Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: $+$ (suma) y $\cdot$ (multiplicación).

Axiomas de la suma

La suma satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = x$.

5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists(-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Proposición: Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosiad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se famirialice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= a + (-a) && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

b) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= 0 + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= (-a) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -a && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$ $\square$

Corolario: $-(-a) = a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-a) + a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a = -(-a)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = (-a)$ y $y = a$.

c) $-0 = 0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + (-0) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-0) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -0 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$ $\square$

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= 0 && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$. $\square$

e) $-(a + b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a + \Big((-a) + \big(b + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big((-a) + b\big) + (-b)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big(b + (-a)\big) + (-b)\Big) && \text{Conmutatividad}\\
&= a + \Big(b + \big((-a) + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a + b)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \Longrightarrow y=-x$, hemos tomado $x=(a+b)$ y $y=(-a)+(-b)$.

Corolario: $-\big(a+(-b)\big)=b+(-a)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
-\big(a+(-b)\big) &= (-a)+\big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo}\\
&= (-a)+b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}\\
&= b+(-a) && \text{Conmutatividad} \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y)=(-x)+(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

f) Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a+0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a+\big(c+(-c)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (a+c)+(-c) && \text{Asociatividad}\\
&= (b+c)+(-c) && \text{Hipótesis}\\
&= b+\big(c+(-c)\big) && \text{Asociatividad}\\
&= b+0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= b && \text{Neutro aditivo} \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a+(-a)$ o por $b+(-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a+(-a)$ o $b+(-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.

10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= a \cdot a^{-1} && \text{Hipótesis}\\
&= 1 && \text{Inverso multiplicativo} \quad \square
\end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= a^{-1} \cdot (a \cdot b) && \text{Conmutatividad}\\
&= a^{-1} \cdot 1 && \text{Hipótesis}\\
&= a^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square
\end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1^{-1} && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= 1^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad}\\
&= 1^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square
\end{aligned}$$

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= a \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis}\\
&= b \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Asociatividad}\\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= b && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square
\end{aligned}$$

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma $+$ y multiplicación $\cdot$

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} b \cdot 0 &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Distribución} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= \big(a \cdot (0+1)\big) + (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a \cdot 0 && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Multiplicación por 0} \end{aligned}$$

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. $\square$

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo.

Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. $\square$

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \left(b \cdot (a \cdot a^{-1})\right) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists \left(a^{-1}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \land x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1 + (-1) = 1 + 0$, y por neutro aditivo $1 + (-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 1$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists (-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 + (-1) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot\Big((-1)^{-1} + 1\Big) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1}+1 = 0$, y por conmutatividad $1+(-1)^{-1} = 0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1} = -1$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = 1$ y $y = (-1)^{-1}$.

f) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= b\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= b\cdot\big(a+(-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= b\cdot a + b\cdot(-a) && \text{Distribución}\\
&= a\cdot b + (-a)\cdot b && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
0 &= a\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= a\cdot\big(b+(-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a\cdot b + a\cdot(-b) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado, $x = a\cdot b$ y $y = (-a)\cdot b$, por una parte y $y = a\cdot(-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= a\cdot\big(-(-b)\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= a\cdot b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}
\end{aligned}
$$
$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = x\cdot(-y)$, hemos tomado $x = a$ y $y = (-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1)\cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot a^{-1} &= -(1\cdot a^{-1}) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\big(a^{-1}\big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
-(a^{-1}) &= \big(-(a^{-1})\big)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= -\Big(\big(a^{-1}\big)\cdot 1\Big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\Big(a^{-1}\Big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$
$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$, hemos tomado $x = 1$ y $y = a^{-1}$, por una parte, y $x = (a^{-1})$ y $y = 1$, por la otra.

Notación

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x - y$ a la suma $x + (-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x \cdot y^{-1}$.

  En particular, $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$.

  Es inmediato que si $w \neq 0$, entonces $\frac{w}{w} = w \cdot w^{-1} = 1$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x \cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} && \text{Notación} \\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot \left(1 \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \frac{1}{b} && \text{Notación} \qquad \square
\end{aligned}$$

b) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot \left(c \cdot b^{-1}\right) && \text{Notación} \\
&= (ac) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{ac}{b} && \text{Notación} \qquad \square
\end{aligned}$$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) && \text{Notación} \\
&= a \cdot \left(b^{-1} \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \left(\left(b^{-1} \cdot c\right) \cdot d^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \left(\left(c \cdot b^{-1}\right) \cdot d^{-1}\right) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot \left(c \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot \left(c \cdot (b \cdot d)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos} \\
&= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{ac}{bd} && \text{Notación} \qquad \square
\end{aligned}$$

d) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$. (Cancelación de factores).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b}\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= \frac{a}{b}\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c} && \text{Notación}\\
&= \frac{ac}{b\cdot c} && \text{Multiplicación de fracciones} \quad \square
\end{aligned}$$

