

Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: $+$ (suma) y \cdot (multiplicación).

Axiomas de la suma

La suma satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists (-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Proposición: Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosidad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se familiarice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b , y c números reales, demuestre lo siguiente:

- a) Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$b = b + 0$	Neutro aditivo
$= b + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= (b + a) + (-a)$	Asociatividad
$= (a + b) + (-a)$	Conmutatividad
$= a + (-a)$	Hipótesis
$= 0$	Neutro aditivo

□

- b) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$b = b + 0$	Neutro aditivo
$= b + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= (b + a) + (-a)$	Asociatividad
$= (a + b) + (-a)$	Conmutatividad
$= 0 + (-a)$	Hipótesis
$= (-a) + 0$	Conmutatividad
$= -a$	Neutro aditivo

□

Corolario: $-(-a) = a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$0 = a + (-a)$	Inverso aditivo
$= (-a) + a$	Conmutatividad

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a = -(-a)$.

□

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=(-a)$ y $y=a$.

c) $-0=0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$0 = 0 + (-0)$	Inverso aditivo
$= (-0) + 0$	Conmutatividad
$= -0$	Neutro aditivo

□

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a=0$, se verifica que

$a = a + 0$	Neutro aditivo
$= a + (-a)$	Hipótesis
$= 0$	Inverso aditivo

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

□

e) $-(a+b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$0 = 0 + 0$	Neutro aditivo
$= (a + (-a)) + (b + (-b))$	Inverso aditivo
$= a + ((-a) + (b + (-b)))$	Asociatividad
$= a + (((-a) + b) + (-b))$	Asociatividad
$= a + ((b + (-a)) + (-b))$	Conmutatividad
$= a + (b + ((-a) + (-b)))$	Asociatividad
$= (a + b) + ((-a) + (-b))$	Asociatividad

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a+b)$.

□

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=(a+b)$ y $y=(-a)+(-b)$.

Corolario: $-(a+(-b))=b+(-a)$.

Demostración:

$-(a+(-b)) = (-a) + (-(-b))$	Distribución del signo
$= (-a) + b$	Inverso aditivo del inverso aditivo
$= b + (-a)$	Conmutatividad □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y)=(-x)+(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

f) Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$a = a + 0$	Neutro aditivo
$= a + (c + (-c))$	Inverso aditivo
$= (a + c) + (-c)$	Asociatividad
$= (b + c) + (-c)$	Hipótesis
$= b + (c + (-c))$	Asociatividad
$= b + 0$	Inverso aditivo
$= b$	Neutro aditivo □

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a+(-a)$ o por $b+(-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a+(-a)$ o $b+(-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación \cdot satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b , y c números reales, demuestre lo siguiente:

- a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$b = b \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= b \cdot (a \cdot a^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (b \cdot a) \cdot a^{-1}$	Asociatividad	
$= (a \cdot b) \cdot a^{-1}$	Conmutatividad	
$= a \cdot a^{-1}$	Hipótesis	
$= 1$	Inverso multiplicativo	□

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$b = b \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= b \cdot (a \cdot a^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (b \cdot a) \cdot a^{-1}$	Asociatividad	
$= a^{-1} \cdot (a \cdot b)$	Conmutatividad	
$= a^{-1} \cdot 1$	Hipótesis	
$= a^{-1}$	Neutro multiplicativo	□

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$1 = 1 \cdot 1^{-1}$	Inverso multiplicativo	
$= 1^{-1} \cdot 1$	Conmutatividad	
$= 1^{-1}$	Neutro multiplicativo	□

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$a = a \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= a \cdot (c \cdot c^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (a \cdot c) \cdot c^{-1}$	Asociatividad	
$= (b \cdot c) \cdot c^{-1}$	Hipótesis	
$= b \cdot (c \cdot c^{-1})$	Asociatividad	
$= b \cdot 1$	Inverso multiplicativo	
$= b$	Neutro multiplicativo	□

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma + y multiplicación ·

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$b \cdot 0 = b \cdot (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= b \cdot a + b \cdot (-a)$	Distribución
$= a \cdot b + (-a) \cdot b$	Conmutatividad
$= 0$	¿?

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$a \cdot b + (-a) \cdot b = b \cdot a + b \cdot (-a)$	Conmutatividad
$= b \cdot (a + (-a))$	Distribución
$= b \cdot 0$	Inverso aditivo
$= 0$	¿?

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Neutro aditivo
$= a \cdot 0 + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= a \cdot 0 + (a \cdot 1 + (-a))$	Neutro multiplicativo
$= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a)$	Asociatividad
$= (a \cdot (0 + 1)) + (-a)$	Distribución
$= a \cdot 1 + (-a)$	Neutro aditivo
$= a + (-a)$	Neutro multiplicativo
$= 0$	Inverso aditivo

□

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$1 = a \cdot a^{-1}$	Inverso multiplicativo
$= a \cdot 0$	Hipótesis
$= 0$	Multiplicación por 0

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. □

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. (Multiplicación igual a 0).

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo.

Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. \square

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (b \cdot (a \cdot a^{-1})) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. \square

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = (a^{-1})^{-1}$. \square

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1 + (-1) = 1 + 0$, y por neutro aditivo $1 + (-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 0$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists (-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$0 = 1 + (-1)$	Inverso aditivo
$= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1)$	Inverso multiplicativo
$= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) \cdot 1$	Neutro multiplicativo
$= (-1) \cdot \left((-1)^{-1} + 1\right)$	Distribución

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1} + 1 = 0$, y por conmutatividad $1 + (-1)^{-1} = 0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1} = -1$. \square

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=1$ y $y=(-1)^{-1}$.

f) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$0 = b \cdot 0$	Multiplicación por 0	$0 = a \cdot 0$	Multiplicación por 0
$= b \cdot (a + (-a))$	Inverso aditivo	$= a \cdot (b + (-b))$	Inverso aditivo
$= b \cdot a + b \cdot (-a)$	Distribución	$= a \cdot b + a \cdot (-b)$	Distribución
$= a \cdot b + (-a) \cdot b$	Conmutatividad		

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. \square

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado, $x=a \cdot b$ y $y=(-a) \cdot b$, por una parte y $y=a \cdot (-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demostración:

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot (-(-b))$	Multiplicación por inverso aditivo
$= a \cdot b$	Inverso aditivo del inverso aditivo

\square

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x) \cdot y = x \cdot (-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1) \cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$(-1) \cdot a^{-1} = -(1 \cdot a^{-1})$	Multiplicación por inverso aditivo
$= -(a^{-1})$	Neutro multiplicativo

Similarmente,

$-(a^{-1}) = (-a^{-1}) \cdot 1$	Neutro multiplicativo
$= -\left((a^{-1}) \cdot 1\right)$	Multiplicación por inverso aditivo
$= -(a^{-1})$	Neutro multiplicativo

\square

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, hemos tomado $x=1$ y $y=a^{-1}$, por una parte, y $x=(a^{-1})$ y $y=1$, por la otra.

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x - y$ a la suma $x + (-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x \cdot y^{-1}$.

En particular, $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$.

Es inmediato que si $w \neq 0$, entonces $\frac{w}{w} = w \cdot w^{-1} = 1$.

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x \cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$	Notación	
$= (a \cdot 1) \cdot b^{-1}$	Neutro multiplicativo	
$= a \cdot (1 \cdot b^{-1})$	Asociatividad	
$= a \cdot \frac{1}{b}$	Notación	□

b) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$a \cdot \frac{c}{b} = a \cdot (c \cdot b^{-1})$	Notación	
$= (ac) \cdot b^{-1}$	Asociatividad	
$= \frac{ac}{b}$	Notación	□

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})$	Notación	
$= a \cdot (b^{-1} \cdot (c \cdot d^{-1}))$	Asociatividad	
$= a \cdot ((b^{-1} \cdot c) \cdot d^{-1})$	Asociatividad	
$= a \cdot ((c \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1})$	Conmutatividad	
$= a \cdot (c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}))$	Conmutatividad	
$= a \cdot (c \cdot (b \cdot d)^{-1})$	Multiplicación de inversos multiplicativos	
$= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1}$	Asociatividad	
$= \frac{ac}{bd}$	Notación	□

d) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$. (Cancelación de factores).

Demostración:

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= \frac{a}{b} \cdot (c \cdot c^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$	Notación	
$= \frac{ac}{b \cdot c}$	Multiplicación de fracciones	□

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{(a \cdot b^{-1})}{(c \cdot d^{-1})}$	Notación	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1}$	Notación	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1})$	Multiplicación de inversos multiplicativos	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d)$	Unicidad del inverso multiplicativo	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot c^{-1})$	Conmutatividad	
$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	Notación	
$= \frac{ad}{bc}$	Multiplicación de fracciones	□

Corolario: $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a, b \neq 0$.

Demostración:

$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$	Notación	
$= \frac{1^{-1}}{\frac{a}{b}}$	Uno es inverso multiplicativo	
$= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}}$	Notación	
$= \frac{1 \cdot b}{1 \cdot a}$	Teorema	
$= \frac{b}{a}$	Neutro multiplicativo	□

f) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma con denominador común).

Demostración:

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = (a \cdot c^{-1}) \pm (b \cdot c^{-1})$	Notación	
$= (c^{-1} \cdot a) \pm (c^{-1} \cdot b)$	Conmutatividad	
$= c^{-1} \cdot (a \pm b)$	Distribución	
$= (a \pm b) \cdot c^{-1}$	Conmutatividad	
$= \frac{a \pm b}{c}$	Notación	□

g) Si $b, d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad (\text{Suma de fracciones})$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} && \text{Cancelación de factores} \\ &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} && \text{Conmutatividad} \\ &= \frac{ad \pm cb}{bd} && \text{Suma con denominador común} \end{aligned}$$

□

h) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{-a}{b} &= (-a) \cdot b^{-1} && \text{Notación} && \frac{a}{-b} = a \cdot (-b)^{-1} && \text{Notación} \\ &= -(ab^{-1}) && \text{Mult. Inv. aditivo} && = -(ab^{-1}) && \text{Mult. Inv. aditivo} \\ &= -\frac{a}{b} && \text{Notación} && = -\frac{a}{b} && \text{Notación} \quad \square \end{aligned}$$

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists(-b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b \neq 0$, por lo que $-b \neq 0$.

