Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: $+$ (suma) y $\cdot$ (multiplicación).

Axiomas de la suma

La suma satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists(-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Proposición: Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosiad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se famirialice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= a + (-a) && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

b) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= 0 + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= (-a) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -a && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

Corolario: $-(-a) = a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-a) + a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a = -(-a)$. □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = (-a)$ y $y = a$.

c) $-0 = 0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + (-0) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-0) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -0 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= 0 && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$. □

e) $-(a + b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a + \Big((-a) + \big(b + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big((-a) + b\big) + (-b)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big(b + (-a)\big) + (-b)\Big) && \text{Conmutatividad}\\
&= a + \Big(b + \big((-a) + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a + b)$. □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \Longrightarrow y=-x$, hemos tomado $x=(a+b)$ y $y=(-a)+(-b)$.

Corolario: $-\big(a+(-b)\big)=b+(-a)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} -\big(a+(-b)\big) &= (-a)+\big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo} \\ &= (-a)+b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo} \\ &= b+(-a) && \text{Conmutatividad} \quad \square \end{aligned}$$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y)=(-x)+(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

f) Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$$\begin{aligned} a &= a+0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a+\big(c+(-c)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (a+c)+(-c) && \text{Asociatividad} \\ &= (b+c)+(-c) && \text{Hipótesis} \\ &= b+\big(c+(-c)\big) && \text{Asociatividad} \\ &= b+0 && \text{Inverso aditivo} \\ &= b && \text{Neutro aditivo} \quad \square \end{aligned}$$

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a+(-a)$ o por $b+(-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a+(-a)$ o $b+(-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= 1 && \text{Inverso multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= a^{-1} \cdot (a \cdot b) && \text{Conmutatividad} \\
&= a^{-1} \cdot 1 && \text{Hipótesis} \\
&= a^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= 1^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad} \\
&= 1^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= b \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma $+$ y multiplicación $\cdot$

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} b \cdot 0 &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Distribución} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$ $\square$

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a \cdot 0 && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Multiplicación por 0} \end{aligned}$$

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. $\square$

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. (Multiplicación igual a 0).

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo.

Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. □

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \left(b \cdot (a \cdot a^{-1})\right) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. □

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$. □

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists \left(a^{-1}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1+(-1) = 1+0$, y por neutro aditivo $1+(-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 1$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists(-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 + (-1) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot\Big((-1)^{-1} + 1\Big) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1}+1 = 0$, y por conmutatividad $1+(-1)^{-1} = 0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1} = -1$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \implies y = -x$, hemos tomado $x = 1$ y $y = (-1)^{-1}$.

f) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= b\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= b\cdot\big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= b\cdot a + b\cdot(-a) && \text{Distribución}\\
&= a\cdot b + (-a)\cdot b && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= a\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= a\cdot\big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a\cdot b + a\cdot(-b) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \implies y = -x$, hemos tomado, $x = a\cdot b$ y $y = (-a)\cdot b$, por una parte y $y = a\cdot(-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= a\cdot\big(-(-b)\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= a\cdot b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}
\end{aligned}
$$

$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = x\cdot(-y)$, hemos tomado $x = a$ y $y = (-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1)\cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot a^{-1} &= -(1\cdot a^{-1}) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\big(a^{-1}\big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
-(a^{-1}) &= \big(-(a^{-1})\big)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= -\Big(\big(a^{-1}\big)\cdot 1\Big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\Big(a^{-1}\Big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$, hemos tomado $x = 1$ y $y = a^{-1}$, por una parte, y $x = (a^{-1})$ y $y = 1$, por la otra.

Notación

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x - y$ a la suma $x + (-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x \cdot y^{-1}$.

  En particular, $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$.

  Es inmediato que si $w \neq 0$, entonces $\frac{w}{w} = w \cdot w^{-1} = 1$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x \cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} && \text{Notación} \\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot \left(1 \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \frac{1}{b} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

b) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot \left(c \cdot b^{-1}\right) && \text{Notación} \\
&= (ac) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{ac}{b} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) && \text{Notación} \\
&= a \cdot \Big(b^{-1} \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)\Big) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \Big(\left(b^{-1} \cdot c\right) \cdot d^{-1}\Big) && \text{Asociatividad} \\
&= a \cdot \Big(\left(c \cdot b^{-1}\right) \cdot d^{-1}\Big) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot \Big(c \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right)\Big) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot \Big(c \cdot (b \cdot d)^{-1}\Big) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos} \\
&= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{ac}{bd} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

d) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$. (Cancelación de factores).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b}\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c} && \text{Notación}\\ &= \frac{ac}{b\cdot c} && \text{Multiplicación de fracciones} \qquad \square \end{aligned}$$

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a\cdot b^{-1}\right)}{\left(c\cdot d^{-1}\right)} && \text{Notación}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Notación}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot\left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot d\right) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(d\cdot c^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} && \text{Notación}\\ &= \frac{ad}{bc} && \text{Multiplicación de fracciones} \qquad \square \end{aligned}$$

Corolario: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a, b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\ &= \frac{1^{-1}}{\frac{a}{b}} && \text{Uno es inverso multiplicativo}\\ &= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\ &= \frac{1\cdot b}{1\cdot a} && \text{Teorema}\\ &= \frac{b}{a} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square \end{aligned}$$

f) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a\pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma con denominador común).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} &= \left(a\cdot c^{-1}\right) \pm \left(b\cdot c^{-1}\right) && \text{Notación}\\ &= \left(c^{-1}\cdot a\right) \pm \left(c^{-1}\cdot b\right) && \text{Conmutatividad}\\ &= c^{-1}\cdot(a\pm b) && \text{Distribución}\\ &= (a\pm b)\cdot c^{-1} && \text{Conmutatividad}\\ &= \frac{a\pm b}{c} && \text{Notación} \qquad \square \end{aligned}$$

g) Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \text{(Suma de fracciones)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} && \text{Cancelación de factores} \\
&= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{ad \pm cb}{bd} && \text{Suma con denominador común}
\end{aligned}$$

$\square$

h) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{-a}{b} &= (-a) \cdot b^{-1} && \text{Notación} \\
&= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Mult. Inv. aditivo} \\
&= -\frac{a}{b} && \text{Notación}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{a}{-b} &= a \cdot (-b)^{-1} && \text{Notación} \\
&= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Mult. Inv. aditivo} \\
&= -\frac{a}{b} && \text{Notación}
\end{aligned}
\quad \square$$

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists (-b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b \neq 0$, por lo que $-b \neq 0$.

