

目录

1	问题描述	2
1.1	类自然语言描述	2
1.2	一种形式化描述	2
2	研究现状与对比算法	3
2.1	非随机近似算法	3
2.1.1	最近邻点算法	3
2.1.2	克里斯托菲德斯算法	4
2.1.3	2-OPT 改进算法	7
2.2	随机型近似算法	9
2.2.1	王磊算法	9
2.2.2	模拟退火	10
3	遗传算法及改进策略	11
3.1	传统的遗传算法	11
3.2	改进的遗传算法	12
4	实验设置与测试结果	14
4.1	数据集与超参数	14
4.2	实验结果	14

求解旅行商问题的拟物拟人算法研究

杜睿

摘要

旅行商问题是一个典型的 NP 难度问题，虽易于描述但无法在多项式时间内求得最优解。近年来，国内外研究者设计各种近似算法（尤其是进化算法）期望求解该问题。

对于组合优化问题，有两条主线。第一条是如何表达可行解与解空间，语义（表现型）和存储（基因型）可以有所不同。第二条是如何平衡局部搜索与跳坑策略，平衡开采与探索：如果开采不足，收敛性不好；如果探索不够，容易早熟，陷入局部最优解。

本文提出了改进的遗传算法用于求解旅行商问题：在种群的初始化阶段发扬“继承”策略，减少迭代次数并保留种群多样性；在变异部分，在 K-OPT 的基础上，设计了一种基于“贪婪插入”的算子；同时，在选择操作中弃用轮盘赌方法，改用排位等级法。

大量实验表明，提出的算法在求解质量和求解速度上具有一定的优势。

1 问题描述

1.1 类自然语言描述

给定 n 个城市，对这 n 个城市中的每两个城市来说，从一个城市到另一个城市所走的路程是已知的正实数（符合三角形三边关系定则），其中 n 是已知的正整数， $n \geq 3$ 。这 n 个城市的全排列共有 $n!$ 个。每一个这 n 个城市的全排列都恰好对应着一种走法：从全排列中的第一个城市走到第二个城市， \dots ，从全排列中的第 $n-1$ 个城市走到第 n 个城市，从全排列中的第 n 个城市回到第一个城市。要求给出一个这 n 个城市的全排列 σ ，使得在 $n!$ 个全排列中，全排列 σ 对应的走法所走的路程是最短的（严格来讲，由于起点任意、顺逆时针等价，问题复杂度为 $\frac{(n-1)!}{2}$ ）。

1.2 一种形式化描述

给定一个有向完全图 $G = (V, A)$ ，其中集合 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是顶点集合，每个顶点代表一个城市， n 是顶点数（ $n \geq 3$ ），集合 $E = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}$ 是有向边集合。

c_{ij} 是有向边 (v_i, v_j) 的长度 (权值), c_{ij} 是已知的正实数, 其中 $(v_i, v_j) \in E$ 。集合 Σ 是顶点全排列的集合, 共有 $n!$ 元素。 σ 是所有顶点的一个全排列: $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, $\sigma \in \Sigma$, $\sigma(i) \in V (1 \leq i \leq n)$ 。 σ 对应着一条历经所有顶点的回路: 从顶点 $\sigma(1)$ 走到顶点 $\sigma(2)$, \dots , 从顶点 $\sigma(n-1)$ 走到顶点 $\sigma(n)$, 从顶点 $\sigma(n)$ 回到顶点 $\sigma(1)$ 。

全排列 σ 所对应的回路的长度记为 $L(\sigma)$, $L(\sigma) = \sum_{i=2}^n c_{\sigma(i-1)\sigma(i)} + c_{\sigma(n)\sigma(1)}$ 。

目标是给出所有顶点的一个全排列 σ^* , 使得 $L(\sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma)$ 。

每一对顶点 v_i 和 v_j 来说, 都有 $c_{v_i v_j}$ 成立, 那么称问题是对称的; 否则称问题是非对称的。后文统一讨论对称的旅行商问题, 不对两者进行额外区分。

2 研究现状与对比算法

求解旅行商问题的算法大体可分为两类: 确切算法和近似算法。

1. 确切算法保证给出最优解, 但由于“组合爆炸”, 其仅可用于计算较小规模实例。
2. 近似算法, 或许有可能在短时间内, 给出相当接近最优解的近似解。其中, 非随机性近似算法包括构建式启发/贪婪算法, 克里斯托菲德斯算法等; 随机性近似算法包括随机局域搜索、模拟退火、遗传算法、粒子群算法等。

本节接下来介绍对比算法, 包括非随机近似算法 (最近邻点算法、克里斯托菲德斯算法以及 2-OPT 改进算法) 和随机近似算法 (王磊算法、模拟退火算法)。

2.1 非随机近似算法

2.1.1 最近邻点算法

顾名思义, 在选定一个起始城市 s 后, 每次贪婪地选择距离当前城市最近的未访问城市 v 作为下一站; 依次类推, 直至将所有城市访问一遍, 最后回到出发城市 s 。伪码如下:

Algorithm 1: GreedyNearestNeighbor Algorithm

input : $V = \{v_1, \dots, v_n\}, dist(\cdot, \cdot), L(\cdot), s \in V$

output: σ^*, L

```

1  $tour \leftarrow [s], visited \leftarrow \{s\}, L \leftarrow 0;$ 
2 while  $|tour| < n$  do
3    $v \leftarrow \arg \min_{u \in V \setminus visited} dist(last(tour), u);$ 
4    $tour.append(v), visited \leftarrow visited \cup \{v\};$ 
5  $\sigma^* \leftarrow tour, L \leftarrow L(\sigma^*);$ 
```

2.1.2 克里斯托菲德斯算法

即使最差情况下，克里斯托菲德斯算法所得回路长度不会超过最优回路长度的 1.5 倍。求最小值问题，评价近似算法的一个指标是近似比：设 Opt 是最优值， x 表示某近似算法给出的一个值， $Opt \leq x \leq \alpha \times Opt$ ， α 记为该算法的近似比，可用于评价算法优劣。元启发算法虽然有可能得出比较好的近似解，但往往不涉及在最差情况下的效率证明。

首先，引入近似比为 2 的算法 (2-Approximation)：

- 定义： S 代表一系列边（允许重边）， $c(S)$ 代表各边权重（长度）之和。
- 定义： H_G^* 为无向多重图 G 上，长度最短的哈密尔顿回路（Hamiltonian Cycle），途中经过所有点且只经过一次。
- 构造最小生成树 T ，根据最小权生成树定义， $c(H_G^*) \geq c(H_G^* - e) \geq c(T)$ 。
- 按深度优先搜索次序记录回路 C ，下探一次，回溯一次，因此 $c(C) = 2 \times c(T)$ 。
- 搭桥（short-cut/bypass）略过重复访问的点得到符合问题描述的新回路 C' （最后回到起点），例如，1, 2, 3, 4, 5, 6..., 1。

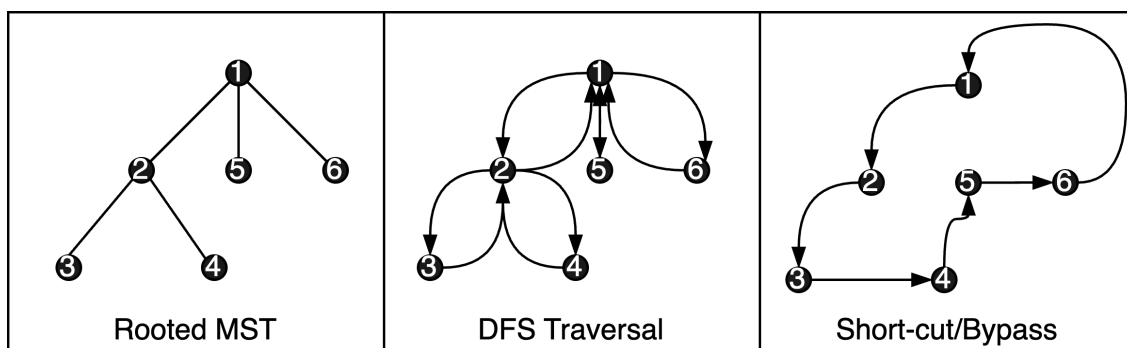


图 1: 近似比为 2 的算法（步骤）

证明如下：

- 由 e、三角形三条边关系定则， $c(C') \leq c(C)$ ；
- 由 c， $c(H_G^*) \geq c(H_G^* - e) \geq c(T)$ ；
- 由 d， $c(C) = 2 \times c(T)$ ；
- 故 $c(C') \leq 2c(H_G^*)$ ；
- 因此，该近似算法所得解，最多也不会超过最优解的 2 倍。

然后仍基于最小生成树，设法减小“每边下探一次，回溯一次”带来的额外开销，导出理论近似比为 1.5 的算法。期待一笔画、不重边地遍历所有顶点，可以将问题转换成“欧拉回路”问题。无向图存在欧拉回路的充要条件为：该图为连通图，且所有顶点度数均为偶数。倘若‘奇度数’顶点为偶数个（证明见下），那么可以通过将其两两匹配，为每一个顶点都“附赠”一个度，这样便可以满足“顶点度数均为偶数”条件。

- (a) 定义： S 代表一系列边（允许重边）， $c(S)$ 代表各边权重（长度）之和。
- (b) 定义： H_G^* 为无向多重图 G 上，长度最短的哈密尔顿回路（Hamiltonian Cycle），即途中经过所有点且只经过一次。
- (c) 定义：假设 S 为无向多重图 G 上的导出子图，在 S 上长度最短的哈密尔顿回路记为 H_S^* 。根据三角形三边关系定则易证， $c(H_S^*) \leq c(H_G^*)$ 。
- (d) 构造最小生成树 T ，根据最小权生成树定义， $c(H_G^*) \geq c(H_G^* - e) \geq c(T)$ 。
- (e) 分离在 T 上度数为奇数的点，生成导出子图 S （根据握手定理，给定无向图 $G = (V, E)$ ，一条边贡献 2 度，故有 $\sum \deg G(v) = 2|E|$ ；除开度数为偶数的顶点所贡献的度数，推论可知，度数为奇数顶点数有偶数个）；
- (f) 构造 S 的最小权完美匹配 M ，构造多重图 $G' = T \cup M$ （此时每个顶点均为偶数度，故存在欧拉回路）；
- (g) 生成 G' 的欧拉回路 C ， $c(C) = c(T) + c(M)$ ；
- (h) 搭桥（short-cut/bypass）略过重复访问的点（起点终点不删）得到符合问题描述的新回路 C' （最后回到起点）。

