

Mirar por Dentro: La Transformada de Radon, Experimentos en MATLAB y Aplicaciones en Imagen Biomédica

Autor
Estudiante de Ingeniería Biomédica

May 31, 2025

Abstract

La transformada de Radon enlaza matemáticas elegantes con tecnología médica que salva vidas. Este informe presenta su definición, ilustra demostraciones analíticas y numéricas realizadas en MATLAB y explica cómo la *retroproyección filtrada* sustenta la tomografía computarizada (CT) moderna. Todas las figuras se generaron mediante un Live Script y se guardaron con los nombres citados para garantizar la reproducibilidad.

Contents

1	Introducción	1
2	Teoría de la Transformada de Radon	2
2.1	Definición matemática	2
3	Descripción general y aplicaciones	2
3.1	Visión intuitiva	3
3.2	Inversión	4
4	Experimentos Analíticos	4
4.1	Gaussiana radial	4
4.2	Polinomio-gaussiana asimétrica	4
5	Experimentos Discretos en MATLAB	5
5.1	Fantoma de disco	5
5.2	Fantoma de Shepp-Logan	6
6	Contexto en Imagen Biomédica	6
6.1	Del modelo al escáner	6
6.2	Más allá de la CT	6
7	Conclusión	7

1 Introducción

La tomografía computarizada revolucionó la radiología diagnóstica al permitir reconstruir cortes transversales de la anatomía interna a partir de medidas de atenuación de rayos X. Matemáticamente estas integrales de línea constituyen la *transformada de Radon*, introducida por Johann Radon

en 1917 [1]. Su inversión y realización numérica eficiente son el núcleo de todo escáner CT moderno.

2 Teoría de la Transformada de Radon

2.1 Definición matemática

Para una función $f(x, y)$ definida en \mathbb{R}^2 , su transformada de Radon $\mathcal{R}f$ es el conjunto de integrales a lo largo de rectas:

$$(\mathcal{R}f)(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \varphi - s \sin \varphi, p \sin \varphi + s \cos \varphi) ds, \quad (1)$$

donde p es la distancia perpendicular de la recta al origen y φ el ángulo que forma la normal con el eje x .

3 Descripción general y aplicaciones

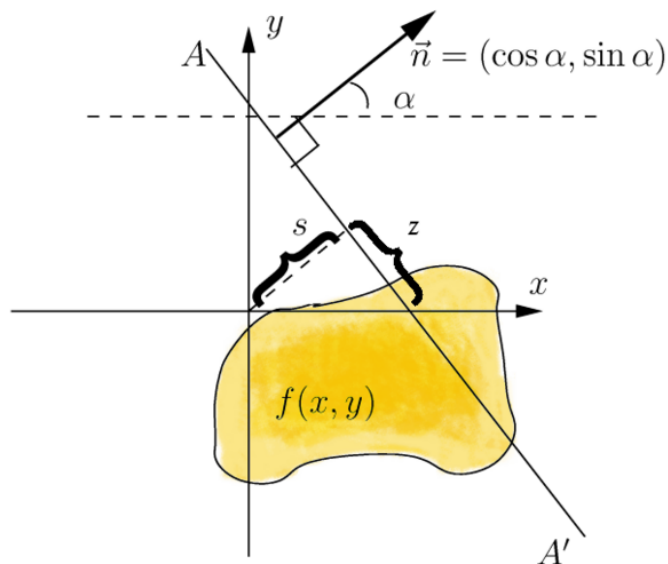


Figure 1: Esquema conceptual: la transformada de Radon asigna la función $f(x, y)$ en el plano a $Rf(\alpha, s)$ en el espacio de rectas (ángulo α , distancia s).

En términos sencillos, la transformada de Radon toma una función $f(x, y)$ —por ejemplo, la densidad desconocida de un objeto—y genera otra función $Rf(\alpha, s)$ cuyos valores son *integrales de línea* de f a lo largo de todas las rectas del plano (Fig. 1). Dicho de otro modo, captura “cuánta masa” contiene cada rayo dirigido por el par (α, s) .

Sinogramas

La representación gráfica de Rf recibe el nombre de *sinograma*. Un punto fuera del centro produce una traza sinusoidal; varios objetos dan lugar a un bosque de senos borrosos con distinta fase y amplitud.