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a\cdot b^{-1}\right)}{\left(c\cdot d^{-1}\right)} && \text{Notación}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Notación}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot\left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot d\right) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(d\cdot c^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} && \text{Notación}\\
&= \frac{ad}{bc} && \text{Multiplicación de fracciones} \quad \square
\end{aligned}$$

Corolario: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a, b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\
&= \frac{1^{-1}}{\frac{a}{b}} && \text{Uno es inverso multiplicativo}\\
&= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\
&= \frac{1\cdot b}{1\cdot a} && \text{Teorema}\\
&= \frac{b}{a} && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square
\end{aligned}$$

f) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a\pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma con denominador común).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c} &= \left(a\cdot c^{-1}\right)\pm\left(b\cdot c^{-1}\right) && \text{Notación}\\
&= \left(c^{-1}\cdot a\right)\pm\left(c^{-1}\cdot b\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= c^{-1}\cdot(a\pm b) && \text{Distribución}\\
&= (a\pm b)\cdot c^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{a\pm b}{c} && \text{Notación} \quad \square
\end{aligned}$$

g) Si $b, d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \text{(Suma de fracciones)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} && \text{Cancelación de factores} \\
&= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{ad \pm cb}{bd} && \text{Suma con denominador común}
\end{aligned}$$

$\square$

h) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{-a}{b} &= (-a) \cdot b^{-1} && \text{Notación} & \frac{a}{-b} &= a \cdot (-b)^{-1} && \text{Notación} \\
&= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Mult. Inv. aditivo} & &= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Mult. Inv. aditivo} \\
&= -\frac{a}{b} && \text{Notación} & &= -\frac{a}{b} && \text{Notación} \quad \square
\end{aligned}$$

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists (-b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b \neq 0$, por lo que $-b \neq 0$.

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a, b y c.

i. $(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c$ **iv.** $(a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b$ **vii.** $c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a)$ **x.** $b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a)$

ii. $a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c)$ **v.** $(c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b$ **viii.** $(c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a$ **xi.** $b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c)$

iii. $a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b)$ **vi.** $c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b)$ **ix.** $(b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a$ **xii.** $(b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$$
\begin{aligned}
(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c &= a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c) && \text{Asociatividad} && \text{Formas (i) y (ii)}\\
&= a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (iii)}\\
&= (a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b && \text{Asociatividad} && \text{Forma (iv)}\\
&= (c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (v)}\\
&= c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (vi)}\\
&= c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (vii)}\\
&= (c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a && \text{Asociatividad} && \text{Forma (viii)}\\
&= (b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (ix)}\\
&= b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (x)}\\
&= b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (xi)}\\
&= (b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c && \text{Asociatividad} && \text{Forma (xii)}
\end{aligned}
$$

A partir de esta igualdad (y otras probadas anteriormente) introducimos la siguiente **notación:**

- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x + y + z$ a la suma de estos.
- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo xyz a la multiplicación de estos.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de $(-x) \cdot y$, $-(x \cdot y)$ o $x \cdot (-y)$.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x)\cdot y = -(x\cdot y) = x\cdot(-y)$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1}.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.
- Al número $1 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 2. Al número $2 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 3...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindimos de ella.

Un campo finito

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba:

$$\begin{aligned}
2a &= a + a && \text{Notación} \\
&= a + a + b - b && \text{Inverso aditivo} \\
&= a - b + a + b && \text{Conmutatividad} \\
&= b - a + a + b && \text{Hipótesis} \\
&= b + b && \text{Inverso aditivo} \\
&= 2b && \text{Notación}
\end{aligned}$$

A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar en las implicaciones de definir que $2 = 0$ y decidir si este hecho es contradictorio. Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto:

Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multipllicación $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.

4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.

5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists(-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.

7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.

10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

¿Qué elementos pertenecen a Ω?

Sabemos que 0 y 1 son elementos de Ω, en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, el axioma (5) garantiza la existencia de -1 y -0. De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω. Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω, es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω apartir de estos.

Con estas consideraciones, sabemos que $\left\{ 0, 1, -0, -1, 1^{-1} \right\} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que $0, 1, -1$ son miembros de Ω.

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω, $2 = 0$, es decir, que $1 + 1 = 0$, entonces $1 + 1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1+1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y su extensión sería $\Omega := \{ 0, 1 \}$.