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a, b y c.

i. $(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c$	*iv.* $(a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b$	*vii.* $c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a)$	*x.* $b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a)$
ii. $a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c)$	*v.* $(c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b$	*viii.* $(c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a$	*xi.* $b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c)$
iii. $a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b)$	*vi.* $c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b)$	*ix.* $(b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a$	*xii.* $(b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$$
\begin{aligned}
(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c &= a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c) && \text{Asociatividad} && \text{Formas (i) y (ii)}\\
&= a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (iii)}\\
&= (a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b && \text{Asociatividad} && \text{Forma (iv)}\\
&= (c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (v)}\\
&= c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (vi)}\\
&= c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (vii)}\\
&= (c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a && \text{Asociatividad} && \text{Forma (viii)}\\
&= (b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (ix)}\\
&= b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (x)}\\
&= b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (xi)}\\
&= (b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c && \text{Asociatividad} && \text{Forma (xii)}
\end{aligned}
$$

A partir de esta igualdad (y otras probadas anteriormente) introducimos la siguiente **notación:**

- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x + y + z$ a la suma de estos.
- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo xyz a la multiplicación de estos.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de $(-x) \cdot y$, $-(x \cdot y)$ o $x \cdot (-y)$.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x)\cdot y = -(x\cdot y) = x\cdot(-y)$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1}.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.
- Al número $1 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 2. Al número $2 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 3...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindimos de ella.

Un campo finito

Considere las siguientes proposiciones:

i) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = -a$, entonces $a = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + a && \text{Hipótesis} \\ &= 2a && \text{Notación} \end{aligned}$$

Luego, por la multiplicación igual a cero, se tiene que $2 = 0$ o $a = 0$.

Nota: Para concluir que $a = 0$ necesitamos verificar que $2 \neq 0$, pero esto no ha sido demostrado.

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} 2a &= a + a && \text{Notación} \\ &= a + a + b - b && \text{Inverso aditivo} \\ &= a - b + a + b && \text{Conmutatividad} \\ &= b - a + a + b && \text{Hipótesis} \\ &= b + b && \text{Inverso aditivo} \\ &= 2b && \text{Notación} \end{aligned}$$

Nota: A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar en las implicaciones de definir que $2 = 0$ y decidir si este hecho es consistente o contradictorio con los axiomas de campo.

Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto: Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multipllicación $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.

4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.

5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists(-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.

7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.

10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Resulta conveniente preguntarse ¿qué elementos pertenecen a Ω?

Sabemos que 0 y 1 son elementos de Ω, en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, el axioma (5) garantiza la existencia de -1 y -0. De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω. Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω, es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω apartir de estos.

Con estas consideraciones, sabemos que $\{\, 0, 1, -0, -1, 1^{-1} \,\} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que $0, 1, -1$ son miembros de Ω.

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω, $2 = 0$, es decir, que $1 + 1 = 0$, entonces $1 + 1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1+1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y su extensión sería $\Omega \coloneqq \{\, 0, 1 \,\}$.

Por lo anterior, para expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo $\mathbb{R}^+$, el cual satisface las siguientes propiedades:

12. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$).

13. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$).

14. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones (Tricotomía):

   i) $x \in \mathbb{R}^+$.
   ii) $x = 0$.
   iii) $-x \in \mathbb{R}^+$.

Lista de Ejercicios

a) Demuestre que $0 \notin \mathbb{R}^+$.

   Demostración: Si $0 \in \mathbb{R}^+$ se contradice el axioma de tricotomía. □

b) Demuestre que $1 \in \mathbb{R}^+$. (Uno es positivo).

   Demostración: Consideremos los casos:

   i) Si $1 = 0$, se contradice el axioma del neutro multiplicativo.
   ii) Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$, $(-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice la propiedad de tricotomía.

   Por tanto, $1 \in \mathbb{R}^+$. □

Observación: para cualesquiera números reales a y b tenemos que $a = b$ o $a \neq b$. A su vez,

i) Si $a = b$, entonces $a - b = 0$.

ii) Si $a \neq b$, por tricotomía tenemos dos casos (excluyentes):

   - $a - b \in \mathbb{R}^+$.
   - $-(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$.

A partir de esta observación introducimos la siguiente ***definición:***

Sean $x, y \in \mathbb{R}$,

- Si $x - y \in \mathbb{R}^+$, escribimos $y < x$ (o $x > y$).

De esta definición sigue que dados $x, y \in \mathbb{R}$, por tricotomía se verifica una y solo una de las siguientes condiciones

i) $y < x$.

ii) $x = y$.

iii) $x < y$.

Notación: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, utilizaremos la notación

- $y \leq x$ (o $x \geq y$) para indicar que $y < x$ o $x = y$.
- $x < y < z$ para indicar que $x < y$ y $y < z$.

Números reales negativos

Definición: Llamaremos al conjunto $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)$ conjunto de los números reales negativos.

Lista de ejercicios 6 (LE6)

a) Demuestre que $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ son conjuntos disjuntos.

Demostración: Si $\mathbb{R}^+ \cap \Big(\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)\Big) \neq \varnothing$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que

(*) $x \in \mathbb{R}^+$, y
(**) $x \in \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)$.

De (**) sigue que $x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$, es decir, $x \notin \{ 0 \}$ y $x \notin \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (*).
Por tanto, $\mathbb{R}^+ \cap \Big(\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)\Big) = \varnothing$, es decir, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ son conjuntos disjuntos. $\square$

b) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-x \in \mathbb{R}^-$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Por tricotomía, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $x \neq 0$ (y por esto $-x \neq 0$). Sigue que $-x \in \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)$, y por definción, $-x \in \mathbb{R}^-$.
$\Leftarrow$) Sea $-x \in \mathbb{R}^-$. Por definición, $-x \in \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}\big)$, por lo que, $-x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$, es decir, $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $-x \notin \{ 0 \}$ (y por tanto $-x \neq 0$). Entonces, por tricotomía, $-(-x) = x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

c) Demuestre que si $x, y \in \mathbb{R}^-$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^-$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{R}^-$).

Demostración: Sea $x, y \in \mathbb{R}^-$. Sigue que $(-x), (-y) \in \mathbb{R}^+$, y por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$, $-x - y = -(x + y) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x + y \in \mathbb{R}^-$. $\square$

d) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $0 < x$. (Caracterización de $\mathbb{R}^+$).

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, notemos que $x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que denotamos como $0 < x$.
$\Leftarrow$) Sea $0 < x$, por definición $x - 0 = x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

e) Demuestre que $x \in \mathbb{R}^-$ si y solo si $x < 0$. (Caracterización de $\mathbb{R}^-$).