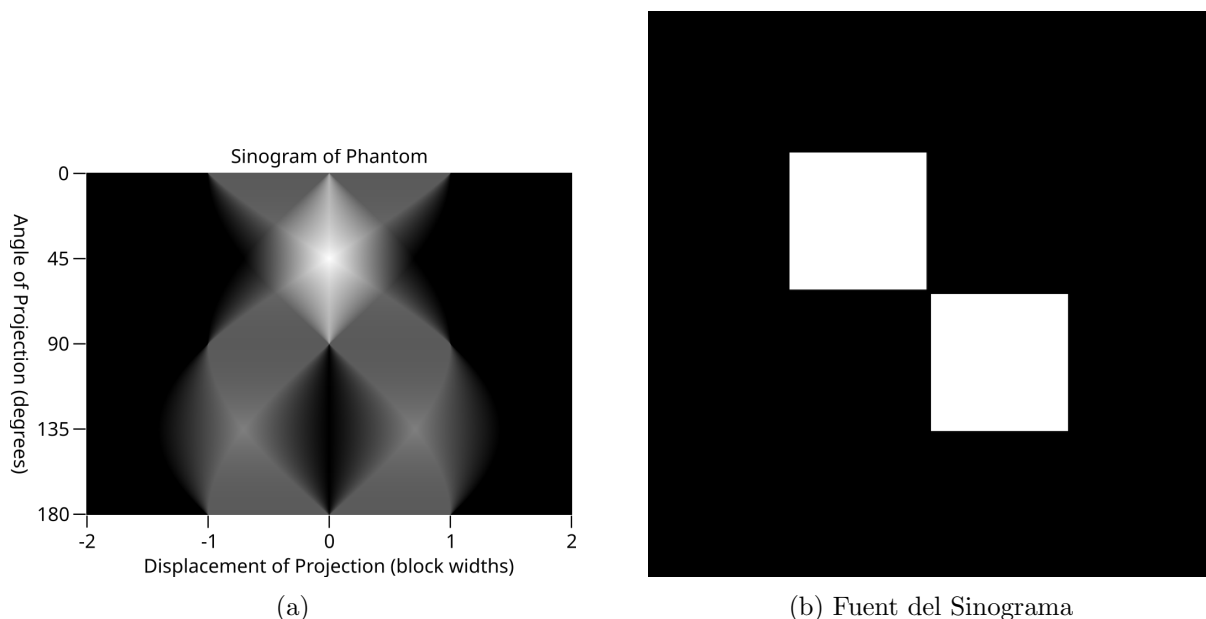


Figure 2: Sinograma de la función indicadora de dos cuadrados (izq. la función, der. su Radon transformada).

La Fig. muestra el caso didáctico de dos cuadrados. Nótese cómo las aristas paralelas refuerzan la señal cuando quedan alineadas con la dirección de proyección.

Ámbitos de uso

La capacidad de reconstruir f a partir de Rf sustenta tecnologías muy diversas:

- **Tomografía computarizada (CT) y Tomografía axial computarizada (CAT)** – reconstrucción de cortes médicos en 2-D y 3-D.
- **PET y SPECT** – imágenes de medicina nuclear mediante detección coincidente de rayos γ .
- **Microscopía electrónica de partículas** (virus, complejos proteicos) – inversión del llamado *X-ray transform*.
- **Tomografía óptica de proyección** – samples mesoscópicos transparentes.
- **Exploración sísmica (reflection seismology)** – reconstrucción de subsuelo a partir de reflexiones.
- **Lectores de códigos de barras y QR** – versión 1-D de la transformada.

Todas estas aplicaciones comparten la misma idea: medir proyecciones (rayos, haces, ondas) desde múltiples direcciones y luego invertir la transformada para revelar la estructura interna u oculta del objeto.

3.1 Visión intuitiva

Imagina un *haz de luz* infinitamente fino que atraviesa un objeto mientras medimos qué fracción llega al otro lado. Al rotar el haz por todos los ángulos y desplazarlo por todos los offsets obtenemos el conjunto completo de mediciones unidimensionales: eso es Rf . Reconstruir f equivale a resolver un gran rompecabezas de sombras superpuestas.

3.2 Inversión

El **teorema de la rebanada de Fourier** afirma que la transformada de Fourier 1-D de cada proyección coincide con una sección de la transformada de Fourier 2-D de f . El algoritmo práctico aplica un filtro de frecuencia y luego retroproyecta, dando lugar a la *retroproyección filtrada* (FBP), disponible en MATLAB como `iradon`.