证明：

- 由 e、三角形三边关系定则， $c(C') \leq c(C)$ ；
- 由 d， $c(H_G^*) \geq c(H_G^* - e) \geq c(T)$ ；
- 由 g， $c(C) = c(T) + c(M)$ ；
- 由 f、c， $c(M) + c(M) \leq c(M1) + c(M2) = c(H_S^*) \leq c(H_G^*)$ ；
- 故 $c(C') \leq c(T) + c(M) \leq c(H_G^*) + \frac{1}{2}c(H_G^*)$ ；
- 即得证。

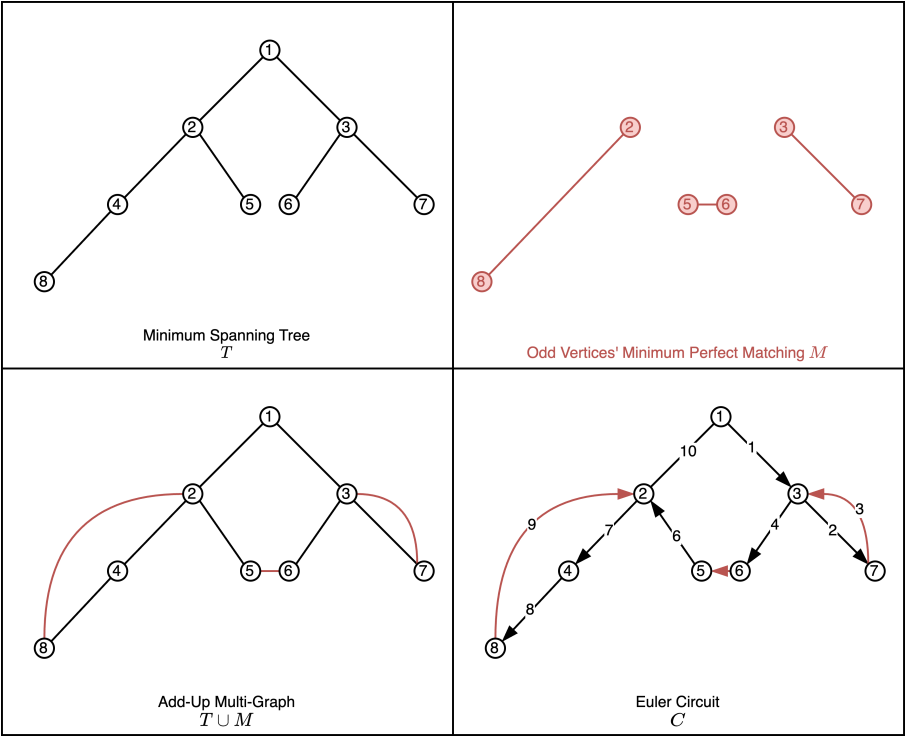


图 2: 克里斯托菲德斯算法 (步骤)

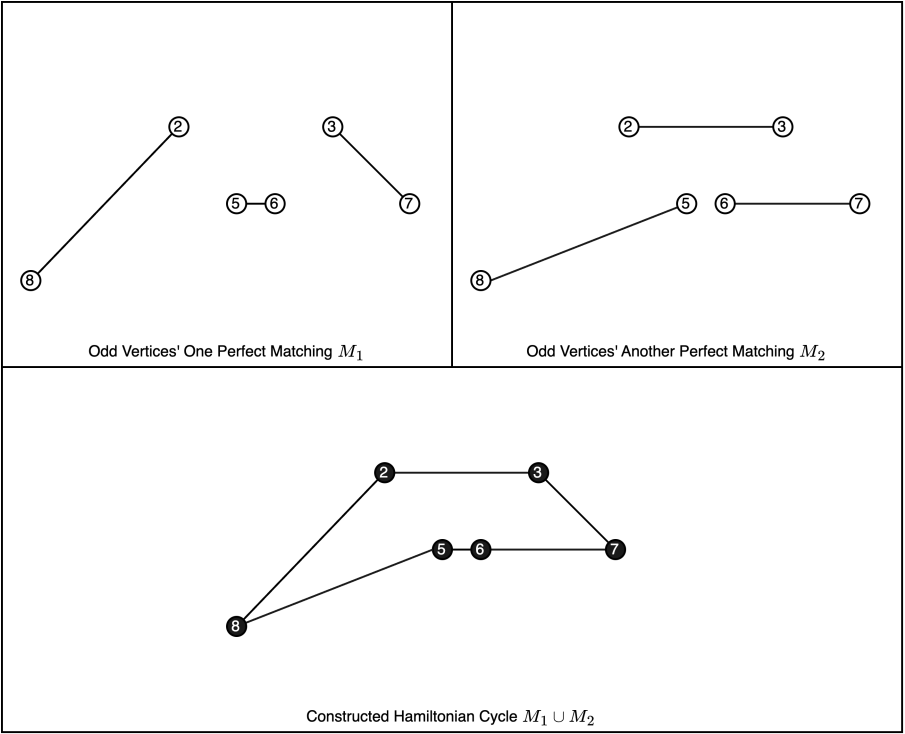


图 3: 最小权完美匹配 (举例)

