

# 固定速度抛射的包络线

数学笔记

2025 年 11 月 9 日

## 目录

1	引言与问题背景	2
1.1	问题的物理意义 . . . . .	2
2	抛体运动基础回顾	3
2.1	轨迹方程 . . . . .	3
3	固定速度抛射的轨迹族	4
3.1	轨迹族的特点 . . . . .	4
4	包络线的数学推导	5
4.1	包络线的推导过程 . . . . .	5
4.2	推导方法的说明 . . . . .	6
5	包络线的性质与应用	6
5.1	包络线的几何性质 . . . . .	7
5.2	物理意义 . . . . .	8
6	例题与应用	9
7	总结	11

## 1 引言与问题背景

### 定义：包络线

**包络线（Envelope）**是指与一族曲线都相切的曲线。在几何上，包络线是这族曲线的“边界”，它恰好与族中的每一条曲线在某一点相切。

对于抛体运动，如果我们从同一点以相同的初速度  $v_0$  但不同的抛射角  $\theta$  抛出多个质点，这些质点的轨迹形成一族抛物线。这族抛物线的包络线就是一条特殊的曲线，它表示在给定初速度下，质点能够到达的所有位置点的边界。

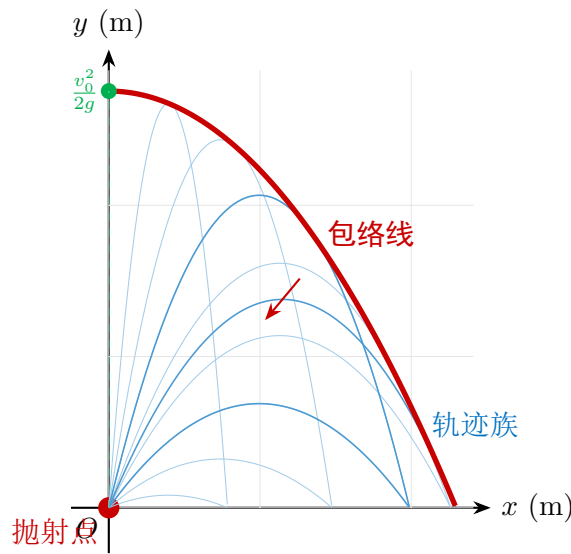


图 1: 包络线的直观理解：多条轨迹的边界

### 1.1 问题的物理意义

在抛体运动中，如果我们固定初速度  $v_0$ ，只改变抛射角  $\theta$ ，那么：

- 不同的抛射角对应不同的轨迹抛物线
- 这些轨迹形成一个“轨迹族”
- 包络线表示在给定初速度下，质点能够到达的所有位置点的边界
- 包络线内部的区域是“可达区域”，外部的区域是“不可达区域”

这个问题在军事、体育、工程等领域都有重要应用，例如：

- 确定炮弹的射程范围
- 分析投掷物体的可达区域
- 设计安全防护区域

## 2 抛体运动基础回顾

### 定义：抛体运动的参数方程

设质点从原点  $O(0,0)$  以初速度  $v_0$ 、抛射角  $\theta$ （与水平方向夹角）抛出，重力加速度为  $g$ （方向竖直向下）。

运动分解：

- 水平方向：匀速直线运动，初速度  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$
- 竖直方向：匀变速直线运动，初速度  $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ ，加速度  $-g$

参数方程（以时间  $t$  为参数）：

$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

其中  $t \geq 0$ ，且  $y(t) \geq 0$ （落地前）。

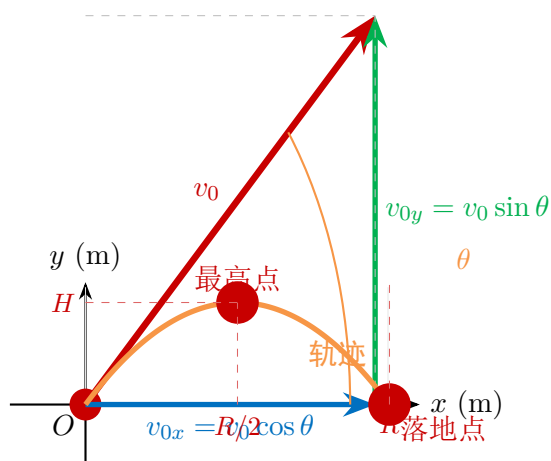


图 2: 抛体运动的速度分解与轨迹

### 2.1 轨迹方程

从参数方程 (1) 和 (2) 中消去参数  $t$ ，得到轨迹方程：

由  $x = v_0 \cos \theta \cdot t$  得  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ ，代入  $y$  的表达式：

