표준 표기법과 흔히 사용되는 함수.

1. 단조성

- $m \le n$ 일 때 $f(m) \le f(n)$ 이면 f는 단조증가. /
- $m \le n$ 일 때 $f(m) \ge f(n)$ 이면 f는 단조감소. /
- $m < n$ 〃 $f(m) < f(n)$ 순증가.
- $m < n$ 〃 $f(m) > f(n)$ 순감소.

2. 내림과 올림.

$$x-1 < \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\text{내림}} \le x \le \underbrace{\lceil x \rceil}_{\text{올림}} < x+1$$

$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ 이 성립된다.

$\lfloor\ \rfloor$, $\lceil\ \rceil$는 단조증가한다.

3. 모듈로 연산.

$$\underline{a \bmod n} = \underline{a - n\lfloor a/n \rfloor}$$

(a/n의 나머지 이다.)

$\underline{0 \le a \bmod n < n}$

$a \bmod n = b \bmod n$, $a \equiv b \pmod n$

4. 다항식 n의 d차 다항식 $p(n)$ ($d \ne \mathbb{Z}^-$)

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots \quad //$$

(a : 계수)

다항함수가 점근적으로 양이다. $\Leftrightarrow$ $a_d > 0$ 과 필요충분조건

$\therefore$ $p(n)$에 대해 $p(n) = \Theta(n^d)$ 이다.

$a \ge 0$에 대해 n^a는 단조증가.

$a \le 0$에 대해 n^a는 단조감소.

$f(n)$이 어떤 상수 k에 대해 $f(n) = O(n^k)$

이면 $f(n)$이 다항식적으로 한정

5. 지수함수.

$a>0$, m, n 에 대해.

$a^0=1$ $a^1=a$ $a^{-1}=1/a$.

$(a^m)^n=a^{mn}$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

모든 $a\geq 1$ 과 n에 대해 단조증가

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n}=0$ $\therefore$ $\log a^n = n^b$. ㄴ점근적으로.

$\therefore$ 지수함수는 다항함수 보다 증가속도가 빠르다.

$e^x \geq 1+x$ $x=0$ 일때만 성립한다.

$|x|\leq 1$ 일때 e^x은 근사값을 가진다.

$1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$ ....

$\therefore e^x = 1+x+\theta(x^2)$ $x\to 0$ 일때 $1+x$ 로 e^x를 근사하면 꽤 정확하다.

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. (모든 x에 대해)

6. 로그함수.

b가 $b>1$인 상수 이면 $n>0$에 대해 $\log_b n$은 순증가 한다.

$a>0$, $b>0$, $c>0$, n에 대해.

$a=b^{\log_b a}$

$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

$\log_b a^n = n\log_b a$

$\log_b(1/a) = -\log_b a$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$|x|<1$ 일때 $\ln(1+x)=?$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

- $x>-1$ 에 대해 다음 부등식이 성립 ($x=0$ 일때는 등호)

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

- 어떤 상수 k에 대해 $f(n)=O(\lg^k n)$ 일때 $f(n)$이 다항로그적으로 한정된다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg^b n}{(2^a)^{\lg n}} = \lim \frac{\lg^b n}{n^a} = 0$$

이극한으로 부터 $\lg^b n = o(n^a)$

따라서 임의의 양의 다항함수는 어떤 다항로그함수보다 빨리 증가.

7. 계승

$$n! \begin{cases} 1 & (n=0) \\ n \cdot (n-1)! & (n>0) \end{cases}$$

$n! < n^n$ n개항의 각각의 값이 n을 넘지 않음.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$ (Stirling 근사)

$$n! = o(n^n)$$
$$n! = \omega(2^n)$$
$$\lg(n!) = \theta(n \log n)$$

함수의 반복

$$f^{(i)}(n) \begin{cases} n & (i=0) \\ f(f^{(i-1)}(n)) & (i>0) \end{cases}$$

$f(n) = 2n$ 이면 $f^{(i)}(n) = 2^{(i)}n$ 이다.

반복로그

$$\lg^* n = \min\{ i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1 \}$$

$\lg^{(i-1)} n > 0$일 때 잘 정의.