Supremos e Ínfimos

Entorno e intervalos

Definición: Sea $a, b \in \mathbb{R}$, definimos

- $(a, b) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$. Decimos que (a, b) es el intervalo abierto (de a a b).
- $[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$. Decimos que $[a, b]$ es el intervalo cerrado (de a a b).
- $[a, b) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$.
- $(a, b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$.

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Definimos al entorno de centro a y radio ε, como el conjunto:

$$E_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

Notación: También denotamos al entorno de centro a y radio ε como $E_{(a,\varepsilon)}$, o si el radio es claro, $E_{(a)}$. También decimos que $E_\varepsilon(a)$ es el entorno-ε (epsilon) de a.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) $E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Demostración: Por definición, $E_\varepsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R} : |\, x - a| < \varepsilon \,\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} |x - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon < x - a &< \varepsilon && \text{Teorema para eliminar valores absolutos} \\ a - \varepsilon < x &< a + \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir que $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall \varepsilon > 0$, tales que $|x - a| < \varepsilon$ se tiene que $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Osea que $E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. $\square$

Observación: El centro del entorno $E_\varepsilon(a)$ es el punto medio de los extremos del intervalo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} &a - \varepsilon < a + \varepsilon \\ &a - \varepsilon < \frac{(a - \varepsilon) + (a + \varepsilon)}{2} < a + \varepsilon && \text{Punto medio} \\ &a - \varepsilon < a < a + \varepsilon \end{aligned}$$

b) Sea $a < b$, entonces $\exists! \varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon = b$.

Demostración:

i) Primero probaremos su existencia. Sea $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Tomando $\varepsilon = b - a$, tenemos que $a + \varepsilon = a + b - a = b$.

ii) Ahora probaremos la unicidad. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $a + \varepsilon = b$ y $a + \delta = b$, se tiene que $\varepsilon = b - a$ y $\delta = b - a$, es decir, $\varepsilon = \delta$. $\square$

Nota: Con esta prueba verificamos que todo número b, mayor que a, puede escribirse como la suma de a y algún número positivo.

c) Para toda a y b tales que $a < b$, $\exists x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(a, b) = (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$.

Demostración: Notemos que

$$\begin{aligned} &a < b \\ &a < \frac{a+b}{2} < b && \text{Punto medio} \end{aligned}$$

Tomando $x = \frac{a+b}{2}$, se tiene que $x < b$. Sabemos que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $b = x + \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} b - \frac{a+b}{2} &= \frac{a+b}{2} - a \\ (x+\varepsilon) - x &= x - a \\ \varepsilon &= x - a \\ a &= x - \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir, $\exists x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. $\square$

d) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

e) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

f) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

g) Sea $U := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Demostración:

i) Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. Por el teorema para eliminar valores absolutos, sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.

ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. Por el teorema para eliminar valores absolutos, sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

h) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambos entornos tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Conjuntos acotados

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que A:

- está acotado superiormente, si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq K, \forall a \in A$. En este caso decimos que K es cota superior de A.
- está acotado inferiormente, si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que k es cota inferior de A.
- está acotado, si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es una cota de A.

Observación:

- Si K es una cota superior de A, entonces cualquier número real mayor a K también es cota superior de A.
- Si k es una cota inferior de A, entonces cualquier número real menor a k también es cota inferior de A.
- Si M es una cota de A, entonces cualquier número real mayor que M también es cota de A.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que:

- Si M es una cota superior de A y $M \in A$, decimos que M es el elemento máximo de A, y lo denotamos como $M = \max(A)$.
- Si m es una cota inferior de A y $m \in A$, decimos que m es el elemento mínimo de A, y lo denotamos como $m = \min(A)$.

Observación: Por definición, si A tiene elemento máximo, entonces está acotado superiormente, y si A tiene elemento mínimo, entonces está acotado inferiormente.

Lista de ejercicios

Demuestre lo siguiente:

a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que A está acotado. Sea $a \in A$, por definición, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$. Por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $-M \leq a \leq M$, por lo que A está acotado superior e inferiormente.

