

# Valor absoluto

**Definición:** Sea  $a$  un número real, definimos el valor absoluto de  $a$ , denotado por  $|a|$  como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que  $|a| \geq 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector debería verificar este hecho. (*Hint*:  $0 = -0$ ).

## Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean  $a, b, c$  números reales, demuestre lo siguiente:

a)  $\pm a \leq |a|$ .

**Demostración:** Por casos.

- i) Si  $0 \leq a$ , por definición,  $|a| = a$ , por lo que  $a \leq |a|$ . Luego, por la hipótesis tenemos que  $-a \leq 0$ , y por transitividad,  $-a \leq |a|$ .
- ii) Si  $a < 0$ , por definición,  $|a| = -a$ , por lo que  $-a \leq |a|$ . Luego, por la hipótesis tenemos que  $0 < -a$ , y por transitividad,  $a < |a|$ .

En cualquier caso,  $\pm a \leq |a|$ . □

b)  $|a| = |-a|$ .

**Demostración:** Por casos.

- i) Si  $0 \leq a$ , por definición,  $|a| = a$ . Luego, por la hipótesis tenemos que  $-a \leq 0$ . Si  $-a < 0$ ,  $|-a| = a$  y si  $-a = 0$ ,  $|-a| = a$ . De este modo,  $|a| = |-a|$ .
- ii) Si  $a < 0$ , por definición,  $|a| = -a$ . Luego, por la hipótesis tenemos que  $0 < -a$ , por lo que  $|-a| = -a$ . De este modo,  $|a| = |-a|$ .

En cualquier caso,  $|a| = |-a|$ . □

c)  $|ab| = |a||b|$ .

**Demostración:** Por casos.

- i) Si  $a > 0$  y  $b > 0$ , por definición,  $|a| = a$  y  $|b| = b$ . Luego,  $ab > 0$  por lo que  $|ab| = ab$ . Por tanto,  $|ab| = |a||b|$ .
- ii) Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , por definición,  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Luego,  $ab < 0$  por lo que  $|ab| = -ab$ . Por tanto,  $|ab| = |a||b|$ .
- iii) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , por definición,  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Luego,  $ab > 0$  por lo que  $|ab| = ab$ . Por tanto,  $|ab| = |a||b|$ .

En cualquier caso,  $|ab| = |a||b|$ . □

d)  $|a|^2 = a^2$ .

**Demostración:**  $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$ . □

e)  $|a| < b$  si y solo si  $-b < a < b$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Sea  $|a| < b$ .

Sabemos que  $\pm a \leq |a|$ , y por transitividad  $a < b$  y  $-a < b$ , por lo que  $-b < a$ . Por tanto,  $-b < a < b$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $-b < a < b$ . Tenemos dos casos:

i) Si  $0 \leq |a|$ , por definición,  $|a| = a$ , y por la hipótesis,  $|a| < b$ .

ii) Si  $a < 0$ , por definición,  $|a| = -a$ , y por la hipótesis,  $|a| < b$ .

En cualquier caso,  $|a| < b$ . □

**Nota:** Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

f)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . (Desigualdad del triángulo).

**Demostración:** Por casos.

i) Si  $0 \leq a + b$ , por definición,  $|a + b| = a + b$ . Como,  $a \leq |a|$  y  $b \leq |b|$ , entonces,  $a + b \leq |a| + |b|$ . Por tanto,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

ii) Si  $a + b < 0$ , por definición,  $|a + b| = -(a + b) = -a - b$ . Como,  $-a \leq |a|$  y  $-b \leq |b|$ , entonces,  $-a - b \leq |a| + |b|$ . Por tanto,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . □

g)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ . (Desigualdad del triángulo inversa).

**Demostración:**

$$\begin{array}{llll} |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| & \text{Desg. del trig.} & |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| & \text{Desg. del trig.} \\ |b| \leq |b - a| + |a| & & |a| \leq |a - b| + |b| & \\ -|b - a| \leq |a| - |b| & & |a| - |b| \leq |a - b| & (**) \\ -|a - b| \leq |a| - |b| & (*) & & \end{array}$$

De las desigualdades (\*) y (\*\*) sigue que  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ . □

**Corolario:**  $|a| - |b| \leq |a - b|$  y  $|b| - |a| \leq |a - b|$ .

**Demostración:** Por la desigualdad del triángulo inversa,  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ , y notemos que  $\pm(|a| - |b|) \leq ||a| - |b||$ , por transitividad sigue que  $|a| - |b| \leq |a - b|$ , también

$$\begin{array}{l} -|a - b| \leq |a| - |b| \\ -(|a| - |b|) \leq |a - b| \\ |b| - |a| \leq |a - b| \end{array}$$

□

h) Si  $b \neq 0$ , entonces  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

**Demostración:** Por casos.

i) Si  $a \geq 0$  y  $b > 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = b$ . Además,  $\frac{1}{b} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} \geq 0$  por lo que  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$ . Por tanto,  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

ii) Si  $a \geq 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Además,  $\frac{1}{b} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} \leq 0$ , por lo que  $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$ . Por tanto,  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

iii) Si  $a < 0$  y  $b > 0$ , entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = b$ . Además,  $\frac{1}{b} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} < 0$ , por lo que  $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$ . Por tanto,  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

iv) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Además,  $\frac{1}{b} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} > 0$  por lo que  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$ . Por tanto,  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ . □