Cálculo I

Darvid
darvid.torres@gmail.com

September 27, 2022

Números reales

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias:

$$\begin{aligned} \text{Suma } + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (m,n) &\mapsto m+n \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \text{Multiplicación } \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (m,n) &\mapsto m\cdot n \end{aligned}$$

La notación anterior denota la cerradura de estas operaciones, es decir, que para cuales quiera dos números reales (m, n), la suma y multiplicación son números reales, $(m + n) \in \mathbb{R}$ y $(m \cdot n) \in \mathbb{R}$.

Las suma y multiplicación de números reales satisfacen los siguientes **axiomas de campo**:

S1. Conmutatividad (de la suma).

La suma es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que:

$$m + n = n + m$$

S2. Asociatividad (de la suma).

La suma es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que:

$$(m + n) + l = m + (n + l)$$

El lector observará que el axioma de **asociatividad** (de la suma) no incluye todas las formas en que podríamos sumar tres números reales (en general diferentes) a, b y c:

i. $(a + b) + c$ **vii.** $c + (b + a)$

ii. $a + (b + c)$ **viii.** $(c + b) + a$

iii. $a + (c + b)$ **ix.** $(b + c) + a$

iv. $(a + c) + b$ **x.** $b + (c + a)$

v. $(c + a) + b$ **xi.** $b + (a + c)$

vi. $c + (a + b)$ **xii.** $(b + a) + c$

La razón es que las anteriores pueden obtenerse utilizando los axiomas de **conmutatividad** (de la suma) y **asociatividad** (de la suma), con lo que garantizamos la igualdad de todas ellas, y descartamos la necesidad de enumerarlas todas como axiomas.

Notemos que las formas (**i** y **vii**) satisfacen igualdad debido a la conmutatividad de la suma (**S1**), $(a + b) + c = c + (a + b)$. Asimismo, por asociatividad de la suma (**S2**), las formas **(i)** y **(ii)** satisfacen igualdad, por lo que tenemos $(a + b) + c = a + (b + c)$. De esto el lector puede inferir cuál es el uso de estos axiomas y cómo demostrar la igualdad de todas las formas de sumar tres números reales.

Demostración:

$(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociatividad	Formas (i) y (ii)	
$= a+(c+b)$	Conmutatividad	Forma (iii)	
$= (a+c)+b$	Asociatividad	Forma (iv)	
$= (c+a)+b$	Conmutatividad	Forma (v)	
$= c+(a+b)$	Asociatividad	Forma (vi)	
$= c+(b+a)$	Conmutatividad	Forma (vii)	
$= (c+b)+a$	Asociatividad	Forma (viii)	
$= (b+c)+a$	Conmutatividad	Forma (ix)	
$= b+(c+a)$	Asociatividad	Forma (x)	
$= b+(a+c)$	Conmutatividad	Forma (xi)	
$= (b+a)+c$	Asociatividad	Forma (xii)	□

Continuamos con el listado de axiomas:

S3. Neutro aditivo.

Existe un número real llamado elemento neutro para la suma o cero, denotado por 0, el cual satisface la siguiente condición: $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{R}$

S4. Inverso aditivo.

Para cada número real m existe un número real llamado inverso aditivo de m, denotado por $-m$ (a menos m); la propiedad que caracteriza a este elemento es: $m + (-m) = 0$

Utilizando los axiomas enunciados hasta ahora **S[1-4]**, podemos obtener resultados útiles, por ejemplo, si tenemos números reales a, b, c tales que $a + c = b + c$, encontraremos que $a = b$. El lector acostumbrado a matemáticas de bachillerato, podría intentar demostrar este hecho de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

No obstante, aunque en principio el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada *paso* mediante las propiedades conocidas hasta este punto. Por lo anterior, una forma más precisa de demostrar la proposición es la siguiente:

Sean a, b y c números reales, tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. (Ley de la cancelación —de la suma).

Demostración:

$a = a + 0$	Neutro aditivo	
$= a + \big(c + (-c)\big)$	Inverso aditivo	
$= (a + c) + (-c)$	Asociatividad	
$= (b + c) + (-c)$	Hipótesis	
$= b + \big(c + (-c)\big)$	Asociatividad	
$= b + 0$	Inverso aditivo	
$= b$	Neutro aditivo	□

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos —en virtud del axioma **S4**, sustituir 0 por $b + (-b)$ o por $c + (-c)$ (o cualquier otra suma igual a 0), sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. El lector debería comprobar qué ocurre si sustituimos 0 por $b + (-b)$ en la demostración anterior.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de la cancelación.

Lista de Ejercicios 1 (LE1)

a) Demuestre que el elemento neutro para la suma es único. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración: Supongamos que existen 0 y $\tilde{0}$ números reales tales que $a+0=a$ y $a+\tilde{0}=a$. Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= a+(-a) && \text{Inverso aditivo}\\
&= \big(a+\tilde{0}\big)+(-a) && \text{Hipótesis}\\
&= \big(\tilde{0}+a\big)+(-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= \tilde{0}+\big(a+(-a)\big) && \text{Asociatividad}\\
&= \tilde{0}+0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= \tilde{0} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

b) Demuestre que el inverso aditivo de cada número real es único. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración: Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Supongamos que existen $-a$ y $-\tilde{a}$ números reales tales que $a+(-a)=0$ y $a+(-\tilde{a})=0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
-a &= -a+0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= 0+(-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= \big(a+(-\tilde{a})\big)+(-a) && \text{Hipótesis}\\
&= \big((-\tilde{a})+a\big)+(-a) && \text{Conmutatividad}\\
&= (-\tilde{a})+\big(a+(-a)\big) && \text{Asociatividad}\\
&= (-\tilde{a})+0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= -\tilde{a} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

c) Demuestre que $-0=0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración: Por la propiedad del neutro aditivo tenemos que $0+0=0$. Además, el inverso aditivo de 0 satisface que $0+(-0)=0$. Debido a que el inverso aditivo de cada número real es único, de la igualdad anterior sigue que $-0=0$. □

Corolario: Para todo número real a distinto de cero, se tiene que $-a \neq 0$.

Sea a un número real distinto de cero. Supongamos que $-a=0$. Por este teorema tenemos que $-a=-0$; por la unicidad del inverso aditivo sigue que $-a$ es inverso aditivo de 0, por lo que $a=0$, lo que contradice nuestro supuesto. Por tanto $-a \neq 0$.

d) Sea a un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $-(-a)=a$.

