Notación Sigma y Pi mayúsculas

Denotamos la suma de los elementos del conjunto A como

$$\sum_{a \in A} a$$

Ejemplos:

1. $A = \{\, 2, 1/3, 3 \,\}$
$$\sum_{a \in A} a = 2 + 1/3 + 3 = 16/3$$

2. $B = \{\, 0 \,\}$
$$\sum_{b \in B} b = 0$$

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \coloneqq \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 0 & \text{, si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

de la sumatoria. Llamamos al conjunto $\{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$, el conjunto iterable de $\sum_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera la sumatoria. El lector debería verificar este hecho.

Ejemplos:

1.
$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{5} i^2 &= (2)^2 + \sum_{i=3}^{5} i^2 \\ &= 4 + (3)^2 + \sum_{i=4}^{5} i^2 \\ &= 4 + 9 + (4)^2 + \sum_{i=5}^{5} i^2 && (*) \\ &= 4 + 9 + 16 + (5)^2 + \sum_{i=6}^{5} i^2 \\ &= 4 + 9 + 16 + 25 + 0 \\ &= 54 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-3}^{-1} 2m &= 2(-3) + \sum_{m=-2}^{-1} 2m \\
&= -6 + 2(-2) + \sum_{m=-1}^{-1} 2m \qquad (\dagger) \\
&= -6 + -4 + 2(-1) + \sum_{m=0}^{-1} 2m \\
&= -6 + -4 + -2 + 0 \\
&= -12
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3} 2^n &= 2^0 + \sum_{n=1}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2^1 + \sum_{n=2}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + \sum_{n=3}^{3} 2^n \qquad (\ddagger) \\
&= 1 + 2 + 2^3 + \sum_{n=4}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + 8 + 0 \\
&= 11
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{j=0}^{-1} j = 0$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} &= \frac{k}{(1)+1} + \sum_{n=2}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{(2)+1} + \sum_{n=3}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{(3)+1} + \sum_{n=4}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + 0 \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \\
&= \frac{13}{12}k
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{k}{n+1}\right) &= \sum_{k=-1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= \frac{13}{12}(-1)+\sum_{k=0}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+\frac{13}{12}(0)+\sum_{k=1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+0+\frac{13}{12}(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

El lector notará que, en el caso en que los límites inferior y superior son iguales $(*, \dagger, \ddagger)$, la imagen de la sumatoria es el elemento típico *evaluado* en el índice, es decir, tenemos la siguiente

Observación: Si $a = b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales de la sumatoria)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + 0 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

A partir de esto tenemos que:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 0 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

El lector notará también que la suma del primer termino hasta el ultimo es igual a la suma del ultimo hasta el primero, es decir, tenemos la siguiente

Proposición: Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Sumatoria inversa)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a)=1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + \sum_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) + f(b) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + f(a) && \text{Conmutatividad}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + f(a+k+1) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1) + f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n)\\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b=a$, entonces $(b-a)=0$, y por índices iguales de la sumatoria se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n)$.
- Por definición, si $b<a$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = 0$, que en particular se verifica si $b-a \in \{\, -n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

A partir de esta observación y de la Sumatoria Inversa se tiene que

Definición: Si $(b-a) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } a>b \\ f(n) & ,\ \text{si } a=b \\ f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) & ,\ \text{si } a<b. \end{cases}$$

De este modo, siempre que la *distancia* entre los límites de la sumatoria sea un número entero, contaremos con una definición alternativa para la sumatoria. Dado que contamos con una definición que puede ser planteada de dos maneras, podemos utilizar cualquiera (de las dos) a conveniencia; por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= (-1)^3 + \sum_{n=0}^{1} n^3 \\
&= -1 + 0^3 + \sum_{n=1}^{1} n^3 \\
&= -1 + 0 + 1^3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= 1^3 + \sum_{n=-1}^{0} n^3 \\
&= 1 + 0^3 + \sum_{n=-1}^{-1} n^3 \\
&= 1 + 0 + (-1)^3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Lista de Ejercicios 11 (LE11)

Sea $a, b, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a)

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n) \qquad \text{(Conmutatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I. Primero probaremos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, que la imagen de la sumatoria siempre es un número real; la motivación es que, al estar definida *recursivamente*, la función podría parecer asignar números reales a funciones, pero este no es el caso.

Por definición, si $a > b$, entonces, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = 0 \in \mathbb{R}$; si $a = b$, entonces $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = f(n) \in \mathbb{R}$. Para el caso $a < b$ procedemos por inducción:

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\
&= f(n+1) + \sum_{n=a}^{a} f(n) \\
&= f(n+1) + f(n)
\end{aligned}
$$

Como $f(n+1) \in \mathbb{R}$ y $f(n) \in \mathbb{R}$ y la suma es cerrada en $\mathbb{R}$ se tiene que $\Big(f(n+1) + f(n)\Big) \in \mathbb{R}$, osea, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

ii) Supongamos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, con $b = a + k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) \\
&= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\
&= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)
\end{aligned}
$$

Como $f(n+k+1) \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=a}^{a+k} f(n) \in \mathbb{R}$ (hip. ind.), se tiene que $\Big(f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\Big) \in \mathbb{R}$, es decir, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

