Notación sigma

Denotamos la suma de los elementos del conjunto A como

$$\sum_{a \in A} a$$

Ejemplos:

1. $A = \{\, 2, 1/3, 3 \,\}$

$$\sum_{a \in A} a = 2 + 1/3 + 3 = 16/3$$

2. $B = \{\, 0 \,\}$

$$\sum_{b \in B} b = 0$$

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} f(a) + \sum_{n=a+1}^{b} f(n) & \text{, si } b \geq a \\ 0 & \text{, si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

de la sumatoria.

Definición: Llamamos al conjunto $\{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b - a) \,\}$, el conjunto iterable de $\sum_{n=a}^{b} f(n)$. Decimos que n itera desde a hasta b.

Observación: El conjunto iterable es un subconjunto del domino de la función sobre la que opera la sumatoria. El lector debería verificar este hecho.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{5} i^2 &= (2)^2 + \sum_{i=3}^{5} i^2 \\
&= 4 + (3)^2 + \sum_{i=4}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + (4)^2 + \sum_{i=5}^{5} i^2 && (*) \\
&= 4 + 9 + 16 + (5)^2 + \sum_{i=6}^{5} i^2 \\
&= 4 + 9 + 16 + 25 + 0 \\
&= 54
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-3}^{-1} 2m &= 2(-3) + \sum_{m=-2}^{-1} 2m \\
&= -6 + 2(-2) + \sum_{m=-1}^{-1} 2m \qquad (\dagger) \\
&= -6 + -4 + 2(-1) + \sum_{m=0}^{-1} 2m \\
&= -6 + -4 + -2 + 0 \\
&= -12
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3} 2^n &= 2^0 + \sum_{n=1}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2^1 + \sum_{n=2}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + \sum_{n=3}^{3} 2^n \qquad (\ddagger) \\
&= 1 + 2 + 2^3 + \sum_{n=4}^{3} 2^n \\
&= 1 + 2 + 8 + 0 \\
&= 11
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{j=0}^{-1} j = 0$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3} \frac{k}{n+1} &= \frac{k}{(1)+1} + \sum_{n=2}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{(2)+1} + \sum_{n=3}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{(3)+1} + \sum_{n=4}^{3} \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + 0 \\
&= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} \\
&= \frac{13}{12}k
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{k}{n+1}\right) &= \sum_{k=-1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= \frac{13}{12}(-1)+\sum_{k=0}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+\frac{13}{12}(0)+\sum_{k=1}^{1}\frac{13}{12}k \\
&= -\frac{13}{12}+0+\frac{13}{12}(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

El lector notará que, en el caso en que los límites inferior y superior son iguales $(*,\dagger,\ddagger)$, la imagen de la sumatoria es el elemento típico *evaluado* en el índice, es decir,

Observación: Si $a=b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n) \qquad \text{(Índices iguales de la sumatoria)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a} f(n) && \text{Hipótesis} \\
&= f(a)+\sum_{n=a+1}^{a} f(n) && \text{Definición} \\
&= f(a)+0 && \text{Definición} \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En este caso, el índice itera en un único valor.

A partir de esto tenemos que:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \begin{cases} f(a)+\sum_{n=a+1}^{b} f(n)\,, & \text{si } a<b. \\ f(n) & ,\ \text{si } a=b \\ 0 & ,\ \text{si } a>b \end{cases}$$

El lector notará también que la suma del primer termino hasta el ultimo es igual a la suma del ultimo hasta el primero, es decir,

Proposición: Sea $(b-a)\in\mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b)+\sum_{n=a}^{b-1} f(n) \qquad \text{(Sumatoria inversa)}$$

Demostración:

I) Se verifica para $(b-a)=1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + \sum_{n=b}^{b} f(n) && \text{Hipótesis}\\
&= f(a) + f(b)\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{a} f(n)\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) && b-a=1 \Rightarrow b-1=a
\end{aligned}$$

