

# Cálculo diferencial e Integral I

## Semestre 2023-1

### Grupo 4031

Problemas de: números reales  
Torres Brito David Israel

September 5, 2022

1. Encuentre todos los números reales que satisfagan las siguientes desigualdades:

(a)  $4 - x < 3 - 2x$

$(4 - x) + 2x - 4 < (3 - 2x) + 2x - 4$	Ley de la cancelación
$4 + (-x + 2x) - 4 < 3 + (-2x + 2x) - 4$	Asociatividad
$(-x + 2x) + 4 - 4 < (-2x + 2x) + 3 - 4$	Conmutatividad
$(-x + 2x) + 0 < 0 + 3 - 4$	Inverso aditivo
$-x + 2x < 3 - 4$	Neutro aditivo
$x < -1$	Definición

(b)  $5 - x^2 < -2$

$(5 - x^2) + x^2 + 2 < (-2) + x^2 + 2$	Ley de la cancelación
$5 + (-x^2 + x^2) + 2 < (-2) + x^2 + 2$	Asociatividad
$5 + 0 + 2 < (-2) + x^2 + 2$	Inverso aditivo
$5 + 2 < (-2) + x^2 + 2$	Neutro aditivo
$5 + 2 < x^2 + (-2) + 2$	Conmutatividad
$5 + 2 < x^2 + (-2 + 2)$	Asociatividad
$5 + 2 < x^2$	Inverso aditivo
$7 < x^2$	Definición

Sabemos que  $0 < 7$ , y por el ejercicio 4,  $\sqrt{7} < \sqrt{x^2}$ . Luego,

- i) Si  $0 \leq x$ , entonces  $\sqrt{x^2} = x$ , por definición. Así,  $\sqrt{7} < x$ .
- ii) Si  $x < 0$ , entonces  $\sqrt{x^2} = -x$ , por definición. Así,  $\sqrt{7} < -x$ . Luego,

$\sqrt{7} + (x - \sqrt{7}) < -x + (x - \sqrt{7})$	Ley de la cancelación
$x + (\sqrt{7} - \sqrt{7}) < (-x + x) - \sqrt{7}$	Asociando
$x + 0 < 0 - \sqrt{7}$	Inverso aditivo
$x < -\sqrt{7}$	Neutro aditivo

De este modo,  $x < -\sqrt{7}$  o  $\sqrt{7} < x$ .

(c)  $(x - 1)(3 + x) < 0$

Caso (1): si  $(x - 1) < 0$  y  $(3 + x) < 0$ ,

$(x - 1) + 1 < 0 + 1$	Cancelación	$(3 + x) - 3 < 0 - 3$	Cancelación
$x + (-1 + 1) < 0 + 1$	Asociando	$x + (3 - 3) < 0 - 3$	Asociando
$x + 0 < 0 + 1$	Inverso aditivo	$x + 0 < 0 - 3$	Inverso aditivo
$x < 1$	Neutro aditivo	$x < -3$	Neutro aditivo

Por lo que  $x < -3$ .

Caso (2): si  $0 < (x - 1)$  y  $0 < (3 + x)$ ,

$0 + 1 < (x - 1) + 1$	Cancelación	$0 - 3 < (3 + x) - 3$	Cancelación
$0 + 1 < x + (-1 + 1)$	Asociando	$0 - 3 < x + (3 - 3)$	Asociando
$0 + 1 < x + 0$	Inverso aditivo	$0 - 3 < x + 0$	Inverso aditivo
$1 < x$	Neutro aditivo	$-3 < x$	Neutro aditivo

Por lo que  $1 < x$ .

Así  $x < -3$  o  $1 < x$ .