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^-$. Notemos que $-x = 0 - x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x < 0$.
$\Leftarrow$) Sea $x < 0$. Por definición, $0 - x = -x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $x \in \mathbb{R}^-$. $\square$

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) Sea $a < b$, entonces $\exists! x \in \mathbb{R}^+$ tal que $a + x = b$.

Demostración:

i) Primero probaremos su existencia. Sea $a < b$. Por definición, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Tomando $x = b - a$, tenemos que $a + x = a + b - a = b$.

ii) Ahora probaremos la unicidad. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + x = b$ y $a + y = b$, notemos que $x = b - a$ y $y = b - a$, es decir, $x = y$. $\square$

Nota: Con esta prueba verificamos que todo número b, mayor que a, puede escribirse como la suma de a y algún número positivo.

b) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, por definición, si $a \leq b$, entonces $a < b$ o $a = b$.

i) Si $a < b$ y $b < a$, se contradice la tricotomía.

ii) Si $a < b$ y $b = a$, entonces $a < a$, pero esto es una contradicción.

Por tanto, $a = b$. $\square$

c) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Transitividad).

Demostración: Por definición $(b-a), (c-b) \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$, $(b-a)+(c-b) \in \mathbb{R}^+$. De donde sigue que $(b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. $\square$

d) $a < b$ si y solo si $a + c < b + c$. (Ley de cancelación de la suma en desigualdades).

Demostración:

$\Rightarrow$) Si $a < b$, por definición, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b - a = b - a + c - c = b + c - a - c = b + c - (a + c)$. De este modo, $b + c - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + c$.

$\Leftarrow$) Si $a + c < b + c$, por definición $b + a - (a + c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $b + c - (a + c) = b + c - a - c = b - a$. De este modo, $b - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < b$. $\square$

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Corolario:

i) $0 < a$ si y solo si $-a < 0$.

$\Rightarrow$)	$0 < a$	Hipótesis	$\Leftarrow$)	$-a < 0$	Hipótesis
	$0 + (-a) < a + (-a)$	Ley de cancelación		$-a + a < 0 + a$	Ley de cancelación
	$-a < 0$			$0 < a$	

ii) $a < a + b$ si y solo si $0 < b$.

$\Rightarrow$)	$a < a + b$	Hipótesis	$\Leftarrow$)	$0 < b$	Hipótesis
	$a - a < a + b - a$	Ley de cancelación		$0 + a < a + b$	Ley de cancelación
	$0 < b$			$a < a + b$	

iii) $a + b < a$ si y solo si $b < 0$.

$\Rightarrow)$	$a+b<a$	Hipótesis	$\Leftarrow)$	$b<0$	Hipótesis
	$a+b-a<a-a$	Ley de cancelación		$b+a<0+a$	Ley de cancelación
	$b<0$			$b+a<a$	

iv) $-a<b$ si y solo si $-b<a$.

$\Rightarrow)$	$-a<b$	Hipótesis	$\Leftarrow)$	$-b<a$	Hipótesis
	$-a+a-b<b+a-b$	Ley de cancelación		$-b+b-a<a+b-a$	Ley de cancelación
	$-b<a$			$-a<b$	

v) $a<-b$ si y solo si $b<-a$.

$\Rightarrow)$	$a<-b$	Hipótesis	$\Leftarrow)$	$b<-a$	Hipótesis
	$a-a+b<-b-a+b$	Ley de cancelación		$b-b+a<-a+-b+a$	Ley de cancelación
	$b<-a$			$a<-b$	

vi) $a<b$ si y solo si $-b<-a$. (Desigualdad invertida).

$\Rightarrow)$	$a<b$	Hipótesis	$\Leftarrow)$	$-b<-a$	Hipótesis
	$a-a-b<b-b-a$	Ley de cancelación		$-b+b+a<-a+b-a$	Ley de cancelación
	$-b<-a$			$a<b$	

vii) Si $a<b<c$, entonces $-c<-b<-a$.
Notemos que $a<b \Rightarrow -b<-a$ y $b<c \Rightarrow -c<-b$. Es decir, $-c<-b<-a$.

e) Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$. (Suma *vertical* de desigualdades).

Demostración: Por definición $b-a \in \mathbb{R}^+$ y $d-c \in \mathbb{R}^+$. Por cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $(b-a)+(d-c) \in \mathbb{R}^+$. Luego, $(b-a)+(d-c) = b+d-a-c = b+d-(a+c)$. Por lo que $b+d-(a+c) =\in \mathbb{R}^+$, es decir, $a+c<b+d$. □

Observación: La suma *vertical* de desigualdades preserva el orden.

f) Si $a \le b \le c \le d$, entonces $c-b \le d-a$. (Desigualdades *anidadas*).

Demostración: Consideremos los casos:

i) Si $a<b<c<d$, tenemos que $a<b$ y $c<d$. Luego,

$$\begin{aligned} a+c &< b+d && \text{Suma vertical de desigualdades}\\ a+c+\big((-a)+(-b)\big) &< b+d+\big((-a)+(-b)\big) && \text{Ley de la cancelación}\\ c-b &< d-a \end{aligned}$$

ii) Si $a=b<c<d$, entonces $c<d$ y por la ley de la cancelación, $c-a<d-a$, osea que $c-b<d-a$.

iii) Si $a<b=c<d$, tenemos que $a<b$, osea que $a<c$. También, $c<d$. Por transitividad, $a<d$, y por definición, $0<d-a$. Notemos que $0=c-c=c-b<d-a$

iv) Si $a<b<c=d$, tenemos que

$$\begin{aligned} a &< b \\ -b &< -a && \text{Desigualdad invertida}\\ -b+c &< -a+c && \text{Ley de la cancelación}\\ -b+c &< -a+d && \text{Hipótesis}\\ c-b &< d-a \end{aligned}$$

v) Si $a<b=c=d$, entonces $a<b$, y al invertir la desigualdad, $-b<-a$, luego, por la ley de la cancelación, $-b+c<-a+c$, osea que $-b+c<-a+d$, es decir, $c-b<d-a$.

vi) Si $a = b < c = d$, notemos que

$$\begin{aligned} d - b &= d - b \\ c - b &= d - b && \text{Hipótesis} \\ c - b &= d - a && \text{Hipótesis} \end{aligned}$$

vii) Si $a = b = c < d$, entonces

$$\begin{aligned} c &< d \\ c - a &< d - a && \text{Ley de la cancelación} \\ c - d &< d - a && \text{Hipótesis} \end{aligned}$$

$\square$

Nota: En la desigualdad $a \leq b \leq c \leq d$, decimos que $b \leq c$ es la desigualdad *interna* y que $a \leq d$ es la desigualdad *externa*.