II. Finalmente demostramos la Conmutatividad de la sumatoria.
Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, sigue que

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

□

Corolario:

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) \cdot \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) \cdot \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

Demostración: Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, la igualdad se verifica por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$. □

b)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) + g(n)\Big) \qquad \text{(Asociatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) + g(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = f(n) + g(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) + g(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} \Big(f(n) + g(n)\Big) &= \Big(f(a) + g(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1} \Big(f(n) + g(n)\Big) \\
&= f(a) + g(a) + \Big(f(a+1) + g(a+1)\Big) \\
&= \Big(f(a) + f(a+1)\Big) + \Big(g(a) + g(a+1)\Big) && \text{Asociatividad (de la suma)} \\
&= \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) + \left(g(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+1} g(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n) + g(n)\Big) = \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(f(n)+g(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1)+g(a+k+1)\Big)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n)+g(n)\Big) \\
&= f(a+k+1)+g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)+\sum_{n=a}^{a+k} g(n) \qquad \text{Hip. Inducción} \\
&= \left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right)+\left(g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)+\sum_{n=a}^{a+k+1} g(n)
\end{aligned}$$

$\square$

c) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big) \qquad \text{(Distributividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a>b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)=c\cdot 0=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

II) Si $a=b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)=c\cdot f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

III) Si $b>a$,

i) Se comprueba para $b=a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1} c\cdot f(n) \\
&= c\cdot f(a)+c\cdot f(a+1) \\
&= c\cdot\Big(f(a)+f(a+1)\Big) \\
&= c\cdot\left(f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) \\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+1} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b=a+k$, con $k\in\mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big)=c\cdot\sum_{n=a}^{a+k} f(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big)\\
&= c\cdot f(a+k+1)+c\cdot\sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Inducción}\\
&= c\cdot\left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)
\end{aligned}$$

□

Corolario: Sea $s, t \in \mathbb{R}$

i)

$$s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)\Big)+\sum_{n=a}^{b}\Big(t\cdot g(n)\Big) && \text{Distributividad de la sumatoria}\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

□

ii)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} f(n)+(-1)\sum_{n=a}^{b} g(n)\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)+(-1)\cdot g(n)\Big) && \text{Por (i) de este corolario}\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)
\end{aligned}$$

□

d)

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

Demostración: Sea $n \in D(f)$ arbitrario pero fijo. Notemos que en la sumatoria $\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)$, $f(n)$ es constante, por lo que

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

De la misma manera, en la sumatoria (de índice n) $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\Big)$, se tiene que $\sum_{m=s}^{t}g(m)$ es constante, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\right) &= \left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\cdot\left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\\ &= \left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\end{aligned}$$

□

e) Sea $c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

Demostración:

I) Se comprueba para $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} c = c = 1\cdot c = (b-a+1)\cdot c$$

II) Si $a < b$ se tiene que

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\sum_{n=a}^{a+1} c = c + \sum_{n=a+1}^{a+1} c = c + c = 2c = (2+a-a)c = (1+1+a-a)c = \Big((a+1)-a+1\Big)c$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} c = \Big((a+k)-a+1\Big)c$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} c &= c + \sum_{n=a}^{a+k} c\\ &= c + \Big((a+k)-a+1\Big)c && \text{Hip. Inducción}\\ &= \Big(1 + ((a+k)-a+1)\Big)c\\ &= \Big((a+k+1)-a+1\Big)c\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} c = 0 \neq (b-a+1)c$; únicamente en el caso que $c = 0$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

Definición: $(b-a+1)$ es el número de *iteraciones*, *cíclos*, o *sumandos* de la sumatoria $\sum_{n=a}^{b} f(n)$.

Corolario: Si $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demostración: $\sum_{i=1}^{n} c = \big((n-1)+1\big)c = nc$. □

f) Si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = f(b+1)-f(a) \qquad \text{Propiedad telescópica (de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) = f(n+1) - f(n) = f(b+1) - f(a)$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) &= \Big(f\big(a+1\big) - f(a) \Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) \\ &= \Big(f(a+1) - f(a) \Big) + \Big(f\big((a+1)+1\big) - f(a+1) \Big) \\ &= f\big((a+1)+1\big) - f(a) \end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) = f\big((a+k)+1\big) - f(a)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{a+k+1} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) &= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1) \Big) + \sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) \\ &= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1) \Big) + f(a+k+1) - f(a) \\ &= f(a+k+1+1) - f(a) \end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} \Big(f(n+1) - f(n) \Big) = 0 \neq f(b+1) - f(a)$ únicamente el caso en que $f(b+1) = f(a)$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

g) Sea $\ell, m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

I) Notemos que si $c = 0$, la proposición es *tautológica*; por lo que, en adelante, suponemos que $c \neq 0$.