$\Leftarrow$) Supongamos que A está acotado superior e inferiormente. Sea $a \in A$, entonces $\exists k, K \in \mathbb{R}$ tales que $k \leq a \leq K$. Notemos que

$$\begin{aligned}
-k &\leq |k| \\
-k &\leq |k| + |K| \\
-|K| - |k| &\leq k \\
-\big(|K| + |k|\big) &\leq k
\end{aligned}$$

Como $k \leq a$, por transitividad sigue que, $-\big(|K| + |k|\big) \leq a$. Similarmente,

$$\begin{aligned}
K &\leq |K| \\
K &\leq |K| + |k|
\end{aligned}$$

Como $a \leq K$, por transitividad sigue que, $a \leq |K| + |k|$. Es decir, se verifica que

$$-\big(|K| + |k|\big) \leq a \leq |K| + |k|$$

y, por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, sigue que $|a| \leq |K| + |k|$. Por tanto, A está acotado. □

b) Si A tiene elemento máximo, este es único.

Demostración: Sea M y M' elementos máximos de A. Como $M' \in A$, y M es una cota superior de A, entonces $M' \leq M$. Análogamente, $M \leq M'$. Por tanto, $M = M'$. □

c) Si A tiene elemento mínimo, este es único.

Demostración: Sea m y m' elementos máximos de A. Como $m' \in A$, y m es una cota inferior de A, entonces $m' \leq m$. Análogamente, $m \leq m'$. Por tanto, $m = m'$. □

d) Sea $K \in \mathbb{R}$ y $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < K \,\}$, entonces A no tiene elemento máximo.

Demostración: Supongamos que $M = \max(A)$. Por definición, $M \in A$, por lo que $M < K$. Luego, $M < \frac{M+K}{2} < K$, por lo que $\frac{M+K}{2} \in A$, pero esto es una contradicción, pues M es cota superior de A. Por tanto, A no tiene elemento máximo. □

e) Sea $k \in \mathbb{R}$ y $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid k < x \,\}$, entonces A no tiene elemento mínimo.

Demostración: Supongamos que $m = \min(A)$. Por definición, $m \in A$, por lo que $k < m$. Luego, $k < \frac{k+m}{2} < m$, por lo que $\frac{k+m}{2} \in A$, pero esto es una contradicción, pues m es cota inferior de A. Por tanto, A no tiene elemento mínimo. □

Supremos e ínfimos

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si:

- S es cota superior de A, y
- Si K es cota superior de A, entonces $S \leq K$. (S es la cota superior más pequeña de A).

Notación: Denotamos al supremo de A como $\sup(A)$.

Nota: La definición de supremo no implica que este pertenezca al conjunto.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si:

- L es cota inferior de A, y
- Si K es cota inferior de A, entonces $K \leq L$. (L es la cota inferior más grande de A).

Notación: Denotamos al ínfimo de A como $\inf(A)$.

Nota: La definición de ínfimo no implica que este pertenezca al conjunto.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es denso (en $\mathbb{R}$), o que cumple la propiedad de densidad, si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $a \in A$ tal que $x < a < y$.

Observación: Es claro que $\mathbb{R}$ es denso, pues $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ y para cada $x < y$ se tiene que $x < \frac{x+y}{2} < y$, con $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$.

Una nota sobre el supremo y el ínfimo

A pesar de que hemos definido al supremo e ínfimo para subconjuntos no vacíos de los números reales, en realidad no es posible —utilizando únicamente las propiedades demostradas hasta este punto, probar que, en efecto, el supremo e ínfimo existen para todo subconjunto no vacío de los reales que esté acotado.

Consideremos el siguiente argumento: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente por S. Sea $a \in A$, por definición, $a \leq S$, y por la densidad de los números reales, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq S$, por lo que x es una cota superior de A. Es decir, para cualquier cota superior de un conjunto, es posible encontrar un número real que sea menor o igual que este, y mayor o igual a los elementos del conjunto. Si la relación entre las cotas se cumple con igualdad, es decir que $a \leq x = S$, podríamos conjeturar que S es el supremo de A, sin embargo, si se tiene que $a \leq x < S$, sería natural pensar que x es el supremo de A, pues es menor que la cota superior S. No obstante, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y \leq x < S$, y nos encontramos en la misma situación que antes, si $a \leq y = x$, entonces x es candidato para ser el supremo de A, pero si $a \leq y < x$, podríamos inferir que y es el supremo de A, recursivamente sin encontrar un número real que satisfaga la propiedad de ser la cota inferior más pequeña de A, para cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Análogamente, la existencia del ínfimo no está garantizada ni puede probarse. Por tanto, introducimos la existencia del supremo como un axioma:

Propiedad de completez de $\mathbb{R}$

Axioma del supremo: Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Lista de ejercicios

