Cálculo I

Darvid
darvid.torres@gmail.com

August 27, 2022

Números reales

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias:

$$\begin{aligned}\text{Suma } + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ (m,n) &\mapsto m+n\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}\text{Multiplicación } \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ (m,n) &\mapsto m\cdot n\end{aligned}$$

La notación anterior denota la cerradura de estas operaciones, es decir, que para cuales quiera dos números reales (m, n), la suma y multiplicación son números reales, $(m + n) \in \mathbb{R}$ y $(m + n) \in \mathbb{R}$.

Las suma y multiplicación de números reales satisfacen los siguientes **axiomas de campo**:

S1. Conmutatividad (de la suma).

La suma es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m + n = n + m$.

S2. Asociatividad (de la suma).

La suma es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $(a + n) + l = m + (n + l)$.

El letor observará que el axioma **S2** no incluye todas las formas en que podríamos sumar tres números reales:

i.	$(a + n) + l$	**vii.**	$l + (n + m)$
ii.	$m + (n + l)$	**viii.**	$(l + n) + m$
iii.	$m + (l + n)$	**ix.**	$(n + l) + m$
iv.	$(a + l) + n$	**x.**	$n + (l + m)$
v.	$(l + m) + n$	**xi.**	$n + (a + l)$
vi.	$l + (a + n)$	**xii.**	$(n + m) + l$

La razón, es que las anteriores pueden obtenerse utilizando los axiomas **S1** y **S2**, con lo que garantizamos la igualdad de todas ellas.

Notemos que para sumar tres números (a, b, c), siempre requerimos ejecutar, primero, la suma de dos de ellos $(a+b)$, y tomar este resultado para, entonces, sumarlo al tercero $(a+b)+c$, a esto alude el lado izquierdo de la igualdad de la asociatividad de la suma (**S2**). También podemos cambiar el orden, realizando la suma de a y b, luego tomar el número c y sumarle a este último el resultado que habíamos obtenido con anterioridad: $c+(a+b)$. Estos resultados (**i** y **vii**) satisfacen igualdad debido a la conmutatividad de la suma (**S1**), $(a+b)+c=c+(a+b)$.

Asimismo, por asociatividad de la suma (**S2**), las formas **(i)** y **(ii)** satisfacen igualdad, por lo que tenemos $(a+b)+c=a+(b+c)$. A partir de este punto, el lector puede inferir cuál es el uso de estos axiomas y cómo demostrar la igualdad de todas las formas de sumar tres números, sin necesidad de enunciarlas todas como axiomas. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &= a+(b+c) && \text{Asociatividad}\\
&= a+(c+b) && \text{Conmutatividad}\\
&= (a+c)+b && \text{Asociatividad}\\
&= (c+a)+b && \text{Conmutatividad}\\
&= c+(a+b) && \text{Asociatividad}\\
&= c+(b+a) && \text{Conmutatividad}\\
&= (c+b)+a && \text{Asociatividad}\\
&= (b+c)+a && \text{Conmutatividad}\\
&= b+(c+a) && \text{Asociatividad}\\
&= b+(a+c) && \text{Conmutatividad}\\
&= (b+a)+c && \text{Asociatividad}
\end{aligned}
$$

Continuamos con el listado de axiomas:

- **S3.** Neutro aditivo. Existe un número real llamado elemento neutro para la suma o cero, denotado por 0, el cual satisface la siguiente condición: $m+0=m, \forall m \in \mathbb{R}$.
- **S4.** Inverso aditivo. Para cada número real m existe un número real llamado inverso aditivo de m, denotado por $-m$ (aenos m); la propiedad que caracteriza a este elemento es: $m+(-m)=0$.

Utilizando los axiomas enunciados hasta ahora **S[1-4]**, podemos obtener resultados útiles, por ejemplo, si tenemos números reales a, b, c tales que $a+c=b+c$, encontraremos que $a=b$. El lector acostumbrado a matemáticas de bachillerato, podría intentar demostrar este hecho de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
a+c &= b+c\\
a &= b+c-c\\
a &= b
\end{aligned}
$$

No obstante, aunque en principio el resultado anterior no es incorrecto, debemos especificar cada hecho mediante las propiedades conocidas hasta este punto. Por lo anterior, una forma más precisa de demostrar la proposición es la siguiente:

Sean a, b y c números reales, tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= a + \big(c + (-c)\big) && \text{Inverso aditivo} \\
&= (a + c) + (-c) && \text{Asociatividad} \\
&= (b + c) + (-c) && \text{Hipótesis} \\
&= b + \big(c + (-c)\big) && \text{Asociatividad} \\
&= b + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
&= b && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

A esta proposición la llamaremos Ley de la cancelación (de la suma). Si el contexto es claro, omitiremos el paréntesis y simplemente la enunciaremos como ley de la cancelación.

Notemos que en el segundo paso de la demostración, teníamos —en virtud del axioma **S4**, la opción de sustituir 0 por $b + (-b)$ o por $c + (-c)$, sin embargo, no en ambos casos resultaría útil. El lector debería comprobar que ocurre si sustituimos 0 por $b + (-b)$ en la demostración anterior.