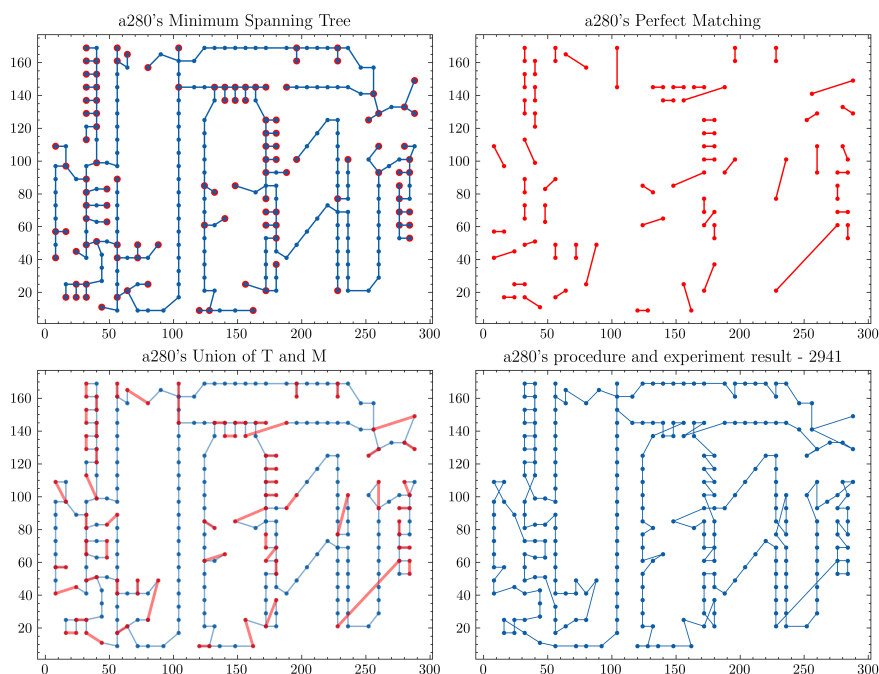


图 4: 克里斯托菲德斯算法 (实例)

2.1.3 2-OPT 改进算法

“如果题目数据使用欧几里得距离，那么最优路线必定不会自交”。基于这一观察，有学者倡导使用“改进”算法，即对于一条可行回路查漏补缺对其进行细微调整。

“知错能改，善莫大焉”。“怎么改”对应着一种“邻域操作”(函数、变换、系统、算子)。

解空间中的一个巡回旅行路线直接或间接对应一个全排列 σ ，若将其视作 n 维空间中的一个点，其邻域 σ' 操作有很多种，如插入、块插入、块反转、点对换、块交换、边重组等等。边重组中，最著名的是 2-交换 (2-OPT)、3-交换 (3-OPT)。2-交换的步骤就是删除路线中的两条边，用另外两条更短的边重新连接，使路径再次连为一体。反复使用 2-交换算子改进路线，可以在很大程度上改进“虎头蛇尾”、“目光短浅”的回路路线。

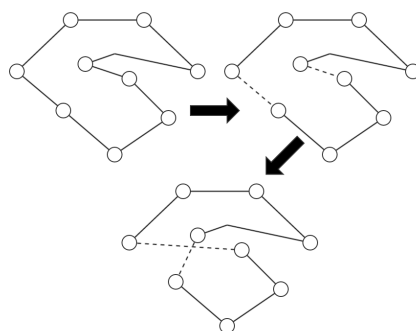


图 5: 2-OPT (图例)

2-OPT 改进算法伪代码如下：

Algorithm 2: 2-OPT Algorithm

input : $V = \{v_1, \dots, v_n\}, \text{dist}(\cdot, \cdot), L(\cdot), \sigma$
output: σ^*

```

1  $length \leftarrow L(\sigma)$ ;
2 repeat
3    $improved \leftarrow \text{False}$ ;
4   for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 3$  do
5     for  $j \leftarrow i + 2$  to  $n$  do
6        $\sigma' \leftarrow \sigma$ ;
7        $\sigma'[i + 1 \dots j] \leftarrow \text{reverse}(\text{tour}'[i + 1 \dots j])$ ;
8        $length' \leftarrow L(\sigma')$ ;
9       if  $length' < length$  then
10         $\sigma \leftarrow \sigma'$ ;
11         $length \leftarrow length'$ ;
12         $improved \leftarrow \text{True}$ ;
13 until  $\neg improved$ ;
14  $\sigma^* \leftarrow \sigma$ ;
```