II) Supongamos que si $b-a=k$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)$$

III) Notemos que si $b-a=k+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k+1} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(a) + f(a+k+1) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\
&= f(a+k+1) + f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+k} f(n)\\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Definición}\\
&= f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n)
\end{aligned}$$

□

Observación: Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b=a$, entonces $(b-a)=0$, y por índices iguales de la sumatoria se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(n)$.
- Por definición, si $b<a$ se tiene que $\sum_{n=a}^{b} f(n) = 0$, que en particular se verifica si $b-a \in \{\, -n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

A partir de esta observación y de la Sumatoria Inversa se tiene que

Definición: Si $(b-a) \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } a > b \\ f(n) & , \text{ si } a = b \\ f(b) + \sum_{n=a}^{b-1} f(n) \, , & \text{ si } a < b. \end{cases}$$

De este modo, siempre que la *distancia* entre los límites de la sumatoria sea un número entero, contaremos con una definición alternativa para la sumatoria. Dado que contamos con una definición que puede ser planteada de dos maneras, podemos utilizar cualquiera (de las dos) a conveniencia; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= (-1)^3 + \sum_{n=0}^{1} n^3\\ &= -1 + 0^3 + \sum_{n=1}^{1} n^3\\ &= -1 + 0 + 1^3\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{1} n^3 &= 1^3 + \sum_{n=-1}^{0} n^3\\ &= 1 + 0^3 + \sum_{n=-1}^{-1} n^3\\ &= 1 + 0 + (-1)^3\\ &= 0\end{aligned}$$

Lista de Ejercicios 11 (LE11)

Sea $a, b, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, demuestre lo siguiente:

a)

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n) \qquad \text{(Conmutatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I. Primero probaremos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, que la imagen de la sumatoria siempre es un número real; la motivación es que, al estar definida *recursivamente*, la función podría parecer asignar números reales a funciones, pero este no es el caso.

Por definición, si $a > b$, entonces, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = 0 \in \mathbb{R}$; si $a = b$, entonces $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) = f(n) \in \mathbb{R}$. Para el caso $a < b$ procedemos por inducción:

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(n)\\ &= f(n+1) + \sum_{n=a}^{a} f(n)\\ &= f(n+1) + f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+1) \in \mathbb{R}$ y $f(n) \in \mathbb{R}$ y la suma es cerrada en $\mathbb{R}$ se tiene que $\Big(f(n+1) + f(n)\Big) \in \mathbb{R}$, osea, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

ii) Supongamos que $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, con $b = a + k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)\\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\\ &= f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\end{aligned}$$

Como $f(n+k+1) \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=a}^{a+k} f(n) \in \mathbb{R}$ (hip. ind.), se tiene que $\left(f(n+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \in \mathbb{R}$, es decir, $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso $\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right) \in \mathbb{R}$.

II. Finalmente demostramos la Conmutatividad de la sumatoria.
Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, por conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, sigue que

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) + \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) + \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

$\square$

Corolario:

$$\sum_{n=p}^{q} g(n) \cdot \sum_{n=s}^{t} h(n) = \sum_{n=s}^{t} h(n) \cdot \sum_{n=p}^{q} g(n)$$

Demostración: Como $\left(\sum_{n=p}^{q} g(n)\right) \in \mathbb{R}$ y $\left(\sum_{n=s}^{t} h(n)\right) \in \mathbb{R}$, la igualdad se verifica por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$. $\square$