Lista de Ejercicios 1 (LE1)

a) Demuestre que el elemento neutro para la suma es único. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración: Supongamos que existen 0 y $\tilde{0}$ números reales tales que $a + 0 = a$ y $a + \tilde{0} = a$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{Inverso aditivo} \\
&= \big(a + \tilde{0}\big) + (-a) && \text{Hipótesis} \\
&= \big(\tilde{0} + a\big) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\
&= \tilde{0} + \big(a + (-a)\big) && \text{Asociatividad} \\
&= \tilde{0} + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
&= \tilde{0} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

b) Demuestre que el inverso aditivo de cada número real es único. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración: Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Supongamos que existen $-a$ y $-\tilde{a}$ números reales tales que $a + (-a) = 0$ y $a + (-\tilde{a}) = 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
-a &= -a + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= 0 + (-a) && \text{Conmutatividad} \\
&= \big(a + (-\tilde{a})\big) + (-a) && \text{Hipótesis} \\
&= \big((-\tilde{a}) + a\big) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\
&= (-\tilde{a}) + \big(a + (-a)\big) && \text{Asociatividad} \\
&= (-\tilde{a}) + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
&= -\tilde{a} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

c) Demuestre que $-0 = 0$.

Demostración: Por la propiedad del neutro aditivo tenemos que $0 + 0 = 0$. Además, el inverso aditivo de 0 satisface que $0 + (-0) = 0$. Debido a que el inverso aditivo de cada número real es único, de la igualdad anterior sigue que $-0 = 0$. $\square$

d) Sea a un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $-(-a) = a$.

Demostración: El inverso aditivo de a satisface que $a + (-a) = 0$, y por conmutatividad tenemos que $(-a) + a = 0$, de esta igualdad se sigue que a es inverso aditivo de $(-a)$. Similarmente, el inverso aditivo de $(-a)$ satisface que $(-a) + \big(-(-a)\big) = 0$, y por la unicidad del inverso aditivo, sigue que $-(-a) = a$. $\square$

e) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a + b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo} \\
&= a + \Big((-a) + \big(b + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad} \\
&= a + \Big(\big((-a) + b\big) + (-b)\Big) && \text{Asociatividad} \\
&= a + \Big(\big(b + (-a)\big) + (-b)\Big) && \text{Conmutatividad} \\
&= a + \Big(b + \big((-a) + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad} \\
&= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, tenemos que $(-a) + (-b) = -(a + b)$. $\square$

Nota: Cada demostración que realizamos, al ser probada para números reales arbitrarios, esto es, no para elementos de $\mathbb{R}$ en particular, nos permite reutilizar las formas como esquema para otras proposiciones. Por ejemplo, el resultado $-(a + n) = (-m) + (-n)$, nos permite sustituir m y n por cuales quiera números reales, como en el ejemplo que sigue:

f) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-\big(a + (-b)\big) = b + (-a)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
-\big(a + (-b)\big) &= (-a) + \big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo} \\
&= (-a) + b && \text{Unicidad del inverso aditivo} \\
&= b + (-a) && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

$\square$

Continuemos enunciando los **axiomas** de campo:

M1. Conmutatividad (de la multiplicación).

La multiplicación es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m \cdot n = n \cdot m$.

M2. Asociatividad (de la multiplicación).

La multiplicación es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n \cdot l) = (a \cdot n) \cdot l$.

M3. Neutro multiplicativo.

Elemento identidad para la multiplicación. Existe un número real distinto de cero, llamado elemento identidad para la multiplicación o uno, denotado por 1, que satisface la siguiente condición: $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.

M4. Inverso multiplicativo.

Para cada número real m distinto de cero existe un número real llamado inverso multiplicativo de m, denotado por m^{-1}, este elemento tiene la siguiente propiedad:$m \cdot m^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2 (LE2)

a) Demuestre que el elemento identidad para la multiplicación es único. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración: Supongamos que existen 1 y $\tilde{1}$ números reales tales que $a \cdot 1 = a$ y $a \cdot \tilde{1} = a$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= \left(a \cdot \tilde{1}\right) \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
&= \left(\tilde{1} \cdot a\right) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= \tilde{1} \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\
&= \tilde{1} \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= \tilde{1} && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

□

b) Demuestre que el inverso multiplicativo de cada número real distinto de cero es único. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración: Supongamos que existen a^{-1} y $\tilde{a}^{-1}$ números reales, distintos de cero, tales que $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a \cdot \tilde{a}^{-1} = 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
a^{-1} &= a^{-1} \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a^{-1} \cdot \left(a \cdot \tilde{a}^{-1}\right) && \text{Por hipótesis} \\
&= \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= 1 \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= \tilde{a}^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad} \\
&= \tilde{a}^{-1} && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

□

c) Demuestre que $1 = 1^{-1}$.

Demostración: Por la propiedad del elemento identidad para la multiplicación tenemos que $1 \cdot 1 = 1$. Además, el inverso multiplicativo de 1 satisface que $1 \cdot 1^{-1} = 1$. Debido a que el inverso multiplicativo de cada número real distinto de cero es único, de la igualdad anterior sigue que $1 = 1^{-1}$.