Demostración: El inverso aditivo de a satisface que $a+(-a)=0$, y por conmutatividad tenemos que $(-a)+a=0$, de esta igualdad se sigue que a es inverso aditivo de $(-a)$. Similarmente, el inverso aditivo de $(-a)$ satisface que $(-a)+\big(-(-a)\big)=0$, y por la unicidad del inverso aditivo, sigue que $-(-a)=a$. □

e) Pruebe que si $a,b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a+b)=(-a)+(-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0+0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= \big(a+(-a)\big)+\big(b+(-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a+\Big((-a)+\big(b+(-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a+\Big(\big((-a)+b\big)+(-b)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a+\Big(\big(b+(-a)\big)+(-b)\Big) && \text{Conmutatividad}\\
&= a+\Big(b+\big((-a)+(-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a+b)+\big((-a)+(-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, tenemos que $(-a)+(-b)=-(a+b)$. □

Nota: Cada demostración que realizamos, al ser probada para números reales arbitrarios, esto es, no para elementos de $\mathbb{R}$ en particular, nos permite reutilizar las formas como esquema para otras proposiciones. Por ejemplo, el resultado $-(m+n) = (-m) + (-n)$, nos permite sustituir m y n por cuales quiera números reales, como en el ejemplo que sigue:

f) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-\big(a + (-b)\big) = b + (-a)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
-\big(a + (-b)\big) &= (-a) + \big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo} \\
&= (-a) + b && \text{Unicidad del inverso aditivo} \\
&= b + (-a) && \text{Conmutatividad} \quad \square
\end{aligned}
$$

Continuemos enunciando los **axiomas** de campo:

M1. Conmutatividad (de la multiplicación).

La multiplicación es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m \cdot n = n \cdot m$.

M2. Asociatividad (de la multiplicación).

La multiplicación es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$.

Tal como lo notamos en el caso de la suma, el axioma de **asociatividad** (de la multiplicación) no incluye todas las formas en que podríamos multiplicar tres números reales (en general diferentes) a, b y c:

i.	$(a \cdot b) \cdot c$	**vii.**	$c \cdot (b \cdot a)$
ii.	$a \cdot (b \cdot c)$	**viii.**	$(c \cdot b) \cdot a$
iii.	$a \cdot (c \cdot b)$	**ix.**	$(b \cdot c) \cdot a$
iv.	$(a \cdot c) \cdot b$	**x.**	$b \cdot (c \cdot a)$
v.	$(c \cdot a) \cdot b$	**xi.**	$b \cdot (a \cdot c)$
vi.	$c \cdot (a \cdot b)$	**xii.**	$(b \cdot a) \cdot c$

Podemos proceder análogamente al caso de la suma para probar la equivalencia de estas formas.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) && \text{Asociatividad} && \text{Formas (i) y (ii)} \\
&= a \cdot (c \cdot b) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (iii)} \\
&= (a \cdot c) \cdot b && \text{Asociatividad} && \text{Forma (iv)} \\
&= (c \cdot a) \cdot b && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (v)} \\
&= c \cdot (a \cdot b) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (vi)} \\
&= c \cdot (b \cdot a) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (vii)} \\
&= (c \cdot b) \cdot a && \text{Asociatividad} && \text{Forma (viii)} \\
&= (b \cdot c) \cdot a && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (ix)} \\
&= b \cdot (c \cdot a) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (x)} \\
&= b \cdot (a \cdot c) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (xi)} \\
&= (b \cdot a) \cdot c && \text{Asociatividad} && \text{Forma (xii)} \quad \square
\end{aligned}
$$

Continuamos con el listado de axiomas:

M1. Neutro multiplicativo.

Existe un número real distinto de cero, llamado elemento identidad para la multiplicación o uno, denotado por 1, que satisface la siguiente condición: $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.

M2. Inverso multiplicativo.

Para cada número real m distinto de cero existe un número real llamado inverso multiplicativo de m, denotado por m^{-1}, este elemento tiene la siguiente propiedad: $m \cdot m^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2 (LE2)

a) Demuestre que el elemento identidad para la multiplicación es único. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración: Supongamos que existen 1 y $\tilde{1}$ números reales tales que $a \cdot 1 = a$ y $a \cdot \tilde{1} = a$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= \left(a \cdot \tilde{1}\right) \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis} \\ &= \left(\tilde{1} \cdot a\right) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\ &= \tilde{1} \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) && \text{Asociatividad} \\ &= \tilde{1} \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= \tilde{1} && \text{Neutro multiplicativo} \end{aligned}$$ $\square$

b) Demuestre que el inverso multiplicativo de cada número real distinto de cero es único. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración: Supongamos que existen a^{-1} y $\tilde{a}^{-1}$ números reales, distintos de cero, tales que $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a \cdot \tilde{a}^{-1} = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{-1} \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot \left(a \cdot \tilde{a}^{-1}\right) && \text{Por hipótesis} \\ &= \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Conmutatividad} \\ &= 1 \cdot \tilde{a}^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= \tilde{a}^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad} \\ &= \tilde{a}^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \end{aligned}$$ $\square$

c) Demuestre que $1 = 1^{-1}$.

Demostración: Por axioma del neutro multiplicativo tenemos que $1 \cdot 1 = 1$ y $1 \neq 0$, por lo que existe 1^{-1} tal que $1 \cdot 1^{-1} = 1$. Por unicidad del inverso multiplicativo, de la igualdad anterior sigue que $1 = 1^{-1}$. $\square$

d) Sea a un número real distinto de cero; demuestre que: $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración: El inverso multiplicativo de a satisface que $a \cdot a^{-1} = 1$, y por conmutatividad, $a^{-1} \cdot a = 1$, de esta igualdad se sigue que a es inverso multiplicativo de a^{-1}. Similarmente, el inverso multiplicativo de a^{-1} satisface que $a^{-1} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1} = 1$, y por la unicidad del inverso multiplicativo, sigue que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. $\square$

e) Sean a y b números reales distintos de cero, demuestre que: $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) &= \left((a \cdot b) \cdot a^{-1}\right) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= \left((b \cdot a) \cdot a^{-1}\right) \cdot b^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= \Big(b \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right)\Big) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= 1 && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Sigue que $\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right)$ es inverso multiplicativo de $(a \cdot b)$, y por la unicidad del inverso multiplicativo, sigue que $\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) = (a \cdot b)^{-1}$. □

f) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$. Demuestre que si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= b \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

□

Observación: Para esta proposición requerimos que $c \neq 0$, ya que de caber la posibilidad de que $c = 0$, no tendríamos garantía de que $a = b$. El lector debería verificar este hecho. (Ej. $2 \cdot 0 = 1 \cdot 0$).

Nota: A esta proposición la llamaremos **ley de la cancelación** (de la multiplicación). Si el contexto es claro, omitiremos el paréntesis y simplemente la enunciaremos como ley de la cancelación.

Ahora, introducimos el **axioma** que nos permite relacionar las operaciones de suma y multiplicación:

P.D. Propiedad distributiva.

Distribución de la multiplicación sobre la suma. Para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$.

Una nota sobre rigurosidad

En este apartado utilizaremos un ejemplo para puntualizar la falta de rigor en la que pueden caer los estudiantes; dichas puntualizaciones pueden parecer exageradas y el lector podría considerar que el autor está siendo *pedante* en el uso sintáctico de los axiomas, pero la idea es proveer al estudiante de un uso riguroso de la formalización matemática.

Si a es un número real, entonces $a \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} 0 &= ab + (-ab) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{P. Distributiva} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

De inmediato podemos señalar la **ambigüedad** en el uso de la notación en el primer paso. ¿Qué debemos entender por $-ab$? Por como fue enunciada en el esbozo anterior, se pretendía que $-ab$ fuera el inverso aditivo de ab, es decir, se intuye que $-ab = -(ab)$, pero al *invocar* la propiedad distributiva en el segundo paso, se asumió que $-ab = (-a) \cdot b$, es decir, se suponen dos significados para $-ab$, que *a priori* no son iguales (requiere demostración). Asimismo, al utilizar la propiedad distributiva se estaría utilizando conmutatividad no enunciada, pues la síntaxis del axioma (**P.D.**) indica que el número a la izquierda de la suma, debe ser *distribuido* a la izquierda de los componentes de la suma, es decir, $b \cdot (a + (-a)) = b \cdot a + b \cdot (-a)$, y a partir de esto, al enunciar conmutatividad, tenemos $b \cdot a + b \cdot (-a) = a \cdot b + (-a) \cdot b$.

Al considerar el comentario anterior, el estudiante reescribe el esbozo como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot b + \big(-(a \cdot b)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot b + \big((-a) \cdot b\big) && \text{¿?} \\ &= b \cdot a + \big(b \cdot (-a)\big) && \text{Conmutatividad} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{P. Distributiva} \\ &= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

El estudiante nota que para demostrar que $a \cdot 0 = 0$, requiere probar que el inverso aditivo de $a \cdot b$ es igual a $(-a) \cdot b$, es decir, se busca probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$$\begin{aligned} 0 &= b \cdot 0 && \text{¿?} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{P. Distributiva} \\ &= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

No obstante, la proposición que debía servir para probar la demostración objetivo, pareciera necesitar de la proposición misma. En otras palabras, se ha propuesto un argumento circular, por lo que no es posible verificar la proposición original de este modo. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

a) Demuestre que $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad}\\
&= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{P. Distributiva}\\
&= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo}\\
&= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= 0 && \text{Inverso aditivo} \quad \square
\end{aligned}$$

b) Si a y b son números reales tales que $a \cdot b = 0$, demuestre que $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Supongamos que a es distinto de 0.

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= b \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= 0 \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis}\\
&= a^{-1} \cdot 0 && \text{Conmutatividad}\\
&= 0 && \text{Multiplicación por 0} \quad \square
\end{aligned}$$

Nota: Esta proposición es verdadera si al menos uno de los números a o b resultan ser igual a 0. Aunque también podríamos negar la igualdad para ambos y llegar a una contradicción; para ello, al procedimiento anterior añadimos el supuesto de que a su vez $b \neq 0$, alcanzando la contradicción a partir de este hecho.

c) $(-1) = (-1)^{-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
1 + (-1) &= 0 && \text{Inverso aditivo}\\
(-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) &= 0 && \text{Inverso multiplicativo}\\
(-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) \cdot 1 &= 0 && \text{Neutro multiplicativo}\\
(-1) \cdot \left((-1)^{-1} + 1\right) &= 0 && \text{P. Distributiva}
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior, sigue que $(-1) = 0$ o $(-1)^{-1} + 1 = 0$. Veamos los casos:

- **i)** Sup. $(-1) = 0$. El inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 0$, pero de la hipótesis sigue que $1 + 0 = 0$, y por neutro aditivo, $1 = 0$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo. Por lo que descartamos este caso.
- **ii)** Sup. $(-1)^{-1} + 1 = 0$; por conmutatividad $1 + (-1)^{-1} = 0$, lo que implica que $(-1)^{-1}$ es inverso aditivo de 1, y por unicidad, $(-1)^{-1} = (-1)$. $\square$

d) Sean a y b números reales, demuestre que: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= b \cdot 0 && \text{Multiplicación por 0}\\
&= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{P. Distributiva}\\
&= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior sigue que $(-a) \cdot b$ es inverso aditivo de $a \cdot b$, y por la unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Análogamente,

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 && \text{Multiplicación por 0} \\ &= a \cdot \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot b + a \cdot (-b) && \text{P. Distributiva} \end{aligned}$$

De la igualdad anterior sigue que $a \cdot (-b)$ es inverso aditivo de $a \cdot b$, y por la unicidad del inverso aditivo, se verifica que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. □

Nota: A partir de esta demostración evitamos la ambigüedad que se mencionó en el apartado *Una nota sobre rigurosidad*.

Corolario:

i) Si a y b son números reales, entonces, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
Por el teorema, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot \big(-(-b)\big)$, y sabemos que $-(-b) = b$, por lo que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces, $(-1) \cdot a = -a$. (Multiplicación por -1).
Por el teorema, $(-1) \cdot a = -(1 \cdot a) = -a$.

iii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

$$\begin{aligned} (-a)^{-1} &= \big((-1) \cdot a\big)^{-1} && \text{Multiplicación por -1} \\ &= (-1)^{-1} \cdot a^{-1} && \text{(e) de LE2} \\ &= -1 \cdot a^{-1} && \text{(c) de LE3} \\ &= -a^{-1} && \text{Multiplicación por -1} \end{aligned}$$

e) Demuestre que para todo número real a distinto de cero, $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea a un número real distinto de cero tal que $a^{-1} = 0$. Al multiplicar por 0 tenemos que $a \cdot a^{-1} = 0$. Además, el inverso multiplicativo satisface que $a \cdot a^{-1} = 1$, por lo que $1 = 0$, pero esto contradice el axioma del neutro multiplicativo. Entonces, $a^{-1} \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$. □

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número, únicamente indica que si el número es diferente de cero existe su inverso multiplicativo. Por otra parte, el axioma no especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, podemos probar que implica la misma contradicción a la que llegamos en esta demostración (el lector debería verificar este hecho).

Por otra parte, apesar de que no hemos definido la división, esta puede ser entendida como la multiplicación por algún inverso multiplicativo. De esta demostración podemos concluir que no es posible dividir por cero.

Una nota sobre notación

Reutilizar *esquemas* de proposiciones probadas nos permite agilizar la escritura de demostraciones; establecer notación tiene el mismo propósito. No obstante, cada vez que acordemos el uso de notación esta debe ser justificada; en ocasiones la justificación es tan simple como utilizar diferentes *etiquetas* para los mismos *objetos*, pero en otras, la notación requiere de explicación para evitar ambigüedad.

Notación:

i) Si m y n son números reales, representaremos con el símbolo $m - n$ a la suma $m + (-n)$.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

ii) Si m_1, m_2 y m_3 son números reales, representaremos con el símbolo $m_1 + m_2 + m_3$ a la suma de estos.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que todas las formas de sumar tres números reales son equivalentes.

iii) Si m y n son números reales, representaremos con el símbolo mn a la multiplicación $m{\cdot}n$; a esta multiplicación la llamaremos el producto de m y n.

A partir de esta notación, tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot bc = abc$; ya que hemos verificado que todas las formas de multiplicar tres números reales son equivalentes, tenemos que abc representa el producto de cualesquiera números reales a, b y c sin importar la asociatividad presente.

Observemos que sería un error reescribir la multiplicación $a \cdot (-b)$ como $a - b$, pues dicha notación se ha reservado para la suma en (i), por lo que $a \cdot (-b)$ debería reescribirse como $a(-b)$.

iv) Si m es un número real, representaremos con el símbolo m^2 a la multiplicación $m \cdot m$, y lo llamaremos el cuadrado de m.

v) Si m es un número real, representaremos con el símbolo $-m^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-m$ o al inverso aditivo de m^{-1}.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

vi) Si m y n son números reales y n es distinto de cero, representaremos con el símbolo $\frac{m}{n}$ al número $m \cdot n^{-1}$.

vii) Al número 1+1 lo denotaremos con el símbolo 2 y lo llamaremos número dos. Al número 2+1 lo denotaremos con el símbolo 3 y lo llamaremos número tres...

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $ab^{-1} = ba^{-1}$, entonces $a^2 = b^2$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
a^2 &= a \cdot a && \text{Notación} \\
&= a \cdot a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot a \cdot b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= a \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b && \text{Hipótesis} \\
&= a \cdot a^{-1} \cdot b \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
&= 1 \cdot b \cdot b && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= b^2 && \text{Notación}
\end{aligned}$$

□

b) Si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= b^2 - b^2 && \text{Inverso aditivo} \\
&= a^2 - b^2 && \text{Hipótesis} \\
&= a^2 - b^2 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= a^2 - b^2 + ab - ab && \text{Inverso aditivo} \\
&= a^2 + ab - b^2 - ab && \text{Conmutatividad} \\
&= (a^2 + ab) + (-b^2) + (-ab) && \text{Asociatividad} \\
&= (aa + ab) + (-bb) + (-ab) && \text{Notación} \\
&= (aa + ab) - (bb + ab) && \text{Distribución del signo} \\
&= a(a + b) - b(b + a) && \text{P. Distributiva} \\
&= (a + b)(a - b) && \text{P. Distributiva}
\end{aligned}$$

Por el ejercicio (b) de LE3, de la igualdad anterior tenemos que $a + b = 0$ o $a - b = 0$. Sumando inverso aditivo de b en ambas igualdades tenemos que $a = -b$ o $a = b$. □

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. (Diferencia de cuadrados).

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= (a + b)\big(a + (-b)\big) && \text{Notación} \\
&= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot (-b) && \text{P. Distributiva} \\
&= a(a + b) + (-b)(a + b) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot a + a \cdot b + (-b) \cdot a + (-b) \cdot b && \text{P. Distributiva} \\
&= a^2 + ab - ba - b^2 && \text{Notación} \\
&= a^2 - b^2 && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

□

d) $a = \frac{a}{1}$. (División por 1).

Demostración: El neutro multiplicativo satisface que $a = a \cdot 1 = a \cdot 1^{-1}$, y por notación $a = \frac{a}{1}$. □

e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) && \text{Notación}\\
&= a \cdot \left(b^{-1} \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Asociatividad}\\
&= a \cdot \left(c \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= (a \cdot c) \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right) && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{(e) de LE2}\\
&= \frac{ac}{bd} && \text{Notación} \quad \square
\end{aligned}$$

Corolario:

i) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, si $b \neq 0$. (Definición de la división).

$$\begin{aligned}
a \cdot \frac{1}{b} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} && \text{División por 1}\\
&= \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} && \text{Teorema}\\
&= \frac{a}{b} && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

ii) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

De la división por 1, tenemos que $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b}$, y por este teorema $\frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b \cdot 1}$, osea $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= \frac{a}{b} \cdot \left(c \cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} && \text{Notación}\\
&= \frac{ac}{bc} && \text{Teorema}
\end{aligned}$$

iv) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, si $b \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{-a}{-b} &= \frac{(-1) \cdot a}{(-1) \cdot b} && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= \frac{-1}{-1} \cdot \frac{a}{b} && \text{Teorema}\\
&= (-1) \cdot (-1)^{-1} \cdot \frac{a}{b} && \text{Notación}\\
&= 1 \cdot \frac{a}{b} && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= \frac{a}{b} && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

Nota: En esta prueba está implícito que $-b$ tiene inverso multiplicativo, lo cual es válido ya que de la hipótesis y (f) de LE3, sigue que $-b \neq 0$.

f) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Suma de fracciones).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} \pm c \cdot d^{-1} && \text{Notación}\\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \pm (c \cdot 1) \cdot d^{-1} && \text{Neutro multiplicativo}\\
&= \Big(a \cdot \big(d \cdot d^{-1}\big)\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big(c \cdot \big(b \cdot b^{-1}\big)\Big) \cdot d^{-1} && \text{Inverso multiplicativo}\\
&= \Big((a \cdot d) \cdot d^{-1}\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big((c \cdot b) \cdot b^{-1}\Big) \cdot d^{-1} && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot d) \cdot \big(d^{-1} \cdot b^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a \cdot d) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Conmutatividad}\\
&= \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \cdot (a \cdot d \pm c \cdot b) && \text{P. Distributiva}\\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Conmutatividad}\\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{(e) de LE2}\\
&= (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{ad \pm bc}{bd} && \text{Notación}
\end{aligned}
$$

g) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{-b} &= \frac{-(-a)}{-b} && \text{Unicidad del inverso aditivo}\\
&= \big(-(-a)\big) \cdot (-b)^{-1} && \text{Notación}\\
&= (-1) \cdot (-a) \cdot (-b)^{-1} && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= (-1) \cdot \frac{-a}{-b} && \text{Notación}\\
&= (-1) \cdot \frac{a}{b} && \text{(d) de LE4}\\
&= -\frac{a}{b} && \text{Multiplicación por } (-1) \qquad (*)\\
&= (-1) \cdot \frac{a}{b} && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= \frac{(-1) \cdot a}{b} && \text{(a) de LE4}\\
&= \frac{-a}{b} && \text{Multiplicación por } (-1) \qquad (**)
\end{aligned}
$$

De las igualdades (*) y (**) tenemos que $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$.

h) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a \cdot b^{-1}\right)}{\left(c \cdot d^{-1}\right)} && \text{Notación}\\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Notación}\\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c^{-1} \cdot \left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{(e) de LE2}\\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c^{-1} \cdot d\right) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo}\\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(d \cdot c^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{Notación}\\
&= \frac{ad}{bc} && \text{(d) de LE4}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + (-b) = b + (-a)$, entonces $a = b$.

Un intento por demostrar la proposición anterior puede lucir como sigue:

$$\begin{aligned}
a + (-b) &= b + (-a) && \text{Hipótesis}\\
\big(a + (-b)\big) + b &= \big(b + (-a)\big) + b && \text{Ley de la cancelación}\\
a + \big((-b) + b\big) &= b + \big((-a) + b\big) && \text{Asociatividad}\\
a + \big(b + (-b)\big) &= b + \big(b + (-a)\big) && \text{Conmutatividad}\\
a + 0 &= b + \big(b + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
a + 0 &= (b + b) + (-a) && \text{Asociatividad}\\
(a + 0) + a &= \big((b + b) + (-a)\big) + a && \text{Ley de la cancelación}\\
(a + 0) + a &= (b + b) + \big((-a) + a\big) && \text{Asociatividad}\\
(a + 0) + a &= (b + b) + \big(a + (-a)\big) && \text{Conmutatividad}\\
(a + 0) + a &= (b + b) + 0 && \text{Inverso aditivo}\\
a + a &= b + b && \text{Neutro aditivo}\\
a \cdot 1 + a \cdot 1 &= b \cdot 1 + b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\
a \cdot (1 + 1) &= b \cdot (1 + 1) && \text{P. Distributiva}\\
a \cdot (2) &= b \cdot (2) && \text{Notación}\\
a &= b && \text{¿Ley de la cancelación?}
\end{aligned}$$

El lector cuidadoso notará que la ley de la cancelación (de la multiplicación) exige que el número a *ser cancelado* sea diferente de 0. Sin embargo, hasta este punto no hemos demostrado que $2 \neq 0$, por lo que la proposición no puede ser demostrada utilizando este hecho. Sin embargo, con los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos derivado de ellos no es suficiente para probar tal proposición (el lector debería verificar este hecho).

Por lo anterior, resulta necesario añadir elementos a nuestro conjunto de axiomas.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo $\mathbb{R}^+$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales positivos. El conjunto $\mathbb{R}^+$ satisface los siguientes **axiomas (de orden)**:

O1) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m + n \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$)

O2) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$)

O3) Para cada número real m se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones (Tricotomía):

- **i)** $m \in \mathbb{R}^+$.
- **ii)** $m = 0$.
- **iii)** $-m \in \mathbb{R}^+$.

Definición: Sean a y b números reales, decimos que:

- a es menor que b o que b es mayor que a y escribimos $a < b$ o $b > a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
- a es menor que o igual que b o que b es mayor o igual que a, y escribimos $a \leq b$ o $b \geq a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$.

Notación: Sean a, b y c números reales, utilizaremos la notación $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y $b < c$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $a > 0$. (Definición de número real positivo).

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. El cero satisface que $a = a + 0 = a - 0$, y por la hipótesis $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que por definición implica que $a > 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a > 0$. Por definición, $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, y sabemos que el cero satisface que $a - 0 = a + 0 = a$, por lo que $a \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Observación: Todo número real positivo es mayor a cero, y todo número real mayor a cero es un número real positivo.

Nota: Esta demostración, cuya forma es $m \in \mathbb{R}^+ \iff m > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, nos permite reparar en el hecho de que la definición de un número real positivo no está asociada al signo que acompaña al número, es decir, la proposición es válida para $-a > 0$, es decir, $-a \in \mathbb{R}^+ \iff -a > 0, \forall -a \in \mathbb{R}$. El lector debería verificar este hecho.

b) $1 \in \mathbb{R}^+$. (Uno es positivo).

Demostración: Supongamos que $1 \notin \mathbb{R}^+$. Por axioma del neutro multiplicativo, sabemos que $1 \neq 0$. Luego, por tricotomía tenemos que $-1 \in \mathbb{R}^+$. Por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $(-1) \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$, y por la ley de los signos tenemos que $(-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice el supuesto inicial. Por tanto, 1 es un número real positivo. $\square$

c) $a < b$ si y solo si $a + c < b + c$. (Ley de la cancelación de la suma en desigualdades).

Demostración:

$\Rightarrow$) Si $a < b$, por definición, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Luego,

$$\begin{aligned}
b - a &= b - a + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= b - a + c - c && \text{Inverso aditivo}\\
&= b + c - a - c && \text{Conmutatividad}\\
&= b + c + (-a) + (-c) && \text{Notación}\\
&= b + c + (-1)a + (-1)c && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= b + c + (-1)(a + c) && \text{P. Distributiva}\\
&= b + c + \big(-(a + c)\big) && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= b + c - (a + c) && \text{Notación}
\end{aligned}$$

De este modo, $b + c - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + c$.

$\Leftarrow$) Si $a + c < b + c$, por definición $b + a - (a + c) \in \mathbb{R}^+$. Luego,

$$\begin{aligned}
b + c - (a + c) &= b + c - a - c && \text{Distribución del signo}\\
&= b - a + c - c && \text{Conmutatividad}\\
&= b - a + 0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= b - a && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

De este modo, $b - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < b$. $\square$

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de la cancelación.

d) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. (La suma de desigualdades preserva el orden).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$. Luego,

$$\begin{aligned}
(b - a) + (d - c) &= b - a + d - c && \text{Notación}\\
&= b + d - a - c && \text{Conmutatividad}\\
&= b + d + (-a) + (-c) && \text{Notación}\\
&= b + d + (-1)a + (-1)c && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= b + d + (-1)(a + c) && \text{P. Distributiva}\\
&= b + d + \big(-(a + c)\big) && \text{Multiplicación por } (-1)\\
&= b + d - (a + c) && \text{Notación}
\end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$. $\square$

Observación: En la suma de desigualdades se preserva el orden.

Nota: Esta proposición difiere de la ley de la cancelación (de la suma en desigualdades) ya que no se satisface una doble implicación, es decir, si $a + c < b + d$, no es posible demostrar —a partir de esta hipótesis únicamente, que $a < b$. El lector debería verificar este hecho. (Ej. $a = 4, c = 0, b = 3, d = 4, a + c = 4 + 0 = 4 < 7 = 3 + 4 = b + d$, pero $a = 4 < 3 = b$ es una contradicción).

e) $-a < b$ si y solo si $-b < a$.

Demostración:

$\Rightarrow)$

$-a < b$	Hipótesis
$-a + a - b < b + a - b$	Ley de cancelación
$a - a - b < b - b + a$	Conmutatividad
$0 - b < 0 + a$	Inverso aditivo
$-b < a$	Neutro aditivo

$\Leftarrow)$

$-b < a$	Hipótesis
$-b + b - a < a + b - a$	Ley de cancleación
$b - b - a < b + a - a$	Conmutatividad
$0 - a < b + 0$	Inverso aditivo
$-a < b$	Neutro aditivo

$\square$

Corolario:

i) $a < -b$ si y solo si $b < -a$.
$\Rightarrow)$ Si $a < -b$, por la unicidad del inverso aditivo, $-(-a) < -b$, y por este teorema, $-(-b) = b < -a$.
$\Leftarrow)$ Si $b < -a$, por la unicidad del inverso aditivo, $-(-b) < -a$, y por este teorema, $-(-a) = a < -b$.

ii) $a < b$ si y solo si $-b < -a$.
$\Rightarrow)$ Si $a < b$, por la unicidad del inverso aditivo, $-(-a) < b$, y por este teorema, $-b < -a$.
$\Leftarrow)$ Si $-b < -a$, por este teorema $-(-a) = a < b$.

iii) $0 < a$ si y solo si $-a < 0$. (Definición de número real negativo).
$\Rightarrow)$ Si $0 < a$, sabemos que $0 = -0 < a$, y por este teorema, $-a < 0$.
$\Leftarrow)$ Si $-a < 0$, por este teorema, $-0 = 0 < a$.

Observación: El inverso aditivo de cualquier número real positivo es menor a cero.

Definición: Ai a es un número real tal que $a < 0$, diremos que a es un número real negativo. El conjunto de los números reales negativos se representa con el símbolo $\mathbb{R}^-$.

f) Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$. (Multiplicación por positivo).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}^+$. Por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $c(b-a) \in \mathbb{R}^+$. Por la propiedad distributiva sigue que $c(b-a) = cb - ca$ y por conmutatividad tenemos que $cb - ca = bc - ac$. De este modo, $bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$. $\square$

Observación: La multiplicación por números reales positivos preserva el orden de la desigualdad.

g) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$. (Multiplicación por negativo).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $0 - c \in \mathbb{R}^+$, por A3 sigue que $-c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 $-c(b-a) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
-c(b-a) &= -c\Big(b + (-a)\Big) && \text{Notación}\\
&= (-c)\cdot b + (-c)\cdot(-a) && \text{P. Distributiva}\\
&= (-c)\cdot b + c\cdot a && \text{Por (k) de LE1}\\
&= -(c\cdot b) + c\cdot a && \text{Por (i) de LE1}\\
&= ca - (cb) && \text{Conmutatividad}\\
&= ac - (bc) && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac > bc$. $\square$

Observación: La multiplicación por números reales negativos cambia el orden de la desigualdad.

h) Si $0 < a$, entonces $0 < a^{-1}$. (Inverso multiplicativo positivo).

Demostración: Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $0 < a$, al multiplicar en desigualdades preserva el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero sabemos —por (b) de LE3, que $1 > 0$, por lo que a^{-1} no puede ser menor a cero. Además, sabemos que 0 no es inverso multiplicativo —por (f) de LE3. Finalmente, por tricotomía, $a^{-1} > 0$. $\square$

i) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$. (Inverso multiplicativo negativo).

Demostración: Supongamos que $0 < a^{-1}$. Como $a < 0$, al multiplicar en desigualdades cambia el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero sabemos —por (b) de LE3, que $1 > 0$, por lo que a^{-1} no puede ser mayor a cero. Además, sabemos que 0 no es inverso multiplicativo —por (f) de LE3. Finalmente, por tricotomía, $a^{-1} < 0$. $\square$

j) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ab < 0$ o $0 < ab$. (Ley de los signos).

Si a o b son cero, tenemos que $ab = 0$, por lo que descartamos esta posiblidad. Por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

- **i)** Si $0 < a$ y $0 < b$, por la cerradura de la multiplicacón en $\mathbb{R}^+$, tenemos que $0 < ab$.
- **ii)** Sin pérdida de generalidad, si $0 < a$ y $b < 0$, tenemos que $0 < -b$, y por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$, $0 < -ab$, por lo que $ab < 0$.
- **iii)** Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < -a$ y $0 < -b$, por lo que $0 < (-a)(-b) = ab$.

Conclusión:

- **1)** Por (i) y (ii) sabemos que para verificar $ab < 0$, un componente del producto debe ser positivo y el otro negativo.
- **2)** Por (iii) sabemos que para verificar $0 < ab$, ambos componentes del producto deben ser positivos o ambos negativos.

Nota: Nos referiremos a (1) y (2) como ley de los signos.

k) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Transitividad).

Demostración: Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Por la cerradura de la suma, $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$. De donde sigue que $(b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. $\square$

l) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^{-1} < a$ o $a < a^{-1}$.

Para que $\exists a^{-1}$, requerimos $a \neq 0$. También, sabemos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$, pero buscamos desigualdad. Entonces, observemos los casos:

i) Si $a < -1$, entonces $1 < -a$, y por transitividad $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} 1 &< -a \\ 1 \cdot \left(-a^{-1}\right) &< (-a) \cdot \left(-a^{-1}\right) \\ -a^{-1} &< 1 \\ -1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad, $a < a^{-1}$.

ii) Si $-1 < a < 0$, por notación $-1 < a$ y $a < 0$, de donde sigue que $-a < 1$ y $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$.

$$\begin{aligned} -a &< 1 \\ (-a) \cdot (-a^{-1}) &< 1 \cdot (-a^{-1}) \\ 1 &< -a^{-1} \\ a^{-1} &< -1 \end{aligned}$$

Por transitividad, $a^{-1} < a$.

iii) Si $0 < a < 1$, por notación $0 < a$ y $a < 1$, de donde sigue que $0 < a^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned} a &< 1 \\ a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\ 1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad $a < a^{-1}$.

iv) Si $1 < a$, por transitividad $0 < a$, por lo que $0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &< a \\ 1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\ a^{-1} &< 1 \end{aligned}$$

Por transitividad $a^{-1} < a$.

Conclusión:

- Por (i) y (iii), $a < a^{-1}$, si $a < -1$ o $0 < a < 1$.
- Por (ii) y (iv), $a^{-1} < a$, si $-1 < a < 0$ o $1 < a$.

m) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ o $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Sabemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, pues requerimos la existencia de su inverso multiplicativo. Luego, por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, tenemos que $0 < ab$, por lo que $0 < \frac{1}{ab}$. Entonces, $a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} < \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{ab}$.

ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $ab < 0$, por lo que $\frac{1}{ab} < 0$. De donde sigue que $b \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} < \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{ab}$.

iii) Si $b < 0$ y $0 < a$, por transitividad, $b < a$, lo que contradice la hipótesis, por lo que descartamos este caso.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < ab$, por lo que $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, como se probó en (i).

Conclusión:

- Por (i) y (iv), si ambos componentes son positivos o ambos negativos, entonces los inversos multiplicativos invierten el orden.
- Por (iii), si el componente menor es negativo y el mayor es positivo, entonces los inversos multiplicativos conservan el orden.

n) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Punto medio).

Demostración:

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< a + b \\ 2a &< a + b \\ a &< \frac{a+b}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a &< b \\ a + b &< b + b \\ a + b &< 2b \\ \frac{a+b}{2} &< b \end{aligned}$$

$\square$

Definición: Al número $\frac{a+b}{2}$ lo llamaremos el punto medio entre a y b.

Observación:

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b - a - b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{b - 2a + a}{2} = \frac{a+b}{2} - a$$

o) $0 \leq a^2$.

Demostración:

i) Si $0 \leq a$, $0 \cdot a \leq a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$.

ii) Si $a < 0$, $0 \cdot a < a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$.

En cualquier caso $0 \leq a^2$. $\square$

p) Sea $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (Mediante).

Sabemos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. También, por definición, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+$, es decir, $(bc - ad)/(bd) > 0$. Como b y d son distintos de cero, tenemos que $bd \neq 0$. Asimismo, $bc - ad \neq 0$.

Buscamos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, para lo que es necesario que

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \\
0 &< \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{b(a+c) - \big(a(b+d)\big)}{b(b+d)} \\
&= \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{d}{b+d}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\
0 &< \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \\
&= \frac{c(b+d) - \big(d(a+c)\big)}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{b}{b+d}
\end{aligned}
$$

Como $(bc - ad)/(bd) > 0$, entonces $\frac{d}{b+d} > 0$ y $\frac{b}{b+d} > 0$. Por esto, $b + d \neq 0$. Finalmente, tenemos dos casos:

i) Si $b > 0$, entonces $b + d > 0$ y $d > 0$.

ii) Si $b < 0$, entonces $b + d < 0$ y $d < 0$.

Por tanto, debe cumplirse que b y d deben ser ambos positivos o ambos negativos.

Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$
|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}
$$

Observación: $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Notemos que la definición es equivalente a las siguientes:

$$
|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}
\qquad
|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}
$$

El lector de vería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. $\square$

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. $\square$

c) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. $\square$

d) $|a|^2 = a^2$.

Demostración: $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$. $\square$

e) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $|a| < b$.
Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

i) Si $0 \leq |a|$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. $\square$

Nota: Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

f) $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a+b$, entonces $|a+b| = a+b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a+b \leq |a|+|b|$. Por tanto, $|a+b| \leq |a|+|b|$.

ii) Si $a+b<0$, entonces $|a+b| = -a-b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a-b \leq |a|+|b|$. Por tanto, $|a+b| \leq |a|+|b|$. $\square$

g) $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| && \text{Desg. del triángulo} \\ |b| &\leq |b-a|+|a| \\ -|b-a| &\leq |a|-|b| \\ -|a-b| &\leq |a|-|b| && (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b|+|b| && \text{Desg. del triángulo} \\ |a| &\leq |a-b|+|b| \\ |a|-|b| &\leq |a-b| && (**) \end{aligned}$$

De (*) y (**) sigue que $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$. $\square$

Corolario: $|a|-|b| \leq |a-b|$ y $|b|-|a| \leq |a-b|$.

Por la desigualdad del triángulo inversa, $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$, y por el teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades, $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$. Por lo que,

$$|a|-|b| \leq |a-b| \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} -|a-b| &\leq |a|-|b| \\ -\big(|a|-|b|\big) &\leq |a-b| \\ |b|-|a| &\leq |a-b| \end{aligned}$$

h) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a \geq 0$ y $b>0$, entonces $|a|=a$ y $|b|=b$. Además, $\frac{1}{b}>0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b<0$, entonces $|a|=a$ y $|b|=-b$. Además, $\frac{1}{b}<0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a<0$ y $b>0$, entonces $|a|=-a$ y $|b|=b$. Además, $\frac{1}{b}>0$, de donde sigue que $\frac{a}{b}<0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a<0$ y $b<0$, entonces $|a|=-a$ y $|b|=-b$. Además, $\frac{1}{b}<0$, de donde sigue que $\frac{a}{b}>0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

$\square$

Inducción matemática

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$ entonces se verifica que $n+1 \in A$.

Lista de Ejercicios 6 (LE6)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si $n \in \mathbb{R}$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$, y si $n \in \mathbb{R}^+$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}^+$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$.

3) Sea $A \coloneqq \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ es un conjunto inductivo}\}$. Demuestre que $A \neq \varnothing$ y que $C = \bigcap B$ es un conjunto inductivo.

Demostración: Claramente $A \neq \varnothing$, pues $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$.

Luego, por hipótesis, $\forall B \in A$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ por lo que $C \subseteq \mathbb{R}$. Además, $\forall B \in A$, se verifica que $1 \in B$. Consecuentemente, $1 \in C$. Por otra parte, si $n \in B$ para todo $B \in A$, tendremos que $n+1 \in B$, por lo que $n+1 \in C$. Por tanto, C es un conjunto inductivo. $\square$

Definición: Al conjunto C de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{N}$.

Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

a) La suma de números naturales es un número natural. (Cerradura de la suma en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \varnothing$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m+n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n+1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) La multiplicación de números naturales es un número natural. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \varnothing$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ se verifica que $m \cdot n + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n+1)$, por lo que $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n+1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n+1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n+1$. Por transitividad, $1 \leq n+1$, por lo que $n+1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

d) $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Sabemos que $n \geq 1$, por lo que tenemos dos casos:

- **i)** Si $n = 1$, tenemos que $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1$. Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.
- **ii)** Si $n > 1$, por transitividad $n > 0$, lo que implica que $\frac{1}{n} > 0$. Retomando la hipótesis,

$$\begin{aligned} n &> 1 \\ n \cdot \frac{1}{n} &> 1 \cdot \frac{1}{n} \\ 1 &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

  Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Como n es arbitrario, se verifica que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

e) Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n-1 \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Sea $m \in A$ con $m > 1$, tenemos que $m \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica que $m + 1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(m+1) - 1 = m$, por lo que $(m+1) - 1 \in \mathbb{N}$. Como $m > 1$, por transitividad, $m > 0$, de donde sigue que $m + 1 > 1$, por lo que $m + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

f) Sean m y n números naturales. Si $n < m$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < m,\ m - n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \,\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $1 + 1 \in \mathbb{N}$. Además, $1 > 0$, de donde sigue que $1 + 1 > 1$. Luego, $1 = (1+1) - 1 \in \mathbb{N}$, por lo que $1 \in A$.