Corolario: Si $a \leq b \leq c$, entonces

i) $c - b \leq c - a$, y

ii) $b - a \leq c - a$.

Notemos que la desigualdad $a \leq b \leq c$ es cualquier caso de (iv-vi) de las Desigualdades *anidadas* (el lector debería verificar este hecho), pero conviene hacer explícita la prueba:

Demostración:

i)

$$\begin{aligned} a &\leq b && \text{Hipótesis} \\ -b &\leq -a && \text{Desigualdad invertida} \\ -b + c &\leq -a + c && \text{Ley de la cancelación} \\ c - b &\leq c - a \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} b &\leq c && \text{Hipótesis} \\ b - a &\leq c - a && \text{Ley de la cancelación} \end{aligned}$$

$\square$

Nota: En la desigualdad $a \leq b \leq c$, decimos que $a \leq b$ y $b \leq c$ son desigualdades *internas*, y que $a \leq c$ es la desigualdad *externa*.

g) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Punto medio).

Demostración:

$$\begin{aligned} a &< b & a &< b \\ a + a &< a + b & a + b &< b + b \\ 2a &< a + b & a + b &< 2b \\ a &< \frac{a+b}{2} & \frac{a+b}{2} &< b \end{aligned} \qquad \square$$

Definición: Al número $\frac{a+b}{2}$ lo llamaremos el punto medio entre a y b.

Observación: $b - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - a$ (la *distancia desde* a y *desde* b al punto medio es la misma).

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{2b - a - b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{b - 2a + a}{2} = \frac{a + b - 2a}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{a+b}{2} - a$$

h) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ab < 0$ o $0 < ab$. (Ley de los signos).

Si a o b son cero, tenemos que $ab = 0$, por lo que descartamos esta posiblidad. Por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por la cerradura de la multiplicacón en $\mathbb{R}^+$, tenemos que $0 < ab$.

ii) Sin pérdida de generalidad, si $0 < a$ y $b < 0$, tenemos que $0 < -b$, y por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$, $0 < -ab$, por lo que $ab < 0$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < -a$ y $0 < -b$, por lo que $0 < (-a)(-b) = ab$.

Conclusión:

- Por (i) y (ii), para verificar $ab < 0$, un componente debe ser mayor a cero y el otro menor a cero.
- Por (iii), para verificar $0 < ab$, ambos componentes deben ser mayores o ambos menores a cero.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $0 < a^{-1}$ o $a^{-1} < 0$.

i) Sea $0 < a$. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $0 < a$, al multiplicar en desigualdades preserva el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero esto es una contradicción. Sabemos que $a^{-1} \neq 0$, ya que 0 no es inverso multiplicativo. Por tricotomía, $a^{-1} > 0$.

ii) Sea $a < 0$. Sigue que $0 < -a$, por lo que $-a^{-1} > 0$, de donde sigue que $a^{-1} < 0$.

- Si $0 < a$, entonces $0 < a^{-1}$. (Inverso multiplicativo positivo).
- Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$. (Inverso multiplicativo negativo).

j) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^{-1} < a$ o $a < a^{-1}$.

Para que $\exists a^{-1}$, requerimos $a \neq 0$. También, sabemos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$, pero buscamos desigualdad. Entonces, observemos los casos:

i) Si $a < -1$, entonces $1 < -a$, y por transitividad $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$, luego,

$$\begin{aligned} 1 &< -a \\ 1 \cdot \left(-a^{-1}\right) &< (-a) \cdot \left(-a^{-1}\right) \\ -a^{-1} &< 1 \\ -1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad, $a < a^{-1}$.

ii) Si $-1 < a < 0$, por notación $-1 < a$ y $a < 0$, de donde sigue que $-a < 1$ y $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$.

$$\begin{aligned} -a &< 1 \\ (-a) \cdot (-a^{-1}) &< 1 \cdot (-a^{-1}) \\ 1 &< -a^{-1} \\ a^{-1} &< -1 \end{aligned}$$

Por transitividad, $a^{-1} < a$.

iii) Si $0 < a < 1$, por notación $0 < a$ y $a < 1$, de donde sigue que $0 < a^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned} a &< 1 \\ a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\ 1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad $a < a^{-1}$.

iv) Si $1 < a$, por transitividad $0 < a$, por lo que $0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &< a \\ 1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\ a^{-1} &< 1 \end{aligned}$$

Por transitividad $a^{-1} < a$.

Conclusión:

- Por (i) y (iii), $a < a^{-1}$, si $a < -1$ o $0 < a < 1$.
- Por (ii) y (iv), $a^{-1} < a$, si $-1 < a < 0$ o $1 < a$.

k) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ o $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Sabemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, pues requerimos la existencia de su inverso multiplicativo. Luego, por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por ley de los signos, $0 < ab$, por lo que $0 < \frac{1}{ab}$. Entonces, $a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} < \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{ab}$.

ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y $0 < \frac{1}{b}$. Por transitividad, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por ley de los signos $0 < aa$, $0 < bb$ y $0 < ab$. Luego,

$$\begin{aligned} a &< b && \text{Supuesto inicial} \\ a \cdot (ab) &< b \cdot (ab) && (*) \end{aligned}$$

Por ley de los signos, $aa \cdot bb > 0$, de donde sigue que $\frac{1}{aa \cdot bb} > 0$. De (*) obtenemos que

$$\begin{aligned} \big(a \cdot (ab)\big) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} &< \big(b \cdot (ab)\big) \cdot \frac{1}{aa \cdot bb} \\ \frac{1}{b} &< \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Conclusión: Si $a < b$ y

- $0 < a$ y $0 < b$, o $a < 0$ y $b < 0$, entonces, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

l) Sea $a < b$ y $c < d$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ac < bd$ o $bd < ac$. (Multiplicación *vertical* de desigualdades)

Sin pérdida de generalidad,

I) Si $0 < a < b$,

i) y $0 < c < d$, entonces $a < b \Rightarrow ac < bc$ y $c < d \Rightarrow bc < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.

ii) y $c < 0 < d$, entonces $c < d \Rightarrow ac < ad$ y $a < b \Rightarrow ad < bd$. Por transitividad, $ac < bd$.

iii) y $c < d < 0$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).

II) Si $a < 0 < b$,

i) y $c < 0 < d$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).

ii) y $c < d < 0$, entonces $a < b \to bd < ad$ y $c < d \to ad < ac$. Por transitividad, $bd < ac$.

III) Si $a < b < 0$,

i) y $c < d < 0$, es posible tener ambos resultados, por lo que descartamos este caso. (El lector debería verificar este hecho).

