Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Examen parcial 1
Darvid

September 3, 2022

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ distintos de 0. Usando sólo las propiedades básicas de los números reales, pruebe que si $ab^{-1} = ba^{-1}$, entonces $a^2 = b^2$.

Primero demostraremos la ley de la cancelación para la multiplicación. Si $ab = cb$ y $b \neq 0$, entonces $a = c$.

Demostración: Notemos que, por hipótesis, $b \neq 0$, por lo que $\exists b^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (ab)b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (cb)b^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= c \cdot (bb^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
&= c \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= c && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

Ahora, procedemos a resolver la proposición 1. Por hipótesis tenemos que $ab^{-1} = ba^{-1}$ y como $b \neq 0$, podemos usar lo demostrado arriba, así

$$\begin{aligned}
ab^{-1} \cdot b &= ba^{-1} \cdot b && \text{Ley de la cancelación} \\
ab^{-1} \cdot b &= a^{-1}b \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
a \cdot 1 &= a^{-1}b \cdot b && \text{Inverso multiplicativo} \\
a &= a^{-1}b \cdot b && \text{Neutro multiplicativo} \\
a \cdot a &= a^{-1}b \cdot b \cdot a && \text{Ley de la cancelación} \\
a \cdot a &= b \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \\
a \cdot a &= b \cdot b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
a \cdot a &= b \cdot b && \text{Neutro multiplicativo} \\
a^2 &= b^2 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

$\square$

2. Encuentre todos los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\frac{1 + |x|}{1 - |x + 1|} < 0$$

Sabemos que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $ab \geq 0$, y si $a < 0$ y $b < 0$, $ab > 0$, por lo que en la desigualdad propuesta, los factores deben ser, uno positivo y el otro negativo, por lo que consideraremos los casos posibles:

Caso (1) Si $0 < 1 + |x|$ y $(1 - |x+1|)^{-1} < 0$.

a) De $0 < 1 + |x|$, sigue que $-1 < |x|$, luego,

i) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x > -1$.

ii) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x > -1$, osea, $x < 1$

Así $-1 < x$ o $x < 1$.

b) De $(1 - |x+1|)^{-1} < 0$, sigue que $\frac{1}{1-|x+1|} < 0$, por notación. Sabemos que $1 > 0$, por lo que, el factor $(1 - |x+1|)$ debe ser menor a 0, entonces

i) Si $|x+1| \geq 0$, entonces $|x+1| = x+1$, por lo que $1 - |x+1| = 1 - x + 1 < 0$, de donde obtenemos que $2 < x$.

ii) Si $|x+1| < 0$, entonces $|x+1| = -x-1$, por lo que $1 - |x+1| = 1 - x - 1 < 0$, de donde obtenemos que $0 < x$.

Así $2 < x$ o $0 < x$.

Caso (2) Si $1 + |x| < 0$ y $0 < (1 - |x+1|)^{-1}$.

a) De $1 + |x| < 0$, obtenemos que $1 < |x|$, luego

i) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x > 1$.

ii) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x < 1$, por lo que $-1 < x$.

Así $x > 1$ o $-1 < x$.

b) De $0 < (1 - |x+1|)^{-1}$, sigue que $\frac{1}{1-|x+1|} > 0$, por notación, y como $1 > 0$, necesariamente el factor $1 - |x+1| > 0$, luego

i) Si $x + 1 \geq 0$, entonces $|x+1| = x+1$, por lo que $1 - |x+1| = 1 - x - 1 > 0$, de donde obtenemos que $0 > x$.

ii) Si $x < 0$, entonces $|x+1| = -x-1$, por lo que $1 - |x+1| = 1 + x + 1 > 0$, de donde obtenemos que $-2 < x$.

Así $x > 0$ o $-2 < x$.

Finalmente, debemos considerar que de la desigualdad propuesta, tenemos que $1 - |x+1| \neq 0$. De donde sigue que $1 \neq |x+1|$, luego,

i. Si $x + 1 \geq 0$, entonces $|x+1| = x + 1 \neq 1$, de donde obtenemos que $x \neq 0$.

ii. Si $x + 1 < 0$, entonces $|x+1| = -x - 1 \neq 1$, de donde obtenemos que $x \neq 2$.

