Sigma y Pi mayúsculas

Denotamos la suma de los elementos del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ como

$$\sum_{a \in A} a$$

Ejemplos:

1. $A = \{ 2, 1/3, 3 \}$

$$\sum_{a \in A} a = 2 + 1/3 + 3 = 16/3$$

2. $B = \{ 0 \}$

$$\sum_{b \in B} b = 0$$

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 0 & , \text{ si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

de la sumatoria. Llamamos al conjunto $\{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \}$, el conjunto iterable de $\sum_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera la sumatoria. El lector debería verificar este hecho.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{5} i &= (2) + \sum_{i=3}^{5} i \\ &= 2 + (3) + \sum_{i=4}^{5} i \\ &= 2 + 3 + (4) + \sum_{i=5}^{5} i && (*) \\ &= 2 + 3 + 4 + (5) + \sum_{i=6}^{5} i \\ &= 2 + 3 + 4 + 5 + 0 \\ &= 14 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{m=-3}^{-1} 2m &= 2(-3) + \sum_{m=-2}^{-1} 2m \\ &= -6 + 2(-2) + \sum_{m=-1}^{-1} 2m \qquad (\dagger) \\ &= -6 + -4 + 2(-1) + \sum_{m=0}^{-1} 2m \\ &= -6 + -4 + -2 + 0 \\ &= -12\end{aligned}$$

3.

$$\sum_{j=0}^{-1} j = 0$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} &= \frac{k}{(1)+1} + \sum_{n=2}^{3} \frac{k}{n+1} \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{(2)+1} + \sum_{n=3}^{3} \frac{k}{n+1} \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{(3)+1} + \sum_{n=4}^{3} \frac{k}{n+1} \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + 0 \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \\ &= \frac{13}{12}k\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} \right) &= \sum_{k=-1}^{1} \frac{13}{12}k \\ &= \frac{13}{12}(-1) + \sum_{k=0}^{1} \frac{13}{12}k \\ &= -\frac{13}{12} + \frac{13}{12}(0) + \sum_{k=1}^{1} \frac{13}{12}k \\ &= -\frac{13}{12} + 0 + \frac{13}{12}(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

El lector notará que, en el caso en que los límites inferior y superior son iguales $(*, \dagger)$, la imagen de la sumatoria es el elemento típico *evaluado* en el índice, es decir, tenemos la siguiente

Observación: Si $a = b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales de la sumatoria)}$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a - a) \} = \{ a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + 0 && \text{Definición} \\
&= f(a) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

□

A partir de esto tenemos que:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } a < b. \\ f(n) & \text{, si } a = b \\ 0 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

El lector notará también que la suma del primer termino hasta el ultimo es igual a la suma del ultimo hasta el primero, es decir, tenemos la siguiente

Proposición: Sea $(b - a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Sumatoria inversa)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b - a) = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + \sum_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a) + f(b) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) + f(a) && \text{Conmutatividad} \\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales} \\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) && b - a = 1 \Rightarrow b - 1 = a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a) + f(a+k+1) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1) + f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

□

Observación: Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b=a$, entonces $(b-a)=0$, y por índices iguales de la sumatoria se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n)$.
- Por definición, si $b<a$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = 0$, que en particular se verifica si $b-a \in \{ -n : n \in \mathbb{N} \}$.

A partir de esta observación y de la Sumatoria Inversa se tiene que

Definición: Si $(b-a) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } a > b \\ f(n) & , \text{ si } a = b \\ f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) & , \text{ si } a < b. \end{cases}$$

De este modo, siempre que la *distancia* entre los límites de la sumatoria sea un número entero, contaremos con una definición alternativa para la sumatoria. Dado que contamos con una definición que puede ser planteada de dos maneras, podemos utilizar cualquiera (de las dos) a conveniencia; por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{1} n &= -1 + \sum_{n=0}^{1} n \\
&= -1 + 0 + \sum_{n=1}^{1} n \\
&= -1 + 0 + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{1} n &= 1 + \sum_{n=-1}^{0} n \\
&= 1 + 0 + \sum_{n=-1}^{-1} n \\
&= 1 + 0 + -1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lista de Ejercicios 11 (LE11)

Sea $a, b, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a)

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n) \qquad \text{(Conmutatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I. Primero probaremos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, que la imagen de la sumatoria siempre es un número real; la motivación es que, al estar definida *recursivamente*, la función podría parecer asignar números reales a funciones, pero este no es el caso.

Por definición, si $a > b$, entonces, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = 0 \in \mathbb{R}$; si $a = b$, entonces $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = f(n) \in \mathbb{R}$. Para el caso $a < b$ procedemos por inducción:

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n)\\ &= f(n+1) + \sum_{n=a}^{a} f(n)\\ &= f(n+1) + f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+1) \in \mathbb{R}$ y $f(n) \in \mathbb{R}$ y la suma es cerrada en $\mathbb{R}$ se tiene que $\Big(f(n+1) + f(n)\Big) \in \mathbb{R}$, osea, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

ii) Supongamos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, con $b = a + k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)\\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+k+1) \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=a}^{a+k} f(n) \in \mathbb{R}$ (hip. ind.), se tiene que $\Big(f(n+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\Big) \in \mathbb{R}$, es decir, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

II. Finalmente demostramos la Conmutatividad de la sumatoria.
Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, sigue que

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

□

Corolario:

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) \cdot \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) \cdot \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

Demostración: Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, la igualdad se verifica por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$. □

b)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big) \qquad \text{(Asociatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) + g(n) \Big)$$

II) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = f(n) + g(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) + g(n) \Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} \Big(f(n) + g(n) \Big) &= \Big(f(a) + g(a) \Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1} \Big(f(n) + g(n) \Big) \\
&= f(a) + g(a) + \Big(f(a+1) + g(a+1) \Big) \\
&= \Big(f(a) + f(a+1) \Big) + \Big(g(a) + g(a+1) \Big) && \text{Asociatividad} \\
&= \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) \right) + \left(g(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} g(n) \right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+1} g(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n) + g(n) \Big) = \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} \Big(f(n) + g(n) \Big) &= \Big(f(a+k+1) + g(a+k+1) \Big) + \sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n) + g(n) \Big) \\
&= f(a+k+1) + g(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \left(f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \right) + \left(g(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n) \right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k+1} g(n)
\end{aligned}$$

$\square$

c) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(c \cdot f(n) \Big) \qquad \text{(Distributividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = c \cdot 0 = \sum_{n=a}^{b} \Big(c \cdot f(n) \Big)$$

II) Si $a = b$,

$$c \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) = c \cdot f(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(c \cdot f(n) \Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{a+1} \Big(c \cdot f(n) \Big) &= c \cdot f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} c \cdot f(n) \\ &= c \cdot f(a) + c \cdot f(a+1) \\ &= c \cdot \Big(f(a) + f(a+1) \Big) \\ &= c \cdot \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) \right) \\ &= c \cdot \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(c \cdot f(n) \Big) = c \cdot \sum_{n=a}^{a+k} f(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{a+k+1} \Big(c \cdot f(n) \Big) &= c \cdot f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} \Big(c \cdot f(n) \Big) \\ &= c \cdot f(a+k+1) + c \cdot \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Inducción} \\ &= c \cdot \left(f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \right) \\ &= c \cdot \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) \end{aligned}$$

□

Corolario: Sea $s, t \in \mathbb{R}$

i)

$$s \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) + t \cdot \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(s \cdot f(n) + t \cdot g(n) \Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} s \cdot \sum_{n=a}^{b} f(n) + t \cdot \sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} \Big(s \cdot f(n) \Big) + \sum_{n=a}^{b} \Big(t \cdot g(n) \Big) && \text{Distributividad de la sumatoria} \\ &= \sum_{n=a}^{b} \Big(s \cdot f(n) + t \cdot g(n) \Big) && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

□

ii)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) - \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b} \Big(f(n) - g(n) \Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) - \sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} f(n) + (-1)\sum_{n=a}^{b} g(n) \\ &= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + (-1)\cdot g(n)\Big) && \text{Por (i) de este corolario} \\ &= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) - g(n)\Big)\end{aligned}$$

□

d)

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right) = \left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

Demostración: Sea $n \in D(f)$ arbitrario pero fijo. Notemos que en la sumatoria $\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)$, $f(n)$ es constante, por lo que

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right) = \sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

De la misma manera, en la sumatoria (de índice n) $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\Big)$, se tiene que $\sum_{m=s}^{t} g(m)$ es constante, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right) &= \left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)\cdot\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \\ &= \left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)\end{aligned}$$

□

e) Sea $c \in \mathbb{R}$, si $a \le b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

Demostración:

I) Se comprueba para $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} c = c = 1\cdot c = (b-a+1)\cdot c$$

II) Si $a < b$ se tiene que

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\sum_{n=a}^{a+1} c = c + \sum_{n=a+1}^{a+1} c = c + c = 2c = (2+a-a)c = (1+1+a-a)c = \Big((a+1)-a+1\Big)c$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} c = \Big((a+k)-a+1\Big)c$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} c &= c + \sum_{n=a}^{a+k} c \\
&= c + \Big((a+k) - a + 1\Big)c && \text{Hip. Inducción} \\
&= \Big(1 + ((a+k) - a + 1)\Big)c \\
&= \Big((a+k+1) - a + 1\Big)c
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} c = 0 \neq (b-a+1)c$; únicamente en el caso que $c = 0$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

Definición: $(b-a+1)$ es el número de *iteraciones*, *cíclos*, o *sumandos* de la sumatoria $\sum_{n=a}^{b} f(n)$.

Corolario: Si $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demostración: $\sum_{i=1}^{n} c = \big((n-1)+1\big)c = nc$. $\square$

f) Si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) = f(b+1) - f(a) \qquad \text{Propiedad telescópica (de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) = f(n+1) - f(n) = f(b+1) - f(a)$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) &= \Big(f\big(a+1\big) - f(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\
&= \Big(f(a+1) - f(a)\Big) + \Big(f\big((a+1)+1\big) - f(a+1)\Big) \\
&= f\big((a+1)+1\big) - f(a)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) = f\big((a+k)+1\big) - f(a)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1)\Big) + \sum_{n=a}^{a+k} \Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\
&= \Big(f(a+k+1+1) - f(a+k+1)\Big) + f(a+k+1) - f(a) \\
&= f(a+k+1+1) - f(a)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n+1) - f(n)\Big) = 0 \neq f(b+1) - f(a)$ únicamente el caso en que $f(b+1) = f(a)$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

g) Si $s \leq j \leq t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Separar la suma)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \leq j \leq t$, entonces $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j-1} f(n) + \sum_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\ &= f(s) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) + \sum_{n=s+1}^{t} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+1} f(n) \\ &= f(j+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + f(j+1) && \text{Conmutatividad} \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que $\sum_{n=s}^{j+k} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+k+1} f(n) \\
&= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j+k} f(n) \\
&= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) + f(j+k+1) \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k+1} f(n) \\
&= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)
\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $s \leq j \leq t$, pues la proposición no es válida para todo $s \geq j \geq t$:

I) Si $s > j > t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

II) Si $s > j = t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t}$$

III) Si $s = j > t$,

i) $\sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) = f(n) + 0 = f(n)$.

ii) $\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0$.
El lector notará que para separar la suma en este caso, debe cumplirse que $f(n) = 0$, pero esto dependerá de cada función y de los íncides, por lo que en general, $f(n) \neq 0$, por ejemplo para cualquier sumatoria $\sum_{n=a}^{b} c$, donde $c \neq 0$.

Corolario:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) &= \sum_{n=0}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Separar la suma} \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} f(n) + \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Separar la suma} \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

□

h) Sea $\ell, m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

I) Notemos que si $c = 0$, la proposición es *tautológica*; por lo que, en adelante, suponemos que $c \neq 0$.

II) Si $a > b$, no importa qué valores tome ℓ o m, la proposición se verifica por definición:

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

III) Si $a = b$ y $m = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c)\\ &= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big)\\ &= f(\ell + 0 - c)\\ &= f(\ell - c)\\ &\neq f(\ell)\\ &= f(\ell + 0)\\ &= f(\ell + 0 \cdot a)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

IV) Si $a = b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c)\\ &= f\big(\ell + m(a+c) - c\big)\\ &= f\big(\ell + ma + mc - c\big)\\ &\neq f\big(\ell + ma\big)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

V) Si $a = b$ y $m = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c)\\ &= f\big(\ell + 1 \cdot (a+c) - c\big)\\ &= f(\ell + a)\\ &= f(\ell + 1 \cdot a)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)\end{aligned}$$

VI) Si $a < b$ y $m = 0$.