Conclusión: Si son todos positivos, se conserva el orden, es decir, si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$. Luego, sin pérdida de generalidad,

- Si $0 < a < b$ y $c < 0 < d$, entonces $ac < bd$.
- Si $a < b < 0$ y $c < 0 < d$, entonces $bd < ac$.

m) Sea $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (Mediante).

Sabemos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. También, por definición, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$, es decir, $(bc - ad)/(bd) > 0$. Como b y d son distintos de cero, tenemos que $bd \neq 0$. Asimismo, $bc - ad \neq 0$.

Buscamos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, para lo que es necesario que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \\
0 &< \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{b(a+c) - \big(a(b+d)\big)}{b(b+d)} \\
&= \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{d}{b+d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\
0 &< \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \\
&= \frac{c(b+d) - \big(d(a+c)\big)}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{b}{b+d}
\end{aligned}$$

Como $(bc - ad)/(bd) > 0$, entonces $\frac{d}{b+d} > 0$ y $\frac{b}{b+d} > 0$. Por esto, $b + d \neq 0$. Finalmente, tenemos dos casos:

i) Si $b > 0$, entonces $b + d > 0$ y $d > 0$.

ii) Si $b < 0$, entonces $b + d < 0$ y $d < 0$.

Por tanto, debe cumplirse que b y d deben ser ambos mayores a cero o ambos menores a cero.

Una nota sobre un campo finito

Antes de introducir los axiomas de orden, no era posible demostrar que $1+1 \neq 0$. Sin embargo, ahora sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$, y por la caracterización de $\mathbb{R}^+$ se tiene que $0 < 1$. Más aún, se verifica que $1 < 1+1$ y por transitividad, $0 < 1+1$, es decir que $1+1 \in \mathbb{R}^+$, y por tricotomía, $1+1 \neq 0$, o utlizando otra notación, $2 \neq 0$. Con este hecho, finalmente podemos concluir las pruebas pendientes para las proposiciones listadas al iniciar la discusión del campo finito, al final del capítulo anterior:

i) Si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = -a$, entonces $a = 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + a && \text{Hipótesis} \\ &= 2a && \text{Notación} \end{aligned}$$

Luego, por la multiplicación igual a cero, se tiene que $2 = 0$ o $a = 0$. Como $2 \neq 0$, sigue que $a = 0$. $\square$

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 2a &= a + a && \text{Notación} \\ &= a + a + b - b && \text{Inverso aditivo} \\ &= a - b + a + b && \text{Conmutatividad} \\ &= b - a + a + b && \text{Hipótesis} \\ &= b + b && \text{Inverso aditivo} \\ &= 2b && \text{Notación} \end{aligned}$$

Finalmente, por la ley de la cancelación, $a = b$. $\square$

Inducción matemática

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$ entonces se verifica que $n+1 \in A$.

Lista de Ejercicios 7 (LE7)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si $n \in \mathbb{R}$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$, y si $n \in \mathbb{R}^+$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}^+$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$.

3) Sea $\mathcal{F} = \{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es un conjunto inductivo} \}$.

a) Demuestre que $\mathcal{F}$ es no vacío.

Demostración: Como $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo, entonces $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F} \neq \varnothing$. $\square$

b) Demuestre que $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto inductivo.

Demostración: Por definición, $1 \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, por lo que $1 \in \bigcap \mathcal{F}$. Luego, si $n \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, como cada A es un conjunto inductivo, $n+1 \in A, \forall A \in \mathcal{F}$, por lo que Si $n \in \bigcap \mathcal{F}$, entonces $n+1 \in \bigcap \mathcal{F}$. Por tanto, $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto inductivo. $\square$

Definición:

Sea $\mathcal{F} = \{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es un conjunto inductivo} \}$. Llamaremos al conjunto $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{F}$ conjunto de los números naturales.

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

a) Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m+n \in \mathbb{N}$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \varnothing$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m+n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n+1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{N}$. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \varnothing$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ se verifica que $m \cdot n + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n+1)$, por lo que $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n+1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n+1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$. (Elemento mínimo de $\mathbb{N}$).

Demostración: Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n+1$. Por transitividad, $1 \leq n+1$, por lo que $n+1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que m es elemento mínimo de A si $m \in A$ y $m \leq a, \forall a \in A$.

d) Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n-1 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n-1 \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Sea $m \in A$ con $m > 1$, tenemos que $m \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica que $m+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(m+1)-1 = m$, por lo que $(m+1)-1 \in \mathbb{N}$. Como $m > 1$, por transitividad, $m > 0$, de donde sigue que $m+1 > 1$, por lo que $m+1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n-1 \in \mathbb{N}$. □

e) Sean m y n números naturales. Si $n < m$, entonces $m-n \in \mathbb{N}$. (*Resta* de naturales)

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A := \{\, m \in \mathbb{N} \mid n < m,\ m-n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Si $m_0 \in A$ con $m_0 > 1$, tenemos que $n < m_0$ y $m_0 - n \in \mathbb{N}$ con $m_0 \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, sigue que $m_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Además, $m_0 < m_0 + 1$, y por transitividad $n < m_0 + 1$. Luego, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ tenemos que $(m_0 - n) + 1 = (m_0 + 1) - n \in \mathbb{N}$, por lo que $m_0 + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, se cumple que $A = \mathbb{N}$. □

Corolario:

i) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n < x < n+1$, entonces x no es un número natural. (La *distancia* entre un número natural y su *sucesor* es 1).

Demostración: Por hipótesis, $n < x$, de donde sigue que $n + (-x+1) < x + (-x+1)$, osea, $n - x + 1 < 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que $x \in \mathbb{N}$, de la hipótesis $x < n+1$ sigue que $n+1-x \in \mathbb{N}$, por este teorema, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, tenemos que $1 \leq n+1-x$. Esto implica que $1 \leq n+1-x < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. □

Nota: Otra forma de plantear esta proposición es la siguiente (ii):

ii) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $m-1 < x < m$, entonces x no es un número natural. (La *distancia* entre un número natural y su *antecesor* es 1).

Demostración: Sea $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $x < m$ y $m-1 < x$, de donde obtenemos:

$$x + (-m+1) < m + (-m+1) \qquad\qquad (m-1)+1 < (x)+1$$
$$x + 1 - m < 1 \qquad\qquad m < x+1$$

Por hipótesis $x \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, sigue que $x+1 \in \mathbb{N}$. Como $m < x+1$, con $m \in \mathbb{N}$, por este teorema se verifica que $x+1-m \in \mathbb{N}$, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, sigue que $1 \leq x+1-m$. Esto implica que $1 \leq x+1-m < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. □

iii) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo. (Principio del buen orden).