Con lo anterior, hemos considerado todos los posibles valores para x en la desigualdad propuesta.

3. Pruebe que $\big||a+b-c| - |a+b| - |c|\big| = |a+b| + |c| - |a+b-c|$.

Demostración: Debemos considerar los casos para $\big||a+b-c| - |a+b| - |c|\big|$.

Caso (1) Si $|a+b-c| - |a+b| - |c| \geq 0$, entonces

$$\big||a+b-c| - |a+b| - |c|\big| = |a+b-c| - |a+b| - |c| \geq 0$$

Tomando el lado derecho de esta igualdad, tenemos que

$$|a+b-c| - |a+b| - |c| \geq 0$$

Luego, como $2 \neq 0$, podemos aplicar la ley de la multiplicación, osea

$$2\big(|a+b-c| - |a+b| - |c|\big) \geq 2 \cdot 0$$

Sabemos que del lado derecho de esta desigualdad tenemos $2 \cdot 0 = 0$, y del lado izquierdo que

$$\begin{aligned} 2|a+b-c| - 2|a+b| - 2|c| &\geq 0 && \text{P. Distributiva} \\ |a+b-c| + |a+b-c| - |a+b| - |a+b| - |c| - |c| &\geq 0 && \text{Definición} \end{aligned}$$

Ahora, sumando en ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de $|a+b-c|$, $-|a+b|$ y $-|c|$, obtenemos

$$|a+b-c|-|a+b|-|c| \geq |a+b|+|c|-|a+b-c|$$

De la desigualdad anterior tenemos dos casos, si se cumple con igualdad, la demostración está concluida, pero si se cumple que

$$|a+b-c|-|a+b|-|c| > |a+b|+|c|-|a+b-c|$$

tendríamos una contradicción, pues

$$\begin{aligned}
|a+b-c|-|a+b|-|c| &> |a+b|+|c|-|a+b-c| \\
0 &> |a+b|+|c|-|a+b-c|-|a+b-c|+|a+b|+|c| && \text{Sumando inversos aditivos} \\
0 &> 2|a+b-c|-2|a+b|-2|c| && \text{Definición} \\
0 &> 2\big(|a+b-c|-|a+b|-|c|\big) && \text{Propiedad distributiva} \\
0 &> |a+b-c|-|a+b|-|c| && \text{Multiplicando por el inv. mu}
\end{aligned}$$

Pero lo anterior contradice nuestro supuesto inicial. Por tanto, tenemos una igualdad, es decir, $\big||a+b-c|-|a+b|-|c|\big| = |a+b|+|c|-|a+b-c|$.

Caso (2) Si $|a+b-c|-|a+b|-|c| < 0$, entonces

$$\big||a+b-c|-|a+b|-|c|\big| = |a+b-c|-|a+b|-|c| < 0$$

Tomando el lado derecho de esta desigualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
|a+b-c|-|a+b|-|c| &< 0 \\
0 &< -|a+b-c|+|a+b|+|c| && \text{Sumando inversos aditivos} \\
0 &< |a+b|+|c|-|a+b-c| && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Pero la desigualdad anterior contradice nuestro supuesto, por lo que descartamos este caso.
Por tanto, $\big||a+b-c|-|a+b|-|c|\big| = |a+b|+|c|-|a+b-c|$. □

4. Pruebe por inducción que, si $a \leq -1$, entonces

$$1+\frac{n}{a} \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)^n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Procedemos por inducción sobre n.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$

$$\begin{gathered}
1+\frac{(1)}{a} \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)^{(1)} \\
1+\frac{1}{a} \leq 1+\frac{1}{a}
\end{gathered}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir, suponemos que

$$1+\frac{k}{a} \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)^k$$

iii) Probaremos que se cumple parar $n = k+1$, es decir, buscamos demostrar que

$$1 + \frac{k+1}{a} \leq \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{k+1}$$