Nota: Recordemos que el axioma **M3** enuncia que 1 es distinto de cero, por tanto podemos declarar la existencia de su inverso multiplicativo.

d) Sea a un número real distinto de cero; demuestre que: $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración: El inverso multiplicativo de a satisface que $a \cdot a^{-1} = 1$, y por conmutatividad, $a^{-1} \cdot a = 1$, de esta igualdad se sigue que a es inverso multiplicativo de a^{-1}. Similarmente, el inverso multiplicativo de a^{-1} satisface que $a^{-1} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1} = 1$, y por la unicidad del inverso multiplicativo, sigue que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. □

e) Sean a y b números reales distintos de cero, demuestre que: $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) &= \left((a \cdot b) \cdot a^{-1}\right) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \left((b \cdot a) \cdot a^{-1}\right) \cdot b^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= \Big(b \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right)\Big) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= 1 && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

Sigue que $\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right)$ es inverso multiplicativo de $(a \cdot b)$, y por la unicidad del inverso multiplicativo, sigue que $\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) = (a \cdot b)^{-1}$ □

f) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$. Demuestre que si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= b \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

□

Nota: Observemos que para esta proposición requerimos que $c \neq 0$, pues como demostramos en el ejercicio anterior, de caber la posibilidad de que $c = 0$, no tendríamos garantía de que $a = b$. El lector debería verificar este hecho.

A esta proposición la llamaremos Ley de la cancelación (de la multiplicación). Si el contexto es claro, omitiremos el paréntesis y simplemente la enunciaremos como ley de la cancelación.

Ahora, introducimos el **axioma** que nos permite relacionar las operaciones de suma y multiplicación:

P.D. Propiedad distributiva.

Distribución de la multiplicación sobre la suma. Para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$.

Notación: Al número $a \cdot b$ lo denotaremos como ab; al número $a \cdot a$ lo denotaremos con el símbolo a^2.

Ejemplo de argumento circular

A partir de los axiomas y *esquemas* que obtuvimos al probar proposiciones, podemos proceder a demostrar un resultado particularmente útil: Si a es un número real, entonces $a \cdot 0 = 0$. Podemos esbozar la demostración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 &= ab + (-ab) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b\big(a + (-a)\big) && \text{P. Distributiva} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

El lector cuidadoso notará que para invocar la propiedad distributiva en el segundo paso, hemos asumido que $(-mn) = (-m)n$, lo cual no ha sido demostrado. Esto es más notorio si el esbozo anterior se lee de *abajo hacia arriba*. Por lo que, para guardar rigurosidad, procedemos a demostrar la veracidad de dicha proposición, de modo que la prueba objetivo pueda ser fundamentada.

Nuestra intención es demostrar que $(-ab) = (-a)b$. Notemos que el número $(-ab)$ es el inverso aditivo de ab, por lo que, si demostramos que $(-a)b$ también cumple esta propiedad, es decir, que $ab + (-a)b = 0$, la prueba estaría concluída. Por ello procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= b \cdot 0 && \text{¿?} \\ &= b\big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= ab + (-a)b && \text{P. Distributiva} \end{aligned}$$

No obstante, de esta forma, la proposición que debía servirnos para probar la demostración objetivo, pareciera necesitar de la proposición misma. En otras palabras, se ha propuesto un argumento circular, por lo que no podemos verificar la proposición original de este modo. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

a) Demuestre que $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{P. Distributiva} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

b) Si a y b son números reales tales que $a \cdot b = 0$, demuestre que $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Supongamos que a es distinto de 0.

$$
\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= b \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
&= a^{-1} \cdot 0 && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 && \text{Multiplicación por 0}
\end{aligned}
$$

□

Nota: Esta proposición es verdadera si al menos uno de los números a o b resultan ser igual a 0. Aunque también podríamos negar la igualdad para ambos y llegar a una contradicción; para ello, al procedimiento anterior añadimos el supuesto de que a su vez $b \neq 0$, alcanzando la contradicción a partir de este hecho.

c) Sea a un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $(-1) \cdot a = -a$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= a \cdot 0 && \text{Multiplicación por 0} \\
&= a \cdot \big(1 + (-1)\big) && \text{Inverso aditivo} \\
&= a \cdot 1 + a \cdot (-1) && \text{P. Distributiva} \\
&= a + a \cdot (-1) && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a + (-1) \cdot a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
$$

Sigue que $(-1) \cdot a$ es inverso aditivo de a, el cual es único, por lo que $(-1) \cdot a = -a$. □

d) Sean a y b números reales, demuestre que: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot b &= \big((-1) \cdot a\big) \cdot b && \text{(c) de LE3} \\
&= (-1) \cdot (a \cdot b) && \text{Asociatividad} \\
&= -(a \cdot b) && \text{(c) de LE3}
\end{aligned}
$$

□

e) Sean a y b números reales, demuestre que: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &= (-a) \cdot \big((-1) \cdot b\big) && \text{(c) de LE3} \\
&= \big((-a) \cdot (-1)\big) \cdot b && \text{Asociatividad} \\
&= \big((-1) \cdot (-a)\big) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
&= -(-a) \cdot b && \text{(c) de LE3} \\
&= a \cdot b && \text{(d) de LE1}
\end{aligned}
$$

□

Nota: A las proposiciones $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$ y $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$, las llamaremos **ley de los signos**.

Notación:

- Si m y n son números reales, representaremos con el símbolo $m - n$ a la suma $m + (-n)$.
- Si m y n son números reales y n es distinto de cero, representaremos con el símbolo $\frac{m}{n}$ al número $m \cdot b^{-1}$.
- Si m_1, m_2 y m_3 son números reales, representaremos con el símbolo $m_1+m_2+m_3$ a cualquiera de las sumas $m_1 + (m_2 + m_3)$ o $(m_1 + m_2) + m_3$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot \left(c \cdot b^{-1}\right) && \text{Por notación} \\ &= (a \cdot c) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \frac{ac}{b} && \text{Por notación} \end{aligned}$$

$\square$

b) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bc} &= a \cdot c \cdot (bc)^{-1} && \text{Por notación} \\ &= a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} && \text{(e) de LE2} \\ &= a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot b^{-1} \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \frac{a}{b} && \text{Por notación} \end{aligned}$$

$\square$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) && \text{Por notación} \\ &= a \cdot \left(b^{-1} \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot \left(c \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Conmutatividad} \\ &= (a \cdot c) \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{(e) de LE2} \\ &= \frac{ac}{bd} && \text{Por notación} \end{aligned}$$

$\square$

d) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} \pm c \cdot d^{-1} && \text{Por notación} \\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \pm (c \cdot 1) \cdot d^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= \Big(a \cdot \big(d \cdot d^{-1}\big)\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big(c \cdot \big(b \cdot b^{-1}\big)\Big) \cdot d^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= \Big((a \cdot d) \cdot d^{-1}\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big((c \cdot b) \cdot b^{-1}\Big) \cdot d^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot d) \cdot \big(d^{-1} \cdot b^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot d) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Conmutatividad} \\
&= \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \cdot (a \cdot d \pm c \cdot b) && \text{P. Distributiva} \\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Conmutatividad} \\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{(e) de LE2} \\
&= (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{ad \pm bc}{bd} && \text{Por notación}
\end{aligned}
$$

□

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\big(a \cdot b^{-1}\big)}{\big(c \cdot d^{-1}\big)} && \text{Por notación} \\
&= \big(a \cdot b^{-1}\big) \cdot \big(c \cdot d^{-1}\big)^{-1} && \text{Por notación} \\
&= \big(a \cdot b^{-1}\big) \cdot \Big(c^{-1} \cdot \big(d^{-1}\big)^{-1}\Big) && \text{(e) de LE2} \\
&= \big(a \cdot b^{-1}\big) \cdot \big(c^{-1} \cdot d\big) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo} \\
&= \big(a \cdot b^{-1}\big) \cdot \big(d \cdot c^{-1}\big) && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{Por notación} \\
&= \frac{ad}{bc} && \text{(d) de LE4}
\end{aligned}
$$

□

Notación: Al número $1 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 2 y lo llamaremos número dos. Al número $2 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 3 y lo llamaremos número tres...

Axiomas de orden

Ejercicio: Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + (-b) = b + (-a)$, entonces $a = b$.

Un intento por demostrar la proposición anterior puede lucir como sigue:

$a + (-b) = b + (-a)$	Hipótesis
$\big(a + (-b)\big) + b = \big(b + (-a)\big) + b$	Ley de la cancelación
$a + \big((-b) + b\big) = b + \big((-a) + b\big)$	Asociatividad
$a + \big(b + (-b)\big) = b + \big(b + (-a)\big)$	Conmutatividad
$a + 0 = b + \big(b + (-a)\big)$	Inverso aditivo
$a + 0 = (b + b) + (-a)$	Asociatividad
$(a + 0) + a = \big((b + b) + (-a)\big) + a$	Ley de la cancelación
$(a + 0) + a = (b + b) + \big((-a) + a\big)$	Asociatividad
$(a + 0) + a = (b + b) + \big(a + (-a)\big)$	Conmutatividad
$(a + 0) + a = (b + b) + 0$	Inverso aditivo
$a + a = b + b$	Neutro aditivo
$2a = 2b$	Notación
$a = b$	¿Ley de la cancelación?

El lector precavido notará que la ley de la cancelación (de la multiplicación) exige que el número a *ser cancelado* requiere de ser diferente de 0. Sin embargo, hasta este punto no hemos demostrado que $2 \neq 0$, por lo que la proposición no puede ser demostrada. Sin embargo, con los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos derivado de ellos no es suficiente para probar tal proposición (el lector debería verificar este hecho). Por ello resulta necesario añadir elementos a nuestro conjunto de axiomas y para ello comenzamos asumiento lo siguiente:

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo $\mathbb{R}^+$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales positivos. El conjunto $\mathbb{R}^+$ satisface los siguientes **axiomas**:

O1) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m + n \in \mathbb{R}^+$.

O2) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{R}^+$.

O3) Para cada número real m se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

- **i)** $m \in \mathbb{R}^+$.
- **ii)** $m = 0$.
- **iii)** $-m \in \mathbb{R}^+$.

Definición: Sean a y b números reales, decimos que:

1. a es menor que b o que b es mayor que a y escribimos $a < b$ o $b > a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. a es menor que o igual que b o que b es mayor o igual que a, y escribimos $a \leq b$ o $b \geq a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$.