II) Si $a > b$, no importa qué valores tome ℓ o m, la proposición se verifica por definición:

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

III) Si $a=b$ y $m=0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell+m\cdot n-c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell+m\cdot n-c)\\ &= f\big(\ell+0\cdot(a+c)-c\big)\\ &= f(\ell+0-c)\\ &= f(\ell-c)\\ &\neq f(\ell)\\ &= f(\ell+0)\\ &= f(\ell+0\cdot a)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell+m\cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell+m\cdot n)\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

IV) Si $a=b$, $m\neq 0$ y $m\neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell+m\cdot n-c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell+m\cdot n-c)\\ &= f\big(\ell+m(a+c)-c\big)\\ &= f\big(\ell+ma+mc-c\big)\\ &\neq f\big(\ell+ma\big)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell+m\cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell+m\cdot n)\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

V) Si $a=b$ y $m=1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell+m\cdot n-c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell+m\cdot n-c)\\ &= f\big(\ell+1\cdot(a+c)-c\big)\\ &= f(\ell+a)\\ &= f(\ell+1\cdot a)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell+m\cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell+m\cdot n)\end{aligned}$$

VI) Si $a<b$ y $m=0$.

Para $b = a + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + 0 \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= f(\ell) + f(\ell) \\
&= 2f(\ell) \\
&\neq 2f(\ell - c) \\
&= f(\ell - c) + f(\ell - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + 0 \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

VII) Si $a < b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$, Para $b = a + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + f(\ell + m \cdot a) \\
&= f(\ell + ma + m) + f(\ell + ma) \\
&\neq f(\ell + ma + mc - c) + f(\ell + ma + mc + m - c) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + m \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

VIII) Si $a < b$, $m = 1$,

i) Si $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + n)\\ &= f\big(\ell + (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n)\\ &= f(\ell + a + 1) + f(\ell + a)\\ &= f(\ell + a + 1) + f(\ell + (a + c) - c)\\ &= f\big(\ell + (a + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c)\\ &= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + n - c)\\ &= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, supenmos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f(\ell + n - c)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} f(\ell + n) &= f\Big(\ell + (a + k + 1)\Big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n)\\ &= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + a)\\ &= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + (a + c) - c)\\ &= f\big(\ell + (a + k + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c)\\ &= \sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f(\ell + n - c)\end{aligned}$$

Por lo que en general, planteamos la proposición como sigue:
Si $c \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + n - c) \qquad \text{(Cambio de límites 1)}$$

h) Sea $c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big) \qquad \text{(Cambio de límites 2)}$$

Demostración:

i) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big)$$

ii) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(m-n)
\end{aligned}$$

iii) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f(m-a) + f\Big(m-\big((a+c+1)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + f(m-a-1) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos qu ese verifica para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+k+1+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

□

i) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm (n-c)\big) \qquad \text{(Cambio de índice)}$$

Demostración:

i) Por el cambio de límites 1 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m+n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m+(n-c)\big)$$

ii) Por el cambio de límites 2 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m-n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

$\square$

Nota: El lector encontrará que en ocasiones, en lugar de utilizar este teorema simplemente se trabaja con susbsituciones sobre el índice, especialmente para funciones identidad. Por ejemplo, tomando la sumatoria de $f(n) = n$, que itera de 1 hasta b,

$$\sum_{n=1}^{b} n$$

Sea $m = n - 1$, entonces $m + 1 = n$. Cuando el límite inferior $n = 1$, se tiene que $m = 1 - 1 = 0$. Luego, al considerar la *distancia* entre los límites, tenemos que

$$\begin{aligned} b - n &= b - (m+1) \\ &= (b-1) - m \end{aligned}$$

Al sustituir n por m en la sumatoria, tenemos

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{m=0}^{b-1} (m+1)$$

j) Si $s \le j \le t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Partir la suma)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \le j \le t$, entonces $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j-1} f(n) + \sum_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\ &= f(s) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) + \sum_{n=s+1}^{t} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+1} f(n) \\ &= f(j+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + f(j+1) && \text{Conmutatividad} \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que $\sum_{n=s}^{j+k} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+k+1} f(n) \\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j+k} f(n) \\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) + f(j+k+1) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k+1} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $s \leq j \leq t$, pues la proposición no es válida para todo $s \geq j \geq t$:

I) Si $s > j > t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

II) Si $s > j = t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t}$$

III) Si $s = j > t$,

i) $\sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) = f(n) + 0 = f(n)$.

ii) $\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0$.
El lector notará que para partir la suma en este caso, debe cumplirse que $f(n) = 0$, pero esto dependerá de cada función y de los íncides, por lo que en general, $f(n) \neq 0$, por ejemplo para cualquier sumatoria $\sum_{n=a}^{b} c$, donde $c \neq 0$.