3-OPT 改进算法与之类似，但是可能的情况更多：

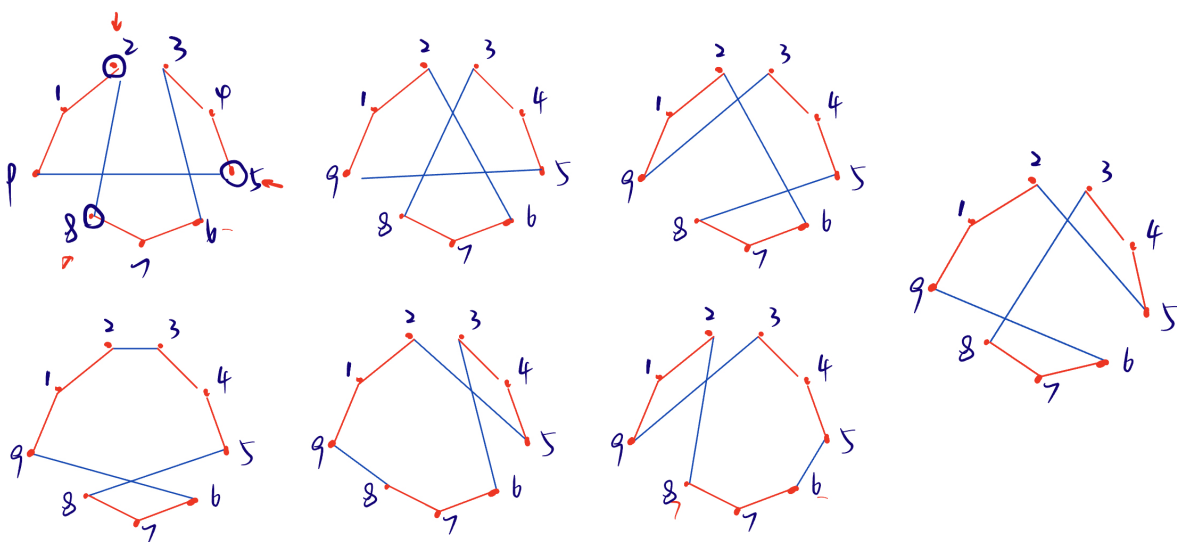


图 6: 3-OPT (图例)

2.2 随机型近似算法

2.2.1 王磊算法

王磊老师在课上跟学生说过一个随机型近似算法（王磊算法），基本算法 A_1 描述如下：

输入： 指导序列 γ ， γ 是所有顶点的一个全排列；

开局： 用 γ 前 3 个点绘制外接凸多边形（三角形），构成初始回路 $\sigma = (\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3))$ ；

迭代： 每次从当前格局向新格局演化时，取出下一个点，按照使得新的部分回路长度尽量短的贪心策略，将其插入至 σ 合适的位置；

停机： 直至产生 n 个点的回路 σ ，算法结束，输出 σ 。

Algorithm 3: Generate Tour from a Conductor

input : $V = \{v_1, \dots, v_n\}, dist(\cdot, \cdot), \gamma$ a permutation of V
output: σ the tour

```

1  $\sigma \leftarrow (\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3))$ ;
2 for  $i \leftarrow 4$  to  $n$  do
3    $best\_idx \leftarrow \arg \min_{j \in \{1, \dots, |\sigma|\}} L(\sigma_{1:j}) + dist(\gamma(i), \sigma(j)) + L(\sigma_{j:|\sigma|}) - L(\sigma)$ ;
4    $\sigma \leftarrow (\sigma_{1:best\_idx}, \gamma(i), \sigma_{best\_idx+1:|\sigma|})$ ;
```

对所有指导序列 $\gamma \in \Gamma$ ，目标是 $\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in \Gamma} L(A_1(\gamma))$ 。据此，王磊又提出算法 A_2 ：

初始格局： 初始化 γ ，通过 A_1 算法指导获得回路 $\sigma = A_1(\gamma)$ ，以及长度 $l = L(\sigma)$ ；

邻域搜索： 邻域变换得到 γ' 、 σ' 及 l' ，若 $l' < l$ ，依照最陡下降法，更新格局 $\gamma \leftarrow \gamma'$ ；

跳坑策略 当 γ 位于局部最优，即几乎尝试所有邻域都无法改善目标函数时，重新随机初始化 γ 或者采用大步长算子（如块移动、块对换、块插入）对 γ 进行变换。

Algorithm 4: WangLei Algorithm

input : $V, dist(\cdot, \cdot), L(\cdot), epoch, early_stop$
 $permutation(\cdot), transform(\cdot), shuffle(\cdot)$
output: σ, l

```

1  $\gamma \leftarrow permutation(V)$ ;  $\sigma \leftarrow A_1(\gamma)$ ;  $l \leftarrow L(\sigma)$ ;
2 for  $e \leftarrow 1$  to  $epoch$  do
3    $\gamma' \leftarrow transform(\gamma)$ ;  $\sigma' \leftarrow A_1(\gamma')$ ;  $l' \leftarrow L(\sigma')$ ;
4   if  $l' < l$  then
5      $\gamma \leftarrow \gamma'$ ;  $\sigma \leftarrow \sigma'$ ;  $l \leftarrow l'$ ;
6   if no improvement for early_stop iterations then
7      $\gamma \leftarrow permutation(V)$  or  $\gamma \leftarrow shuffle(\gamma)$ ;
```

王磊算法的创新和启发意义主要有以下三点：

1. 传统启发算法求解旅行商问题，几乎全部都是直接在回路 σ 上进行邻域扰动，获得新解。而王磊算法则提出了 $\gamma \rightarrow \sigma$ 的映射算法 A_1 ，这相当于对原有解空间进行了“扭曲”，将求“回路”的原问题转化为了求“指导顺序”的新问题。