Si $n \in A$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m - n \in \mathbb{N}$ y $n < m$, de donde obtenemos $n + 1 < m + 1$. Como $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$. Notemos que $m + 1 - (n+1) = m - n$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, se cumple que $A = \mathbb{N}$. $\square$

Corolario:

- **i)** Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n < x < n + 1$, entonces x no es un número natural.
  Por hipótesis, $n < x$, de donde sigue que $n - x + 1 < 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Luego, si suponemos que $x \in \mathbb{N}$, de la hipótesis $x < n + 1$ sigue que $n + 1 - x \in \mathbb{N}$, por este teorema. Esto implica que $1 \leq n + 1 - x < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural.
- **ii)** Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.
  Por definición, $x > 0$, por lo que $x + n > n$. Por hipótesis, $x + n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema, $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que m es elemento mínimo de A si $m \in A$ y $m \leq a, \forall a \in A$.

Principio del buen orden

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene elemento mínimo.

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$. Supongamos que A no tiene elemento mínimo.

Sea $S \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < a, \forall a \in A \,\}$.

Si $1 \notin S$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq 1$. Como $a_0 \in \mathbb{N}$, sabemos que $1 \leq a_0$, por lo que $1 \leq a_0 \leq 1$, lo que implica que $a_0 = 1 \in A$, pero $1 \leq a, \forall a \in A$, pues los elementos de A son números naturales. Por tanto, 1 es elemento mínimo de A, pero esto contradice nuestro supuesto inicial. Por tanto, $1 \in S$.

Si $n \in S$, tenemos que $n \in \mathbb{N}$ (*) y $n < a, \forall a \in A$ (**).

Luego, si $n+1 \notin S$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq n+1$. De (*) se sigue que $n+1 \in \mathbb{N}$, pues $\mathbb{N}$ es un cojunto inductivo. A su vez, de (**) se tiene que, en particular, $n < a_0$, por lo que $n < a_0 \leq n+1$ (***). Como n, a_0 y $n+1$ son números naturales, (***) no puede cumplirse con desigualdad, por lo que $a_0 = n+1 \in A$.

Ahora, supongamos que $\exists x \in A$ tal que $x < n+1$, tenemos que $n < x < n+1$, lo que es una contradicción, por lo que $n+1$ es elemento mínimo de A, pero esto contradice nuestro supuesto inicial. Por tanto, $n+1 \in S$, es decir, S es un conjunto inductivo, y por definición $S \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subseteq S$, por lo que $S = \mathbb{N}$.

Finalmente, notemos que $A \cap S = \varnothing$, y dado que $A \subseteq \mathbb{N}$ y $S = \mathbb{N}$, sigue que $A = \varnothing$, pero esto es una contradicción. Por tanto, si $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$, entonces A tiene elemento mínimo. $\square$

Principio de inducción matemática

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración: Supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es no vacío (ya que de serlo, tendríamos $S = \mathbb{N}$), y —por el principio del buen orden— tiene elemento minimo. Sea m el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$. Por (c) de LE7, se verifica que $1 \leq m$. Por definición, $1 \in S$ y por esto, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ tenemos que $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, de donde sigue —por (e) de LE7— que $m - 1 \in \mathbb{N}$. Debido a que $m - 1 < m$ y m es el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, $m - 1 \in S$. Luego, dado que S es un conjunto inductivo, se verifica que $(a-1) + 1 = m \in S$ lo que es una contradicción. Por tanto, debe ser el caso que $S = \mathbb{N}$. $\square$

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

i) Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.

iii) Si $n = k+1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.

b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.

c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. □

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que A está acotado:

- superiormente si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es cota superior de A.
- inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que m es cota inferior de A.
- si está acotado superior e inferiormente.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A es no vacío y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si S satisface las siguientes condiciones:

- S es cota superior de A.
- Si K es cota superior de A, entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Definición:. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A.
- Si K es cota inferior de A, entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A.

En este caso escribimos $M = \inf(A)$

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$) ads

$\Leftarrow$) asdf

□

2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. □

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. $\square$

4. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración: **i)** Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S, tendríamos que $\exists V$ tal que $s_{@}a \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S.

ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S, por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. $\square$

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. $\square$

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{ -a : a \in A \}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. $\square$

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. $\square$

Defninción.

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.

- Al conjunto $-n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^-$.
- Al conjunto $\mathbb{N}$ también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^+$.

Observación. Los conjuntos $\mathbb{N}$, 0, $-n : n \in \mathbb{N}$ son disjuntos por pares.

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. $\square$

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. $\square$

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. $\square$

d) Definimos el conjunto $A := \{ n \in \mathbb{Z} : x < n \}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n-1 < n$, de donde sigue que $n-1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$
\begin{aligned}
n < m \leq x &< n + 1 \\
n < m &< n + 1 \\
0 < m - n &< 1
\end{aligned}
$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. $\square$

Lista de Ejercicios # (LE#)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \leq a^{2n}\, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a \, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$0 \leq a^1$$
$$0 \leq a$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$0 \leq a^k$$
$$0 \cdot a \leq a^k \cdot a$$
$$0 \leq a^{k+1}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$a^1 < b^1$$
$$a < b$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$a^k \cdot a < b^k \cdot b$$
$$a^{k+1} < b^{k+1}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) \coloneqq \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b).

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos el intervalo

- abierto, como $(a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$
- semicerrado-abierto, como $[a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$
- semiabierto-cerrado, como $(a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$
- cerrado, como $[a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.

Definición. Sea $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario-ε de ℓ es el conjunto $V_\varepsilon(\ell) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$.

Notemos que por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades,

$$|x - \ell| < \varepsilon = -\varepsilon < x - \ell < \varepsilon = \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Por lo que el vecindario-ε de ℓ es equivalente al intervalo abierto: $(\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon)$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.
Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

b) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.
Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.
Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

d) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.
Demostración:

- **i)** Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.
- **ii)** Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.
Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$
$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. $\square$

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$
$$|x_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell|$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\big|(x_n - \ell) + \ell\big| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$
$$|x_n| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n<n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. $\square$