b)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big) \qquad \text{(Asociatividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = 0 = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=a}^{b} g(n) = f(n) + g(n) = \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n) + g(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) &= \Big(f(a) + g(a)\Big) + \sum_{n=a+1}^{a+1}\Big(f(n) + g(n)\Big) \\
&= f(a) + g(a) + \Big(f(a+1) + g(a+1)\Big) \\
&= \Big(f(a) + f(a+1)\Big) + \Big(g(a) + g(a+1)\Big) && \text{Asociatividad (de la suma)} \\
&= \left(f(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(n)\right) + \left(g(a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} g(n)\right) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) + \sum_{n=a}^{a+1} g(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n) + g(n)\Big) = \sum_{n=a}^{a+k} f(n) + \sum_{n=a}^{a+k} g(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(f(n)+g(n)\Big) &= \Big(f(a+k+1)+g(a+k+1)\Big)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(f(n)+g(n)\Big)\\
&= f(a+k+1)+g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}f(n)+\sum_{n=a}^{a+k}g(n) && \text{Hip. Inducción}\\
&= \left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}f(n)\right)+\left(g(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}g(n)\right)\\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1}f(n)+\sum_{n=a}^{a+k+1}g(n)
\end{aligned}$$

□

c) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big) \qquad \text{(Distributividad de la sumatoria)}$$

Demostración:

I) Si $a > b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=c\cdot 0=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

II) Si $a = b$,

$$c\cdot\sum_{n=a}^{b}f(n)=c\cdot f(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(c\cdot f(n)\Big)$$

III) Si $b > a$,

i) Se comprueba para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1}c\cdot f(n)\\
&= c\cdot f(a)+c\cdot f(a+1)\\
&= c\cdot\Big(f(a)+f(a+1)\Big)\\
&= c\cdot\left(f(a)+\sum_{n=a+1}^{a+1}f(n)\right)\\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+1}f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big)=c\cdot\sum_{n=a}^{a+k}f(n)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1}\Big(c\cdot f(n)\Big) &= c\cdot f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k}\Big(c\cdot f(n)\Big) \\
&= c\cdot f(a+k+1)+c\cdot\sum_{n=a}^{a+k} f(n) && \text{Hip. Inducción} \\
&= c\cdot\left(f(a+k+1)+\sum_{n=a}^{a+k} f(n)\right) \\
&= c\cdot\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n)
\end{aligned}$$

□

Corolario: Sea $s, t \in \mathbb{R}$

i)

$$s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
s\cdot\sum_{n=a}^{b} f(n)+t\cdot\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)\Big)+\sum_{n=a}^{b}\Big(t\cdot g(n)\Big) && \text{Distributividad de la sumatoria} \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(s\cdot f(n)+t\cdot g(n)\Big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

□

ii)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n)=\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n)-\sum_{n=a}^{b} g(n) &= \sum_{n=a}^{b} f(n)+(-1)\sum_{n=a}^{b} g(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)+(-1)\cdot g(n)\Big) && \text{Por (i) de este corolario} \\
&= \sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)-g(n)\Big)
\end{aligned}$$

□

d)

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\left(\sum_{n=a}^{b} f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

Demostración: Sea $n \in D(f)$ arbitrario pero fijo. Notemos que en la sumatoria $\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)$, $f(n)$ es constante, por lo que

$$\sum_{n=a}^{b}\left(\sum_{m=s}^{t}\Big(f(n)\cdot g(m)\Big)\right)=\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t} g(m)\right)$$

De la misma manera, en la sumatoria (de índice n) $\sum_{n=a}^{b}\Big(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\Big)$, se tiene que $\sum_{m=s}^{t}g(m)$ es constante, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}\left(f(n)\sum_{m=s}^{t}g(m)\right) &= \left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\cdot\left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\\ &= \left(\sum_{n=a}^{b}f(n)\right)\cdot\left(\sum_{m=s}^{t}g(m)\right)\end{aligned}$$

□

e) Sea $c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

Demostración:

I) Se comprueba para $a = b$,

$$\sum_{n=a}^{b} c = c = 1 \cdot c = (b-a+1)\cdot c$$

II) Si $a < b$ se tiene que

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\sum_{n=a}^{a+1} c = c + \sum_{n=a+1}^{a+1} c = c + c = 2c = (2+a-a)c = (1+1+a-a)c = \Big((a+1)-a+1\Big)c$$

ii) Supongamos que se cumple para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} c = \Big((a+k)-a+1\Big)c$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{a+k+1} c &= c + \sum_{n=a}^{a+k} c\\ &= c + \Big((a+k)-a+1\Big)c && \text{Hip. Inducción}\\ &= \Big(1+\big((a+k)-a+1\big)\Big)c\\ &= \Big((a+k+1)-a+1\Big)c\end{aligned}$$

