

Axiomas de orden

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo \mathbb{R}^+ , el cual satisface las siguientes propiedades:

12. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la suma en \mathbb{R}^+).
13. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+).
14. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones (Tricotomía):
 - i) $x \in \mathbb{R}^+$.
 - ii) $x = 0$.
 - iii) $-x \in \mathbb{R}^+$.

Lista de Ejercicios

- a) Demuestre que $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Demostración: Si $0 \in \mathbb{R}^+$ se contradice el axioma de tricotomía. □

- b) Demuestre que $1 \in \mathbb{R}^+$. (Uno es positivo).

Demostración: Consideremos los casos:

- i) $1 = 0$, pero este caso se descarta por axioma del neutro multiplicativo.
- ii) Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $(-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice la propiedad de tricotomía.

Por tanto, $1 \in \mathbb{R}^+$. □

Observación: para cualesquiera números reales a y b tenemos que $a = b$ o $a \neq b$. A su vez,

- i) Si $a = b$, entonces $a - b = 0$.
- ii) Si $a \neq b$, por tricotomía tenemos dos casos (excluyentes):
 - $a - b \in \mathbb{R}^+$.
 - $-(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$.

A partir de esta observación introducimos la siguiente **definición:**

Sean $x, y \in \mathbb{R}$,

- Si $x - y \in \mathbb{R}^+$, escribimos $y < x$ (o $x > y$).

De esta definición sigue que dados $x, y \in \mathbb{R}$, por tricotomía se verifica una y solo una de las siguientes condiciones

- i) $y < x$.
- ii) $x = y$.
- iii) $x < y$.

Notación: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, utilizaremos la notación

- $y \leq x$ (o $x \geq y$) para indicar que $y < x$ o $x = y$.
- $x < y < z$ para indicar que $x < y$ y $y < z$.

Números reales negativos

Definición: Llamaremos al conjunto $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ conjunto de los números reales negativos.

Lista de ejercicios 6 (LE6)

a) Demuestre que \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^- son conjuntos disjuntos.

Demostración: Si $\mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})) \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que

(*) $x \in \mathbb{R}^+$, y

(**) $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

De (**) sigue que $x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, $x \notin \{0\}$ y $x \notin \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (*).

Por tanto, $\mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})) = \emptyset$, es decir, \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^- son conjuntos disjuntos. \square

b) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-x \in \mathbb{R}^-$.

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Por tricotomía, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $x \neq 0$ (y por esto $-x \neq 0$). Sigue que $-x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, y por definición, $-x \in \mathbb{R}^-$.

\Leftarrow) Sea $-x \in \mathbb{R}^-$. Por definición, $-x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, por lo que, $-x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $-x \notin \{0\}$ (y por tanto $-x \neq 0$). Entonces, por tricotomía, $-(-x) = x \in \mathbb{R}^+$. \square

c) Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}^-$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^-$. (Cerradura de la suma en \mathbb{R}^-).

Demostración: Sea $x, y \in \mathbb{R}^-$. Sigue que $(-x), (-y) \in \mathbb{R}^+$, y por la cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ , $-x - y = -(x + y) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x + y \in \mathbb{R}^-$. \square

d) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $0 < x$. (Caracterización de \mathbb{R}^+).

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, notemos que $x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que denotamos como $0 < x$.

\Leftarrow) Sea $0 < x$, por definición $x - 0 = x \in \mathbb{R}^+$. \square

e) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^-$ si y solo si $x < 0$. (Caracterización de \mathbb{R}^-).

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^-$. Notemos que $-x = 0 - x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x < 0$.

\Leftarrow) Sea $x < 0$. Por definición, $0 - x = -x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x \in \mathbb{R}^-$. \square

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Transitividad).

Demostración: Por definición $(b-a), (c-b) \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ , $(b-a) + (c-b) \in \mathbb{R}^+$. De donde sigue que $(b-a) + (c-b) = b-a+c-b = c-a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. \square

b) $a < b$ si y solo si $a + c < b + c$. (Ley de cancelación de la suma en desigualdades).

