Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales

Torres Brito David Israel

August 21, 2022

1. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Neutro aditivo} \\
&= (a+b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}
$$

Debido a que el inverso aditivo es único, tenemos que $(-a) + (-b) = -(a+b)$. $\square$

2. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a - b &= b - a && \text{Hipótesis} \\
(a-b) + b &= (b-a) + b && \text{Ley de la cancelación} \\
a &= (b+b) - a && \text{Asociando} \\
a + a &= b + b && \text{Ley de la cancelación} \\
2a &= 2b && \text{Definición} \\
a &= b && \text{Ley de la cancelación}
\end{aligned}
$$

$\square$

3. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a-b) = b - a$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
-(a-b) &= -(a + (-b)) && \text{Notación} \\
&= (-a) + \big(-(-b)\big) && \text{Por ejercicio 1} \\
&= (-a) + (b) && \text{Unicidad del inverso aditivo} \\
&= b - a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}
$$

$\square$

4. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Primero demostraremos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot 0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Neutro aditivo} \\
&= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\
&= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{P. Distributiva} \\
&= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\
&= a + (-a) && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= 0 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

□

Ahora, demostramos el ejercicio 4. Supongamos que $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= b \cdot \big(a \cdot a^{-1}\big) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
&= a^{-1} \cdot 0 && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 && \text{Probado arriba}
\end{aligned}
$$

□

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
0 &= b^2 - b^2 && \text{Inverso aditivo} \\
&= a^2 - b^2 && \text{Por hipótesis} \\
&= a \cdot a - b \cdot b && \text{Definición} \\
&= (a \cdot a - b \cdot b) + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= (a \cdot a - b \cdot b) + (a \cdot b - a \cdot b) && \text{Inverso aditivo} \\
&= (a \cdot a - b \cdot b + a \cdot b) + (-a \cdot b) && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot a + a \cdot b - b \cdot b) + (-a \cdot b) && \text{Conmutatividad} \\
&= (a \cdot a + a \cdot b) + (-b \cdot b - a \cdot b) && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot a + a \cdot b) + (-b \cdot b) + (-a \cdot b) && \text{Notación} \\
&= (a \cdot a + a \cdot b) - (b \cdot b + a \cdot b) && \text{Por ejercicio 1} \\
&= a(a + b) - b(b + a) && \text{P. Distributiva} \\
&= (a + b) \cdot (a - b) && \text{P. Distributiva}
\end{aligned}
$$

Por el ejercicio 4, de la igualdad anterior tenemos que $a + b = 0$ o $a - b = 0$. Sumando inverso aditivo de b tenemos $a = -b$ o $a = b$. □

6. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son distintos de 0 y tales que $ab^{-1} = ba^{-1}$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración:

$ab^{-1} = ba^{-1}$	Por hipótesis
$ab^{-1} \cdot b = ba^{-1} \cdot b$	Ley de la cancelación
$a(b^{-1} \cdot b) = a^{-1}(b \cdot b)$	Asociando
$a = a^{-1}(b \cdot b)$	Identidad de la multiplicación
$a \cdot a = a^{-1}(b \cdot b) \cdot a$	Ley de la cancelación
$a \cdot a = (b \cdot b)(a^{-1} \cdot a)$	Asociando
$a \cdot a = b \cdot b$	Identidad de la multiplicación
$a^2 = b^2$	Definición

Por el ejercicio 5, la igualdad anterior implica que $a = b$ o $a = -b$. $\square$

7. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Pruebe su respuesta.

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Contraejemplo: $b = 0$. $\square$

(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$ o $b < a + b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = b = 0$; tanto $a < a + b$ como $b < a + b$ fallan en cumplirse. $\square$

(c) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $a + c < b + d$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 0$, $b = 2$ y $c = d = 1$, tenemos que se cumple la hipótesis $0 + 1 < 2 + 1$, pero la proposición $c < d$ es falsa. $\square$

(d) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $ac < bd$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 1$, $b = d = -1$ y $c = 0$, con lo que se cumple la hipótesis $(1)(0) = 0 < 1 = (-1)(-1)$, pero la proposición $a = 1 < -1 = b$ y $c = 0 < -1 = d$ es falsa. $\square$

(e) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = a$, entonces $b = 1$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 0$ y $b = -1$. En el ejercicio 4 demostramos que $ab = (0)(-1) = 0$, con lo que se cumple la hipótesis $0 = ab = a = 0$, pero $b \neq 1$. $\square$

(f) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 \leq b^2$, entonces $a \leq b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 2$ y $b = -2$, tenemos que la hipótesis se cumple $a^2 = 4 \leq 4 = b^2$, pero la proposición $a = 2 \leq -2$ es falsa. $\square$

8. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, entonces $a \leq {}^{(a+b)}/_{2} \leq b$.

