

Cálculo

Introducción a las matemáticas formales

DARVID

Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: $+$ (suma) y \cdot (multiplicación).

Axiomas de la suma

La suma satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists (-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Proposición: Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosidad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se familiarice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b , y c números reales, demuestre lo siguiente:

- a) Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$b = b + 0$	Neutro aditivo
$= b + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= (b + a) + (-a)$	Asociatividad
$= (a + b) + (-a)$	Conmutatividad
$= a + (-a)$	Hipótesis
$= 0$	Neutro aditivo

□

- b) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$b = b + 0$	Neutro aditivo
$= b + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= (b + a) + (-a)$	Asociatividad
$= (a + b) + (-a)$	Conmutatividad
$= 0 + (-a)$	Hipótesis
$= (-a) + 0$	Conmutatividad
$= -a$	Neutro aditivo

□

Corolario: $-(-a) = a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$0 = a + (-a)$	Inverso aditivo
$= (-a) + a$	Conmutatividad

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a = -(-a)$.

□

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=(-a)$ y $y=a$.

c) $-0 = 0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$0 = 0 + (-0)$	Inverso aditivo
$= (-0) + 0$	Conmutatividad
$= -0$	Neutro aditivo

□

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a = 0$, se verifica que

$a = a + 0$	Neutro aditivo
$= a + (-a)$	Hipótesis
$= 0$	Inverso aditivo

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

□

e) $-(a+b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$0 = 0 + 0$	Neutro aditivo
$= (a + (-a)) + (b + (-b))$	Inverso aditivo
$= a + ((-a) + (b + (-b)))$	Asociatividad
$= a + (((-a) + b) + (-b))$	Asociatividad
$= a + ((b + (-a)) + (-b))$	Conmutatividad
$= a + (b + ((-a) + (-b)))$	Asociatividad
$= (a + b) + ((-a) + (-b))$	Asociatividad

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a+b)$.

□

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=(a+b)$ y $y=(-a)+(-b)$.

Corolario: $-(a+(-b))=b+(-a)$.

Demostración:

$-(a+(-b)) = (-a) + (-(-b))$	Distribución del signo
$= (-a) + b$	Inverso aditivo del inverso aditivo
$= b + (-a)$	Commutatividad □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y)=(-x)+(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

f) Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$a = a + 0$	Neutro aditivo
$= a + (c + (-c))$	Inverso aditivo
$= (a + c) + (-c)$	Asociatividad
$= (b + c) + (-c)$	Hipótesis
$= b + (c + (-c))$	Asociatividad
$= b + 0$	Inverso aditivo
$= b$	Neutro aditivo □

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a+(-a)$ o por $b+(-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a+(-a)$ o $b+(-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación \cdot satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b , y c números reales, demuestre lo siguiente:

- a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$b = b \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= b \cdot (a \cdot a^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (b \cdot a) \cdot a^{-1}$	Asociatividad	
$= (a \cdot b) \cdot a^{-1}$	Conmutatividad	
$= a \cdot a^{-1}$	Hipótesis	
$= 1$	Inverso multiplicativo	□

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$b = b \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= b \cdot (a \cdot a^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (b \cdot a) \cdot a^{-1}$	Asociatividad	
$= a^{-1} \cdot (a \cdot b)$	Conmutatividad	
$= a^{-1} \cdot 1$	Hipótesis	
$= a^{-1}$	Neutro multiplicativo	□

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$1 = 1 \cdot 1^{-1}$	Inverso multiplicativo	
$= 1^{-1} \cdot 1$	Conmutatividad	
$= 1^{-1}$	Neutro multiplicativo	□

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$a = a \cdot 1$	Neutro multiplicativo	
$= a \cdot (c \cdot c^{-1})$	Inverso multiplicativo	
$= (a \cdot c) \cdot c^{-1}$	Asociatividad	
$= (b \cdot c) \cdot c^{-1}$	Hipótesis	
$= b \cdot (c \cdot c^{-1})$	Asociatividad	
$= b \cdot 1$	Inverso multiplicativo	
$= b$	Neutro multiplicativo	□

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma + y multiplicación ·

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$b \cdot 0 = b \cdot (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= b \cdot a + b \cdot (-a)$	Distribución
$= a \cdot b + (-a) \cdot b$	Conmutatividad
$= 0$	¿?

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$a \cdot b + (-a) \cdot b = b \cdot a + b \cdot (-a)$	Conmutatividad
$= b \cdot (a + (-a))$	Distribución
$= b \cdot 0$	Inverso aditivo
$= 0$	¿?

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Neutro aditivo
$= a \cdot 0 + (a + (-a))$	Inverso aditivo
$= a \cdot 0 + (a \cdot 1 + (-a))$	Neutro multiplicativo
$= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a)$	Asociatividad
$= (a \cdot (0 + 1)) + (-a)$	Distribución
$= a \cdot 1 + (-a)$	Neutro aditivo
$= a + (-a)$	Neutro multiplicativo
$= 0$	Inverso aditivo

□

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$1 = a \cdot a^{-1}$	Inverso multiplicativo
$= a \cdot 0$	Hipótesis
$= 0$	Multiplicación por 0

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. □

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ (disyunción).

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo. Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. \square

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (b \cdot (a \cdot a^{-1})) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. \square

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = (a^{-1})^{-1}$. \square

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1 + (-1) = 1 + 0$, y por neutro aditivo $1 + (-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 0$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists (-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$0 = 1 + (-1)$	Inverso aditivo
$= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1)$	Inverso multiplicativo
$= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) \cdot 1$	Neutro multiplicativo
$= (-1) \cdot \left((-1)^{-1} + 1\right)$	Distribución

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1} + 1 = 0$, y por conmutatividad $1 + (-1)^{-1} = 0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1} = -1$. \square

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \implies y = -x$, hemos tomado $x = 1$ y $y = (-1)^{-1}$.

f) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$0 = b \cdot 0$	Multiplicación por 0	$0 = a \cdot 0$	Multiplicación por 0
$= b \cdot (a + (-a))$	Inverso aditivo	$= a \cdot (b + (-b))$	Inverso aditivo
$= b \cdot a + b \cdot (-a)$	Distribución	$= a \cdot b + a \cdot (-b)$	Distribución
$= a \cdot b + (-a) \cdot b$	Conmutatividad		

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. \square

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \implies y = -x$, hemos tomado, $x = a \cdot b$ y $y = (-a) \cdot b$, por una parte y $y = a \cdot (-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demostración:

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot (-(-b))$	Multiplicación por inverso aditivo
$= a \cdot b$	Inverso aditivo del inverso aditivo

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x) \cdot y = x \cdot (-y)$, hemos tomado $x = a$ y $y = (-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1) \cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$(-1) \cdot a^{-1} = -(1 \cdot a^{-1})$	Multiplicación por inverso aditivo
$= -(a^{-1})$	Neutro multiplicativo

Similarmente,

$-(a^{-1}) = (-a^{-1}) \cdot 1$	Neutro multiplicativo
$= -\left(a^{-1} \cdot 1\right)$	Multiplicación por inverso aditivo
$= -\left(a^{-1}\right)$	Neutro multiplicativo

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, hemos tomado $x = 1$ y $y = a^{-1}$, por una parte, y $x = (a^{-1})$ y $y = 1$, por la otra.

Notación

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x - y$ a la suma $x + (-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x \cdot y^{-1}$.
Es inmediato que si $w \neq 0$, entonces $\frac{w}{w} = w \cdot w^{-1} = 1$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x \cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} && \text{Notación} \\ &= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot (1 \cdot b^{-1}) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{Notación}\end{aligned}$$

□

b) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot (c \cdot b^{-1}) && \text{Notación} \\ &= (ac) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \frac{ac}{b} && \text{Notación}\end{aligned}$$

□

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) && \text{Notación} \\ &= a \cdot (b^{-1} \cdot (c \cdot d^{-1})) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot ((b^{-1} \cdot c) \cdot d^{-1}) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot ((c \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot (c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})) && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot (c \cdot (b \cdot d)^{-1}) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos} \\ &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \frac{ac}{bd} && \text{Notación}\end{aligned}$$

□

d) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$. (Cancelación de factores en común).

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \frac{a}{b} \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} && \text{Notación} \\ &= \frac{ac}{b \cdot c} && \text{Multiplicación de fracciones}\end{aligned}$$

□

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{(a \cdot b^{-1})}{(c \cdot d^{-1})}$	Notación	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1}$	Notación	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1})$	Multiplicación de inversos multiplicativos	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d)$	Unicidad del inverso multiplicativo	
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot c^{-1})$	Conmutatividad	
$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	Notación	
$= \frac{ad}{bc}$	Multiplicación de fracciones	□

Corolario: $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a, b \neq 0$.

Demostración:

$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$	Notación	
$= \frac{1^{-1}}{\frac{a}{b}}$	Uno es inverso multiplicativo	
$= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}}$	Notación	
$= \frac{1 \cdot b}{1 \cdot a}$	Teorema	
$= \frac{b}{a}$	Neutro multiplicativo	□

f) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma de fracciones con denominador común).