(d)

$\frac{x - 1}{x + 1} > 0$	$x \neq -1$
$(x - 1)(x + 1)^{-1} > 0$	Notación
$(x - 1)(x + 1)^{-1} \cdot (x + 1) > 0 \cdot (x + 1)$	Ley de la cancelación
$(x - 1)(x + 1)^{-1} \cdot (x + 1) > 0$	Demostrado anteriormente
$(x - 1) \cdot 1 > 0$	Inverso multiplicativo
$(x - 1) > 0$	Neutro multiplicativo
$(x - 1) + 1 > 0 + 1$	Ley de la cancelación
$x + 0 > 0 + 1$	Inverso aditivo
$x > 1$	Neutro aditivo

(e)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} < 0$$

Por definición,  $x \neq 0$  y  $1 - x \neq 0$ , por lo que  $x \neq 1$ . Luego,

$x^{-1} - (1 - x)^{-1} < 0$	Notación
$x^{-1} - (1 - x)^{-1} + (1 - x)^{-1} < 0 + (1 - x)^{-1}$	Ley de la cancelación
$x^{-1} + 0 < 0 + (1 - x)^{-1}$	Inverso aditivo
$x^{-1} < (1 - x)^{-1}$	Neutro aditivo

**Caso (1):** si  $x > 0$ , preserve el orden al multiplicar, esto es:

$x^{-1} \cdot x < (1 - x)^{-1} \cdot x$	Demostrado anteriormente
$1 < (1 - x)^{-1} \cdot x$	Inverso multiplicativo

i) Si  $0 < (1 - x)$ , sigue que  $x < 1$ , pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si  $(1 - x) < 0$ , cambia el orden al multiplicar, esto es:

$(1 - x) \cdot (1 - x)^{-1} \cdot x < (1 - x) \cdot 1$	Demostrado anteriormente
$1 \cdot x < (1 - x) \cdot 1$	Inverso multiplicativo
$x < 1 - x$	Neutro multiplicativo
$x + x < 1 - x + x$	Ley de la cancelación
$x + x < 1$	Inverso aditivo
$2x < 1$	Definición
$x < \frac{1}{2}$	Ley de la cancelación

**Caso (2):** si  $x < 0$ , cambia el orden al multiplicar, esto es:

$(1 - x)^{-1} \cdot x < x^{-1} \cdot x$	Demostrado anteriormente
$(1 - x)^{-1} \cdot x < 1$	Inverso multiplicativo

i) Si  $(1 - x) < 0$ , sigue que  $1 < x$ , pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si  $0 < (1 - x)$ , preserva el orden al multiplicar, esto es:

$(1 - x) \cdot (1 - x)^{-1} \cdot x < (1 - x) \cdot x^{-1} \cdot x$	Demostrado anteriormente
$1 \cdot x < (1 - x) \cdot 1$	Inverso multiplicativo
$x < (1 - x)$	Neutro multiplicativo
$x + x < (1 - x) + x$	Ley de la cancelación
$x + x < 1$	Inverso aditivo
$2x < 1$	Definición
$x < \frac{1}{2}$	Ley de la cancelación

En cualquier caso,  $x < \frac{1}{2}$ .

**2.** Pruebe que si  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ .

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^2(x - y) + xy(x - y) + y^2(x - y)$	P. Distributiva
$= x(x^2) - y(x^2) + x(xy) - y(xy) + x(y^2) - y(y^2)$	P. Distributiva
$= x^3 - yx^2 + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3$	Definición
$= x^3 - +0 + 0 - y^3$	Inverso aditivo
$= x^3 - y^3$	Neutro aditivo

**3.** Pruebe que si  $x, y \in \mathbb{R}$  son distintos de 0, entonces  $x^2 + xy + y^2 > 0$ .

Supongamos que  $x^2 + xy + y^2 \leq 0$ .

Por el ejercicio anterior, sabemos que  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ . Luego,

i) Si  $x^2 + xy + y^2 = 0$ , entonces

$x^3 - y^3 = 0$	Por ejercicio anterior
$x^3 - y^3 + y^3 = 0 + y^3$	Ley de la cancelación
$x^3 + 0 = 0 + y^3$	Inverso aditivo
$x^3 = y^3$	Neutro aditivo
$x = y$	

De esto sigue que  $x^2 + xy + y^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$ , y por hipótesis  $3x^2 = 0$ , lo que es una contradicción.

ii) Si  $x^2 + xy + y^2 < 0$ , entonces

$x^3 - y^3 < 0$	Por ejercicio anterior
$x^3 - y^3 + y^3 < 0 + y^3$	Ley de la cancelación
$x^3 + 0 < 0 + y^3$	Inverso aditivo
$x^3 < y^3$	Neutro aditivo
$x < y$	

De esto sigue que  $(x - y) < 0$ , por lo que  $(x - y)(x^2 + xy + y^2) > 0 = x^3 - y^3$ , lo que es una contradicción.

