Inducción matemática

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$ entonces se verifica que $n+1 \in A$.

Lista de Ejercicios 7 (LE7)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?
Respuesta: Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si $n \in \mathbb{R}$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?
Respuesta: Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$, y si $n \in \mathbb{R}^+$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}^+$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$.

3) Sea $\mathcal{F} = \{\, A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es un conjunto inductivo} \,\}$.

a) Demuestre que $\mathcal{F}$ es no vacío.

Demostración: Como $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo, entonces $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F} \neq \varnothing$. $\square$

b) Demuestre que $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto inductivo.

Demostración: Por definición, $1 \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, por lo que $1 \in \bigcap \mathcal{F}$. Luego, si $n \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, como cada A es un conjunto inductivo, $n+1 \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, por lo que Si $n \in \bigcap \mathcal{F}$, entonces $n+1 \in \bigcap \mathcal{F}$. Por tanto, $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto inductivo. $\square$

Definición:

Sea $\mathcal{F} = \{\, A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es un conjunto inductivo} \,\}$. Llamaremos al conjunto $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{F}$ conjunto de los números naturales.

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

a) Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m+n \in \mathbb{N}$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \varnothing$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m+n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n+1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{N}$. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \varnothing$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ se verifica que $m \cdot n + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n+1)$, por lo que $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n+1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n+1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$. (Elemento mínimo de $\mathbb{N}$).

Demostración: Sea $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n+1$. Por transitividad, $1 \leq n+1$, por lo que $n+1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que m es elemento mínimo de A si $m \in A$ y $m \leq a, \forall a \in A$.

d) Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n-1 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n-1 \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Sea $m \in A$ con $m > 1$, tenemos que $m \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica que $m+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(m+1)-1 = m$, por lo que $(m+1)-1 \in \mathbb{N}$. Como $m > 1$, por transitividad, $m > 0$, de donde sigue que $m+1 > 1$, por lo que $m+1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n-1 \in \mathbb{N}$. $\square$

e) Sean m y n números naturales. Si $n < m$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$. (*Resta* de naturales)

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A \coloneqq \{\, m \in \mathbb{N} \mid n < m,\ m-n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Si $m_0 \in A$ con $m_0 > 1$, tenemos que $n < m_0$ y $m_0 - n \in \mathbb{N}$ con $m_0 \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, sigue que $m_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Además, $m_0 < m_0 + 1$, y por transitividad $n < m_0 + 1$. Luego, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ tenemos que $(m_0 - n) + 1 = (m_0 + 1) - n \in \mathbb{N}$, por lo que $m_0 + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, se cumple que $A = \mathbb{N}$. $\square$

Corolario:

i) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n < x < n+1$, entonces x no es un número natural. (La *distancia* entre un número natural y su *sucesor* es 1).

Demostración: Por hipótesis, $n < x$, de donde sigue que $n + (-x+1) < x + (-x+1)$, osea, $n - x + 1 < 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que $x \in \mathbb{N}$, de la hipótesis $x < n+1$ sigue que $n+1-x \in \mathbb{N}$, por este teorema, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, tenemos que $1 \leq n+1-x$. Esto implica que $1 \leq n+1-x < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. $\square$

Nota: Otra forma de plantear esta proposición es la siguiente (ii):

ii) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $m-1 < x < m$, entonces x no es un número natural. (La *distancia* entre un número natural y su *antecesor* es 1).

Demostración: Sea $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $x < m$ y $m - 1 < x$, de donde obtenemos:

$$x + (-m+1) < m + (-m+1) \qquad\qquad (m-1)+1 < (x)+1$$
$$x + 1 - m < 1 \qquad\qquad m < x+1$$

Por hipótesis $x \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, sigue que $x+1 \in \mathbb{N}$. Como $m < x+1$, con $m \in \mathbb{N}$, por este teorema se verifica que $x+1-m \in \mathbb{N}$, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, sigue que $1 \leq x+1-m$. Esto implica que $1 \leq x+1-m < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. $\square$

iii) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo. (Principio del buen orden).

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$. Supongamos que A no tiene elemento mínimo.

Como $A \neq \varnothing$, se tiene que $\exists x \in A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$. Sabemos que 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, por lo que, en particular $1 \leq x$. Como A no tiene elemento mínimo, no puede ser el caso que $x = 1$, pues $1 \leq x, \forall x \in A$. De esto sigue que $1 < x$, y por este teorema, se verifica que $x - 1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x - 1 < x$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $x+1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x < x+1$. De este modo, tenemos que $x-1 < x < x+1$, pero por este teorema, esta desigualdad implica que x no es un número natural, lo que es una contradicción. Por tanto, A tiene elemento mínimo. $\square$

iv) Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$. (Principio de inducción matemática).

Demostración: Sea $S \neq \mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es no vacío (ya que de serlo, tendríamos $S = \mathbb{N}$). Por definición, $1 \in S$ y por esto, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Como $\mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$, por el principio del buen orden, tiene elemento minimo. Sea m el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, como $m \in \mathbb{N}$, sigue que $1 \leq m$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ y $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$ tenemos que $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, y por este teorema, $m - 1 \in \mathbb{N}$. Debido a que $m - 1 < m$ y m es el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, tenemos que $m - 1 \notin \mathbb{N} \setminus S$, osea $m - 1 \in S$. Luego, dado que S es un conjunto inductivo, se verifica que $(m-1)+1 = m \in S$ lo que es una contradicción. Por tanto, $S = \mathbb{N}$. $\square$

v) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por definición, $x > 0$, por lo que $n < n + x$. Por hipótesis, $x + n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, por este teorema, $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$. $\square$

Una nota sobre inducción matemática

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \left\{ n \;\middle|\; 0 < \frac{1}{n} \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$. Notemos que $1 \in A$, pues $0 < \frac{1}{(1)} \leq 1$. Luego, si $n \in A$, tenemos que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. También, $n < n + 1$, por lo que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Finalmente, como $n + 1 > 0$, sigue que $\frac{1}{n+1} > 0$, y por transitividad, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$, se verifica $n + 1 \in A$, y por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$. $\square$

El lector notará que la prueba consiste en:

1. Definir un subconjuto A de números naturales (el cual satisface la propiedad objetivo).

2. Demostrar que A es un conjunto inductivo:

- Exhibir que 1 pertenece a A (caso base).
- Plantear que algún número natural n pertenece a A (hipótesis de inducción o paso inductivo).
- Probar que $n + 1$ pertenece a A.

