Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales

Torres Brito David Israel

September 17, 2022

1. Encuentre todos los números reales que satisfagan las siguientes desigualdades:

(a) $4 - x < 3 - 2x$

$$
\begin{aligned}
(4 - x) + 2x - 4 &< (3 - 2x) + 2x - 4 && \text{Ley de la cancelación} \\
4 + (-x + 2x) - 4 &< 3 + (-2x + 2x) - 4 && \text{Asociatividad} \\
(-x + 2x) + 4 - 4 &< (-2x + 2x) + 3 - 4 && \text{Conmutatividad} \\
(-x + 2x) + 0 &< 0 + 3 - 4 && \text{Inverso aditivo} \\
-x + 2x &< 3 - 4 && \text{Neutro aditivo} \\
x &< -1 && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

(b) $5 - x^2 < -2$

$$
\begin{aligned}
(5 - x^2) + x^2 + 2 &< (-2) + x^2 + 2 && \text{Ley de la cancelación} \\
5 + (-x^2 + x^2) + 2 &< (-2) + x^2 + 2 && \text{Asociatividad} \\
5 + 0 + 2 &< (-2) + x^2 + 2 && \text{Inverso aditivo} \\
5 + 2 &< (-2) + x^2 + 2 && \text{Neutro aditivo} \\
5 + 2 &< x^2 + (-2) + 2 && \text{Conmutatividad} \\
5 + 2 &< x^2 + (-2 + 2) && \text{Asociatividad} \\
5 + 2 &< x^2 && \text{Inverso aditivo} \\
7 &< x^2 && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

Sabemos que $0 < 7$, y por el ejercicio 4, $\sqrt{7} < \sqrt{x^2}$. Luego,

i) Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < x$.

ii) Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < -x$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{7} + (x - \sqrt{7}) &< -x + (x - \sqrt{7}) && \text{Ley de la cancelación} \\
x + (\sqrt{7} - \sqrt{7}) &< (-x + x) - \sqrt{7} && \text{Asociando} \\
x + 0 &< 0 - \sqrt{7} && \text{Inverso aditivo} \\
x &< -\sqrt{7} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

De este modo, $x < -\sqrt{7}$ o $\sqrt{7} < x$.

(c) $(x-1)(3+x) < 0$

Caso (1): si $(x-1) < 0$ y $(3+x) < 0$,

$(x-1)+1 < 0+1$	Cancelación	$(3+x)-3 < 0-3$	Cancelación
$x+(-1+1) < 0+1$	Asociando	$x+(3-3) < 0-3$	Asociando
$x+0 < 0+1$	Inverso aditivo	$x+0 < 0-3$	Inverso aditivo
$x < 1$	Neutro aditivo	$x < -3$	Neutro aditivo

Por lo que $x < -3$.

Caso (2): si $0 < (x-1)$ y $0 < (3+x)$,

$0+1 < (x-1)+1$	Cancelación	$0-3 < (3+x)-3$	Cancelación
$0+1 < x+(-1+1)$	Asociando	$0-3 < x+(3-3)$	Asociando
$0+1 < x+0$	Inverso aditivo	$0-3 < x+0$	Inverso aditivo
$1 < x$	Neutro aditivo	$-3 < x$	Neutro aditivo

Por lo que $1 < x$.

Así $x < -3$ o $1 < x$.

(d)

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} &> 0 && x \neq -1 \\
(x-1)(x+1)^{-1} &> 0 && \text{Notación} \\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0\cdot(x+1) && \text{Ley de la cancelación} \\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0 && \text{Demostrado anteriormente} \\
(x-1)\cdot 1 &> 0 && \text{Inverso multiplicativo} \\
(x-1) &> 0 && \text{Neutro multiplicativo} \\
(x-1)+1 &> 0+1 && \text{Ley de la cancelación} \\
x+0 &> 0+1 && \text{Inverso aditivo} \\
x &> 1 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} < 0$$

Por definición, $x \neq 0$ y $1-x \neq 0$, por lo que $x \neq 1$. Luego,

$$
\begin{aligned}
x^{-1} - (1-x)^{-1} &< 0 && \text{Notación} \\
x^{-1} - (1-x)^{-1} + (1-x)^{-1} &< 0 + (1-x)^{-1} && \text{Ley de la cancelación} \\
x^{-1} + 0 &< 0 + (1-x)^{-1} && \text{Inverso aditivo} \\
x^{-1} &< (1-x)^{-1} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

