Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales
Torres Brito David Israel

August 27, 2022

1. Encuentre todos los números reales que satisfagan las siguientes desigualdades:

(a) $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{aligned} (4-x)+2x-4 &< (3-2x)+2x-4 && \text{Ley de la cancelación} \\ 4+(-x+2x)-4 &< 3+(-2x+2x)-4 && \text{Asociatividad} \\ (-x+2x)+4-4 &< (-2x+2x)+3-4 && \text{Conmutatividad} \\ (-x+2x)+0 &< 0+3-4 && \text{Inverso aditivo} \\ -x+2x &< 3-4 && \text{Neutro aditivo} \\ x &< -1 && \text{Definición} \end{aligned}$$

(b) $5 - x^2 < -2$

$$\begin{aligned} (5-x^2)+x^2+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Ley de la cancelación} \\ 5+(-x^2+x^2)+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Asociatividad} \\ 5+0+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Inverso aditivo} \\ 5+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Neutro aditivo} \\ 5+2 &< x^2+(-2)+2 && \text{Conmutatividad} \\ 5+2 &< x^2+(-2+2) && \text{Asociatividad} \\ 5+2 &< x^2 && \text{Inverso aditivo} \\ 7 &< x^2 && \text{Definición} \end{aligned}$$

Sabemos que $0 < 7$, y por el ejercicio 4, $\sqrt{7} < \sqrt{x^2}$. Luego,

i) Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < x$.
ii) Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, por definición. Así, $\sqrt{7} < -x$. Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{7}+(x-\sqrt{7}) &< -x+(x-\sqrt{7}) && \text{Ley de la cancelación} \\ x+(\sqrt{7}-\sqrt{7}) &< (-x+x)-\sqrt{7} && \text{Asociando} \\ x+0 &< 0-\sqrt{7} && \text{Inverso aditivo} \\ x &< -\sqrt{7} && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

De este modo, $x < -\sqrt{7}$ o $\sqrt{7} < x$.

(c) $(x-1)(3+x)<0$

Caso (1): si $(x-1)<0$ y $(3+x)<0$,

$(x-1)+1<0+1$	Cancelación	$(3+x)-3<0-3$	Cancelación
$x+(-1+1)<0+1$	Asociando	$x+(3-3)<0-3$	Asociando
$x+0<0+1$	Inverso aditivo	$x+0<0-3$	Inverso aditivo
$x<1$	Neutro aditivo	$x<-3$	Neutro aditivo

Por lo que $x<-3$.

Caso (2): si $0<(x-1)$ y $0<(3+x)$,

$0+1<(x-1)+1$	Cancelación	$0-3<(3+x)-3$	Cancelación
$0+1<x+(-1+1)$	Asociando	$0-3<x+(3-3)$	Asociando
$0+1<x+0$	Inverso aditivo	$0-3<x+0$	Inverso aditivo
$1<x$	Neutro aditivo	$-3<x$	Neutro aditivo

Por lo que $1<x$.

Así $x<-3$ o $1<x$.

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} &> 0 && x\neq -1\\
(x-1)(x+1)^{-1} &> 0 && \text{Notación}\\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0\cdot(x+1) && \text{Ley de la cancelación}\\
(x-1)(x+1)^{-1}\cdot(x+1) &> 0 && \text{Demostrado anteriormente}\\
(x-1)\cdot 1 &> 0 && \text{Inverso multiplicativo}\\
(x-1) &> 0 && \text{Neutro multiplicativo}\\
(x-1)+1 &> 0+1 && \text{Ley de la cancelación}\\
x+0 &> 0+1 && \text{Inverso aditivo}\\
x &> 1 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

(e)

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}<0$$

Por definición, $x\neq 0$ y $1-x\neq 0$, por lo que $x\neq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
x^{-1}-(1-x)^{-1} &< 0 && \text{Notación}\\
x^{-1}-(1-x)^{-1}+(1-x)^{-1} &< 0+(1-x)^{-1} && \text{Ley de la cancelación}\\
x^{-1}+0 &< 0+(1-x)^{-1} && \text{Inverso aditivo}\\
x^{-1} &< (1-x)^{-1} && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

Caso (1): si $x>0$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
x^{-1}\cdot x &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
1 &< (1-x)^{-1}\cdot x && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

i) Si $0<(1-x)$, sigue que $x<1$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $(1-x) < 0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Demostrado anteriormente}\\
1\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
x &< 1-x && \text{Neutro multiplicativo}\\
x+x &< 1-x+x && \text{Ley de la cancelación}\\
x+x &< 1 && \text{Inverso aditivo}\\
2x &< 1 && \text{Definición}\\
x &< \frac{1}{2} && \text{Ley de la cancelación}
\end{aligned}$$

