ding 固定速度抛射的包络线

数学笔记

2025 年 11 月 9 日

目录

1 引言与问题背景

定义：包络线

包络线（Envelope）是指与一族曲线都相切的曲线。在几何上，包络线是这族曲线的“边界”，它恰好与族中的每一条曲线在某一点相切。
对于抛体运动，如果我们从同一点以相同的初速度 v_0 但不同的抛射角 θ 抛出多个质点，这些质点的轨迹形成一族抛物线。这族抛物线的包络线就是一条特殊的曲线，它表示在给定初速度下，质点能够到达的所有位置点的边界。

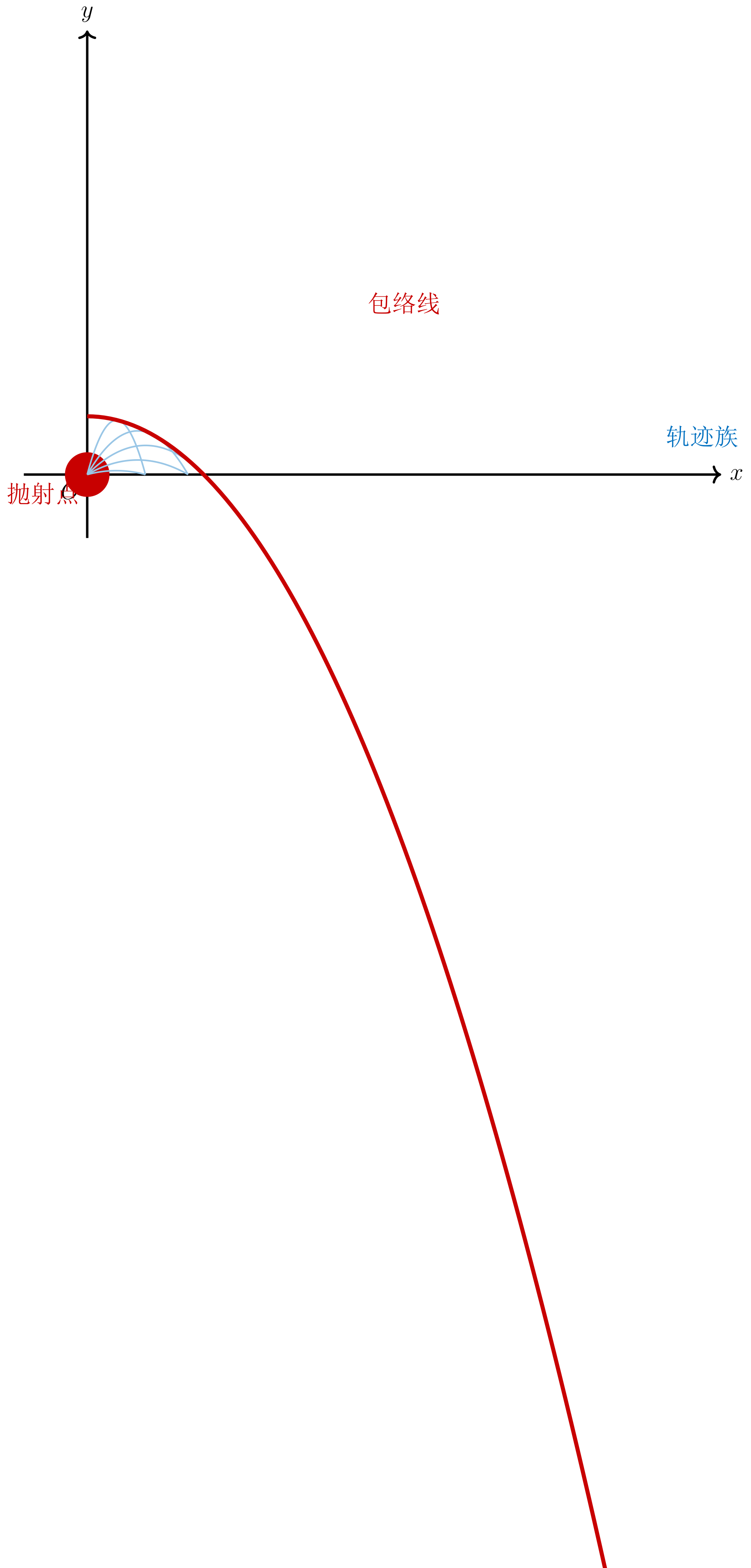
y
包络线
轨迹族
x
抛射点

图 1: 包络线的直观理解：多条轨迹的边界

1.1 问题的物理意义

在抛体运动中，如果我们固定初速度 v_0，只改变抛射角 θ，那么：

- 不同的抛射角对应不同的轨迹抛物线
- 这些轨迹形成一个“轨迹族”
- 包络线表示在给定初速度下，质点能够到达的所有位置点的**边界**
- 包络线内部的区域是“可达区域”，外部的区域是“不可达区域”

这个问题在军事、体育、工程等领域都有重要应用，例如：

- 确定炮弹的射程范围
- 分析投掷物体的可达区域
- 设计安全防护区域

2 抛体运动基础回顾

定义：抛体运动的参数方程

设质点从原点 $O(0,0)$ 以初速度 v_0、抛射角 θ（与水平方向夹角）抛出，重力加速度为 g（方向竖直向下）。

运动分解：

- 水平方向：匀速直线运动，初速度 $v_{0x} = v_0 \cos\theta$
- 竖直方向：匀变速直线运动，初速度 $v_{0y} = v_0 \sin\theta$，加速度 $-g$

参数方程（以时间 t 为参数）：

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \tag{1}$$

$$y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

其中 $t \geq 0$，且 $y(t) \geq 0$（落地前）。