3. Enunciar el prinicipio de inducción matemática (que garantiza la propiedad para todo número natural).

Nota: No se exige que $n+1 \in A$ sea una consecuencia de que $n \in A$, sin embargo, este suele ser el caso; por lo que, si se prescinde del paso inductivo para probar que $n+1$ cumple la propiedad enunciada, es un buen hábito detenerse y comprobar el desarrollo, puede ser que se haya cometido un error o que en realidad no necesite inducción para la prueba.

Este *algoritmo* nos permite probar proposiciones sobre los números naturales; no obstante, la tradición de los libros de texto es definir de manera implícita el conjunto con el que se trabaja y —si acaso— enunciar el principio de inducción matemática al inicio de la prueba. Por ejemplo:

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procedemos por inducción.

i) Es claro que $n = 1$ satisface la desigualdad, pues $0 < \frac{1}{1} \leq 1$.

ii) Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir, supongamos que

$$0 < \frac{1}{k} \leq 1 \qquad \text{(hipótesis de inducción)}$$

iii) Demostraremos, a partir de la hipótesis de inducción, que la desigualdad se cumple también para $n = k+1$. Es decir, probaremos que

$$0 < \frac{1}{k+1} \leq 1$$

En efecto, notemos que $k < k+1$, de donde obtenemos que $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Además, como $k+1 > 0$, sigue que $\frac{1}{k+1} > 0$. Y de la hipótesis de inducción tenemos que

$$0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \leq 1$$

es decir,

$$0 < \frac{1}{k+1} \leq 1.$$

Por tanto, $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Sin embargo, el lector debería ser cuidadoso de no considerar el uso de inducción matemática como la única estratégia para demostrar proposiciones sobre los elementos de $\mathbb{N}$, por ejemplo, la proposición también puede ser probada por casos:

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Sabemos que $n \geq 1$, por lo que tenemos dos casos:

i) Si $n = 1$, tenemos que $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1$. Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

ii) Si $n > 1$, por transitividad $n > 0$, lo que implica que $\frac{1}{n} > 0$. Retomando la hipótesis,

$$\begin{gathered} n > 1 \\ n \cdot \frac{1}{n} > 1 \cdot \frac{1}{n} \\ 1 > \frac{1}{n} \end{gathered}$$

Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Como n es arbitrario, se verifica que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Números enteros

Defini\u0301ción:

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup \{ 0 \} \cup \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.
- Al conjunto $\mathbb{N} \cup \{ 0 \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros no negativos.
- Al conjunto $\{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^{-}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

a) ¿El conjunto de los números enteros es un campo (satisface los axiomas de campo)?

Respuesta: No, pues el axioma del inverso multiplicativo solo se satisface para 1 y -1.

b) Demuestre la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $a, b \in \mathbb{Z}$.

I) Si $a, b \in \mathbb{N}$, se verifica la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$.

II) Si $a = 0$ o $b = 0$, la suma es cerrada por la identidad aditiva.

III) Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$, entonces $-a, -b \in \mathbb{N}$, y por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, sigue que $(-a) + (-b) = -(a + b) \in \mathbb{N}$, por lo que $-\big(-(a + b)\big) = a + b \in \mathbb{Z}^-$ y a su vez, $a + b \in \mathbb{Z}$.

IV) Sin pérdida de generalidad, sea $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}^-$. Por axiomas de orden, $a + b = 0$, $a + b < 0$ o $a + b > 0$, en el primer caso se verifica la cerradura. Luego,

- **i)** Si $a + b > 0$, entonces $a > -b$, y como $-b \in \mathbb{N}$, por (c) de LE8, se tiene que $a - (-b) = a + b \in \mathbb{N}$.
- **ii)** Si $a + b < 0$, entonces $a < -b$, como $-b \in \mathbb{N}$, por (c) de LE8, se tiene que $(-b) - a = -(a+b) \in \mathbb{N}$, de donde sigue que $-\big(-(a + b)\big) = a + b \in \mathbb{Z}^-$.

$\square$

Observación: Como $1 \in \mathbb{Z}$, y la suma es cerrada en $\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}$ es un conjunto inductivo.

c) Demuestre la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Si $a, b \in \mathbb{N}$, se verifica la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$.

ii) Si $a = 0$ o $b = 0$, la suma es cerrada por la multiplicación por cero.

iii) Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $-a, -b \in \mathbb{N}$, y por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$, sigue que $(-a) \cdot (-b) = ab \in \mathbb{N}$.

iv) Sin pérdida de generalidad, sea $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \{\, -n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Notemos que $a \cdot (-b) = -(ab) \in \mathbb{N}$, por lo que $a \cdot b \in \mathbb{Z}^-$.

$\square$

d) Sea $s \in \mathbb{Z}$, demuestre que si $s < j < s + 1$, entonces $j \notin \mathbb{Z}$.

Demostración: Supongamos que $j \in \mathbb{Z}$. Tenemos tres casos:

I) Si $j = 0$, tenemos que $0 < s + 1$, de donde sigue que $s + 1 \in \mathbb{N}$, por definición (de $\mathbb{Z}$), pero como $s < 0$, obtenemos $s + 1 < 1$, lo que es una contradicción, pues todo número natural es mayor o igual a 1.