Primero demostraremos que

$$0 \leq 1 + \frac{1}{a}$$

Retomando nuestra hipótesis, $a \leq -1$. Además, sabemos que $-1 < 0$, así, al multiplicar en ambos lados de nuestra hipótesis por -1 el orden cambia, esto es

$$\begin{aligned} (-1)(-1) &\leq (-1)a \\ 1 &\leq -a && \text{Ley de los signos} \end{aligned}$$

También, sabemos que $0 < 1$, así, por transitividad tenemos que $0 < -a$. De esto, sigue que $\frac{1}{-a} > 0$, como se demostró en clase, el inverso multiplicativo de un número positivo es mayor a 0. Luego, por notación $-\frac{1}{a} > 0$. Ahora, retomando de nueva cuenta nuestra hipótesis

$$a \leq -1$$

Al multiplicar a ambos lados por $-\frac{1}{a}$, la desigualdad se mantiene, como se demostró en clase, esto implica que

$$\begin{aligned} a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) &\leq -1 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \\ -1 &\leq \frac{1}{a} && \text{Ley de los signos} \end{aligned}$$

Luego, recordemos que $-1 < 0$, por lo que al tomar la desigualdad anterior y multiplicar por -1 en ambos lados, el orden cambia, es decir,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \cdot (-1) &\leq (-1)(-1) \\ -\frac{1}{a} &\leq 1 && \text{Le de los signos} \end{aligned}$$

De este modo, al sumar $\frac{1}{a}$ en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} &\leq 1 + \frac{1}{a} && \text{Ley de la cancelación} \\ 0 &\leq 1 + \frac{1}{a} && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

Ahora, debido a que este número $1 + \frac{1}{a}$ es mayor o igual a 0, al multiplicarlo en ambos de una desigualdad, mantiene el orden. Entonces, volvamos al problema original, retomando nuestra hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{aligned} 1 + \frac{k}{a} &\leq \left(1 + \frac{1}{a}\right)^k && \text{Hipótesis inductiva} \\ \left(1 + \frac{k}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) &\leq \left(1 + \frac{1}{a}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) && \text{Demostrado arriba} \\ \left(1 + \frac{k}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) &\leq \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{k+1} && \text{Definición} \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el lado izquierdo de esta desigualdad,

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{k}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right) &= \left(1+\frac{k}{a}\right)\cdot 1+\left(1+\frac{k}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} && \text{P. Distributiva}\\
&= \left(1+\frac{k}{a}\right)+\left(1+\frac{k}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= \left(1+\frac{k}{a}\right)+1\cdot\frac{1}{a}+\frac{k}{a}\cdot\frac{1}{a} && \text{P. Distributiva}\\
&= \left(1+\frac{k}{a}\right)+\frac{1}{a}+\frac{k}{a}\cdot\frac{1}{a} && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= \left(1+\frac{k}{a}\right)+\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2} && \text{Producto de fracciones}
\end{aligned}
$$

Entonces, la desigualdad queda como

$$
\left(1+\frac{k}{a}\right)+\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2} \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)^{k+1} \qquad (*)
$$

Finalmente, recordemos que $k \in \mathbb{N}$, lo que implica que $k \geq 1$. Así mismo, $a^2 \geq 0$, de donde sigue que $\frac{1}{a^2} > 0$. Por propiedad de los positivos, el producto de dos positivos es positivo, entonces

$$
k\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{k}{a^2} \geq 0
$$

De esta desigualdad sigue que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{k}{a^2}\\
1+\frac{k}{a}+\frac{1}{a} &\leq 1+\frac{k}{a}+\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2}\\
1+\frac{k+1}{a} &\leq 1+\frac{k}{a}+\frac{1}{a}+\frac{k}{a^2} && \text{Suma de fracciones}
\end{aligned}
$$

Luego, observemos que el lado derecho de esta desigualdad, es el lado izquierdo de (*), así por transitividad,

$$
1+\frac{k+1}{a} \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)^{k+1}
$$

$\square$