□

Nota: En esta proposición se restringe que $a \leq b$, pues si $a > b$, se tiene que $\sum_{n=a}^{b} c = 0 \neq (b-a+1)c$; únicamente en el caso que $c = 0$, se cumpliría la igualdad con $a > b$.

Definición: $(b-a+1)$ es el número de *iteraciones*, *cíclos*, o *sumandos* de la sumatoria $\sum_{n=a}^{b} f(n)$.

Corolario: Si $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demostración: $\sum_{i=1}^{n} c = \big((n-1)+1\big)c = nc$. □

f) Sea $\ell, m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$, encuentre las condiciones que deben cumplirse para que

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m\cdot n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m\cdot n - c)$$

I) Notemos que si $c = 0$, la proposición es *tautológica*; por lo que, en adelante, suponemos que $c \neq 0$.

II) Si $a > b$, no importa qué valores tome ℓ o m, la proposición se verifica por definición:

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)$$

III) Si $a = b$ y $m = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a + c) - c\big) \\
&= f(\ell + 0 - c) \\
&= f(\ell - c) \\
&\neq f(\ell) \\
&= f(\ell + 0) \\
&= f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

IV) Si $a = b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + m(a + c) - c\big) \\
&= f\big(\ell + ma + mc - c\big) \\
&\neq f\big(\ell + ma\big) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

Por lo que descartamos este caso.

V) Si $a = b$ y $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= f\big(\ell + 1 \cdot (a + c) - c\big) \\
&= f(\ell + a) \\
&= f(\ell + 1 \cdot a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n)
\end{aligned}$$

VI) Si $a < b$ y $m = 0$.

Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + 0 \cdot n) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+1)\big) + f(\ell + 0 \cdot a) \\
&= f(\ell) + f(\ell) \\
&= 2f(\ell) \\
&\neq 2f(\ell - c) \\
&= f(\ell - c) + f(\ell - c) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + 0 \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + 0 \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VII) Si $a < b$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$, Para $b = a + 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + m \cdot n) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+1)\big) + f(\ell + m \cdot a) \\
&= f(\ell + ma + m) + f(\ell + ma) \\
&\neq f(\ell + ma + mc - c) + f(\ell + ma + mc + m - c) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + f\Big(\ell + m \cdot (a+c+1) - c\Big) \\
&= f\big(\ell + m \cdot (a+c) - c\big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + m \cdot n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}
$$

Por lo que descartamos este caso.

VIII) Si $a < b$, $m = 1$,

i) Si $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(\ell + m \cdot n) &= \sum_{n=a}^{a+1} f(\ell + n) \\
&= f\big(\ell + (a+1)\big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + 1) + f(\ell + (a + c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + m \cdot n - c)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, supenmos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f(\ell + n - c)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(\ell + n) &= f\Big(\ell + (a + k + 1)\Big) + \sum_{n=a}^{a} f(\ell + n) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + a) \\
&= f(\ell + a + k + 1) + f(\ell + (a + c) - c) \\
&= f\big(\ell + (a + k + 1 + c) - c\big) + \sum_{n=a+c}^{a+c} f(\ell + n - c) \\
&= \sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f(\ell + n - c)
\end{aligned}$$

Por lo que en general, planteamos la proposición como sigue:
Si $c \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(\ell + n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f(\ell + n - c) \qquad \text{(Cambio de límites 1)}$$

g) Sea $c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big) \qquad \text{(Cambio de límites 2)}$$