Corolario:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) &= \sum_{n=0}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} f(n) + \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

□

k)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b-a} f(b-n)$$

Demostración:

I) Si $b < a$, entonces $b - a < 0$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} f(n)$$

II) Si $b = a$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{0} f(b-n) \\
&= f(b-0) \\
&= f(b) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

III) Si $b > a$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{(a+1)-a} f(a+1-n) \\
&= \sum_{n=0}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1-0) + \sum_{n=1}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1) + f(a+1-1) \\
&= f(a+1) + f(a) \\
&= f(a) + f(a+1) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(n) = \sum_{n=0}^{(a+k)-a} f(a+k-n) = \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n)$$

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f\big(a+k-(-1)\big) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) \\
&= \sum_{n=-1}^{k} f(a+k-n) && \text{Definición (de sumatoria)} \\
&= \sum_{n=-1+(1)}^{k+(1)} f\big(a+k-(n-1)\big) && \text{Cambio de índice} \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} f(a+k+1-n)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario:

$$\sum_{n=0}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(b-n)$$

Demostración: La porposición se verifica por el teorema para $a = 0$. $\square$

Una nota sobre la notación sigma

Extensión

Usualmente, el alcance de una suma se extiende hasta el primer símbolo de suma o resta que no está entre paréntesis o que no es parte de algún término más amplio (por ejemplo, en el numerador de una fracción), de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \neq \sum_{i=1}^{n} \big(f(i) + 1\big)$$

dado que esto puede resultar confuso, generalmente es más seguro encerrar el argumento de la sumatoria entre paréntesis (como en la segunda forma arriba) o mover los términos finales al principio (como en la tercera forma arriba). Una excepción (a la confusión) es cuando se suman dos sumas, como en

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

Variables indexadas

Definición: Sea $I, A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función dada por

$$\begin{aligned} f : I &\to A \\ i &\mapsto a_i = f(i) \end{aligned}$$

donde $i \in I$, y la imagen $f(i)$ de i bajo la función f es denotada por a_i. El símbolo a_i indica el elemento de A indexado por $i \in I$. La función f establece una familia de elementos en A indexada por I, denotada por $(a_i)_{i \in I}$, o simplemente (a_i) si el conjunto índice es conocido.

Usualmente la sumatoria se presenta con la notación índice para conjuntos finitos indexados. Por ejemplo,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

en la cual se tiene una función

$$\begin{aligned} f : N &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

donde $N \subseteq \mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo generalizada)}$$

Demostración:

i) Se verifica para $n = 2$, por la desigualdad del triángulo,

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i\right| = \left|a_1 + \sum_{i=2}^{2} a_i\right| = |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| = |a_1| + \sum_{i=2}^{2} |a_i| = \sum_{i=1}^{2} |a_i|$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$$

iii) Notemos que $|a_{k+1}| \leq |a_{k+1}|$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i\right| \\
&\leq |a_{k+1}| + \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| && \text{Desigualdad del triángulo} \\
&\leq |a_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k} |a_i| && \text{Suma } \textit{vertical} \text{ de desigualdades} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|
\end{aligned}$$

$\square$

Límites no enteros

En principio, la sumatoria está bien definida para casos en los que los límites no son enteros, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &= 1/2 + \sum_{i=3/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + \sum_{i=5/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Sin embargo, este uso no es común. El ejemplo también sirve para ilustrar que, para la segunda definición de sumatoria, es necesario que la *distancia* entre el límite superior y el inferior sea un entero. Por ejemplo, tratar lo siguiente sería un error

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &\neq 9/4 + \sum_{i=1/2}^{5/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + \sum_{i=1/2}^{1/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + 0 \\
&= 14/4 \\
&= 7/2 \\
&= 3 + 1/2
\end{aligned}$$

Sumatorias anidadas

Considere las siguientes sumatorias anidadas:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n}}^{\text{A}} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1)\right)}^{\text{B}}$$

Notemos que la variable iterable (i) de la sumatoria A, determina el valor del límite superior de la sumatoria B, por lo que únicamente requerimos un valor n para el límite superior de la sumatoria A para realizar el cálculo. Sea $n = 1$. Procediendo con la (primera) definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) + \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1)(0+1) + \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= (1)(1) + (1+1)(0+1) + \sum_{j=1}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= 1 + 2 + (1+1)(1+1) \\
&= 1 + 2 + 4 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Es claro que, en este caso ($n = 1$), la distancia entre los límites de las sumatorias es un número entero, por lo que podemos proceder con la segunda definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) + \sum_{i=0}^{0}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1+1)(1+1) + \sum_{j=0}^{0}(1+1)(j+1) + \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) \\
&= (2)(2) + (1+1)(0+1) + (0+1)(0+1) \\
&= 4 + 2 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}$$

También podríamos proceder con una definición para la sumatoria A y con otra para B. El lector debería verificar este hecho.

Notación pi

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le (b-a) \,\}$. Definimos al productorio de a hasta b de f como sigue:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } b \ge a \\ 1 & \text{, si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

del producto. Llamamos al conjunto $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \,\}$, el conjunto iterable de $\prod_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera el productorio. El lector debería verificar este hecho.