Caso (2): si $x < 0$, cambia el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-1}\cdot x &< x^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
(1-x)^{-1}\cdot x &< 1 && \text{Inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

i) Si $(1-x) < 0$, sigue que $1 < x$, pero esto contradice el supuesto initial.

ii) Si $0 < (1-x)$, preserva el orden al multiplicar, esto es:

$$\begin{aligned}
(1-x)\cdot(1-x)^{-1}\cdot x &< (1-x)\cdot x^{-1}\cdot x && \text{Demostrado anteriormente}\\
1\cdot x &< (1-x)\cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo}\\
x &< (1-x) && \text{Neutro multiplicativo}\\
x+x &< (1-x)+x && \text{Ley de la cancelación}\\
x+x &< 1 && \text{Inverso aditivo}\\
2x &< 1 && \text{Definición}\\
x &< \frac{1}{2} && \text{Ley de la cancelación}
\end{aligned}$$

En cualquier caso, $x < \frac{1}{2}$.

2. Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.

$$\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^2(x-y) + xy(x-y) + y^2(x-y) && \text{P. Distributiva}\\
&= x(x^2) - y(x^2) + x(xy) - y(xy) + x(y^2) - y(y^2) && \text{P. Distributiva}\\
&= x^3 - yx^2 + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3 && \text{Definición}\\
&= x^3 - +0 + 0 - y^3 && \text{Inverso aditivo}\\
&= x^3 - y^3 && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

3. Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$ son distintos de 0, entonces $x^2+xy+y^2 > 0$.

Supongamos que $x^2+xy+y^2 \leq 0$.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Luego,

i) Si $x^2+xy+y^2 = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 &= 0 && \text{Por ejercicio anterior}\\
x^3 - y^3 + y^3 &= 0 + y^3 && \text{Ley de la cancelación}\\
x^3 + 0 &= 0 + y^3 && \text{Inverso aditivo}\\
x^3 &= y^3 && \text{Neutro aditivo}\\
x &= y
\end{aligned}$$

De esto sigue que $x^2+xy+y^2 = x^2+x^2+x^2 = 3x^2$, y por hipótesis $3x^2 = 0$, lo que es una contradicción.

ii) Si $x^2+xy+y^2<0$, entonces

$x^3-y^3<0$	Por ejercicio anterior
$x^3-y^3+y^3<0+y^3$	Ley de la cancelación
$x^3+0<0+y^3$	Inverso aditivo
$x^3<y^3$	Neutro aditivo
$x<y$	

De esto sigue que $(x-y)<0$, por lo que $(x-y)(x^2+xy+y^2)>0=x^3-y^3$, lo que es una contradicción.

Por tanto, $x^2+xy+y^2>0$.

4. Pruebe que si $a,b\in\mathbb{R}$ son mayores o iguales a 0, entonces $a^2\leq b^2$ si y solo si $a\leq b$.

i) Si $a^2\leq b^2$,

$a^2+(-a^2)\leq b^2+(-a^2)$	Ley de la cancelación
$0\leq b^2-a^2$	Inverso aditivo
$0\leq bb-aa$	Definición
$0\leq bb-aa+0$	Neutro aditivo
$0\leq bb-aa+(ab-ab)$	Inverso aditivo
$0\leq (bb+ab)+(-ab-aa)$	Asociatividad
$0\leq (bb+ab)-(ab+aa)$	Demostrado previamente
$0\leq b(b+a)-a(b+a)$	P. Distributiva
$0\leq (b+a)(b-a)$	P. Distributiva

Por hipótesis, $a\geq 0$ y $b\geq 0$, y por propiedad de los positivos, $a+b\geq 0$. Sigue que:

$0\cdot(b+a)^{-1}\leq (b+a)^{-1}\cdot(b+a)(b-a)$	Ley de la cancelación
$0\leq (b+a)^{-1}\cdot(b+a)(b-a)$	Demostrado anteriormente
$0\leq 1\cdot(b-a)$	Inverso multiplicativo
$0\leq b-a$	Neutro multiplicativo
$0+a\leq b-a+a$	Ley de la cancelación
$0+a\leq b+0$	Inverso aditivo
$a\leq b$	Neutro aditivo

ii) Si $a\leq b$.

$a-a\leq b-a$	Ley de la cancelación
$0\leq b-a$	Inverso aditivo

Debido a que a y b son mayores o iguales que 0, por axioma de orden $a+b\geq 0$, de la desigualdad anterior obtenemos:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot (b+a) &\leq (b-a)\cdot(b+a) && \text{Ley de la multiplicación}\\
0 &\leq (b-a)\cdot(b+a) && \text{Ley de la multiplicación}\\
0 &\leq b(b-a)+a(b-a) && \text{P. Distributiva}\\
0 &\leq bb-ab+ab-aa && \text{P. Distributiva}\\
0 &\leq bb+0-aa && \text{Inverso aditivo}\\
0 &\leq bb-aa && \text{Neutro aditivo}\\
0+aa &\leq bb-aa+aa && \text{Ley de la cancelación}\\
aa &\leq bb+0 && \text{Inverso aditivo}\\
aa &\leq bb && \text{Neutro aditivo}\\
a^2 &\leq b^2 && \text{Definición}
\end{aligned}
$$

$\square$

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 \leq b^2$ si y sólo si $|a| \leq |b|$.