Demostración:

i) Si $a > b$,

$$\sum_{n=a}^{b} f(m - n) = 0 = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m - (n - c)\big)$$

ii) Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big) &= \sum_{n=a+c}^{a+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\Big(m - \big((a+c)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(m-n)
\end{aligned}$$

iii) Si $a < b$,

i) Se verifica para $b = a+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c+1}^{a+c+1} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f(m-a) + f\Big(m-\big((a+c+1)-c\big)\Big) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + f(m-a-1) \\
&= f(m-a) + f\big(m-(a+1)\big) \\
&= f(m-a) + \sum_{n=a+1}^{a+1} f(m-n) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos qu ese verifica para $b = a+k$, con $k \in \mathbb{N}$; es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) = \sum_{n=a+c}^{(a+k)+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a+c}^{(a+k+1)+c} f\big(m-(n-c)\big) &= f\Big(m-\big((a+k+1+c)-c\big)\Big) + \sum_{n=a+c}^{a+k+c} f\big(m-(n-c)\big) \\
&= f\big(m-(a+k+1)\big) + \sum_{n=a}^{a+k} f(m-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= \sum_{n=a}^{a+k+1} f(m-n)
\end{aligned}$$

$\square$

h) Sea $m \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m \pm n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m \pm (n-c)\big) \qquad \text{(Cambio de índice)}$$

Demostración:

i) Por el cambio de límites 1 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m+n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m+(n-c)\big)$$

ii) Por el cambio de límites 2 se tiene que

$$\sum_{n=a}^{b} f\big(m-n\big) = \sum_{n=a+c}^{b+c} f\big(m-(n-c)\big)$$

$\square$

Nota: El lector encontrará que en ocasiones, en lugar de utilizar este teorema simplemente se trabaja con susbsituciones sobre el índice, especialmente para funciones identidad. Por ejemplo, tomando la sumatoria de $f(n) = n$, que itera de 1 hasta b,

$$\sum_{n=1}^{b} n$$

Sea $m = n - 1$, entonces $m + 1 = n$. Cuando el límite inferior $n = 1$, se tiene que $m = 1 - 1 = 0$. Luego, al considerar la *distancia* entre los límites, tenemos que

$$\begin{aligned} b - n &= b - (m+1) \\ &= (b-1) - m \end{aligned}$$

Al sustituir n por m en la sumatoria, tenemos

$$\sum_{n=1}^{b} n = \sum_{m=0}^{b-1} (m+1)$$

i) Si $s \leq j \leq t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \qquad \text{(Partir la suma)}$$

Nota: Alternativamente podemos escribir esta igualdad como sigue: Si $s \leq j \leq t$, entonces $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j-1} f(n) + \sum_{n=j}^{t} f(n)$. El lector debería verificar esta equivalencia

Demostración: Consideremos los casos:

I) Si $s = j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) \\ &= f(s) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

II) Si $s < j = t$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j} f(n) \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + 0 \\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) \end{aligned}$$

III) Si $s = j < t$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= f(s) + \sum_{n=s+1}^{t} f(n)\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

IV) Si $s < j < t$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo,

i) Si $t = j + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+1} f(n)\\ &= f(j+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n)\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + f(j+1) && \text{Conmutatividad}\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

ii) Supongamos que $\sum_{n=s}^{j+k} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si $t = j + k + 1$, notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{t} f(n) &= \sum_{n=s}^{j+k+1} f(n)\\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j+k} f(n)\\ &= f(j+k+1) + \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) && \text{Hip. Ind.}\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k} f(n) + f(j+k+1)\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{j+k+1} f(n)\\ &= \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)\end{aligned}$$

$\square$

Nota: En esta proposición se restringe que $s \leq j \leq t$, pues la proposición no es válida para todo $s \geq j \geq t$:

I) Si $s > j > t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$$

II) Si $s > j = t$,

$$\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0 = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t}$$

III) Si $s = j > t$,

i) $\sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n) = f(n) + 0 = f(n)$.

ii) $\sum_{n=s}^{t} f(n) = 0$.
El lector notará que para partir la suma en este caso, debe cumplirse que $f(n) = 0$, pero esto dependerá de cada función y de los íncides, por lo que en general, $f(n) \neq 0$, por ejemplo para cualquier sumatoria $\sum_{n=a}^{b} c$, donde $c \neq 0$.