Demostración:

\Rightarrow) Si $a < b$, por definición, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b - a = b - a + c - c = b + c - a - c = b + c - (a + c)$.
De este modo, $b + c - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + c$.

\Leftarrow) Si $a + c < b + c$, por definición $b + a - (a + c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b + c - (a + c) = b + c - a - c = b - a$.
De este modo, $b - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < b$. \square

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Corolario:

i) $0 < a$ si y solo si $-a < 0$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & 0 < a & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & -a < 0 & \text{Hipótesis} \\ & 0 + (-a) < a + (-a) & \text{Ley de cancelación} & & -a + a < 0 + a & \text{Ley de cancelación} \\ & -a < 0 & & & 0 < a & \end{array}$$

ii) $a < a + b$ si y solo si $0 < b$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & a < a + b & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & 0 < b & \text{Hipótesis} \\ & a - a < a + b - a & \text{Ley de cancelación} & & 0 + a < a + b & \text{Ley de cancelación} \\ & 0 < b & & & a < a + b & \end{array}$$

iii) $a + b < a$ si y solo si $b < 0$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & a + b < a & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & b < 0 & \text{Hipótesis} \\ & a + b - a < a - a & \text{Ley de cancelación} & & b + a < 0 + a & \text{Ley de cancelación} \\ & b < 0 & & & b + a < a & \end{array}$$

iv) $-a < b$ si y solo si $-b < a$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & -a < b & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & -b < a & \text{Hipótesis} \\ & -a + a - b < b + a - b & \text{Ley de cancelación} & & -b + b - a < a + b - a & \text{Ley de cancelación} \\ & -b < a & & & -a < b & \end{array}$$

v) $a < -b$ si y solo si $b < -a$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & a < -b & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & b < -a & \text{Hipótesis} \\ & a - a + b < -b - a + b & \text{Ley de cancelación} & & b - b + a < -a + -b + a & \text{Ley de cancelación} \\ & b < -a & & & a < -b & \end{array}$$

vi) $a < b$ si y solo si $-b < -a$.

$$\begin{array}{llll} \Rightarrow) & a < b & \text{Hipótesis} & \Leftarrow) & -b < -a & \text{Hipótesis} \\ & a - a - b < b - b - a & \text{Ley de cancelación} & & -b + b + a < -a + b - a & \text{Ley de cancelación} \\ & -b < -a & & & a < b & \end{array}$$

vii) Si $a < b < c$, entonces $-c < -b < -a$.

Notemos que $a < b \Rightarrow -b < -a$ y $b < c \Rightarrow -c < -b$. Es decir, $-c < -b < -a$.

c) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. (Suma *vertical* de desigualdades).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ se verifica que $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $(b - a) + (d - c) = b + d - a - c = b + d - (a + c)$. Por lo que $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$. \square

Observación: La suma *vertical* de desigualdades preserva el orden.

Corolario:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, entonces $0 < a + b$.

Por este teorema, $0 + 0 = 0 < a + b$.

ii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$.

Por este teorema, $a + b < 0 = 0 + 0$.

d) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a < b < a + b$, $a < a + b < b$, o $a + b < a < b$.

i) Si $0 < a$, por ley de cancelación, $0 + b < a + b$, por lo que $b < a + b$, y así $a < b < a + b$.

ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, por ley de cancelación,

$$\begin{array}{ll} a < 0 & 0 < b \\ a + b < 0 + b & 0 + a < b + a \\ a + b < b & a < b + a \end{array}$$

Por tanto, $a < a + b < b$.

iii) Si $b < 0$. por ley de cancelación, $b + a < 0 + a$, es decir, $a + b < a$, por lo que $a + b < a < b$.

Conclusión: Si $a < b$ y

- $0 < a$, entonces $a < b < a + b$.
- $a < 0$, entonces $a < a + b < b$.
- $b < 0$, entonces $a + b < a < b$.

e) Sea $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ac < bc$ o $bc < ac$.

i) Sea $c \in \mathbb{R}^+$. Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ se verifica que $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Sigue que $c(b - a) = cb - ca = bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$.

ii) Sea $-c \in \mathbb{R}^+$. Como $b - a \in \mathbb{R}^+$, por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Sigue que $-c(b - a) = -c(b + (-a)) = (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) = -cb + ca$. Finalmente, $-cb + ca = ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $bc < ac$.