Demostración:

Sea $a^2 \leq b^2$.

- **i)** Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a \leq b$, y por definición, $a = |a|$ y $b = |b|$, es decir, $|a| \leq |b|$.
- **ii)** Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por defincíión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$. Similarmente, $b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.
- **iii)** Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por defincíión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Similarmente, $a^2 = |a||a|$. Luego, por hipótesis tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir, $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.
- **iv)** Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 = |a||a|$ y $(-b)(-b) = b^2 = |b||b|$. Luego, por hipótesis, tenemos que $|a||a| = a^2 \leq b^2 = |b||b|$, es decir $|a|^2 \leq |b|^2$. Como el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0, por el ejercicio 4 sigue que $|a| \leq |b|$.

Por otra parte, supongamos que $|a| \leq |b|$.

- **i)** Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$, por definición $|a| = a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = b$, es decir $a \leq b$, y por el ejercicio 4, de la hipótesis sigue que $a^2 \leq b^2$.
- **ii)** Si $a < 0$ y $0 \leq b$, por defincíión $|a| = -a$ y $|b| = b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = b$, es decir $-a \leq b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq b(-a)$. Similarmente, $(-a)b \leq b^2 = bb$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.
- **iii)** Si $0 \leq a$ y $b < 0$, por defincíión $|a| = a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $a \leq -b$. Notemos que $aa = a^2 \leq (-b)a$. Similarmente, $a(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.
- **iv)** Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Por hipótesis tenemos que $-a = |a| \leq |b| = -b$, es decir $-a \leq -b$. Notemos que $(-a)(-a) = a^2 \leq (-b)(-a)$. Similarmente, $(-a)(-b) \leq b^2 = (-b)(-b)$. Por transitividad, $a^2 \leq b^2$.

$\square$

6. En los siguientes incisos, escriba el mismo número quitando (al menos) un signo de valor absoluto.

(a) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}|$ (no use calculadora)

(b) $||\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}+\sqrt{7}||$ (no use calculadora)

(c) $||a-b|-|a|-|b||$

(d) $||a+b|+|c|-|a+b+c||$

(e) $|x^2-2xy+y^2|$

(f) $x-|x-|x||$

7. Calcule todos los números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $|x-3|=8$

(b) $|x+4|<2$

(c) $|x-||+|x+1|<2$

(d) $|x-1|+|x+1|>2$

(e) $|x-1||x+1|=0$

(f) $|x-1||x+2|=3$

8. Pruebe las siguientes identidades:

(a) Si $x\neq 0$, entonces $\left|x^{-1}\right|=|x|^{-1}$

$$\begin{aligned}
\left|x^{-1}\right| &= \left|\frac{1}{x}\right| && \text{Notación}\\
&= \frac{|1|}{|x|} && \text{Ejercicio siguiente}\\
&= \frac{1}{|x|} && 0<1\\
&= |x|^{-1} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Si $x\neq 0$, entonces $|y/x|=|y|/|x|$

i) Si $x\geq 0$ y $y>0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=y$. Además, $\frac{1}{y}>0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}\geq 0$ por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

ii) Si $x\geq 0$ y $b<0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=-b$. Además, $\frac{1}{y}<0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}\leq 0$, por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=-\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

iii) Si $x<0$ y $y>0$, entonces $|x|=-a$ y $|y|=y$. Además, $\frac{1}{y}>0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}<0$, por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=-\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

iv) Si $x<0$ y $b<0$, entonces $|x|=-a$ y $|y|=-b$. Además, $\frac{1}{y}<0$, de donde sigue que $\frac{x}{y}>0$ por lo que $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{x}{y}$. De este modo, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

9. Pruebe que si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$.

10. Pruebe que si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $\big||a|-|b|\big|\leq|a-b|$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned}
|(a-b)+b| &\leq |a-b|+|b|\\
|a| &\leq |a-b|+|b|\\
|a|-|b| &\leq |a-b| \qquad (1)
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
|(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| \\
|b| &\leq |b-a|+|a| \\
|b|-|a| &\leq |b-a| \\
-|b-a| &\leq |a|-|b| \\
-|a-b| &\leq |a|-|b| \qquad (2)
\end{aligned}$$

Finalmente, sabemos que $|a| \leq b$ si y solo si $-a \leq b \leq a$, y tomando (1) y (2), $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.