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$. Supongamos que A no tiene elemento mínimo.
Como $A \neq \varnothing$, se tiene que $\exists x \in A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$. Sabemos que 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, por lo que, en particular $1 \leq x$. Como A no tiene elemento mínimo, no puede ser el caso que $x = 1$, pues $1 \leq x, \forall x \in A$. De esto sigue que $1 < x$, y por este teorema, se verifica que $x-1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x-1 < x$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $x+1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x < x+1$. De este modo, tenemos que $x-1 < x < x+1$, pero por este teorema, esta desigualdad implica que x no es un número natural, lo que es una contradicción. Por tanto, A tiene elemento mínimo. □

iv) Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$. (Principio de inducción matemática).

Demostración: Sea $S \neq \mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es no vacío (ya que de serlo, tendríamos $S = \mathbb{N}$). Por definición, $1 \in S$ y por esto, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Como $\mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$, por el principio del buen orden, tiene elemento minimo. Sea m el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, como $m \in \mathbb{N}$, sigue que $1 \leq m$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ y $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$ tenemos que $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, y por este teorema, $m - 1 \in \mathbb{N}$. Debido a que $m - 1 < m$ y m es el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, tenemos que $m - 1 \notin \mathbb{N} \setminus S$, osea $m - 1 \in S$. Luego, dado que S es un conjunto inductivo, se verifica que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo que es una contradicción. Por tanto, $S = \mathbb{N}$. □

v) Sea $x \in \mathbb{R}^{+}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por definición, $x > 0$, por lo que $n < n + x$. Por hipótesis, $x + n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, por este teorema, $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$. □

Una nota sobre inducción matemática

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \left\{ n \,\middle|\, 0 < \frac{1}{n} \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$. Notemos que $1 \in A$, pues $0 < \frac{1}{(1)} \leq 1$. Luego, si $n \in A$, tenemos que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. También, $n < n + 1$, por lo que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Finalmente, como $n + 1 > 0$, sigue que $\frac{1}{n+1} > 0$, y por transitividad, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$, se verifica $n + 1 \in A$, y por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$. □

El lector notará que la prueba consiste en:

1. Definir un subconjuto A de números naturales (el cual satisface la propiedad objetivo).

2. Demostrar que A es un conjunto inductivo:

- Exhibir que 1 pertenece a A (caso base).
- Plantear que algún número natural n pertenece a A (hipótesis de inducción o paso inductivo).
- Probar que $n + 1$ pertenece a A.

3. Enunciar el prinicipio de inducción matemática (que garantiza la propiedad para todo número natural).

Nota: No se exige que $n + 1 \in A$ sea una consecuencia de que $n \in A$, sin embargo, este suele ser el caso; por lo que, si se prescinde del paso inductivo para probar que $n + 1$ cumple la propiedad enunciada, es un buen hábito detenerse y comprobar el desarrollo, puede ser que se haya cometido un error o que en realidad no necesite inducción para la prueba.

Este *algoritmo* nos permite probar proposiciones sobre los números naturales; no obstante, la tradición de los libros de texto es definir de manera implícita el conjunto con el que se trabaja y —si acaso— enunciar el principio de inducción matemática al inicio de la prueba. Por ejemplo:

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procedemos por inducción.

i) Es claro que $n = 1$ satisface la desigualdad, pues $0 < \frac{1}{1} \leq 1$.

ii) Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir, supongamos que

$$0 < \frac{1}{k} \leq 1 \qquad \text{(hipótesis de inducción)}$$

iii) Demostraremos, a partir de la hipótesis de inducción, que la desigualdad se cumple también para $n = k+1$. Es decir, probaremos que

$$0 < \frac{1}{k+1} \leq 1$$

En efecto, notemos que $k < k+1$, de donde obtenemos que $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Además, como $k+1 > 0$, sigue que $\frac{1}{k+1} > 0$. Y de la hipótesis de inducción tenemos que

$$0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \leq 1$$

es decir,

$$0 < \frac{1}{k+1} \leq 1.$$

Por tanto, $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Sin embargo, el lector debería ser cuidadoso de no considerar el uso de inducción matemática como la única estratégia para demostrar proposiciones sobre los elementos de $\mathbb{N}$, por ejemplo, la proposición también puede ser probada por casos:

Proposición: $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Sabemos que $n \geq 1$, por lo que tenemos dos casos:

i) Si $n = 1$, tenemos que $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1$. Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

ii) Si $n > 1$, por transitividad $n > 0$, lo que implica que $\frac{1}{n} > 0$. Retomando la hipótesis,

$$\begin{aligned} n &> 1 \\ n \cdot \frac{1}{n} &> 1 \cdot \frac{1}{n} \\ 1 &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Como n es arbitrario, se verifica que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Números enteros

Defínción:

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup \{ 0 \} \cup \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.
- Al conjunto $\mathbb{N} \cup \{ 0 \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros no negativos.
- Al conjunto $\{ -n : n \in \mathbb{N} \}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^-$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

a) ¿El conjunto de los números enteros es un campo (satisface los axiomas de campo)?

Respuesta: No, pues el axioma del inverso multiplicativo solo se satisface para 1 y -1.

b) Demuestre la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $a, b \in \mathbb{Z}$.

I) Si $a, b \in \mathbb{N}$, se verifica la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$.

II) Si $a = 0$ o $b = 0$, la suma es cerrada por la identidad aditiva.

III) Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$, entonces $-a, -b \in \mathbb{N}$, y por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, sigue que $(-a) + (-b) = -(a + b) \in \mathbb{N}$, por lo que $-\big(-(a + b)\big) = a + b \in \mathbb{Z}^-$ y a su vez, $a + b \in \mathbb{Z}$.

IV) Sin pérdida de generalidad, sea $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}^-$. Por axiomas de orden, $a + b = 0$, $a + b < 0$ o $a + b > 0$, en el primer caso se verifica la cerradura. Luego,

i) Si $a+b > 0$, entonces $a > -b$, y como $-b \in \mathbb{N}$, por (c) de LE8, se tiene que $a-(-b) = a+b \in \mathbb{N}$.

ii) Si $a+b < 0$, entonces $a < -b$, como $-b \in \mathbb{N}$, por (c) de LE8, se tiene que $(-b)-a = -(a+b) \in \mathbb{N}$, de donde sigue que $-\big(-(a + b)\big) = a + b \in \mathbb{Z}^-$.