II) Si $j \in \mathbb{N}$, tenemos tres casos para s:

- **i)** Si $s = 0$, sigue que $s = 0 < j < 1 = s + 1$, pero esto es una contradicción, pues todo número natural es mayor o igual a 1.
- **ii)** Si $s \in \mathbb{N}$, por el corolario (i) de (e) de LE8, es una contradicción.
- **iii)** Si $-s \in \mathbb{N}$, se tiene que $-s > 0$, por lo que $s < 0$, de done sigue que $s + 1 < 1$, pero $j < s + 1$ y por transitividad, $j < 1$, lo que es una contradicción.

III) Si $-j \in \mathbb{N}$, sigue que $-j > 0$, por lo que $j < 0$, y por transitividad, $s < 0$, de esto sigue que $s \neq 0$ y $s \notin \mathbb{N}$, por lo que $-s \in \mathbb{N}$. Como $s < j$ y $j < s + 1$, sigue que $-j < -s$ y $-(s + 1) = -s - 1 < -j$; de este modo, $-s - 1 < -j < -s$, con $-s, -j \in \mathbb{N}$, pero se contradice el corolario (ii) de (e) de LE8.

En cualquier caso $j \notin \mathbb{Z}$. $\square$

e) Sean a y b números enteros. Se verifica que $a - b \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Si $a = b$, tenemos que $a - b = 0 \in \mathbb{Z}$. Luego, si $a \neq b$, tenemos que:

- Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $a - b = a$ o $a - b = -b$. En cualquier caso, $a - b \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, consdieremos los siguientes casos:

  I) Si $a > b$, y

  i) $b \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in \mathbb{N}$, y por la resta de naturales, $a - b \in \mathbb{N}$.

  ii) $b \in \mathbb{Z}^-$ y $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $-b \in \mathbb{N}$ en cuyo caso $a - b = a + (-b) \in \mathbb{N}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$.

  iii) $a, b \in \mathbb{Z}^-$ tenemos que $-a, -b \in \mathbb{N}$, y $-b < -a$. Por la resta de naturales $(-a) - (-b) = (-a) + b \in \mathbb{N}$. De donde sigue que $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.

  II) Si $a < b$, y

  i) $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $b \in \mathbb{N}$, por lo que $-a, -b \in \mathbb{Z}^-$, y $-b < -a$. Luego, por la resta de naturales, $(-a) - (-b) = -a + b \in \mathbb{N}$, de donde, $-(-a + b) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.

  ii) $a \in \mathbb{Z}^-$ y $b \in \mathbb{N}$, sigue que $-a \in \mathbb{N}$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, sigue que $-a + b \in \mathbb{N}$, luego $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.

  iii) $a, b \in \mathbb{Z}^-$, entonces $-a, -b \in \mathbb{N}$, y como $-b < -a$, se tiene que $(-a) - (-b) = -a + b \in \mathbb{N}$, por la resta de naturales. Así $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.

$\square$

Notación sigma

Denotamos la suma de los elementos del conjunto A como

$$\sum_{a \in A} a$$

Ejemplos:

1. $A = \{ 2, 1/3, 3 \}$

$$\sum_{a \in A} a = 2 + 1/3 + 3 = 16/3$$

2. $B = \{ 0 \}$

$$\sum_{b \in B} b = 0$$

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 0 & , \text{ si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

de la sumatoria. Llamamos al conjunto $\{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \}$, el conjunto iterable de $\sum_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera la sumatoria. El lector debería verificar este hecho.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{5} i^2 &= (2)^2 + \sum_{i=3}^{5} i^2 \\
&= 4 + (3)^2 + \sum_{i=4}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + (4)^2 + \sum_{i=5}^{5} i^2 && (*) \\
&= 4 + 9 + 16 + (5)^2 + \sum_{i=6}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + 16 + 25 + 0 \\
&= 54
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-3}^{-1} 2m &= 2(-3) + \sum_{m=-2}^{-1} 2m \\
&= -6 + 2(-2) + \sum_{m=-1}^{-1} 2m && (\dagger) \\
&= -6 + -4 + 2(-1) + \sum_{m=0}^{-1} 2m \\
&= -6 + -4 + -2 + 0 \\
&= -12
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3} 2^n &= 2^0 + \sum_{n=1}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2^1 + \sum_{n=2}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + \sum_{n=3}^{3} 2^n && (\ddagger) \\
&= 1 + 2 + 2^3 + \sum_{n=4}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + 8 + 0 \\
&= 11
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{j=0}^{-1} j = 0$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} &= \frac{k}{(1)+1} + \sum_{n=2}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{(2)+1} + \sum_{n=3}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{(3)+1} + \sum_{n=4}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + 0 \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \\
&= \frac{13}{12}k
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{k}{n+1}\right) &= \sum_{k=-1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= \frac{13}{12}(-1)+\sum_{k=0}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+\frac{13}{12}(0)+\sum_{k=1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+0+\frac{13}{12}(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

El lector notará que, en el caso en que los límites inferior y superior son iguales $(*, \dagger, \ddagger)$, la imagen de la sumatoria es el elemento típico *evaluado* en el índice, es decir, tenemos la siguiente

Observación: Si $a = b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales de la sumatoria)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \le m \le 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + 0 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

A partir de esto tenemos que:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 0 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

El lector notará también que la suma del primer termino hasta el ultimo es igual a la suma del ultimo hasta el primero, es decir, tenemos la siguiente

Proposición: Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Sumatoria inversa)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a)=1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + \sum_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) + f(b) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + f(a) && \text{Conmutatividad}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + f(a+k+1) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1) + f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) &&\\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) &&
\end{aligned}$$

□

Observación: Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b=a$, entonces $(b-a)=0$, y por índices iguales de la sumatoria se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n)$.
- Por definición, si $b<a$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = 0$, que en particular se verifica si $b-a \in \{\, -n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

A partir de esta observación y de la Sumatoria Inversa se tiene que

Definición: Si $(b-a) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} 0 & \text{, si } a>b \\ f(n) & \text{, si } a=b \\ f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) & \text{, si } a<b. \end{cases}$$

De este modo, siempre que la *distancia* entre los límites de la sumatoria sea un número entero, contaremos con una definición alternativa para la sumatoria. Dado que contamos con una definición que puede ser planteada de dos maneras, podemos utilizar cualquiera (de las dos) a conveniencia; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= (-1)^3 + \sum_{n=0}^{1} n^3 \\ &= -1 + 0^3 + \sum_{n=1}^{1} n^3 \\ &= -1 + 0 + 1^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= 1^3 + \sum_{n=-1}^{0} n^3 \\ &= 1 + 0^3 + \sum_{n=-1}^{-1} n^3 \\ &= 1 + 0 + (-1)^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Lista de Ejercicios 11 (LE11)

Sea $a, b, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a)

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n) \qquad \text{(Conmutatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I. Primero probaremos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, que la imagen de la sumatoria siempre es un número real; la motivación es que, al estar definida *recursivamente*, la función podría parecer asignar números reales a funciones, pero este no es el caso.

Por definición, si $a > b$, entonces, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = 0 \in \mathbb{R}$; si $a = b$, entonces $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = f(n) \in \mathbb{R}$. Para el caso $a < b$ procedemos por inducción:

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\ &= f(n+1) + \sum_{n=a}^{a} f(n) \\ &= f(n+1) + f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+1) \in \mathbb{R}$ y $f(n) \in \mathbb{R}$ y la suma es cerrada en $\mathbb{R}$ se tiene que $\left(f(n+1) + f(n)\right) \in \mathbb{R}$, osea, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

ii) Supongamos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, con $b = a + k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) \\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+k+1) \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=a}^{a+k} f(n) \in \mathbb{R}$ (hip. ind.), se tiene que $\left(f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, es decir, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

II. Finalmente demostramos la Conmutatividad de la sumatoria.
Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, sigue que

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

$\square$

Corolario:

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) \cdot \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) \cdot \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

Demostración: Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, la igualdad se verifica por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$. $\square$

b)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big) \qquad \text{(Asociatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = 0 = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = f(n) + g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) &= \Big(f(a) + g(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) \\
&= f(a) + g(a) + \Big(f(a+1) + g(a+1)\Big) \\
&= \Big(f(a) + f(a+1)\Big) + \Big(g(a) + g(a+1)\Big) \qquad \text{Asociatividad (de la suma)} \\
&= \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) + \left(g(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+1} g(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n) + g(n)\Big) = \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(f(n)+g(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1)+g(a+k+1)\Big)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n)+g(n)\Big) \\
&= f(a+k+1)+g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)+\sum_{n=a}^{a+k} g(n) \qquad \text{Hip. Inducción} \\
&= \left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right)+\left(g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)+\sum_{n=a}^{a+k+1} g(n)
\end{aligned}$$

□

c) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(c \cdot f(n)\Big) \qquad \text{(Distributividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = c \cdot 0 = \sum_{n=a}^{b}\Big(c \cdot f(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = c \cdot f(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(c \cdot f(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(c \cdot f(n)\Big) &= c \cdot f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} c \cdot f(n) \\
&= c \cdot f(a) + c \cdot f(a+1) \\
&= c \cdot \Big(f(a)+f(a+1)\Big) \\
&= c \cdot \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) \\
&= c \cdot \sum_{n=a}^{a+1} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c \cdot f(n)\Big) = c \cdot \sum_{n=a}^{a+k} f(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big)\\
&= c\cdot f(a+k+1)+c\cdot\sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Inducción}\\
&= c\cdot\left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario: Sea $s,t\in\mathbb{R}$

i)

$$s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)\Big)+\sum_{n=a}^{b}\Big(t\cdot g(n)\Big) && \text{Distributividad de la sumatoria}\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

$\square$

ii)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} f(n)+(-1)\sum_{n=a}^{b} g(n)\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)+(-1)\cdot g(n)\Big) && \text{Por (i) de este corolario}\\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

d)

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

Demostración: Sea $n\in D(f)$ arbitrario pero fijo. Notemos que en la sumatoria $\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)$, $f(n)$ es constante, por lo que

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

De la misma manera, en la sumatoria (de índice n) $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\Big)$, se tiene que $\sum_{m=s}^{t}g(m)$ es constante, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\right) &= \left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\cdot\left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\\ &= \left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\end{aligned}$$

□

e) Sea $c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

Demostración:

I) Se comprueba para $a=b$,

$$\sum_{n=a}^{b} c = c = 1\cdot c = (b-a+1)\cdot c$$

II) Si $a<b$ se tiene que

i) Se verifica para $b=a+1$,

$$\sum_{n=a}^{a+1} c = c + \sum_{n=a+1}^{a+1} c = c+c = 2c = (2+a-a)c = (1+1+a-a)c = \Big((a+1)-a+1\Big)c$$

ii) Supongamos que se cumple para $b=a+k$, con $k\in\mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} c = \Big((a+k)-a+1\Big)c$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} c &= c + \sum_{n=a}^{a+k} c\\ &= c + \Big((a+k)-a+1\Big)c && \text{Hip. Inducción}\\ &= \Big(1+\big((a+k)-a+1\big)\Big)c\\ &= \Big((a+k+1)-a+1\Big)c\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $a\leq b$, pues si $a>b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} c = 0 \neq (b-a+1)c$; únicamente en el caso que $c=0$, se cumpliría la igualdad con $a>b$.