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a , b y c .

$$\begin{array}{llll}
 i. (a +/\cdot b) +/\cdot c & iv. (a +/\cdot c) +/\cdot b & vii. c +/\cdot (b +/\cdot a) & x. b +/\cdot (c +/\cdot a) \\
 ii. a +/\cdot (b +/\cdot c) & v. (c +/\cdot a) +/\cdot b & viii. (c +/\cdot b) +/\cdot a & xi. b +/\cdot (a +/\cdot c) \\
 iii. a +/\cdot (c +/\cdot b) & vi. c +/\cdot (a +/\cdot b) & ix. (b +/\cdot c) +/\cdot a & xii. (b +/\cdot a) +/\cdot c
 \end{array}$$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$(a +/\cdot b) +/\cdot c = a +/\cdot (b +/\cdot c)$	Asociatividad	Formas (i) y (ii)
$= a +/\cdot (c +/\cdot b)$	Conmutatividad	Forma (iii)
$= (a +/\cdot c) +/\cdot b$	Asociatividad	Forma (iv)
$= (c +/\cdot a) +/\cdot b$	Conmutatividad	Forma (v)
$= c +/\cdot (a +/\cdot b)$	Asociatividad	Forma (vi)
$= c +/\cdot (b +/\cdot a)$	Conmutatividad	Forma (vii)
$= (c +/\cdot b) +/\cdot a$	Asociatividad	Forma (viii)
$= (b +/\cdot c) +/\cdot a$	Conmutatividad	Forma (ix)
$= b +/\cdot (c +/\cdot a)$	Asociatividad	Forma (x)
$= b +/\cdot (a +/\cdot c)$	Conmutatividad	Forma (xi)
$= (b +/\cdot a) +/\cdot c$	Asociatividad	Forma (xii)

A partir de esta igualdad (y otras probadas anteriormente) introducimos la siguiente **notación**:

- Si x , y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x + y + z$ a la suma de estos.
- Si x , y y z son números reales, representaremos con el símbolo xyz a la multiplicación de estos.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de $(-x) \cdot y$, $-(x \cdot y)$ o $x \cdot (-y)$.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1} .

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.

- Al número $1 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 2 . Al número $2 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 3 ...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindimos de ella.

Un campo finito

Considere las siguientes proposiciones:

- i) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = -a$, entonces $a = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$0 = a + (-a)$	Neutro aditivo
$= a + a$	Hipótesis
$= 2a$	Notación

Luego, por la multiplicación igual a cero, se tiene que $2 = 0$ o $a = 0$.

Nota: En este punto, habría que verificar que $2 \neq 0$ para concluir que $a = 0$.

- ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$2a = a + a$	Notación
$= a + a + b - b$	Inverso aditivo
$= a - b + a + b$	Conmutatividad
$= b - a + a + b$	Hipótesis
$= b + b$	Inverso aditivo
$= 2b$	Notación

Nota: A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar en las implicaciones de definir que $2 = 0$ y decidir si este hecho es contradictorio.

Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto: Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multiplicación \cdot que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists (-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.
6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

¿Qué elementos pertenecen a Ω ?

Sabemos que 0 y 1 son elementos de Ω , en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, el axioma (5) garantiza la existencia de -1 y -0 . De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω . Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω , es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω a partir de estos.

Con estas consideraciones, sabemos que $\{0, 1, -0, -1, 1^{-1}\} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que 0, 1, -1 son miembros de Ω .

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

- i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

- i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω , $2 = 0$, es decir, que $1 + 1 = 0$, entonces $1 + 1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1 + 1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y su extensión sería $\Omega := \{0, 1\}$.

Por lo anterior, para expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo \mathbb{R}^+ , el cual satisface las siguientes propiedades:

12. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la suma en \mathbb{R}^+).
13. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+).
14. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones (Tricotomía):
 - i) $x \in \mathbb{R}^+$.
 - ii) $x = 0$.
 - iii) $-x \in \mathbb{R}^+$.

Lista de Ejercicios

- a) Demuestre que $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Demostración: Si $0 \in \mathbb{R}^+$ se contradice el axioma de tricotomía. □

- b) Demuestre que $1 \in \mathbb{R}^+$. (Uno es positivo).

Demostración: Consideremos los casos:

- i) Si $1 = 0$, se contradice el axioma del neutro multiplicativo.
- ii) Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $(-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice la propiedad de tricotomía.

Por tanto, $1 \in \mathbb{R}^+$. □

Observación: para cualesquiera números reales a y b tenemos que $a = b$ o $a \neq b$. A su vez,

- i) Si $a = b$, entonces $a - b = 0$.
- ii) Si $a \neq b$, por tricotomía tenemos dos casos (excluyentes):
 - $a - b \in \mathbb{R}^+$.
 - $-(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$.

A partir de esta observación introducimos la siguiente **definición**:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$,

- Si $x - y \in \mathbb{R}^+$, escribimos $y < x$ (o $x > y$).

De esta definición sigue que dados $x, y \in \mathbb{R}$, por tricotomía se verifica una y solo una de las siguientes condiciones

- i) $y < x$.
- ii) $x = y$.
- iii) $x < y$.

Notación: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, utilizaremos la notación

- $y \leq x$ (o $x \geq y$) para indicar que $y < x$ o $x = y$.
- $x < y < z$ para indicar que $x < y$ y $y < z$.

Números reales negativos

Definición: Llamaremos al conjunto $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ conjunto de los números reales negativos.

Lista de ejercicios 6 (LE6)

a) Demuestre que \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^- son conjuntos disjuntos.

Demostración: Si $\mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})) \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que

(*) $x \in \mathbb{R}^+$, y

(**) $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

De (**) sigue que $x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, $x \notin \{0\}$ y $x \notin \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (*).

Por tanto, $\mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})) = \emptyset$, es decir, \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^- son conjuntos disjuntos. \square

b) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-x \in \mathbb{R}^-$.

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Por tricotomía, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $x \neq 0$ (y por esto $-x \neq 0$). Sigue que $-x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, y por definición, $-x \in \mathbb{R}^-$.

\Leftarrow) Sea $-x \in \mathbb{R}^-$. Por definición, $-x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, por lo que, $-x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, es decir, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $-x \notin \{0\}$ (y por tanto $-x \neq 0$). Entonces, por tricotomía, $-(-x) = x \in \mathbb{R}^+$. \square

c) Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}^-$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^-$. (Cerradura de la suma en \mathbb{R}^-).