□

Observación: Como $1 \in \mathbb{Z}$, y la suma es cerrada en $\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}$ es un conjunto inductivo.

c) Demuestre la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Si $a, b \in \mathbb{N}$, se verifica la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$.

ii) Si $a = 0$ o $b = 0$, la suma es cerrada por la multiplicación por cero.

iii) Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $-a, -b \in \mathbb{N}$, y por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$, sigue que $(-a) \cdot (-b) = ab \in \mathbb{N}$.

iv) Sin pérdida de generalidad, sea $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \{\, -n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Notemos que $a \cdot (-b) = -(ab) \in \mathbb{N}$, por lo que $a \cdot b \in \mathbb{Z}^-$.

□

d) Sea $s \in \mathbb{Z}$, demuestre que si $s < j < s + 1$, entonces $j \notin \mathbb{Z}$.

Demostración: Supongamos que $j \in \mathbb{Z}$. Tenemos tres casos:

I) Si $j = 0$, tenemos que $0 < s + 1$, de donde sigue que $s + 1 \in \mathbb{N}$, por definición (de $\mathbb{Z}$), pero como $s < 0$, obtenemos $s + 1 < 1$, lo que es una contradicción, pues todo número natural es mayor o igual a 1.

II) Si $j \in \mathbb{N}$, tenemos tres casos para s:

i) Si $s = 0$, sigue que $s = 0 < j < 1 = s + 1$, pero esto es una contradicción, pues todo número natural es mayor o igual a 1.

ii) Si $s \in \mathbb{N}$, por el corolario (i) de (e) de LE8, es una contradicción.

iii) Si $-s \in \mathbb{N}$, se tiene que $-s > 0$, por lo que $s < 0$, de done sigue que $s + 1 < 1$, pero $j < s + 1$ y por transitividad, $j < 1$, lo que es una contradicción.

III) Si $-j \in \mathbb{N}$, sigue que $-j > 0$, por lo que $j < 0$, y por transitividad, $s < 0$, de esto sigue que $s \neq 0$ y $s \notin \mathbb{N}$, por lo que $-s \in \mathbb{N}$. Como $s < j$ y $j < s + 1$, sigue que $-j < -s$ y $-(s + 1) = -s - 1 < -j$; de este modo, $-s - 1 < -j < -s$, con $-s, -j \in \mathbb{N}$, pero se contradice el corolario (ii) de (e) de LE8.

En cualquier caso $j \notin \mathbb{Z}$. □

e) Sean a y b números enteros. Se verifica que $a - b \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Si $a = b$, tenemos que $a - b = 0 \in \mathbb{Z}$. Luego, si $a \neq b$, tenemos que:

- Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $a - b = a$ o $a - b = -b$. En cualquier caso, $a - b \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, consdieremos los siguientes casos:
  - *I)* Si $a > b$, y
    - *i)* $b \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in \mathbb{N}$, y por la resta de naturales, $a - b \in \mathbb{N}$.
    - *ii)* $b \in \mathbb{Z}^-$ y $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $-b \in \mathbb{N}$ en cuyo caso $a - b = a + (-b) \in \mathbb{N}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$.
    - *iii)* $a, b \in \mathbb{Z}^-$ tenemos que $-a, -b \in \mathbb{N}$, y $-b < -a$. Por la resta de naturales $(-a) - (-b) = (-a) + b \in \mathbb{N}$. De donde sigue que $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.
  - *II)* Si $a < b$, y
    - *i)* $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $b \in \mathbb{N}$, por lo que $-a, -b \in \mathbb{Z}^-$, y $-b < -a$. Luego, por la resta de naturales, $(-a) - (-b) = -a + b \in \mathbb{N}$, de donde, $-(-a + b) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.
    - *ii)* $a \in \mathbb{Z}^-$ y $b \in \mathbb{N}$, sigue que $-a \in \mathbb{N}$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, sigue que $-a + b \in \mathbb{N}$, luego $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.
    - *iii)* $a, b \in \mathbb{Z}^-$, entonces $-a, -b \in \mathbb{N}$, y como $-b < -a$, se tiene que $(-a) - (-b) = -a + b \in \mathbb{N}$, por la resta de naturales. Así $-\big((-a) + b\big) = a - b \in \mathbb{Z}^-$.

$\square$

Supremos e Ínfimos

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos

- $(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$. Decimos que (a, b) es el intervalo abierto (de a a b).
- $[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$. Decimos que $[a, b]$ es el intervalo cerrado (de a a b).
- $[a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$.
- $(a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$.

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Definimos al entorno de centro a y radio ε, como el conjunto:

$$E_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

Notación: También denotamos al entorno de centro a y radio ε como $E_{(a,\varepsilon)}$, o si el radio es claro, $E_{(a)}$. También decimos que $E_\varepsilon(a)$ es el entorno-ε (epsilon) de a.

Observación: Por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades, de $|x - a| < \varepsilon$ sigue que $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, es decir, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Por lo que el entorno de radio ε con centro en a es equivalente al intervalo abierto $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Resulta también que el centro del entorno es el punto medio de los extremos del intervalo,

$$\begin{aligned}
&a - \varepsilon < a + \varepsilon \\
&a - \varepsilon < \frac{(a - \varepsilon) + (a + \varepsilon)}{2} < a + \varepsilon && \text{Punto medio} \\
&a - \varepsilon < a < a + \varepsilon
\end{aligned}$$

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

b) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

d) Sea $U := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración:

i) Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. Por el teorema para eliminar valores absolutos, sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.

ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. Por el teorema para eliminar valores absolutos, sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambos entornos tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Propiedad de completez de $\mathbb{R}$

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que A:

- está acotado superiormente, si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq K, \forall a \in A$. En este caso decimos que K es cota superior de A.
- está acotado inferiormente, si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que k es cota inferior de A.
- está acotado, si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es una cota de A.

Observación:

- Si K es una cota superior de A, entonces $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que $K + \varepsilon$ también es cota superior de A, pues $a \leq K < K + \varepsilon$, $\forall a \in A$.
- Si k es una cota inferior de A, entonces $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que $k - \varepsilon$ también es cota inferior de A, pues $k - \varepsilon < k \leq a$, $\forall a \in A$.
- Si M es una cota de A, entonces $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que $M + \varepsilon$ también es cota de A, pues $|a| \leq M < M + \varepsilon$, $\forall a \in A$.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si:

- S es cota superior de A, y
- Si K es cota superior de A, entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Observación: Si A tiene supremo, este no necesariamente pertenece a A.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y está acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si:

- L es cota inferior de A, y
- Si K es cota inferior de A, entonces $K \leq L$.

En este caso escribimos $L = \inf(A)$.

Observación: Si A tiene ínfimo, este no necesariamente pertenece a A.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es denso (en $\mathbb{R}$), o que cumple la propiedad de densidad, si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $a \in A$ tal que $x < a < y$.

Observación: Es claro que $\mathbb{R}$ es denso, pues $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ y para cada $x < y$ se tiene que $x < \frac{x+y}{2} < y$, con $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$.