Definición: $(b-a+1)$ es el número de *iteraciones*, *cíclos*, o *sumandos* de la sumatoria $\sum_{n=a}^{b} f(n)$.

Corolario: Si $c\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demostración: $\sum_{i=1}^{n} c = \big((n-1)+1\big)c = nc$. □

f) Si $a\leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = f(b+1)-f(a) \qquad \text{Propiedad telescópica (de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = f(n+1)-f(n) = f(b+1)-f(a)$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+1}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) &= \Big(f(a+1)-f(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1}\Big(f(n+1)-f(n)\Big)\\ &= \Big(f(a+1)-f(a)\Big) + \Big(f\big((a+1)+1\big)-f(a+1)\Big)\\ &= f\big((a+1)+1\big)-f(a)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = f\big((a+k)+1\big)-f(a)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1+1)-f(a+k+1)\Big) + \sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n+1)-f(n)\Big)\\ &= \Big(f(a+k+1+1)-f(a+k+1)\Big) + f(a+k+1)-f(a)\\ &= f(a+k+1+1)-f(a)\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = 0 \neq f(b+1)-f(a)$ únicamente el caso en que $f(b+1) = f(a)$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

g) Sea $\ell, m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m\cdot n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m\cdot n - c)$$

I) Notemos que si $c = 0$, la proposición es *tautológica*; por lo que, en adelante, suponemos que $c \neq 0$.

II) Si $a > b$, no importa qué valores tome ℓ o m, la proposición se verifica por definición:

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m\cdot n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m\cdot n - c)$$

III) Si $a = b$ y $m = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a + c) - c\big) \\
&= f(\ell + 0 - c) \\
&= f(\ell - c) \\
&\neq f(\ell) \\
&= f(\ell + 0) \\
&= f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

IV) Si $a = b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + m(a + c) - c\big) \\
&= f\big(\ell + ma + mc - c\big) \\
&\neq f\big(\ell + ma\big) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

V) Si $a = b$ y $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 1 \cdot (a + c) - c\big) \\
&= f(\ell + a) \\
&= f(\ell + 1 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

VI) Si $a < b$ y $m = 0$.

Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + 0 \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= f(\ell) + f(\ell) \\
&= 2f(\ell) \\
&\neq 2f(\ell - c) \\
&= f(\ell - c) + f(\ell - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + 0 \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VII) Si $a < b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$, Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + f(\ell + m \cdot a) \\
&= f(\ell + ma + m) + f(\ell + ma) \\
&\neq f(\ell + ma + mc - c) + f(\ell + ma + mc + m - c) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + m \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VIII) Si $a < b$, $m = 1$,

i) Si $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + n) \\
&= f\big(\ell + (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + (a+c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a+1+c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, supenmos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f(\ell + n - c)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(\ell + n) &= f\Big(\ell + (a+k+1)\Big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + (a+c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a+k+1+c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f(\ell + n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que en general, planteamos la proposición como sigue:
Si $c \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + n - c) \qquad \text{(Cambio de límites 1)}$$

h) Sea $c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big) \qquad \text{(Cambio de límites 2)}$$

Demostración:

i) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big)$$

ii) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f\big(m-(n-c)\big)\\
&= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big)\\
&= f(m-a)\\
&= \sum_{n=a}^{a} f(m-n)\\
&= \sum_{n=a}^{b} f(m-n)
\end{aligned}$$

iii) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m-(n-c)\big)\\
&= f(m-a) + f\Big(m-\big((a+c+1)-c\big)\Big)\\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big)\\
&= f(m-a) + f(m-a-1)\\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big)\\
&= f(m-a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(m-n)\\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos qu ese verifica para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+k+1+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-(n-c)\big)\\
&= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

$\square$

i) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm (n-c)\big) \qquad \text{(Cambio de índice)}$$

Demostración:

i) Por el cambio de límites 1 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m+n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m+(n-c)\big)$$

ii) Por el cambio de límites 2 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m-n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

$\square$

Nota: El lector encontrará que en ocasiones, en lugar de utilizar este teorema simplemente se trabaja con susbsituciones sobre el índice, especialmente para funciones identidad. Por ejemplo, tomando la sumatoria de $f(n) = n$, que itera de 1 hasta b,

$$\sum_{n=1}^{b} n$$

Sea $m = n-1$, entonces $m+1 = n$. Cuando el límite inferior $n = 1$, se tiene que $m = 1-1 = 0$. Luego, al considerar la *distancia* entre los límites, tenemos que

$$\begin{aligned} b-n &= b-(m+1) \\ &= (b-1)-m \end{aligned}$$

Al sustituir n por m en la sumatoria, tenemos

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{m=0}^{b-1} (m+1)$$

j) Si $s \leq j \leq t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Partir la suma)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \leq j \leq t$, entonces $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j-1} f(n) + \sum_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\ &= f(s) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) + \sum_{n=s+1}^{t} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+1} f(n) \\ &= f(j+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + f(j+1) && \text{Conmutatividad} \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que $\sum_{n=s}^{j+k} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+k+1} f(n) \\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j+k} f(n) \\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) + f(j+k+1) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k+1} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $s \leq j \leq t$, pues la proposición no es válida para todo $s \geq j \geq t$:

I) Si $s > j > t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

II) Si $s > j = t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t}$$

III) Si $s = j > t$,

i) $\sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) = f(n) + 0 = f(n)$.

ii) $\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0$.
El lector notará que para partir la suma en este caso, debe cumplirse que $f(n) = 0$, pero esto dependerá de cada función y de los íncides, por lo que en general, $f(n) \neq 0$, por ejemplo para cualquier sumatoria $\sum_{n=a}^{b} c$, donde $c \neq 0$.