Demostración: Sea $x, y \in \mathbb{R}^-$. Sigue que $(-x), (-y) \in \mathbb{R}^+$, y por la cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ , $-x - y = -(x + y) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x + y \in \mathbb{R}^-$. \square

d) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $0 < x$. (Caracterización de \mathbb{R}^+).

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, notemos que $x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que denotamos como $0 < x$.

\Leftarrow) Sea $0 < x$, por definición $x - 0 = x \in \mathbb{R}^+$. \square

e) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^-$ si y solo si $x < 0$. (Caracterización de \mathbb{R}^-).

Demostración:

\Rightarrow) Sea $x \in \mathbb{R}^-$. Notemos que $-x = 0 - x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x < 0$.

\Leftarrow) Sea $x < 0$. Por definición, $0 - x = -x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x \in \mathbb{R}^-$. \square

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Transitividad).

Demostración: Por definición $(b-a), (c-b) \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ , $(b-a) + (c-b) \in \mathbb{R}^+$. De donde sigue que $(b-a) + (c-b) = b-a+c-b = c-a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. \square

b) $a < b$ si y solo si $a + c < b + c$. (Ley de cancelación de la suma en desigualdades).

Demostración:

\Rightarrow) Si $a < b$, por definición, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b - a = b - a + c - c = b + c - a - c = b + c - (a + c)$.
De este modo, $b + c - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + c$.
 \Leftarrow) Si $a + c < b + c$, por definición $b + a - (a + c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b + c - (a + c) = b + c - a - c = b - a$.
De este modo, $b - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < b$. \square

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Corolario:

i) $0 < a$ si y solo si $-a < 0$.

\Rightarrow)	$0 < a$	Hipótesis	\Leftarrow)	$-a < 0$	Hipótesis
	$0 + (-a) < a + (-a)$	Ley de cancelación		$-a + a < 0 + a$	Ley de cancelación
	$-a < 0$			$0 < a$	

ii) $a < a + b$ si y solo si $0 < b$.

\Rightarrow)	$a < a + b$	Hipótesis	\Leftarrow)	$0 < b$	Hipótesis
	$a - a < a + b - a$	Ley de cancelación		$0 + a < a + b$	Ley de cancelación
	$0 < b$			$a < a + b$	

iii) $a + b < a$ si y solo si $b < 0$.

\Rightarrow)	$a + b < a$	Hipótesis	\Leftarrow)	$b < 0$	Hipótesis
	$a + b - a < a - a$	Ley de cancelación		$b + a < 0 + a$	Ley de cancelación
	$b < 0$			$b + a < a$	

iv) $-a < b$ si y solo si $-b < a$.

\Rightarrow)	$-a < b$	Hipótesis	\Leftarrow)	$-b < a$	Hipótesis
	$-a + a - b < b + a - b$	Ley de cancelación		$-b + b - a < a + b - a$	Ley de cancelación
	$-b < a$			$-a < b$	

v) $a < -b$ si y solo si $b < -a$.

\Rightarrow)	$a < -b$	Hipótesis	\Leftarrow)	$b < -a$	Hipótesis
	$a - a + b < -b - a + b$	Ley de cancelación		$b - b + a < -a + -b + a$	Ley de cancelación
	$b < -a$			$a < -b$	

vi) $a < b$ si y solo si $-b < -a$.

\Rightarrow)	$a < b$	Hipótesis	\Leftarrow)	$-b < -a$	Hipótesis
	$a - a - b < b - b - a$	Ley de cancelación		$-b + b + a < -a + b - a$	Ley de cancelación
	$-b < -a$			$a < b$	

vii) Si $a < b < c$, entonces $-c < -b < -a$.

Notemos que $a < b \Rightarrow -b < -a$ y $b < c \Rightarrow -c < -b$. Es decir, $-c < -b < -a$.

c) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. (Suma *vertical* de desigualdades).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en \mathbb{R}^+ se verifica que $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $(b - a) + (d - c) = b + d - a - c = b + d - (a + c)$. Por lo que $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$. \square

Observación: La suma *vertical* de desigualdades preserva el orden.

Nota: No hay doble implicación, es decir, si $a + c < b + d$, no es posible demostrar —a partir de este hecho únicamente, que $a < b$ y $c < d$. Ej. $a = 4, c = 0, b = 3, d = 4$, se cumple que $a + c = 4 + 0 = 4 < 7 = 3 + 4 = b + d$, pero $c = 0 < 4 = d$ y $a = 4 < 3 = b$ implica una contradicción.

Corolario:

i) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $c - b < d - a$.

$$\begin{array}{rcl} a + c & < & b + d \\ c - b & < & d - a \end{array} \quad \text{Suma vertical de desigualdades}$$

Nota: La desigualdad puede plantearse de las siguientes maneras (el lector debería verificar este hecho):

- i) $a < b \leq c < d$.
- ii) $a < c \leq b < d$
- iii) $a \leq c < b \leq d$
- iv) $a \leq c < d \leq b$
- v) $c \leq a < b \leq d$
- vi) $c \leq a < d \leq b$
- vii) $c < a \leq d < b$
- viii) $c < d \leq a < b$

En particular, llamaermos a la *forma* $a < b < c < d$, desigualdad *anidada* y decimos que $b < c$ es la desigualdad *interna* y $a < d$ la desigualdad *externa*.

d) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a < b < a + b$, $a < a + b < b$, o $a + b < a < b$.

i) Si $0 < a$, por ley de cancelación, $0 + b < a + b$, por lo que $b < a + b$, y así $a < b < a + b$.

ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, por ley de cancelación,

$$\begin{array}{rcl} a & < & 0 \\ a + b & < & 0 + b \\ a + b & < & b \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 0 & < & b \\ 0 + a & < & b + a \\ a & < & b + a \end{array}$$

Por tanto, $a < a + b < b$.

iii) Si $b < 0$. por ley de cancelación, $b + a < 0 + a$, es decir, $a + b < a$, por lo que $a + b < a < b$.

Conclusión: Si $a < b$ y

- $0 < a$, entonces $a < b < a + b$.
- $a < 0$, entonces $a < a + b < b$.
- $b < 0$, entonces $a + b < a < b$.

e) Sea $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ac < bc$ o $bc < ac$.

i) Sea $c \in \mathbb{R}^+$. Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ se verifica que $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Sigue que $c(b - a) = cb - ca = bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$.

ii) Sea $-c \in \mathbb{R}^+$. Como $b - a \in \mathbb{R}^+$, por cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Sigue que $-c(b - a) = -c(b + (-a)) = (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) = -cb + ca$. Finalmente, $-cb + ca = ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $bc < ac$.

Conclusión:

- Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$.

f) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ab < 0$ o $0 < ab$. (Ley de los signos).

Si a o b son cero, tenemos que $ab = 0$, por lo que descartamos esta posibilidad. Por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

- i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por la cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , tenemos que $0 < ab$.
- ii) Sin pérdida de generalidad, si $0 < a$ y $b < 0$, tenemos que $0 < -b$, y por la cerradura de la multiplicación en \mathbb{R}^+ , $0 < -ab$, por lo que $ab < 0$.
- iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < -a$ y $0 < -b$, por lo que $0 < (-a)(-b) = ab$.

Conclusión:

- Por (i) y (ii), para verificar $ab < 0$, un componente debe ser mayor a cero y el otro menor a cero.
- Por (iii), para verificar $0 < ab$, ambos componentes deben ser mayores o ambos menores a cero.

g) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Punto medio).

Demostración:

$$\begin{array}{ll}
 a < b & a < b \\
 a + a < a + b & a + b < b + b \\
 2a < a + b & a + b < 2b \\
 a < \frac{a+b}{2} & \frac{a+b}{2} < b \quad \square
 \end{array}$$

Definición: Al número $\frac{a+b}{2}$ lo llamaremos el punto medio entre a y b .

Observación: $b - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - a$ (la distancia desde a y desde b al punto medio es la misma).

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{b-2a+a}{2} = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{a+b}{2} - a$$

h) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^{-1} < a$ o $a < a^{-1}$.

Para que $\exists a^{-1}$, requerimos $a \neq 0$. También, sabemos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$, pero buscamos desigualdad. Entonces, observemos los casos:

- i) Si $a < -1$, entonces $1 < -a$, y por transitividad $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$, luego,

$$\begin{array}{l}
 1 < -a \\
 1 \cdot (-a^{-1}) < (-a) \cdot (-a^{-1}) \\
 -a^{-1} < 1 \\
 -1 < a^{-1}
 \end{array}$$

Por transitividad, $a < a^{-1}$.

- ii) Si $-1 < a < 0$, por notación $-1 < a$ y $a < 0$, de donde sigue que $-a < 1$ y $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$.

$$\begin{array}{l}
 -a < 1 \\
 (-a) \cdot (-a^{-1}) < 1 \cdot (-a^{-1}) \\
 1 < -a^{-1} \\
 a^{-1} < -1
 \end{array}$$

Por transitividad, $a^{-1} < a$.

- iii) Si $0 < a < 1$, por notación $0 < a$ y $a < 1$, de donde sigue que $0 < a^{-1}$. Luego

$$\begin{array}{l}
 a < 1 \\
 a \cdot a^{-1} < 1 \cdot a^{-1} \\
 1 < a^{-1}
 \end{array}$$

Por transitividad $a < a^{-1}$.

iv) Si $1 < a$, por transitividad $0 < a$, por lo que $0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}1 &< a \\1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\a^{-1} &< 1\end{aligned}$$

Por transitividad $a^{-1} < a$.

Conclusión:

- Por (i) y (iii), $a < a^{-1}$, si $a < -1$ o $0 < a < 1$.
- Por (ii) y (iv), $a^{-1} < a$, si $-1 < a < 0$ o $1 < a$.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $0 < a^{-1}$ o $a^{-1} < 0$.

i) Sea $0 < a$. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $0 < a$, al multiplicar en desigualdades preserva el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero esto es una contradicción. Sabemos que $a^{-1} \neq 0$, ya que 0 no es inverso multiplicativo. Por tricotomía, $a^{-1} > 0$.

ii) Sea $a < 0$. Sigue que $0 < -a$, por lo que $-a^{-1} > 0$, de donde sigue que $a^{-1} < 0$.

Conclusión:

- Si $0 < a$, entonces $0 < a^{-1}$.
- Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

j) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < a^{-1}$, $0 < a^{-1} < 1$, $-1 < a^{-1} < 0$, o $a^{-1} < -1$.

i) Sea $0 < a < 1$. Notemos que $0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}a &< 1 \\a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\1 &< a^{-1}\end{aligned}$$

ii) Sea $1 < a$. Notemos que $1 < a \Rightarrow 0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}1 &< a \\1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\0 &< a^{-1} < 1\end{aligned}$$

iii) Sea $-1 < a < 0$. Notemos que $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$ y $-1 < a \Rightarrow -a < 1$, por lo que $0 < -a < 1$. Luego,

$$\begin{aligned}1 &< -a^{-1} \\a^{-1} &< -1\end{aligned}$$

iv) Sea $a < -1$. Notemos que $a < -1 \Rightarrow 1 < -a$. Luego,

$$\begin{aligned}0 &< -a^{-1} < 1 \\-1 &< a^{-1} < 0\end{aligned}$$

Conclusión:

- Si $0 < a < 1$, entonces $1 < a^{-1}$.
- Si $1 < a$, entonces $0 < a^{-1} < 1$.
- Si $-1 < a < 0$, entonces $a^{-1} < -1$.
- Si $a < -1$, entonces $-1 < a^{-1} < 0$.

k) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ o $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Sabemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, pues requerimos la existencia de su inverso multiplicativo. Luego, por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

- i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por ley de los signos, $0 < ab$, por lo que $0 < \frac{1}{ab}$. Entonces, $a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} < \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{ab}$.
- ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y $0 < \frac{1}{b}$. Por transitividad, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
- iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por ley de los signos $0 < aa$, $0 < bb$ y $0 < ab$. Luego,

$$\begin{array}{ll} a < b & \text{Supuesto inicial} \\ a \cdot (ab) < b \cdot (ab) & (*) \end{array}$$

Por ley de los signos, $aa \cdot bb > 0$, de donde sigue que $\frac{1}{aa \cdot bb} > 0$. De (*) obtenemos que

$$\begin{aligned} (a \cdot (ab)) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} &< (b \cdot (ab)) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} \\ \frac{1}{b} &< \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Conclusión: Si $a < b$ y

- $0 < a$ y $0 < b$, o $a < 0$ y $b < 0$, entonces, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

l) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < \frac{a}{b}$, $0 < \frac{a}{b} < 1$, $-1 < \frac{a}{b} < 0$, o $\frac{a}{b} < -1$.

i) Si $0 < b < a$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} b &< a \\ b \cdot \frac{1}{b} &< \frac{1}{b} a \\ 1 &< \frac{a}{b} \end{aligned}$$

ii) Si $0 < a < b$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &< a < b \\ 0 \cdot \frac{1}{b} &< a \cdot \frac{1}{b} < b \cdot \frac{1}{b} \\ 0 &< \frac{a}{b} < 1 \end{aligned}$$

iii) Si $a < 0 < b$, se tiene que $0 < \frac{1}{b}$. Luego,

$$\begin{aligned} a &< 0 \\ a \cdot \frac{1}{b} &< 0 \cdot \frac{1}{b} \\ \frac{a}{b} &< 0 \\ 0 &< -\frac{a}{b} \end{aligned} \quad (*)$$

Del mismo modo,

-1

Por (*) y (**) se verifica que $-1 < \frac{a}{b} < 0$.

m) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $1 < ab$, $0 < ab < 1$, $-1 < ab < 0$, o $ab < -1$.

i) Sea $1 < a$ y $1 < b$. Por ley de cancelación, $0 < a - 1$ y $0 < b - 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
 0 &< (b-1)(a-1) \\
 0 &< (b+(-1))(a+(-1)) \\
 0 &< a(b+(-1)) + (-1)(b+(-1)) \\
 0 &< ab + (-1)a + (-1)b + (-1)(-1) \\
 0 &< ab + (-1)a + (-1)b + 1 \\
 0 &< ab + (-1)(a+b) + 1 \\
 0 &< ab - (a+b) + 1 \\
 a+b &< ab + 1
 \end{aligned}$$

Por la suma vertical de desigualdades, $1 + 1 < a + b$, y por transitividad, $1 + 1 < ab + 1$, de donde $1 < ab$.

ii) Sea $0 < a < 1$ y $1 < b$. Notemos que $1 < a^{-1}$, por lo que

iii) Sea $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. Notemos que $ab > 0$. Como $a < 1$, sigue que $ab < b$, y a su vez, $b < 1$, por lo que $0 < ab < 1$.

iv) Sea $-1 < a < 0$ y $0 < b < 1$. Notemos que $ab < 0$. Como $b < 1$, sigue que $a < ab$, y a su vez $-1 < a$, por lo que $-1 < ab < 0$.

v) Si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$. Se tiene que $-1 < a < 0 \Rightarrow a^{-1} < -1 \Rightarrow 1 < -a^{-1}$ y $-1 < b < 0 \Rightarrow b^{-1} < -1 \Rightarrow 1 < -b^{-1} \Rightarrow 0 < -b^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 1 &< -a^{-1} \\
 1 \cdot (-b^{-1}) &< (-a^{-1}) \cdot (-b^{-1}) \\
 -b^{-1} &< a^{-1}b^{-1} \\
 1 &< a^{-1}b^{-1} & 1 < -b^{-1} \\
 1 &< (ab)^{-1}
 \end{aligned}$$

Por lo que $0 < ((ab)^{-1})^{-1} < 1$, es decir, $0 < ab < 1$.

Conclusión:

- Si $1 < a$ y $1 < b$, entonces $1 < ab$.
- Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, entonces $0 < ab < 1$.
- Si $-1 < a < 0$ y $0 < b < 1$, entonces $-1 < ab < 0$.
- Si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$, entonces $0 < ab < 1$.

n) Sea $a < b$ y $c < d$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ac < bd$ o $bd < ac$. (Multiplicación *vertical* de desigualdades)

Sin pérdida de generalidad,

I) Si $0 < a < b$,

- i) y $0 < c < d$, entonces $a < b \Rightarrow ac < bc$ y $c < d \Rightarrow bc < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.
- ii) y $c < 0 < d$, entonces $c < d \Rightarrow ac < ad$ y $a < b \Rightarrow ad < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.
- iii) y $c < d < 0$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).