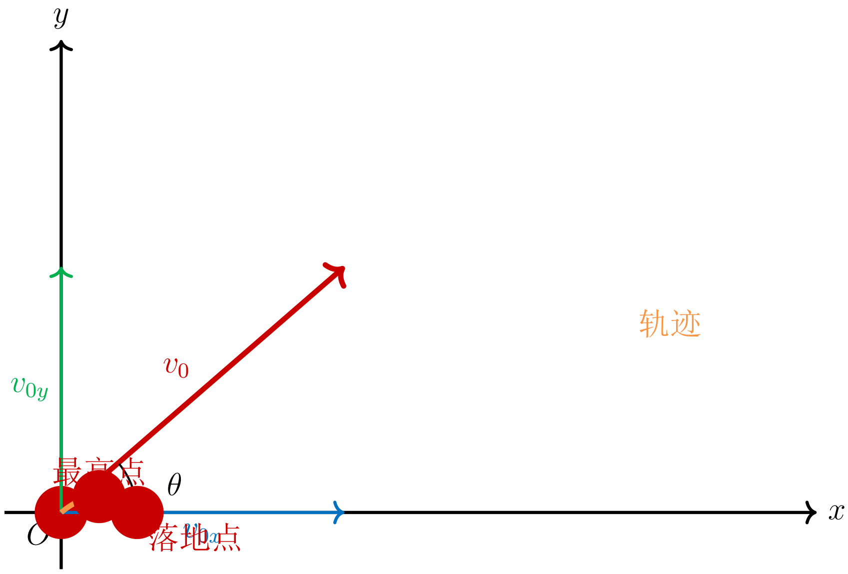

图 2: 抛体运动的速度分解与轨迹

2.1 轨迹方程

从参数方程 (??) 和 (??) 中消去参数 t，得到轨迹方程：
由 $x = v_0 \cos\theta \cdot t$ 得 $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$，代入 y 的表达式：

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 \\ &= x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \\ &= x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2\theta) \end{aligned} \tag{3}$$

这是一个关于 x 的二次函数，轨迹为抛物线。
重要结论：

- 射程（水平距离）：$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$，当 $\theta = 45^\circ$ 时取得最大值 $R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$
- 最大高度：$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$，当 $\theta = 90^\circ$ 时取得最大值 $H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$

3 固定速度抛射的轨迹族

当我们固定初速度 v_0，让抛射角 θ 变化时，得到一族轨迹曲线。

定义：轨迹族

对于固定的初速度 v_0，抛射角 θ 作为参数，轨迹方程 (??) 可以写成：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