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \\ &= x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \\ &= x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

这是一个关于  $x$  的二次函数，轨迹为抛物线。

**重要结论：**

- 射程（水平距离）： $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ，当  $\theta = 45^\circ$  时取得最大值  $R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$
- 最大高度： $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$ ，当  $\theta = 90^\circ$  时取得最大值  $H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$

### 3 固定速度抛射的轨迹族

当我们固定初速度  $v_0$ ，让抛射角  $\theta$  变化时，得到一族轨迹曲线。

**定义：轨迹族**

对于固定的初速度  $v_0$ ，抛射角  $\theta$  作为参数，轨迹方程 (3) 可以写成：

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

这表示一个以  $\theta$ （或  $\tan \theta$ ）为参数的曲线族。每条曲线对应一个特定的抛射角。

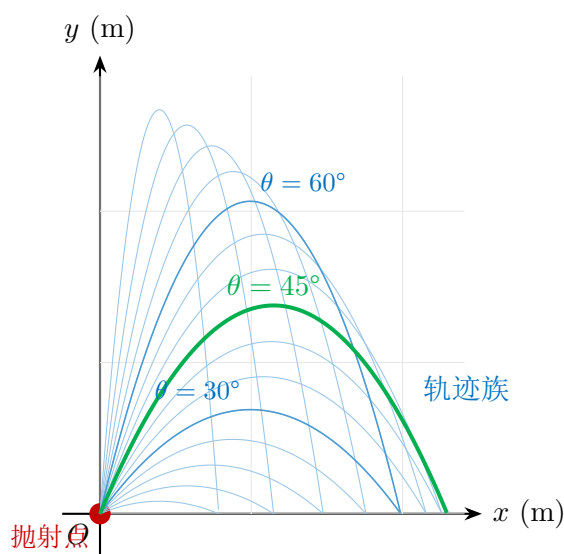


图 3: 固定初速度  $v_0$  下不同抛射角的轨迹族

#### 3.1 轨迹族的特点

观察轨迹族，我们可以发现：

- 所有轨迹都从同一点  $(0, 0)$  出发
- 不同角度的轨迹有不同的射程和最大高度
- 这些轨迹之间存在一条**包络线**，它是所有轨迹的边界
- 包络线内部的区域是可达区域，外部是不可达区域

## 4 包络线的数学推导

### 定义：包络线的数学定义

设曲线族由方程  $F(x, y, \alpha) = 0$  给出，其中  $\alpha$  是参数。如果存在一条曲线  $C$ ，使得：

1.  $C$  上的每一点都在族中某条曲线上
2.  $C$  在每一点都与族中经过该点的曲线相切

则称  $C$  为该曲线族的**包络线**。

包络线的求法：联立方程组

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

消去参数  $\alpha$ ，即可得到包络线的方程。

### 4.1 包络线的推导过程

对于抛体运动的轨迹族，我们使用  $\tan \theta$  作为参数会更方便。设  $k = \tan \theta$ ，则轨迹方程 (4) 变为：

$$F(x, y, k) = y - xk + \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + k^2) = 0 \quad (6)$$

对参数  $k$  求偏导数：

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -x + \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot 2k = -x + \frac{gx^2k}{v_0^2} = 0 \quad (7)$$

由 (7) 得：

$$-x + \frac{gx^2k}{v_0^2} = 0 \Rightarrow x \left( -1 + \frac{gxk}{v_0^2} \right) = 0 \quad (8)$$

