三角函数

Gemini AI

2025 年 9 月 22 日

目录

1 三角函数的定义与三角函数线

定义：任意角的三角函数

在平面直角坐标系中，设角 α 的顶点为原点 O，始边为 x 轴的非负半轴。在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$（非原点），点 P 到原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。我们定义以下六个三角函数：

$$\begin{aligned} &\text{正弦 (Sine):} && \sin\alpha=\frac{y}{r} && \text{余割 (Cosecant):} && \csc\alpha=\frac{r}{y} \\ &\text{余弦 (Cosine):} && \cos\alpha=\frac{x}{r} && \text{正割 (Secant):} && \sec\alpha=\frac{r}{x} \\ &\text{正切 (Tangent):} && \tan\alpha=\frac{y}{x} && \text{余切 (Cotangent):} && \cot\alpha=\frac{x}{y} \end{aligned}$$

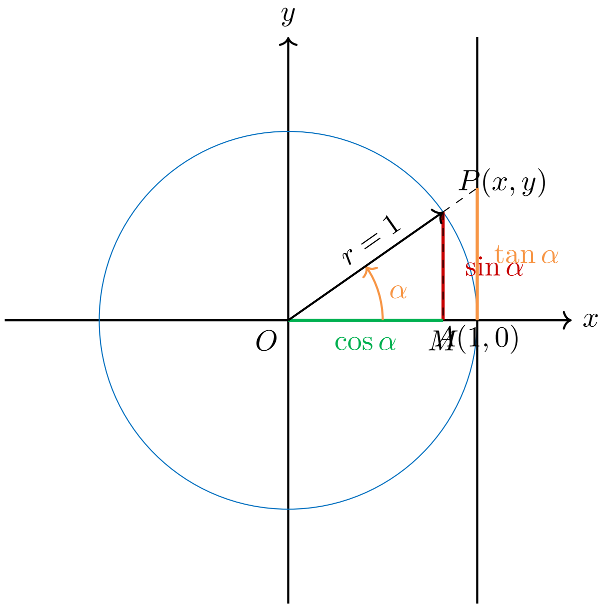


图 1：单位圆中的三角函数线

2 同角三角函数的基本关系

定理：同角三角函数关系

对于任意角 α，若其三角函数有意义，则以下关系恒成立：

- **平方关系 (Pythagorean Identities)**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$

由此可推导：

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

- **商关系 (Quotient Identities)**

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0) \tag{2}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

- **倒数关系 (Reciprocal Identities)**

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \qquad \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \qquad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

3 诱导公式

定理：诱导公式

诱导公式的本质是利用单位圆的对称性，将任意角的三角函数转化为锐角三角函数。其记忆口诀为：“**奇变偶不变，符号看象限**”。

- **“偶不变”**：$k\pi \pm \alpha$ 的形式，函数名不变。

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha & \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha & \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha & \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha & \tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha \\
\sin(2\pi-\alpha) &= -\sin\alpha & \cos(2\pi-\alpha) &= \cos\alpha & \tan(2\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha & \cos(-\alpha) &= \cos\alpha & \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha
\end{aligned}
$$

- **“奇变”**：$\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ (k 为奇数) 的形式，正弦变余弦，余弦变正弦，正切变余切。

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin\alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\cot\alpha \\
\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= -\cos\alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= -\sin\alpha & \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha \\
\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= -\cos\alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= \sin\alpha & \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= -\cot\alpha
\end{aligned}
$$

- **“符号看象限”**：把 α 视为锐角，判断原函数在 $k\pi \pm \alpha$ 或 $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ 所在象限的符号，赋给新函数。

技巧与应用：诱导公式的逆用

诱导公式不仅可以用来化简，还可以反向使用，实现“角”的转化和函数名的统一。

- $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
- $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
- $-\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