最优化理论中，原始问题很难求解时，往往通过引入对偶问题的方式，简化对原始问题的求解。在机器学习中，也有代替函数、核函数作为例子。但是，我们不禁要问，对于所有的“指导序列” $\gamma \in \Gamma$ ，它们所生成的所有回路集合 Σ^* ，是否包含了最优回路 σ^* ？即，通过指导序列将问题转换，问题转换前后是否仍然具有“一致性”？

2. 邻域搜索和跳坑策略思想并不高深。局部极小值的定义来自于函数求极值，跳坑则更有烟火气：如果你已经期末总评满分了，就要跳坑，到更有希望的学府继续深造。

无论是回路 σ 还是指导序列 γ 都是高维空间的一个点，若其邻域中的“点”所对应的回路长度都不比中心点短，则该中心点是局部极小值点；当邻域搜索陷入局部极小值点时，就应该采用“跳坑策略”，进行随机扰动，跳出陷阱，继续邻域搜索。

这其中的问题有二：一是“随机扰动”算子和所谓“邻域算子”在本质上究竟有何不同？设计的“邻域算子”真的在逻辑上只是轻微的扰动吗？二是随着邻域算子设计的不同，邻域中的“点”随着维度的增大，个数可能比想象中要多得多，因此有时候又不得不采用固定次数的方式来执行邻域搜索，导致邻域开采不足。邻域搜索对应“变异”、“开采”，而跳坑策略则对应“探索”，可以说所有的最优化算法都要考虑这两者的平衡。

3. 生成回路算法本身也具有烟火气。想象一下，借一个扎头发的橡皮筋，套住几个点；然后采用贪心策略，将其余点加入回路。

传统的最近邻点贪心策略是，最后一步方能连成回路，这就导致目光浅显、虎头蛇尾；而如果是在一个成形的“回路”中添加，每次添加评价的都直接是回路的全长，则能一定程度上缓解“短视”问题。这启发我们同样是贪心策略，但是如何运用，运用的好不好是可以评价的，是有优劣的。

2.2.2 模拟退火

事实上，人们从物理世界状态演化、自然界各种现象、千百年来生存斗争经验获得启发，以仿生拟人拟物途径设计了各种算法。模拟退火是一种，具有自然背景且实现简单。

模拟退火并没有显式地将跳坑策略（探索）和邻域搜索（开采）分成两阶段看待；它的基本思想是，以概率接受劣解，且接受劣解的概率随迭代次数递减直至无限趋近于零。如果只接受优解，则容易早熟，多样性不足，易于陷入局部最优，因此需要接受劣解；如果一味接受劣解，则无法保证收敛性，因此需要控制接受劣解的概率；模拟退火算法中，随着迭代次数递增，温度越低，对劣解的容忍程度越低，可以保证算法不至于震荡，可以收敛。

Algorithm 5: SimulatedAnnealing Algorithm

input : $V, dist(\cdot, \cdot), L(\cdot), transform(\cdot)$
 $T, \epsilon, \alpha, time_out, early_stop$
output: σ^*, L^*

```

1 start_time  $\leftarrow$  current time;
2 while current time - start_time < time_out do
3    $\sigma \leftarrow$  permutation( $V$ );
4    $L \leftarrow L(\sigma)$ ;
5   while  $T > \epsilon$  do
6     for step  $\leftarrow$  1 to early_stop do
7        $\sigma' \leftarrow$  transform( $\sigma$ );  $L' \leftarrow L(\sigma')$ ;  $\Delta L \leftarrow L' - L$ ;
8       if  $\Delta L < 0$  or random(0, 1)  $\leq e^{\frac{-\Delta L}{T}}$  then
9          $\sigma \leftarrow \sigma'$ ;  $L \leftarrow L'$ ;
10       $T \leftarrow T \times \alpha$ ;
11  $\sigma^* \leftarrow \sigma, L^* \leftarrow L$ ;

```

3 遗传算法及改进策略

3.1 传统的遗传算法

Algorithm 6: Genetic Algorithm for TSP

input : $V, epoch, early_stop, population_size, pc, pm$
output: σ^*, L^*

```

1 初始化种群;
2 for  $e \leftarrow 1$  to epoch do
3   初始化当前最佳长度为无穷大;
4   for step  $\leftarrow 1$  to early_stop do
5     选择操作: 根据适应度选择当前种群中的一些个体;
6     交叉操作: 根据交叉概率 pc 结合选中的个体产生后代;
7     变异操作: 根据变异概率 pm 改变某些个体的特征;
8     如果找到更优的解, 则更新当前最佳长度;
9   重新初始化种群;
10  $\sigma^* \leftarrow$  找到的最佳解;  $L^* \leftarrow$  最佳解的长度;

```

无论是基于邻域搜索和拟人策略跳坑的王磊算法，还是从淬火物理结晶过程获得启发的模拟退火算法，都是基于“个体”的启发算法。而遗传算法，从生物学获得启发，将“个体”扩展至“种群”；除邻域操作（也成“变异”算子）外，新增了“交叉”操作，将“个体理性”和“群体理性”进行结合。传统的遗传算法求解旅行商问题的具体细节为：