当  $x = 0$  时，对应抛射点，不是包络线上的点（除起点外）。因此：

$$-1 + \frac{gxk}{v_0^2} = 0 \Rightarrow k = \frac{v_0^2}{gx} \quad (9)$$

将 (9) 代入 (6)：

$$\begin{aligned} y &= x \cdot \frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left( 1 + \left( \frac{v_0^2}{gx} \right)^2 \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left( 1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{v_0^4}{g^2x^2} \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \end{aligned} \quad (10)$$

## 定理：抛体运动轨迹族的包络线方程

从同一点以固定初速度  $v_0$ 、不同抛射角  $\theta$  抛出的质点，其轨迹族的包络线方程为：

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (11)$$

这是一个开口向下的抛物线，其性质为：

- 顶点： $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ ，这是竖直上抛能达到的最大高度
- 对称轴： $x = 0$  ( $y$  轴)
- 与  $x$  轴的交点： $x = \pm \frac{v_0^2}{g}$ ，这是水平抛射的最大射程

## 4.2 推导方法的说明

我们也可以直接从轨迹方程出发，使用另一种方法：

将轨迹方程 (3) 整理为关于  $\tan \theta$  的二次方程：

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0 \quad (12)$$

对于给定的点  $(x, y)$ ，如果它位于某条轨迹上，则上述关于  $\tan \theta$  的方程有实数解，判别式  $\Delta \geq 0$ ：

$$\begin{aligned} \Delta &= x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) \\ &= x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) \\ &= x^2 - \frac{2gx^2y}{v_0^2} - \frac{g^2x^4}{v_0^4} \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

整理得：

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (14)$$

等号成立时，点  $(x, y)$  恰好在包络线上，这与 (11) 一致。

## 5 包络线的性质与应用

## 5.1 包络线的几何性质

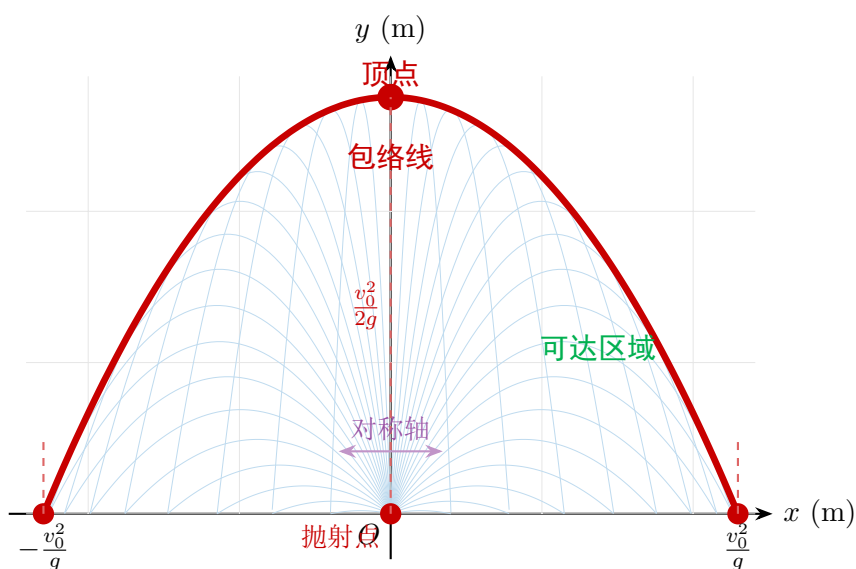


图 4: 包络线的几何性质与可达区域

## 定理：包络线的几何性质

包络线  $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$  具有以下性质：

1. 顶点：  $(0, \frac{v_0^2}{2g})$ 
  - 这是竖直上抛 ( $\theta = 90^\circ$ ) 能达到的最大高度
  - 也是所有轨迹中能达到的最高点
2. 对称轴：  $x = 0$  ( $y$  轴)
  - 包络线关于  $y$  轴对称
  - 这反映了抛体运动的对称性
3. 与坐标轴的交点：
  - 与  $y$  轴交点：  $(0, \frac{v_0^2}{2g})$
  - 与  $x$  轴交点：  $(\pm \frac{v_0^2}{g}, 0)$
  - 水平距离  $\frac{v_0^2}{g}$  是水平抛射 ( $\theta = 0^\circ$ ) 的最大射程
4. 开口方向： 向下
  - 包络线是开口向下的抛物线
  - 包络线内部的区域是可达区域