这表示一个以 θ（或 $\tan\theta$）为参数的曲线族。每条曲线对应一个特定的抛射角。

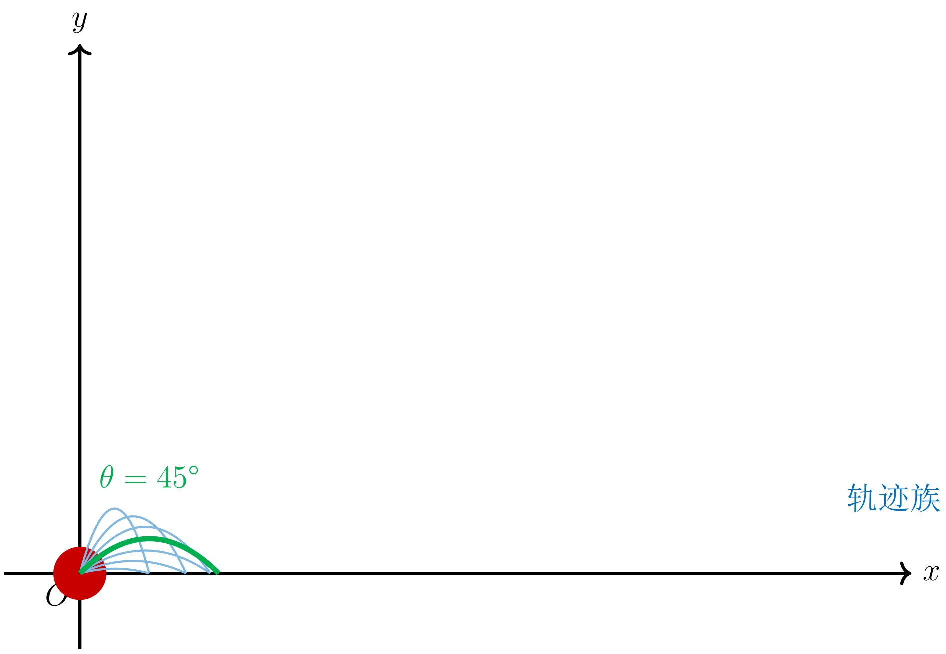

图 3: 固定初速度 v_0 下不同抛射角的轨迹族

3.1 轨迹族的特点

观察轨迹族，我们可以发现：

- 所有轨迹都从同一点 $(0, 0)$ 出发
- 不同角度的轨迹有不同的射程和最大高度
- 这些轨迹之间存在一条**包络线**，它是所有轨迹的边界
- 包络线内部的区域是可达区域，外部是不可达区域

4 包络线的数学推导

定义：包络线的数学定义

设曲线族由方程 $F(x,y,\alpha)=0$ 给出，其中 α 是参数。如果存在一条曲线 C，使得：

1. C 上的每一点都在族中某条曲线上
2. C 在每一点都与族中经过该点的曲线相切

则称 C 为该曲线族的**包络线**。
包络线的求法：联立方程组

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \tag{5}$$

消去参数 α，即可得到包络线的方程。

4.1 包络线的推导过程

对于抛体运动的轨迹族，我们使用 $\tan\theta$ 作为参数会更方便。设 $k=\tan\theta$，则轨迹方程 (??) 变为：

$$F(x,y,k)=y-xk+\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+k^2)=0 \tag{6}$$

对参数 k 求偏导数：

$$\frac{\partial F}{\partial k}=-x+\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot 2k=-x+\frac{gx^2k}{v_0^2}=0 \tag{7}$$

由 (??) 得：

$$-x+\frac{gx^2k}{v_0^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(-1+\frac{gxk}{v_0^2}\right)=0 \tag{8}$$

当 $x=0$ 时，对应抛射点，不是包络线上的点（除起点外）。因此：

$$-1+\frac{gxk}{v_0^2}=0 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{v_0^2}{gx} \tag{9}$$

