compat=1.18

切线放缩不等关系常用结论笔记

Gemini – 高中数学导数应用复习

2025 年 11 月 16 日

摘要

本文档旨在为高中阶段学习导数的同学，提供一份关于利用函数切线思想（即“切线放缩”）证明不等式的综合性复习笔记。我们将通过详尽的解释、严谨的数学证明以及直观的函数图像，系统梳理一系列在解题中频繁出现的经典不等式。掌握这些结论与方法，将有助于提升逻辑推理与数学运算的核心素养，从容应对考试中的导数压轴题。

目录

第 1 节　引言：切线放缩思想的核心

在处理与函数相关的不等式证明问题时，尤其是对于超越函数（如指数、对数、三角函数），直接进行代数上的比较往往非常困难。导数的引入为我们提供了强有力的工具——利用函数的单调性与极值。

“切线放缩”是这一思想下的一个具体且高效的策略。其核心在于:

- **几何上**，对于一个（在某区间内）的凸函数或凹函数，其图像完全位于其任意一点切线的上方或下方。
- **代数上**，这意味着函数 $f(x)$ 的值，总是不小于（或不大于）其在某点 x_0 处的切线函数 $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 的值。

因此，通过构造合适的函数，并找到其在关键点（通常是等号成立的点）的切线，我们可以建立一个一边是原函数，另一边是更简单的线性函数的不等关系，从而达到证明或解题的目的。这种方法，我们称之为 **切线放缩法**。

接下来，我们将逐一探讨那些最为经典和实用的切线放缩不等式。

第 2 节 指数函数相关不等式

2.1 $e^x \geq x+1$

不等式 1. 对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$，恒有 $e^x \geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立。

几何直观

该不等式表明，函数 $f(x)=e^x$ 的图像恒在其切点 $(0,1)$ 处的切线 $y=x+1$ 的上方（除切点外）。

演绎证明

证明. 欲证 $e^x \geq x+1$，即证 $e^x - x - 1 \geq 0$。
构造辅助函数 $g(x)=e^x-x-1$。

- 对 $g(x)$ 求导，得 $g'(x)=e^x-1$。
- 令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$。
- 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在该区间上单调递减。
- 当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在该区间上单调递增。
- 函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得全局最小值。
- $g_{min}(x)=g(0)=e^0-0-1=0$。
- 对于任意 $x \in \mathbb{R}$，恒有 $g(x) \geq 0$，即 $e^x-x-1 \geq 0$。

故原不等式 $e^x \geq x+1$ 成立，当且仅当 $x=0$ 时取等号。 □

函数图像

$$xyf(x)=e^x y=x+1$$

2.2 $e^x \geq ex$

不等式 2. 对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$，恒有 $e^x \geq ex$，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立。

几何直观

该不等式表明，函数 $f(x) = e^x$ 的图像恒在其切点 $(1, e)$ 处的切线 $y = ex$ 的上方（除切点外）。

演绎证明

证明. 欲证 $e^x \geq ex$。由于 $e > 0, x$ 可以为负，直接作差不易。
当 $x \leq 0$ 时，$e^x > 0$，$ex \leq 0$，不等式显然成立。
当 $x > 0$ 时，两边取自然对数，原不等式等价于 $x \geq \ln(ex) = 1 + \ln x$，即 $x - \ln x - 1 \geq 0$。
构造辅助函数 $h(x) = x - \ln x - 1$，$x \in (0, +\infty)$。

> - 对 $h(x)$ 求导，得 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$。
> - 令 $h'(x) = 0$，解得 $x = 1$。
> - 当 $x \in (0, 1)$ 时，$h'(x) < 0$，故 $h(x)$ 在该区间上单调递减。
> - 当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$h'(x) > 0$，故 $h(x)$ 在该区间上单调递增。
> - 函数 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得全局最小值。
> - $h_{min}(x) = h(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$。
> - 对于任意 $x > 0$，恒有 $h(x) \geq 0$，即 $x - \ln x - 1 \geq 0$。

综上所述，原不等式 $e^x \geq ex$ 成立，当且仅当 $x = 1$ 时取等号。 □

函数图像

$$xyf(x) = e^xy = ex$$

第 3 节　对数函数相关不等式

3.1　$\ln x \leq x - 1$

不等式 3. 对于任意正实数 $x > 0$，恒有 $\ln x \leq x - 1$，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立。

