Cálculo I

Darvid
darvid.torres@gmail.com

October 4, 2022

Axiomas de campo

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias: suma: $+$ y multiplicación: $\cdot$

Axiomas de la suma

La suma $+$ satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.

2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$.

3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Neutro aditivo (o cero): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + 0 = 0$.

5. Inverso aditivo: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists(-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Necesidad de justificar

Si a, b y c son números reales tales que $a + c = b + c$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ a &= b + c - c \\ a &= b \end{aligned}$$

Aunque el resultado anterior no es incorrecto, debemos justificar cada igualdad a partir de las propiedades conocidas con el fin de preservar rigurosiad, al menos en la primera parte de este curso. Esto ayudará a que el lector se famirialice con el uso de las propiedades básicas de los números reales, antes de proceder a realizar pruebas más elaboradas.

Lista de Ejercicios 1

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a+b=a$, entonces $b=0$. (Unicidad del neutro aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b+0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b+\big(a+(-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (b+a)+(-a) && \text{Asociatividad} \\ &= (a+b)+(-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= a+(-a) && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

b) Si $a+b=0$, entonces $b=-a$. (Unicidad del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b+0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= b+\big(a+(-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (b+a)+(-a) && \text{Asociatividad} \\ &= (a+b)+(-a) && \text{Conmutatividad} \\ &= 0+(-a) && \text{Hipótesis} \\ &= (-a)+0 && \text{Conmutatividad} \\ &= -a && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

Nota: Demostrar proposiciones para números reales arbitrarios (cualesquiera elementos de $\mathbb{R}$), nos permite reutilizar las *formas* como esquema para otras pruebas. Por ejemplo, la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, nos permite sustituir x y y por cuales quiera números reales, como en el ejemplo que sigue:

Corolario: $-(-a)=a$. (Inverso aditivo del inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 &= a+(-a) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (-a)+a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo sigue que $a=-(-a)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x+y=0 \implies y=-x$, hemos tomado $x=(-a)$ y $y=a$.

c) $-0=0$. (Cero es igual a su inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 &= 0+(-0) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (-0)+0 && \text{Conmutatividad} \\ &= -0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

d) Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$.

Demostración: Si $-a=0$, se verifica que

$$\begin{aligned} a &= a+0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a+(-a) && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

Por contraposición, si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$. $\square$

e) $-(a+b) = (-a) + (-b)$. (Distribución del signo).

Demostración:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= a + \Big((-a) + \big(b + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big((-a) + b\big) + (-b)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= a + \Big(\big(b + (-a)\big) + (-b)\Big) && \text{Conmutatividad}\\
&= a + \Big(b + \big((-a) + (-b)\big)\Big) && \text{Asociatividad}\\
&= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big) && \text{Asociatividad}
\end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso aditivo, $(-a) + (-b) = -(a+b)$. □

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = (a+b)$ y $y = (-a) + (-b)$.

Corolario: $-\big(a + (-b)\big) = b + (-a)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
-\big(a + (-b)\big) &= (-a) + \big(-(-b)\big) && \text{Distribución del signo}\\
&= (-a) + b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo}\\
&= b + (-a) && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

□

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la distribución del signo, $-(x+y) = (-x) + (-y)$, hemos tomado $x = a$ y $y = (-b)$.

f) Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la suma).

Demostración:

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Neutro aditivo}\\
&= a + \big(c + (-c)\big) && \text{Inverso aditivo}\\
&= (a + c) + (-c) && \text{Asociatividad}\\
&= (b + c) + (-c) && \text{Hipótesis}\\
&= b + \big(c + (-c)\big) && \text{Asociatividad}\\
&= b + 0 && \text{Inverso aditivo}\\
&= b && \text{Neutro aditivo}
\end{aligned}$$

□

Observación: En el segundo paso de la demostración, podíamos sustituir 0 por $a + (-a)$ o por $b + (-b)$ (o por cualquier suma igual a 0). sin embargo, no en todos los casos resultaría útil. Observamos pues que para demostrar proposiciones matemáticas no basta con conocer las propiedades que satisfacen los *objetos* (en este caso números reales) con los que trabajamos; también requerimos intuir su uso apropiado. La experiencia indica que esta intuición se adquiere con la práctica. El lector debería verificar qué ocurre si sustituimos 0 por $a + (-a)$ o $b + (-b)$ en el segundo paso de esta prueba.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Axiomas de la multiplicación

La multiplicación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
9. Neutro multiplicativo (o uno): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Lista de Ejercicios 2

Sean a, b, y c números reales, demuestre lo siguiente:

a) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a$, entonces $b = 1$. (Unicidad del neutro multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{Conmutatividad} \\ &= a \cdot a^{-1} && \text{Hipótesis} \\ &= 1 && \text{Inverso multiplicativo} \quad \square \end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo (si $a = 0$), no podemos garantizar que $b = 1$. Veremos la prueba de este hecho más adelante.

b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b = a^{-1}$. (Unicidad del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) && \text{Conmutatividad} \\ &= a^{-1} \cdot 1 && \text{Hipótesis} \\ &= a^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square \end{aligned}$$

Nota: La prueba requiere que $a \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

c) $1 = 1^{-1}$. (Uno es inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= 1^{-1} \cdot 1 && \text{Conmutatividad} \\ &= 1^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \quad \square \end{aligned}$$

Nota: Por el axioma del neutro multiplicativo sabemos que $1 \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. (Ley de cancelación de la multiplicación).

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a \cdot \big(c \cdot c^{-1}\big) && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= (a \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Asociatividad} \\
&= (b \cdot c) \cdot c^{-1} && \text{Hipótesis} \\
&= b \cdot \big(c \cdot c^{-1}\big) && \text{Asociatividad} \\
&= b \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= b && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

$\square$

Observación: La prueba requiere que $c \neq 0$, pues de otro modo no podemos garantizar la existencia de su inverso multiplicativo.

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Propiedad distributiva

Introducimos la propiedad que nos permite relacionar las operaciones de suma $+$ y multiplicación $\cdot$

11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ejemplo de argumento circular

Sean a y b números reales.

Consideremos la proposición: $b \cdot 0 = 0$. El siguiente es un esbozo de la prueba propuesta por un estudiante:

$$
\begin{aligned}
b \cdot 0 &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\
&= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Distribución} \\
&= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 && ¿?
\end{aligned}
$$

Pero se requiere probar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Observemos ahora el siguiente esbozo para esta prueba:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Conmutatividad} \\
&= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Distribución} \\
&= b \cdot 0 && \text{Inverso aditivo} \\
&= 0 && ¿?
\end{aligned}
$$

No obstante, se ha propuesto un **argumento circular**, por lo que no es posible verificar ninguna de las proposiciones anteriores. Requerimos pues, depender únicamente de axiomas o proposiciones previamente probadas para continuar.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a \cdot 0 = 0$. (Multiplicación por 0).

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Neutro aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot 0 + \big(a \cdot 1 + (-a)\big) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Asociatividad} \\ &= \big(a \cdot (0 + 1)\big) + (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot 1 + (-a) && \text{Neutro aditivo} \\ &= a + (-a) && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 0 && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

$\square$

Corolario: Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. (Cero no es inverso multiplicativo).

Demostración: Sea $a \neq 0$. Si $a^{-1} = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a \cdot 0 && \text{Hipótesis} \\ &= 0 && \text{Multiplicación por 0} \end{aligned}$$

Pero esto contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$. $\square$

Nota: El axioma del neutro multiplicativo no implica directamente que 0 no pueda ser inverso multiplicativo de algún número real, únicamente indica que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$. El axioma tampoco especifica que para 0 el inverso multiplicativo no existe, sin embargo, si suponemos su existencia, es decir, si $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, tenemos por la multiplicación por 0 que $0 = 1$, lo que es una contradicción.

b) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ (disyunción).

Demostración: Demostraremos primero que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$.

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a \cdot \big(b \cdot b^{-1}\big) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad} \end{aligned}$$

Por hipótesis $a \neq 0$, por lo que $0 \neq (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Además, $b^{-1} \neq 0$, pues cero no es inverso multiplicativo.