将 (??) 代入 (??)：

$$\begin{aligned} y &= x\cdot\frac{v_0^2}{gx}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{g^2x^2}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot\frac{v_0^4}{g^2x^2} \\ &= \frac{v_0^2}{g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{v_0^2}{2g} \\ &= \frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2} \end{aligned} \tag{10}$$

定理：抛体运动轨迹族的包络线方程

从同一点以固定初速度 v_0、不同抛射角 θ 抛出的质点，其轨迹族的包络线方程为：

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{11}$$

这是一个开口向下的抛物线，其性质为：

- 顶点：$\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$，这是竖直上抛能达到的最大高度
- 对称轴：$x = 0$（y 轴）
- 与 x 轴的交点：$x = \pm\frac{v_0^2}{g}$，这是水平抛射的最大射程

4.2 推导方法的说明

我们也可以直接从轨迹方程出发，使用另一种方法：
将轨迹方程 (**??**) 整理为关于 $\tan\theta$ 的二次方程：

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0 \tag{12}$$

对于给定的点 (x, y)，如果它位于某条轨迹上，则上述关于 $\tan\theta$ 的方程有实数解，判别式 $\Delta \geq 0$：

$$\begin{aligned}\Delta &= x^2 - 4\cdot\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right)\\ &= x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right)\\ &= x^2 - \frac{2gx^2y}{v_0^2} - \frac{g^2x^4}{v_0^4} \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