Para $b = a + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + 0 \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= f(\ell) + f(\ell) \\
&= 2f(\ell) \\
&\neq 2f(\ell - c) \\
&= f(\ell - c) + f(\ell - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + 0 \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

VII) Si $a < b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$, Para $b = a + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + f(\ell + m \cdot a) \\
&= f(\ell + ma + m) + f(\ell + ma) \\
&\neq f(\ell + ma + mc - c) + f(\ell + ma + mc + m - c) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + m \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

VIII) Si $a < b$, $m = 1$,

i) Si $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + n) \\
&= f\big(\ell + (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + (a+c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a+1+c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, supenmos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f(\ell + n - c)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(\ell + n) &= f\Big(\ell + (a+k+1)\Big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + (a+c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a+k+1+c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f(\ell + n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que en general, planteamos la proposición como sigue:
Si $c \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + n - c) \qquad \text{(Cambio de límites 1)}$$

i) Sea $c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - n + c\big) \qquad \text{(Cambio de límites 2)}$$

Demostración:

i) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - n + c\big)$$

ii) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-n+c\big) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f\big(m-n+c\big)\\ &= f\big(m-(a+c)+c\big)\\ &= f\big(m-a-c+c\big)\\ &= f(m-a)\\ &= \sum_{n=a}^{a} f(m-n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(m-n)\end{aligned}$$

iii) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m-n+c\big) &= f\big(m-(a+c)+c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m-n+c\big)\\ &= f(m-a) + f\big(m-(a+c+1)+c\big)\\ &= f(m-a) + f\big(m-a-c-1+c\big)\\ &= f(m-a) + f(m-a-1)\\ &= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big)\\ &= f(m-a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(m-n)\\ &= \sum_{n=a}^{a+1} f(m-n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m-n+c\big)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m-n+c\big) &= f\big(m-(a+k+1+c)+c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-n+c\big)\\ &= f\big(m-a-k-1-c+c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-n+c\big)\\ &= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-n+c\big)\\ &= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) && \text{Hip. Ind.}\\ &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(m-n)\end{aligned}$$

□

j) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm n \mp c\big) \qquad \text{Cambio de índice (de la sumatoria)}$$

Demostración:

i) Por el cambio de límites 1 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m+n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m+n-c\big)$$

ii) Por el cambio de límites 2 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m-n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-n+c\big)$$

□

k)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b-a} f(b-n)$$

Demostración:

I) Si $b < a$, entonces $b-a<0$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} f(n)$$

II) Si $b=a$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{0} f(b-n)\\ &= f(b-0)\\ &= f(b)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(n)\end{aligned}$$

III) Si $b>a$,

i) Se verifica para $b=a+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{(a+1)-a} f(a+1-n)\\ &= \sum_{n=0}^{1} f(a+1-n)\\ &= f(a+1-0) + \sum_{n=1}^{1} f(a+1-n)\\ &= f(a+1) + f(a+1-1)\\ &= f(a+1) + f(a)\\ &= f(a) + f(a+1)\\ &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n)\\ &= \sum_{n=a}^{b} f(n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(n) = \sum_{n=0}^{(a+k)-a} f(a+k-n) = \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n)$$

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) & \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) & \text{Hip. Ind.} \\
&= f\big(a+k-(-1)\big) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) & \\
&= \sum_{n=-1}^{k} f(a+k-n) & \text{Definición (de sumatoria)} \\
&= \sum_{n=-1+(1)}^{k+(1)} f\big(a+k-n+1\big) & \text{Cambio de índice} \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} f(a+k+1-n) &
\end{aligned}$$

□

Corolario:

$$\sum_{n=0}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(b-n)$$

Demostración: La porposición se verifica por el teorema para $a = 0$. □

Una nota sobre la notación sigma

Abuso de la notación en el cambio de índice

Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, hemos probado que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm n \mp c\big)$$

El lector encontrará que, en ocasiones, en lugar de utilizar este teorema simplemente se trabaja con susbsituciones sobre el índice, especialmente para funciones identidad.

Ejemplo 1. Consideremos la sumatoria

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{n=0}^{b-1} (n+1)$$

Sea $m = n - 1$, entonces $m + 1 = n$. Cuando el límite inferior $n = 1$, se tiene que $m = 1 - 1 = 0$. Luego, al considerar la *distancia* entre los límites, tenemos que

$$\begin{aligned}
b - n &= b - (m+1) \\
&= (b-1) - m
\end{aligned}$$

Al sustituir n por m en la sumatoria, tenemos

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{m=0}^{b-1} (m+1)$$

Luego, *abusando* de la notación,

$$\sum_{m=0}^{b-1} (m+1) = \sum_{n=0}^{b-1} (n+1)$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{n=0}^{b-1} (n+1)$$

Sin embargo, utilizando el Cambio de índice (de la sumatoria) es claro y no se incurre en el abuso de notación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{b} n &= \sum_{n=1-1}^{b-1} (n-(-1)) \\ &= \sum_{n=0}^{b-1} (n+1) \end{aligned}$$

Extensión

Usualmente, el alcance de una suma se extiende hasta el primer símbolo de suma o resta que no está entre paréntesis o que no es parte de algún término más amplio (por ejemplo, en el numerador de una fracción), de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \neq \sum_{i=1}^{n} \big(f(i)+1\big)$$

dado que esto puede resultar confuso, generalmente es más seguro encerrar el argumento de la sumatoria entre paréntesis (como en la segunda forma arriba) o mover los términos finales al principio (como en la tercera forma arriba). Una excepción (a la confusión) es cuando se suman dos sumas, como en

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

Variables indexadas

Definición: Sea $I, A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función dada por

$$\begin{aligned} f : I &\to A \\ i &\mapsto a_i = f(i) \end{aligned}$$

donde $i \in I$, y la imagen $f(i)$ de i bajo la función f es denotada por a_i. El símbolo a_i indica el elemento de A indexado por $i \in I$. La función f establece una familia de elementos en A indexada por I, denotada por $(a_i)_{i\in I}$, o simplemente (a_i) si el conjunto índice es conocido.