Notación: Sean a, b y c números reales, utilizaremos la notación $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y $b < c$.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $1 \in \mathbb{R}^+$.

b) $-a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-a > 0$.

c) $-1 < 0$.

d) Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $a + c < b + d$.

e) Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

f) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $0 - c \in \mathbb{R}^+$, por A3 sigue que $-c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
-c(b-a) &= -c\Big(b + (-a)\Big) && \text{Por notación} \\
&= (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) && \text{P. Distributiva} \\
&= (-c) \cdot b + c \cdot a && \text{Por (k) de LE1} \\
&= -(c \cdot b) + c \cdot a && \text{Por (i) de LE1} \\
&= ca - (cb) && \text{Conmutatividad} \\
&= ac - (bc) && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
$$

Entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac > bc$. $\square$

Nota: De este resultado sigue que si $0 < m$ y $n < 0$, entonces $mn < 0$.

g) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-a < 0$.

h) $a < b$ si y solo si $-a > -b$.

i) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

j) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

k) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.

l) Si $a < b$ y $ab > 0$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

m) Si $a < 1$ y $0 < b$, entonces $ab < b$.

n) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

o) $a^2 \geq 0$.

p) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

q) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración

a) Supongamos que $1 \notin \mathbb{R}^+$. Por (A7), (ii) de (O3) no se cumple. Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por (O2) se verifica que $-1 \cdot -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual por (h) de LE1 implica que $-(-1) \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (iii) de (O3). Por tanto, 1 es un número real positivo.

b)
- **i)** Supongamos que $-a \in \mathbb{R}^+$. Neutro aditivo sabemos que $-a = -a + 0$, y por (e) de LE1 sigue que $-a = -a - 0$, entonces $-a - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que por definición implica que $-a > 0$.
- **ii)** Supongamos que $-a > 0$. Por definición, $-a - 0 \in \mathbb{R}^+$, y por (e) de LE1 sigue que $-a - 0 = -a + 0$, lo que por A3 implica que $-a + 0 = -a$. Así $-a \in \mathbb{R}^+$.

$\square$

Nota: Esta demostración, cuya forma es $m \in \mathbb{R}^+ \iff m > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, nos permite reparar en el hecho de que la definición de un número real positivo no está asociada a la ausencia del signo negativo.

c) Supongamos que $-1 \geq 0$

i) Si $-1 = 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 && \text{Inverso aditivo} \\ &= 1 + 0 && \text{Por hipótesis} \\ &= 1 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

Pero la igualdad anterior contradice a A7.

ii) Si $-1 > 0$, por (b) de LE3 tenemos que $-1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a O3, ya que por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto $-1 < 0$ $\square$

d) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$.

i) Si $c < d$, entonces $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por (O1) se verifica que $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned} b - a + d - c &= b + d - a - c && \text{Conmutatividad} \\ &= b + d + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\ &= b + d + (-1)a + (-1)c && \text{LE3:3} \\ &= b + d + (-1)(a + c) && \text{P. Distributiva} \\ &= b + d + b - (a + c)\big) && \text{LE3:3} \\ &= b + d - (a + c) && \text{Por notación} \end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

ii) Si $c = d$. Notemos que

$$\begin{aligned} b - a &= b - a + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b - a + c - c && \text{Inverso aditivo} \\ &= b + c - a - c && \text{Conmutatividad} \\ &= b + c + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\ &= b + c + (-1)a + (-1)c && \text{LE3:3} \\ &= b + c + (-1)(a + c) && \text{P. Distributiva} \\ &= b + c - (a + c) && \text{Por(h) de LE1} \\ &= b + d - (a + c) && \text{Por hipótesis} \end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

En cualquier caso, $a + c < b + d$. $\square$

e) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$, y por (b) de LE3 $c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 se verifica que $c(b-a) \in \mathbb{R}^+$. P. Distributiva sigue que $c(b-a) = cb - ca$ y por conmutatividad tenemos que $cb - ca = bc - ac$. De este modo, $bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$. $\square$

f) **i)** Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned} a &> 0 && \text{Por (b) de LE3} \\ a \cdot (-1) &< 0 \cdot (-1) && \text{Por (c) y (f) de LE3} \\ -a &< 0 && \text{Por (h) y (f) de LE1} \end{aligned}$$

ii) Supongamos que $-a < 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} -a \cdot (-1) &> 0 \cdot (-1) && \text{Por (b) y (f) de LE3} \\ a &> 0 && \text{Por (l) y (f) de LE1} \end{aligned}$$

Entonces, $a \in \mathbb{R}^+$, por (b) de LE3. $\square$

g) Notemos que:

i) Si $a < b$, por (b) y (f) de LE3 tenemos que $a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, y por (h) de LE1 obtenemos que $-a > -b$.

ii) Si $-a > -b$, por por (b) y (f) de LE3 tenemos que $-a \cdot (-1) < -b \cdot (-1)$, y por (k) de LE1 obtenemos que $a < b$.

$\square$

h) Sea $a > 0$. Supongamos que $\frac{1}{a} \leq 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot a &\leq 0 \cdot a && \text{Por (e) de LE3} \\ 1 &\leq 0 && \text{Inverso multiplicativo y (f) de LE1} \end{aligned}$$

Pero por (a) de LE3 y (b) de LE3 tenemos que $1 > 0$. Por tanto, $\frac{1}{a} > 0$. $\square$

i) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Por O1 $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned} (b-a) + (c-b) &= b - a + c - b && \text{Por notación} \\ &= b - a - b + c && \text{Conmutatividad} \\ &= b - b - a + c && \text{Conmutatividad} \\ &= 0 - a + c && \text{Inverso aditivo} \\ &= -a + c && \text{Neutro aditivo} \\ &= c - a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Entonces $c - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. $\square$

j) **i)** Si $a = 0$ o $c = 0$, por (g) de LE1 se verifica que $ac = 0$. Luego, por (j) de LE3, se verifica que $0 < b$ y $0 < d$. Así, $ac < bd$.

ii) Si $a > 0$ y $c > 0$. Por hipótesis, $a < b$, y por (e) de LE3, sigue que $ac < bc$. También, tenemos que $c < d$, y por (e) de LE3, sigue que $bc < db$. Finalmente, por (j) de LE3, se verifica que $ac < bd$.