Demuestre lo siguiente:

a) Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{ -a : a \in A \}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(A)$ y $a \in A$, entonces $M \geq -a$, de donde sigue que $-M \leq a$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. $\square$

b) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Por definición, s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Análogamente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. $\square$

c) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Por definición, m_1 es una cota inferior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Análogamente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. $\square$

d) El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración: Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. $\square$

e) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$. Una cota superior M de A, es el supremo de A si y solo si $\forall b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$, entonces $\exists a \in A$ tal que $b < a$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que M es el supremo de A y sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$. Se tiene que b no es cota superior de A, es decir que $\exists a \in A$ tal que $b < a$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\forall b \in \mathbb{R}$ tal que $b < M$, $\exists a \in A$ tal que $b < a$. Supongamos que M no es el supremo de A, es decir, existe una cota superior c de A tal que $c < M$, y por hipótesis, $\exists a_0 \in A$ tal que $c < a_0$, pero esto es una contradicción. $\square$

f) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \varnothing$. Una cota superior M de A, es el supremo de A si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $M - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea M el supremo de A y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$ implica que $M - \varepsilon < M$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de A, por lo que $\exists a_\varepsilon$ tal que $a_\varepsilon > M - \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Sea M una cota superior de A tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < a_\varepsilon$. Supongamos que M no es el supremo de A, entonces $b \in \mathbb{R}$, el cual es una cota superior de A, tal que $a_\varepsilon \leq b < M$. Elegimos $\varepsilon = M - b$, con lo que $M - (M - b) < a_\varepsilon$, es decir, $b < a_\varepsilon$, pero esto es una contradicción. Por tanto, M es el supremo de A. $\square$

g) Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y B es acotado; se verifica que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

(El supremo preserva el orden y el ínfimo lo invierte).

Demostración:

i) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $\inf(B) \leq x$, por lo que $\inf(B)$ es cota inferior de A. Por definición, el ínfimo de A es mayor o igual que todas sus cotas inferiores, es decir, $\inf(B) \leq \inf(A)$.

ii) Sea $x \in A$. Por definición, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$, por lo que $\inf(A) \leq \sup(A)$. (El ínfimo es menor o igual que el supremo).

iii) Sea $x \in A$. Se tiene que $x \in B$, y por definición, $x \leq \sup(B)$, por lo que $\sup(B)$ es cota superior de A, y por definición, el supremo de A es menor o igual que todas sus cotas superiores, es decir, $\sup(A) \leq \sup(B)$. $\square$

Corolario:

i) $\inf(B) \leq \sup(A)$.

ii) $\inf(A) \leq \sup(B)$.

h) Sea $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$0 < \varepsilon$$
$$\inf(B) < \inf(B) + \varepsilon$$

Por lo que $\inf(B) + \varepsilon$ no es una cota inferior de B, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que $b_\varepsilon < \inf(B) + \varepsilon$. $\square$

i) Sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se verifica que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
0 &< \varepsilon \\
\sup(A) &< \varepsilon + \sup(A) \\
\sup(A) - \varepsilon &< \sup(A)
\end{aligned}$$

Por lo que $\sup(A) - \varepsilon$ no es una cota superior de A, por lo que $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon$. $\square$

j) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, entonces $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Demostración:

Pr definición, $\sup(A) \leq b, \forall b \in B$.

Supongamos que $\inf(B) < \sup(A)$, entonces $\sup(A) - \inf(B) > 0$. Sea $\varepsilon = \sup(A) - \inf(B)$, entonces $\exists b_\varepsilon \in B$ tal que

$$\begin{aligned}
b_\varepsilon &< \inf(B) + \varepsilon \\
b_\varepsilon &< \inf(B) + \sup(A) - \inf(B) \\
b_\varepsilon &< \sup(A) \qquad\qquad \underset{\circ}{\nabla}
\end{aligned}$$

$\square$

k) Sea $A + B \coloneqq \{ a + b : a \in A, b \in B \}$, entonces:

- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

l) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ no vacíos, $A \cdot B \coloneqq \{ a \cdot b : a \in A, b \in B \}$, entonces

- $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.
- $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$.

Demostración: Sea $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $a \leq \alpha$ y $b \leq \beta$, de donde sigue que $ab \leq \alpha\beta$ (*), por lo que AB está acotado superiormente por $\alpha\beta$.