Por lo anterior, para expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.

Notación sigma

Denotamos la suma de los elementos del conjunto A como

$$\sum_{a\in A} a$$

Ejemplos:

1. $A = \{\, 2, 1/3, 3 \,\}$

$$\sum_{a\in A} a = 2 + 1/3 + 3 = 16/3$$

2. $B = \{\, 0 \,\}$

$$\sum_{b\in B} b = 0$$

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 0 & \text{, si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

de la sumatoria. Llamamos al conjunto $\{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$, el conjunto iterable de $\sum_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera la sumatoria. El lector debería verificar este hecho.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{5} i^2 &= (2)^2 + \sum_{i=3}^{5} i^2 \\
&= 4 + (3)^2 + \sum_{i=4}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + (4)^2 + \sum_{i=5}^{5} i^2 && (*) \\
&= 4 + 9 + 16 + (5)^2 + \sum_{i=6}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + 16 + 25 + 0 \\
&= 54
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-3}^{-1} 2m &= 2(-3) + \sum_{m=-2}^{-1} 2m \\
&= -6 + 2(-2) + \sum_{m=-1}^{-1} 2m \qquad (\dagger) \\
&= -6 + -4 + 2(-1) + \sum_{m=0}^{-1} 2m \\
&= -6 + -4 + -2 + 0 \\
&= -12
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3} 2^n &= 2^0 + \sum_{n=1}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2^1 + \sum_{n=2}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + \sum_{n=3}^{3} 2^n \qquad (\ddagger) \\
&= 1 + 2 + 2^3 + \sum_{n=4}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + 8 + 0 \\
&= 11
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{j=0}^{-1} j = 0$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} &= \frac{k}{(1)+1} + \sum_{n=2}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{(2)+1} + \sum_{n=3}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{(3)+1} + \sum_{n=4}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + 0 \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \\
&= \frac{13}{12}k
\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{k}{n+1}\right) &= \sum_{k=-1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= \frac{13}{12}(-1)+\sum_{k=0}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+\frac{13}{12}(0)+\sum_{k=1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+0+\frac{13}{12}(1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

El lector notará que, en el caso en que los límites inferior y superior son iguales $(*, \dagger, \ddagger)$, la imagen de la sumatoria es el elemento típico *evaluado* en el índice, es decir, tenemos la siguiente

Observación: Si $a = b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales de la sumatoria)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + 0 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

$\square$

A partir de esto tenemos que:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 0 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

El lector notará también que la suma del primer termino hasta el ultimo es igual a la suma del ultimo hasta el primero, es decir, tenemos la siguiente

Proposición: Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Sumatoria inversa)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a)=1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + \sum_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) + f(b) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + f(a) && \text{Conmutatividad}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + f(a+k+1) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1) + f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b=a$, entonces $(b-a)=0$, y por índices iguales de la sumatoria se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n)$.
- Por definición, si $b<a$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = 0$, que en particular se verifica si $b-a \in \{\, -n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

A partir de esta observación y de la Sumatoria Inversa se tiene que

Definición: Si $(b-a) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} 0 & \text{, si } a>b \\ f(n) & \text{, si } a=b \\ f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) & \text{, si } a<b. \end{cases}$$

De este modo, siempre que la *distancia* entre los límites de la sumatoria sea un número entero, contaremos con una definición alternativa para la sumatoria. Dado que contamos con una definición que puede ser planteada de dos maneras, podemos utilizar cualquiera (de las dos) a conveniencia; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= (-1)^3 + \sum_{n=0}^{1} n^3 \\ &= -1 + 0^3 + \sum_{n=1}^{1} n^3 \\ &= -1 + 0 + 1^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= 1^3 + \sum_{n=-1}^{0} n^3 \\ &= 1 + 0^3 + \sum_{n=-1}^{-1} n^3 \\ &= 1 + 0 + (-1)^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Lista de Ejercicios 11 (LE11)

Sea $a, b, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a)

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n) \qquad \text{(Conmutatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I. Primero probaremos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, que la imagen de la sumatoria siempre es un número real; la motivación es que, al estar definida *recursivamente*, la función podría parecer asignar números reales a funciones, pero este no es el caso.