Corolario:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) &= \sum_{n=0}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} f(n) + \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

k)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b-a} f(b-n)$$

Demostración:

I) Si $b < a$, entonces $b - a < 0$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} f(n)$$

II) Si $b = a$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{0} f(b-n) \\
&= f(b-0) \\
&= f(b) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

III) Si $b > a$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{(a+1)-a} f(a+1-n) \\
&= \sum_{n=0}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1-0) + \sum_{n=1}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1) + f(a+1-1) \\
&= f(a+1) + f(a) \\
&= f(a) + f(a+1) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(n) = \sum_{n=0}^{(a+k)-a} f(a+k-n) = \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n)$$

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f\big(a+k-(-1)\big) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) \\
&= \sum_{n=-1}^{k} f(a+k-n) && \text{Definición (de sumatoria)} \\
&= \sum_{n=-1+(1)}^{k+(1)} f\big(a+k-(n-1)\big) && \text{Cambio de índice} \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} f(a+k+1-n)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario:

$$\sum_{n=0}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(b-n)$$

Demostración: La porposición se verifica por el teorema para $a = 0$. $\square$

Una nota sobre la notación sigma

Extensión

Usualmente, el alcance de una suma se extiende hasta el primer símbolo de suma o resta que no está entre paréntesis o que no es parte de algún término más amplio (por ejemplo, en el numerador de una fracción), de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \neq \sum_{i=1}^{n} \big(f(i) + 1\big)$$

dado que esto puede resultar confuso, generalmente es más seguro encerrar el argumento de la sumatoria entre paréntesis (como en la segunda forma arriba) o mover los términos finales al principio (como en la tercera forma arriba). Una excepción (a la confusión) es cuando se suman dos sumas, como en

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

Variables indexadas

Definición: Sea $I, A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función dada por

$$\begin{aligned} f : I &\to A \\ i &\mapsto a_i = f(i) \end{aligned}$$

donde $i \in I$, y la imagen $f(i)$ de i bajo la función f es denotada por a_i. El símbolo a_i indica el elemento de A indexado por $i \in I$. La función f establece una familia de elementos en A indexada por I, denotada por $(a_i)_{i \in I}$, o simplemente (a_i) si el conjunto índice es conocido.

Usualmente la sumatoria se presenta con la notación índice para conjuntos finitos indexados. Por ejemplo,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

en la cual se tiene una función

$$\begin{aligned} f : N &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

donde $N \subseteq \mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo generalizada)}$$

Demostración:

i) Se verifica para $n = 2$, por la desigualdad del triángulo,

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i\right| = \left|a_1 + \sum_{i=2}^{2} a_i\right| = |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| = |a_1| + \sum_{i=2}^{2} |a_i| = \sum_{i=1}^{2} |a_i|$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$$

iii) Notemos que $|a_{k+1}| \leq |a_{k+1}|$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i\right| \\
&\leq |a_{k+1}| + \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| && \text{Desigualdad del triángulo} \\
&\leq |a_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k} |a_i| && \text{Suma } \textit{vertical} \text{ de desigualdades} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|
\end{aligned}
$$

□

Límites no enteros

En principio, la sumatoria está bien definida para casos en los que los límites no son enteros, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &= 1/2 + \sum_{i=3/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + \sum_{i=5/2}^{9/4} i \\
&= 1/2 + 3/2 + 0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Sin embargo, este uso no es común. El ejemplo también sirve para ilustrar que, para la segunda definición de sumatoria, es necesario que la *distancia* entre el límite superior y el inferior sea un entero. Por ejemplo, tratar lo siguiente sería un error

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1/2}^{9/4} i &\neq 9/4 + \sum_{i=1/2}^{5/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + \sum_{i=1/2}^{1/4} i \\
&\neq 9/4 + 5/4 + 0 \\
&= 14/4 \\
&= 7/2 \\
&= 3 + 1/2
\end{aligned}
$$

Sumatorias anidadas

Considere las siguientes sumatorias anidadas:

$$
\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n}}^{\text{A}} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} (i+1)(j+1) \right)}^{\text{B}}
$$

Notemos que la variable iterable (i) de la sumatoria A, determina el valor del límite superior de la sumatoria B, por lo que únicamente requerimos un valor n para el límite superior de la sumatoria A para realizar el cálculo. Sea $n = 1$. Procediendo con la (primera) definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) + \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1)(0+1) + \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= (1)(1) + (1+1)(0+1) + \sum_{j=1}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= 1 + 2 + (1+1)(1+1) \\
&= 1 + 2 + 4 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Es claro que, en este caso ($n = 1$), la distancia entre los límites de las sumatorias es un número entero, por lo que podemos proceder con la segunda definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) + \sum_{i=0}^{0}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1+1)(1+1) + \sum_{j=0}^{0}(1+1)(j+1) + \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) \\
&= (2)(2) + (1+1)(0+1) + (0+1)(0+1) \\
&= 4 + 2 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}$$

También podríamos proceder con una definición para la sumatoria A y con otra para B. El lector debería verificar este hecho.

Notación pi

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$. Definimos al productorio de a hasta b de f como sigue:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 1 & , \text{ si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

del producto. Llamamos al conjunto $\{ a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \}$, el conjunto iterable de $\prod_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera el productorio. El lector debería verificar este hecho.

