

Cálculo diferencial e Integral I

Semestre 2023-1

Grupo 4031

Problemas de: números reales
Torres Brito David Israel

August 26, 2022

1. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Demostración:

$0 = 0 + 0$	Neutro aditivo
$= (a + (-a)) + (b + (-b))$	Neutro aditivo
$= (a + b) + ((-a) + (-b))$	Asociatividad

Debido a que el inverso aditivo es único, tenemos que $(-a) + (-b) = -(a + b)$. □

2. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

Demostración:

$a - b = b - a$	Hipótesis
$(a - b) + b = (b - a) + b$	Ley de la cancelación
$a = (b + b) - a$	Asociando
$a + a = b + b$	Ley de la cancelación
$2a = 2b$	Definición
$a = b$	Ley de la cancelación

□

3. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a - b) = b - a$.

Demostración:

$-(a - b) = -(a + (-b))$	Notación
$= (-a) + (-(-b))$	Por ejercicio 1
$= (-a) + (b)$	Unicidad del inverso aditivo
$= b - a$	Conmutatividad

□

4. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Primero demostraremos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot 0 = 0$.

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Neutro aditivo
$= a \cdot 0 + (a + (-a))$	Neutro aditivo
$= a \cdot 0 + (a \cdot 1 + (-a))$	Identidad de la multiplicación
$= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a)$	Asociatividad
$= (a \cdot (0 + 1)) + (-a)$	P. Distributiva
$= a \cdot 1 + (-a)$	Neutro aditivo
$= a + (-a)$	Identidad de la multiplicación
$= 0$	Neutro aditivo

□

Ahora, demostramos el ejercicio 4. Supongamos que $a \neq 0$.

$b = b \cdot 1$	Identidad de la multiplicación
$= b \cdot (a \cdot a^{-1})$	Inverso multiplicativo
$= (b \cdot a) \cdot a^{-1}$	Asociatividad
$= (a \cdot b) \cdot a^{-1}$	Conmutatividad
$= 0 \cdot a^{-1}$	Por hipótesis
$= a^{-1} \cdot 0$	Conmutatividad
$= 0$	Probado arriba

□

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración:

$0 = b^2 - b^2$	Inverso aditivo
$= a^2 - b^2$	Por hipótesis
$= a \cdot a - b \cdot b$	Definición
$= (a \cdot a - b \cdot b) + 0$	Neutro aditivo
$= (a \cdot a - b \cdot b) + (a \cdot b - a \cdot b)$	Inverso aditivo
$= (a \cdot a - b \cdot b + a \cdot b) + (-a \cdot b)$	Asociatividad
$= (a \cdot a + a \cdot b - b \cdot b) + (-a \cdot b)$	Conmutatividad
$= (a \cdot a + a \cdot b) + (-b \cdot b - a \cdot b)$	Asociatividad
$= (a \cdot a + a \cdot b) + (-b \cdot b) + (-a \cdot b)$	Notación
$= (a \cdot a + a \cdot b) - (b \cdot b + a \cdot b)$	Por ejercicio 1
$= a(a + b) - b(b + a)$	P. Distributiva
$= (a + b) \cdot (a - b)$	P. Distributiva

Por el ejercicio 4, de la igualdad anterior tenemos que $a + b = 0$ o $a - b = 0$. Sumando inverso aditivo de b tenemos $a = -b$ o $a = b$.

□

6. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son distintos de 0 y tales que $ab^{-1} = ba^{-1}$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración:

$ab^{-1} = ba^{-1}$	Por hipótesis
$ab^{-1} \cdot b = ba^{-1} \cdot b$	Ley de la cancelación
$a(b^{-1} \cdot b) = a^{-1}(b \cdot b)$	Asociando
$a = a^{-1}(b \cdot b)$	Identidad de la multiplicación
$a \cdot a = a^{-1}(b \cdot b) \cdot a$	Ley de la cancelación
$a \cdot a = (b \cdot b)(a^{-1} \cdot a)$	Asociando
$a \cdot a = b \cdot b$	Identidad de la multiplicación
$a^2 = b^2$	Definición

Por el ejercicio 5, la igualdad anterior implica que $a = b$ o $a = -b$. □

7. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Pruebe su respuesta.