编码 将执行变异操作的个体直接编码为城市序号的全排列 σ ；

适应 采用 $\frac{1}{L(\sigma)}$ 表示解的优劣，适应度越大，被选择保留的概率越高；

选择 采用轮盘赌，计算每条染色体的被选择概率和累计概率，再根据一个随机数确定要保留的染色体；选择操作是遗传算法的核心，一方面，要保证收敛质量好，即回路长度短，另一方面，要保证种群有足够的多样性，避免陷入局部最优的困境；

交叉 交叉操作的目的是，集合不同回路的优良回路特征，常用有顺序交叉和部分映射交叉。

变异 通过邻域变换对种群中的个体（回路）进行扰动；遗传算法中，变异概率通常非常小。

3.2 改进的遗传算法

在编码部分，仍采用整数回路直接编码；在交叉部分，沿用顺序交叉和部分映射交叉。然后，对传统遗传算法的初始化、选择、变异操作做出如下改进，后文称为 **GIGA**：

初始 发扬“继承”策略，在初始化阶段，将“2-OPT”和“最近邻点”算法的结果回路作为初始化种群的一部分；这样可以极大的减少迭代次数，在交叉过程中吸取各个算法最优解的优良局部特征，而且保证了解的收敛性，使得其回路长度最大不会超过最优回路的 1.5 倍，最差仍有理论保证兜底。其实，这变相地把“遗传算法”视作一种“群智融合”和“回路改进”方法，通过融合、修补、改进已有的解来使目标值更理想。

选择 在选择过程中，弃用轮盘赌法。轮盘赌法的缺陷是，当适应度相似时，选择概率值相近，不一定保证选择当前种群中回路长度最小的个体，这使得算法收敛困难；改用排位等级法，以回路长度从小到达排序，以排序等级确定选择概率，缓解了适应度相近时选择困难的问题。

变异 在变异过程中，除了使用传统的算子外（点插入、块插入、块反转、点对换、块对换、2-OPT、3-OPT），我从王磊 A_1 算法中获得启发，设计了一个全新的变异算子：贪婪插入。采用“最陡下降法”，我们对于一个已知回路 σ ，随机剔除 N 个城市，然后依序采取贪心策略将被剔除的点添加到回路中。 N 取自一个概率分布，这样能够保证剔除城市个数可以动态变化；而剔除策略，可以分为单点剔除和随机剔除。

下面给出种群初始化的伪代码:

Algorithm 7: Population Initialization for Genetic Algorithm

input : $V, size, init_population$
output: Initialized population P

```

1  $P \leftarrow init\_population;$ 
2 while  $|P| < size$  do
3    $P.append(permutation(V));$ 

```

下面给出选择操作的伪代码:

Algorithm 8: Selection Operation in Genetic Algorithm

```

1 Function  $Select(P, L, size, C, operator):$ 
2    $lengths \leftarrow [L(individual) \text{ for each } individual \in P];$ 
3    $order \leftarrow \text{sort indices of } lengths \text{ in ascending order};$ 
4    $selected \leftarrow [\text{best seen tour}];$ 
5   while  $|selected| < size$  do
6      $idx \leftarrow 0, target \leftarrow 1;$ 
7     while  $random(0, 1) < target \times (1 - C)$  do
8        $idx \leftarrow idx + 1;$ 
9        $target \leftarrow target \times C;$ 
10     $selected.append(P[order[idx]]);$ 
11  return  $selected;$ 

```

下面给出变异算子的伪代码:

Algorithm 9: Greedy Insert Operator for Genetic Algorithm

input : $\sigma, dist(\cdot, \cdot), times, dimension$
output: Modified σ

```

1 if  $random(0, 1) < 0.5$  then
2    $conductor \leftarrow \text{remove } times \text{ random elements from } \sigma;$ 
3 else
4    $pivot \leftarrow \text{random integer}(1, dimension - times - 1);$ 
5    $conductor \leftarrow \text{remove } times \text{ elements starting at } pivot \text{ from } \sigma;$ 
6 foreach  $vertex \in conductor$  do
7    $best\_idx \leftarrow \arg \min_{j \in \{1, \dots, |\sigma|\}} L(\sigma_{1:j}) + dist(vertex, \sigma(j)) + L(\sigma_{j:|\sigma|}) - L(\sigma);$ 
8    $\sigma \leftarrow (\sigma_{1:best\_idx}, vertex, \sigma_{best\_idx+1:|\sigma|});$ 

```

4 实验设置与测试结果

4.1 数据集与超参数

TSPLIB (<http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/>) 中公布了旅行商问题的 benchmark 测试数据集。以 EUC-2D 类型的测试数据集中的实例 a280 为例, a280.txt 文件开头有一段说明文字, 然后是 280 (表示点的个数), 接下来有 280 行数据, 每行数据含有 3 个数, 分别是: 当前点的序号、当前点的 x 坐标、当前点的 y 坐标。