Demostración: Notemos que:

$$\begin{aligned} a &\leq b && \text{Por hipótesis} \\ a + a &\leq b + a && \text{Ley de la cancelación} \\ 2a &\leq b + a && \text{Por definición} \\ 2a \cdot 2^{-1} &\leq (b + a) \cdot 2^{-1} && \text{Ley de la cancelación} \\ \frac{2a}{2} &\leq \frac{b + a}{2} && \text{Notación} \\ a &\leq \frac{b + a}{2} && \text{Ley de la cancelación} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} a &\leq b && \text{Por hipótesis} \\ a + b &\leq b + b && \text{Ley de la cancelación} \\ a + b &\leq 2b && \text{Por definición} \\ (a + b) \cdot 2^{-1} &\leq 2b \cdot 2^{-1} && \text{Ley de la cancelación} \\ \frac{a + b}{2} &\leq \frac{2b}{2} && \text{Notación} \\ \frac{a + b}{2} &\leq b && \text{Ley de la cancelación} \end{aligned}$$

Por lo anterior, $a \leq {}^{(a+b)}/_{2} \leq b$. $\square$

9. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$.

Primero, demostraremos que $(-1) \cdot a = -a$.

$$\begin{aligned} -a &= -a + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= -a + a \cdot 0 && \text{Demostrado en el ejercicio 4} \\ &= -a + a \cdot \big(1 + (-1)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= -a + \big(a \cdot 1 + a \cdot (-1)\big) && \text{P. Distributiva} \\ &= -a + \big(a + a \cdot (-1)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (-a + a) + a \cdot (-1) && \text{Asociatividad} \\ &= 0 + a \cdot (-1) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot (-1) && \text{Neutro aditivo} \\ &= (-1) \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Ahora, demostraremos que $(-a)(-b) = ab$.

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= (-a) \cdot \big((-1) \cdot b\big) && \text{Demostrado arriba} \\ &= \big((-a) \cdot (-1)\big) \cdot b && \text{Asociatividad} \\ &= \big((-1) \cdot (-a)\big) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\ &= -(-a) \cdot b && \text{Demostrado arriba} \\ &= a \cdot b && \text{Unicidad del inverso aditivo} \end{aligned}$$

Luego, demostraremos que $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$. Por casos:

a) Si $0 \leq a$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &\leq a \cdot a && \text{P. de los positivos} \\ 0 &\leq a \cdot a && \text{Demostrado en el ejercicio 4} \\ 0 &\leq a^2 && \text{Definición} \end{aligned}$$

b) Si $a < 0$, tenemos

$0 < -a$	P. de los positivos
$0(-a) < (-a)(-a)$	P. de los positivos
$0 < (-a)(-a)$	Demostrado en el ejercicio 4
$0 < aa$	Demostrado arriba
$0 < a^2$	Definición

En cualquier caso, $0 \leq a^2$.

Finalmente, probaremos el ejercicio 9.

$0 \leq (a-b)^2$	Demostrado arriba
$0 \leq (a-b)(a-b)$	Definición
$0 \leq (a-b)\big(a+(-b)\big)$	Notación
$0 \leq a(a-b)+(-b)(a-b)$	P. Distributiva
$0 \leq a\big(a+(-b)\big)+(-b)\big(a+(-b)\big)$	Notación
$0 \leq aa+a(-b)+a(-b)+(-b)(-b)$	P. Distributiva
$0 \leq aa+a(-b)+a(-b)+bb$	Demostrado arriba
$0 \leq a^2+2a(-b)+b^2$	Definición
$0 \leq a^2+2a(-1)b+b^2$	Demostrado arriba
$0 \leq a^2+(-1)2ab+b^2$	Conmutatividad
$0 \leq a^2+-2ab+b^2$	Demostrado arriba
$2ab \leq a^2+-2ab+b^2+2ab$	Ley de la cancelación
$2ab \leq a^2+b^2$	Inverso aditivo

$\square$