Corolario:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) &= \sum_{n=0}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} f(n) + \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n) && \text{Partir la suma} \\
&= \sum_{n=a}^{a} f(n) + \sum_{a+1}^{b} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

□

j)

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b-a} f(b-n)$$

Demostración:

I) Si $b < a$, entonces $b - a < 0$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) = 0 = \sum_{n=a}^{b} f(n)$$

II) Si $b = a$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{0} f(b-n) \\
&= f(b-0) \\
&= f(b) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

III) Si $b > a$,

i) Se verifica para $b = a + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{b-a} f(b-n) &= \sum_{n=0}^{(a+1)-a} f(a+1-n) \\
&= \sum_{n=0}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1-0) + \sum_{n=1}^{1} f(a+1-n) \\
&= f(a+1) + f(a+1-1) \\
&= f(a+1) + f(a) \\
&= f(a) + f(a+1) \\
&= \sum_{n=a}^{a+1} f(n) \\
&= \sum_{n=a}^{b} f(n)
\end{aligned}$$

ii) Supongamos que se verifica para $b = a + k$, con $k \in \mathbb{N}$, es decir, suponemos que

$$\sum_{n=a}^{a+k} f(n) = \sum_{n=0}^{(a+k)-a} f(a+k-n) = \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n)$$

iii) Si $b = a + k + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{a+k+1} f(n) &= f(a+k+1) + \sum_{n=a}^{a+k} f(n) \\
&= f(a+k+1) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) && \text{Hip. Ind.} \\
&= f\big(a+k-(-1)\big) + \sum_{n=0}^{k} f(a+k-n) \\
&= \sum_{n=-1}^{k} f(a+k-n) && \text{Definición (de sumatoria)} \\
&= \sum_{n=-1+(1)}^{k+(1)} f\big(a+k-(n-1)\big) && \text{Cambio de índice} \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} f(a+k+1-n)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario:

$$\sum_{n=0}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(b-n)$$

Demostración: La porposición se verifica por el teorema para $a = 0$. $\square$

Una nota sobre la notación sigma

Extensión

Usualmente, el alcance de una suma se extiende hasta el primer símbolo de suma o resta que no está entre paréntesis o que no es parte de algún término más amplio (por ejemplo, en el numerador de una fracción), de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \neq \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 1)$$

dado que esto puede resultar confuso, generalmente es más seguro encerrar el argumento de la sumatoria entre paréntesis (como en la segunda forma arriba) o mover los términos finales al principio (como en la tercera forma arriba). Una excepción (a la confusión) es cuando se suman dos sumas, como en

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n^2} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n^2} i\right)$$

Límites no enteros

En principio, la sumatoria está bien definida para casos en los que los límites no son enteros, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1/2}^{9/4} i &= 1/2 + \sum_{i=3/2}^{9/4} i \\ &= 1/2 + 3/2 + \sum_{i=5/2}^{9/4} i \\ &= 1/2 + 3/2 + 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

Sin embargo, este uso no es común. El ejemplo también sirve para ilustrar que, para la segunda definición de sumatoria, es necesario que la *distancia* entre el límite superior y el inferior sea un entero. Por ejemplo, tratar lo siguiente sería un error

$$\begin{aligned}\sum_{i=1/2}^{9/4} i &\neq 9/4 + \sum_{i=1/2}^{5/4} i \\ &\neq 9/4 + 5/4 + \sum_{i=1/2}^{1/4} i \\ &\neq 9/4 + 5/4 + 0 \\ &= 14/4 \\ &= 7/2 \\ &= 3 + 1/2\end{aligned}$$