Caso (1): si $x > 0$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$
\begin{aligned}
x^{-1}\cdot x &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente} \\
1 &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}
$$

i) Si $0 < (1-x)$, sigue que $x < 1$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $(1-x)<0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Demostrado anteriormente}\\
1\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
x &< 1-x && \text{Neutro multiplicativo}\\
x+x &< 1-x+x && \text{Ley de la cancelación}\\
x+x &< 1 && \text{Inverso aditivo}\\
2x &< 1 && \text{Definición}\\
x &< \frac{1}{2} && \text{Ley de la cancelación}
\end{aligned}$$

Caso (2): si $x<0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-1}\cdot x &< x^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
(1-x)^{-1}\cdot x &< 1 && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

i) Si $(1-x)<0$, sigue que $1<x$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $0<(1-x)$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x &< (1-x)\cdot x^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
1\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
x &< (1-x) && \text{Neutro multiplicativo}\\
x+x &< (1-x)+x && \text{Ley de la cancelación}\\
x+x &< 1 && \text{Inverso aditivo}\\
2x &< 1 && \text{Definición}\\
x &< \frac{1}{2} && \text{Ley de la cancelación}
\end{aligned}$$

En cualquier caso, $x<\frac{1}{2}$.

2. Pruebe que si $x,y\in\mathbb{R}$, entonces $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

$$\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^2(x-y)+xy(x-y)+y^2(x-y) && \text{P. Distributiva}\\
&= x(x^2)-y(x^2)+x(xy)-y(xy)+x(y^2)-y(y^2) && \text{P. Distributiva}\\
&= x^3-yx^2+x^2y-xy^2+xy^2-y^3 && \text{Definición}\\
&= x^3-+0+0-y^3 && \text{Inverso aditivo}\\
&= x^3-y^3 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

3. Pruebe que si $x,y\in\mathbb{R}$ son distintos de 0, entonces $x^2+xy+y^2>0$.

Supongamos que $x^2+xy+y^2\leq 0$.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Luego,

i) Si $x^2+xy+y^2=0$, entonces

$$\begin{aligned}
x^3-y^3 &= 0 && \text{Por ejercicio anterior}\\
x^3-y^3+y^3 &= 0+y^3 && \text{Ley de la cancelación}\\
x^3+0 &= 0+y^3 && \text{Inverso aditivo}\\
x^3 &= y^3 && \text{Neutro aditivo}\\
x &= y
\end{aligned}$$

De esto sigue que $x^2+xy+y^2=x^2+x^2+x^2=3x^2$, y por hipótesis $3x^2=0$, lo que es una contradicción.

ii) Si $x^2 + xy + y^2 < 0$, entonces

$x^3 - y^3 < 0$	Por ejercicio anterior
$x^3 - y^3 + y^3 < 0 + y^3$	Ley de la cancelación
$x^3 + 0 < 0 + y^3$	Inverso aditivo
$x^3 < y^3$	Neutro aditivo
$x < y$	

De esto sigue que $(x - y) < 0$, por lo que $(x - y)(x^2 + xy + y^2) > 0 = x^3 - y^3$, lo que es una contradicción.

Por tanto, $x^2 + xy + y^2 > 0$.

4. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son mayores o iguales a 0, entonces $a^2 \leq b^2$ si y solo si $a \leq b$.

i) Si $a^2 \leq b^2$,

$a^2 + (-a^2) \leq b^2 + (-a^2)$	Ley de la cancelación
$0 \leq b^2 - a^2$	Inverso aditivo
$0 \leq bb - aa$	Definición
$0 \leq bb - aa + 0$	Neutro aditivo
$0 \leq bb - aa + (ab - ab)$	Inverso aditivo
$0 \leq (bb + ab) + (-ab - aa)$	Asociatividad
$0 \leq (bb + ab) - (ab + aa)$	Demostrado previamente
$0 \leq b(b + a) - a(b + a)$	P. Distributiva
$0 \leq (b + a)(b - a)$	P. Distributiva

Por hipótesis, $a \geq 0$ y $b \geq 0$, y por propiedad de los positivos, $a + b \geq 0$. Sigue que:

$0 \cdot (b + a)^{-1} \leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a)$	Ley de la cancelación
$0 \leq (b + a)^{-1} \cdot (b + a)(b - a)$	Demostrado anteriormente
$0 \leq 1 \cdot (b - a)$	Inverso multiplicativo
$0 \leq b - a$	Neutro multiplicativo
$0 + a \leq b - a + a$	Ley de la cancelación
$0 + a \leq b + 0$	Inverso aditivo
$a \leq b$	Neutro aditivo

ii) Si $a \leq b$.