几何直观

该不等式表明，函数 $f(x) = \ln x$ 的图像恒在其切点 $(1, 0)$ 处的切线 $y = x - 1$ 的下方（除切点外）。

演绎证明

证明. 欲证 $\ln x \leq x - 1$，即证 $\ln x - x + 1 \leq 0$。
构造辅助函数 $g(x) = \ln x - x + 1$，$x \in (0, +\infty)$。

- 对 $g(x)$ 求导，得 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$。
- 令 $g'(x) = 0$，解得 $x = 1$。
- 当 $x \in (0, 1)$ 时，$g'(x) > 0$，故 $g(x)$ 在该区间上单调递增。
- 当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$g'(x) < 0$，故 $g(x)$ 在该区间上单调递减。
- 函数 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得全局最大值。
- $g_{max}(x) = g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$。
- 对于任意 $x > 0$，恒有 $g(x) \leq 0$，即 $\ln x - x + 1 \leq 0$。

故原不等式 $\ln x \leq x - 1$ 成立，当且仅当 $x = 1$ 时取等号。 □

函数图像

$$xyf(x) = \ln xy = x - 1$$

3.2 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$

不等式 4. 对于任意正实数 $x > 0$，恒有 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立。

几何直观

这个不等式并非直接的切线放缩。但其证明方法与切线放缩法同源，都是通过构造函数求导分析单调性与最值。

演绎证明

证明. 欲证 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$，即证 $\ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$。
构造辅助函数 $h(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$，$x \in (0, +\infty)$。

- 对 $h(x)$ 求导，得 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$。
- 令 $h'(x) = 0$，解得 $x = 1$。
- 当 $x \in (0, 1)$ 时，$h'(x) < 0$，故 $h(x)$ 在该区间上单调递减。
- 当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$h'(x) > 0$，故 $h(x)$ 在该区间上单调递增。
- 函数 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得全局最小值。
- $h_{min}(x) = h(1) = \ln 1 - 1 + \frac{1}{1} = 0$。
- 对于任意 $x > 0$，恒有 $h(x) \geq 0$，即 $\ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$。

故原不等式 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ 成立，当且仅当 $x = 1$ 时取等号。 □

函数图像

$$xyf(x) = \ln xy = 1 - 1/x$$

3.3 $\ln x \leq \frac{x}{e}$

不等式 5. 对于任意正实数 $x > 0$，恒有 $\ln x \leq \frac{x}{e}$，当且仅当 $x = e$ 时等号成立。

几何直观

该不等式表明，函数 $f(x) = \ln x$ 的图像恒在一条经过原点且与其相切的直线 $y = \frac{1}{e}x$ 的下方（除切点外）。

演绎证明

证明. 欲证 $\ln x \leq \frac{x}{e}$，即证 $\ln x - \frac{x}{e} \leq 0$。
构造辅助函数 $k(x) = \ln x - \frac{x}{e}$，$x \in (0, +\infty)$。

- 对 $k(x)$ 求导，得 $k'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$。
- 令 $k'(x) = 0$，解得 $x = e$。
- 当 $x \in (0, e)$ 时，$k'(x) > 0$，故 $k(x)$ 在该区间上单调递增。
- 当 $x \in (e, +\infty)$ 时，$k'(x) < 0$，故 $k(x)$ 在该区间上单调递减。
- 函数 $k(x)$ 在 $x = e$ 处取得全局最大值。
- $k_{max}(x) = k(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 1 - 1 = 0$。
- 对于任意 $x > 0$，恒有 $k(x) \leq 0$，即 $\ln x - \frac{x}{e} \leq 0$。

故原不等式 $\ln x \leq \frac{x}{e}$ 成立，当且仅当 $x = e$ 时取等号。 □

函数图像

$$xyef(x) = \ln xy = x/e$$

3.4 其他对数不等式（帕德逼近）

以下两个不等式是 $\ln x$ 在 $x=1$ 点附近更为精确的近似，它们源于数学中的“帕德逼近”，在处理难题时偶有奇效。

不等式 6. *(1)* 对于 $x>0$，有 $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$。
(2) 对于 $x>0$，有 $\ln x \leq \frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})=\frac{x^2-1}{2x}$。