Por definición, si $a > b$, entonces, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = 0 \in \mathbb{R}$; si $a = b$, entonces $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = f(n) \in \mathbb{R}$. Para el caso $a < b$ procedemos por inducción:

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\ &= f(n+1) + \sum_{n=a}^{a} f(n) \\ &= f(n+1) + f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+1) \in \mathbb{R}$ y $f(n) \in \mathbb{R}$ y la suma es cerrada en $\mathbb{R}$ se tiene que $\left(f(n+1) + f(n)\right) \in \mathbb{R}$, osea, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

ii) Supongamos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, con $b = a + k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) \\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+k+1) \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=a}^{a+k} f(n) \in \mathbb{R}$ (hip. ind.), se tiene que $\left(f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, es decir, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

II. Finalmente demostramos la Conmutatividad de la sumatoria.
Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, sigue que

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

□

Corolario:

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) \cdot \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) \cdot \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

Demostración: Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, la igualdad se verifica por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$. □

b)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big) \qquad \text{(Asociatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = 0 = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = f(n) + g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) &= \Big(f(a) + g(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) \\
&= f(a) + g(a) + \Big(f(a+1) + g(a+1)\Big) \\
&= \Big(f(a) + f(a+1)\Big) + \Big(g(a) + g(a+1)\Big) && \text{Asociatividad (de la suma)} \\
&= \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) + \left(g(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+1} g(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n) + g(n)\Big) = \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(f(n)+g(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1)+g(a+k+1)\Big)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n)+g(n)\Big)\\
&= f(a+k+1)+g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}f(n)+\sum_{n=a}^{a+k}g(n) \qquad \text{Hip. Inducción}\\
&= \left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}f(n)\right)+\left(g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}g(n)\right)\\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1}f(n)+\sum_{n=a}^{a+k+1}g(n)
\end{aligned}$$

□

c) Sea $c\in\mathbb{R}$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big) \qquad \text{(Distributividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a>b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=c\cdot 0=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

II) Si $a=b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=c\cdot f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

III) Si $b>a$,

i) Se comprueba para $b=a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1}c\cdot f(n)\\
&= c\cdot f(a)+c\cdot f(a+1)\\
&= c\cdot\Big(f(a)+f(a+1)\Big)\\
&= c\cdot\left(f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1}f(n)\right)\\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+1}f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b=a+k$, con $k\in\mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big)=c\cdot\sum_{n=a}^{a+k}f(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big) \\
&= c\cdot f(a+k+1)+c\cdot\sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Inducción} \\
&= c\cdot\left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)
\end{aligned}$$

□

Corolario: Sea $s,t\in\mathbb{R}$

i)

$$s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)\Big)+\sum_{n=a}^{b}\Big(t\cdot g(n)\Big) && \text{Distributividad de la sumatoria} \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

□

ii)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} f(n)+(-1)\sum_{n=a}^{b} g(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)+(-1)\cdot g(n)\Big) && \text{Por (i) de este corolario} \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)
\end{aligned}$$

□

d)

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

Demostración: Sea $n\in D(f)$ arbitrario pero fijo. Notemos que en la sumatoria $\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)$, $f(n)$ es constante, por lo que

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

De la misma manera, en la sumatoria (de índice n) $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\Big)$, se tiene que $\sum_{m=s}^{t} g(m)$ es constante, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right) &= \left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)\cdot\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\\ &= \left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)\end{aligned}$$

□

e) Sea $c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

Demostración:

I) Se comprueba para $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} c = c = 1\cdot c = (b-a+1)\cdot c$$

II) Si $a < b$ se tiene que

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\sum_{n=a}^{a+1} c = c + \sum_{n=a+1}^{a+1} c = c + c = 2c = (2+a-a)c = (1+1+a-a)c = \Big((a+1)-a+1\Big)c$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} c = \Big((a+k)-a+1\Big)c$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} c &= c + \sum_{n=a}^{a+k} c\\ &= c + \Big((a+k)-a+1\Big)c && \text{Hip. Inducción}\\ &= \Big(1+\big((a+k)-a+1\big)\Big)c\\ &= \Big((a+k+1)-a+1\Big)c\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} c = 0 \neq (b-a+1)c$; únicamente en el caso que $c = 0$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

Definición: $(b-a+1)$ es el número de *iteraciones*, *cíclos*, o *sumandos* de la sumatoria $\sum_{n=a}^{b} f(n)$.

Corolario: Si $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demostración: $\sum_{i=1}^{n} c = \big((n-1)+1\big)c = nc$. □

f) Si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = f(b+1)-f(a) \qquad \text{Propiedad telescópica (de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) = f(n+1) - f(n) = f(b+1) - f(a)$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) &= \Big(f(a+1) - f(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\ &= \Big(f(a+1) - f(a)\Big) + \Big(f\big((a+1)+1\big) - f(a+1)\Big) \\ &= f\big((a+1)+1\big) - f(a)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) = f\big((a+k)+1\big) - f(a)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1)\Big) + \sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\ &= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1)\Big) + f(a+k+1) - f(a) \\ &= f(a+k+1+1) - f(a)\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1) - f(n)\Big) = 0 \neq f(b+1) - f(a)$ únicamente el caso en que $f(b+1) = f(a)$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

g) Sea $\ell, m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

I) Notemos que si $c = 0$, la proposición es *tautológica*; por lo que, en adelante, suponemos que $c \neq 0$.