Lista de Ejercicios

a) Si $a = b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales del productorio)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\prod_{n=a}^{b} f(n) = \prod_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} f(n) &= \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot 1 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: A partir de este resultado tenemos que:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 1 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

b) Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Productorio inverso)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a) = 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot \prod_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) \cdot f(b) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) \cdot f(a) && \text{Conmutatividad} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b - a = k + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1) \cdot f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

c)

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right) \qquad \text{(Propiedad multiplicativa)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = 1 = (1)(1) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

II) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

III) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n)g(n) &= f(a)g(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)g(n) \\
&= f(a)g(a) \cdot f(a+1)g(a+1) \\
&= f(a)f(a+1) \cdot g(a)g(a+1) \\
&= f(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) \cdot g(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)g(n) &= f(a+k+1)g(a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) \\
&= f(a+k+1)g(a+k+1) \cdot \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \cdot g(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: En particular, para una función constante $g(n) = c$, se tiene que

$$\prod_{n=a}^{b} \left(f(n) \cdot c\right) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} c\right)$$

d) Si $f(n) \neq 0$ y $a \leq b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{f(a)} \qquad \text{Propiedad telescópica (del productorio)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{a}$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+1)}{f(a)} \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+1)}{f(a)} \cdot \frac{f(a+1+1)}{f(a+1)} \\
&= \frac{f(a+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(a+k+1)}{f(a)}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)} \cdot \prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)} \cdot \frac{f(a+k+1)}{f(a)} && \text{Hip. Ind.} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

$\square$

Potenciación

Definición: Sea a un número real y n un entero no negativo, y f una función dada por $f(n) = a$. Definimos la enésima potencia de a como sigue:

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$$

Decimos que a es la base, y que n es el exponente.

Observación: Sea $a \in \mathbb{R}$,

- $a^1 = \prod_{i=1}^{1} a = a$.
- $a^0 = \prod_{i=1}^{0} a = 1$.

Notación: Sea $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Observación:

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, demuestre lo siguiente:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. (Potencias de misma base)

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^0 \cdot a^n \\ &= 1 \cdot a^n \\ &= a^n \\ &= a^{n+0} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

II) Si $m, n \in \mathbb{N}$,

i) Se verifica para $n = 1$,

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= \prod_{i=1}^{m+1} a \\ &= a \cdot \prod_{i=1}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Definición} \\ &= a^m \cdot a^1 \end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $k \in A$, tenemos que $a^{m+k} = a^m \cdot a^k$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
a^{m+(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m+(k+1)} a \\
&= a \cdot \prod_{i=1}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^{m+k} && \text{Definición} \\
&= a \cdot a^m \cdot a^k && \text{Hip. Ind.} \\
&= a^m \cdot a \cdot a^k \\
&= a^m \cdot a \cdot \prod_{i=1}^{k} a && \text{Definición} \\
&= a^m \cdot \prod_{i=1}^{k+1} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a^m \cdot a^{k+1} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k+1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

b) $1^n = 1$. (Identidad multiplicativa)

Demostración:

I) $1^0 = 1$.

II) **i)** Observemos que $1^1 = 1$.

ii) Supongamos que $1^k = 1$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1^k \cdot 1^1 && \text{Potencias de misma base} \\
&= 1^k \cdot 1 && \text{Observación} \\
&= 1^k \\
&= 1 && \text{Hip. Inducción}
\end{aligned}$$

$\square$

c) Si $b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. (Potencia de un *cociente*)

Demostración:

I) Si $n = 0$, se tiene que $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$.

II) Sea $A = \left\{ n \mid \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right\}$.

i) Notemos que $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$. Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$, tenemos $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 && \text{Potencias de misma base} \\
&= \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) && \text{(i) y (ii)} \\
&= \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} \\
&= \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}$$

$\square$

d) $(ab)^n = a^n b^n$. (Potencia de un producto)

Demostración:

I) Si $n = 0$, $(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$.

II) **i)** Se verifica para $n = 1$, pues $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.

ii) Supongamos que la igualdad se verifica para $n = k$, es decir, suponemos que

$$(ab)^k = a^k b^k$$

iii) Si $n = k + 1$ sigue que

$$\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) && \text{Potencias de misma base} \\
&= a^k b^k (ab) && \text{Hip. Inducción} \\
&= \left(a^k \cdot a\right)\left(b^k \cdot b^k\right) \\
&= a^{k+1} b^{k+1} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}$$

$\square$

e) $a^{mn} = (a^m)^n$. (Potencia de una potencia)

Demostración:

I) Si $m = 0$, $a^{0 \cdot n} = 1 = 1^n = (a^0)^n$. Análogamente, si $n = 0$, $a^{m \cdot 0} = 1 = (a^m)^0$.

II) Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A \coloneqq \{\, m \mid (a^m)^n = a^{mn} \,\}$.

i) Es claro que $1 \in A$, pues $(a^1)^n = (a)^n = a^n = a^{1 \cdot n}$.

ii) Si $k \in A$ tenemos que $(a^k)^n = a^{kn}$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{k+1}\right)^n &= \left(a^k \cdot a\right)^n && \text{Potencias de misma base} \\
&= \left(a^k\right)^n \cdot a^n && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^{kn} \cdot a^n && \text{Hip. Inducción} \\
&= a^{kn+n} && \text{Potencias de misma base} \\
&= a^{(k+1)n} && \text{Distributividad}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k + 1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

f) Sea $a \neq 0$, se verifica que

$$a^{-mn} = \left(a^{-m}\right)^n = \left(a^{-n}\right)^m \qquad \text{(Potencia negativa)}$$

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= \left(a^{-n}\right)^0 \\
&= \left(a^{-n}\right)^m
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= 1^n \\
&= \left(a^0\right)^n \\
&= \left(a^{-m}\right)^n
\end{aligned}$$

II) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{\, n \mid a^{-mn} = (a^{-m})^n = (a^{-n})^m \,\}$.

