

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №4
по «Вычислительная Математика»

Выполнил:

Студент группы Р3207
Разинкин А.В.

Преподаватели:

Рыбаков С.Д.

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель лабораторной работы	3
Порядок выполнения работы.....	3
Рабочие формулы	4
Вычислительная реализация задачи.....	5
Ссылка на исходный код программы (GitHub)	7
Пример работы программы.....	8
Вывод.....	19

Цель лабораторной работы

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

Порядок выполнения работы

Задание вычислительной части:

$$y = \frac{18x}{x^4 + 10}, x \in [0, 4] \quad h = 0,4$$

- 1) Сформировать таблицу табулирования заданной функции на указанном интервале;
- 2) Построить линейное и квадратичное приближение по 11 точкам заданного интервала;
- 3) Найти среднеквадратические отклонения для каждой аппроксимирующей функции. Ответы дать с тремя знаками после запятой;
- 4) Выбрать наилучшее приближение.
- 5) Построить графики заданной функции, а также полученные линейное и квадратичное приближения;
- 6) Привести в отчете **подробные вычисления**.

Рабочие формулы

Формула критерия минимизации:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2$$

Линейная аппроксимация:

$$\begin{aligned} \varphi(x, a, b) &= ax + b \\ S = S(a, b) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [ax_i + b - y_i]^2 \\ \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \end{aligned}$$

Коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \end{aligned}$$

Квадратичная аппроксимация:

$$\begin{aligned} \varphi(x, a_0, a_1, a_2) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ S = S(a_0, a_1, a_2) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - y_i]^2 \\ \begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases} \end{aligned}$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}}$$

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\varphi}_i)^2}$$
$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Вычислительная реализация задачи

Таблица табулирования:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,718	1,383	1,789	1,740	1,385	1,001	0,705	0,501	0,364	0,271

Решение задачи линейной аппроксимации:

$$\sum_{i=0}^{10} x_i = 22$$
$$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 61,6$$
$$\sum_{i=0}^{10} x_i y_i = 17,4684$$
$$\sum_{i=0}^{10} y_i = 9,857$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 61,5a + 22b = 17,4684 \\ 22a + 11b = 9,857 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} a = -0,128 \\ b = 1,153 \end{cases}$$

Получили аппроксимирующую линейную функцию:

$$\varphi(x) = -0,128x + 1,153$$

Таблица табулирования:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,718	1,383	1,789	1,740	1,385	1,001	0,705	0,501	0,364	0,271
φ_i	1,153	1,102	1,051	1,000	0,948	0,897	0,846	0,795	0,743	0,692	0,641

Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - y_i)^2}{11}} \approx 0.557$$

Решение задачи квадратичной аппроксимации:

$$\sum_{i=0}^{10} x_i = 22$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 61,6$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^3 = 193,6$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^4 = 648,525$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i y_i = 17,4684$$

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 y_i = 39,052$$

$$\sum_{i=0}^{10} y_i = 9,857$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 11a_0 + 22a_1 + 61,6a_2 = 9,857 \\ 22a_0 + 61,6a_1 + 193,6a_2 = 17,4684 \\ 61,6a_0 + 193,6a_1 + 648,525a_2 = 39,052 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} a_0 = 0,368 \\ a_1 = 1,177 \\ a_2 = -0,326 \end{cases}$$

Получили аппроксимирующую квадратичную функцию:

$$\varphi(x) = 0,368 + 1,177x - 0,326x^2$$

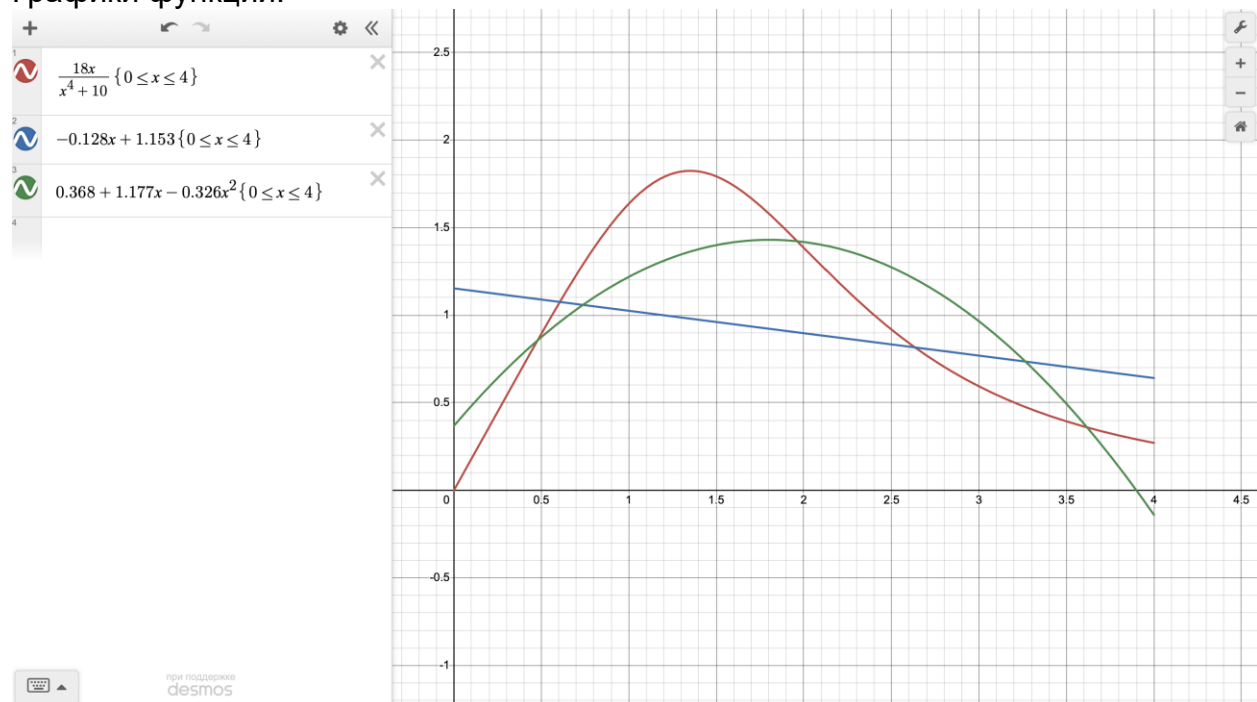
Среднеквадратичное отклонение:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - y_i)^2}{11}} \approx 0.312$$