II) Si $a < 0 < b$,

- i) y $c < 0 < d$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).
- ii) y $c < d < 0$, entonces $a < b \rightarrow bd < ad$ y $c < d \rightarrow ad < ac$. Por transitividad, $bd < ac$.

III) Si $a < b < 0$,

- i) y $c < d < 0$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).

Conclusión: Si son todos positivos, se conserva el orden, es decir, si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$. Luego, sin pérdida de generalidad,

- Si $0 < a < b$ y $c < 0 < d$, entonces $ac < bd$.
- Si $a < b < 0$ y $c < 0 < d$, entonces $bd < ac$.

o) Sea $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (Mediante).

Sabemos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. También, por definición, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$, es decir, $(bc - ad)/(bd) > 0$. Como b y d son distintos de cero, tenemos que $bd \neq 0$. Asimismo, $bc - ad \neq 0$.

Buscamos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, para lo que es necesario que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} & \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\ 0 &< \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} & 0 &< \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \\ &= \frac{b(a+c) - (a(b+d))}{b(b+d)} & &= \frac{c(b+d) - (d(a+c))}{d(b+d)} \\ &= \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} & &= \frac{bc+cd-ad-cd}{d(b+d)} \\ &= \frac{bc-ad}{b(b+d)} & &= \frac{bc-ad}{d(b+d)} \\ &= \frac{bc-ad}{bd} \cdot \frac{d}{b+d} & &= \frac{bc-ad}{bd} \cdot \frac{b}{b+d} \end{aligned}$$

Como $(bc - ad)/(bd) > 0$, entonces $\frac{d}{b+d} > 0$ y $\frac{b}{b+d} > 0$. Por esto, $b + d \neq 0$. Finalmente, tenemos dos casos:

- Si $b > 0$, entonces $b + d > 0$ y $d > 0$.
- Si $b < 0$, entonces $b + d < 0$ y $d < 0$.

Por tanto, debe cumplirse que b y d deben ser ambos mayores a cero o ambos menores a cero.

Una nota sobre un campo finito

Antes de introducir los axiomas de campo, no era posible demostrar que $1+1 \neq 0$. Sin embargo, ahora sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$, y por la caracterización de \mathbb{R}^+ se tiene que $0 < 1$. Más aún, se verifica que $1 < 1+1$ y por transitividad, $0 < 1+1$, es decir que $1+1 \in \mathbb{R}^+$, y por tricotomía, $1+1 \neq 0$, o utilizando otra notación, $2 \neq 0$. Con este hecho, finalmente podemos concluir las pruebas pendientes para las proposiciones listadas al iniciar la discusión del campo finito, al final del capítulo anterior:

i) Si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = -a$, entonces $a = 0$.

Demostración:

$0 = a + (-a)$	Neutro aditivo
$= a + a$	Hipótesis
$= 2a$	Notación

Luego, por la multiplicación igual a cero, se tiene que $2 = 0$ o $a = 0$. Como $2 \neq 0$, sigue que $a = 0$. □

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

Demostración:

$2a = a + a$	Notación
$= a + a + b - b$	Inverso aditivo
$= a - b + a + b$	Conmutatividad
$= b - a + a + b$	Hipótesis
$= b + b$	Inverso aditivo
$= 2b$	Notación

Finalmente, por la ley de la cancelación, $a = b$. □

Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a , denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector debería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.
- ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. □

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. □

c) $||a|| = |a|$.

Demostración:

- i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Por lo que $||a|| = |a| = a$.
- ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Por lo que $||a|| = |-a| = |a|$ □

d) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. □

e) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$. (Teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades).

Demostración:

\Rightarrow) Sea $|a| < b$. Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

\Leftarrow) Sea $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. □

Corolario: $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$.

Demostración:

\Rightarrow) i) Sea $|a| = b$, notemos que $a \leq |a|$, es decir, $a \leq b$. Similarmente, $-a \leq |a|$, es decir, $-a \leq b$, por lo que $-b \leq a$.

ii) Si $|a| < b$, por el teorema se tiene que $-b < a < b$, y a su vez, $-b \leq a \leq b$.

\Leftarrow) i) Si $-b = a = b$, entonces $a = 0$, por lo que $b = 0$, y a su vez, $|a| = 0$, lo que implica que $|a| \leq b$.

ii) Si $-b = a < b$, tenemos dos casos: si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, y así $|a| < b$. Pero si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, y como $-b = a$ sigue que $-a = b$, por lo que $|a| = b$, es decir, $|a| \leq b$.

iii) Si $-b < a = b$, tenemos dos casos: si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, y así $|a| \leq b$, pero si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, y como $-b < a$, sigue que $-a < b$, osea $|a| < b$, y a su vez, $|a| \leq b$.

iv) Si $-b < a < b$, por el teorema sigue que $|a| < b$ y a su vez, $|a| \leq b$. □

f) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a + b$, por definición, $|a + b| = a + b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a + b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Si $a + b < 0$, por definición, $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a - b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

g) $||a| - |b|| \leq |a - b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$\begin{array}{llll}
 |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| & \text{Desg. del trig.} & |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| & \text{Desg. del trig.} \\
 |b| \leq |b - a| + |a| & & |a| \leq |a - b| + |b| & \\
 -|b - a| \leq |a| - |b| & & |a| - |b| \leq |a - b| & (***) \\
 -|a - b| \leq |a| - |b| & (*) & &
 \end{array}$$

De las desigualdades (*) y (***) sigue que $||a| - |b|| \leq |a - b|$. □

Corolario: $|a| - |b| \leq |a - b|$ y $|b| - |a| \leq |a - b|$.