Conclusión:

- Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$.

f) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ab < 0$ o $0 < ab$. (Ley de los signos).

Si a o b son cero, tenemos que $ab = 0$, por lo que descartamos esta posibilidad. Por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por la cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , tenemos que $0 < ab$.

ii) Sin pérdida de generalidad, si $0 < a$ y $b < 0$, tenemos que $0 < -b$, y por la cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $0 < -ab$, por lo que $ab < 0$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < -a$ y $0 < -b$, por lo que $0 < (-a)(-b) = ab$.

Conclusión:

- Por (i) y (ii), para verificar $ab < 0$, un componente debe ser mayor a cero y el otro menor a cero.
- Por (iii), para verificar $0 < ab$, ambos componentes deben ser mayores o ambos menores a cero.

g) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Punto medio).

Demostración:

$$\begin{array}{ll}
a < b & a < b \\
a + a < a + b & a + b < b + b \\
2a < a + b & a + b < 2b \\
a < \frac{a+b}{2} & \frac{a+b}{2} < b
\end{array}
\quad \square$$

Definición: Al número $\frac{a+b}{2}$ lo llamaremos el punto medio entre a y b .

Observación: $b - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - a$ (la distancia desde a y desde b al punto medio es la misma).

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{b-2a+a}{2} = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{a+b}{2} - a$$

h) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^{-1} < a$ o $a < a^{-1}$.

Para que $\exists a^{-1}$, requerimos $a \neq 0$. También, sabemos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$, pero buscamos desigualdad. Entonces, observemos los casos:

i) Si $a < -1$, entonces $1 < -a$, y por transitividad $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$, luego,

$$\begin{aligned}
1 &< -a \\
1 \cdot (-a^{-1}) &< (-a) \cdot (-a^{-1}) \\
-a^{-1} &< 1 \\
-1 &< a^{-1}
\end{aligned}$$

Por transitividad, $a < a^{-1}$.

ii) Si $-1 < a < 0$, por notación $-1 < a$ y $a < 0$, de donde sigue que $-a < 1$ y $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$.

$$\begin{aligned}
-a &< 1 \\
(-a) \cdot (-a^{-1}) &< 1 \cdot (-a^{-1}) \\
1 &< -a^{-1} \\
a^{-1} &< -1
\end{aligned}$$

Por transitividad, $a^{-1} < a$.

iii) Si $0 < a < 1$, por notación $0 < a$ y $a < 1$, de donde sigue que $0 < a^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned}
a &< 1 \\
a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\
1 &< a^{-1}
\end{aligned}$$

Por transitividad $a < a^{-1}$.

iv) Si $1 < a$, por transitividad $0 < a$, por lo que $0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}
1 &< a \\
1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\
a^{-1} &< 1
\end{aligned}$$

Por transitividad $a^{-1} < a$.

Conclusión:

- Por (i) y (iii), $a < a^{-1}$, si $a < -1$ o $0 < a < 1$.
- Por (ii) y (iv), $a^{-1} < a$, si $-1 < a < 0$ o $1 < a$.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $0 < a^{-1}$ o $a^{-1} < 0$.

- i) Sea $0 < a$. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $0 < a$, al multiplicar en desigualdades preserva el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero esto es una contradicción. Sabemos que $a^{-1} \neq 0$, ya que 0 no es inverso multiplicativo. Por tricotomía, $a^{-1} > 0$.
- ii) Sea $a < 0$. Sigue que $0 < -a$, por lo que $-a^{-1} > 0$, de donde sigue que $a^{-1} < 0$.

Conclusión:

- Si $0 < a$, entonces $0 < a^{-1}$.
 - Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.
- j) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < a^{-1}$, $0 < a^{-1} < 1$, $-1 < a^{-1} < 0$, o $a^{-1} < -1$.