整理得：

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{14}$$

等号成立时，点 (x, y) 恰好在包络线上，这与 (**??**) 一致。

5 包络线的性质与应用

5.1 包络线的几何性质

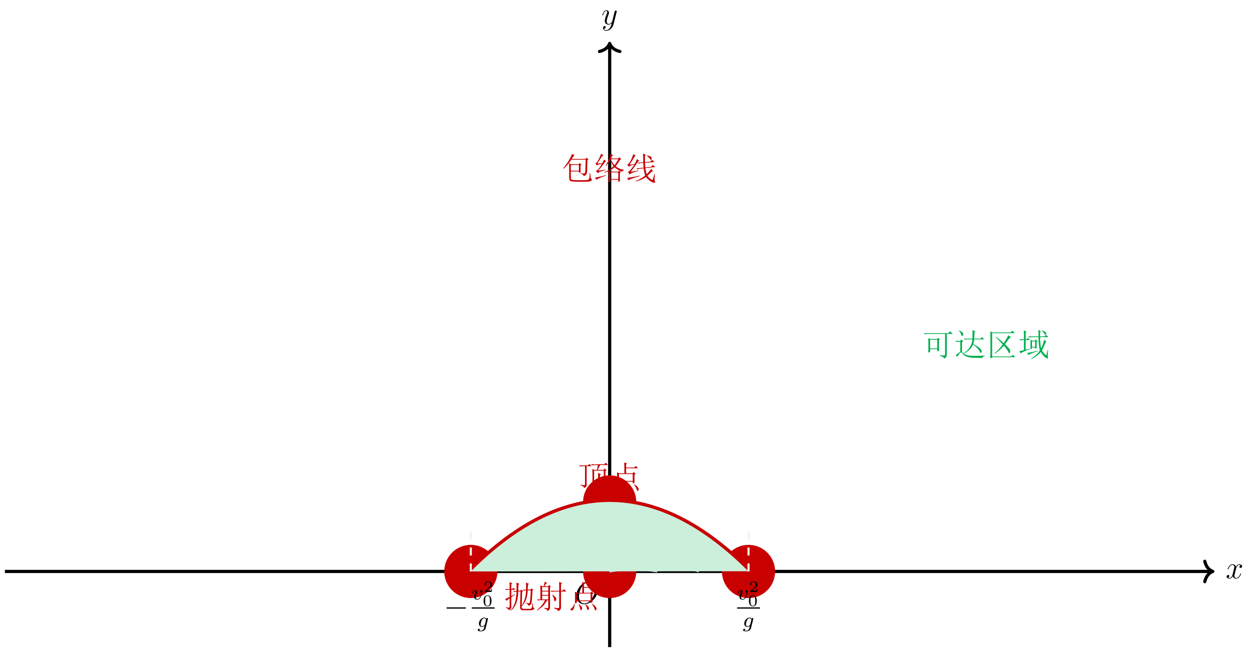

图 4: 包络线的几何性质与可达区域

定理：包络线的几何性质

包络线 $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ 具有以下性质：

1. **顶点**：$\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$
   - 这是竖直上抛（$\theta = 90°$）能达到的最大高度
   - 也是所有轨迹中能达到的最高点
2. **对称轴**：$x = 0$（y 轴）
   - 包络线关于 y 轴对称
   - 这反映了抛体运动的对称性
3. **与坐标轴的交点**：
   - 与 y 轴交点：$(0, \frac{v_0^2}{2g})$
   - 与 x 轴交点：$(\pm\frac{v_0^2}{g}, 0)$
   - 水平距离 $\frac{v_0^2}{g}$ 是水平抛射（$\theta = 0°$）的最大射程
4. **开口方向**：向下
   - 包络线是开口向下的抛物线
   - 包络线内部的区域是可达区域

5.2 物理意义

包络线的物理意义非常重要：

- **可达区域的边界**：包络线内部的区域表示在给定初速度 v_0 下，质点能够到达的所有位置点
- **不可达区域**：包络线外部的区域表示无论以什么角度抛射，都无法到达
- **最优抛射角**：包络线上的每个点都对应一个特定的抛射角，这个角度是到达该点的唯一角度（或两个对称角度）

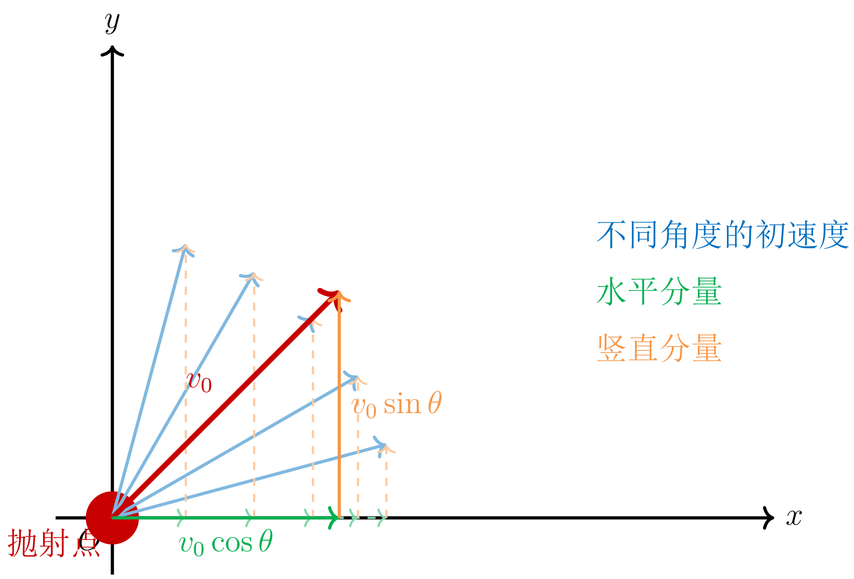

图 5: 不同抛射角的速度分解

6 例题与应用

技巧与应用：例题 1：求包络线方程

题目： 从原点以初速度 $v_0 = 20$ m/s 抛出质点，重力加速度 $g = 10$ m/s^2。求所有可能轨迹的包络线方程，并确定可达区域。

解：

步骤 1： 写出轨迹族方程

设抛射角为 θ，轨迹方程为：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)$$

代入 $v_0 = 20$，$g = 10$：

$$y = x\tan\theta - \frac{10x^2}{2\times 20^2}(1+\tan^2\theta) = x\tan\theta - \frac{x^2}{80}(1+\tan^2\theta)$$

步骤 2： 使用包络线求法

设 $k = \tan\theta$，则：

$$F(x,y,k) = y - xk + \frac{x^2}{80}(1+k^2) = 0$$

对 k 求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -x + \frac{x^2 k}{40} = 0$$

当 $x \neq 0$ 时：

$$k = \frac{40}{x}$$

步骤 3： 代入求包络线方程

$$y = x\cdot\frac{40}{x} - \frac{x^2}{80}\left(1+\left(\frac{40}{x}\right)^2\right) = 40 - \frac{x^2}{80} - \frac{1600}{80} = 40 - \frac{x^2}{80} - 20 = 20 - \frac{x^2}{80}$$