Si $a \cdot b = 0$, por la multiplicación por cero, $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Finalmente, por contraposición, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. $\square$

c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. (Multiplicación de inversos multiplicativos).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= \big(b \cdot (a \cdot a^{-1})\big) \cdot b^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (b \cdot a) \cdot \big(a^{-1} \cdot b^{-1}\big) && \text{Asociatividad} \\ &= (a \cdot b) \cdot \big(a^{-1} \cdot b^{-1}\big) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists (a \cdot b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues hemos probado que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

d) Si $a \neq 0$, entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot a^{-1} && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= a^{-1} \cdot a && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo sigue que $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$. $\square$

Nota: En esta demostración está implícito que $\exists \left(a^{-1}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido pues cero no es inverso multiplicativo, es decir, tenemos $a^{-1} \neq 0$, por lo que existe su inverso multiplicativo.

Al emplear la *forma* de la unicidad del inverso multiplicativo, $x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \Longrightarrow y = x^{-1}$, hemos tomado $x = a^{-1}$ y $y = a$.

e) $(-1) = (-1)^{-1}$. (Menos uno es inverso multiplicativo).

Demostración: Primero probaremos la existencia de $(-1)^{-1}$.

Si $-1 = 0$, tenemos que $1 + (-1) = 1 + 0$, y por neutro aditivo $1 + (-1) = 1$, pero el inverso aditivo satisface que $1 + (-1) = 1$, de donde sigue que $1 = 0$, lo que contradice la propiedad del neutro multiplicativo. Por tanto, $-1 \neq 0$, por lo que $\exists(-1)^{-1} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + (-1) && \text{Inverso aditivo} \\ &= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= (-1) \cdot (-1)^{-1} + (-1) \cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (-1) \cdot \Big((-1)^{-1} + 1\Big) && \text{Distribución} \end{aligned}$$

Como $-1 \neq 0$, sigue que $(-1)^{-1} + 1 = 0$, y por conmutatividad $1 + (-1)^{-1} = 0$. Finalmente, por unicidad del inverso aditivo, $(-1)^{-1} = -1$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado $x = 1$ y $y = (-1)^{-1}$.

f) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. (Multiplicación por inverso aditivo).

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 &= b \cdot 0 && \text{Multiplicación por 0} \\ &= b \cdot \big(a + (-a)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a) && \text{Distribución} \\ &= a \cdot b + (-a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 && \text{Multiplicación por 0} \\ &= a \cdot \big(b + (-b)\big) && \text{Inverso aditivo} \\ &= a \cdot b + a \cdot (-b) && \text{Distribución} \end{aligned}$$

Por unicidad del inverso aditivo, se verifica que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. $\square$

Nota: En esta demostración, al emplear la *forma* de la unicidad del inverso aditivo, $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$, hemos tomado, $x = a \cdot b$ y $y = (-a) \cdot b$, por una parte y $y = a \cdot (-b)$, por la otra.

Corolario:

i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Demostración:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= a \cdot \big(-(-b)\big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \\ &= a \cdot b && \text{Inverso aditivo del inverso aditivo} \end{aligned}$$ $\square$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x) \cdot y = x \cdot (-y)$, hemos tomado $x = a$ y $y = (-b)$.

ii) $-(a^{-1}) = (-a)^{-1} = (-1)\cdot a^{-1}$. (Inverso aditivo del inverso multiplicativo).

Demostración:

$$\begin{aligned} (-1)\cdot a^{-1} &= -(1\cdot a^{-1}) && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \\ &= -\big(a^{-1}\big) && \text{Neutro multiplicativo} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} -(a^{-1}) &= \big(-(a^{-1})\big)\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= -\Big(\big(a^{-1}\big)\cdot 1\Big) && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \\ &= -\Big(a^{-1}\Big) && \text{Neutro multiplicativo} \qquad \square \end{aligned}$$

Nota: Al emplear la *forma* de la multiplicación por inverso aditivo, $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$, hemos tomado $x = 1$ y $y = a^{-1}$, por una parte, y $x = (a^{-1})$ y $y = 1$, por la otra.

Notación

Esta sección tiene el propósito de introducir al lector al uso de notación por cambio de *etiqueta*, esto es, asignar distintos símbolos a *objetos* con los que hemos trabajado, con el fin de agilizar la demostración de teoremas.

- Si $x \in \mathbb{R}$, representaremos con el símbolo x^2 a la multiplicación $x\cdot x$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $x - y$ a la suma $x + (-y)$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, representaremos con el símbolo $\frac{x}{y}$ al número $x\cdot y^{-1}$.
- Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo xy a la multiplicación $x\cdot y$.

Lista de ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. (Diferencia de cuadrados).

Demostración:

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= (a+b)\big(a+(-b)\big) && \text{Notación} \\ &= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot(-b) && \text{Distribución} \\ &= a\cdot(a+b) + (-b)\cdot(a+b) && \text{Conmutatividad} \\ &= a\cdot a + a\cdot b + (-b)\cdot a + (-b)\cdot b && \text{Distribución} \\ &= a^2 + ab - ba - b^2 && \text{Notación} \\ &= a^2 - b^2 && \text{Inverso aditivo} \qquad \square \end{aligned}$$

b) $\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a\cdot b^{-1} && \text{Notación} \\ &= (a\cdot 1)\cdot b^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a\cdot\big(1\cdot b^{-1}\big) && \text{Asociatividad} \\ &= a\cdot\frac{1}{b} && \text{Notación} \qquad \square \end{aligned}$$

c) $a\cdot\frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a\cdot\frac{c}{b} &= a\cdot\left(c\cdot b^{-1}\right) && \text{Notación}\\ &= (ac)\cdot b^{-1} && \text{Asociatividad}\\ &= \frac{ac}{b} && \text{Notación} \end{aligned}$$

$\square$

d) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, si $b,d\neq 0$. (Multiplicación de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right) && \text{Notación}\\ &= a\cdot\left(b^{-1}\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Asociatividad}\\ &= a\cdot\left(\left(b^{-1}\cdot c\right)\cdot d^{-1}\right) && \text{Asociatividad}\\ &= a\cdot\left(\left(c\cdot b^{-1}\right)\cdot d^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\ &= a\cdot\left(c\cdot\left(b^{-1}\cdot d^{-1}\right)\right) && \text{Conmutatividad}\\ &= a\cdot\left(c\cdot\left(b\cdot d\right)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos}\\ &= (a\cdot c)\cdot(b\cdot d)^{-1} && \text{Asociatividad}\\ &= \frac{ac}{bd} && \text{Notación} \end{aligned}$$

$\square$

e) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$, si $b,c\neq 0$. (Cancelación de factores en común).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b}\cdot 1 && \text{Neutro multiplicativo}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\left(c\cdot c^{-1}\right) && \text{Inverso multiplicativo}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c} && \text{Notación}\\ &= \frac{ac}{b\cdot c} && \text{Multiplicación de fracciones} \end{aligned}$$

$\square$

f) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$, si $b,c,d\neq 0$. (Regla del sandwich).

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a\cdot b^{-1}\right)}{\left(c\cdot d^{-1}\right)} && \text{Notación}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c\cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Notación}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot\left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{Multiplicación de inversos multiplicativos}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(c^{-1}\cdot d\right) && \text{Unicidad del inverso multiplicativo}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot\left(d\cdot c^{-1}\right) && \text{Conmutatividad}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} && \text{Notación}\\ &= \frac{ad}{bc} && \text{Multiplicación de fracciones} \end{aligned}$$

$\square$

g) $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, si $c \neq 0$. (Suma de fracciones con denominador conmún).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} &= \left(a \cdot c^{-1}\right) \pm \left(b \cdot c^{-1}\right) && \text{Notación} \\
&= \left(c^{-1} \cdot a\right) \pm \left(c^{-1} \cdot b\right) && \text{Conmutatividad} \\
&= c^{-1} \cdot (a \pm b) && \text{Distribución} \\
&= (a \pm b) \cdot c^{-1} && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{a \pm b}{c} && \text{Notación} \qquad \square
\end{aligned}$$

h) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$. (Suma de fracciones).