Una nota sobre el supremo y el ínfimo

A pesar de que hemos definido al supremo e ínfimo para subconjuntos no vacíos de los números reales, en realidad no es posible —utilizando únicamente las propiedades demostradas hasta este punto, probar que, en efecto, el supremo e ínfimo existen para todo subconjunto no vacío de los reales que esté acotado.

Consideremos el siguiente argumento: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente por S. Sea $a \in A$, por definición, $a \leq S$, y por la densidad de los números reales, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq S$, por lo que x es una cota superior de A. Es decir, para cualquier cota superior de un conjunto, es posible encontrar un número real que sea menor o igual que este, y mayor o igual a los elementos del conjunto. Si la relación entre las cotas se cumple con igualdad, es decir que $a \leq x = S$, podríamos conjeturar que S es el supremo de A, sin embargo, si se tiene que $a \leq x < S$, sería natural pensar que x es el supremo de A, pues es menor que la cota superior S. No obstante, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y \leq x < S$, y nos encontramos en la misma situación que antes, si $a \leq y = x$, entonces x es candidato para ser el supremo de A, pero si $a \leq y < x$, podríamos inferir que y es el supremo de A, recursivamente sin encontrar $\sup(A)$. Análogamente, la existencia del ínfimo no está garantizada ni puede probarse. Por tanto, introducimos la existencia del supremo como un axioma:

Axioma del supremo: Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Lista de ejercicios

Demuestre lo siguiente:

i) Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{ -a : a \in A \}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(A)$ y $a \in A$, entonces $M \geq -a$, de donde sigue que $-M \leq a$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. □

ii) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Por definición, s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Análogamente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. □

iii) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Por definición, m_1 es una cota inferior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Análogamente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. □

iv) El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración: Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. □

v) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que A está acotado. Sea $a \in A$, por definición, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$. Por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $-M \leq a \leq M$, por lo que A está acotado superior e inferiormente.

$\Leftarrow$) Supongamos que A está acotado superior e inferiormente. Sea $a \in A$, entonces $\exists k, K \in \mathbb{R}$ tales que $k \leq a \leq K$. Notemos que

$$\begin{aligned} -k &\leq |k| \\ -k &\leq |k| + |K| \\ -|K| - |k| &\leq k \\ -\big(|K| + |k|\big) &\leq k \end{aligned}$$

Como $k \leq a$, por transitividad sigue que, $-\big(|K| + |k|\big) \leq a$. Similarmente,

$$\begin{aligned} K &\leq |K| \\ K &\leq |K| + |k| \end{aligned}$$

Como $a \leq K$, por transitividad sigue que, $a \leq |K| + |k|$. Es decir, se verifica que

$$-\big(|K| + |k|\big) \leq a \leq |K| + |k|$$

y, por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $|a| \leq |K| + |k|$. Por tanto, A está acotado. □

vi) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$. Una cota superior M de A, es el supremo de A si y solo si $\forall b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$, entonces $\exists a \in A$ tal que $b < a$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que M es el supremo de A y sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$. Se tiene que b no es cota superior de A, es decir que $\exists a \in A$ tal que $b < a$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\forall b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$, $\exists a \in A$ tal que $b < a$. Supongamos que M no es el supremo de A, es decir, existe una cota superior c de A tal que $c < M$, y por hipótesis, $\exists a_0 \in A$ tal que $c < a_0$, pero esto es una contradicción. □

vii) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$. Una cota superior M de A, es el supremo de A si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $M - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea M el supremo de A y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$ implica que $M - \varepsilon < M$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de A, por lo que $\exists a_\varepsilon$ tal que $a_\varepsilon > M - \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Sea M una cota superior de A tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < a_\varepsilon$. Supongamos que M no es el supremo de A, entonces $b \in \mathbb{R}$, el cual es una cota superior de A, tal que $a_\varepsilon \leq b < M$. Elegimos $\varepsilon = M - b$, con lo que $M - (M - b) < a_\varepsilon$, es decir, $b < a_\varepsilon$, pero esto es una contradicción. Por tanto, M es el supremo de A. □

viii) Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y B es acotado; se verifica que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

(El supremo preserva el orden y el ínfimo lo invierte).

Demostración:

i) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $\inf(B) \leq x$, por lo que $\inf(B)$ es cota inferior de A. Por definición, el ínfimo de A es mayor o igual que todas sus cotas inferiores, es decir, $\inf(B) \leq \inf(A)$.

ii) Sea $x \in A$. Por definición, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$, por lo que $\inf(A) \leq \sup(A)$. (El ínfimo es menor o igual que el supremo).

iii) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $x \leq \sup(B)$, por lo que $\sup(B)$ es cota superior de A, y por definición, el supremo de A es menor o igual que todas sus cotas superiores, es decir, $\sup(A) \leq \sup(B)$. □

Corolario:

i) $\inf(B) \leq \sup(A)$.

ii) $\inf(A) \leq \sup(B)$.

ix) Sea $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$0 < \varepsilon$$
$$\inf(B) < \inf(B) + \varepsilon$$

Por lo que $\inf(B) + \varepsilon$ no es una cota inferior de B, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$. □

x) Sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$0 < \varepsilon$$
$$\sup(A) < \varepsilon + \sup(A)$$
$$\sup(A) - \varepsilon < \sup(A)$$

Por lo que $\sup(A) - \varepsilon$ no es una cota superior de A, por lo que $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$. □

xi) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración:

Pr definición, $\sup(A) \leq b, \forall b \in B$.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$, entonces $\sup(A) - \inf(B) > 0$. Sea $\varepsilon = \sup(A) - \inf(B)$, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que

$$b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$$
$$b_\varepsilon < \inf(B) + \sup(A) - \inf(B)$$
$$b_\varepsilon < \sup(A) \qquad \underset{\circ}{\nabla}$$

□

Pendiente

Axioma del supremo

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. $\square$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S \coloneqq \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w \coloneqq \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. $\square$

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. $\square$

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E \coloneqq \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. $\square$

d) Definimos el conjunto $A \coloneqq \{ n \in \mathbb{Z} : x < n \}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n < m \leq x &< n + 1 \\ n < m &< n + 1 \\ 0 < m - n &< 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. $\square$

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) \coloneqq \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b).

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$

$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$|\ell' - \ell| < 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$$
$$|\ell' - \ell| < \varepsilon_0$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. $\square$

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$
$$|x_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell|$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\big|(x_n - \ell) + \ell\big| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$
$$|x_n| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n<n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. $\square$

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

i) Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.

iii) Si $n = k + 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.
b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.
c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. $\square$