Usualmente la sumatoria se presenta con la notación índice para conjuntos finitos indexados. Por ejemplo,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

en la cual se tiene una función

$$\begin{aligned} f : N &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

donde $N \subseteq \mathbb{N}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo generalizada)}$$

Demostración:

i) Se verifica para $n = 2$, por la desigualdad del triángulo,

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i\right| = \left|a_1 + \sum_{i=2}^{2} a_i\right| = |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| = |a_1| + \sum_{i=2}^{2} |a_i| = \sum_{i=1}^{2} |a_i|$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$$

iii) Notemos que $|a_{k+1}| \leq |a_{k+1}|$. Luego,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i\right| \\ &\leq |a_{k+1}| + \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| && \text{Desigualdad del triángulo} \\ &\leq |a_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k} |a_i| && \text{Suma } \textit{vertical} \text{ de desigualdades} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i| \end{aligned}$$

□

Límites no enteros

En principio, la sumatoria está bien definida para casos en los que los límites no son enteros, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1/2}^{9/4} i &= 1/2 + \sum_{i=3/2}^{9/4} i \\ &= 1/2 + 3/2 + \sum_{i=5/2}^{9/4} i \\ &= 1/2 + 3/2 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sin embargo, este uso no es común. El ejemplo también sirve para ilustrar que, para la segunda definición de sumatoria, es necesario que la *distancia* entre el límite superior y el inferior sea un entero. Por ejemplo, tratar lo siguiente sería un error

$$\begin{aligned}\sum_{i=1/2}^{9/4} i &\neq 9/4 + \sum_{i=1/2}^{5/4} i \\ &\neq 9/4 + 5/4 + \sum_{i=1/2}^{1/4} i \\ &\neq 9/4 + 5/4 + 0 \\ &= 14/4 \\ &= 7/2 \\ &= 3 + 1/2\end{aligned}$$

Sumatorias anidadas

Considere las siguientes sumatorias anidadas:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n}}^{\text{A}}\overbrace{\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right)}^{\text{B}}$$

Notemos que la variable iterable (i) de la sumatoria A, determina el valor del límite superior de la sumatoria B, por lo que únicamente requerimos un valor n para el límite superior de la sumatoria A para realizar el cálculo. Sea $n = 1$. Procediendo con la (primera) definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) + \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\ &= (1)(0+1) + \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) \\ &= (1)(1) + (1+1)(0+1) + \sum_{j=1}^{1}(1+1)(j+1) \\ &= 1 + 2 + (1+1)(1+1) \\ &= 1 + 2 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

Es claro que, en este caso ($n = 1$), la distancia entre los límites de las sumatorias es un número entero, por lo que podemos proceder con la segunda definición de la sumatoria:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) + \sum_{i=0}^{0}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1+1)(1+1) + \sum_{j=0}^{0}(1+1)(j+1) + \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) \\
&= (2)(2) + (1+1)(0+1) + (0+1)(0+1) \\
&= 4+2+1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

También podríamos proceder con una definición para la sumatoria A y con otra para B. El lector debería verificar este hecho.

Notación pi

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \,\}$. Definimos al productorio de a hasta b de f como sigue:

$$
\prod_{n=a}^{b} f(n) \coloneqq \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } b \geq a \\ 1 & , \text{ si } b < a. \end{cases}
$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

del producto. Llamamos al conjunto $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \,\}$, el conjunto iterable de $\prod_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera el productorio. El lector debería verificar este hecho.

Lista de Ejercicios

a) Si $a = b$, entonces

$$
\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales del productorio)}
$$

Demostración: Notemos que si $a = b$ se tiene que $\prod_{n=a}^{b} f(n) = \prod_{n=a}^{a} f(n)$, por lo que el conjunto iterable al que pertenece n está dado por $\{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (a-a) \,\} = \{\, a+m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq 0 \,\}$, lo que implica que $m = 0$, por lo que $n = a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} f(n) &= \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) \cdot 1 && \text{Definición}\\
&= f(a)\\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: A partir de este resultado tenemos que:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } a < b.\\ f(n) & \text{, si } a = b\\ 1 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

b) Sea $(b-a) \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Productorio inverso)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a) = 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) \cdot \prod_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) \cdot f(b) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) \cdot f(a) && \text{Conmutatividad}\\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{a} f(n) && \text{Índices iguales}\\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) = f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b - a = k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) \cdot f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1) \cdot f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k} f(n)\\
&= f(a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b) \cdot \prod_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

c)

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right) \qquad \text{(Propiedad multiplicativa)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = 1 = (1)(1) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

II) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(n)g(n) = f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} g(n)\right)$$

III) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} f(n)g(n) &= f(a)g(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)g(n) \\
&= f(a)g(a) \cdot f(a+1)g(a+1) \\
&= f(a)f(a+1) \cdot g(a)g(a+1) \\
&= f(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) \cdot g(a)\left(\prod_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) = \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)g(n) &= f(a+k+1)g(a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(n)g(n) \\
&= f(a+k+1)g(a+k+1) \cdot \left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \cdot g(a+k+1)\left(\prod_{n=a}^{a+k} g(n)\right) \\
&= \left(\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{a+k+1} g(n)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: En particular, para una función constante $g(n) = c$, se tiene que

$$\prod_{n=a}^{b} \big(f(n) \cdot c\big) = \left(\prod_{n=a}^{b} f(n)\right)\left(\prod_{n=a}^{b} c\right)$$

d) Si $g(n) \neq 0$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\prod_{n=a}^{b} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)} \qquad \text{(División de productorios)}$$

Demostración:

I) Si $b < a$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 = \frac{1}{1} = \frac{\prod_{n=a}^{b} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)}$$

II) Si $b = a$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\prod_{n=a}^{b} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)}$$

III) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n)}{g(n)} &= \prod_{n=a}^{a+1} \frac{f(n)}{g(n)} \\
&= \frac{f(a+1)}{g(a+1)} \cdot \prod_{a}^{a} \frac{f(n)}{g(n)} && \text{Productorio inverso} \\
&= \frac{f(a+1)}{g(a+1)} \cdot \frac{f(a)}{g(a)} \\
&= \frac{f(a+1)}{g(a+1)} \cdot \frac{\prod_{n=a}^{a} f(n)}{\prod_{n=a}^{a} g(n)} \\
&= \frac{\prod_{n=a}^{a+1} f(n)}{\prod_{n=a}^{a+1} g(n)} \\
&= \frac{\prod_{n=a}^{b} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\prod_{n=a}^{a+k} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} \frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{f(a+k+1)}{g(a+k+1)} \cdot \prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n)}{g(n)} && \text{Productorio inverso} \\
&= \frac{f(a+k+1)}{g(a+k+1)} \cdot \frac{\prod_{n=a}^{a+k} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)} && \text{Hip. Ind.} \\
&= \frac{\prod_{n=a}^{a+k+1} f(n)}{\prod_{n=a}^{b} g(n)}
\end{aligned}$$

$\square$

e) Si $f(n) \neq 0$ y $a \leq b$, entonces

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{f(a)} \qquad \text{Propiedad telescópica (del productorio)}$$

Demostración:

I) Si $a = b$,

$$\prod_{n=a}^{b} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(b+1)}{a}$$

II) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+1)}{f(a)} \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+1)}{f(a)} \cdot \frac{f(a+1+1)}{f(a+1)} \\
&= \frac{f(a+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que si $b - a = k$, entonces

$$\prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(a+k+1)}{f(a)}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)} \cdot \prod_{n=a}^{a+k} \frac{f(n+1)}{f(n)} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a+k+1)} \cdot \frac{f(a+k+1)}{f(a)} && \text{Hip. Ind.} \\
&= \frac{f(a+k+1+1)}{f(a)}
\end{aligned}$$

□

f) Si $s \leq j \leq t$,

$$\prod_{n=s}^{t} f(n) = \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Separar el producto)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \leq j \leq t$, entonces $\prod_{n=s}^{t} f(n) = \prod_{n=s}^{j-1} f(n) \cdot \prod_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia.

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\
&= f(s) \cdot 1 \\
&= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n)
\end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=s}^{t} f(n) &= \prod_{n=s}^{j} f(n) \\
&= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot 1 \\
&= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n)
\end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\prod_{n=s}^{t} f(n) = f(s) \cdot \prod_{n=s+1}^{t} f(n)$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n)$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\prod_{n=s}^{t} f(n) = \prod_{n=s}^{j+1} f(n)$$
$$= f(j+1) \cdot \prod_{n=s}^{j} f(n)$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot f(j+1) \qquad \text{Conmutatividad}$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n)$$

ii) Supongamos que $\prod_{n=s}^{j+k} f(n) = \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\prod_{n=s}^{t} f(n) = \prod_{n=s}^{j+k+1} f(n)$$
$$= f(j+k+1) \cdot \prod_{n=s}^{j+k} f(n)$$
$$= f(j+k+1) \cdot \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{j+k} f(n) \qquad \text{Hip. Ind.}$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{j+k} f(n) \cdot f(j+k+1)$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{j+k+1} f(n)$$
$$= \prod_{n=s}^{j} f(n) \cdot \prod_{n=j+1}^{t} f(n)$$

$\square$

g) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(m \pm n) = \prod_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm n \mp c\big) \qquad \text{Cambio de índice (del productorio)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\prod_{n=a}^{b} f(m \pm n) = 1 = \prod_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm n \mp c\big)$$

II) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm n \mp c\big) &= \prod_{n=a+c}^{a+c} f\big(m \pm n \mp c\big) \\
&= f\Big(m \pm (a+c) \mp c\Big) \\
&= f(m \pm a) \\
&= \prod_{n=a}^{a} f(m \pm a) \\
&= \prod_{n=a}^{b} f(m \pm n)
\end{aligned}$$

III) Si $a < b$, se verifica para $b - a = 1$, es decir, tomamos el índice superior $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m \pm n \mp c\big) &= f\Big(m \pm \big((a+c) - c\big)\Big) \cdot \prod_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m \pm n \mp c\big) \\
&= f(m \pm a) \cdot f\Big(m \pm (a+c) \mp c)\Big) \\
&= f(m \pm a) \cdot f(m \pm (a+1)) \\
&= f(m \pm a) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} f(m \pm n) \\
&= \prod_{n=a}^{a+1} f(m \pm n)
\end{aligned}$$

IV) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\prod_{n=a}^{a+k} f(m \pm n) = \prod_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m \pm n \mp c\big)$$

V) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m \pm n \mp c\big) &= f(m \pm (a+k+1+c) \mp c) \cdot \prod_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m \pm n \mp c\big) \\
&= f\big(m \pm (a+k+1)\big) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} f(m \pm n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \prod_{n=a}^{a+k+1} f(m \pm n)
\end{aligned}$$

$\square$

h)

$$\prod_{n=a}^{b} n = \prod_{n=a}^{b} b + a - n \qquad \text{(Índices en el argumento)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $b < a$,

$$\prod_{n=a}^{b} n = 1 = \prod_{n=a}^{b} b + a - n$$

II) Si $b = a$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{b} n &= \prod_{n=a}^{a} n \\
&= a && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= b + a - b \\
&= \prod_{n=b}^{b} b + a - n && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= \prod_{n=a}^{b} b + a - n
\end{aligned}$$

III) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+1} n &= (a+1) \cdot \prod_{n=a}^{a} n && \text{Productorio inverso} \\
&= (a+1) \cdot a && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= (a+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+1} (a+1) + a - n && \text{Índices iguales del productorio} \\
&= \prod_{n=a}^{a+1} (a+1) + a - n \\
&= \prod_{n=a}^{a+1} b + a - n
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, es decir,

$$\prod_{n=a}^{a+k} n = \prod_{n=a}^{a+k} (a+k) + a - n$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\prod_{n=a}^{a+k+1} n &= (a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} n && \text{Productorio inverso} \\
&= (a+k+1) \cdot \prod_{n=a}^{a+k} (a+k) + a - n && \text{Hip. Ind.} \\
&= (a+k+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{(a+k)+1} (a+k) + a - n + 1 && \text{Cambio de índice} \\
&= (a+k+1) \cdot \prod_{n=a+1}^{a+k+1} (a+k+1) + a - n \\
&= \prod_{n=a}^{a+k+1} (a+k+1) + a - n && \text{Productorio inverso}
\end{aligned}$$

$\square$

Potenciación

Definición: Sea a un número real y n un entero no negativo, y f una función dada por $f(n) = a$. Definimos la enésima potencia de a como sigue:

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$$

Decimos que a es la base, y que n es el exponente.