4 Experimentos Analíticos

4.1 Gaussiana radial

Con *Symbolic Math Toolbox* verificamos que $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ tiene transformada independiente de φ : $(\mathcal{R}f)(p, \varphi) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$. La Fig. 3 compara la función y su transformada.

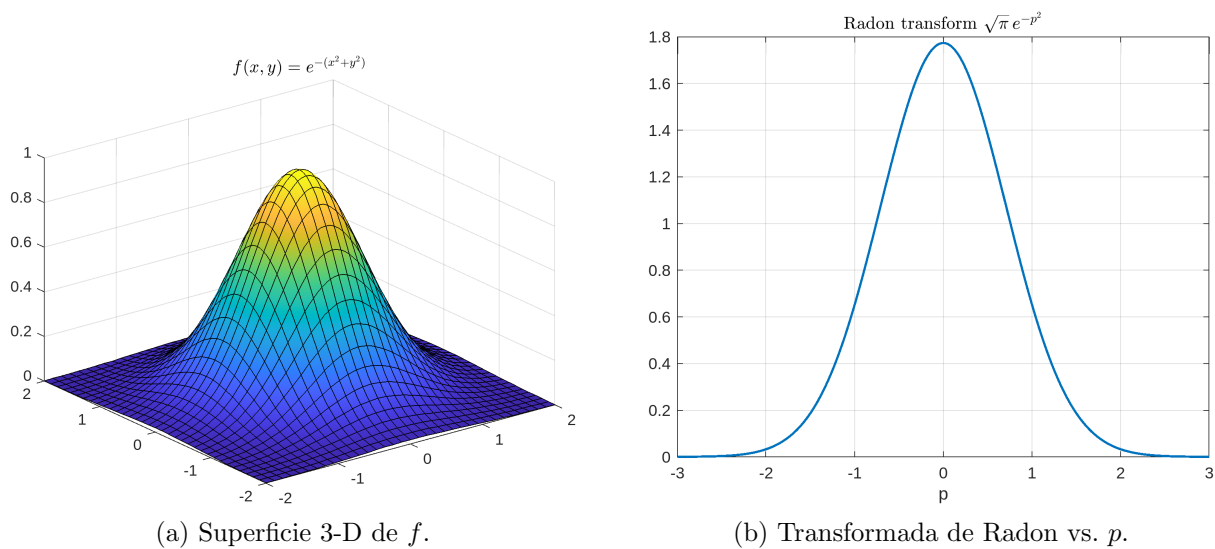


Figure 3: Ejemplo radialmente simétrico.

4.2 Polinomio-gaussiana asimétrica

Para $g(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ la simetría se rompe; su transformada depende de p y φ . Véase Fig. 4.

