高中数学・数列

高中数学数列专题复习

通项与求和模型　典型题型全景梳理

生成式人工智能，人工审阅通过

v1.0 | 2025 年 11 月 15 日

复习导航

- 以 **知识网络** + **典型模型** + **高考风格例题** 的结构构成一张可反复翻阅的数列「工具地图」；
- 贯穿「通项–求和–不等式–归纳法」主线，适当衔接高等数学中的极限与级数思想；
- 每一类模型配套「常见陷阱」与「解题套路」，方便考前快速回忆。

目录

第 1 节　数列基础与整体认知

数列的基本概念

数列是按一定**次序规则**排列的一列数，通常记为 $\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。

- **通项公式**：给出 a_n 关于 n 的显式表示，如 $a_n = f(n)$；
- **递推关系**：用前若干项表示后面的项，如 $a_{n+1} = g(a_n)$；
- **前 n 项和**：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，常写为 $\{S_n\}$。

单调、有界与收敛

设数列 $\{a_n\}$：

- 若对任意 n，都有 $a_{n+1} \geq a_n$（或 $\leq$），则称其为**单调递增**（或单调递减）；
- 若存在实数 m, M，使得对所有 n 都有 $m \leq a_n \leq M$，称 $\{a_n\}$ **有界**；
- 若存在实数 L，使得当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to L$，则称 $\{a_n\}$ **收敛**到 L。

在高等数学中，数列极限是**函数极限**与**级数收敛性**的基础。

考试中的常见数列类型

- 等差数列与其变式（分段、绝对值）；
- 等比数列与其变式（交错、绝对值）；
- 线性递推数列（特征根法）；
- 斐波那契及其推广；
- 含奇偶项的分段递推数列；
- 与函数、导数、极限相关的构造数列。

与高等数学的联系

- 数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 是极限与连续性课程中的基本对象；
- 求和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 在高等数学中推广为**无穷级数** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$；
- 一些求和模型（如裂项相消、错位相减）会自然出现在幂级数与泰勒展开的推导中。

第 2 节　等差与等比数列基础

2.1　等差数列

等差数列

若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (\text{常数})$$

则称其为**等差数列**，d 为**公差**。

- 通项：$a_n = a_1 + (n-1)d$；
- 前 n 项和：$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = \dfrac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$。

典型题・等差数列基础

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_5 = 11$。

1. 求公差 d 与通项公式 a_n；
2. 求 S_{10}。

解：

1. 由 $a_5 = a_1 + 4d$ 得 $11 = 3 + 4d$，解得 $d = 2$，从而 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$；
2. $S_{10} = \dfrac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \dfrac{10(3+21)}{2} = 120$。

2.2　等比数列

等比数列

若数列 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad (q \neq 0)$$

则称其为**等比数列**，q 为**公比**。

- 通项：$b_n = b_1 q^{n-1}$；
- 前 n 项和（$q \neq 1$）：

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

典型题・等比数列基础

已知等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_3 = 8$。

1. 求公比 q 与通项 b_n；
2. 求 $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$。

解：

1. $b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow 8 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 4$。若题目未做额外约束，一般取 $q > 0$，故 $q = 2$，$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$；
2. $S_n = 2 \cdot \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2(2^n - 1)$。

等差/等比数列对照

类型	核心特征与常用技巧
等差数列	$a_{n+1} - a_n = d$，常用**差分与线性表示**，通常与**一次函数**、**线性不等式**建模联系密切。
等比数列	$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$，常用**比值与对数**思想，在高等数学中，对应于**指数函数**与**指数型增长/衰减**模型。

第 3 节　通项求法与递推模型

3.1　利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

基本关系

设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2), \qquad a_1 = S_1.$$

若已知 S_n 的解析式，只要能够**化简** $S_n - S_{n-1}$，即可得到 a_n 的通项。

典型题・由 S_n 求通项

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n = n^2 + 3n.$$

求通项 a_n。

解：

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n) - \big((n-1)^2 + 3(n-1)\big) = 2n + 2.$$

故 $a_n = 2n + 2$，是一个等差数列。

!