## 5.2 物理意义

包络线的物理意义非常重要：

- **可达区域的边界：** 包络线内部的区域表示在给定初速度  $v_0$  下，质点能够到达的所有位置点
- **不可达区域：** 包络线外部的区域表示无论以什么角度抛射，都无法到达
- **最优抛射角：** 包络线上的每个点都对应一个特定的抛射角，这个角度是到达该点的唯一角度（或两个对称角度）

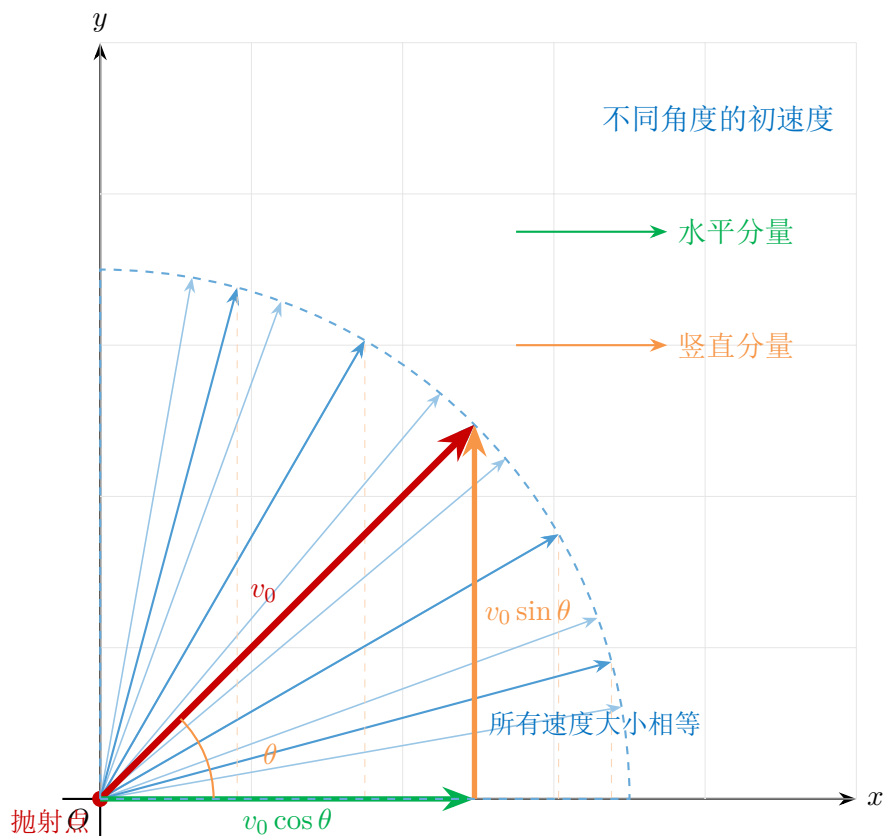


图 5: 不同抛射角的速度分解



## 6 例题与应用

## 技巧与应用：例题 1：求包络线方程

**题目：**从原点以初速度  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  抛出质点，重力加速度  $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。求所有可能轨迹的包络线方程，并确定可达区域。

**解：**

**步骤 1：**写出轨迹族方程

设抛射角为  $\theta$ ，轨迹方程为：

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \theta)$$

代入  $v_0 = 20$ ,  $g = 10$ :

$$y = x \tan \theta - \frac{10x^2}{2 \times 20^2}(1 + \tan^2 \theta) = x \tan \theta - \frac{x^2}{80}(1 + \tan^2 \theta)$$

**步骤 2：**使用包络线求法

设  $k = \tan \theta$ ，则：

$$F(x, y, k) = y - xk + \frac{x^2}{80}(1 + k^2) = 0$$

对  $k$  求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -x + \frac{x^2 k}{40} = 0$$

当  $x \neq 0$  时：

$$k = \frac{40}{x}$$

**步骤 3：**代入求包络线方程

$$y = x \cdot \frac{40}{x} - \frac{x^2}{80} \left( 1 + \left( \frac{40}{x} \right)^2 \right) = 40 - \frac{x^2}{80} - \frac{1600}{80} = 40 - \frac{x^2}{80} - 20 = 20 - \frac{x^2}{80}$$