Observación: Sea $a \in \mathbb{R}$,

- $a^1 = \prod_{i=1}^{1} a = a$.
- $a^0 = \prod_{i=1}^{0} a = 1$.

Notación: Sea $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Observación:

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$, demuestre lo siguiente:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. (Potencias de misma base)

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^0 \cdot a^n \\ &= 1 \cdot a^n \\ &= a^n \\ &= a^{n+0} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

II) Si $m, n \in \mathbb{N}$,

i) Se verifica para $n = 1$,

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= \prod_{i=1}^{m+1} a \\ &= a \cdot \prod_{i=1}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Definición} \\ &= a^m \cdot a^1 \end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $k \in A$, tenemos que $a^{m+k} = a^m \cdot a^k$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
a^{m+(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m+(k+1)} a \\
&= a \cdot \prod_{i=1}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a \cdot a^{m+k} && \text{Definición} \\
&= a \cdot a^m \cdot a^k && \text{Hip. Ind.} \\
&= a^m \cdot a \cdot a^k \\
&= a^m \cdot a \cdot \prod_{i=1}^{k} a && \text{Definición} \\
&= a^m \cdot \prod_{i=1}^{k+1} a && \text{Productorio inverso} \\
&= a^m \cdot a^{k+1} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Por tanto, $k+1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

□

b) $1^n = 1$. (Identidad multiplicativa)

Demostración:

I) $1^0 = 1$.

II) **i)** Observemos que $1^1 = 1$.

ii) Supongamos que $1^k = 1$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1^k \cdot 1^1 && \text{Potencias de misma base} \\
&= 1^k \cdot 1 && \text{Observación} \\
&= 1^k \\
&= 1 && \text{Hip. Inducción}
\end{aligned}$$

□

c) Si $b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. (Potencia de un *cociente*)

Demostración:

I) Si $n = 0$, se tiene que $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$.

II) Sea $A = \left\{ n \;\middle|\; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \right\}$.

i) Notemos que $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$. Por lo que $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$, tenemos $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 && \text{Potencias de misma base} \\
&= \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) && \text{(i) y (ii)} \\
&= \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} \\
&= \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} && \text{Potencias de misma base}
\end{aligned}$$

$\square$

d) $(ab)^n = a^n b^n$. (Potencia de un producto)

Demostración:

I) Si $n = 0$, $(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$.

II) **i)** Se verifica para $n = 1$, pues $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.

ii) Supongamos que la igualdad se verifica para $n = k$, es decir, suponemos que

$$(ab)^k = a^k b^k$$

iii) Si $n = k + 1$ sigue que

$$\begin{aligned} (ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) && \text{Potencias de misma base} \\ &= a^k b^k (ab) && \text{Hip. Inducción} \\ &= \left(a^k \cdot a\right)\left(b^k \cdot b^k\right) \\ &= a^{k+1} b^{k+1} && \text{Potencias de misma base} \end{aligned}$$

$\square$

e) $a^{mn} = (a^m)^n$. (Potencia de una potencia)

Demostración:

I) Si $m = 0$, $a^{0 \cdot n} = 1 = 1^n = (a^0)^n$. Análogamente, si $n = 0$, $a^{m \cdot 0} = 1 = (a^m)^0$.

II) Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A := \{ m \mid (a^m)^n = a^{mn} \}$.

i) Es claro que $1 \in A$, pues $(a^1)^n = (a)^n = a^n = a^{1 \cdot n}$.

ii) Si $k \in A$ tenemos que $(a^k)^n = a^{kn}$.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \left(a^{k+1}\right)^n &= \left(a^k \cdot a\right)^n && \text{Potencias de misma base} \\ &= \left(a^k\right)^n \cdot a^n && \text{Potencia de un producto} \\ &= a^{kn} \cdot a^n && \text{Hip. Inducción} \\ &= a^{kn+n} && \text{Potencias de misma base} \\ &= a^{(k+1)n} && \text{Distributividad} \end{aligned}$$

Por tanto, $k + 1 \in A$.

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$.

$\square$

f) Sea $a \neq 0$, se verifica que

$$a^{-mn} = \left(a^{-m}\right)^n = \left(a^{-n}\right)^m \qquad \text{(Potencia negativa)}$$

Demostración:

I) Sin pérdida de generalidad, sea $m = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} a^{-mn} &= a^0 \\ &= 1 \\ &= \left(a^{-n}\right)^0 \\ &= \left(a^{-n}\right)^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{-mn} &= a^0 \\ &= 1 \\ &= 1^n \\ &= \left(a^0\right)^n \\ &= \left(a^{-m}\right)^n \end{aligned}$$

II) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{\, n \mid a^{-mn} = (a^{-m})^n = (a^{-n})^m \,\}$.

i) Notemos que

$$a^{-m\cdot 1} = a^{-m} = \left(a^{-m}\right)^1$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^1}\right)^m && \text{Definición} \\
&= \frac{1^m}{a^m} && \text{Potencia de un cociente} \\
&= \frac{1}{a^m} && \text{Identidad multiplicativa} \\
&= a^{-m} && \text{Definición} \\
&= a^{-m\cdot 1}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

ii) Supongamos que

$$a^{-mk} = (a^{-m})^k = (a^{-k})^m$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(a^{-(k+1)}\right)^m &= \left(\frac{1}{a^{k+1}}\right)^m && \text{Definición} \\
&= \frac{1^m}{\left(a^{k+1}\right)^m} && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\left(a^{-m}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{a^m}\right)^{k+1} && \text{Notación} \\
&= \frac{1}{\left(a^m\right)^{k+1}} && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \frac{1}{a^{m(k+1)}} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= a^{-m(k+1)} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

$\square$

g) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \left\{\, n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \,\right\}$.