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} && \text{Cancelación de factores en común} \\
&= \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} && \text{Conmutatividad} \\
&= \frac{ad \pm cb}{bd} && \text{Suma de fracciones con denominador común} \qquad \square
\end{aligned}$$

Una nota sobre notación

Las siguientes son todas las *formas* en que podríamos sumar/multiplicar tres números reales a, b y c.

i. $(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c$	**iv.** $(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c$	**vii.** $c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a)$	**x.** $b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a)$
ii. $a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c)$	**v.** $a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c)$	**viii.** $(c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a$	**xi.** $b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c)$
iii. $a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b)$	**vi.** $a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b)$	**ix.** $(b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a$	**xii.** $(b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c$

Podemos probar igualdad de todas ellas a partir de las propiedades de la suma/multiplicación:

$$\begin{aligned}
(a +/\cdot\ b) +/\cdot\ c &= a +/\cdot\ (b +/\cdot\ c) && \text{Asociatividad} && \text{Formas (i) y (ii)} \\
&= a +/\cdot\ (c +/\cdot\ b) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (iii)} \\
&= (a +/\cdot\ c) +/\cdot\ b && \text{Asociatividad} && \text{Forma (iv)} \\
&= (c +/\cdot\ a) +/\cdot\ b && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (v)} \\
&= c +/\cdot\ (a +/\cdot\ b) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (vi)} \\
&= c +/\cdot\ (b +/\cdot\ a) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (vii)} \\
&= (c +/\cdot\ b) +/\cdot\ a && \text{Asociatividad} && \text{Forma (viii)} \\
&= (b +/\cdot\ c) +/\cdot\ a && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (ix)} \\
&= b +/\cdot\ (c +/\cdot\ a) && \text{Asociatividad} && \text{Forma (x)} \\
&= b +/\cdot\ (a +/\cdot\ c) && \text{Conmutatividad} && \text{Forma (xi)} \\
&= (b +/\cdot\ a) +/\cdot\ c && \text{Asociatividad} && \text{Forma (xii)}
\end{aligned}$$

Así como reutilizar las *formas* de proposiciones probadas nos permite agilizar la escritura de demostraciones; establecer notación tiene el mismo propósito. No obstante, cada vez que acordemos el uso de notación esta debe ser justificada para evitar ambigüedad; en ocasiones la justificación es tan simple como utilizar diferentes *etiquetas* para los mismos *objetos*, como ya ha sido empleada, pero en otras, la notación requiere de mayor explicación para su uso adecuado.

i) Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x+y+z$ a la suma de estos.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que todas las formas de sumar tres números reales son equivalentes.

ii) Si x, y y z son números reales, representaremos con el símbolo $x \cdot y \cdot z$ a la multiplicación de estos. Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que todas las formas de multiplicar tres números reales son equivalentes.

Por la notación (ii) podemos usar el símbolo xyz para representar la multiplicación de cualesquiera números reales x, y y z.

iii) Si x y y son números reales, representaremos con el símbolo $-xy$ a cualquiera de los productos $(-x) \cdot y$, $-(x \cdot y)$ o $x \cdot (-y)$.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

Por la notación (ii) podemos reescribir esta igualdad como $(-x)y = -(xy) = x(-y)$, sin embargo, de esta no se obtiene el símbolo $-xy$.

iv) Si x es un número real, representaremos con el símbolo $-x^{-1}$ al inverso multiplicativo de $-x$ o al inverso aditivo de x^{-1}.

Podemos usar esta notación sin ambigüedad ya que hemos probado que $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.

v) Al número $1+1$ lo denotaremos con el símbolo 2 y lo llamaremos número dos. Al número $2+1$ lo denotaremos con el símbolo 3 y lo llamaremos número tres...

Nota: El uso de notación es opcional y en ocasiones prescindiremos de ella para procurar claridad.

El siguiente es un ejemplo del uso de la notación listada arriba:

$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$, si $b \neq 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{-a}{b} &= (-a) \cdot b^{-1} && \text{Notación (viii)} \\ &= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Notación (iv)} \\ &= -\frac{a}{b} && \text{Notación (viii)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{a}{-b} &= a \cdot (-b)^{-1} && \text{Notación (viii)} \\ &= -\big(ab^{-1}\big) && \text{Notación (iv)} \\ &= -\frac{a}{b} && \text{Notación (viii)} \end{aligned} \qquad \square$$

Nota: En esta prueba está implícito que $\exists (-b)^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es válido, pues $b \neq 0$, por lo que $-b \neq 0$.

Un campo finito

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - b = b - a$, entonces $a = b$. El siguiente es un esbozo de la prueba:

$$
\begin{aligned}
2a &= (1+1)a && \text{Notación} \\
&= a(1+1) && \text{Conmutatividad} \\
&= a \cdot 1 + a \cdot 1 && \text{Distribución} \\
&= a + a && \text{Neutro multiplicativo} \\
&= a + a + 0 && \text{Neutro aditivo} \\
&= a + a + b - b && \text{Inverso aditivo} \\
&= a - b + a + b && \text{Conmutatividad} \\
&= b - a + a + b && \text{Hipótesis} \\
&= b + 0 + b && \text{Inverso aditivo} \\
&= b + b && \text{Neutro aditivo} \\
&= 2b && \text{Notación}
\end{aligned}
$$

A pesar de que se verifica la igualdad $2a = 2b$, aún necesitamos justificar que $a = b$. Podríamos apelar a la ley de cancelación de la multiplicación, pero para su uso requerimos que $2 \neq 0$, el cual es un hecho que hasta ahora no ha sido demostrado. No obstante, los axiomas que hemos listado y los resultados que hemos obtenido de ellos no son suficientes para probar este hecho, el lector debería indagar cuáles serían las implicaciones si se define que $2 = 0$. Para clarificar este punto, consideremos el siguiente conjunto:

Sea Ω un conjunto dotado con las operaciones suma $+$ y multipllicación $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cerradura (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y \in \Omega$.
2. Conmutatividad (de la suma): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x + y = y + x$.
3. Asociatividad (de la suma): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. Neutro aditivo: $\exists 0 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x + 0 = x$.
5. Inverso aditivo: para cada $x \in \Omega$, $\exists (-x) \in \Omega$ tal que $x + (-x) = 0$.
6. Cerradura (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y \in \Omega$.
7. Conmutatividad (de la multiplicación): Si $x, y \in \Omega$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$.
8. Asociatividad (de la multiplicación): Si $x, y, z \in \Omega$, entonces $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
9. Neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, entonces $x \cdot 1 = x$.
10. Inverso multiplicativo: si $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$, entonces $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
11. Distribución (de la multiplicación sobre la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

¿Qué elementos pertenecen a Ω?

Sabemos que el 0 y 1 son elementos de Ω, en virtud de los axiomas (4) y (9). Asimismo, por el axioma (5) tenemos los inversos aditivos de 0 y 1, es decir, garantizamos la existencia de -1 y -0. De la misma manera, por el axioma (10) podemos afirmar que 1^{-1} es un miembro de Ω. Sin embargo, los axiomas de conmutatividad (2) y (7), de asociatividad (3) y (8), y el axioma de distribución (11), no son axiomas de existencia y para su uso requerimos elementos de Ω, es decir, no podemos *conocer* elementos adicionales de Ω directamente de estos axiomas.

Con estas consideraciones, sabemos que $\left\{ 0, 1, -0, -1, 1^{-1} \right\} \subseteq \Omega$. Sin embargo, hemos probado que $0 = -0$ y $1 = 1^{-1}$, por lo que hasta ahora, solo podemos afirmar que $0, 1, -1$ son miembros de Ω.

