程。

解:

1. **求导数**: $f'(x) = 3x^2 - 2$。

2. **求斜率**: 切点横坐标为 $x_0 = 1$，所以切线斜率 $k = f'(1) = 3(1)^2 - 2 = 1$。

3. **写方程**: 切点为 $(1, 0)$，斜率为 1。根据点斜式方程，得 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$。整理得切线方程为：$y = x - 1$。

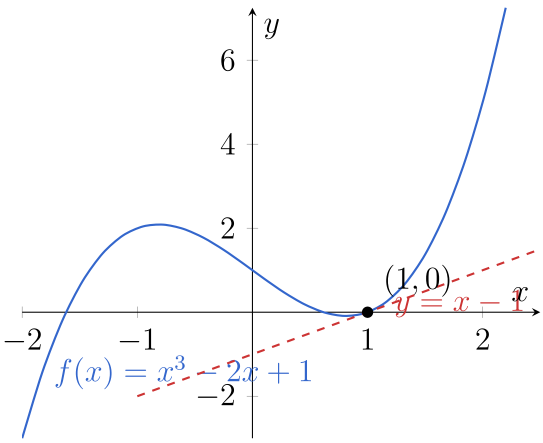

figure 例题 3.1 图像

3.2 类型二：已知曲线外一点求切线方程

这种情形下，给定的点 $P(x_0, y_0)$ 在曲线 $y = f(x)$ 外，需要求经过该点的曲线的切线。

解题步骤:

1. **设切点**: 设切点为 $M(x_1, y_1)$，其中 $y_1 = f(x_1)$。

2. **表示斜率**:

   - 根据导数的几何意义，切线斜率 $k = f'(x_1)$。
   - 根据两点式，切线斜率也等于 $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - y_0}{x_1 - x_0}$。

3. **建立方程**: 令两种斜率表达式相等，即 $f'(x_1) = \frac{f(x_1) - y_0}{x_1 - x_0}$。

4. **解方程**: 解出 x_1 的值。注意，解的个数可能不止一个，意味着可能有多条切线。

5. **求切线方程**: 将求得的 x_1 代回，求出切点坐标和切线斜率，再用点斜式写出切线方程。

例题 3.2. 求过点 $P(2,2)$ 作曲线 $y=x^2-1$ 的切线方程。**解**:

1. **设切点**: 设切点为 $M(x_1, x_1^2-1)$。
2. **求导**: $y'=2x$。
3. **表示斜率**:
   - 切线斜率 $k=y'|_{x=x_1}=2x_1$。
   - 过点 $P(2,2)$ 和 M 的斜率 $k=\frac{(x_1^2-1)-2}{x_1-2}=\frac{x_1^2-3}{x_1-2}$。
4. **建立并解方程**: $2x_1=\frac{x_1^2-3}{x_1-2}$
   $2x_1(x_1-2)=x_1^2-3$
   $2x_1^2-4x_1=x_1^2-3$
   $x_1^2-4x_1+3=0$
   $(x_1-1)(x_1-3)=0$
   解得 $x_1=1$ 或 $x_1=3$。
5. **求切线方程**:
   - 当 $x_1=1$ 时，切点为 $(1,0)$，斜率 $k=2(1)=2$。切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即$y=2x-2$。
   - 当 $x_1=3$ 时，切点为 $(3,8)$，斜率 $k=2(3)=6$。切线方程为 $y-8=6(x-3)$，即$y=6x-10$。

4 复习与总结

- **核心思想**: 导数与切线问题的核心在于深刻理解导数的几何意义，即**切点处的导数等于切线的斜率**。
- **关键步骤**: 无论是哪种题型，核心都是要确定**切点**和**斜率**。
- **分类讨论**: 拿到题目后，首先要判断给定的点是**切点**还是**曲线外的点**，这决定了后续的解题思路。

- **数形结合**: 绘制函数草图可以帮助理解题意，检验结果的合理性。
- **运算准确**: 求导和解方程是基本功，务必保证计算的准确性。