Demostración:

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = (a \cdot c^{-1}) \pm (b \cdot c^{-1})$	Notación	
$= (c^{-1} \cdot a) \pm (c^{-1} \cdot b)$	Conmutatividad	
$= c^{-1} \cdot (a \pm b)$	Distribución	
$= (a \pm b) \cdot c^{-1}$	Conmutatividad	
$= \frac{a \pm b}{c}$	Notación	□

g) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Suma de fracciones).

Demostración:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db}$	Cancelación de factores en común	
$= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd}$	Conmutatividad	
$= \frac{ad \pm cb}{bd}$	Suma de fracciones con denominador común	□

h) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$\frac{-a}{b} = (-a) \cdot b^{-1}$	Notación	$\frac{a}{-b} = a \cdot (-b)^{-1}$	Notación
$= -(ab^{-1})$	Multiplicación por inverso aditivo	$= -(ab^{-1})$	Multiplicación por inverso aditivo
$= -\frac{a}{b}$	Notación	$= -\frac{a}{b}$	Notación □

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists(-b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b \neq 0$, por lo que $-b \neq 0$.

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a , b y c .

i. $(a +/\cdot b) +/\cdot c$	iv. $(a +/\cdot c) +/\cdot b$	vii. $c +/\cdot (b +/\cdot a)$	x. $b +/\cdot (c +/\cdot a)$
ii. $a +/\cdot (b +/\cdot c)$	v. $(c +/\cdot a) +/\cdot b$	viii. $(c +/\cdot b) +/\cdot a$	xi. $b +/\cdot (a +/\cdot c)$
iii. $a +/\cdot (c +/\cdot b)$	vi. $c +/\cdot (a +/\cdot b)$	ix. $(b +/\cdot c) +/\cdot a$	xii. $(b +/\cdot a) +/\cdot c$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$(a +/\cdot b) +/\cdot c = a +/\cdot (b +/\cdot c)$	Asociatividad	Formas (i) y (ii)
$= a +/\cdot (c +/\cdot b)$	Conmutatividad	Forma (iii)
$= (a +/\cdot c) +/\cdot b$	Asociatividad	Forma (iv)
$= (c +/\cdot a) +/\cdot b$	Conmutatividad	Forma (v)
$= c +/\cdot (a +/\cdot b)$	Asociatividad	Forma (vi)
$= c +/\cdot (b +/\cdot a)$	Conmutatividad	Forma (vii)
$= (c +/\cdot b) +/\cdot a$	Asociatividad	Forma (viii)
$= (b +/\cdot c) +/\cdot a$	Conmutatividad	Forma (ix)
$= b +/\cdot (c +/\cdot a)$	Asociatividad	Forma (x)
$= b +/\cdot (a +/\cdot c)$	Conmutatividad	Forma (xi)
$= (b +/\cdot a) +/\cdot c$	Asociatividad	Forma (xii)

A partir de esta igualdad (y otras probadas anteriormente) introducimos la siguiente **notación**:

- Si x , y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x + y + z$ a la suma de estos.
- Si x , y y z son números reales, representaremos con el símbolo xyz a la multiplicación de estos.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de $(-x) \cdot y$, $-(x \cdot y)$ o $x \cdot (-y)$.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1} .

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.

- Al número $1 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 2 . Al número $2 + 1$ lo denotaremos con el símbolo 3 ...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindimos de ella.

Un campo finito

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba:

$2a = a + a$	Notación
$= a + a + b - b$	Inverso aditivo
$= a - b + a + b$	Conmutatividad
$= b - a + a + b$	Hipótesis
$= b + b$	Inverso aditivo
$= 2b$	Notación

A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar en las implicaciones de definir que $2 = 0$ y decidir si este hecho es contradictorio. Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto:

Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multiplicación \cdot que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists (-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.
6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

¿Qué elementos pertenecen a Ω ?

Sabemos que 0 y 1 son elementos de Ω , en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, el axioma (5) garantiza la existencia de -1 y -0 . De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω . Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω , es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω a partir de estos.

Con estas consideraciones, sabemos que $\{0, 1, -0, -1, 1^{-1}\} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que 0, 1, -1 son miembros de Ω .

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

- i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.
- iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω , $2 = 0$, es decir, que $1 + 1 = 0$, entonces $1 + 1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1 + 1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y su extensión sería $\Omega := \{0, 1\}$.

Por lo anterior, para expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.