II) Si $a > b$, no importa qué valores tome ℓ o m, la proposición se verifica por definición:

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

III) Si $a = b$ y $m = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) \\
&= f(\ell + 0 - c) \\
&= f(\ell - c) \\
&\neq f(\ell) \\
&= f(\ell + 0) \\
&= f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

IV) Si $a = b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + m(a+c) - c\big) \\
&= f\big(\ell + ma + mc - c\big) \\
&\neq f\big(\ell + ma\big) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

V) Si $a = b$ y $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 1 \cdot (a+c) - c\big) \\
&= f(\ell + a) \\
&= f(\ell + 1 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

VI) Si $a < b$ y $m = 0$.

Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + 0 \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= f(\ell) + f(\ell) \\
&= 2f(\ell) \\
&\neq 2f(\ell - c) \\
&= f(\ell - c) + f(\ell - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + 0 \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VII) Si $a < b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$, Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + f(\ell + m \cdot a) \\
&= f(\ell + ma + m) + f(\ell + ma) \\
&\neq f(\ell + ma + mc - c) + f(\ell + ma + mc + m - c) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + m \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VIII) Si $a < b$, $m = 1$,

i) Si $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + n) \\
&= f\big(\ell + (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + (a + c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, supenmos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f(\ell + n - c)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(\ell + n) &= f\Big(\ell + (a + k + 1)\Big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + (a + c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a + k + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f(\ell + n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que en general, planteamos la proposición como sigue:
Si $c \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + n - c) \qquad \text{(Cambio de límites 1)}$$

h) Sea $c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big) \qquad \text{(Cambio de límites 2)}$$

Demostración:

i) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big)$$

ii) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\Big(m - \big((a+c)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(m-n)
\end{aligned}$$

iii) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f(m-a) + f\Big(m-\big((a+c+1)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + f(m-a-1) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos qu ese verifica para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+k+1+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

$\square$

i) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm (n-c)\big) \qquad \text{(Cambio de índice)}$$

Demostración:

i) Por el cambio de límites 1 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m+n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m+(n-c)\big)$$

ii) Por el cambio de límites 2 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m-n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

$\square$

Nota: El lector encontrará que en ocasiones, en lugar de utilizar este teorema simplemente se trabaja con susbsituciones sobre el índice, especialmente para funciones identidad. Por ejemplo, tomando la sumatoria de $f(n) = n$, que itera de 1 hasta b,

$$\sum_{n=1}^{b} n$$

Sea $m = n-1$, entonces $m+1 = n$. Cuando el límite inferior $n = 1$, se tiene que $m = 1-1 = 0$. Luego, al considerar la *distancia* entre los límites, tenemos que

$$\begin{aligned} b-n &= b-(m+1) \\ &= (b-1)-m \end{aligned}$$

Al sustituir n por m en la sumatoria, tenemos

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{m=0}^{b-1} (m+1)$$

j) Si $s \le j \le t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Partir la suma)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \le j \le t$, entonces $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j-1} f(n) + \sum_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\ &= f(s) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = f(s) + \sum_{n=s+1}^{t} f(n)$$
$$= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+1} f(n) \\
&= f(j+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + f(j+1) && \text{Conmutatividad} \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que $\sum_{n=s}^{j+k} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+k+1} f(n) \\
&= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j+k} f(n) \\
&= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) + f(j+k+1) \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k+1} f(n) \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $s \leq j \leq t$, pues la proposición no es válida para todo $s \geq j \geq t$:

I) Si $s > j > t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

II) Si $s > j = t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t}$$

III) Si $s = j > t$,

i) $\sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) = f(n) + 0 = f(n)$.

ii) $\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0$.
El lector notará que para partir la suma en este caso, debe cumplirse que $f(n) = 0$, pero esto dependerá de cada función y de los íncides, por lo que en general, $f(n) \neq 0$, por ejemplo para cualquier sumatoria $\sum_{n=a}^{b} c$, donde $c \neq 0$.