这是辅助角公式等变换的基础。例如，统一 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$：

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

4 三角函数的图像与性质

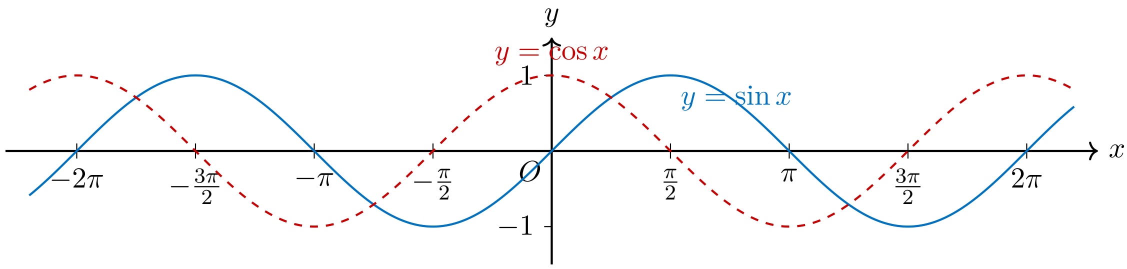


图 2: 正弦函数与余弦函数图像

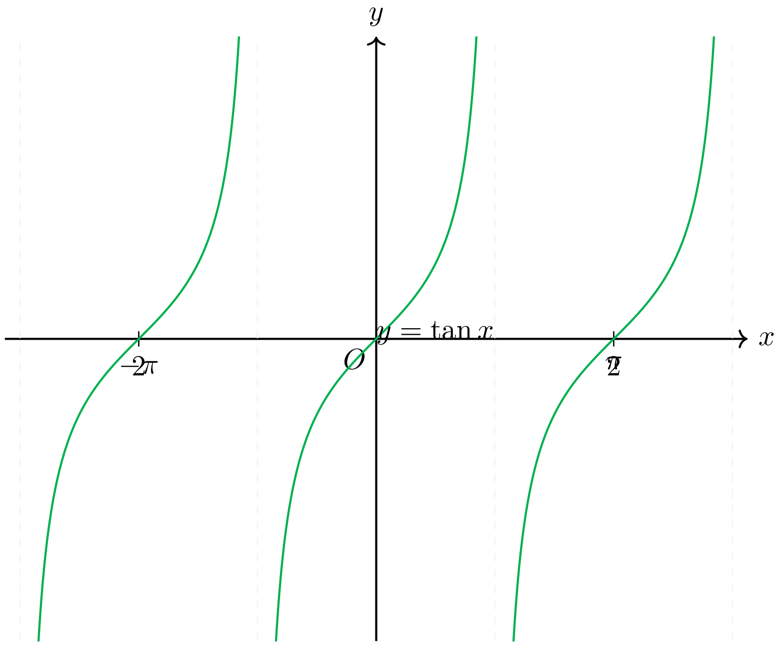


图 3: 正切函数图像

5 三角恒等变换

5.1 和差角公式

定理：和差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{\alpha\pm\beta})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{\alpha\pm\beta})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad (T_{\alpha\pm\beta})$$

5.2 倍角公式及其推论

定理：倍角公式

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

技巧与应用：倍角公式的重要推论（降幂/升幂）

- **降幂公式**

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\
\sin^2\alpha &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}
\end{aligned}$$

- **万能公式** (用 $\tan(\alpha/2)$ 表示所有三角函数)

$$\sin\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}, \quad \tan\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)}$$

- **半角正切的有理化公式**

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

5.3 辅助角公式

定理：辅助角公式 $a\sin x + b\cos x$

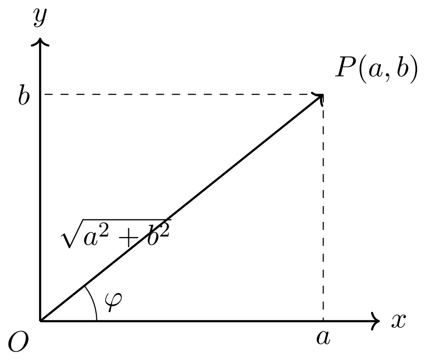
该公式用于将形如 $a\sin x + b\cos x$ 的表达式化为单一的三角函数 $A\sin(x+\varphi)$ 或 $A\cos(x-\varphi)$。

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

令 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 则 $\tan\varphi = \frac{b}{a}$。

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) \tag{3}$$

其中角 φ 的终边经过点 (a,b)。



5.4 积化和差与和差化积公式

定理：积化和差与和差化积公式

- **积化和差**

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

- **和差化积**

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

6 核心解题思想与技巧

6.1 齐次关系：知一求三

技巧与应用："齐次"思想的应用

在三角函数中，$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的关系类似于代数中的 a 和 b。利用 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ab, a^2+b^2 这四个式子中，知二可求二的代数关系。在三角函数中，由于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 是恒成立的，所以我们实际上是"知一求三"。