Por otra parte, por el axioma de cerradura de la multiplicación (6), se verifica lo siguiente:

i) $0 \cdot 0 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $0 \cdot 1 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $0 \cdot (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 \cdot (-1) \in \Omega$, pero como $1 \cdot (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 \cdot 1 \in \Omega$, pero como $1 \cdot 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

Finalmente, por el axioma de cerradura (1) se verifica lo siguiente:

i) $0 + 0 \in \Omega$, pero como $0 + 0 = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

ii) $0 + 1 \in \Omega$, pero como $0 + 1 = 1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iii) $0 + (-1) \in \Omega$, pero como $0 + (-1) = -1$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

iv) $1 + (-1) \in \Omega$, pero como $1 + (-1) = 0$, no encontramos un miembro distinto a los conocidos.

v) $1 + 1 \in \Omega$, el cual es un elemento del que no podemos afirmar sea distinto a los conocidos.

Si definimos que bajo Ω, $2 = 0$, es decir, que $1+1 = 0$, entonces $1+1$ no sería un miembro distinto a los conocidos. Además, por unicidad del inverso aditivo, si $1 + 1 = 0$, sigue que $1 = -1$. De este modo, Ω cumpliría con todos los axiomas de campo consistentemente y constaría de los elementos 0 y 1 únicamente.

Por lo anterior, si buscamos expandir el conjunto de los números reales, requerimos establecer propiedades adicionales.

Nota: Hasta este punto el autor ha procurado enunciar cada propiedad que se utiliza en la demostración de proposiciones, sin embargo, se espera que con el dominio de dichas propiedades y el manejo adecuado de la notación, el lector sea capáz de inferir el uso que de estas propiedades y notación en pruebas de futuras proposiciones. Por ello dejaremos de enunciar cada propiedad que sea empleada excepto en aquellos casos en los que el autor considere que se requiera para preservar claridad. Sin embargo, el dejar de enunciar propiedades empleadas lo realizaremos paulatinamente, de modo que el lector pueda acostumbrarse a esta forma de escritura.

Axiomas de orden

Números positivos

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo $\mathbb{R}^+$, el cual satisface las siguientes propiedades:

12. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$).

13. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$).

14. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones (Tricotomía):

- **i)** $x \in \mathbb{R}^+$.
- **ii)** $x = 0$.
- **iii)** $-x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema: $0 \notin \mathbb{R}^+$. (Cero no es positivo).

Demostración: Si $0 \in \mathbb{R}^+$ también $-0 \in \mathbb{R}^+$, pues $0 = -0$. Además $0 = 0$, es decir, se verifican las tres condiciones de tricotomía, lo que contradice que solo una debe cumplirse. Por tanto, $0 \notin \mathbb{R}^+$. $\square$

Números negativos

Notemos que si $x \in \mathbb{R}^+$, por tricotomía, $x \neq 0$, y por esto $-x \neq 0$. Asimismo, $-x \notin \mathbb{R}^+$. De esto sigue que $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$. Recíprocamente, si $-x \notin \mathbb{R}^+$ y $-x \neq 0$, por tricotomía se verifica que $-(-x) = x \in \mathbb{R}^+$. En otras palabras, $x \in \mathbb{R}^+ \iff -x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$.

Definición:

- Denotaremos al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$ con el símbolo $\mathbb{R}^-$ y lo llamaremos conjunto de los números reales negativos.
- Al conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$ lo llamaremos conjunto de los números reales no negativos.

Usando la definición, tenemos que $x \in \mathbb{R}^+ \iff -x \in \mathbb{R}^-$, y de forma equivalente, $-y \in \mathbb{R}^+ \iff y \in \mathbb{R}^-$, pues $-(-y) = y$. Notemos que por definición, si $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, x y $-x$ pertenecen a conjuntos disjuntos, uno es positivo y el otro negativo.

Por lo anterior, si $x \in \mathbb{R}$, por tricotomía tenemos los casos (excluyentes):

- **i)** $x \in \mathbb{R}^+ \iff -x \in \mathbb{R}^-$.
- **ii)** $x = 0$.
- **iii)** $-x \in \mathbb{R}^+ \iff x \in \mathbb{R}^-$.

Convenientemente, reescribimos la propiedad de tricotomía como sigue:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones

- **i)** $x \in \mathbb{R}^+$.
- **ii)** $x = 0$.
- **iii)** $x \in \mathbb{R}^-$.

Relación de orden

Por otra parte, notemos que para cualesquiera números reales x y y tenemos que $x = y$ o $x \neq y$. A su vez,

i) Si $x = y$, entonces $x - y = 0$.

ii) Si $x \neq y$, por tricotomía tenemos dos casos (excluyentes):

- $x - y \in \mathbb{R}^+$.
- $x - y \in \mathbb{R}^-$.

Nota: Sabemos que si $x, y \in \mathbb{R}$, $x - y$ es un número real, pero aún no contamos con las herramientas para verificar la pertenencia de $x - y$ respecto de $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$. Sin embargo, cuando dicha pertenencia ocurran, usaremos la siguiente ***definición***:

- Si $x - y \in \mathbb{R}^+$, diremos que x es mayor que y y escribiremos $y < x$ (o $x > y$).
- Si $x - y \in \mathbb{R}^-$, diremos que x es menor que y y escribiremos $x < y$ (o $y > x$).

En particular, sabemos que para $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x = x + 0 = x - 0$, por lo que

i) Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $x - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que denotamos como $0 < x$ o $x > 0$. Recíprocamente, si $0 < x$ o $x > 0$, por definición $x - 0 = x \in \mathbb{R}^+$.

ii) Si $x \in \mathbb{R}^-$, entonces $x - 0 \in \mathbb{R}^-$, lo que denotamos como $x < 0$ o $0 > x$. Recíprocamente, si $x < 0$ o $0 > x$, por definición $x - 0 = x \in \mathbb{R}^-$.

Puesto de otro modo, tenemos que

i) $x \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $0 < x$. (Definición de número real positivo).

ii) $x \in \mathbb{R}^-$ si y solo si $x < 0$. (Definición de número real negativo).

Por tanto, una forma equivalente de la propiedad de tricotomía es la siguiente: para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones:

i) $0 < x$.

ii) $x = 0$.

iii) $x < 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, como x y $-x$ pertenecen a conjuntos disjuntos,

i) Si $0 < x$, entonces $-x < 0$.

ii) Si $x < 0$, entonces $0 < -x$.

En otras palabras, $0 < x$ si y solo si $-x < 0$.

Notación: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Utilizaremos la notación $x < y < z$ para indicar que $x < y$ y $y < z$.
- Escribimos $x \geq y$ o $y \leq x$, si $y < x$ o $x = y$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \notin \mathbb{R}^+$ y $0 \notin \mathbb{R}^-$.

Demostración: Si $0 \in \mathbb{R}^+$ o $0 \in \mathbb{R}^-$, tenemos que $0 < 0$, lo que contradice el axioma de tricotomía. $\square$

b) $0 < 1$. (Uno es positivo).

Demostración: Por axioma del neutro multiplicativo, $1 \neq 0$. Si $1 < 0$, por definición, $0 - 1 = -1 > 0$. Por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $(-1) \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$, de donde sigue que $(-1) \cdot (-1) = 1 > 0$, es decir, tenemos que $1 > 0$ y $1 < 0$, pero esto contradice la propiedad de transitividad. Por tanto, $0 < 1$. $\square$

c) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Transitividad).

Demostración: Por definición $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$, $(b - a) + (c - b) > 0$. De donde sigue que $(b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a > 0$, es decir, $a < c$. $\square$

d) $a < b$ si y solo si $a + c < b + c$. (Ley de cancelación de la suma en desigualdades).

Demostración:

$\Rightarrow$) Si $a < b$, por definición, $b - a > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} b - a &= b - a + c - c && \text{Inverso aditivo} \\ &= b + c - a - c && \text{Conmutatividad} \\ &= b + c - (a + c) && \text{Distribución del signo} \end{aligned}$$

De este modo, $b + c - (a + c) > 0$, es decir, $a + c < b + c$.

$\Leftarrow$) Si $a + c < b + c$, por definición $b + a - (a + c) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} b + c - (a + c) &= b + c - a - c && \text{Distribución del signo} \\ &= b - a && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

De este modo, $b - a > 0$, es decir, $a < b$. $\square$

Nota: Si el contexto es claro, enunciaremos esta proposición como ley de cancelación.

