Cálculo

Introducción a las matemáticas formales

Darvid

Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: $+$ (suma) y $\cdot$ (multiplicación).

Axiomas de la suma

La suma satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = x$.

5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists(-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Proposición: Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosiad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se famirialice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= a + (-a) && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

b) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
b &= b + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= b + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (b + a) + (-a) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + (-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= 0 + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= (-a) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -a && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

Nota: Demostrar proposiciones para números reales arbitrarios (cualesquiera elementos de $\mathbb{R}$), nos permite reutilizar las *formas* como esquema para otras pruebas. Por ejemplo, la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$, nos permite sustituir x y y por cuales quiera números reales, como en el ejemplo que sigue:

Corolario: $-(-a) = a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-a) + a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a = -(-a)$. □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = (-a)$ y $y = a$.

c) $-0 = 0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + (-0) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-0) + 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= -0 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a + (-a) && \text{Hipótesis}\\
&= 0 && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$. □

e) $-(a + b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a + \Big((-a) + \big(b + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big((-a) + b\big) + (-b)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big(b + (-a)\big) + (-b)\Big) && \text{Conmutatividad}\\
&= a + \Big(b + \big((-a) + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a + b)$. □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \Longrightarrow y=-x$, hemos tomado $x=(a+b)$ y $y=(-a)+(-b)$.

Corolario: $-\big(a+(-b)\big)=b+(-a)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
-\big(a+(-b)\big) &= (-a)+\big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo}\\
&= (-a)+b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}\\
&= b+(-a) && \text{Conmutatividad} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y)=(-x)+(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

f) Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a &= a+0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a+\big(c+(-c)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (a+c)+(-c) && \text{Asociatividad}\\
&= (b+c)+(-c) && \text{Hipótesis}\\
&= b+\big(c+(-c)\big) && \text{Asociatividad}\\
&= b+0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= b && \text{Neutro aditivo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a+(-a)$ o por $b+(-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a+(-a)$ o $b+(-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.

10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= a \cdot a^{-1} && \text{Hipótesis}\\
&= 1 && \text{Inverso multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= a^{-1} \cdot (a \cdot b) && \text{Conmutatividad}\\
&= a^{-1} \cdot 1 && \text{Hipótesis}\\
&= a^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1^{-1} && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= 1^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad}\\
&= 1^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= a \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis}\\
&= b \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Asociatividad}\\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= b && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma $+$ y multiplicación $\cdot$

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} b \cdot 0 &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Distribución} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{¿?} \end{aligned}$$

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a \cdot 0 && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Multiplicación por 0} \end{aligned}$$

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. $\square$

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ (disyunción).

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot \left(b \cdot b^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo. Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. $\square$

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \left(b \cdot (a \cdot a^{-1})\right) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists \left(a^{-1}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1 + (-1) = 1 + 0$, y por neutro aditivo $1 + (-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 1$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists (-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 + (-1) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= (-1)\cdot\Big((-1)^{-1} + 1\Big) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1}+1=0$, y por conmutatividad $1+(-1)^{-1}=0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1}=-1$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \Longrightarrow y=-x$, hemos tomado $x=1$ y $y=(-1)^{-1}$.

f) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= b\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= b\cdot\big(a+(-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= b\cdot a + b\cdot(-a) && \text{Distribución}\\
&= a\cdot b + (-a)\cdot b && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
0 &= a\cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= a\cdot\big(b+(-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a\cdot b + a\cdot(-b) && \text{Distribución}
\end{aligned}
$$

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \Longrightarrow y=-x$, hemos tomado, $x=a\cdot b$ y $y=(-a)\cdot b$, por una parte y $y=a\cdot(-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= a\cdot\big(-(-b)\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= a\cdot b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}
\end{aligned}
$$
$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = x\cdot(-y)$, hemos tomado $x=a$ y $y=(-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1)\cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot a^{-1} &= -(1\cdot a^{-1}) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\big(a^{-1}\big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
-(a^{-1}) &= \big(-(a^{-1})\big)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= -\Big(\big(a^{-1}\big)\cdot 1\Big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo}\\
&= -\Big(a^{-1}\Big) && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$
$\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$, hemos tomado $x=1$ y $y=a^{-1}$, por una parte, y $x=(a^{-1})$ y $y=1$, por la otra.

Notación

- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x-y$ a la suma $x+(-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x\cdot y^{-1}$.