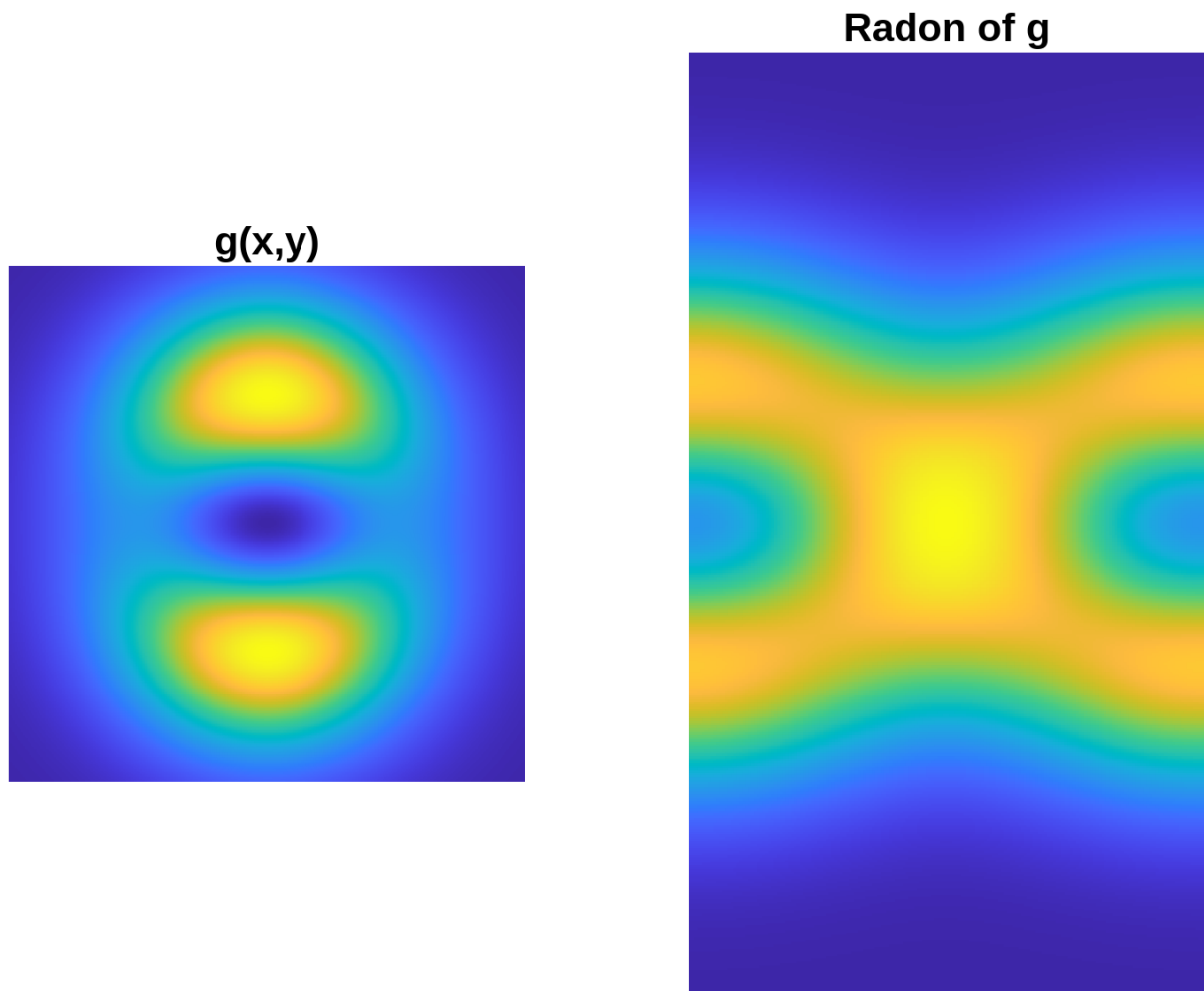


Figure 4: Función asimétrica (izq.) y su transformada (der.).

5 Experimentos Discretos en MATLAB

5.1 Fantoma de disco

La Fig. 5 muestra cómo 180 proyecciones de un disco generan un sinograma que la FBP reconstruye con error mínimo.

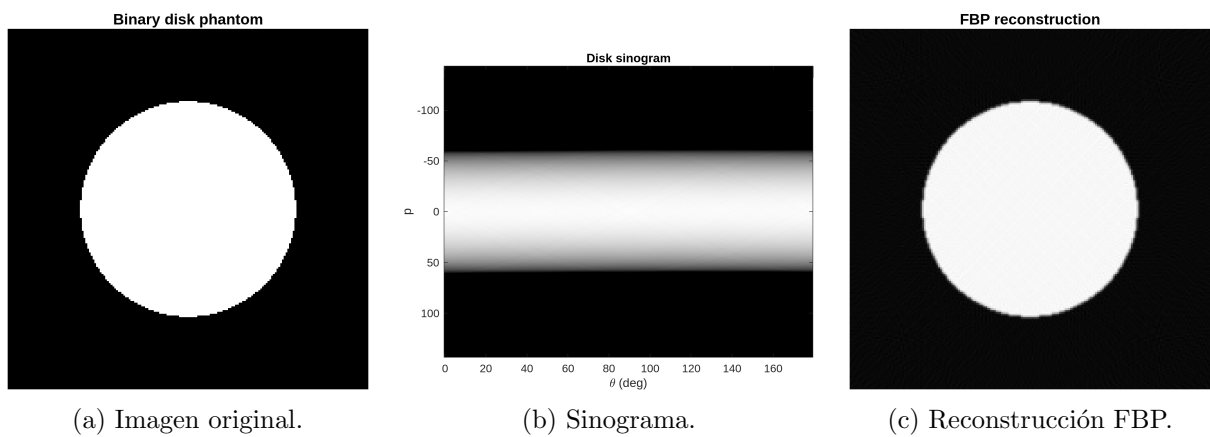


Figure 5: Simulación de CT de haz paralelo para un disco.