Corolario:

i) $0 < a$ si y solo si $-a < 0$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & 0 < a & \text{Hipótesis} \\
 & 0 + (-a) < a + (-a) & \text{Ley de cancelación} \\
 & 0 + (-a) < 0 & \text{Inverso aditivo} \\
 & -a < 0 & \text{Neutro aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & -a < 0 & \text{Hipótesis} \\
 & -a + a < 0 + a & \text{Ley de cancelación} \\
 & 0 < 0 + a & \text{Inverso aditivo} \\
 & 0 < a & \text{Neutro aditivo}
\end{array}$$

ii) $a < a + b$ si y solo si $0 < b$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & a < a + b & \text{Hipótesis} \\
 & a - a < a + b - a & \text{Ley de cancelación} \\
 & 0 < b & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & 0 < b & \text{Hipótesis} \\
 & 0 + a < a + b & \text{Ley de cancelación} \\
 & a < a + b & \text{Neutro aditivo}
\end{array}$$

iii) $a + b < a$ si y solo si $b < 0$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & a + b < a & \text{Hipótesis} \\
 & a + b - a < a - a & \text{Ley de cancelación} \\
 & b < 0 & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & b < 0 & \text{Hipótesis} \\
 & b + a < 0 + a & \text{Ley de cancelación} \\
 & b + a < a & \text{Neutro aditivo}
\end{array}$$

iv) $-a < b$ si y solo si $-b < a$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & -a < b & \text{Hipótesis} \\
 & -a + a - b < b + a - b & \text{Ley de cancelación} \\
 & -b < a & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & -b < a & \text{Hipótesis} \\
 & -b + b - a < a + b - a & \text{Ley de cancelación} \\
 & -a < b & \text{Inverso aditivo}
\end{array}$$

v) $a < -b$ si y solo si $b < -a$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & a < -b & \text{Hipótesis} \\
 & a - a + b < -b - a + b & \text{Ley de cancelación} \\
 & b < -a & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & b < -a & \text{Hipótesis} \\
 & b - b + a < -a + -b + a & \text{Ley de cancelación} \\
 & a < -b & \text{Inverso aditivo}
\end{array}$$

vi) $a < b$ si y solo si $-b < -a$.

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow) & a < b & \text{Hipótesis} \\
 & a - a - b < b - b - a & \text{Ley de cancelación} \\
 & -b < -a & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\Leftarrow) & -b < -a & \text{Hipótesis} \\
 & -b + b + a < -a + b - a & \text{Ley de cancelación} \\
 & a < b & \text{Inverso aditivo}
\end{array}$$

e) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. (Suma de desigualdades).

Demostración: Por definición $b - a > 0$ y $d - c > 0$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $(b - a) + (d - c) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
(b - a) + (d - c) &= b - a + d - c && \text{Notación} \\
&= b + d - a - c && \text{Conmutatividad} \\
&= b + d - (a + c) && \text{Distribución del signo}
\end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) > 0$, es decir, $a + c < b + d$. $\square$

Nota: No se satisface doble implicación, es decir, si $a + c < b + d$, no es posible demostrar —a partir de esta hipótesis únicamente, que $a < b$ y $c < d$. Ej. $a = 4, c = 0, b = 3, d = 4$, se cumple que $a + c = 4 + 0 = 4 < 7 = 3 + 4 = b + d$, pero $c = 0 < 4 = d$ y $a = 4 < 3 = b$ implica una contradicción.

Corolario:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, entonces $0 < a + b$.
Por este teorema $0 + 0 = 0 < a + b$.

ii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$.
Por este teorema $a + b < 0 = 0 + 0$.

iii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $a < a + b < b$.
Si $a < 0$ y $0 < b$, por transitividad $a < b$. Tomando $a < 0$ por la ley de cancelación, $a + b < b = 0 + b$. Y tomando, $0 < b$, por la ley de cancelación, $0 + a = a < b + a$. Osea $a < a + b < b$.

f) Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$. (Multiplicación por positivo).

Demostración: Por definición $b - a > 0$ y $c > 0$. Por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$ se verifica que $c(b - a) > 0$. Por la propiedad distributiva sigue que $c(b - a) = cb - ca$ y por conmutatividad tenemos que $cb - ca = bc - ac$. De este modo, $bc - ac > 0$, es decir, $ac < bc$. $\square$

Observación: La multiplicación por números reales positivos preserva el orden de la desigualdad.

g) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$. (Multiplicación por negativo).

Demostración: Por definición $b - a > 0$ y $0 - c = -c > 0$. Luego, por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$, sigue que $-c(b - a) > 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} -c(b-a) &= -c\Big(b + (-a)\Big) && \text{Notación} \\ &= (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) && \text{Distribución} \\ &= -cb + ca && \text{Multiplicación por inverso aditivo} \end{aligned}$$

Finalmente, $-cb + ca = ac - bc > 0$, es decir, $ac > bc$. $\square$

Observación: La multiplicación por números reales negativos cambia el orden de la desigualdad.

h) Si $0 < a$, entonces $0 < a^{-1}$. (Inverso multiplicativo positivo).

Demostración: Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $0 < a$, al multiplicar en desigualdades preserva el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero esto es una contradicción. Sabemos que $a^{-1} \neq 0$, ya que 0 no es inverso multiplicativo. Por tanto, $a^{-1} > 0$. $\square$

i) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$. (Inverso multiplicativo negativo).

Demostración: Supongamos que $a^{-1} > 0$. Como $a < 0$, al multiplicar en desigualdades cambia el orden, por lo que $a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$. Por un lado, tenemos el inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot a = 1$, y por el otro, tenemos una multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0$, con lo que tenemos que $1 < 0$, pero esto es una contradicción. Sabemos que $a^{-1} \neq 0$, ya que 0 no es inverso multiplicativo. Por tanto, $a^{-1} < 0$. $\square$

j) Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $ab < 0$ o $0 < ab$. (Ley de los signos).

Si a o b son cero, tenemos que $ab = 0$, por lo que descartamos esta posiblidad. Por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

- **i)** Si $0 < a$ y $0 < b$, por la cerradura de la multiplicacón en $\mathbb{R}^+$, tenemos que $0 < ab$.
- **ii)** Sin pérdida de generalidad, si $0 < a$ y $b < 0$, tenemos que $0 < -b$, y por la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$, $0 < -ab$, por lo que $ab < 0$.
- **iii)** Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $0 < -a$ y $0 < -b$, por lo que $0 < (-a)(-b) = ab$.

Conclusión:

- **1)** Por (i) y (ii) sabemos que para verificar $ab < 0$, un componente del producto debe ser positivo y el otro negativo.
- **2)** Por (iii) sabemos que para verificar $0 < ab$, ambos componentes del producto deben ser positivos o ambos negativos.

Nota: Nos referiremos a (1) y (2) y a la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$ como ley de los signos.

k) $0 \leq a^2$.

Demostración: Por tricotomía $a = 0$ o $0 < a$ o $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a^2 = a \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$. Luego,

$0 < a$	Hipótesis	$a < 0$	Hipótesis
$0 \cdot a < a \cdot a$	Multiplicación por positivo	$0 \cdot a < a \cdot a$	Multiplicación por negativo
$0 < a \cdot a$	Multiplicación por 0	$0 < a \cdot a$	Multiplicación por 0
$0 < a^2$	Notación	$0 < a^2$	Notación

En cualquier caso, $0 \leq a^2$. □

l) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Punto medio).

Demostración:

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< a + b \\ 2a &< a + b \\ a &< \frac{a+b}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a &< b \\ a + b &< b + b \\ a + b &< 2b \\ \frac{a+b}{2} &< b \end{aligned}$$

□

Definición: Al número $\frac{a+b}{2}$ lo llamaremos el punto medio entre a y b.

m) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $a^{-1} < a$ o $a < a^{-1}$.

