Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales
Torres Brito David Israel

August 27, 2022

1. Encuentre todos los números reales que satisfagan las siguientes desigualdades:

(a) $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{aligned}
(4-x)+2x-4 &< (3-2x)+2x-4 && \text{Ley de la cancelación}\\
4+(-x+2x)-4 &< 3+(-2x+2x)-4 && \text{Asociatividad}\\
(-x+2x)+4-4 &< (-2x+2x)+3-4 && \text{Conmutatividad}\\
(-x+2x)+0 &< 0+3-4 && \text{Inverso aditivo}\\
-x+2x &< 3-4 && \text{Neutro aditivo}\\
x &< -1 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

(b) $5 - x^2 < -2$

$$\begin{aligned}
(5-x^2)+x^2+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Ley de la cancelación}\\
5+(-x^2+x^2)+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Asociatividad}\\
5+0+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Inverso aditivo}\\
5+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Neutro aditivo}\\
5+2 &< x^2+(-2)+2 && \text{Conmutatividad}\\
5+2 &< x^2+(-2+2) && \text{Asociatividad}\\
5+2 &< x^2 && \text{Inverso aditivo}\\
7 &< x^2 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Sabemos que $0 < 7$, y por el ejercicio 4, $\sqrt{7} < \sqrt{x^2}$. Luego,

i) Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < x$.

ii) Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < -x$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}+(x-\sqrt{7}) &< -x+(x-\sqrt{7}) && \text{Ley de la cancelación}\\
x+(\sqrt{7}-\sqrt{7}) &< (-x+x)-\sqrt{7} && \text{Asociando}\\
x+0 &< 0-\sqrt{7} && \text{Inverso aditivo}\\
x &< -\sqrt{7} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

De este modo, $x < -\sqrt{7}$ o $\sqrt{7} < x$.

(c) $(x-1)(3+x)<0$

Caso (1): si $(x-1)<0$ y $(3+x)<0$,

$(x-1)+1<0+1$	Cancelación	$(3+x)-3<0-3$	Cancelación
$x+(-1+1)<0+1$	Asociando	$x+(3-3)<0-3$	Asociando
$x+0<0+1$	Inverso aditivo	$x+0<0-3$	Inverso aditivo
$x<1$	Neutro aditivo	$x<-3$	Neutro aditivo

Por lo que $x<-3$.

Caso (2): si $0<(x-1)$ y $0<(3+x)$,

$0+1<(x-1)+1$	Cancelación	$0-3<(3+x)-3$	Cancelación
$0+1<x+(-1+1)$	Asociando	$0-3<x+(3-3)$	Asociando
$0+1<x+0$	Inverso aditivo	$0-3<x+0$	Inverso aditivo
$1<x$	Neutro aditivo	$-3<x$	Neutro aditivo

Por lo que $1<x$.

Así $x<-3$ o $1<x$.

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} &> 0 && \\
(x-1)(x+1)^{-1} &> 0 && \text{Notación}\\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0\cdot(x+1) && \text{Ley de la cancelación}\\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0 && \text{Demostrado anteriormente}\\
(x-1)\cdot 1 &> 0 && \text{Inverso multiplicativo}\\
(x-1) &> 0 && \text{Neutro multiplicativo}\\
(x-1)+1 &> 0+1 && \text{Ley de la cancelación}\\
x+0 &> 0+1 && \text{Inverso aditivo}\\
x &> 1 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

(e)

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}<0$$

Por definición, $x\neq 0$ y $1-x\neq 0$, por lo que $x\neq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
x^{-1}-(1-x)^{-1} &< 0 && \text{Notación}\\
x^{-1}-(1-x)^{-1}+(1-x)^{-1} &< 0+(1-x)^{-1} && \text{Ley de la cancelación}\\
x^{-1}+0 &< 0+(1-x)^{-1} && \text{Inverso aditivo}\\
x^{-1} &< (1-x)^{-1} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