答案： 包络线方程为 $y = 20 - \frac{x^2}{80}$。

步骤 4： 分析可达区域

- 顶点：$(0, 20)$，最大高度为 20 米
- 与 x 轴交点：$x = \pm 40$，最大水平距离为 40 米
- 可达区域：包络线下方（包括边界）的区域

技巧与应用：例题 2：判断点是否可达

题目：在例题 1 的条件下，判断点 $P(30, 10)$ 是否可达？如果可达，求到达该点的抛射角。

解：

方法 1：判断点是否在包络线下方

包络线方程为 $y = 20 - \frac{x^2}{80}$。

当 $x = 30$ 时，包络线上的 y 值为：

$$y = 20 - \frac{30^2}{80} = 20 - \frac{900}{80} = 20 - 11.25 = 8.75$$

点 $P(30, 10)$ 的 y 坐标为 $10 > 8.75$，说明该点在包络线上方，**不可达**。

方法 2：使用判别式法

将点 $P(30, 10)$ 代入轨迹方程：

$$10 = 30\tan\theta - \frac{30^2}{80}(1 + \tan^2\theta)$$

整理得：

$$10 = 30k - \frac{900}{80}(1 + k^2) = 30k - \frac{45}{4}(1 + k^2)$$

$$40 = 120k - 45(1 + k^2) = 120k - 45 - 45k^2$$

$$45k^2 - 120k + 85 = 0$$

判别式：

$$\Delta = 120^2 - 4 \times 45 \times 85 = 14400 - 15300 = -900 < 0$$

判别式小于零，说明不存在实数解，因此点 $P(30, 10)$ **不可达**。

技巧与应用：例题 3：求到达包络线上某点的抛射角

题目： 在例题 1 的条件下，求到达包络线上点 $Q(20, 15)$ 的抛射角。
解：
步骤 1： 验证点在包络线上
当 $x = 20$ 时，包络线上的 y 值为：

$$y = 20 - \frac{20^2}{80} = 20 - 5 = 15$$

点 $Q(20, 15)$ 确实在包络线上。
步骤 2： 求对应的 $k = \tan\theta$
由包络线的推导过程，$k = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{40}{20} = 2$
步骤 3： 求抛射角

$$\theta = \arctan(2) \approx 63.4°$$

答案： 到达点 $Q(20, 15)$ 的抛射角约为 63.4°。
验证： 将 $\theta = \arctan(2)$ 代入轨迹方程验证即可。

注意：重要注意事项

1. **包络线的适用范围：** 包络线方程是在理想条件下推导的（忽略空气阻力、假设重力加速度恒定等）。实际应用中需要考虑这些因素。
2. **可达区域的判断：** 判断点 (x, y) 是否可达，只需检查是否满足 $y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$。
3. **包络线上的点：** 包络线上的每个点（除顶点外）通常对应两个对称的抛射角，一个在 0° 到 45° 之间，一个在 45° 到 90° 之间。
4. **最大射程：** 虽然单个轨迹的最大射程在 $\theta = 45°$ 时取得，但包络线与 x 轴的交点对应的是水平抛射（$\theta = 0°$）的射程。
5. **单位一致性：** 计算时注意物理量的单位要一致，通常使用国际单位制（SI）。

7 总结

本笔记介绍了固定速度抛射的包络线问题，主要内容包括：

- **包络线的概念：** 与一族曲线都相切的曲线，表示可达区域的边界
- **抛体运动基础：** 参数方程、轨迹方程、射程和最大高度
- **轨迹族：** 固定初速度、不同抛射角形成的抛物线族
- **包络线方程：** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$

- **几何性质**：顶点、对称轴、与坐标轴的交点
- **应用**：判断点是否可达、求最优抛射角等

包络线问题将数学中的曲线族理论与物理中的抛体运动相结合，是数学物理交叉应用的典型例子。掌握包络线的求法和性质，有助于深入理解抛体运动的本质特征。