Cálculo diferencial e Integral I
Semestre 2023-1
Grupo 4031

Problemas de: números reales

Torres Brito David Israel

August 26, 2022

1. Encuentre todos los números reales que satisfagan las siguientes desigualdades:

(a) $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{aligned}
(4-x)+2x-4 &< (3-2x)+2x-4 && \text{Ley de la cancelación}\\
4+(-x+2x)-4 &< 3+(-2x+2x)-4 && \text{Asociatividad}\\
(-x+2x)+4-4 &< (-2x+2x)+3-4 && \text{Conmutatividad}\\
(-x+2x)+0 &< 0+3-4 && \text{Inverso aditivo}\\
-x+2x &< 3-4 && \text{Neutro aditivo}\\
x &< -1 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

(b) $5 - x^2 < -2$

$$\begin{aligned}
(5-x^2)+x^2+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Ley de la cancelación}\\
5+(-x^2+x^2)+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Asociatividad}\\
5+0+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Inverso aditivo}\\
5+2 &< (-2)+x^2+2 && \text{Neutro aditivo}\\
5+2 &< x^2+(-2)+2 && \text{Conmutatividad}\\
5+2 &< x^2+(-2+2) && \text{Asociatividad}\\
5+2 &< x^2 && \text{Inverso aditivo}\\
7 &< x^2 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

Sabemos que $0 < 7$, y por el ejercicio 4, $\sqrt{7} < \sqrt{x^2}$. Luego,

i) Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, por definición.

ii) Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, por definición.

2. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son mayores o iguales a 0, entonces $a^2 \leq b^2$ si y solo si $a \leq b$.

i) Si $a^2 \leq b^2$,

$$\begin{aligned}
a^2+(-a^2) &\leq b^2+(-a^2) && \text{Ley de la cancelación}\\
0 &\leq b^2-a^2 && \text{Inverso aditivo}\\
0 &\leq bb-aa && \text{Definición}\\
0 &\leq bb-aa+0 && \text{Neutro aditivo}\\
0 &\leq bb-aa+(ab-ab) && \text{Inverso aditivo}\\
0 &\leq (bb+ab)+(-ab-aa) && \text{Asociatividad}\\
0 &\leq (bb+ab)-(ab+aa) && \text{Demostrado previamente}\\
0 &\leq b(b+a)-a(b+a) && \text{P. Distributiva}\\
0 &\leq (b+a)(b-a) && \text{P. Distributiva}
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $a \geq 0$ y $b \geq 0$, y por propiedad de los positivos, $a + b \geq 0$. Sigue que:

$$\begin{aligned}
0 \cdot (b+a)^{-1} &\leq (b+a)^{-1} \cdot (b+a)(b-a) && \text{Ley de la cancelación} \\
0 &\leq (b+a)^{-1} \cdot (b+a)(b-a) && \text{Demostrado anteriormente} \\
0 &\leq 1 \cdot (b-a) && \text{Inverso multiplicativo} \\
0 &\leq b-a && \text{Neutro multiplicativo} \\
0 + a &\leq b - a + a && \text{Ley de la cancelación} \\
0 + a &\leq b + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
a &\leq b && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

ii) Si $a \leq b$.

$$\begin{aligned}
a - a &\leq b - a && \text{Ley de la cancelación} \\
0 &\leq b - a && \text{Inverso aditivo}
\end{aligned}$$

Debido a que $b \geq a$, tenemos que $b - a \geq 0$. Sigue que:

$$\begin{aligned}
0 \cdot (b+a) &\leq (b-a) \cdot (b+a) && \text{Ley de la multiplicación} \\
0 &\leq (b-a) \cdot (b+a) && \text{Ley de la multiplicación} \\
0 &\leq b(b-a) + a(b-a) && \text{P. Distributiva} \\
0 &\leq bb - ab + ab - aa && \text{P. Distributiva} \\
0 &\leq bb + 0 - aa && \text{Inverso aditivo} \\
0 &\leq bb - aa && \text{Neutro aditivo} \\
0 + aa &\leq bb - aa + aa && \text{Ley de la cancelación} \\
aa &\leq bb + 0 && \text{Inverso aditivo} \\
aa &\leq bb && \text{Neutro aditivo} \\
a^2 &\leq b^2 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

$\square$