i) Notemos que

$$a^{-m\cdot 1} = a^{-m} = \left(a^{-m}\right)^1$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^1}\right)^m && \text{Definición} \\
&= \frac{1^m}{a^m} && \text{Potencia de un cociente} \\
&= \frac{1}{a^m} && \text{Identidad multiplicativa} \\
&= a^{-m} && \text{Definición} \\
&= a^{-m\cdot 1}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Supongamos que

$$a^{-mk} = (a^{-m})^k = (a^{-k})^m$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{-(k+1)}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^{k+1}}\right)^m && \text{Definición} \\
&= \frac{1^m}{\left(a^{k+1}\right)^m} && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-m}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{a^m}\right)^{k+1} && \text{Notación} \\
&= \frac{1}{\left(a^m\right)^{k+1}} && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

g) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \left\{\, n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \,\right\}$.

i) Si $m = 1$, se tiene que

$$a^{m-1} = a^{1-1} = a^0 = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a^m}{a^1}$$

ii) Si $m > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^m}{a^1} &= \frac{a^m}{a} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m} a}{a} && \text{Definción} \\
&= \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{m-1} a}{a} && \text{Produdctorio inverso} \\
&= \prod_{i=1}^{m-1} a \\
&= a^{m-1} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

iii) Supongamos que $\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$.

iv) Notemos que

$$
\begin{aligned}
a^{m-(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m-(k+1)} a && \text{Definición} \\
&= \prod_{i=1}^{m-k-1} a \\
&= \left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m-k-1}\right) a \\
&= \frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot \prod_{i=1}^{m-k-1}\right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \prod_{i=1}^{m-k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= \frac{1}{a} \cdot a^{m-k} && \text{Definición} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^m}{a^k} && \text{Hip. Inducción} \\
&= \frac{a^m}{a \cdot a^k} \\
&= \frac{a^m}{a^{k+1}} && \text{Potencia de misma base}
\end{aligned}
$$

$\square$

Nota: Con esta prueba se generaliza la Potencia de misma base para $\mathbb{Z}$, pues

i) Sin pérdida de generalidad, si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{a^n}{a^{-m}}$, por notación, donde $-m \in \mathbb{N}$, y como hemos probado,

$$\frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$

ii) Si $m, n \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$ donde $-m, -n \in \mathbb{N}$, y como hemos probado

$$\frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

h) Generalize la Potencia de un *cociente* para $\mathbb{Z}$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} && -n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} && \text{Potencia de un } \textit{Cociente} \\
&= \frac{b^{-n}}{a^{-n}} && \text{Regla del sandwich} \\
&= \frac{a^n}{b^{-(-n)}} && \text{Notación} \\
&= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}
$$

i) Generalize la Potencia de un producto para $\mathbb{Z}$. Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$
\begin{aligned}
(ab)^n &= \frac{1}{ab^{-n}} && \text{Notación } (-n \in \mathbb{N}) \\
&= \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^n b^n && \text{Observación}
\end{aligned}
$$

j) Generalize la Potencia de una potencia para $\mathbb{Z}$.

i) Si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n && \text{Notación} \\
&= \frac{1^n}{(a^{-m})^n} && \text{Potencia de un cociente} \\
&= \frac{1}{a^{-mn}} && \text{Potencia negativa} \\
&= a^{mn} && \text{Observación}
\end{aligned}$$

ii) Si $n \in \mathbb{Z}^-$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \frac{1}{(a^m)^{-n}} && \text{Notación} \\
&= \frac{1}{(a^{-mn})} && \text{Potencia negativa} \\
&= a^{mn} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

iii) Si $n, m \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $mn \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $a^{mn} = (a^m)^n$, como hemos probado.

k) Sea $a, b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^n && \text{Corolario de regla del sandwich} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{-1\cdot n} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

$\square$

Una nota sobre la potenciación

Hemos definidio la potencia a partir de un índice inferior igual a 1, sin embargo, podemos extender la definición para índices $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$. Dada una función $f(n) = a$ tenemos que

$$\prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Demostración:

I) Si $m = n$,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=m}^{n} a &= a && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= a^1 \\
&= a^{0+1} \\
&= a^{n-m+1}
\end{aligned}$$

II) Si $m < n$,

i) Se verifica para $n = m + 1$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^{m+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Índices iguales del productorio} \\ &= a^{m+1} && \text{Potencias de misma base} \\ &= a^{(m+1)-m+1} \end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = m + k$, es decir, suponemos que

$$\prod_{i=m}^{m+k} a = a^{(m+k)-m+1}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^{m+k+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^{(m+k)-m+1} && \text{Hip. Ind.} \\ &= a^{(m+k+1)-m+1} && \text{Potencias de misma base} \end{aligned}$$

$\square$

Observación: $n - m + 1$ es un número natural, por lo que a^{n-m+1} está bien definido.

Demostración: Dado que $m \leq n$, si $m = n$, se tiene que $n - m + 1 = 1$, y si $m < n$ sigue que $n - m \in \mathbb{R}^+$, y por definición (de $\mathbb{Z}$), $n - m \in \mathbb{N}$, y así $n - m + 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Nota: El lector notará que $n-m+1$ es el número de *iteraciones*, o *cíclos*, análogo al definido en la sumatoria.