Para que $\exists a^{-1}$, requerimos $a \neq 0$. También, sabemos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$, pero buscamos desigualdad. Entonces, observemos los casos:

i) Si $a < -1$, entonces $1 < -a$, y por transitividad $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$, luego,

$$\begin{aligned} 1 &< -a \\ 1 \cdot \left(-a^{-1}\right) &< (-a) \cdot \left(-a^{-1}\right) \\ -a^{-1} &< 1 \\ -1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad, $a < a^{-1}$.

ii) Si $-1 < a < 0$, por notación $-1 < a$ y $a < 0$, de donde sigue que $-a < 1$ y $0 < -a$, por lo que $0 < -a^{-1}$.

$$\begin{aligned} -a &< 1 \\ (-a) \cdot (-a^{-1}) &< 1 \cdot (-a^{-1}) \\ 1 &< -a^{-1} \\ a^{-1} &< -1 \end{aligned}$$

Por transitividad, $a^{-1} < a$.

iii) Si $0 < a < 1$, por notación $0 < a$ y $a < 1$, de donde sigue que $0 < a^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned} a &< 1 \\ a \cdot a^{-1} &< 1 \cdot a^{-1} \\ 1 &< a^{-1} \end{aligned}$$

Por transitividad $a < a^{-1}$.

iv) Si $1 < a$, por transitividad $0 < a$, por lo que $0 < a^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &< a \\ 1 \cdot a^{-1} &< a \cdot a^{-1} \\ a^{-1} &< 1 \end{aligned}$$

Por transitividad $a^{-1} < a$.

Conclusión:

- Por (i) y (iii), $a < a^{-1}$, si $a < -1$ o $0 < a < 1$.
- Por (ii) y (iv), $a^{-1} < a$, si $-1 < a < 0$ o $1 < a$.

n) Sea $a < b$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ o $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Sabemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, pues requerimos la existencia de su inverso multiplicativo. Luego, por tricotomía, $0 < a$ o $a < 0$ y $0 < b$ o $b < 0$, entonces observemos los casos:

i) Si $0 < a$ y $0 < b$, por ley de los signos, $0 < ab$, por lo que $0 < \frac{1}{ab}$. Entonces, $a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} < \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{ab}$.

ii) Si $a < 0$ y $0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y $0 < \frac{1}{b}$. Por transitividad, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Si $b < 0$ y $0 < a$, por transitividad, $b < a$, lo que contradice el supuesto inicial (descartamos este caso).

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces

$$\begin{aligned}
a &< b && \text{Supuesto inicial} \\
a \cdot b &< a \cdot a && \text{Multiplicación por negativo} \\
(a \cdot a) \cdot b &< (a \cdot b) \cdot b && \text{Multiplicación por negativo} \\
a^2 b &< ab^2 && \text{Notación} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Sabemos que $a^2 > 0$ y $b^2 > 0$, y por la ley de los signos, $a^2b^2 > 0$, de donde sigue que $\frac{1}{a^2b^2} > 0$. De (*) obtenemos que

$$\left(a^2 b\right) \cdot \frac{1}{a^2b^2} < \left(ab^2\right) \cdot \frac{1}{a^2b^2}$$
$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Conclusión:

- Por (i) y (iv), si ambos componentes son positivos o ambos negativos, entonces los inversos multiplicativos invierten el orden.
- Por (ii), si el componente menor es negativo y el mayor es positivo, entonces los inversos multiplicativos conservan el orden.

o) Sea $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encuentre las condiciones que deben cumplirse para que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (Mediante).

Sabemos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. También, por definición, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$, es decir, $(bc - ad)/(bd) > 0$. Como b y d son distintos de cero, tenemos que $bd \neq 0$. Asimismo, $bc - ad \neq 0$.

Buscamos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, para lo que es necesario que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \\
0 &< \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{b(a+c) - \big(a(b+d)\big)}{b(b+d)} \\
&= \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{b(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{d}{b+d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\
0 &< \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \\
&= \frac{c(b+d) - \big(d(a+c)\big)}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{d(b+d)} \\
&= \frac{bc - ad}{bd} \cdot \frac{b}{b+d}
\end{aligned}$$

Como $(bc - ad)/(bd) > 0$, entonces $\frac{d}{b+d} > 0$ y $\frac{b}{b+d} > 0$. Por esto, $b + d \neq 0$. Finalmente, tenemos dos casos:

i) Si $b > 0$, entonces $b + d > 0$ y $d > 0$.

ii) Si $b < 0$, entonces $b + d < 0$ y $d < 0$.

Por tanto, debe cumplirse que b y d deben ser ambos positivos o ambos negativos.

Valor absoluto

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Notemos que $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$, y que la definición es equivalente a las siguientes:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad\qquad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

El lector de vería verificar este hecho. (*Hint*: $0 = -0$).

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $\pm a \leq |a|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$, por lo que $a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$, y por transitividad, $-a \leq |a|$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, por lo que $-a \leq |a|$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, y por transitividad, $a < |a|$.

En cualquier caso, $\pm a \leq |a|$. $\square$

b) $|a| = |-a|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $0 \leq a$, por definición, $|a| = a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- **ii)** Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$. Luego, por la hipótesis tenemos que $0 < -a$, por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

En cualquier caso, $|a| = |-a|$. $\square$

c) $|ab| = |a||b|$.

Demostración: Por casos.

- **i)** Si $a > 0$ y $b > 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- **ii)** Si $a > 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.
- **iii)** Si $a < 0$ y $b < 0$, por definición, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. Por tanto, $|ab| = |a||b|$.

En cualquier caso, $|ab| = |a||b|$. $\square$

d) $|a|^2 = a^2$.

Demostración: $0 \leq a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$. $\square$

e) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $|a| < b$.

Sabemos que $\pm a \leq |a|$, y por transitividad $a < b$ y $-a < b$, por lo que $-b < a$. Por tanto, $-b < a < b$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $-b < a < b$. Tenemos dos casos:

i) Si $0 \leq |a|$, por definición, $|a| = a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

ii) Si $a < 0$, por definición, $|a| = -a$, y por la hipótesis, $|a| < b$.

En cualquier caso, $|a| < b$. $\square$

Nota: Nos referiremos a esta proposición como teorema para eliminar el valor absoluto en algunas desigualdades.

f) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad del triángulo).

Demostración: Por casos.

i) Si $0 \leq a + b$, por definición, $|a + b| = a + b$. Como, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$, entonces, $a + b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Si $a + b < 0$, por definición, $|a + b| = -\big(a + b\big) = -a - b$. Como, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$, entonces, $-a - b \leq |a| + |b|$. Por tanto, $|a + b| \leq |a| + |b|$. $\square$

g) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. (Desigualdad del triángulo inversa).

Demostración:

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a|+|a| && \text{Desg. del trig.} \\ |b| &\leq |b-a|+|a| && \\ -|b-a| &\leq |a|-|b| && \\ -|a-b| &\leq |a|-|b| && (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b|+|b| && \text{Desg. del trig.} \\ |a| &\leq |a-b|+|b| && \\ |a|-|b| &\leq |a-b| && (**) \end{aligned}$$

De las desigualdades (*) y (**) sigue que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. $\square$

Corolario: $|a|-|b| \leq |a-b|$ y $|b|-|a| \leq |a-b|$. Por la desigualdad del triángulo inversa, $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$, de donde $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$. Por lo que,

$$|a|-|b| \leq |a-b| \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} -|a-b| &\leq |a|-|b| \\ -\big(|a|-|b|\big) &\leq |a-b| \\ |b|-|a| &\leq |a-b| \end{aligned}$$

h) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración: Por casos.

i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. Por tanto, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. $\square$

Inducción matemática

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $1 \in A$.

ii) Si $n \in A$ entonces se verifica que $n+1 \in A$.

Lista de Ejercicios 6 (LE6)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si $n \in \mathbb{R}$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?

Respuesta: Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$, y si $n \in \mathbb{R}^+$, entonces $n+1 \in \mathbb{R}^+$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}^+$.

3) Sea $A := \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ es un conjunto inductivo}\}$. Demuestre que $A \neq \varnothing$ y que $C = \bigcap B$ es un conjunto inductivo.

Demostración: Claramente $A \neq \varnothing$, pues $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$.

