Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$, y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector devería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. □

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. □

c) $\big||a|\big| = |a|$.

Demostración:

- **i)** Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Por lo que $\big||a|\big| = |a| = a$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Por lo que $\big||a|\big| = |-a| = |a|$ □

d) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- **ii)** Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. $\square$

e) $|a|^2 = a^2$.

Demostración: $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$. $\square$

f) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $|a| < b$.
Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

$\Leftarrow$) Sea $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

i) Si $0 \leq |a|$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. $\square$

Nota: Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

g) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a + b$, por definición, $|a + b| = a + b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a + b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Si $a + b < 0$, por definición, $|a + b| = -\big(a + b\big) = -a - b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a - b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$. $\square$

h) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
|(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| && \text{Desg. del trig.} \\
|b| &\leq |b-a|+|a| && \\
-|b-a| &\leq |a|-|b| && \\
-|a-b| &\leq |a|-|b| && (*)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
|(a-b)+b| &\leq |a-b|+|b| && \text{Desg. del trig.} \\
|a| &\leq |a-b|+|b| && \\
|a|-|b| &\leq |a-b| && (**)
\end{aligned}
$$

De las desigualdades (*) y (**) sigue que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. $\square$

Corolario: $|a| - |b| \leq |a - b|$ y $|b| - |a| \leq |a - b|$.

Demostración: Por la desigualdad del triángulo inversa, $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$, y notemos que $\pm\big(|a|-|b|\big) \leq \big||a| - |b|\big|$, por transitividad sigue que $|a| - |b| \leq |a - b|$, también

$$
\begin{aligned}
-|a-b| &\leq |a|-|b| \\
-\big(|a|-|b|\big) &\leq |a-b| \\
|b|-|a| &\leq |a-b|
\end{aligned}
$$

$\square$

i) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. $\square$