Teorema binomial

Definición: Sea a una función:

$$\begin{aligned} a: \ \mathbb{N} \cup \{ 0 \} &\to \mathbb{R} \\ k &\mapsto a_k \end{aligned}$$

Un polinómio es una expresión *formal*:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Decimos que

- $a_k x^k$ es el k-ésimo término,
- a_k es el coeficiente del k-ésimo término,
- x^k es la indeterminada del k-ésimo término,
- el *grado* es la mayor k para la cual $a_k \neq 0$,

del polinomio.

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, denotamos al factorial de n como

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Nota: Hemos definido al factorial para números enteros no negativos para evitar expresiones de la forma $-n!, n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Observación: $0! = 1$.

Definición: Sea $n, k \in \mathbb{Z}$. Definimos al coeficiente binomial, (de) n elije k, como sigue:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad n < k \text{ , o } k < 0 \end{cases}$$

Otras notaciones para $\binom{n}{k}$ son $C(n,k), {}_{n}C_{k}, {}^{n}C_{k}, C_{n,k}$.

Lista de ejercicios (LE)

Sea $n, k \in \mathbb{Z}$. Demuestre lo siguiente

a) Sea $n \geq 0$,

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad \text{(Recurrencia del factorial)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{i=1}^{n} i && \text{Definición} \\ &= n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} i && \text{Productorio inverso} \\ &= n \cdot (n-1)! && \text{Definición} \end{aligned}$$

$\square$

Observación:

- $(m+1)! = m!(m+1)$.
- $n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$.

b)

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

Demostración: Por definición,

i) Si $n < 0$, $\binom{n}{n} = 0 = \binom{n}{0}$.

ii) Si $0 \leq n$,

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \binom{n}{0}$$

$\square$

c)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Simetría del coeficiente binomial)}$$

Demostración:

i) Si $n-k<0$, $\binom{n}{n-k}=0$, y se tiene que, $n<k$, por lo que $\binom{n}{k}=0$.

ii) Si $n<n-k$, $\binom{n}{n-k}=0$, y se tiene que, $k<0$, por lo que $\binom{n}{k}=0$.

iii) Si $k<0$, $\binom{n}{k}=0$. Además, se tiene que $-k>0$, por lo que $n+(-k)=n-k>n$, es decir, $\binom{n}{n-k}=0$.

iv) Si $k>n$, $\binom{n}{k}=0$. Además, $n-k<0$, es decir, $\binom{n}{n-k}=0$.

v) Si $0\leq k\leq n$,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{Definición}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!)}\\
&= \binom{n}{n-k} && \text{Definición} \qquad \square
\end{aligned}$$

d) Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(Formula recursiva del coeficiente binomial)}$$

I) Si $k-1<0$, $\binom{n-1}{k-1}=0$ y, se tiene que, $k<1$. Luego,

- **i)** Si $k<0$, entonces $\binom{n}{k}=0=\binom{n-1}{k}$.
- **ii)** Si $k=0$, se tiene que $\binom{n}{k}=\binom{n}{0}$, el cual puede ser igual a 0 o a 1 dependiendo del valor de n, por lo que no podemos determinar que se verifique la igualdad.

II) Si $n-1<k-1$, $\binom{n-1}{k-1}=0$ y, se tiene que, $n<k$, por lo que $\binom{n}{k}=0$. Como $k-1<k$ y $n-1<k-1$, sigue que $n-1<k$, por lo que $\binom{n-1}{k}=0$.

III) Si $n-1<k$, $\binom{n-1}{k}=0$

IV) Si $k<0$, $\binom{n}{k}=0=\binom{n-1}{k}$. También, $k-1<k$, esto es, $k-1<0$, por lo que $\binom{n-1}{k-1}=0$.

V) Si $n<k$, $\binom{n}{k}=0$ y $n-1<k-1$, por lo que $\binom{n-1}{k-1}=0$. Asimismo, $n-1<k-1<k$, osea $n-1<k$, y así $\binom{n-1}{k}=0$.

VI) Si $0 \leq k \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} && \text{Definición} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k}{k} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} && \text{Rec. Factorial} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{\big((n-k)+k\big)(n-1)!}{k!(n-k)!} && \text{Distribución} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{Rec. Factorial} \\
&= \binom{n}{k} && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

e) Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{(Regla de Pascal)}$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} && \text{Definición}\\
&= \frac{(n+1)\cdot\big((n+1)-1\big)!}{k!(n+1-k)\cdot\big((n+1-k)-1\big)!} && \text{Recurrencia del factorial}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n!}{k!(n+1-k)(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n-k+1}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1+k-k}{n-k+1}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k+1)+k}{n-k+1}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{n-k+1}{n-k+1}+\frac{k}{n-k+1}\right)\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(1+\frac{k}{n-k+1}\right)\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n-k+1} && \text{Distributividad}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n-k+1} && \text{Recurrencia del factorial}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)\big((n-k+1)-1\big)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} && \text{Recurrencia del factorial}\\
&= \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