Demostración: Por la desigualdad del triángulo inversa, $||a| - |b|| \leq |a - b|$, y notemos que $\pm(|a| - |b|) \leq ||a| - |b||$, por transitividad sigue que $|a| - |b| \leq |a - b|$, también

$$\begin{aligned} -|a - b| &\leq |a| - |b| \\ -(|a| - |b|) &\leq |a - b| \\ |b| - |a| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

□

h) Si $b \neq 0$, entonces $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$. □

Supremos e Ínfimos

Propiedad de completez de \mathbb{R}

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, decimos que A :

- Está acotado superiormente, si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq K, \forall a \in A$. En este caso decimos que K es cota superior de A .
- Está acotado inferiormente, si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que k es cota inferior de A .
- Está acotado, si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es una cota de A .

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si:

- S es cota superior de A , y
- Si K es cota superior de A , entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si:

- L es cota inferior de A , y
- Si K es cota inferior de A , entonces $K \leq L$.

En este caso escribimos $L = \inf(A)$.

Lista de ejercicios

Demuestre lo siguiente:

- i) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

- \Rightarrow) Supongamos que A está acotado. Sea $a \in A$, por definición, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$. Por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $-M < a < M$, por lo que A está acotado superior e inferiormente.
- \Leftarrow) Supongamos que A está acotado superior e inferiormente. Sea $a \in A$, entonces $\exists k, K \in \mathbb{R}$ tales que $k \leq a \leq K$. Notemos que

$$\begin{aligned} -k &\leq |k| \\ -k &\leq |k| + |K| \\ -|K| - |k| &\leq k \\ -(|K| + |k|) &\leq k \end{aligned}$$

Como $k \leq a$, por transitividad sigue que, $-(|K| + |k|) \leq a$. Similarmente,

$$\begin{aligned} K &\leq |K| \\ K &\leq |K| + |k| \end{aligned}$$

Como $a \leq K$, por transitividad sigue que, $a \leq |K| + |k|$. Es decir, se verifica que

$$-(|K| + |k|) \leq a \leq |K| + |k|$$

y, por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $|a| \leq |K| + |k|$. Por tanto, A está acotado. □

ii) Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A . Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. □

iii) Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A . Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. □

iv) Una cota superior M de un conjunto no vacío S de \mathbb{R} es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración: i) Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S , tendríamos que $\exists V$ tal que $s_\varepsilon \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S .

ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S , por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. □

Pendiente

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, \mathbb{N} tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de \mathbb{N} , ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un número natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de \mathbb{N} . Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. \square

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{-a : a \in A\}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(-A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A . \square

Lista de Ejercicios

a) Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y B es acotado; se verifica que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

Demostración:

- i) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $\inf(B) \leq x$, por lo que $\inf(B)$ es cota inferior de A . Luego, $\inf(B) \leq \inf(A)$.
- ii) Sea $x \in A$. Por definición, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$, por lo que $\inf(A) \leq \sup(A)$.
- iii) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $x \leq \sup(B)$, por lo que $\sup(B)$ es cota superior de A , y por definición, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

\square

Corolario:

- i) $\inf(B) \leq \sup(A)$.
- ii) $\inf(A) \leq \sup(B)$.

b) Sea $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \\ \inf(B) &< \inf(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que $\inf(B) + \varepsilon$ no es una cota inferior de B , entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$. \square

c) Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \\ \sup(A) &< \varepsilon + \sup(A) \\ \sup(A) - \varepsilon &< \sup(A) \end{aligned}$$

Por lo que $\sup(A) - \varepsilon$ no es una cota superior de A , por lo que $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$. \square

d) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración:

Pr definición, $\sup(A) \leq b, \forall b \in B$.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$, entonces $\sup(A) - \inf(B) > 0$. Sea $\varepsilon = \sup(A) - \inf(B)$, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &< \inf(B) + \varepsilon \\ b_\varepsilon &< \inf(B) + \sup(A) - \inf(B) \\ b_\varepsilon &< \sup(A) \end{aligned} \quad \nabla$$

\square

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de \mathbb{N} , pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. \square

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

- a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.
- b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.
- c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.
- d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists! n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

- a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. \square
- b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. \square
- c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. \square

d) Definimos el conjunto $A := \{n \in \mathbb{Z} : x < n\}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \emptyset$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A . Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n &< m \leq x < n + 1 \\ n &< m < n + 1 \\ 0 &< m - n < 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en \mathbb{Z} . Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. \square

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) := \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b) .

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos el intervalo

- abierto, como $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- semicerrado-abierto, como $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- semiabierto-cerrado, como $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- cerrado, como $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Definición. Sea $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario- ε de ℓ es el conjunto $V_\varepsilon(\ell) := \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$.

Notemos que por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades,

$$|x - \ell| < \varepsilon = -\varepsilon < x - \ell < \varepsilon = \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Por lo que el vecindario- ε de ℓ es equivalente al intervalo abierto: $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

- a) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. \square

b) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. \square

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. \square

d) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración:

- i) Si $a > 1 - a$, tenemos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.
- ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. \square

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \emptyset$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. \square

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n -ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n) , $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

- a) El límite de una sucesión convergente es único.
- b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

- a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n) . Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad (1)$$

$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \quad (2)$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \quad (3)$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} |(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2 \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. \square

- b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &< \varepsilon \\ |x_n - \ell| + |\ell| &< \varepsilon + |\ell| \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(x_n - \ell) + \ell| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \\ |x_n| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \end{aligned}$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n < n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n < n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. \square

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \emptyset$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A .

- i) Si $n = 1$, tenemos $A := \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.
- ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.
- iii) Si $n = k + 1$, tenemos $A := \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' := A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \dots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

- a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.
- b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.
- c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. □