Lista de Ejercicios

a) Si $a = b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales del productorio)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\prod_{n=a}^{b} f(n) = \prod_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{ a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a-a) \} = \{ a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} f(n) &= \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot 1 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: A partir de este resultado tenemos que:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 1 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

b) Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Productorio inverso)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a) = 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot \prod_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) \cdot f(b) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) \cdot f(a) && \text{Conmutatividad} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b - a = k + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) \cdot f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1) \cdot f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

□

c)

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right) \qquad \text{(Propiedad multiplicativa)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = 1 = (1)(1) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

II) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

III) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n)g(n) &= f(a)g(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)g(n) \\
&= f(a)g(a) \cdot f(a+1)g(a+1) \\
&= f(a)f(a+1) \cdot g(a)g(a+1) \\
&= f(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) \cdot g(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)g(n) &= f(a+k+1)g(a+k+1)\cdot\prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n)\\
&= f(a+k+1)g(a+k+1)\cdot\left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\cdot g(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right)\\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En particular, para una función constante $g(n) = c$, se tiene que

$$\prod_{n=a}^{b} (f(n)\cdot c) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} c\right)$$

d) Si $f(n) \neq 0$ y $a \leq b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{f(a)} \qquad \text{Propiedad telescópica (del productorio)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{a}$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+1)}{f(a)}\cdot\prod_{n=a+1}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)}\\
&= \frac{f(a+1)}{f(a)}\cdot\frac{f(a+1+1)}{f(a+1)}\\
&= \frac{f(a+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(a+k+1)}{f(a)}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)}\cdot\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)}\\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)}\cdot\frac{f(a+k+1)}{f(a)} && \text{Hip. Ind.}\\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

$\square$

Potenciación

Definición: Sea a un número real y n un entero no negativo, y f una función dada por $f(n) = a$. Definimos la enésima potencia de a como sigue:

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$$

Decimos que a es la base, y que n es el exponente.

Observación: Sea $a \in \mathbb{R}$,

- $a^1 = \prod_{i=1}^{1} a = a$.
- $a^0 = \prod_{i=1}^{0} a = 1$.

Notación: Sea $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Observación:

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, demuestre lo siguiente:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. (Potencias de misma base)

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^0 \cdot a^n \\ &= 1 \cdot a^n \\ &= a^n \\ &= a^{n+0} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

II) Si $m, n \in \mathbb{N}$,

i) Se verifica para $n = 1$,

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= \prod_{i=1}^{m+1} a \\ &= a \cdot \prod_{i=1}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Definición} \\ &= a^m \cdot a^1 \end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $k \in A$, tenemos que $a^{m+k} = a^m \cdot a^k$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
a^{m+(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m+(k+1)} a \\
&= a \cdot \prod_{i=1}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^{m+k} && \text{Definición} \\
&= a \cdot a^{m} \cdot a^{k} && \text{Hip. Ind.} \\
&= a^{m} \cdot a \cdot a^{k} \\
&= a^{m} \cdot a \cdot \prod_{i=1}^{k} a && \text{Definición} \\
&= a^{m} \cdot \prod_{i=1}^{k+1} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a^{m} \cdot a^{k+1} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k+1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

b) $1^n = 1$. (Identidad multiplicativa)

Demostración:

I) $1^0 = 1$.

II) **i)** Observemos que $1^1 = 1$.

ii) Supongamos que $1^k = 1$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1^k \cdot 1^1 && \text{Potencias de misma base} \\
&= 1^k \cdot 1 && \text{Observación} \\
&= 1^k \\
&= 1 && \text{Hip. Inducción}
\end{aligned}$$

$\square$

c) Si $b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. (Potencia de un *cociente*)

Demostración:

I) Si $n = 0$, se tiene que $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$.

II) Sea $A = \left\{ n \mid \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right\}$.

i) Notemos que $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$. Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$, tenemos $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{1} && \text{Potencias de misma base} \\
&= \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) && \text{(i) y (ii)} \\
&= \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} \\
&= \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}$$

$\square$

d) $(ab)^n = a^n b^n$. (Potencia de un producto)

Demostración:

I) Si $n = 0$, $(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$.

II) **i)** Se verifica para $n = 1$, pues $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.

ii) Supongamos que la igualdad se verifica para $n = k$, es decir, suponemos que

$$(ab)^k = a^k b^k$$

iii) Si $n = k + 1$ sigue que

$$\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) && \text{Potencias de misma base} \\
&= a^k b^k (ab) && \text{Hip. Inducción} \\
&= \left(a^k \cdot a\right)\left(b^k \cdot b^k\right) && \\
&= a^{k+1} b^{k+1} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}$$

$\square$

e) $a^{mn} = (a^m)^n$. (Potencia de una potencia)

Demostración:

I) Si $m = 0$, $a^{0 \cdot n} = 1 = 1^n = (a^0)^n$. Análogamente, si $n = 0$, $a^{m \cdot 0} = 1 = (a^m)^0$.

II) Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A := \{\, m \mid (a^m)^n = a^{mn} \,\}$.

i) Es claro que $1 \in A$, pues $(a^1)^n = (a)^n = a^n = a^{1 \cdot n}$.

ii) Si $k \in A$ tenemos que $(a^k)^n = a^{kn}$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{k+1}\right)^n &= \left(a^k \cdot a\right)^n && \text{Potencias de misma base} \\
&= \left(a^k\right)^n \cdot a^n && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^{kn} \cdot a^n && \text{Hip. Inducción} \\
&= a^{kn+n} && \text{Potencias de misma base} \\
&= a^{(k+1)n} && \text{Distributividad}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k + 1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

f) Sea $a \neq 0$, se verifica que

$$a^{-mn} = \left(a^{-m}\right)^n = \left(a^{-n}\right)^m \qquad \text{(Potencia negativa)}$$

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= \left(a^{-n}\right)^0 \\
&= \left(a^{-n}\right)^m
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
a^{-mn} &= a^0 \\
&= 1 \\
&= 1^n \\
&= \left(a^0\right)^n \\
&= \left(a^{-m}\right)^n
\end{aligned}$$

II) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{ n \mid a^{-mn} = (a^{-m})^n = (a^{-n})^m \}$.