Luego, por hipótesis, $\forall B \in A$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ por lo que $C \subseteq \mathbb{R}$. Además, $\forall B \in A$, se verifica que $1 \in B$. Consecuentemente, $1 \in C$. Por otra parte, si $n \in B$ para todo $B \in A$, tendremos que $n+1 \in B$, por lo que $n+1 \in C$. Por tanto, C es un conjunto inductivo. $\square$

Definición: Al conjunto C de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{N}$.

Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

a) La suma de números naturales es un número natural. (Cerradura de la suma en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \varnothing$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m+n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n+1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) La multiplicación de números naturales es un número natural. (Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{N}$).

Demostración:
Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \varnothing$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$ se verifica que $m \cdot n + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n+1)$, por lo que $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n+1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n+1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$. (Elemento mínimo de $\mathbb{N}$).

Demostración: Sea $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por la cerradura de la suma en $\mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n+1$. Por transitividad, $1 \leq n+1$, por lo que $n+1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, decimos que m es elemento mínimo de A si $m \in A$ y $m \leq a, \forall a \in A$.

d) $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Sabemos que $n \geq 1$, por lo que tenemos dos casos:

i) Si $n = 1$, tenemos que $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1$. Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

ii) Si $n > 1$, por transitividad $n > 0$, lo que implica que $\frac{1}{n} > 0$. Retomando la hipótesis,

$$\begin{aligned} n &> 1 \\ n \cdot \frac{1}{n} &> 1 \cdot \frac{1}{n} \\ 1 &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Como n es arbitrario, se verifica que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

e) Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n-1 \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, 1 \,\}$. Sea $m \in A$ con $m > 1$, tenemos que $m \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica que $m+1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(m+1) - 1 = m$, por lo que $(m+1) - 1 \in \mathbb{N}$. Como $m > 1$, por transitividad, $m > 0$, de donde sigue que $m + 1 > 1$, por lo que $m+1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

f) Sean m y n números naturales. Si $n < m$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < m,\ m - n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \,\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $1 + 1 \in \mathbb{N}$. Además, $1 > 0$, de donde sigue que $1 + 1 > 1$. Luego, $1 = (1+1) - 1 \in \mathbb{N}$, por lo que $1 \in A$.

Si $n \in A$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m - n \in \mathbb{N}$ y $n < m$, de donde obtenemos $n + 1 < m + 1$. Como $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $m+1 \in \mathbb{N}$. Notemos que $m + 1 - (n+1) = m - n$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, se cumple que $A = \mathbb{N}$. $\square$

Corolario:

i) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n < x < n+1$, entonces x no es un número natural.

Por hipótesis, $n < x$, de donde sigue que $n + (-x+1) < x + (-x+1)$, osea, $n - x + 1 < 1$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que $x \in \mathbb{N}$, de la hipótesis $x < n+1$ sigue que $n + 1 - x \in \mathbb{N}$, por este teorema, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, tenemos que $1 \leq n + 1 - x$. Esto implica que $1 \leq n + 1 - x < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural.

Nota: Otra forma de plantear esta proposición es la siguiente:

ii) Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $m - 1 < x < m$, entonces x no es un número natural.

Supongamos que $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $x < m$ y $m - 1 < x$, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x + (-m+1) &< m + (-m+1) \qquad & (m-1) + 1 &< (x) + 1 \\ x + 1 - m &< 1 & m &< x + 1 \end{aligned}$$

Por hipótesis $x \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, sigue que $x + 1 \in \mathbb{N}$. Como $m < x + 1$, con $m \in \mathbb{N}$, por este teorema se verifica que $x + 1 - m \in \mathbb{N}$, y como 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, sigue que $1 \leq x + 1 - m$. Esto implica que $1 \leq x + 1 - m < 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural.

iii) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo. (Principio del buen orden).
Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \varnothing$. Supongamos que A no tiene elemento mínimo.
Como $A \neq \varnothing$, se tiene que $\exists x \in A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$. Sabemos que 1 es elemento mínimo de $\mathbb{N}$, por lo que, en particular $1 \leq x$. Como A no tiene elemento mínimo, no puede ser el caso que $x = 1$, pues $1 \leq x, \forall x \in A$. De esto sigue que $1 < x$, y por este teorema, se verifica que $x - 1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x - 1 < x$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $x + 1 \in \mathbb{N}$, y sabemos que $x < x + 1$. De este modo, tenemos que $x - 1 < x < x + 1$, pero por este teorema, esta desigualdad implica que x no es un número natural, lo que es una contradicción. Por tanto, A tiene elemento mínimo.

iv) Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que S es un conjunto inductivo, entonces $S = \mathbb{N}$. (Principio de inducción matemática).
Supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ es no vacío (ya que de serlo, tendríamos $S = \mathbb{N}$). Pr definición, $1 \in S$ y por esto, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Como $\mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$, por el principio del buen orden, tiene elemento minimo. Sea m el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, como $m \in \mathbb{N}$, sigue que $1 \leq m$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ y $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$ tenemos que $m \neq 1$, por lo que $m > 1$, y por este teorema, $m - 1 \in \mathbb{N}$. Debido a que $m - 1 < m$ y m es el elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, tenemos que $m - 1 \notin \mathbb{N} \setminus S$, osea $m - 1 \in S$. Luego, dado que S es un conjunto inductivo, se verifica que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo que es una contradicción. Por tanto, $S = \mathbb{N}$.

v) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.
Por definición, $x > 0$, por lo que $n < n + x$. Por hipótesis, $x + n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, por este teorema, $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 8 (LE8)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \leq a^{2n}\, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n\, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a\, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n\, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$0 \leq a^1$$
$$0 \leq a$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$0 \leq a^k$$
$$0 \cdot a \leq a^k \cdot a$$
$$0 \leq a^{k+1}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$a^1 < b^1$$
$$a < b$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$a^k \cdot a < b^k \cdot b$$
$$a^{k+1} < b^{k+1}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que A está acotado:

- superiormente si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. En este caso decimos que M es cota superior de A.
- inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a, \forall a \in A$. En este caso decimos que m es cota inferior de A.
- si está acotado superior e inferiormente.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A es no vacío y está acotado superiormente, decimos que un número real S es supremo de A si S satisface las siguientes condiciones:

- S es cota superior de A.
- Si K es cota superior de A, entonces $S \leq K$.

En este caso escribimos $S = \sup(A)$.

Definición: . Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A.
- Si K es cota inferior de A, entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A.

En este caso escribimos $M = \inf(A)$

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Demuestre lo siguiente:

1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. A está acotado si y solo si A está acotado superior e inferiormente.

   Demostración:

$\Rightarrow$) ads

$\Leftarrow$) asdf

$\square$

2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

Demostración: Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$. $\square$

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

Demostración: Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$. $\square$

4. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración: **i)** Sea M una cota superior de S tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$. Si M no es el supremo de S, tendríamos que $\exists V$ tal que $s_@a \leq V < M$. Elegimos $\varepsilon = M - V$, con lo que $V < s_\varepsilon$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, M es el supremo de S.

ii) Sea M el supremo de S y $\varepsilon > 0$. Como $M < M + \varepsilon$, entonces $M - \varepsilon$ no es una cota superior de S, por lo que $\exists s_\varepsilon$ tal que $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. $\square$

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Teorema. El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real M tal que $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo.

Sea $L := \sup(\mathbb{N})$. Como $L - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, ya que $L > L - 1$ y L es la cota superior más pequeña, existe un núero natural n_0 tal que $n_0 > L - 1$, lo cual implica que $n_0 + 1 < L$, pero esto contradice la hipótesis de que L es supremo de $\mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. $\square$

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente. El conjunto $-A := \{ -a : a \in A \}$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, $-A$ tiene supremo. Sea $M := \sup(A)$, entonces $M \geq -a, \forall -a \in -A$. Notemos que $-M \leq a, \forall a \in A$, esto es $-M$ es el ínfimo de A. $\square$

Propiedad Arquimediana del conjunto de los números reales

Para cada número real x existe un número natural n tal que $x < n$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto contradice el teorema que establece que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente. Por tanto, se satisface la propiedad arquimediana del conjunto de los números reales. $\square$

Defining.

