Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales
Torres Brito David Israel

August 18, 2022

1. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

2. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

3. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a-b) = b - a$.

4. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración

1.

$$\begin{aligned}
-(a+b) &= -(a\cdot 1 + b \cdot 1) && \text{Identidad multiplicación}\\
&= -(1\cdot(a+b)) && \text{P. Distributiva}\\
&= -1(a+b) && \text{Notación}\\
&= (-1\cdot a) + (-1\cdot b) && \text{P. Distributiva}\\
&= -(1\cdot a) + -(1\cdot b) && \text{Notación}\\
&= (-a) + (-b) && \text{Identidad multiplicación}
\end{aligned}$$

$\square$

2.

$$\begin{aligned}
a - b &= b - a && \text{Hipótesis}\\
(a-b) + b &= (b-a) + b && \text{Sumando } b \text{ ambos lados}\\
a &= (b+b) - a && \text{Asociando}\\
a + a &= b + b && \text{Sumando } a \text{ ambos lados}\\
2a &= 2b && \text{Definición}\\
a &= b && \text{Multiplicando } 2^{-1} \text{ ambos lados}
\end{aligned}$$

$\square$

3.

$$\begin{aligned}
-(a-b) &= -(a + (-b)) && \text{Notación}\\
&= (-a) + \big(-(-b)\big) && \text{Por ejercicio 1}\\
&= (-a) + (b) && \text{Inverso aditivo es único}\\
&= b - a && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

$\square$

4. Primero demostraremos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot 0 = 0$.

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Neutro aditivo} \\
&= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\
&= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{P. Distributiva} \\
&= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\
&= a + (-a) && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= 0 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

Ahora, supongamos que $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= b \cdot \big(a \cdot a^{-1}\big) && \text{Identidad de la multiplicación} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 \cdot a^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
&= a^{-1} \cdot 0 && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 && \text{Demostración}
\end{aligned}$$

□

5.

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 \\
a &= \sqrt{b^2} \\
a &= \pm b
\end{aligned}$$

□