i) Notemos que

$$a^{-m\cdot 1} = a^{-m} = \left(a^{-m}\right)^1$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^1}\right)^m && \text{Definición}\\
&= \frac{1^m}{a^m} && \text{Potencia de un cociente}\\
&= \frac{1}{a^m} && \text{Identidad multiplicativa}\\
&= a^{-m} && \text{Definición}\\
&= a^{-m\cdot 1}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Supongamos que

$$a^{-mk} = (a^{-m})^k = (a^{-k})^m$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{-(k+1)}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^{k+1}}\right)^m && \text{Definición}\\
&= \frac{1^m}{\left(a^{k+1}\right)^m} && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia}\\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-m}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{a^m}\right)^{k+1} && \text{Notación}\\
&= \frac{1}{\left(a^m\right)^{k+1}} && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia}\\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

g) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \right\}$.

i) Si $m = 1$, se tiene que

$$a^{m-1} = a^{1-1} = a^0 = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a^m}{a^1}$$

ii) Si $m > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^m}{a^1} &= \frac{a^m}{a}\\
&= \frac{\prod_{i=1}^m a}{a} && \text{Definción}\\
&= \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{m-1} a}{a} && \text{Produdctorio inverso}\\
&= \prod_{i=1}^{m-1} a\\
&= a^{m-1} && \text{Definción}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

iii) Supongamos que $\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$.

iv) Notemos que

$$\begin{aligned}
a^{m-(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m-(k+1)} a && \text{Definición} \\
&= \prod_{i=1}^{m-k-1} a \\
&= \left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m-k-1}\right) a \\
&= \frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot \prod_{i=1}^{m-k-1}\right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \prod_{i=1}^{m-k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= \frac{1}{a} \cdot a^{m-k} && \text{Definición} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^m}{a^k} && \text{Hip. Inducción} \\
&= \frac{a^m}{a \cdot a^k} \\
&= \frac{a^m}{a^{k+1}} && \text{Potencia de misma base}
\end{aligned}$$

□

Nota: Con esta prueba se generaliza la Potencia de misma base para $\mathbb{Z}$, pues

i) Sin pérdida de generalidad, si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{a^n}{a^{-m}}$, por notación, donde $-m \in \mathbb{N}$, y como hemos probado,

$$\frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$

ii) Si $m, n \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$ donde $-m, -n \in \mathbb{N}$, y como hemos probado

$$\frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

h) Generalize la Potencia de un *cociente* para $\mathbb{Z}$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} && -n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} && \text{Potencia de un } \textit{Cociente} \\
&= \frac{b^{-n}}{a^{-n}} && \text{Regla del sandwich} \\
&= \frac{a^n}{b^{-(-n)}} && \text{Notación} \\
&= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}$$

i) Generalize la Potencia de un producto para $\mathbb{Z}$. Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned}
(ab)^n &= \frac{1}{ab^{-n}} && \text{Notación } (-n \in \mathbb{N}) \\
&= \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^n b^n && \text{Observación}
\end{aligned}$$

j) Generalize la Potencia de una potencia para $\mathbb{Z}$.

i) Si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n && \text{Notación}\\ &= \frac{1^n}{(a^{-m})^n} && \text{Potencia de un cociente}\\ &= \frac{1}{a^{-mn}} && \text{Potencia negativa}\\ &= a^{mn} && \text{Observación}\end{aligned}$$

ii) Si $n \in \mathbb{Z}^-$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \frac{1}{(a^m)^{-n}} && \text{Notación}\\ &= \frac{1}{(a^{-mn})} && \text{Potencia negativa}\\ &= a^{mn} && \text{Notación}\end{aligned}$$

iii) Si $n, m \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $mn \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $a^{mn} = (a^m)^n$, como hemos probado.

k) Sea $a, b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{Potencia de un } \textit{cociente}\\ &= \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^n && \text{Corolario de regla del sandwich}\\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{-1\cdot n} && \text{Potencia de una potencia}\\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}\end{aligned}$$

□

Una nota sobre la potenciación

Hemos definidio la potencia a partir de un índice inferior igual a 1, sin embargo, podemos extender la definición para índices $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$. Dada una función $f(n) = a$ tenemos que

$$\prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Demostración:

I) Si $m = n$,

$$\begin{aligned}\prod_{i=m}^{n} a &= a && \text{Índices iguales del productorio}\\ &= a^1\\ &= a^{0+1}\\ &= a^{n-m+1}\end{aligned}$$

II) Si $m < n$,

i) Se verifica para $n = m + 1$,

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=m}^{m+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^m && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= a^{m+1} && \text{Potencias de misma base} \\
&= a^{(m+1)-m+1}
\end{aligned}
$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = m + k$, es decir, suponemos que

$$
\prod_{i=m}^{m+k} a = a^{(m+k)-m+1}
$$

iii) Notemos que

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=m}^{m+k+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^{(m+k)-m+1} && \text{Hip. Ind.} \\
&= a^{(m+k+1)-m+1} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}
$$

$\square$

Observación: El lector debería verificar que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$, siempre se tiene que $n - m + 1$ es un número natural.

Nota: El lector notará que $n - m + 1$ es el número de *iteraciones*, o *cíclos*, análogo al definido en la sumatoria.

Teorema binomial

Definición: Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}}$ una familia indexada de números reales; un polinómio es una expresión *formal*:

$$
\sum_{k=0}^{n} a_k x^k
$$

Decimos que

- $a_k x^k$ es el k-ésimo término,
- a_k es el coeficiente del k-ésimo término,
- x^k es la indeterminada del k-ésimo término,
- el *grado* es la mayor k para la cual $a_k \neq 0$,

del polinomio.

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, denotamos al factorial de n como

$$
n! := \prod_{i=1}^{n} i
$$

Observación: $0! = 1$.