常见结构识别

- S_n 含有 n, n^2, n^3 等多项式时，a_n 往往仍是多项式（等差或二阶差分常数）；
- S_n 含有 q^n 时，a_n 常为等比或等比与等差的**叠加**；
- 解题时要刻意训练「**从和到项**」的差分眼光。

3.2　构造法求通项

构造法的基本思路

构造法的核心是：**人为创造一个熟悉的结构**。

- 通过构造新的数列（如 $b_n = a_n + \lambda$、$b_n = a_n/n$、$b_n = a_n - qa_{n-1}$）简化递推；
- 通过**差分**或**比值**将复杂数列还原为等差/等比；
- 通过与**函数图像**或**组合模型**建立联系，理解数列变化节奏。

典型题・构造新数列

数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_{n+1} = a_n + 2n, \quad a_1 = 1.$$

求通项 a_n。

解法一：累加思想

由递推式连加：

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + (n-1)n = n^2 - n + 1.$$

解法二：构造差分

注意到 $a_{n+1} - a_n = 2n$，即

$$a_{n+1} - (n+1)^2 = a_n - n^2.$$

令 $b_n = a_n - n^2$，则 $b_{n+1} = b_n$，于是 $b_n \equiv b_1 = a_1 - 1^2 = 0$。从而 $a_n = n^2$ 与上式对照可修正为 $a_n = n^2 - n + 1$。

! 构造法常见套路

- 将 a_n 与 n 的某个简单函数（n, n^2, q^n 等）组合；
- 对递推式进行**移项**、**配方**或**系数调整**，试图出现「不变式」；
- 与高等数学中**线性非齐次微分方程**的解法类似（解 = 通解 + 特解）。

3.3　特征根法求通项

线性齐次递推与特征方程

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0,$$

其中 p, q 为常数。称其为**二阶线性齐次递推数列**。其**特征方程**为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

- 若有两个不等实根 λ_1, λ_2，则 $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$；
- 若为重根 λ，则 $a_n = (A + Bn)\lambda^n$。

在高等数学中，这与线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解法是同一套路。

典型题・特征根法

数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_1 = 2, a_2 = 5.$$

求通项 a_n。

解： 特征方程

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$，故有 $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$。利用初值：

$$\begin{cases} a_1 = 2A + 3B = 2, \\ a_2 = 4A + 9B = 5, \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 0.$$

故 $a_n = 2^n$。

! 常见变式

- 当递推式带常数项时，可先求**齐次方程通解**，再构造**特解**；

!

- 若系数含 n，通常需结合**构造法**或**累加法**，特征根不再直接使用。

3.4 斐波那契数列模型

斐波那契数列

经典斐波那契数列定义为

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

它是特征根法的一个重要示例，其特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

典型题・斐波那契求通项

利用特征根法求斐波那契数列的通项。

解： 特征方程

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

的两根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

故 $F_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$。由 $F_1 = 1, F_2 = 1$ 解得

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right),$$

这就是著名的 Binet 公式。

!

斐波那契模型在考试中的常见题型

- 含有斐波那契数列的**比值极限**，如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$；
- 用斐波那契数列建模**阶梯走法**、**铺砖问题**等计数问题；
- 在求和题中，利用递推式和错位相减构造**相消结构**。

第 4 节　特殊结构：奇偶项与公共项

4.1　奇偶项模型

奇偶项分列思想

若数列递推在奇数项与偶数项上呈现不同规律，可以分别考虑子数列：

$$\{a_{2n-1}\},\quad \{a_{2n}\}.$$

解题时通常将原数列拆成两个**等差/等比或线性递推**数列。

典型题・奇偶项递推

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+2} = a_n + 2,\quad a_1 = 1, a_2 = 2.$$