Таблица табулирования:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,718	1,383	1,789	1,740	1,385	1,001	0,705	0,501	0,364	0,271
φ_i	0,368	0,787	1,101	1,311	1,417	1,418	1,315	1,108	0,796	0,380	-0,140

Графики функций:



Ссылка на исходный код программы (GitHub)

https://github.com/DecafMangoITMO/ITMO/tree/main/ComputationalMathematics/lab_4

Пример работы программы

Введите 8-12 точек в формате:

x1 y1
x2 y2
...
xn yn

Для прекращения ввода нажмите Enter.

Для завершения работы программы введите exit.

1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 1.0x + 0.0$

№ п.п.	X	Y	$y=ax+b$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
2	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000
3	3.000000	3.000000	3.000000	0.000000
4	4.000000	4.000000	4.000000	0.000000
5	5.000000	5.000000	5.000000	0.000000
6	6.000000	6.000000	6.000000	0.000000
7	7.000000	7.000000	7.000000	0.000000
8	8.000000	8.000000	8.000000	0.000000

Коэффициент корреляции: $r = 1.0$

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 0.0$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 1.0$ - Высокая точность аппроксимации.

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 3.343730521224001E-15 + 0.9999999999999984x + 1.5860328923216658E-16x^2$

№ п.п.	X	Y	$y=a_0+a_1x+a_2x^2$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
2	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000
3	3.000000	3.000000	3.000000	0.000000
4	4.000000	4.000000	4.000000	0.000000
5	5.000000	5.000000	5.000000	-0.000000
6	6.000000	6.000000	6.000000	0.000000
7	7.000000	7.000000	7.000000	0.000000
8	8.000000	8.000000	8.000000	0.000000

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 1.1018648905114063E-15$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 1.0$ - Высокая точность аппроксимации.

СТЕПЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 1.0x^{1.0}$

№ п.п.	X	Y	$y=ax^x$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
2	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000
3	3.000000	3.000000	3.000000	0.000000
4	4.000000	4.000000	4.000000	0.000000
5	5.000000	5.000000	5.000000	0.000000
6	6.000000	6.000000	6.000000	0.000000

7	7.000000	7.000000	7.000000	0.000000
8	8.000000	8.000000	8.000000	0.000000

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 0.0$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 1.0$ - Высокая точность аппроксимации.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 1.0907554204238947e^{0.275267746752735x}$

№ п.п.	X	Y	$y=ae^{bx}$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.436398	0.436398
2	2.000000	2.000000	1.891568	-0.108432
3	3.000000	3.000000	2.490974	-0.509026
4	4.000000	4.000000	3.280322	-0.719678
5	5.000000	5.000000	4.319801	-0.680199
6	6.000000	6.000000	5.688673	-0.311327
7	7.000000	7.000000	7.491318	0.491318
8	8.000000	8.000000	9.865191	1.865191

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 0.8107997968581434$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.874861922803126$ - Удовлетворительная точность аппроксимации.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 3.3381688220873196 \ln(x) + 0.07500565242988973$

№ п.п.	X	Y	$y=a \ln(x)+b$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	0.075006	-0.924994
2	2.000000	2.000000	2.388848	0.388848

3	3.000000	3.000000	3.742359	0.742359	
4	4.000000	4.000000	4.702690	0.702690	
5	5.000000	5.000000	5.447581	0.447581	
6	6.000000	6.000000	6.056201	0.056201	
7	7.000000	7.000000	6.570782	-0.429218	
8	8.000000	8.000000	7.016533	-0.983467	

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 0.652553750916286$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.9188902099362068$ - Удовлетворительная точность аппроксимации.

