Álgebra Lineal I

Darvid
darvid.torres@gmail.com

October 13, 2024

Espacios vectoriales

Definición: Una operación binaria $(*)$ sobre un cojunto V es una función:

$$\begin{aligned} * : V \times V &\to V \\ *\,(u, v) &= u * v \in V. \end{aligned}$$

Definición: Sea K un campo. Un espacio vectorial sobre K, es un conjunto V no vacío, dotado con dos operaciones binarias, suma: $+$ y multiplicación por escalares $\cdot$, las cuales satisfacen los siguientes:

Axiomas

1. Cerradura (de la suma): Si $u, v \in V$, entonces $u + v \in V$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $u, v \in V$, entonces $u + v = v + u$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $u, v, w \in V$, entonces $u + (v + w) = (u + v) + w$.

4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in V$ tal que si $v \in V$, entonces $0 + v = v$.

5. Inverso aditivo: Si $v \in V$, entonces $\exists (-v) \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

6. Multiplicación por escalares: Si $\alpha \in K$, entonces $\alpha \cdot v \in V$.

7. Asociatividad (de la multiplicación por escalares): Si $\alpha, \beta \in K$ y $v \in V$, entonces $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.

8. Neutro multiplicativo: Sea 1 es el elemento identidad en K y $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$.

9. P. Distributiva: Si $\alpha, \beta \in K$ y $u, v \in V$, entonces
   - $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
   - $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Definición: A los elementos de K los llamaremos escalares y a los de V, vectores.

Nota: El uso de los símbolos $+$ y $\cdot$ no debe confundirse con las operaciones definidas sobre K, sin embargo, abusando de la notación, utilizaremos los mismos. Es decir, deberíamos utilizar símbolos distintos para denotar la suma y multiplicación en V, respecto de los de K, pero para simplificar la escritura, prescindiremos de ello.

Lista de ejercicios 1 (LE1)

1. Sea F un campo y un espacio vectorial sobre sí mismo