Corolario:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) &= \sum_{n=0}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma}\\
&= \sum_{n=0}^{a-1} f(n) + \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma}\\
&= \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n)\\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

□

k)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b-a} f(b-n)$$

Demostración:

I) Si $b < a$, entonces $b - a < 0$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} f(n)$$

II) Si $b = a$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{0} f(b-n)\\
&= f(b-0)\\
&= f(b)\\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

III) Si $b > a$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{(a+1)-a} f(a+1-n) \\
&= \sum_{n=0}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1-0) + \sum_{n=1}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1) + f(a+1-1) \\
&= f(a+1) + f(a) \\
&= f(a) + f(a+1) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(n) = \sum_{n=0}^{(a+k)-a} f(a+k-n) = \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n)$$

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f\big(a+k-(-1)\big) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) \\
&= \sum_{n=-1}^{k} f(a+k-n) && \text{Definición (de sumatoria)} \\
&= \sum_{n=-1+(1)}^{k+(1)} f\big(a+k-(n-1)\big) && \text{Cambio de índice} \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} f(a+k+1-n)
\end{aligned}$$

□

Corolario:

$$\sum_{n=0}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(b-n)$$

Demostración: La porposición se verifica por el teorema para $a = 0$. □

Una nota sobre la notación sigma

Extensión

Usualmente, el alcance de una suma se extiende hasta el primer símbolo de suma o resta que no está entre paréntesis o que no es parte de algún término más amplio (por ejemplo, en el numerador de una fracción), de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \neq \sum_{i=1}^{n} \big(f(i) + 1\big)$$

dado que esto puede resultar confuso, generalmente es más seguro encerrar el argumento de la sumatoria entre paréntesis (como en la segunda forma arriba) o mover los términos finales al principio (como en la tercera forma arriba). Una excepción (a la confusión) es cuando se suman dos sumas, como en

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

Variables indexadas

Definición: Sea $I, A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función dada por

$$\begin{aligned} f : I &\to A \\ i &\mapsto a_i = f(i) \end{aligned}$$

donde $i \in I$, y la imagen $f(i)$ de i bajo la función f es denotada por a_i. El símbolo a_i indica el elemento de A indexado por $i \in I$. La función f establece una familia de elementos en A indexada por I, denotada por $(a_i)_{i \in I}$, o simplemente (a_i) si el conjunto índice es conocido.

Usualmente la sumatoria se presenta con la notación índice para conjuntos finitos indexados. Por ejemplo,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

en la cual se tiene una función

$$\begin{aligned} f : N &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

donde $N \subseteq \mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo generalizada)}$$

Demostración:

i) Se verifica para $n = 2$, por la desigualdad del triángulo,

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i\right| = \left|a_1 + \sum_{i=2}^{2} a_i\right| = |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| = |a_1| + \sum_{i=2}^{2} |a_i| = \sum_{i=1}^{2} |a_i|$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$$

iii) Notemos que $|a_{k+1}| \leq |a_{k+1}|$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i\right| \\
&\leq |a_{k+1}| + \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| && \text{Desigualdad del triángulo} \\
&\leq |a_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k} |a_i| && \text{Suma } \textit{vertical} \text{ de desigualdades} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|
\end{aligned}$$

$\square$

Límites no enteros

En principio, la sumatoria está bien definida para casos en los que los límites no son enteros, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &= 1/2 + \sum_{i=3/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + \sum_{i=5/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Sin embargo, este uso no es común. El ejemplo también sirve para ilustrar que, para la segunda definición de sumatoria, es necesario que la *distancia* entre el límite superior y el inferior sea un entero. Por ejemplo, tratar lo siguiente sería un error

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &\neq 9/4 + \sum_{i=1/2}^{5/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + \sum_{i=1/2}^{1/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + 0 \\
&= 14/4 \\
&= 7/2 \\
&= 3 + 1/2
\end{aligned}$$

Sumatorias anidadas

Considere las siguientes sumatorias anidadas:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n}}^{\text{A}} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1) \right)}^{\text{B}}$$

Notemos que la variable iterable (i) de la sumatoria A, determina el valor del límite superior de la sumatoria B, por lo que únicamente requerimos un valor n para el límite superior de la sumatoria A para realizar el cálculo. Sea $n = 1$. Procediendo con la (primera) definición de la sumatoria:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) + \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1)(0+1) + \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= (1)(1) + (1+1)(0+1) + \sum_{j=1}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= 1 + 2 + (1+1)(1+1) \\
&= 1 + 2 + 4 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Es claro que, en este caso ($n = 1$), la distancia entre los límites de las sumatorias es un número entero, por lo que podemos proceder con la segunda definición de la sumatoria:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) + \sum_{i=0}^{0}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1+1)(1+1) + \sum_{j=0}^{0}(1+1)(j+1) + \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) \\
&= (2)(2) + (1+1)(0+1) + (0+1)(0+1) \\
&= 4 + 2 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

También podríamos proceder con una definición para la sumatoria A y con otra para B. El lector debería verificar este hecho.