Por tanto,  $x^2 + xy + y^2 > 0$ .

4. Pruebe que si  $a, b \in \mathbb{R}$  son mayores o iguales a 0, entonces  $a^2 \leq b^2$  si y solo si  $a \leq b$ .

i) Si  $a^2 \leq b^2$ ,

$a^2 + (-a^2) \leq b^2 + (-a^2)$	Ley de la cancelación
$0 \leq b^2 - a^2$	Inverso aditivo
$0 \leq bb - aa$	Definición
$0 \leq bb - aa + 0$	Neutro aditivo
$0 \leq bb - aa + (ab - ab)$	Inverso aditivo
$0 \leq (bb + ab) + (-ab - aa)$	Asociatividad
$0 \leq (bb + ab) - (ab + aa)$	Demostrado previamente
$0 \leq b(b + a) - a(b + a)$	P. Distributiva
$0 \leq (b + a)(b - a)$	P. Distributiva

Por hipótesis,  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , y por propiedad de los positivos,  $a + b \geq 0$ . Sigue que:

$0 \cdot (b + a)^{-1} \leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a)$	Ley de la cancelación
$0 \leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a)$	Demostrado anteriormente
$0 \leq 1 \cdot (b - a)$	Inverso multiplicativo
$0 \leq b - a$	Neutro multiplicativo
$0 + a \leq b - a + a$	Ley de la cancelación
$0 + a \leq b + 0$	Inverso aditivo
$a \leq b$	Neutro aditivo

ii) Si  $a \leq b$ .

$a - a \leq b - a$	Ley de la cancelación
$0 \leq b - a$	Inverso aditivo

Debido a que  $a$  y  $b$  son mayores o iguales que 0, por axioma de orden  $a + b \geq 0$ , de la desigualdad anterior obtenemos:

$0 \cdot (b + a) \leq (b - a) \cdot (b + a)$	Ley de la multiplicación
$0 \leq (b - a) \cdot (b + a)$	Ley de la multiplicación
$0 \leq b(b - a) + a(b - a)$	P. Distributiva
$0 \leq bb - ab + ab - aa$	P. Distributiva
$0 \leq bb + 0 - aa$	Inverso aditivo
$0 \leq bb - aa$	Neutro aditivo
$0 + aa \leq bb - aa + aa$	Ley de la cancelación
$aa \leq bb + 0$	Inverso aditivo
$aa \leq bb$	Neutro aditivo
$a^2 \leq b^2$	Definición

□

5. Pruebe que si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a^2 \leq b^2$  si y sólo si  $|a| \leq |b|$ .

**Demostración:**

Sea  $a^2 \leq b^2$ .

- i) Si  $0 \leq a$  y  $0 \leq b$ , por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que  $a \leq b$ , y por definición,  $a = |a|$  y  $b = |b|$ , es decir,  $|a| \leq |b|$ .
- ii) Si  $a < 0$  y  $0 \leq b$ , por definición  $|a| = -a$  y  $|b| = b$ . Notemos que  $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$ . Similarmente,  $b^2 = |b||b|$ . Luego, por hipótesis tenemos que  $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$ , es decir,  $|a|^2 \leq |b|^2$ . Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que  $|a| \leq |b|$ .
- iii) Si  $0 \leq a$  y  $b < 0$ , por definición  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Notemos que  $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$ . Similarmente,  $a^2 = |a||a|$ . Luego, por hipótesis tenemos que  $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$ , es decir,  $|a|^2 \leq |b|^2$ . Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que  $|a| \leq |b|$ .
- iv) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , por definición  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Notemos que  $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$  y  $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$ . Luego, por hipótesis, tenemos que  $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$ , es decir  $|a|^2 \leq |b|^2$ . Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que  $|a| \leq |b|$ .

Por otra parte, supongamos que  $|a| \leq |b|$ .