$\square$

k) Notemos que:

$$
\begin{aligned}
a &< b && \text{Por hipótesis}\\
a-a &< b-a && \text{Por (d) de LE3}\\
0 &< b-a && \text{Inverso aditivo}\\
0\cdot\frac{1}{ab} &< (b-a)\cdot\frac{1}{ab} && \text{Por (h) y (e) de LE3}\\
0 &< \frac{b-a}{ab} && \text{Multiplicación por 0 y (a) de LE2}\\
0 &< \frac{1}{a}-\frac{1}{b} && \text{Por (c) de LE2}\\
\frac{1}{b} &< \frac{1}{a} && \text{Por (d) de LE3}
\end{aligned}
$$

$\square$

l) Dado que $0 < b$, por (b) de LE3 se cumple que $b \in \mathbb{R}^+$, y por definición $1-a \in \mathbb{R}^+$. Por O2 se verifica que $b(1-a) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b - ab \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica que $ab < b$. $\square$

m) Por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$, y por O1 se cumple que $1+1 \in \mathbb{R}^+$, es decir $2 \in \mathbb{R}^+$. Por (b) de LE3 se verifica que $0 < 2$ y por (i) de LE3 tenemos que $0 < \frac{1}{2}$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
a &< b && \text{Por hipótesis}\\
a+a &< b+a && \text{Por (d) de LE3}\\
2a &< b+a && \text{Por definición}\\
2a\cdot\frac{1}{2} &< (b+a)\cdot\frac{1}{2} && \text{Por (e) de LE3}\\
\frac{2a}{2} &< \frac{b+a}{2} && \text{Por (a) de LE2}\\
a &< \frac{b+a}{2} && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
a &< b && \text{Por hipótesis}\\
a+b &< b+b && \text{Por (d) de LE3}\\
a+b &< 2b && \text{Por definición}\\
(a+b)\cdot\frac{1}{2} &< 2b\cdot\frac{1}{2} && \text{Por (e) de LE3}\\
\frac{a+b}{2} &< \frac{2b}{2} && \text{Por (a) de LE2}\\
\frac{a+b}{2} &< b && \text{Por A8}
\end{aligned}
$$

Finalmente, por notación, $a < \frac{a+b}{2} < b$. $\square$

n) Si $0 \leq a$, $0 \cdot a \leq a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. Si $a < 0$, $0 \cdot a < a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. En cualquier caso $a \geq 0$. $\square$

o) Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. Elegimos $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

p) Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a-b)\cdot\frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Observación. $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $|a| \geq \pm a$.

b) $|ab| = |a||b|$.

c) $|a| = |-a|$.

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$. Desigualdad del triángulo.

e) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) $|a| < b$ si y solo si $-c < b < c$.

g) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

h) $|a|^2 = a^2$.

Demostración

a)
- **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, así, $|a| \geq a$. Luego, $-a \leq 0$, de donde sigue que $a \geq -a$. Finalmente, $|a| \geq -a$.
- **ii)** Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, así, $|a| \geq -a$. Luego, $-a > 0$, de donde sigue que $-a > a$. Finalmente, $|a| \geq a$.

En cualquier caso, $|a| \geq \pm a$.

b)
- **i)** Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
- **ii)** Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
- **iii)** Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.

c)
- **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$. Luego, $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- **ii)** Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. Luego, $-a > 0$ por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

d)
- **i)** Si $0 \leq a+b$, entonces $|a+b| = a+b$. Además, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$. Luego, $a+b \leq |a|+|b|$. Así, $|a+b| \leq |a|+|b|$.
- **ii)** Si $0 > a+b$, entonces $|a+b| = -a-b$. Además, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$. Luego, $-a-b \leq |a|+|b|$. Así, $|a+b| \leq |a|+|b|$.

e) **i)** Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) **i)** Supongamos que $|b| < c$. Por (a) de LE4, $\pm b \leq |b|$, de donde sigue que $-b < c$ y $b < c$. Luego, $-c < b$. De este modo, $-c < b < c$.

ii) Supongamos que $-c < b < c$. Luego,

1) Si $b \geq 0$, entonces $|b| = b$. Por lo que $|b| < c$.

2) Si $b < 0$, entonces $|b| = -b$. Por hipótesis, $-c < b$, por lo que $-b < c$. Así $|b| < c$.

g) Por la desigualdad del triángulo,

$$
\begin{aligned}
|(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\
|a| &\leq |a-b| + |b| \\
|a| - |b| &\leq |a-b| \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
|(b-a)+a| &\leq |b-a| + |a| \\
|b| &\leq |b-a| + |a| \\
|b| - |a| &\leq |b-a| \\
-|b-a| &\leq |a| - |b| \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Luego, aplicando (f) de LE4 en (1) y (2), $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

h) Por (o) de LE3, $a^2 \geq 0$, por lo que

$$
\begin{aligned}
a^2 &= |a^2| \\
&= |a \cdot a| \\
&= |a| \cdot |a| \qquad \text{Por (b) de LE4} \\
&= |a|^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario-ε de a es el conjunto $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

b) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

c) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Demostración.

a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x-a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x-a|$, por definición. Así, $0 \leq |x-a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

b) **i)** Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.

ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

c) Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Definición: Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $1 \in A$.

2. Si $n \in A$ entonces se verifica que $n + 1 \in A$.

Lista de Ejercicios 6 (LE6)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?

3) Sea $A := \{B \subseteq B : \text{B es un conjunto inductivo}\}$. Demuestre que $A \neq \varnothing$ y que $C = \bigcap B$ es un conjunto inductivo.

Respuesta

1) Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si n es un número real, $n+1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$ y y si n es un número real positivo, $n+1 \in \mathbb{R}^+$ por el axioma de orden 1.

3) Claramente $A \neq \varnothing$, pues $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$.

Luego, por hipótesis, $\forall B \in A$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ por lo que $C \subseteq \mathbb{R}$. Además, $\forall B \in A$, se verifica que $1 \in B$. Consecuentemente, $1 \in C$. Por otra parte, si $n \in B$ para todo $B \in A$, tendremos que $n+1 \in B$, por lo que $n+1 \in C$. Por tanto, C es un conjunto inductivo.

Definición. Al conjunto C de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{N}$.

Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

a) La suma de números naturales es un número natural.

b) La multiplicación de números naturales es un número natural.

c) $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

d) $0 < b^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n-1 \in \mathbb{N}$.

f) Sean m y n números naturales tales que $m > n$, demuestre que $m - n \in \mathbb{N}$.

g) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, desmuestre que $x \in \mathbb{N}$.

h) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ y $n - 1 < x < n$, demuestre que x no es un número natural.

Demostración.

a) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \varnothing$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m + n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(a+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n+1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \varnothing$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por (a) de LE7 se verifica que $(a \cdot n) + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $(a \cdot n) + m = m \cdot (n+1)$, osea, $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n+1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n+1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) Sea $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por (a) de LE7, $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego, notemos que $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n+1$. Por transitividad, $1 \leq n+1$, por lo que $n+1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

d) Por (d) de LE7, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$, tenemos que $b^{-1} = 1 > 0$. Si $n > 1$, tenemos que $n > 0$, por lo que $b^{-1} > 0$. En cualquier caso, $1 \geq b^{-1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n-1 \in \mathbb{N} \,\}$. Si $n \in A$ debe ser porque $n > 1$ y $n - 1 \in \mathbb{N}$. Como $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica $n+1 \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}(n+1)-1 &= n + (1-1)\\ &= n+0\\ &= n\end{aligned}$$

Entonces, $(n+1)-1 \in \mathbb{N}$. También, $n > 1$ implica que $n > 0$ y $n+1 > 1$, por lo que $n+1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

f) Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < m, m-n \in \mathbb{N} \text{ con } m \in \mathbb{N} \,\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $1+1 \in \mathbb{N}$. Por (a) y (b) de LE3, $1 > 0$, de donde sigue que $1+1 > 1$. Por (e) de LE7, se verifica que $(1+1)-1 \in \mathbb{N}$, por lo que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser porque $m - n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, de donde obtenemos $m+1 > n+1$. Como $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$. Notemos que $m+1-(n+1) = m-n$, por lo que $n+1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. $\square$

g) Por (b) de LE3, $x > 0$, por lo que $x + n > n$. Por hipótesis, $x+n, n \in \mathbb{N}$, y por (f) de LE7 $(x+n)-n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$. $\square$

h) Supongamos que $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que $x < n$ y $x > n-1$. Notemos que

$$\begin{aligned}x &< n\\ x-n &< n-n\\ x-n &< 0\\ x-n+1 &< 1\end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}n-1 &< x\\ n-1-(n-1) &< x-(n-1)\\ 0 &< x-n+1\\ n &< x+1\end{aligned}$$

Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $x+1 \in \mathbb{N}$, y como $x+1 > n$, con $n \in \mathbb{N}$, por (e) de LE7, $x+1-n \in \mathbb{N}$, y por (c) de LE7, $x+1-n \geq 1$. Pero tenemos que $x-n+1 < 1$, osea $1 \leq x+1-n < 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. $\square$

Definición. Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que E está acotado:

- Superiormente si existe un número real m tal que $b \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que E es cota superior de E.
- Inferiormente si existe un número real l tal que $l \leq b, \forall b \in E$. En este caso, decimos que l es cota inferior de E.
- Si existe un número real m tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que m es una cota de E.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado superiormente, decimos que un número real M es supremo de A si M satisface las siguientes condiciones:

- M es cota superior de A.
- Si K es una cota superior de A, entonces $M \leq K$, es decir, M es la cota superior más pequeña de A.

En este caso escribimos $M = \sup A$.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A.
- Si K es una cota inferior de A, entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A.

En este caso escribimos $M = \inf A$.onsideremos el P

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Falso o verdadero:

1. Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, entonces E es un conjunto acotado.