5.2 Fantoma de Shepp–Logan

El fantoma de Shepp–Logan se reconstruye fielmente con 180 proyecciones (Fig. 6).

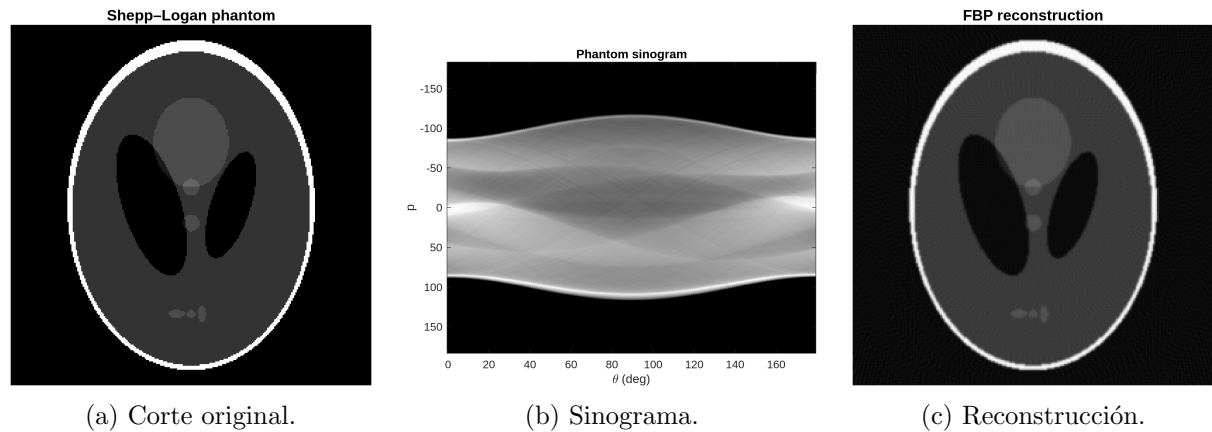


Figure 6: Experimento con el fantoma de Shepp–Logan.

6 Contexto en Imagen Biomédica

6.1 Del modelo al escáner

Los escáneres modernos adquieren proyecciones de haz abanico o cónico mientras giran alrededor del paciente. Aunque los pipelines clínicos añaden correcciones e iteraciones, todo parte de la Ec. (1). Para ilustrar, utilizamos el volumen `mri` incluido en MATLAB (Fig. 7).

Head MRI (built-in)

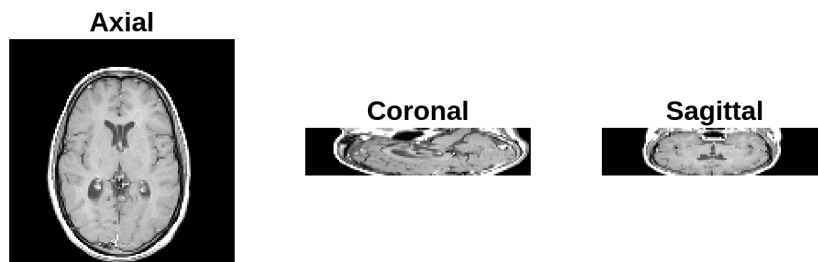


Figure 7: Vistas ortogonales de un volumen de ejemplo de MATLAB.

6.2 Más allá de la CT

Transformadas tipo Radon también se usan en:

- **PET** (detección coincidente de γ),
- **Tomografía óptica de proyección**,
- **Microscopía electrónica** con tilt-series,
- **Lectores de códigos de barras** (Radon 1-D).

La investigación actual fusiona aprendizaje profundo con FBP para minimizar la dosis de radiación manteniendo calidad diagnóstica.

7 Conclusión

Las pruebas analíticas y numéricas mostraron cómo las integrales de línea codifican la estructura y cómo la retroproyección filtrada reconstruye imágenes que orientan decisiones clínicas. La transformada de Radon ejemplifica la sinergia entre geometría, análisis y computación aplicada a la salud.

References

- [1] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl.* **69** (1917), 262–277.
- [2] A. M. Cormack y G. N. Hounsfield, *Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1979*, Nobel Foundation, Estocolmo, 1980.