$a - a \leq b - a$	Ley de la cancelación
$0 \leq b - a$	Inverso aditivo

Debido a que a y b son mayores o iguales que 0, por axioma de orden $a + b \geq 0$, de la desigualdad anterior obtenemos:

$$
\begin{array}{rlr}
0 \cdot (b+a) \leq (b-a) \cdot (b+a) & & \text{Ley de la multiplicación} \\
0 \leq (b-a) \cdot (b+a) & & \text{Ley de la multiplicación} \\
0 \leq b(b-a) + a(b-a) & & \text{P. Distributiva} \\
0 \leq bb - ab + ab - aa & & \text{P. Distributiva} \\
0 \leq bb + 0 - aa & & \text{Inverso aditivo} \\
0 \leq bb - aa & & \text{Neutro aditivo} \\
0 + aa \leq bb - aa + aa & & \text{Ley de la cancelación} \\
aa \leq bb + 0 & & \text{Inverso aditivo} \\
aa \leq bb & & \text{Neutro aditivo} \\
a^2 \leq b^2 & & \text{Definición}
\end{array}
$$

□

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 \leq b^2$ si y sólo si $|a| \leq |b|$.

Demostración:

Sea $a^2 \leq b^2$.

i) Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a \leq b$, y por definición, $a = |a|$ y $b = |b|$, es decir, $|a| \leq |b|$.

ii) Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por defincíión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$. Similarmente, $b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.

iii) Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por defincíión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Similarmente, $a^2 = |a||a|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$ y $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis, tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.

Por otra parte, supongamos que $|a| \leq |b|$.

i) Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por definición $|a| = a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = b$, es decir $a \leq b$, y por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a^2 \leq b^2$.

ii) Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por defincíión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = b$, es decir $-a \leq b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq b(-a)$. Similarmente, $(-a)b \leq b^2 = bb$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.

iii) Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por defincíión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $a \leq -b$. Notemos que $aa = a^2 \leq (-b)a$. Similarmente, $a(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $-a \leq -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq (-b)(-a)$. Similarmente, $(-a)(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.

□

6. En los siguientes incisos, escriba el mismo número quitando (al menos) un signo de valor absoluto.

(a) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}|$ (no use calculadora)

(b) $||\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}+\sqrt{7}||$ (no use calculadora)

(c) $||a-b|-|a|-|b||$

(d) $||a+b|+|c|-|a+b+c||$

(e) $|x^2-2xy+y^2|$

(f) $x-|x-|x||$

7. Calcule todos los números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $|x-3|=8$

(b) $|x+4|<2$

(c) $|x-||+|x+1|<2$

(d) $|x-1|+|x+1|>2$

(e) $|x-1||x+1|=0$

(f) $|x-1||x+2|=3$

8. Pruebe las siguientes identidades:

(a) Si $x \neq 0$, entonces $\left|x^{-1}\right|=|x|^{-1}$

$$\begin{aligned}
\left|x^{-1}\right| &= \left|\frac{1}{x}\right| && \text{Notación}\\
&= \frac{|1|}{|x|} && \text{Ejercicio siguiente}\\
&= \frac{1}{|x|} && 0<1\\
&= |x|^{-1} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Si $x \neq 0$, entonces $|y/x|=|y|/|x|$

i) Si $x \geq 0$ y $y>0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=y$. Además, $\frac{1}{y}>0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}\geq 0$ por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

ii) Si $x \geq 0$ y $b<0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=-b$. Además, $\frac{1}{y}<0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}\leq 0$, por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=-\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

iii) Si $x<0$ y $y>0$, entonces $|x|=-a$ y $|y|=y$. Además, $\frac{1}{y}>0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}<0$, por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=-\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

iv) Si $x<0$ y $b<0$, entonces $|x|=-a$ y $|y|=-b$. Además, $\frac{1}{y}<0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}>0$ por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

9. Pruebe que si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$.

10. Pruebe que si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $\big||a|-|b|\big|\leq|a-b|$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned}
|(a-b)+b| &\leq |a-b|+|b|\\
|a| &\leq |a-b|+|b|\\
|a|-|b| &\leq |a-b| \qquad (1)
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
|(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| \\
|b| &\leq |b-a|+|a| \\
|b|-|a| &\leq |b-a| \\
-|b-a| &\leq |a|-|b| \\
-|a-b| &\leq |a|-|b| \qquad (2)
\end{aligned}$$

Finalmente, sabemos que $|a| \leq b$ si y solo si $-a \leq b \leq a$, y tomando (1) y (2), $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.