2. Si E es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces E está acotado superiormente e Inferiormente.

Demuestre lo siguiente:

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

5. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Respuesta

1. Falso. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, el cual es un subconjunto de $\mathbb{R}$, y es no vacío, pues $-1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$. Además, $b \leq 0, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, por lo que el conjunto está acotado superiormente. Supongamos que el conjunto propuesto está acotado. Es decir, suponemos que $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$. Por (f) de LE4, $-m \leq b$ y, por transitividad, $-m \leq 0$, de donde sigue que $-m-1 \leq -1$, pero $-1 < 0$, entonces $-m-1 < 0$, lo que implica que $-m-1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, por lo que $|-m-1| \leq m$. Luego, notemos que $|-m-1| = -(-m-1)$, es decir, tenemos que $m+1 \leq m$, pero de esto se concluye que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, aunque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$ está acotado superiormente, no está acotado.

2. Verdadero. Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Si E está acotado, entonces $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. Por (f) de LE4, $-m \leq b \leq m$, por lo que el conjunto está acotado superiormente e inferiormente.

Demostración

3. Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. $\square$

4. Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. $\square$

5. **i)** Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S, tendríamos que $\exists V$ tal que $s_@a \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S.

   ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S, por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$.

   $\square$

Principio del buen orden

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene elemento mínimo. Esto significa que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \varnothing$, entonces existe un elemento $c \in A$ tal que $c \leq a, \forall a \in A$.

Observación:

Sabemos —por (c) de LE7— que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ está acotado inferiormente. El principio del buen orden nos garantiza que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ contiene una de sus cotas inferiores, a la que llamamos elemento mínimo.

Notemos que si suponemos la existencia de un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tal que ninguna de sus cotas inferiores esté contenida en el conjunto, estaríamos negando el principio del buen orden. Es así cómo procedemos a probar el teorema.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$. Supongamos que A no contiene ninguna de sus cotas inferiores, es decir, supongamos que si $c \leq a, \forall a \in A$, entonces $c \notin A$.

Definimos el conjunto $L \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} : n \leq a, \forall a \in A \,\}$. Es claro que $1 \in L$. Veamos que si $n \in L$, tendríamos que $n \leq a, \forall a \in A$. Luego, si $n+1 \notin L$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $n+1 > a_0$, por lo que $n \leq a_0 < n+1$, y —por (h) de LE7— no puede ser el caso que $n < a_0$, de donde sigue que $n = a_0$, pero esto contradice nuestro supuesto inicial, entonces, debe ser el caso que $n+1 \in L$. Consecuentemente, L es un conjunto inductivo, y —por definición— $\mathbb{N} \subseteq L$ y $L \subseteq \mathbb{N}$, lo que implica que $L = \mathbb{N}$.

Finalmente, notemos que A y L son disjuntos, y dado que $A \subseteq \mathbb{N}$ y $L = \mathbb{N}$, sigue que $A = \varnothing$, pero esto es una contradicción. Por tanto, si $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$, entonces $\exists c \in A$ tal que $c \leq a, \forall a \in A$. $\square$

Principio de inducción matemática

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración: Supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es no vacío (ya que de serlo, tendríamos $S = \mathbb{N}$), y —por el principio del buen orden— tiene elemento minimo. Sea m el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$. Por (c) de LE7, se verifica que $1 \leq m$. Por definición, $1 \in S$ y por esto, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ tenemos que $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, de donde sigue —por (e) de LE7— que $m - 1 \in \mathbb{N}$. Debido a que $m - 1 < m$ y m es el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, $m - 1 \in S$. Luego, dado que S es un conjunto inductivo, se verifica que $(a-1)+1 = m \in S$ lo que es una contradicción. Por tanto, debe ser el caso que $S = \mathbb{N}$. $\square$

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

- **i)** Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.
- **ii)** Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.
- **iii)** Si $n = k+1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

- **a)** Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.
- **b)** Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.
- **c)** Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. $\square$

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L \coloneqq \sup(\mathbb{N})$. Como $L-1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L-1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L-1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. $\square$

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A \coloneqq \{\, -a : a \in A \,\}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M \coloneqq \sup(A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. $\square$

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. $\square$

Defínción.

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.
- Al conjunto $-n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^-$.
- Al conjunto $\mathbb{N}$ también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^+$.

Observación. Los conjuntos $\mathbb{N}$, 0, $-n : n \in \mathbb{N}$ son disjuntos por pares.

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S \coloneqq \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Por (d) de LE7, S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w \coloneqq \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. $\square$

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. $\square$

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E \coloneqq \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. $\square$

d) Definimos el conjunto $A \coloneqq \{ n \in \mathbb{Z} : x < n \}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n < m \leq x &< n + 1 \\ n < m &< n + 1 \\ 0 < m - n &< 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. $\square$

Lista de Ejercicios # (LE#)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \leq a^{2n}\, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n\, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a\, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n\, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

  i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$0 \leq a^1$$
$$0 \leq a$$

  ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

  iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$0 \leq a^k$$
$$0 \cdot a \leq a^k \cdot a$$
$$0 \leq a^{k+1}$$

c) Por inducción matemática.

  i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$a^1 < b^1$$
$$a < b$$

  ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

  iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$a^k \cdot a < b^k \cdot b$$
$$a^{k+1} < b^{k+1}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$
$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. $\square$

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &< \varepsilon \\ |x_n - \ell| + |\ell| &< \varepsilon + |\ell| \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} \big|(x_n - \ell) + \ell\big| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \\ |x_n| &\leq |x_n - \ell| + |\ell| \end{aligned}$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n<n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n\geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. $\square$