Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: funciones

Torres Brito David Israel

September 12, 2022

1. Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$0 \leq 1 - x^2$$
$$x^2 \leq 1$$
$$\sqrt{x^2} = |x| \leq 1 = \sqrt{1}$$

Tenemos dos casos:

a) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x \leq 1$. Por lo que $dom(f) = [0, 1]$.

b) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x \leq 1$, osea, $-1 \leq x$. Por lo que $dom(f) = [-1, 0]$.

Por tanto, $dom(f) = [0, 1] \cup [-1, 0]$.

ii) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$

$dom(f) = \mathbb{R}$.

iii) $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$

como $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $dom(f) = \mathbb{R}$.

iv) $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-2}$

Tenemos que $1 - x \neq 0$ y $x - 2 \neq 0$. Entonces, $x \neq 1$ y $x \neq 2$. Por lo que $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 1, 2 \}$.

v) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$

Tenemos que $x^2 - 1 \geq 0$ (a) y $\sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ (b).

1)

$$0 \leq x^2 - 1$$
$$1 \leq x^2$$
$$\sqrt{1} = 1 \leq |x| = \sqrt{x^2}$$

Tenemos dos casos:

a) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x \leq 1$.

b) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x \leq 1$, osea, $-1 \leq x$.

2)

$$1 \leq \sqrt{x^2 - 1}$$
$$1^2 = 1 \leq |x^2 - 1| = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2$$

Tenemos dos casos:

a) Si $x^2 - 1 \geq 0$, obtenemos los casos de (1).

b) Si $x^2 - 1 < 0$, entonces $|x^2 - 1| = -x^2 + 1 \geq 1$, osea, $0 \geq x^2$, lo que es solo es válido cuando $x = 0$.

Por tanto, $dom(f) = [-1, 1]$.

vi) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
Tenemos que $x + 1 \neq 0$, por lo que $x \neq -1$. Entonces $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$.

2. Si $f(x) = 1/(1+x)$, calcule las siguientes expresiones:

i) $f\big(f(x)\big)$.

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) &= f\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\frac{1+x}{1+x} + \frac{1}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\frac{2+x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x}{2+x} \end{aligned}$$

ii) $f(1/x)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{1+x}{x}} \\ &= \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

iii) $1/f(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\frac{1}{1+x}} \\ &= \frac{1+x}{1} \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

iv) $f(cx)$.

$$\frac{1}{1+cx}$$

v) $f(x+y)$

$$\frac{1}{1+x+y}$$

vi) $f(x)+f(y)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} &= \frac{(1+y)+(1+x)}{(1+x)(1+y)}\\ &= \frac{2+x+y}{1+x+y+xy}\end{aligned}$$

3. Sean f, g y h tres funciones. Demuestre o de un contraejemplo para determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$. La afirmación es falsa.

Contraejemplo: sean $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x, h(x)=\frac{1}{x}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}f\circ(g+h) &= f(g+h)\\ &= f\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= f\left(\frac{2x+1}{x}\right)\\ &= \sqrt{\frac{2x+1}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\circ g + f\circ h &= f(g(x))+f(h(x))\\ &= f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Evaluando $x=1$ en ambas funciones tenemos que $f\circ(g+h)=\sqrt{3}\neq 2 = f\circ g + f\circ h$.

ii) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$. La afirmación es verdadera, como consecuencia inmediata de la definición de composición de funciones.

Por definición, $(g+h)\circ f$ implica evaluar elementos de la imágen de f en la suma de $g+h$, lo que a su vez implica evaluar g y h en elementos de la imágen de f simultáneamente y luego sumar $g(f(x))$ y $h(f(x))$, es decir $g\circ f + h\circ f$.

iii) $\frac{1}{f\circ g} = \frac{1}{f}\circ g$. La afirmación es verdadera, como consecuencia inmediata de la definición de composición de funciones.

Por definición, $\frac{1}{f}\circ g$ implica evaluar elementos de la imágen de g en f, conservando la forma $\frac{1}{f}$, es decir, $\frac{1}{f\circ g}$.

iv) $\frac{1}{f\circ g} = f \circ \left(\frac{1}{g}\right)$. La afirmación es falsa.

Contraejemplo: sean $f(x) = -x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{f\circ g} &= \frac{1}{f(g(x))}\\ &= \frac{1}{f(-x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f\circ\frac{1}{g} &= f\left(\frac{1}{g}\right)\\ &= f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Evaluando $x = -1$ en ambas funciones tenemos que $\frac{1}{f\circ g} = 1 \neq -1 = f \circ \frac{1}{g}$.

7. Pruebe que si f es una función tal que para toda función g se satisface que $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Por hipótesis,

$$\begin{gathered}(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)\\ f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)\end{gathered}$$

para toda función g, por lo que —en particular, debe ser cierto para una función constante $g(x) = c$, es decir, $f\big(g(x)\big) = f(c)$. De la hipótesis sigue que $f(c) = g\big(f(x)\big)$, y como g es constante, tenemos que $g\big(f(x)\big) = c$, por lo que $f(c) = c$. Como $g(x)$ puede ser cualquier constante, en particular $c = x$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$