表 1: 随机近似算法实验超参数设置

对应算法	超参数	缺省值
GreedyNearestNeighbor	<i>boost</i> , 是否随机选择一个起始城市	<i>True</i>
SimulatedAnnealing	初始温度 t , 终止温度 ϵ , 衰减系数 α	1000, 10^{-14} , 0.98
SimulatedAnnealing	重启停机参数 <i>time_out</i> , <i>early_stop</i>	1, 250
WangLeiAlgorithm	重启停机参数 <i>epoch</i> , <i>early_stop</i>	16, 250
Proposed GIGA	种群大小 <i>size</i> , 交叉概率 p_c , 变异概率 p_m	50, 1, 0.4
Proposed GIGA	选择系数 C	0.5
Proposed GIGA	重启停机参数 <i>epoch</i> , <i>early_stop</i>	6, 7500

* 提出改进的遗传算法的初始种群仅来自 2-OPT、GreedyNearestNeighbor。

4.2 实验结果

由于王磊老师是在 C 语言环境下, 选择“最快速度”编译选项, 在 CPU 主频为 3.4GHz 的微机上进行的测试; 而我对算法的实现均采用 Python 语言编程, 不具有可比较性, 因此, 我弃用了王磊老师于《专业方向综合实践验收的问题》中提到的报道结果, 而是用 Python 复现的王磊算法进行比较。

在 Python 环境中对算法进行编程实现, 对本文提出的改进的遗传算法进行了测试。

选取城市数小于等于 1000 中 27 个 benchmark 测试用例进行测试, 两点间距离四舍五入取整, 每个实例计算 10 次。下面是 10 次计算所得回路长度的最小值、平均值和平均计算时间。本文提出改进的遗传算法, 在 7 个测试用例中超过王磊算法或已求得最优解; 在剩余测试用例中, 平均回路长度不超过王磊算法的 2.03%, 最短回路长度不超过王磊算法的 2.12%; 在所有测试用例中, 与最优回路相比, 平均最小相对误差为 0.73%, 低于 1%。

代码开源在: <https://github.com/DURUI/Homework-Algorithm-TSPLIB95>。

表 2: 算法运行统计结果

	L_{OPT}	Proposed GIGA			WangLei			SimulatedAnnealing		
		L_{min}	L_{avg}	t_{avg}	L_{min}	L_{avg}	t_{avg}	L_{min}	L_{avg}	t_{avg}
a280	2579	2584[†]	2593.30[†]	312.50	2615	2653.30	380.50	2792	2890.40	43.76
berlin52	7542	7542[*]	7542.00	36.73	7542[*]	7542.00	4.79	7542[*]	7759.30	8.06
bier127	118282	120843	121648.60	97.18	118326[†]	119221.50	51.17	121173	124320.50	19.63
ch130	6110	6189	6198.00	93.35	6115[†]	6131.90	43.74	6355	6548.00	19.89
ch150	6528	6588	6588.00	112.96	6554[†]	6582.50	65.98	6938	7069.70	22.98
d198	15780	15831	15888.30	194.36	15818[†]	15860.00	141.29	16211	16464.80	30.36
eil101	629	639	641.20	473.52	633[†]	636.30	162.24	656	665.70	92.91
eil51	426	435	435.40	254.25	426[*]	427.00	31.93	429	435.60	48.15
eil76	538	546	546.00	374.14	542[†]	545.10	89.43	556	560.20	75.42
gil262	2378	2394	2402.50	459.81	2391[†]	2411.30	519.80	2541	2628.20	71.41
kroA100	21282	21282	21381.60	570.70	21282[*]	21286.00	215.12	21786	22395.20	115.93
kroA150	26524	26698	27069.70	822.14	26550[†]	26651.00	439.09	27204	28376.50	145.96
kroB100	22141	22364	22364.00	650.05	22141[*]	22241.60	190.30	22448	23028.50	131.33
kroB150	26130	26364	26535.25	844.40	26132[†]	26182.125	471.37	26505	27582.125	147.41
kroC100	20749	20983	20983.00	552.12	20749[*]	20771.90	178.92	21174	21736.00	113.07
lin105	14379	14379[*]	14508.70	147.10	14379[*]	14388.80	45.33	14464	15114.30	28.43
pr107	44303	44303[*]	44497.70	364.35	44303[*]	44330.50	112.80	45179	46623.40	74.77
pr124	59030	59030[*]	59030.00	452.88	59030[*]	59034.60	160.70	60073	61349.70	87.81
pr136	96772	96772[*]	96781.10	520.55	96795	96985.20	288.84	100677	102998.60	95.56
pr144	58537	58763	59162.80	603.83	58537[*]	58642.40	263.35	59127	60989.10	102.01
pr152	73682	73880	73880.00	597.60	73682[*]	73737.80	286.54	75208	76857.00	110.15
pr76	108159	109043	109043.00	253.17	108159[*]	108257.90	60.67	109696	111023.00	52.94
rat195	2323	2352[†]	2361.10	684.14	2363	2379.70	528.59	2495	2568.60	109.63
rat99	1211	1215	1223.10	270.03	1211[*]	1216.60	95.57	1265	1287.00	57.15
rd100	7910	7965	8093.10	120.95	7911[†]	7933.80	39.94	8064	8436.20	26.78
tsp225	3919	3957	3964.30	267.73	3955[†]	3964.40	304.48	4051	4228.50	48.96
u159	42080	42324	42686.60	174.29	42080[*]	42235.80	110.90	43668	45721.40	35.24