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.
- Al conjunto $-n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^-$.
- Al conjunto $\mathbb{N}$ también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^+$.

Observación. Los conjuntos $\mathbb{N}$, 0, $-n : n \in \mathbb{N}$ son disjuntos por pares.

Lista de Ejercicios 9 (LE9)

a) Si $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, entonces $\inf S = 0$.

b) Si $t > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < t$.

c) Si $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, demuestre que $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

Demostración

a) Sabemos que $0 < n^{-1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que S está acotado inferiormente por 0; de esto sigue que S tiene ínfimo. Sea $w := \inf S$. Por definición, $\frac{1}{n} \geq w \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $w > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0$ tal que $\frac{1}{w} < n_0$, de donde sigue que $w < \frac{1}{n_0}$ con $\frac{1}{n_0} \in S$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = 0$. $\square$

b) Por la propiedad arquimediana $\exists n$ tal que $\frac{1}{t} < n$. Como n y t son mayores que 0, sigue que $0 < \frac{1}{n} < t$. $\square$

c) Por la propiedad arquimediana, el conjunto $E := \{ m \in \mathbb{N} : y < m \}$ es no vacío. Además, por el principio del buen orden, $\exists n \in E$ tal que $n \leq m, \forall m \in E$. Notemos que $n - 1 < n$, por lo que $n - 1 \notin E$, lo que implica que $n - 1 \leq y < n$. $\square$

d) Definimos el conjunto $A := \{ n \in \mathbb{Z} : x < n \}$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$, así $n_0 \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Sabemos también que A está acotado inferiormente, de manera que A tiene elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de A. Notemos que $n - 1 < n$, de donde sigue que $n - 1 \leq x < n$. Luego, $n - 1 \in \mathbb{Z}$, al que definimos como $m = n - 1$, por lo que $m \leq x < m + 1$.

Finalmente, supongamos que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq x < m + 1$ y $n \leq x < n + 1$. Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, $m > n$. Por ello,

$$\begin{aligned} n < m \leq x &< n + 1 \\ n < m &< n + 1 \\ 0 < m - n &< 1 \end{aligned}$$

Lo que contradice la cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$. Por tanto, $m = n$, es decir, el número entero que satisface $n \leq x < n + 1$ es único. $\square$

Funciones

Definición: Sean a y b objetos cualesquiera, definimos la pareja ordenada (a, b) como sigue:

$$(a, b) \coloneqq \{ \{ a \} , \{ a, b \} \}$$

Al objeto a lo llamaremos primer componente de la pareja ordenada (a, b) y al objeto b lo llamaremos segundo componente de la pareja ordenada (a, b).

Teorema: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Demostración: Pendiente

Entorno

Definición: Sea a, b números reales, definimos el intervalo

- abierto, como $(a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$
- semicerrado-abierto, como $[a, b) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$
- semiabierto-cerrado, como $(a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$
- cerrado, como $[a, b] \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.

Definición. Sea $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario-ε de ℓ es el conjunto $V_\varepsilon(\ell) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$.

Notemos que por el teorema para eliminar valores absolutos en algunas desigualdades,

$$|x - \ell| < \varepsilon = -\varepsilon < x - \ell < \varepsilon = \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Por lo que el vecindario-ε de ℓ es equivalente al intervalo abierto: $(\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon)$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.
Demostración: Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. En particular, $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

b) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.
Demostración: Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

c) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.
Demostración: Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. De este modo, $|x - a| = x - a$ con $x - a = 0$. Por tanto, $x = a$. $\square$

d) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.
Demostración:

- **i)** Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2a - 1 < y$, por lo que $0 < y$.
- **ii)** Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$. Sumando a en esta desigualdad obtenemos $0 < y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, entonces $0 < y < 1$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$. $\square$

e) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.
Demostración: Supongamos que para toda $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ se cumple que $U_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) \neq \varnothing$. Entonces, existe x tal que $x \in U_\varepsilon(a)$ y $x \in V_\varepsilon(b)$. Como en ambas vecindades tenemos $\varepsilon > 0$ arbitraria, por (a) de LE5, sigue que $x = a$ y $x = b$, pero esto contradice el supuesto de que $a \neq b$. Por tanto, deben existir $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Llamamos a x_n el n-ésimo término. Otras etiquetas para la sucesión son (x_n), $(x_n : n \in \mathbb{N})$, que denotan orden y se diferencian del rango de la función $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Una sucesión (x_n) es convergente si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) de modo que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Decimos que (x_n) converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y llamamos a ℓ el límite de la sucesión y escribimos $\lim(x_n) = \ell$.

Definición: Una sucesión es divergente si no es convergente.

Definición: Una sucesión (x_n) está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lista de Ejercicios 10 (LE10)

Demuestre lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

a) Sean ℓ y ℓ' límites de la sucesión (x_n). Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existen $n', n'' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n \geq n'} - \ell| < \varepsilon$ y $|x_{n \geq n''} - \ell'| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, si $n' < n''$, los términos x_n con $n \geq n'' > n'$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \tag{1}$$

$$|x_n - \ell'| < \varepsilon \tag{2}$$

Por (c) de LE4, se cumple que $|x_n - \ell'| = |\ell' - x_n|$ y por esto,

$$|\ell' - x_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Tomando (1) y (3), por (d) de LE3, se verifica que

$$|\ell' - x_n| + |x_n - \ell| < 2\varepsilon$$

Y, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \big|(\ell' - x_n) + (x_n - \ell)\big| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \\ |\ell' - \ell| &\leq |\ell' - x_n| + |x_n - \ell| \end{aligned}$$

De este modo, $|\ell' - \ell| < 2\varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, en particular se verifica para $\varepsilon = {}^{\varepsilon_0}\!/_2$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario pero fijo, así obtenemos que

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &< 2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \\ |\ell' - \ell| &< \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Finalmente, como ε_0 es arbitrario, por (a) de LE5, sigue que $\ell' = \ell$. Por tanto, el límite de cada sucesión convergente es único. $\square$

b) Sea (x_n) una sucesión convergente. Por definición, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n con $n \geq n_\varepsilon$ satisfacen que

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$
$$|x_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell|$$

Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$\big|(x_n - \ell) + \ell\big| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$
$$|x_n| \leq |x_n - \ell| + |\ell|$$

Por transitividad, $|x_n| < \varepsilon + |\ell|$, lo que implica que $\{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está cotado superiormente.

Por otra parte, el conjunto de índices $n < n_\varepsilon$ está acotado, y por esto, $\{x_{n < n_\varepsilon}\}$ es finito, por lo que tiene cota superior.

Finalmente, el conjunto $\{x_{n<n_\varepsilon}\} \cup \{x_{n \geq n_\varepsilon}\}$ está acotado superiormente, y por tanto, (x_n) está acotada. $\square$

Teorema. Todo conjunto finito no vacío tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, para todo conjunto finito $A \neq \varnothing$, $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_n\}$ no vacío.

Procedemos por inducción sobre el número de elementos de A.

i) Si $n = 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1\}$, por lo que $m = a_1$ y $M = a_1$ cumplen la condición requerida.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$.

iii) Si $n = k + 1$, tenemos $A \coloneqq \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, el conjunto

$$A' \coloneqq A \setminus \{a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

tiene elemento mínimo y máximo, es decir, $\exists m', M' \in A'$ tales que $\forall a' \in A', m' \leq a' \leq M'$.

Notemos que para cada $a \in A$ tenemos $a = a_{k+1}$ o $a \in A'$. Por tricotomía, a_{k+1} cumple con alguno de los siguientes casos:

a) Si $a_{k+1} < m'$, tenemos que $m = a_{k+1} < m' \leq a' \leq M' = M$.

b) Si $m' \leq a_{k+1} \leq M'$, entonces $m = m' \leq a_{k+1} \leq M' = M$.

c) Si $m' < a_{k+1}$, tenemos que $m = m' \leq a' \leq M' < a_{k+1} = M$.

En cualquier caso $\exists m, M \in A$ tales que $m \leq a \leq M, \forall a \in A$. $\square$