**答案：**包络线方程为  $y = 20 - \frac{x^2}{80}$ 。

**步骤 4：**分析可达区域

- 顶点：(0, 20)，最大高度为 20 米
- 与  $x$  轴交点： $x = \pm 40$ ，最大水平距离为 40 米
- 可达区域：包络线下方（包括边界）的区域

## 技巧与应用：例题 2：判断点是否可达

题目：在例题 1 的条件下，判断点  $P(30, 10)$  是否可达？如果可达，求到达该点的抛射角。

解：

方法 1：判断点是否在包络线下方

包络线方程为  $y = 20 - \frac{x^2}{80}$ 。

当  $x = 30$  时，包络线上的  $y$  值为：

$$y = 20 - \frac{30^2}{80} = 20 - \frac{900}{80} = 20 - 11.25 = 8.75$$

点  $P(30, 10)$  的  $y$  坐标为  $10 > 8.75$ ，说明该点在包络线上方，不可达。

方法 2：使用判别式法

将点  $P(30, 10)$  代入轨迹方程：

$$10 = 30 \tan \theta - \frac{30^2}{80} (1 + \tan^2 \theta)$$

整理得：

$$10 = 30k - \frac{900}{80} (1 + k^2) = 30k - \frac{45}{4} (1 + k^2)$$

$$40 = 120k - 45(1 + k^2) = 120k - 45 - 45k^2$$

$$45k^2 - 120k + 85 = 0$$

判别式：

$$\Delta = 120^2 - 4 \times 45 \times 85 = 14400 - 15300 = -900 < 0$$

判别式小于零，说明不存在实数解，因此点  $P(30, 10)$  不可达。

**技巧与应用：例题 3：求到达包络线上某点的抛射角**

题目：在例题 1 的条件下，求到达包络线上点  $Q(20, 15)$  的抛射角。

解：

步骤 1：验证点在包络线上

当  $x = 20$  时，包络线上的  $y$  值为：

$$y = 20 - \frac{20^2}{80} = 20 - 5 = 15$$

点  $Q(20, 15)$  确实在包络线上。

步骤 2：求对应的  $k = \tan \theta$

由包络线的推导过程， $k = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{40}{20} = 2$

步骤 3：求抛射角

$$\theta = \arctan(2) \approx 63.4^\circ$$

答案：到达点  $Q(20, 15)$  的抛射角约为  $63.4^\circ$ 。

验证：将  $\theta = \arctan(2)$  代入轨迹方程验证即可。

**注意：重要注意事项**

- 包络线的适用范围：**包络线方程是在理想条件下推导的（忽略空气阻力、假设重力加速度恒定等）。实际应用中需要考虑这些因素。
- 可达区域的判断：**判断点  $(x, y)$  是否可达，只需检查是否满足  $y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ 。
- 包络线上的点：**包络线上的每个点（除顶点外）通常对应两个对称的抛射角，一个在  $0^\circ$  到  $45^\circ$  之间，一个在  $45^\circ$  到  $90^\circ$  之间。
- 最大射程：**虽然单个轨迹的最大射程在  $\theta = 45^\circ$  时取得，但包络线与  $x$  轴的交点对应的是水平抛射（ $\theta = 0^\circ$ ）的射程。
- 单位一致性：**计算时注意物理量的单位要一致，通常使用国际单位制（SI）。

## 7 总结

本笔记介绍了固定速度抛射的包络线问题，主要包括：

- 包络线的概念：**与一族曲线都相切的曲线，表示可达区域的边界
- 抛体运动基础：**参数方程、轨迹方程、射程和最大高度
- 轨迹族：**固定初速度、不同抛射角形成的抛物线族
- 包络线方程：** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$

- **几何性质：**顶点、对称轴、与坐标轴的交点
- **应用：**判断点是否可达、求最优抛射角等

包络线问题将数学中的曲线族理论与物理中的抛体运动相结合，是数学物理交叉应用的典型例子。掌握包络线的求法和性质，有助于深入理解抛体运动的本质特征。