Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: inducción

Torres Brito David Israel

August 30, 2022

1. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + i\cdot(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procederemos por inducción sobre n.

i) Se verifica para $n = 1$:

$$\begin{aligned}(1)(1+1) &= \frac{1(1+1)(1+2)}{3}\\ (1)(2) &= \frac{1(2)(3)}{3}\\ 2 &= \frac{6}{3}\\ 2 &= 2\end{aligned}$$

ii) Supongamos que la fórmula se cumple para $n = k$, es decir, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

iii) Demostraremos, a partir de (ii), que la fórmula se cumple también para $n = k+1$. Es decir, probaremos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big((k+1)+2\big)}{3}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\end{aligned}$$

En efecto, notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)\big((k+1)+1\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)\cdot(k+2) && \text{Por hipótesis de inducción} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)\cdot(k+2)}{3} \\
&= k\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{3} + 3\cdot\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{3}\cdot(k+3) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{3}\cdot\frac{3(k+3)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)\cdot 3(k+3)}{3\cdot 3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procederemos por inducción sobre n.

i) Se verifica para $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\big(2(1)-1\big)\big(2(1)+1\big)} &= \frac{1}{2(1)+1} \\
\frac{1}{(2-1)(2+1)} &= \frac{1}{2+1} \\
\frac{1}{(1)(3)} &= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

ii) Supongamos que la fórmula se cumple para $n = k$, es decir, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

iii) Demostraremos, a partir de (ii), que la fórmula se cumple también para $n = k+1$. Es decir, probaremos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\ &= \frac{k+1}{2k+2+1} \\ &= \frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{\big(2(k+1)-1\big)\big(2(k+1)+1\big)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2k+2-1)(2k+2+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} && \text{Hip. Ind.} \\ &= \frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k^2+3k)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k^2+k+2k)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k^2+k)+(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+1)+(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3. Pruebe que $4^n - 1$ es un múltiplo de 3 para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procedemos por inducción sobre n.

i) Se verifica para $n = 1$.

$$\begin{aligned} 4^{(1)} - 1 &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ii) Supongamos que la proposición es válida para $n = k$, es decir, suponemos que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que

$$4^k - 1 = 3p$$

iii) Probaremos que la proposición es válida para $n = k+1$, es decir, probaremos que $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $4^{k+1} - 1 = 3q$.

Recordemos que

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} y^i \qquad \text{Demostrado en clase}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4^{k+1} - 1^{k+1} \\ &= (4 - 1) \sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \cdot 1^i \\ &= 3 \sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \\ &= 3q, q \in \mathbb{N} && \text{Por hipótesis de inducción} \end{aligned}$$

Por tanto, $4^n - 1$ es un múltiplo de 3 para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4. Pruebe que $5^n - 3^n$ es un número par para tods $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Procedemos por inducción sobre n.

i) Se verifica para $n = 1$.

$$\begin{aligned} 5^{(1)} - 3^{(1)} &= 5 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ii) Supongamos que la proposición es válida para $n = k$, es decir, suponemos que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que

$$5^k - 3^k = 2p$$

iii) Probaremos que la proposición es válida para $n = k+1$, es decir, probaremos que $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $5^{k+1} - 3^{k+1} = 2p$.

Recordemos que

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} y^i \qquad \text{Demostrado en clase}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 3^{k+1} &= (5-3)\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i}\cdot 3^i \\ &= 2\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i}\cdot 3^i \\ &= 2q, q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por tanto, $5^n - 3^n$ es un número par para tods $n \in \mathbb{N}$. □

5. Pruebe que todo número natural $n \geq 7$ es igual a la suma de dos números; uno múltiplo de 3 y el otro múltiplo de 4.

Demostración: Procedemos por inducción sobre n.

i) Verificamos que se cumple para $n = 7$.

$$7 = 3 + 4$$

ii) Supongamos que la proposición es válida para $n = k > 7$, es decir, suponemos que $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tales que $k = 3p + 4q$.

iii) Probaremos que la proposición es válida para $n = k + 1 > 7$, es decir, suponemos que $\exists s, t \in \mathbb{N}$ tales que $k + 1 = 3s + 4t$. En efecto, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3q + 4p + 1 \\ &= 3q + 4p + \frac{4p}{4p} \\ &= 3q + \frac{4(p^2)}{p} + \frac{4p}{4p} \\ &= 3q + 4\left(\frac{p^2}{p} + \frac{p}{4p}\right) \\ &= 3q + 4\left(p + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3t + 4s \end{aligned}$$

6. Prube que si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (Esta desigualdad es conocida como *desigualdad de Bernoulli*).

Demostración: Por inducción sobre n.

i) Verificamos que la desigualdad se cumple para $n = 1$.

$$\begin{gathered} (1 + a)^1 \geq 1 + (1)a \\ 1 + a \geq 1 + a \end{gathered}$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = k$. Es decir, supongamos que

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka$$

iii) Demostraremos a partir de (ii) que

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k \cdot (1+a) \\
&\geq (1+ka)\cdot(1+a) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (1+a) + ka(1+a) \\
&= 1 + a + ka + ka^2 \\
&= 1 + (1+k)a + ka^2
\end{aligned}$$

Debido a que $k \in \mathbb{N}$ y $a^2 \geq 0$, sigue que $ka \geq 0$, entonces, de la igualdad anterior sigue que $1+(1+k)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$, y por transitividad, $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$. $\square$

7. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2n}$$

Demostración: Procederemos por inducción sobre n.

i) Verificamos que la desigualdad se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1^2} &< 2 - \frac{1}{2(1)} \\
\frac{1}{1} &< 2 - \frac{1}{2} \\
1 &< \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que la desigualdad es válida para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2k}$$

iii) Demostraremos a partir de (ii) que la desigualdad se cumple para $n = k+1$, osea

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2(k+1)}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\
&< 2 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{(k+1)^2} && \text{Hipótesis de inducción}
\end{aligned}$$