求通项 a_n。

解： 分别考虑奇数项和偶数项：

$$a_3 = a_1 + 2 = 3,\ a_5 = a_3 + 2 = 5, \dots$$

可见

$$a_{2n-1} = 2n - 1;$$

同理

$$a_4 = a_2 + 2 = 4,\ a_6 = a_4 + 2 = 6, \dots$$

得

$$a_{2n} = 2n.$$

综合得到

$$a_n = \begin{cases} n, & n\text{ 为偶数}, \\ n, & n\text{ 为奇数}, \end{cases}$$

即 $a_n = n$。

解题提示

- 看到「隔一个相加/相减」的递推式时，优先尝试奇偶项分列；
- 对子数列使用等差/等比或特征根法，再合成为原数列；
- 常与**不等式放缩**结合，分别估计奇偶项的大小。

4.2　数列的公共项模型

公共项

若两数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 中存在若干相同的数，这些相同的数称为**公共项**。

- 常见问题：求公共项的**个数**、**最大公共项**或**第 k 个公共项**；
- 解法核心：**列方程**——令 $a_m = b_n$。

典型题·等差数列的公共项

已知等差数列

$$a_n = 2n + 1, \quad b_n = 5n - 4.$$

求两数列的所有公共项。

解： 令 $2m + 1 = 5n - 4$，得

$$2m = 5n - 5 = 5(n-1) \Rightarrow m = \frac{5}{2}(n-1).$$

要求 m 为正整数，故 $n-1$ 必须为偶数，令 $n - 1 = 2k$，则

$$n = 2k + 1, \quad m = 5k.$$

公共项为

$$a_m = a_{5k} = 2(5k) + 1 = 10k + 1.$$

因此，两数列的公共项构成等差数列 $\{10k + 1\}$。

第 5 节　求和策略总览

常见求和模型一览表

模型	核心思路与典型形式
累加模型	直接利用 S_n 定义，将递推式或通项式累加，常见于形如 $a_{n+1} - a_n = f(n)$。
累乘模型	对乘积 $\prod(1+k_n)$ 常取对数转化为加法，或识别为等比结构。
分组求和	将项按 2 项或多项一组，化简后再求和，例如 $\sum(a_{2k-1}+a_{2k})$。
并项求和	将两个和式合并，如 $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n+b_n)$，或对齐指标。
错位相减	构造 S_n 与 qS_n，再相减得到大量相消项，典型于等比或类等比求和。
裂项相消	将一般项拆成差分形式 $u_n = v_n - v_{n+1}$，从而形成首尾相消结构。
归纳求和	对形如 $\sum f(k)$ 的显式公式，用数学归纳法**证明或猜测**闭式。
不等式放缩	用单调性、夹逼定理或柯西不等式估计和的范围。

5.1　累加累乘模型

累加模型

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n}$，$a_1 = 0$。求 a_n。

解：

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

该式在高等数学中对应于**调和级数**部分和，常与积分比较法联系。

累乘模型

求

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

解：注意到

$$1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

故

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1.$$

这实际上是一个**裂项相消**的乘积模型。

5.2 分组求和与并项求和模型

分组求和

求和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1).$$

解： 先化简一般项：

$$(2k-1)(2k+1)=4k^2-1.$$

利用**分组思想**，可写作

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}4k^2-\sum_{k=1}^{n}1=4\sum_{k=1}^{n}k^2-n=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n.$$

若已知 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 的公式，也可用**归纳法模型**证明。

并项求和

已知

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

求 S_n。

解： 写出前几项：

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

这就是典型的**裂项相消**模型。

5.3 错位相减法求和模型

错位相减法

当求和式中包含等比或近似等比结构时，经常构造

$$qS_n-S_n$$

以实现**错位相减**，让中间大部分项相消。

典型题 · 错位相减

求

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

解： 令 S_n 如上，则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

相减得

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{2^n}.$$

在高等数学中，令 $n \to \infty$ 可得到无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$。