i) Si $m = 1$, se tiene que

$$a^{m-1} = a^{1-1} = a^0 = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a^m}{a^1}$$

ii) Si $m > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^m}{a^1} &= \frac{a^m}{a} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m} a}{a} && \text{Defινción} \\
&= \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{m-1} a}{a} && \text{Produdctorio inverso} \\
&= \prod_{i=1}^{m-1} a \\
&= a^{m-1} && \text{Definción}
\end{aligned}$$

Por lo que $1 \in A$.

iii) Supongamos que $\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$.

iv) Notemos que

$$\begin{aligned}
a^{m-(k+1)} &= \prod_{i=1}^{m-(k+1)} a && \text{Definición} \\
&= \prod_{i=1}^{m-k-1} a \\
&= \left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m-k-1}\right) a \\
&= \frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot \prod_{i=1}^{m-k-1}\right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \prod_{i=1}^{m-k} a && \text{Productorio inverso} \\
&= \frac{1}{a} \cdot a^{m-k} && \text{Definición} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^m}{a^k} && \text{Hip. Inducción} \\
&= \frac{a^m}{a \cdot a^k} \\
&= \frac{a^m}{a^{k+1}} && \text{Potencia de misma base}
\end{aligned}$$

□

Nota: Con esta prueba se generaliza la Potencia de misma base para $\mathbb{Z}$, pues

i) Sin pérdida de generalidad, si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{a^n}{a^{-m}}$, por notación, donde $-m \in \mathbb{N}$, y como hemos probado,

$$\frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$

ii) Si $m, n \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$ donde $-m, -n \in \mathbb{N}$, y como hemos probado

$$\frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

h) Generalize la Potencia de un *cociente* para $\mathbb{Z}$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} && -n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \frac{b^{-n}}{a^{-n}} && \text{Regla del sandwich} \\
&= \frac{a^n}{b^{-(-n)}} && \text{Notación} \\
&= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}$$

i) Generalize la Potencia de un producto para $\mathbb{Z}$. Sea $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned}
(ab)^n &= \frac{1}{ab^{-n}} && \text{Notación } (-n \in \mathbb{N}) \\
&= \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} && \text{Potencia de un producto} \\
&= a^n b^n && \text{Observación}
\end{aligned}$$

j) Generalize la Potencia de una potencia para $\mathbb{Z}$.

i) Si $m \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n && \text{Notación} \\
&= \frac{1^n}{(a^{-m})^n} && \text{Potencia de un cociente} \\
&= \frac{1}{a^{-mn}} && \text{Potencia negativa} \\
&= a^{mn} && \text{Observación}
\end{aligned}$$

ii) Si $n \in \mathbb{Z}^-$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \frac{1}{(a^m)^{-n}} && \text{Notación} \\
&= \frac{1}{(a^{-mn})} && \text{Potencia negativa} \\
&= a^{mn} && \text{Notación}
\end{aligned}$$

iii) Si $n, m \in \mathbb{Z}^-$, se tiene que $mn \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $a^{mn} = (a^m)^n$, como hemos probado.

k) Sea $a, b \neq 0$, entonces $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{Potencia de un } \textit{cociente} \\
&= \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^n && \text{Corolario de regla del sandwich} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{-1\cdot n} && \text{Potencia de una potencia} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

$\square$

Una nota sobre la potenciación

Hemos definidio la potencia a partir de un índice inferior igual a 1, sin embargo, podemos extender la definición para índices $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$. Dada una función $f(n) = a$ tenemos que

$$\prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Demostración:

I) Si $m = n$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^{n} a &= a && \text{Índices iguales del productorio} \\ &= a^1 \\ &= a^{0+1} \\ &= a^{n-m+1} \end{aligned}$$

II) Si $m < n$,

i) Se verifica para $n = m + 1$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^{m+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^m && \text{Índices iguales del productorio} \\ &= a^{m+1} && \text{Potencias de misma base} \\ &= a^{(m+1)-m+1} \end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $n = m + k$, es decir, suponemos que

$$\prod_{i=m}^{m+k} a = a^{(m+k)-m+1}$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} \prod_{i=m}^{m+k+1} a &= a \cdot \prod_{i=m}^{m+k} a && \text{Productorio inverso} \\ &= a \cdot a^{(m+k)-m+1} && \text{Hip. Ind.} \\ &= a^{(m+k+1)-m+1} && \text{Potencias de misma base} \end{aligned}$$

$\square$

Observación: Como $m \leq n$, $n - m + 1$ es un número natural, por lo que a^{n-m+1} está bien definido.

Demostración: Dado que $m \leq n$, si $m = n$, se tiene que $n - m + 1 = 1$, y si $m < n$ sigue que $n - m \in \mathbb{R}^+$, y por definición (de $\mathbb{Z}$), $n - m \in \mathbb{N}$, y así $n - m + 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Nota: El lector notará que $n-m+1$ es el número de *iteraciones*, o *cíclos*, análogo al definido en la sumatoria.

Factorial

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, denotamos al factorial de n como

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Nota: Hemos definido al factorial para números enteros no negativos para evitar expresiones de la forma $-n!$ cuando $n \in \mathbb{Z}^+$.

Observación: $0! = 1$.

Lista de ejercicios (LE)

Sea $n, k \in \mathbb{Z}$. Demuestre lo siguiente

a) Sea $n \geq 0$,

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad \text{(Recurrencia del factorial)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
n! &= \prod_{i=1}^{n} i && \text{Definición} \\
&= n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} i && \text{Productorio inverso} \\
&= n \cdot (n-1)! && \text{Definición}
\end{aligned}$$

$\square$

Observación:

- $(m+1)! = m!(m+1)$.
- $n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$.

b) Si $0 \leq n$,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} (n+1-i) \qquad \text{(Forma multiplicativa del factorial)}$$

Demostración:

I) Se vericia para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
n! &= \prod_{i=1}^{n} i && \text{Definición (de factorial)} \\
&= 1 && \text{Definición (de productorio)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (n+1-i) && \text{Definición (de productorio)}
\end{aligned}$$

