

Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a , denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector debería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.
- ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. □

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. □

c) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

- i) Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. □

d) $|a|^2 = a^2$.

Demostración: $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$. □

e) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Demostración:

\Rightarrow) Sea $|a| < b$.

Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

\Leftarrow) Sea $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

i) Si $0 \leq |a|$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. □

Nota: Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

f) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a + b$, por definición, $|a + b| = a + b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a + b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Si $a + b < 0$, por definición, $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a - b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

g) $||a| - |b|| \leq |a - b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$\begin{array}{llll} |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| & \text{Desg. del trig.} & |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| & \text{Desg. del trig.} \\ |b| \leq |b - a| + |a| & & |a| \leq |a - b| + |b| & \\ -|b - a| \leq |a| - |b| & & |a| - |b| \leq |a - b| & (**) \\ -|a - b| \leq |a| - |b| & (*) & & \end{array}$$

De las desigualdades (*) y (**) sigue que $||a| - |b|| \leq |a - b|$. □

Corolario: $|a| - |b| \leq |a - b|$ y $|b| - |a| \leq |a - b|$.

Demostración: Por la desigualdad del triángulo inversa, $||a| - |b|| \leq |a - b|$, y notemos que $\pm(|a| - |b|) \leq ||a| - |b||$, por transitividad sigue que $|a| - |b| \leq |a - b|$, también

$$\begin{array}{l} -|a - b| \leq |a| - |b| \\ -(|a| - |b|) \leq |a - b| \\ |b| - |a| \leq |a - b| \end{array}$$

□

h) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. □