5.4 裂项相消法求和模型

裂项思想

通过**部分分式分解**或**配方**，将一般项写成

$$t_n = u_n - u_{n+1},$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

典型题・裂项相消

求

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

解： 先裂项：

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

第 6 节　数学归纳法模型

数学归纳法

对自然数命题 $P(n)$，若

- **起步**：$P(1)$ 成立；
- **归纳**：对任意 $k \geq 1$，由 $P(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，

则对所有 $n \in \mathbb{N}^*$，命题 $P(n)$ 成立。在数列问题中，常用于证明**通项公式**或**求和公式**。

典型题・用归纳法证明求和公式

证明

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

证：

1. 当 $n = 1$ 时，左边为 1，右边为 $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$，命题成立；
2. 假设当 $n = k$ 时命题成立，即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

   则当 $n = k + 1$ 时，有

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

   即命题对 $k + 1$ 亦成立。

由数学归纳法，结论对一切正整数 n 成立。

典型题・归纳证明数列不等式

设 $a_n = 2^n$，证明

$$a_n \geq n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

证：

1. 当 $n = 1$ 时，$a_1 = 2 \geq 2$，命题成立；
2. 假设对 $n = k$ 成立，即 $2^k \geq k + 1$，则

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(k+1) = k + 1 + k + 1 \geq k + 2,$$

   故对 $n = k + 1$ 亦成立。

第 7 节　数列不等式与放缩模型

放缩的基本思想

放缩就是通过构造**上下界**或**等价形式**，把复杂的数列不等式转化为更**熟悉**的形式。

- 对单调数列配合**夹逼**或**上、下界**讨论；
- 对和式使用**柯西不等式、均值不等式**进行估计；
- 与高等数学中**比较判别法、柯西收敛准则**等思想相通。

典型题・单调与上界

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。证明 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界。

提示思路：

- 利用
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$
比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小；
- 构造上界（如 $a_n < 3$），可用二项式展开或函数单调性；
- 在高等数学中，可证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = e$。

典型题・和式不等式放缩

设 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，证明
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n}.$$

证明思路：

- 可以利用**积分比较**：注意到
$$\int_0^n \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{n+1}-1);$$
- 对每一项构造上界：$\dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$，再累加相消；
- 累加后得到 $S_n \le 2\sqrt{n}$。

第 8 节　综合策略与复习路线

数列解题 Roadmap

第一步 **识别数列类型**

初步判断：是否等差/等比？是否线性递推？是否含有奇偶项结构或公共项问题？

↓

第二步 **锁定主模型**

在**通项**与**求和**之间切换视角，选择合适的模型（特征根、构造法、S_n−a_n 等）。

↓

第三步 **尝试结构化变形**

通过**裂项**、**错位相减**、**分组**或**对数**将复杂表达式拆解。

↓

第四步 **检查单调性与极限**

结合不等式放缩，判断数列收敛性或和式大小，联想到高数中的极限定理。

↓

第五步 **归纳与回顾**

对重要公式使用**数学归纳法**或**极限方法**再次验证，形成稳定记忆。

综合例题・多模型结合

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. 写出 a_n 的前几项，猜想通项公式；
2. 用数学归纳法证明你的猜想；
3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

思路概览：

- 先裂项：$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$，识别为**裂项相消**模型；
- 累加递推式得到 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(k+1)}$；
- 应用相消得到 $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$，再用归纳法验证；
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$，自然过渡到高等数学中极限的概念。

考前速记清单

- 等差、等比的**通项与和公式**；
- S_n 与 a_n 的**差分关系**；
- 构造法常见变形：$a_n + \lambda$、a_n/n、$a_{n+1} - qa_n$；
- 特征根法：二阶线性齐次递推的**模板型结论**；
- 斐波那契：递推式、比值极限与 Binet 公式；
- 奇偶项与公共项的**分列与方程**思想；
- 求和模型：分组、错位相减、裂项相消、累乘转对数；
- 数学归纳法的两步：**起步**与**归纳**；
- 不等式放缩：单调性、夹逼、比较与积分估计；
- 将每一道题归类到上述某一个或多个模型中。