- i) Sea $0 < a < 1$. Notemos que $0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} a &< 1 \\ a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\ 1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

- ii) Sea $1 < a$. Notemos que $1 < a \Rightarrow 0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &< a \\ 1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\ 0 &< a^{-1} < 1 \end{aligned}$$

- iii) Sea $-1 < a < 0$. Notemos que $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$ y $-1 < a \Rightarrow -a < 1$, por lo que $0 < -a < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &< -a^{-1} \\ a^{-1} &< -1 \end{aligned}$$

- iv) Sea $a < -1$. Notemos que $a < -1 \Rightarrow 1 < -a$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &< -a^{-1} < 1 \\ -1 &< a^{-1} < 0 \end{aligned}$$

Conclusión:

- Si $0 < a < 1$, entonces $1 < a^{-1}$.
 - Si $1 < a$, entonces $0 < a^{-1} < 1$.
 - Si $-1 < a < 0$, entonces $a^{-1} < -1$.
 - Si $a < -1$, entonces $-1 < a^{-1} < 0$.
- k) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ o $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Sabemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, pues requerimos la existencia de su inverso multiplicativo. Luego, por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

- i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por ley de los signos, $0 < ab$, por lo que $0 < \frac{1}{ab}$. Entonces, $a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} < \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{ab}$.
- ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y $0 < \frac{1}{b}$. Por transitividad, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
- iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por ley de los signos $0 < aa$, $0 < bb$ y $0 < ab$. Luego,

$$\begin{array}{ll} a < b & \text{Supuesto inicial} \\ a \cdot (ab) < b \cdot (ab) & (*) \end{array}$$

Por ley de los signos, $aa \cdot bb > 0$, de donde sigue que $\frac{1}{aa \cdot bb} > 0$. De (*) obtenemos que

$$\begin{aligned} (a \cdot (ab)) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} &< (b \cdot (ab)) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} \\ \frac{1}{b} &< \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Conclusión: Si $a < b$ y

- $0 < a$ y $0 < b$, o $a < 0$ y $b < 0$, entonces, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

l) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < \frac{a}{b}$, $0 < \frac{a}{b} < 1$, $-1 < \frac{a}{b} < 0$, o $\frac{a}{b} < -1$.

i) Si $0 < b < a$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} b &< a \\ b \cdot \frac{1}{b} &< \frac{1}{b} a \\ 1 &< \frac{a}{b} \end{aligned}$$

ii) Si $0 < a < b$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &< a < b \\ 0 \cdot \frac{1}{b} &< a \cdot \frac{1}{b} < b \cdot \frac{1}{b} \\ 0 &< \frac{a}{b} < 1 \end{aligned}$$

iii) Si $a < 0 < b$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} a &< 0 \\ a \cdot \frac{1}{b} &< 0 \cdot \frac{1}{b} \\ \frac{a}{b} &< 0 \\ 0 &< -\frac{a}{b} \end{aligned} \quad (*)$$

Del mismo modo,

$$-1$$

Por (*) y (**) se verifica que $-1 < \frac{a}{b} < 0$.

m) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < ab$, $0 < ab < 1$, $-1 < ab < 0$, o $ab < -1$.

i) Sea $1 < a$ y $1 < b$. Por ley de cancelación, $0 < a - 1$ y $0 < b - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &< (b - 1)(a - 1) \\ 0 &< (b + (-1))(a + (-1)) \\ 0 &< a(b + (-1)) + (-1)(b + (-1)) \\ 0 &< ab + (-1)a + (-1)b + (-1)(-1) \\ 0 &< ab + (-1)a + (-1)b + 1 \\ 0 &< ab + (-1)(a + b) + 1 \\ 0 &< ab - (a + b) + 1 \\ a + b &< ab + 1 \end{aligned}$$

Por la suma vertical de desigualdades, $1 + 1 < a + b$, y por transitividad, $1 + 1 < ab + 1$, de donde $1 < ab$.

ii) Sea $0 < a < 1$ y $1 < b$. Notemos que $1 < a^{-1}$, por lo que

iii) Sea $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. Notemos que $ab > 0$. Como $a < 1$, sigue que $ab < b$, y a su vez, $b < 1$, por lo que $0 < ab < 1$.