  Es inmediato que si $w \neq 0$, entonces $\frac{w}{w} = w\cdot w^{-1} = 1$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x\cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} && \text{Notación} \\ &= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot \left(1 \cdot b^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{Notación} \quad \square \end{aligned}$$

b) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot \left(c \cdot b^{-1}\right) && \text{Notación} \\ &= (ac) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \frac{ac}{b} && \text{Notación} \quad \square \end{aligned}$$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) && \text{Notación} \\ &= a \cdot \Big(b^{-1} \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)\Big) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot \Big(\left(b^{-1} \cdot c\right) \cdot d^{-1}\Big) && \text{Asociatividad} \\ &= a \cdot \Big(\left(c \cdot b^{-1}\right) \cdot d^{-1}\Big) && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot \Big(c \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right)\Big) && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot \Big(c \cdot (b \cdot d)^{-1}\Big) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos} \\ &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \frac{ac}{bd} && \text{Notación} \quad \square \end{aligned}$$

d) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$. (Cancelación de factores en común).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} && \text{Notación} \\ &= \frac{ac}{b \cdot c} && \text{Multiplicación de fracciones} \quad \square \end{aligned}$$

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a\cdot b^{-1}\right)}{\left(c\cdot d^{-1}\right)} && \text{Notación}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Notación}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot\left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot d\right) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo}\\
&= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(d\cdot c^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} && \text{Notación}\\
&= \frac{ad}{bc} && \text{Multiplicación de fracciones} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Corolario: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a, b \neq 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\
&= \frac{1^{-1}}{\frac{a}{b}} && \text{Uno es inverso multiplicativo}\\
&= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}} && \text{Notación}\\
&= \frac{1\cdot b}{1\cdot a} && \text{Teorema}\\
&= \frac{b}{a} && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square
\end{aligned}
$$

f) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma de fracciones con denominador conmún).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} &= \left(a\cdot c^{-1}\right) \pm \left(b\cdot c^{-1}\right) && \text{Notación}\\
&= \left(c^{-1}\cdot a\right) \pm \left(c^{-1}\cdot b\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= c^{-1}\cdot(a \pm b) && \text{Distribución}\\
&= (a \pm b)\cdot c^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{a \pm b}{c} && \text{Notación} \qquad \square
\end{aligned}
$$

g) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Suma de fracciones).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} && \text{Cancelación de factores en común}\\
&= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{ad \pm cb}{bd} && \text{Suma de fracciones con denominador común} \qquad \square
\end{aligned}
$$

h) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{-a}{b} &= (-a)\cdot b^{-1} && \text{Notación} \\ &= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \\ &= -\frac{a}{b} && \text{Notación} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{-b} &= a\cdot(-b)^{-1} && \text{Notación} \\ &= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \\ &= -\frac{a}{b} && \text{Notación} \end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists(-b)^{-1}\in\mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b\neq 0$, por lo que $-b\neq 0$.

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a, b y c.

i. $(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c$	**iv.** $(a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b$	**vii.** $c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a)$	**x.** $b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a)$
ii. $a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c)$	**v.** $(c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b$	**viii.** $(c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a$	**xi.** $b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c)$
iii. $a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b)$	**vi.** $c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b)$	**ix.** $(b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a$	**xii.** $(b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$$\begin{aligned} (a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c &= a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c) && \text{Asociatividad} && \text{Formas (i) y (ii)} \\ &= a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (iii)} \\ &= (a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b && \text{Asociatividad} && \text{Forma (iv)} \\ &= (c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (v)} \\ &= c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (vi)} \\ &= c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (vii)} \\ &= (c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a && \text{Asociatividad} && \text{Forma (viii)} \\ &= (b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (ix)} \\ &= b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (x)} \\ &= b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (xi)} \\ &= (b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c && \text{Asociatividad} && \text{Forma (xii)} \end{aligned}$$

A partir de esta igualdad (y otras probadas anteriormente) introducimos la siguiente **notación:**

- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x+y+z$ a la suma de estos.
- Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo xyz a la multiplicación de estos.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de $(-x)\cdot y$, $-(x\cdot y)$ o $x\cdot(-y)$.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x)\cdot y = -(x\cdot y) = x\cdot(-y)$.
- Si $x\in\mathbb{R}$, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1}.

  Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.
- Al número $1+1$ lo denotaremos con el símbolo 2. Al número $2+1$ lo denotaremos con el símbolo 3...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindimos de ella.

Un campo finito

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba:

$$
\begin{aligned}
2a &= a + a && \text{Notación} \\
&= a + a + b - b && \text{Inverso aditivo} \\
&= a - b + a + b && \text{Conmutatividad} \\
&= b - a + a + b && \text{Hipótesis} \\
&= b + b && \text{Inverso aditivo} \\
&= 2b && \text{Notación}
\end{aligned}
$$

A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar en las implicaciones de definir que $2 = 0$ y decidir si este hecho es contradictorio. Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto:

Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multipllicación $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.

4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.

5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists(-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.

7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.

10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

¿Qué elementos pertenecen a Ω?

Sabemos que 0 y 1 son elementos de Ω, en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, el axioma (5) garantiza la existencia de -1 y -0. De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω. Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω, es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω apartir de estos.

Con estas consideraciones, sabemos que $\{ 0, 1, -0, -1, 1^{-1} \} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que $0, 1, -1$ son miembros de Ω.

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω, $2 = 0$, es decir, que $1 + 1 = 0$, entonces $1 + 1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1+1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y su extensión sería $\Omega \coloneqq \{\, 0, 1 \,\}$.

Por lo anterior, para expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.