- i) Si  $0 \leq a$  y  $0 \leq b$ , por definición  $|a| = a$  y  $|b| = b$ . Por hipótesis tenemos que  $a = |a| \leq |b| = b$ , es decir  $a \leq b$ , y por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que  $a^2 \leq b^2$ .
- ii) Si  $a < 0$  y  $0 \leq b$ , por definición  $|a| = -a$  y  $|b| = b$ . Por hipótesis tenemos que  $-a = |a| \leq |b| = b$ , es decir  $-a \leq b$ . Notemos que  $(-a)(-a) = a^2 \leq b(-a)$ . Similarmente,  $(-a)b \leq b^2 = bb$ . Por transitividad,  $a^2 \leq b^2$ .
- iii) Si  $0 \leq a$  y  $b < 0$ , por definición  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Por hipótesis tenemos que  $a = |a| \leq |b| = -b$ , es decir  $a \leq -b$ . Notemos que  $aa = a^2 \leq (-b)a$ . Similarmente,  $a(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$ . Por transitividad,  $a^2 \leq b^2$ .
- iv) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , por definición  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Por hipótesis tenemos que  $-a = |a| \leq |b| = -b$ , es decir  $-a \leq -b$ . Notemos que  $(-a)(-a) = a^2 \leq (-b)(-a)$ . Similarmente,  $(-a)(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$ . Por transitividad,  $a^2 \leq b^2$ .

□

6. En los siguientes incisos, escriba el mismo número quitando (al menos) un signo de valor absoluto.

- (a)  $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{6}|$  (no use calculadora)
- (b)  $||\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} + \sqrt{7}||$  (no use calculadora)
- (c)  $||a - b| - |a| - |b||$
- (d)  $||a + b| + |c| - |a + b + c||$
- (e)  $|x^2 - 2xy + y^2|$
- (f)  $x - |x - |x||$

7. Calcule todos los números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a)  $|x - 3| = 8$
- (b)  $|x + 4| < 2$
- (c)  $|x - || + |x + 1| < 2$
- (d)  $|x - 1| + |x + 1| > 2$
- (e)  $|x - 1||x + 1| = 0$
- (f)  $|x - 1||x + 2| = 3$

8. Pruebe las siguientes identidades:

- (a) Si  $x \neq 0$ , entonces  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

$$\begin{aligned}
 |x^{-1}| &= \left| \frac{1}{x} \right| && \text{Notación} \\
 &= \frac{|1|}{|x|} && \text{Ejercicio siguiente} \\
 &= \frac{1}{|x|} && 0 < 1 \\
 &= |x|^{-1} && \text{Notación}
 \end{aligned}$$

□

- (b) Si  $x \neq 0$ , entonces  $|y/x| = |y|/|x|$

- i) Si  $x \geq 0$  y  $y > 0$ , entonces  $|x| = x$  y  $|y| = y$ . Además,  $\frac{1}{y} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{x}{y} \geq 0$  por lo que  $|\frac{x}{y}| = \frac{x}{y}$ . De este modo,  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ .
- ii) Si  $x \geq 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|x| = x$  y  $|y| = -b$ . Además,  $\frac{1}{y} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{x}{y} \leq 0$ , por lo que  $|\frac{x}{y}| = -\frac{x}{y}$ . De este modo,  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ .
- iii) Si  $x < 0$  y  $y > 0$ , entonces  $|x| = -a$  y  $|y| = y$ . Además,  $\frac{1}{y} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{x}{y} < 0$ , por lo que  $|\frac{x}{y}| = -\frac{x}{y}$ . De este modo,  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ .
- iv) Si  $x < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|x| = -a$  y  $|y| = -b$ . Además,  $\frac{1}{y} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{x}{y} > 0$  por lo que  $|\frac{x}{y}| = \frac{x}{y}$ . De este modo,  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ .

9. Pruebe que si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ .

10. Pruebe que si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned}
 |(a - b) + b| &\leq |a - b| + |b| \\
 |a| &\leq |a - b| + |b| \\
 |a| - |b| &\leq |a - b|
 \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| \\ |b| &\leq |b-a|+|a| \\ |b|-|a| &\leq |b-a| \\ -|b-a| &\leq |a|-|b| \\ -|a-b| &\leq |a|-|b| \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, sabemos que  $|a| \leq b$  si y solo si  $-a \leq b \leq a$ , y tomando (1) y (2),  $||a|-|b|| \leq |a-b|$ .