II) Si $0 < n$,

i) Se verifica para $n = 1$,

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{i=1}^{n} i && \text{Definición (de factorial)} \\ &= 1 \\ &= n + 1 - 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \end{aligned}$$

ii) Supongamos que se cumple para $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$k! = \prod_{i=1}^{k} k + 1 - i$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \cdot k! && \text{Recurrencia del factorial} \\ &= (k+1) \cdot \prod_{i=1}^{k} (k + 1 - i) && \text{Hip. Ind.} \\ &= (k+1) \cdot \prod_{i=1+1}^{k+1} \Big((k+1) - i + 1\Big) && \text{Cambio de índice} \\ &= \prod_{i=1}^{1} \Big((k+1) + 1 - i\Big) \cdot \prod_{i=1+1}^{k+1} \Big((k+1) + 1 - i\Big) && \text{Índices iguales del productorio} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} \Big((k+1) + 1 - i\Big) && \text{Separar el producto} \end{aligned}$$

□

Coeficiente binomial

Definición: Sea $n, k \in \mathbb{Z}$. Definimos al coeficiente binomial, (de) n elije k, como sigue:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad n < k \text{ , o } k < 0 \end{cases}$$

Otras notaciones para $\binom{n}{k}$ son $C(n, k), {}_nC_k, {}^nC_k, C_{n,k}$.

Observación: $\binom{0}{0} = 1$.

Lista de ejercicios (LE)

Sea $n, k \in \mathbb{Z}$. Demuestre lo siguiente

a) Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i} \qquad \text{(Forma multiplicativa del coeficiente binomial)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i} &= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i)}{\prod_{i=1}^{k} i} && \text{División de productorios} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i)}{k!} && \text{Definición (de factorial)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i)}{k!} \cdot \frac{\prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)}{\prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i) \cdot \prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)}{k! \cdot \prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)}{k! \cdot \prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)} && \text{Separar el producto} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot \prod_{i=k+1}^{n}(n+1-i)} && \text{Forma multiplicativa del factorial} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot \prod_{i=(k+1)-k}^{n-k}\Big(n+1-i+(-k)\Big)} && \text{Cambio de índice} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot \prod_{i=1}^{n-k}\Big((n-k)+(1)-i\Big)} \\
&= \frac{n!}{k! \prod_{i=1}^{n-k} i} && \text{Índices en el argumento} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{Definición (de factorial)} \\
&= \binom{n}{k} && \text{Definición (de coeficiente binomial)}
\end{aligned}$$

□

b)

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

Demostración: Por definición,

i) Si $n < 0$, $\binom{n}{n} = 0 = \binom{n}{0}$.

ii) Si $0 \leq n$,

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \binom{n}{0}$$

□

c)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Simetría del coeficiente binomial)}$$

Demostración:

i) Si $n-k<0$, $\binom{n}{n-k}=0$, y se tiene que, $n<k$, por lo que $\binom{n}{k}=0$.

ii) Si $n<n-k$, $\binom{n}{n-k}=0$, y se tiene que, $k<0$, por lo que $\binom{n}{k}=0$.

iii) Si $k<0$, $\binom{n}{k}=0$. Además, se tiene que $-k>0$, por lo que $n+(-k)=n-k>n$, es decir, $\binom{n}{n-k}=0$.

iv) Si $k>n$, $\binom{n}{k}=0$. Además, $n-k<0$, es decir, $\binom{n}{n-k}=0$.

v) Si $0\leq k\leq n$,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{Definición}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!)}\\
&= \binom{n}{n-k} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

□

d) Si $0\leq k\leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(Forma recursiva del coeficiente binomial)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} && \text{Definición}\\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{n-k}{n-k} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k}{k}\\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} && \text{Rec. Factorial}\\
&= \frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{\big((n-k)+k\big)(n-1)!}{k!(n-k)!} && \text{Distribución}\\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{Rec. Factorial}\\
&= \binom{n}{k} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

□

e) Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{(Regla de Pascal)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} && \text{Definición} \\
&= \frac{(n+1)\cdot\big((n+1)-1\big)!}{k!(n+1-k)\cdot\big((n+1-k)-1\big)!} && \text{Recurrencia del factorial} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n-k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1+k-k}{n-k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k+1)+k}{n-k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{n-k+1}{n-k+1}+\frac{k}{n-k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(1+\frac{k}{n-k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n-k+1} && \text{Distributividad} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n-k+1} && \text{Recurrencia del factorial} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)\big((n-k+1)-1\big)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} && \text{Recurrencia del factorial} \\
&= \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} && \text{Definición}
\end{aligned}$$

□

f) Si $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\big(n-(k+1)\big)!} && \text{Definición} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} && \text{Rec. del factorial} \\
&= \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \left(\frac{k+1}{(n-k)(k+1)} + \frac{n-k}{(n-k)(k+1)}\right) \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)+(n-k)}{(n-k)(k+1)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n+1+k-k}{(n-k)(k+1)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} && \text{Rec. del factorial} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Teorema binomial

Definición: Sea a una función:

$$\begin{aligned} a:\ \mathbb{N} \cup \{\, 0 \,\} &\to \mathbb{R} \\ k &\mapsto a_k \end{aligned}$$

Un polinómio es una expresión *formal*:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Decimos que

- $a_k x^k$ es el k-ésimo término,
- a_k es el coeficiente del k-ésimo término,
- x^k es la indeterminada del k-ésimo término,
- el *grado* es la mayor k para la cual $a_k \neq 0$,

del polinomio.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad \text{(Teorema binomial)}$$

Demostración:

i) Se verifica para $n = 0$,

$$(x+y)^n = (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^{0-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

ii) Se verifica para $n = 1$,

$$\begin{aligned} (x+y)^1 &= (x+y) \\ &= x^1 + y^1 \\ &= x^1 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 \\ &= \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

iii) Supongamos que si $n = m \in \mathbb{N}$, entonces

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

iv) Notemos que

$\square$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) \cdot (x+y) \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k + y \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} \\
&= \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{(m+1)-k} y^k
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k &= \binom{m}{0} x^{m-0+1} y^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k \\
&= x^{m+1} y^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} &= \sum_{k=0+1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^{k+1-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + \binom{m}{m+1-1} x^{m-(m+1)+1} y^{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + x^0 y^{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=m+1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=m+1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) x^{m+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=m+1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k
\end{aligned}
$$