问题模型：已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值。

解题步骤：

1. **求** $\sin\alpha\cos\alpha$：将已知式两边平方：

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2 \implies \sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$$

2. **求** $\sin\alpha-\cos\alpha$：利用平方差关系：

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$$

将上一步的结果代入：

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\left(\frac{m^2-1}{2}\right)=1-(m^2-1)=2-m^2$$

因此，

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{2-m^2}$$

(注意：最终结果的正负需要根据角 α 所在的象限来确定。)

示例：已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 $\alpha\in(0,\pi)$，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$。

- $2\sin\alpha\cos\alpha=\left(\frac{1}{5}\right)^2-1=-\frac{24}{25} \implies \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$。因为 $\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha<0$。角 α 在第二象限。
- $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-(\frac{1}{5})^2=\frac{49}{25}$。
- $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\frac{7}{5}$。
- 因为 α 在第二象限，$\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$。故 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$。

6.2 弦化切与切化弦

技巧与应用：弦切互化技巧

弦化切：当一个分式表达式的分子分母都是关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的一次齐次式时，可以通过分子分母同除以 $\cos\alpha$ 来简化计算。

示例：计算 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+4\cos\alpha}$，已知 $\tan\alpha=3$。

$$\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+4\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+4\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha-2}{3\tan\alpha+4}=\frac{3-2}{3(3)+4}=\frac{1}{13}$$

切化弦：将式子中的 $\tan\alpha$ 全部换成 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，然后通分化简。这在证明恒等式时非常常用。

7 三角形内的三角函数结论

定理：三角形内常用结论

在任意 $\triangle ABC$ 中，有 $A+B+C=\pi$。由此可得：

- **角的关系**：

$$A+B=\pi-C \quad\Longrightarrow\quad \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

- **诱导公式的应用**：

$$\begin{aligned}
\sin(A+B)&=\sin(\pi-C)=\sin C\\
\cos(A+B)&=\cos(\pi-C)=-\cos C\\
\tan(A+B)&=\tan(\pi-C)=-\tan C\\
\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}\\
\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

- **重要恒等式**：若 $A+B+C=\pi$，则

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \tag{4}$$

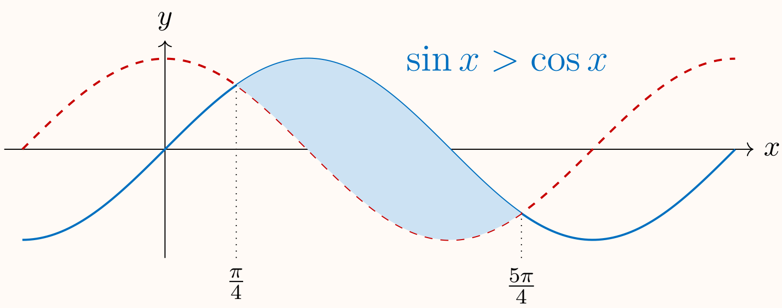
推论：若 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形。若 $\tan A\tan B\tan C>0$，则也为锐角三角形。

8 解三角不等式

技巧与应用：解不等式 $\sin x > \cos x$

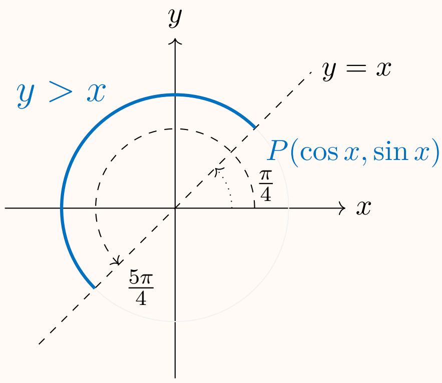
解这类不等式通常有两种方法：

1. **图像法**：在同一坐标系中画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像。不等式 $\sin x>\cos x$ 的解集即为 $y=\sin x$ 图像在 $y=\cos x$ 图像上方的部分对应的 x 的取值范围。



从图中可以看出，在一个周期内，解集为 $x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$。所以通解为：$x \in \left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$。

2. **单位圆法**：在单位圆上，$\sin x=y_P$，$\cos x=x_P$。不等式 $\sin x>\cos x$ 转化为 $y_P>x_P$。直线 $y=x$ 与单位圆的交点所对应的角为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4}$。在单位圆上位于直线 $y=x$ 上方的弧所对应的角的范围即为解集。



单位圆法同样得到解集为 $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right),k\in\mathbb{Z}$。