- (a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Contraejemplo: $b = 0$. □

- (b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$ o $b < a + b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = b = 0$; tanto $a < a + b$ como $b < a + b$ fallan en cumplirse. □

- (c) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $a + c < b + d$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 0$, $b = 2$ y $c = d = 1$, tenemos que se cumple la hipótesis $0 + 1 < 2 + 1$, pero la proposición $c < d$ es falsa. □

- (d) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $ac < bd$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 1$, $b = d = -1$ y $c = 0$, con lo que se cumple la hipótesis $(1)(0) = 0 < 1 = (-1)(-1)$, pero la proposición $a = 1 < -1 = b$ y $c = 0 < -1 = d$ es falsa. □

- (e) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = a$, entonces $b = 1$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 0$ y $b = -1$. En el ejercicio 4 demostramos que $ab = (0)(-1) = 0$, con lo que se cumple la hipótesis $0 = ab = a = 0$, pero $b \neq 1$. □

- (f) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 \leq b^2$, entonces $a \leq b$.

Respuesta: Falso.

Demostración: Sea $a = 2$ y $b = -2$, tenemos que la hipótesis se cumple $a^2 = 4 \leq 4 = b^2$, pero la proposición $a = 2 \leq -2$ es falsa. □

8. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a \leq b$, entonces $a \leq (a+b)/2 \leq b$.

Demostración: Notemos que:

$a \leq b$	Por hipótesis
$a + a \leq b + a$	Ley de la cancelación
$2a \leq b + a$	Por definición
$2a \cdot 2^{-1} \leq (b + a) \cdot 2^{-1}$	Ley de la cancelación
$\frac{2a}{2} \leq \frac{b + a}{2}$	Notación
$a \leq \frac{b + a}{2}$	Ley de la cancelación

Similarmente,

$a \leq b$	Por hipótesis
$a + b \leq b + b$	Ley de la cancelación
$a + b \leq 2b$	Por definición
$(a + b) \cdot 2^{-1} \leq 2b \cdot 2^{-1}$	Ley de la cancelación
$\frac{a + b}{2} \leq \frac{2b}{2}$	Notación
$\frac{a + b}{2} \leq b$	Ley de la cancelación

Por lo anterior, $a \leq (a+b)/2 \leq b$. □

9. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$.

Primero, demostraremos que $(-1) \cdot a = -a$.

$-a = -a + 0$	Neutro aditivo
$= -a + a \cdot 0$	Demostrado en el ejercicio 4
$= -a + a \cdot (1 + (-1))$	Inverso aditivo
$= -a + (a \cdot 1 + a \cdot (-1))$	P. Distributiva
$= -a + (a + a \cdot (-1))$	Neutro multiplicativo
$= (-a + a) + a \cdot (-1)$	Asociatividad
$= 0 + a \cdot (-1)$	Inverso aditivo
$= a \cdot (-1)$	Neutro aditivo
$= (-1) \cdot a$	Conmutatividad

Ahora, demostraremos que $(-a)(-b) = ab$.

$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot ((-1) \cdot b)$	Demostrado arriba
$= ((-a) \cdot (-1)) \cdot b$	Asociatividad
$= ((-1) \cdot (-a)) \cdot b$	Conmutatividad
$= -(-a) \cdot b$	Demostrado arriba
$= a \cdot b$	Unicidad del inverso aditivo

Luego, demostraremos que $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$. Por casos:

a) Si $0 \leq a$, tenemos

$0 \cdot a \leq a \cdot a$	P. de los positivos
$0 \leq a \cdot a$	Demostrado en el ejercicio 4
$0 \leq a^2$	Definición

b) Si $a < 0$, tenemos

$0 < -a$	P. de los positivos
$0(-a) < (-a)(-a)$	P. de los positivos
$0 < (-a)(-a)$	Demostrado en el ejercicio 4
$0 < aa$	Demostrado arriba
$0 < a^2$	Definición

En cualquier caso, $0 \leq a^2$.

Finalmente, probaremos el ejercicio 9.

$0 \leq (a - b)^2$	Demostrado arriba
$0 \leq (a - b)(a - b)$	Definición
$0 \leq (a - b)(a + (-b))$	Notación
$0 \leq a(a - b) + (-b)(a - b)$	P. Distributiva
$0 \leq a(a + (-b)) + (-b)(a + (-b))$	Notación
$0 \leq aa + a(-b) + a(-b) + (-b)(-b)$	P. Distributiva
$0 \leq aa + a(-b) + a(-b) + bb$	Demostrado arriba
$0 \leq a^2 + 2a(-b) + b^2$	Definición
$0 \leq a^2 + 2a(-1)b + b^2$	Demostrado arriba
$0 \leq a^2 + (-1)2ab + b^2$	Conmutatividad
$0 \leq a^2 + -2ab + b^2$	Demostrado arriba
$2ab \leq a^2 + -2ab + b^2 + 2ab$	Ley de la cancelación
$2ab \leq a^2 + b^2$	Inverso aditivo

□