- iv) Sea $-1 < a < 0$ y $0 < b < 1$. Notemos que $ab < 0$. Como $b < 1$, sigue que $a < ab$, y a su vez $-1 < a$, por lo que $-1 < ab < 0$.
- v) Si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$. Se tiene que $-1 < a < 0 \Rightarrow a^{-1} < -1 \Rightarrow 1 < -a^{-1}$ y $-1 < b < 0 \Rightarrow b^{-1} < -1 \Rightarrow 1 < -b^{-1} \Rightarrow 0 < -b^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 1 &< -a^{-1} \\
 1 \cdot (-b^{-1}) &< (-a^{-1}) \cdot (-b^{-1}) \\
 -b^{-1} &< a^{-1}b^{-1} \\
 1 &< a^{-1}b^{-1} & 1 < -b^{-1} \\
 1 &< (ab)^{-1}
 \end{aligned}$$

Por lo que $0 < ((ab)^{-1})^{-1} < 1$, es decir, $0 < ab < 1$.

Conclusión:

- Si $1 < a$ y $1 < b$, entonces $1 < ab$.
- Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, entonces $0 < ab < 1$.
- Si $-1 < a < 0$ y $0 < b < 1$, entonces $-1 < ab < 0$.
- Si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$, entonces $0 < ab < 1$.

n) Sea $a < b$ y $c < d$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ac < bd$ o $bd < ac$.

I) Sea $0 < a < b$.

- Si $0 < c < d$, entonces $a < b \Rightarrow ac < bc$ y $c < d \Rightarrow bc < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.
- Si $c < 0 < d$, entonces $c < d \Rightarrow ac < ad$ y $a < b \Rightarrow ad < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.
- Si $c < d < 0$, entonces $a < b \Rightarrow bc < ac$ y $c < d \Rightarrow ac < ad$. Por transitividad, $bc < ad$.

II) Sea $a < 0 < b$.

- Si $0 < c < d$, entonces $a < b \Rightarrow ac < bc$ y $c < d \Rightarrow bc < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.
- Si $c < 0 < d$, entonces

o) Sea $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (Mediante).

Sabemos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. También, por definición, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$, es decir, $(bc - ad)/(bd) > 0$. Como b y d son distintos de cero, tenemos que $bd \neq 0$. Asimismo, $bc - ad \neq 0$.

Buscamos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, para lo que es necesario que

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} & \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\
 0 &< \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} & 0 &< \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \\
 &= \frac{b(a+c) - (a(b+d))}{b(b+d)} & &= \frac{c(b+d) - (d(a+c))}{d(b+d)} \\
 &= \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} & &= \frac{bc+cd-ad-cd}{d(b+d)} \\
 &= \frac{bc-ad}{b(b+d)} & &= \frac{bc-ad}{d(b+d)} \\
 &= \frac{bc-ad}{bd} \cdot \frac{d}{b+d} & &= \frac{bc-ad}{bd} \cdot \frac{b}{b+d}
 \end{aligned}$$

Como $(bc - ad)/(bd) > 0$, entonces $\frac{d}{b+d} > 0$ y $\frac{b}{b+d} > 0$. Por esto, $b + d \neq 0$. Finalmente, tenemos dos casos:

- Si $b > 0$, entonces $b + d > 0$ y $d > 0$.
- Si $b < 0$, entonces $b + d < 0$ y $d < 0$.

Por tanto, debe cumplirse que b y d deben ser ambos mayores a cero o ambos menores a cero.

Pendiente

Lista de Ejercicios 8 (LE8)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

- a) $0 \leq a^{2n} \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n \forall n \in \mathbb{N}$.
- e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a \forall n \in \mathbb{N}$.
- f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

- a) Pendiente
- b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned}0 &\leq a^1 \\0 &\leq a\end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}0 &\leq a^k \\0 \cdot a &\leq a^k \cdot a \\0 &\leq a^{k+1}\end{aligned}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned}a^1 &< b^1 \\a &< b\end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$\begin{aligned}a^k \cdot a &< b^k \cdot b \\a^{k+1} &< b^{k+1}\end{aligned}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , decimos que A está acotado:

- superiormente si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es cota superior de A .
- inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que m es cota inferior de A .
- si está acotado superior e inferiormente.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A es no vacío y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si S satisface las siguientes condiciones:

- S es cota superior de A .
- Si K es cota superior de A , entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Definición: . Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A .
- Si K es cota inferior de A , entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A .