Ahora, sea $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\varepsilon_1}{\alpha+\beta+1}\right)$, es claro que $\varepsilon_2 > 0$. Luego, por definición, $\exists a \in A$ tal que $a > \alpha - \varepsilon_2 > 0$ y $\exists b \in B$ tal que $b > \beta - \varepsilon_2 > 0$. Por lo que

$$\begin{aligned}
ab &> (\alpha - \varepsilon_2)(\beta - \varepsilon_2) \\
&= \alpha\beta - (\alpha + \beta)\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 \\
&> \alpha\beta - (\alpha + \beta)\varepsilon_2 \\
&> \alpha\beta - \varepsilon_1 \qquad\qquad (**)
\end{aligned}$$

Como esta desigualdad se verifica para cualquier $\varepsilon_1 > 0$, se tiene que $\alpha\beta = \sup(AB)$. $\square$

(*) Por Cálculo 1; se tiene que $a \leq \alpha \Rightarrow ab \leq \alpha b$, pues $b > 0$ y $b \leq \beta \Rightarrow \alpha b \leq \alpha\beta$, pues $\alpha > 0$. Por transitividad, $ab \leq \alpha\beta$.

(**) Si $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{\alpha+\beta+1}$ se tiene que

$$(\alpha + \beta)\varepsilon_2 = \frac{(\alpha + \beta)\varepsilon_1}{\alpha + \beta + 1} < \varepsilon_1$$

Por lo que $-(\alpha + \beta)\varepsilon_2 > -\varepsilon_1$.

m) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^+$ no vacío, $\frac{1}{A} \coloneqq \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}$, entonces

- $\frac{1}{\sup(A)} = \inf(\frac{1}{A})$.

n) Sea $\gamma = \text{ínf}(A)$ y suponga que $\gamma > 0$. Defínase ahora al siguiente conjunto:

$$\frac{B}{A} := \left\{ \frac{b}{a} \;\middle|\; a \in A, b \in B \right\}$$

Demuestre que $\frac{B}{A}$ está acotado superiormente; más aún, diga quién es el supremo de $\frac{B}{A}$ y justifique su afirmación.

Demostración: Definimos el conjunto $A^{-1} := \left\{ \frac{1}{a} \;\middle|\; a \in A \right\}$. Sea $a \in A$, se tiene que $\gamma \leq a$. Como γ es positivo, de esta desigualdad se sigue que $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\gamma}$, por lo que $\frac{1}{\gamma}$ es una cota superior de A^{-1}. Ahora, consideremos que a' es una cota superior de A^{-1}, entonces $\frac{1}{a} \leq a'$, y se tiene que $0 < \frac{1}{a}$, de donde obtenemos que $\frac{1}{a'} \leq a$, por lo que $\frac{1}{a'}$ es cota inferior de A. Por definición de ínfimo, $\frac{1}{a'} \leq \gamma$, lo que implica que $\frac{1}{\gamma} \leq a'$, es decir, $\frac{1}{\gamma}$ es la menor de las cotas superiores de A^{-1}, osea $\sup(A^{-1}) = \frac{1}{\gamma}$.

Notemos que $\frac{b}{a} = b\frac{1}{a}$, así que definimos el conjunto $BA^{-1} := \left\{ b\frac{1}{a} \;\middle|\; b \in B, \frac{1}{a} \in A^{-1} \right\}$, y por el inciso (ii) de este problema, se tiene que $\sup(BA^{-1}) = \beta\frac{1}{\gamma}$, es decir, $\sup(\frac{B}{A}) = \frac{\beta}{\gamma}$. $\square$

o) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío, $rA := \{ ra \mid a \in A \}$,

I) Si $r \geq 0$,

i) $\inf(rA) = r\inf(A)$.

ii) $\sup(rA) = r\sup(A)$

II) Si $r \leq 0$,

i) $\inf(rA) = r\sup(A)$.

ii) $\sup(rA) = r\sup(A)$.

Corolario: Sea $r = -1$ y la notación $-A := (-1)A\{ -a : a \in A \}$,

i) $\inf(-A) = -\sup(A)$.

ii) $\sup(-A) = -\inf(A)$.

p) $\inf(A) = -\sup(-A)$.

q) $\sup(A) = -\inf(-A)$.

Pendiente

Axioma del supremo

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. $\square$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. $\square$

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. $\square$

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. $\square$

d) Definimos el conjunto $A := \{ n \in \mathbb{Z} : x < n \}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m+1$ y $n \leq x < n+1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n < m \leq x &< n + 1 \\ n < m &< n + 1 \\ 0 < m - n &< 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. $\square$

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) := \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b).

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$
$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. □

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &< \varepsilon \\ |x_n - \ell| + |\ell| &< \varepsilon + |\ell| \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} \big|(x_n - \ell) + \ell\big| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \\ |x_n| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \end{aligned}$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n<n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. □

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

i) Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.

iii) Si $n = k + 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.

b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.

c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. □