Notación pi

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$. Definimos al productorio de a hasta b de f como sigue:

$$
\prod_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n) \,, & \text{si } b \geq a \\ 1 & , \text{ si } b < a. \end{cases}
$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

del producto. Llamamos al conjunto $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \,\}$, el conjunto iterable de $\prod_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera el productorio. El lector debería verificar este hecho.

Lista de Ejercicios

a) Si $a = b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales del productorio)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\prod_{n=a}^{b} f(n) = \prod_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} f(n) &= \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) \cdot 1 && \text{Definición}\\
&= f(a)\\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: A partir de este resultado tenemos que:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b.\\ f(n) & \text{, si } a = b\\ 1 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

b) Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Productorio inverso)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a) = 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) \cdot \prod_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) \cdot f(b) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) \cdot f(a) && \text{Conmutatividad}\\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b)\cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a)\cdot \prod_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a)\cdot f(a+k+1)\cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1)\cdot f(a)\cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n)\\
&= f(a+k+1)\cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b)\cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

c)

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right) \qquad \text{(Propiedad multiplicativa)}$$

Demostración:

I) Si $a>b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = 1 = (1)(1) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

II) Si $a=b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

III) Si $a<b$,

i) Se verifica para $b=a+1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n)g(n) &= f(a)g(a)\cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)g(n)\\
&= f(a)g(a)\cdot f(a+1)g(a+1)\\
&= f(a)f(a+1)\cdot g(a)g(a+1)\\
&= f(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right)\cdot g(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right)\\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)g(n) &= f(a+k+1)g(a+k+1)\cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) \\
&= f(a+k+1)g(a+k+1)\cdot \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\cdot g(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

□

Nota: En particular, para una función constante $g(n) = c$, se tiene que

$$\prod_{n=a}^{b} \left(f(n)\cdot c\right) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} c\right)$$

d) Si $f(n) \neq 0$ y $a \leq b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{f(a)} \qquad \text{Propiedad telescópica (del productorio)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{a}$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+1)}{f(a)}\cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+1)}{f(a)}\cdot \frac{f(a+1+1)}{f(a+1)} \\
&= \frac{f(a+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(a+k+1)}{f(a)}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)}\cdot \prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)}\cdot \frac{f(a+k+1)}{f(a)} && \text{Hip. Ind.} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

□

Potenciación

Definición: Sea a un número real y n un entero no negativo, y f una función dada por $f(n) = a$. Definimos la enésima potencia de a como sigue:

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$$

Decimos que a es la base, y que n es el exponente.

Observación: Sea $a \in \mathbb{R}$,

- $a^1 = \prod_{i=1}^{1} a = a$.
- $a^0 = \prod_{i=1}^{0} a = 1$.

Notación: Sea $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, demuestre lo siguiente:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Multiplicación de potencias de misma base)

Demostración:

i) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m = 0$, se tiene que

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{n+0} = a^{m+n}$$

Luego, sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a^m \cdot a^n = a^{m+1} \right\}$.

ii) Si $m, n \in \mathbb{N}$

i) Notemos que

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= \prod_{i=1}^{m+1} a \\ &= a \cdot \prod_{i=1}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Definición} \\ &= a^m \cdot a^1 \end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $k \in A$, tenemos que $a^{m+k} = a^m \cdot a^k$.

iii) Notemos que

$$
\begin{aligned}
a^{m+(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m+(k+1)} a \\
&= a \cdot \prod_{i=1}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^{m+k} && \text{Definición} \\
&= a \cdot a^m \cdot a^k && \text{Hip. Ind.} \\
&= a^m \cdot a \cdot a^k \\
&= a^m \cdot a \cdot \prod_{i=1}^{k} a && \text{Definición} \\
&= a^m \cdot \prod_{i=1}^{k+1} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a^m \cdot a^{k+1} && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $k+1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

b) Si $b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. (Potencia de un *cociente*)

Demostración: Sea $A = \left\{ n \;\middle|\; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right\}$.

i) Notemos que $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$. Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$, tenemos $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

iii) Notemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 && \text{Mult. Potencias de misma base} \\
&= \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) && \text{(i) y (ii)} \\
&= \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} \\
&= \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} && \text{Mult. Potencias de misma base}
\end{aligned}
$$

$\square$

c) $(ab)^n = a^n b^n$. (Potencia de un producto)