Caso (1): si $x>0$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
x^{-1}\cdot x &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
1 &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

i) Si $0<(1-x)$, sigue que $x<1$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $(1-x) < 0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$
\begin{array}{rll}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x < (1-x)\cdot 1 & & \text{Demostrado anteriormente} \\
1\cdot x < (1-x)\cdot 1 & & \text{Inverso multiplicativo} \\
x < 1-x & & \text{Neutro multiplicativo} \\
x+x < 1-x+x & & \text{Ley de la cancelación} \\
x+x < 1 & & \text{Inverso aditivo} \\
2x < 1 & & \text{Definición} \\
x < \dfrac{1}{2} & & \text{Ley de la cancelación}
\end{array}
$$

Caso (2): si $x < 0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$
\begin{array}{ll}
(1-x)^{-1}\cdot x < x^{-1}\cdot x & \text{Demostrado anteriormente} \\
(1-x)^{-1}\cdot x < 1 & \text{Inverso multiplicativo}
\end{array}
$$

i) Si $(1-x) < 0$, sigue que $1 < x$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $0 < (1-x)$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$
\begin{array}{rl}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x < (1-x)\cdot x^{-1}\cdot x & \text{Demostrado anteriormente} \\
1\cdot x < (1-x)\cdot 1 & \text{Inverso multiplicativo} \\
x < (1-x) & \text{Neutro multiplicativo} \\
x+x < (1-x)+x & \text{Ley de la cancelación} \\
x+x < 1 & \text{Inverso aditivo} \\
2x < 1 & \text{Definición} \\
x < \dfrac{1}{2} & \text{Ley de la cancelación}
\end{array}
$$

En cualquier caso, $x < \frac{1}{2}$.

2. Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.

$$
\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^2(x-y) + xy(x-y) + y^2(x-y) && \text{P. Distributiva} \\
&= x(x^2) - y(x^2) + x(xy) - y(xy) + x(y^2) - y(y^2) && \text{P. Distributiva} \\
&= x^3 - yx^2 + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3 && \text{Definición} \\
&= x^3 - +0 + 0 - y^3 && \text{Inverso aditivo} \\
&= x^3 - y^3 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

3. Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$ son distintos de 0, entonces $x^2 + xy + y^2 > 0$.

Supongamos que $x^2 + xy + y^2 \leq 0$.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Luego,

i) Si $x^2 + xy + y^2 = 0$, entonces

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - y^3 = 0 & \text{Por ejercicio anterior} \\
x^3 - y^3 + y^3 = 0 + y^3 & \text{Ley de la cancelación} \\
x^3 + 0 = 0 + y^3 & \text{Inverso aditivo} \\
x^3 = y^3 & \text{Neutro aditivo} \\
x = y &
\end{array}
$$

De esto sigue que $x^2 + xy + y^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$, y por hipótesis $3x^2 = 0$, lo que es una contradicción.

ii) Si $x^2 + xy + y^2 < 0$, entonces

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 &< 0 && \text{Por ejercicio anterior} \\
x^3 - y^3 + y^3 &< 0 + y^3 && \text{Ley de la cancelación} \\
x^3 + 0 &< 0 + y^3 && \text{Inverso aditivo} \\
x^3 &< y^3 && \text{Neutro aditivo} \\
x &< y
\end{aligned}$$

De esto sigue que $(x - y) < 0$, por lo que $(x - y)(x^2 + xy + y^2) > 0 = x^3 - y^3$, lo que es una contradicción.

Por tanto, $x^2 + xy + y^2 > 0$.

4. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son mayores o iguales a 0, entonces $a^2 \leq b^2$ si y solo si $a \leq b$.

i) Si $a^2 \leq b^2$,

$$\begin{aligned}
a^2 + (-a^2) &\leq b^2 + (-a^2) && \text{Ley de la cancelación} \\
0 &\leq b^2 - a^2 && \text{Inverso aditivo} \\
0 &\leq bb - aa && \text{Definición} \\
0 &\leq bb - aa + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
0 &\leq bb - aa + (ab - ab) && \text{Inverso aditivo} \\
0 &\leq (bb + ab) + (-ab - aa) && \text{Asociatividad} \\
0 &\leq (bb + ab) - (ab + aa) && \text{Demostrado previamente} \\
0 &\leq b(b + a) - a(b + a) && \text{P. Distributiva} \\
0 &\leq (b + a)(b - a) && \text{P. Distributiva}
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $a \geq 0$ y $b \geq 0$, y por propiedad de los positivos, $a + b \geq 0$. Sigue que:

$$\begin{aligned}
0 \cdot (b + a)^{-1} &\leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a) && \text{Ley de la cancelación} \\
0 &\leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a) && \text{Demostrado anteriormente} \\
0 &\leq 1 \cdot (b - a) && \text{Inverso multiplicativo} \\
0 &\leq b - a && \text{Neutro multiplicativo} \\
0 + a &\leq b - a + a && \text{Ley de la cancelación} \\
0 + a &\leq b + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
a &\leq b && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

ii) Si $a \leq b$.

$$\begin{aligned}
a - a &\leq b - a && \text{Ley de la cancelación} \\
0 &\leq b - a && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

Debido a que $b \geq a$, tenemos que $b - a \geq 0$. Sigue que:

$$
\begin{array}{rll}
0 \cdot (b+a) \leq (b-a) \cdot (b+a) & & \text{Ley de la multiplicación} \\
0 \leq (b-a) \cdot (b+a) & & \text{Ley de la multiplicación} \\
0 \leq b(b-a) + a(b-a) & & \text{P. Distributiva} \\
0 \leq bb - ab + ab - aa & & \text{P. Distributiva} \\
0 \leq bb + 0 - aa & & \text{Inverso aditivo} \\
0 \leq bb - aa & & \text{Neutro aditivo} \\
0 + aa \leq bb - aa + aa & & \text{Ley de la cancelación} \\
aa \leq bb + 0 & & \text{Inverso aditivo} \\
aa \leq bb & & \text{Neutro aditivo} \\
a^2 \leq b^2 & & \text{Definición}
\end{array}
$$

$\square$

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 \leq b^2$ si y sólo si $|a| \leq |b|$.

Demostración:

Sea $a^2 \leq b^2$.

- **i)** Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a \leq b$, y por definición, $a = |a|$ y $b = |b|$, es decir, $|a| \leq |b|$.
- **ii)** Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por definciión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$. Similarmente, $b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.
- **iii)** Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por definciión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Similarmente, $a^2 = |a||a|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.
- **iv)** Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$ y $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis, tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.

Por otra parte, supongamos que $|a| \leq |b|$.

- **i)** Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por definición $|a| = a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = b$, es decir $a \leq b$, y por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a^2 \leq b^2$.
- **ii)** Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por definciión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = b$, es decir $-a \leq b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq b(-a)$. Similarmente, $(-a)b \leq b^2 = bb$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.
- **iii)** Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por definciión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $a \leq -b$. Notemos que $aa = a^2 \leq (-b)a$. Similarmente, $a(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.
- **iv)** Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $-a \leq -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq (-b)(-a)$. Similarmente, $(-a)(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.

$\square$

6. En los siguientes incisos, escriba el mismo número quitando (al menos) un signo de valor absoluto.

(a) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{6}|$ (no use calculadora)

(b) $||\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} + \sqrt{7}||$ (no use calculadora)

(c) $||a - b| - |a| - |b||$

(d) $||a + b| + |c| - |a + b + c||$

(e) $|x^2 - 2xy + y^2|$

(f) $x - |x - |x||$

7. Calcule todos los números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $|x - 3| = 8$

(b) $|x + 4| < 2$

(c) $|x - || + |x + 1| < 2$

(d) $|x - 1| + |x + 1| > 2$

(e) $|x - 1||x + 1| = 0$

(f) $|x - 1||x + 2| = 3$

8. Pruebe las siguientes identidades