$\square$

f) Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\big(n-(k+1)\big)!} && \text{Definición}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!}+\frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} && \text{Rec. del factorial}\\
&= \left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \left(\frac{k+1}{(n-k)(k+1)}+\frac{n-k}{(n-k)(k+1)}\right)\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \frac{(k+1)+(n-k)}{(n-k)(k+1)}\cdot\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n+1+k-k}{(n-k)(k+1)}\cdot\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\cdot\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} && \text{Rec. del factorial}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

$\square$

g)

$$\binom{n}{k}=\prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i} \qquad \text{(Formula multiplicativa del coeficiente binomial)}$$

h)

$$(x\pm y)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \qquad \text{(Teorema binomial)}$$

Pendiente

Lista de Ejercicios 8 (LE8)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \leq a^{2n} \, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a \, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^1 \\ 0 &\leq a \end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^k \\ 0 \cdot a &\leq a^k \cdot a \\ 0 &\leq a^{k+1} \end{aligned}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned} a^1 &< b^1 \\ a &< b \end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$\begin{aligned} a^k \cdot a &< b^k \cdot b \\ a^{k+1} &< b^{k+1} \end{aligned}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que A está acotado:

- superiormente si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es cota superior de A.
- inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que m es cota inferior de A.
- si está acotado superior e inferiormente.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A es no vacío y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si S satisface las siguientes condiciones:

- S es cota superior de A.
- Si K es cota superior de A, entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Definición: . Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A.
- Si K es cota inferior de A, entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A.

En este caso escribimos $M = \inf(A)$

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$) ads
$\Leftarrow$) asdf

$\square$

2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. $\square$

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. $\square$

4. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración: **i)** Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S, tendríamos que $\exists V$ tal que $s_\varepsilon \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S.

ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S, por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. $\square$

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L \coloneqq \sup(\mathbb{N})$. Como $L-1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L-1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L-1$, lo cual implica que $n_0+1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. $\square$

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A \coloneqq \{ -a : a \in A \}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M \coloneqq \sup(A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. $\square$

Lista de Ejercicios

a) Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y B es acotado; se verifica que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

Demostración:

- **i)** Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $\inf(B) \leq x$, por lo que $\inf(B)$ es cota inferior de A. Luego, $\inf(B) \leq \inf(A)$.
- **ii)** Sea $x \in A$. Por definición, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$, por lo que $\inf(A) \leq \sup(A)$.
- **iii)** Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $x \leq \sup(B)$, por lo que $\sup(B)$ es cota superior de A, y por definición, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

$\square$

Corolario:

- **i)** $\inf(B) \leq \sup(A)$.
- **ii)** $\inf(A) \leq \sup(B)$.

b) Sea $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$0 < \varepsilon$$
$$\inf(B) < \inf(B) + \varepsilon$$

Por lo que $\inf(B) + \varepsilon$ no es una cota inferior de B, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$. $\square$

c) Sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \\ \sup(A) &< \varepsilon + \sup(A) \\ \sup(A) - \varepsilon &< \sup(A) \end{aligned}$$

Por lo que $\sup(A) - \varepsilon$ no es una cota superior de A, por lo que $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$. □

d) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración:

Pr definición, $\sup(A) \leq b, \forall b \in B$.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$, entonces $\sup(A) - \inf(B) > 0$. Sea $\varepsilon = \sup(A) - \inf(B)$, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &< \inf(B) + \varepsilon \\ b_\varepsilon &< \inf(B) + \sup(A) - \inf(B) \\ b_\varepsilon &< \sup(A) \end{aligned}$$

□

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. □

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. □

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. □

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. □

d) Definimos el conjunto $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{Z} : x < n \,\}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n-1 < n$, de donde sigue que $n-1 \leq x < n$. Luego, $n-1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n-1$, por lo que $m \leq x < m+1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m+1$ y $n \leq x < n+1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n < m \leq x &< n+1 \\ n < m &< n+1 \\ 0 < m-n &< 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n+1$ es único. $\square$

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) \coloneqq \{\, \{\, a \,\}, \{\, a, b \,\} \,\}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b).

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos el intervalo

- abierto, como $(a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$
- semicerrado-abierto, como $[a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$
- semiabierto-cerrado, como $(a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$
- cerrado, como $[a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.

Definición. Sea $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario-ε de ℓ es el conjunto $V_\varepsilon(\ell) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$.

Notemos que por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades,

$$|x - \ell| < \varepsilon = -\varepsilon < x - \ell < \varepsilon = \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Por lo que el vecindario-ε de ℓ es equivalente al intervalo abierto: $(\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon)$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

b) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a-b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

d) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración:

i) Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.

ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall\varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n\geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n\geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$
$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned}\big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell|\end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned}|\ell' - \ell| &< 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0\end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. □

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$\begin{aligned}|x_n - \ell| &< \varepsilon \\ |x_n - \ell| + |\ell| &< \varepsilon + |\ell|\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}\big|(x_n - \ell) + \ell\big| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \\ |x_n| &\leq |x_n - \ell| + |\ell|\end{aligned}$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n\geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n<n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n\geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. □

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A := \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

i) Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.

iii) Si $n = k+1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.

b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.

c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. $\square$