Sumatoria sobre conjuntos indexados

El índice de la sumatoria puede iterar sobre los elementos de un conjunto indexado finito, por ejemplo,

$$\sum_{i \in \{\,2,3,5\,\}} i^2 = (2)^2 + (3)^2 + (5)^2 = 38$$

Sumatorias anidadas

Considere las siguientes sumatorias anidadas:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n}}^{\text{A}} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right)}^{\text{B}}$$

Notemos que la variable iterable (i) de la sumatoria A, determina el valor del límite superior de la sumatoria B, por lo que únicamente requerimos un valor n para el límite superior de la sumatoria A para realizar el cálculo. Sea $n = 1$. Procediendo con la (primera) definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) + \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1)(0+1) + \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= (1)(1) + (1+1)(0+1) + \sum_{j=1}^{1}(1+1)(j+1) \\
&= 1 + 2 + (1+1)(1+1) \\
&= 1 + 2 + 4 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Es claro que, en este caso ($n = 1$), la distancia entre los límites de las sumatorias es un número entero, por lo que podemos proceder con la segunda definición de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) &= \sum_{j=0}^{1}(1+1)(j+1) + \sum_{i=0}^{0}\left(\sum_{j=0}^{i}(i+1)(j+1)\right) \\
&= (1+1)(1+1) + \sum_{j=0}^{0}(1+1)(j+1) + \sum_{j=0}^{0}(0+1)(j+1) \\
&= (2)(2) + (1+1)(0+1) + (0+1)(0+1) \\
&= 4 + 2 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}$$

También podríamos proceder con una definición para la sumatoria A y con otra para B. El lector debería verificar este hecho.

Notación Pi

Definición: Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to B$, con $a, b \in A$, y sea $n \in \{\, a + m \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq (b-a) \,\}$. Definimos a la sumatoria de a hasta b de f como sigue:

$$\prod_{n=a}^{b} f(n) \coloneqq \begin{cases} f(a) \cdot \prod_{n=a+1}^{b} f(n) \,, & \text{si } b \geq a \\ 1 & , \text{ si } b < a. \end{cases}$$

Decimos que

- n es el índice, o variable iterable;
- a el límite inferior;
- b el límite superior;
- $f(n)$ el elemento típico (o genérico)

del producto.

Definición: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, denotamos al factorial de n como

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Observación: $0! = 1$.

Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$, y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad\qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector devería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. □

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. □

c) $\big||a|\big| = |a|$.

Demostración:

i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Por lo que $\big||a|\big| = |a| = a$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Por lo que $\big||a|\big| = |-a| = |a|$ □

d) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. $\square$

e) $|a|^2 = a^2$.

Demostración: $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$. $\square$

f) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $|a| < b$.
Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

$\Leftarrow$) Sea $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

- **i)** Si $0 \leq |a|$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. $\square$

Nota: Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

g) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $0 \leq a + b$, por definición, $|a + b| = a + b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a + b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- **ii)** Si $a + b < 0$, por definición, $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a - b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$. $\square$

h) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a| + |a| && \text{Desg. del trig.} \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \\ -|a-b| &\leq |a| - |b| && (*) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| && \text{Desg. del trig.} \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b| && (**) \end{aligned}$$

De las desigualdades (*) y (**) sigue que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. $\square$

Corolario: $|a| - |b| \leq |a - b|$ y $|b| - |a| \leq |a - b|$.

Demostración: Por la desigualdad del triángulo inversa, $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$, y notemos que $\pm\big(|a| - |b|\big) \leq \big||a| - |b|\big|$, por transitividad sigue que $|a| - |b| \leq |a - b|$, también

$$\begin{aligned} -|a-b| &\leq |a| - |b| \\ -\big(|a| - |b|\big) &\leq |a - b| \\ |b| - |a| &\leq |a - b| \end{aligned}$$ $\square$

i) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. $\square$