Demostración:

i) Se verifica para $n = 1$, pues $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.

ii) Supongamos que la igualdad se verifica para $n = k$, es decir, suponemos que

$$(ab)^k = a^k b^k$$

iii) Si $n = k+1$ sigue que

$$
\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) && \text{Mult. Potencias de misma base} \\
&= a^k b^k (ab) && \text{Hip. Inducción} \\
&= \left(a^k \cdot a\right)\left(b^k \cdot b^k\right) \\
&= a^{k+1} b^{k+1} && \text{Mult. Potencias de misma base}
\end{aligned}
$$

$\square$

d) $a^{mn} = (a^m)^n$. (Potencia de una potencia)

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A \coloneqq \{ \, m \mid (a^m)^n = a^{mn} \, \}$.

i) Es claro que $1 \in A$, pues $(a^1)^n = (a)^n = a^n = a^{1 \cdot n}$.

ii) Si $k \in A$ tenemos que $(a^k)^n = a^{kn}$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{k+1}\right)^n &= \left(a^k \cdot a\right)^n && \text{Mult. Potencias de misma base} \\
&= \left(a^k\right)^n \cdot a^n && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^{kn} \cdot a^n && \text{Hip. Inducción} \\
&= a^{kn+n} && \text{Mult. Potencias de misma base} \\
&= a^{(k+1)n} && \text{Distributividad}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k+1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$. □

e) $1^n = 1$. (Identidad multiplicativa)

Demostración:

i) Observemos que $1^1 = 1$.

ii) Supongamos que $1^k = 1$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1^k \cdot 1^1 && \text{Mult. Potencias de misma base} \\
&= 1^k \cdot 1 && \text{Observación} \\
&= 1^k && \\
&= 1 && \text{Hip. Inducción}
\end{aligned}$$

□

f) Sea $a \neq 0$, se verifica que

$$a^{-mn} = \left(a^{-m}\right)^n = \left(a^{-n}\right)^m \qquad \text{(Potencia negativa)}$$

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= \left(a^{-n}\right)^0 \\
&= \left(a^{-n}\right)^m
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= 1^n \\
&= \left(a^0\right)^n \\
&= \left(a^{-m}\right)^n
\end{aligned}$$

II) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{ \, n \mid a^{-mn} = (a^{-m})^n = (a^{-n})^m \, \}$.

i) Notemos que

$$a^{-m \cdot 1} = a^{-m} = \left(a^{-m}\right)^1$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^1}\right)^m && \text{Definición}\\
&= \frac{1^m}{a^m} && \text{Potencia de un cociente}\\
&= \frac{1}{a^m} && \text{Identidad multiplicativa}\\
&= a^{-m} && \text{Definición}\\
&= a^{-m\cdot 1}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Supongamos que

$$a^{-mk} = (a^{-m})^k = (a^{-k})^m$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{-(k+1)}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^{k+1}}\right)^m && \text{Definición}\\
&= \frac{1^m}{\left(a^{k+1}\right)^m} && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia}\\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-m}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{a^m}\right)^{k+1} && \text{Notación}\\
&= \frac{1}{\left(a^m\right)^{k+1}} && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia}\\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

□

Lista de Ejerciios 10

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a) Sea $a, b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\
&= \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^n && \text{Corolario de regla del sandwich}\\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)n} && \text{Potencia de un producto}\\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

□

b) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= a^m \cdot \frac{1}{a^n} & \\ &= a^m \cdot a^{-n} & \text{Definición} \\ &= a^m \cdot a^{(-1)\cdot n} & \end{aligned}$$

$\square$

c) Sea $a < b$ y $n \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^n < b^n$ o $b^n < a^n$.

i) Si $n = 0$, no se cumple ninguna condición, pues $a^0 = b^0$.

ii) Sea $n \in \mathbb{N}$,

i) Si $n = 1$,

$$\begin{aligned} a &< b & \text{Hip.} \\ a^1 &< b^1 & \end{aligned}$$

ii) Supongamos que $a^k < b^k$, con $k \in \mathbb{N}$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} a^k &< b^k & \text{Hip. Ind.} \\ a^k \cdot a &< b^k & \end{aligned}$$

Teorema binomial

Definición: Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ una familia indexada de números reales; un polinómio es una expresión *formal*:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Decimos que

- $a_k x^k$ es el k-ésimo término,
- a_k es el coeficiente del k-ésimo término,
- x^k es la indeterminada del k-ésimo término,
- el *grado* es la mayor k para la cual $a_k \neq 0$,

del polinomio.

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, denotamos al factorial de n como

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Observación: $0! = 1$.