证明 (1) $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$

证明. 构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x>0$。

- $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2}=\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$。
- 对于 $x>0$，$x(x+1)^2>0$，且 $(x-1)^2\geq 0$。
- $f'(x)\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 且仅在 $x=1$ 时 $f'(x)=0$。
- $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增。
- $f(1)=\ln 1-\frac{2(1-1)}{1+1}=0$ 是函数在 $x=1$ 处的值。当 $x>1$ 时 $f(x)>f(1)=0$, 当 $0<x<1$ 时 $f(x)<f(1)=0$。

证明勘误：原证明有误，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的值为 0，且函数单调递增，故 $x>1$ 时不等式成立，$0<x<1$ 时不等式反向。让我们重新审视并证明。

修正证明. 构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$。$g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$。所以 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递增。

- 当 $x\geq 1$ 时, $g(x)\geq g(1)=0$, 所以 $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$ 成立。
- 当 $0<x<1$ 时, $g(x)<g(1)=0$, 所以 $\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$ 成立。

□

□

证明 (2) $\ln x\leq\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$

证明. 构造函数 $h(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})-\ln x$，$x>0$。

- $h'(x)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x}=\frac{x^2+1-2x}{2x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}$。
- 对于 $x>0$，$2x^2>0$ 且 $(x-1)^2\geq 0$。
- $h'(x)\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 且仅在 $x=1$ 时 $h'(x)=0$。
- $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增。

因此, 类似于上一个证明:

- 当 $x\geq 1$ 时, $h(x)\geq h(1)=0$, 所以 $\ln x\leq\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ 成立。
- 当 $0<x<1$ 时, $h(x)<h(1)=0$, 所以 $\ln x>\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ 成立。

□

第 4 节　三角函数相关不等式

不等式 7. 对于 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，恒有 $\sin x < x < \tan x$。

几何直观

在单位圆中，考虑一个大小为 x (弧度) 的锐角。该角的正弦线段长为 $\sin x$，弧长为 x，正切线段长为 $\tan x$。从几何图形上可以直观地看出三者的大小关系。

演绎证明

证明 $x > \sin x$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

证明. 构造函数 $f(x) = x - \sin x$，$x \in (0, \frac{\pi}{2})$。

- $f'(x) = 1 - \cos x$。
- 对于 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\cos x \in (0, 1)$，因此 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$。
- $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调递增。
- 对于任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，有 $f(x) > f(0) = 0 - \sin 0 = 0$。
- $x - \sin x > 0$，即 $x > \sin x$。

□

证明 $x < \tan x$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

证明. 构造函数 $g(x) = \tan x - x$，$x \in (0, \frac{\pi}{2})$。

- $g'(x) = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$。
- 对于 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\cos x \in (0, 1)$，因此 $\cos^2 x \in (0, 1)$，$\frac{1}{\cos^2 x} > 1$。
- $g'(x) > 0$。
- $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调递增。
- 对于任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，有 $g(x) > g(0) = \tan 0 - 0 = 0$。
- $\tan x - x > 0$，即 $\tan x > x$。

□

函数图像

$$xy\pi/6\pi/3\pi/2y = \sin xy = xy = \tan x$$

第 5 节　总结与应用

本笔记总结的切线放缩不等式是高中数学导数应用中的核心工具。它们不仅仅是需要记忆的结论，更重要的是理解其背后的构造思想和证明过程。在解决复杂的导数综合题，尤其是证明不等式或求参数范围时，若能敏锐地识别出题目中式子的结构，并联想到这些基本不等模型，就可以:

> 1. **快速放缩**：将复杂的超越式放缩为简单的多项式（通常是一次式），简化问题。
> 2. **确定界限**：为变量或表达式找到一个确定的上界或下界，是解决恒成立问题的关键一步。
> 3. **启发思路**：即使不能直接套用，这些不等式的构造方法（作差、求导、讨论单调性、找最值）也是解决此类问题的通用范式。

希望这份笔记能帮助同学们系统地掌握切线放缩的技巧，在数学学习的道路上更进一步。