En este caso escribimos $M = \inf(A)$

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

1. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} . A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

\Rightarrow) ads

\Leftarrow) asdf

□

2. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A . Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. □

3. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A . Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. □

4. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de \mathbb{R} es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración: i) Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S , tendríamos que $\exists V$ tal que $s_\varepsilon \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S .

ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S , por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. □

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, \mathbb{N} tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de \mathbb{N} , ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un número natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de \mathbb{N} . Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. \square

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{-a : a \in A\}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(-A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A . \square

Lista de Ejercicios

a) Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y B es acotado; se verifica que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

Demostración:

- i) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $\inf(B) \leq x$, por lo que $\inf(B)$ es cota inferior de A . Luego, $\inf(B) \leq \inf(A)$.
- ii) Sea $x \in A$. Por definición, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$, por lo que $\inf(A) \leq \sup(A)$.
- iii) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $x \leq \sup(B)$, por lo que $\sup(B)$ es cota superior de A , y por definición, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

\square

Corolario:

- i) $\inf(B) \leq \sup(A)$.
- ii) $\inf(A) \leq \sup(B)$.

b) Sea $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \\ \inf(B) &< \inf(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que $\inf(B) + \varepsilon$ no es una cota inferior de B , entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$. \square

c) Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \\ \sup(A) &< \varepsilon + \sup(A) \\ \sup(A) - \varepsilon &< \sup(A) \end{aligned}$$

Por lo que $\sup(A) - \varepsilon$ no es una cota superior de A , por lo que $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$. \square

d) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración:

Pr definición, $\sup(A) \leq b, \forall b \in B$.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$, entonces $\sup(A) - \inf(B) > 0$. Sea $\varepsilon = \sup(A) - \inf(B)$, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &< \inf(B) + \varepsilon \\ b_\varepsilon &< \inf(B) + \sup(A) - \inf(B) \\ b_\varepsilon &< \sup(A) \end{aligned} \quad \nabla$$

\square

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de \mathbb{N} , pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. \square

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

- a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.
- b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.
- c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.
- d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists! n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

- a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. \square
- b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. \square
- c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. \square

d) Definimos el conjunto $A := \{n \in \mathbb{Z} : x < n\}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \emptyset$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A . Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n &< m \leq x < n + 1 \\ n &< m < n + 1 \\ 0 &< m - n < 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en \mathbb{Z} . Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. \square

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) := \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b) .

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos el intervalo

- abierto, como $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- semicerrado-abierto, como $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- semiabierto-cerrado, como $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- cerrado, como $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Definición. Sea $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario- ε de ℓ es el conjunto $V_\varepsilon(\ell) := \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$.

Notemos que por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades,

$$|x - \ell| < \varepsilon = -\varepsilon < x - \ell < \varepsilon = \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Por lo que el vecindario- ε de ℓ es equivalente al intervalo abierto: $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

- a) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. \square

b) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. \square

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. \square

d) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración:

- i) Si $a > 1 - a$, tenemos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, o sea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.
- ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. \square

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \emptyset$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. \square

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n -ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n) , $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

- a) El límite de una sucesión convergente es único.
- b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

- a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n) . Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad (1)$$

$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \quad (2)$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \quad (3)$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} |(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2 \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. \square

- b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &< \varepsilon \\ |x_n - \ell| + |\ell| &< \varepsilon + |\ell| \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(x_n - \ell) + \ell| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \\ |x_n| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \end{aligned}$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n < n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n < n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. \square

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \emptyset$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A .

- i) Si $n = 1$, tenemos $A := \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.
- ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.
- iii) Si $n = k + 1$, tenemos $A := \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' := A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \dots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

- a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.
- b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.
- c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. □