Cálculo I

Darvid
darvid.torres@gmail.com

August 22, 2022

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Observación. $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $|a| \geq \pm a$.

b) $|ab| = |a||b|$.

c) $|a| = |-a|$.

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$. Desigualdad del triángulo.

e) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) $|a| < b$ si y solo si $-c < b < c$.

g) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

h) $|a|^2 = a^2$.

Demostración

a)
- **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, así, $|a| \geq a$. Luego, $-a \leq 0$, de donde sigue que $a \geq -a$. Finalmente, $|a| \geq -a$.
- **ii)** Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, así, $|a| \geq -a$. Luego, $-a > 0$, de donde sigue que $-a > a$. Finalmente, $|a| \geq a$.

En cualquier caso, $|a| \geq \pm a$.

b)
- **i)** Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
- **ii)** Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
- **iii)** Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.

c) **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$. Luego, $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. Luego, $-a > 0$ por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

d) **i)** Si $0 \leq a + b$, entonces $|a + b| = a + b$. Además, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$. Luego, $a + b \leq |a| + |b|$. Así, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Si $0 > a + b$, entonces $|a + b| = -a - b$. Además, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$. Luego, $-a - b \leq |a| + |b|$. Así, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

e) **i)** Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) **i)** Supongamos que $|b| < c$. Por (a) de LE4, $\pm b \leq |b|$, de donde sigue que $-b < c$ y $b < c$. Luego, $-c < b$. De este modo, $-c < b < c$.

ii) Supongamos que $-c < b < c$. Luego,

1) Si $b \geq 0$, entonces $|b| = b$. Por lo que $|b| < c$.

2) Si $b < 0$, entonces $|b| = -b$. Por hipótesis, $-c < b$, por lo que $-b < c$. Así $|b| < c$.

g) Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b| \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| - |a| &\leq |b-a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, aplicando (f) de LE4 en (1) y (2), $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

h) Por (o) de LE3, $a^2 \geq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} a^2 &= |a^2| \\ &= |a \cdot a| \\ &= |a| \cdot |a| && \text{Por (b) de LE4} \\ &= |a|^2 \end{aligned}$$

$\square$