Наиболее точной аппроксимацией обладают модели:

- > ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ
- > КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ
- > СТЕПЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

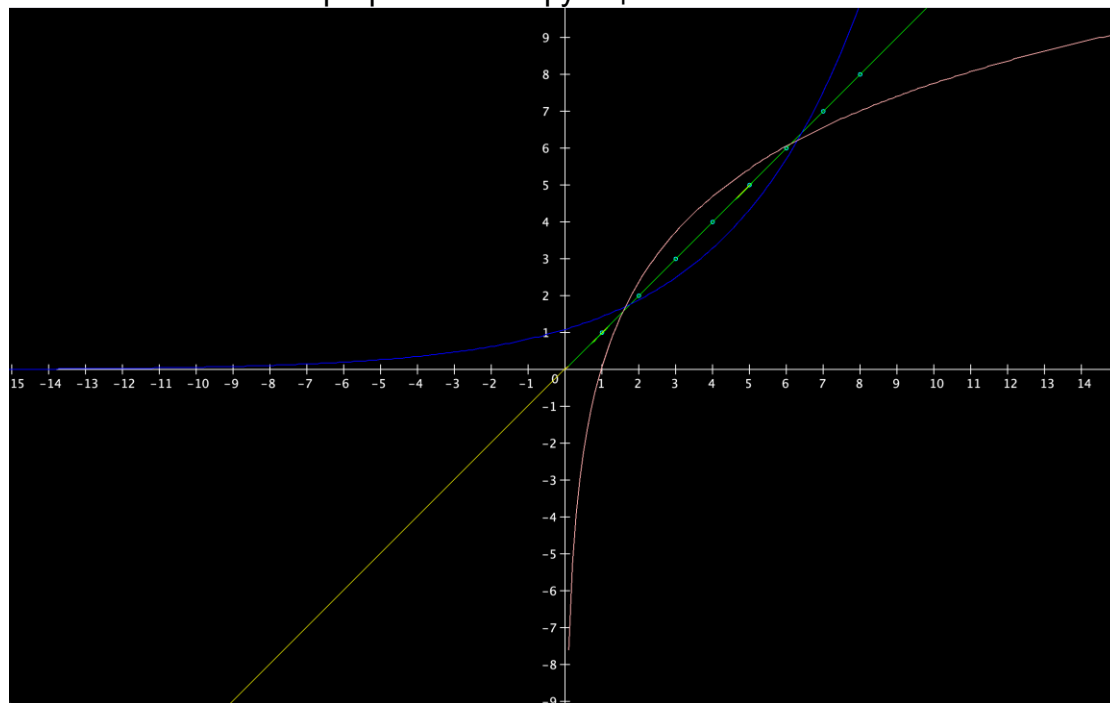
Красная линия - линейная функция

Желтая линия - квадратичная функция

Зеленая линия - степенная функция

Синяя линия - экспоненциальная функция

Розовая линия - логарифмическая функция



Введите 8-12 точек в формате:

x1 y1

x2 y2

...

xn yn

Для прекращения ввода нажмите Enter.

Для завершения работы программы введите exit.

-4 16

-3 9

-2 4

-1 1

0 0

1 1

2 4

3 9

4 16

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 0.0x + 6.666666666666667$

№ п.п.	X	Y	$y=ax+b$	ϵ_i
1	-4.000000	16.000000	6.666667	-9.333333
2	-3.000000	9.000000	6.666667	-2.333333
3	-2.000000	4.000000	6.666667	2.666667
4	-1.000000	1.000000	6.666667	5.666667
5	0.000000	0.000000	6.666667	6.666667
6	1.000000	1.000000	6.666667	5.666667
7	2.000000	4.000000	6.666667	2.666667
8	3.000000	9.000000	6.666667	-2.333333

	9		4.000000		16.000000		6.666667		-9.333333	
--	---	--	----------	--	-----------	--	----------	--	-----------	--

Коэффициент корреляции: $r = 0.0$

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 5.849976258261415$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 2.220446049250313E-16$ - Недостаточная точность аппроксимации.

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 0.0 + 0.0x + 1.0x^2$

№ п.п.	X	Y	$y=a_0+a_1x+a_2x^2$	ϵ_i
1	-4.000000	16.000000	16.000000	0.000000
2	-3.000000	9.000000	9.000000	0.000000
3	-2.000000	4.000000	4.000000	0.000000
4	-1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
6	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000
7	2.000000	4.000000	4.000000	0.000000
8	3.000000	9.000000	9.000000	0.000000
9	4.000000	16.000000	16.000000	0.000000

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 0.0$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 1.0$ - Высокая точность аппроксимации.

СТЕПЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

На основе введенных данных не удалось построить степенную аппроксимацию.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

На основе введенных данных не удалось построить экспоненциальную аппроксимацию.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

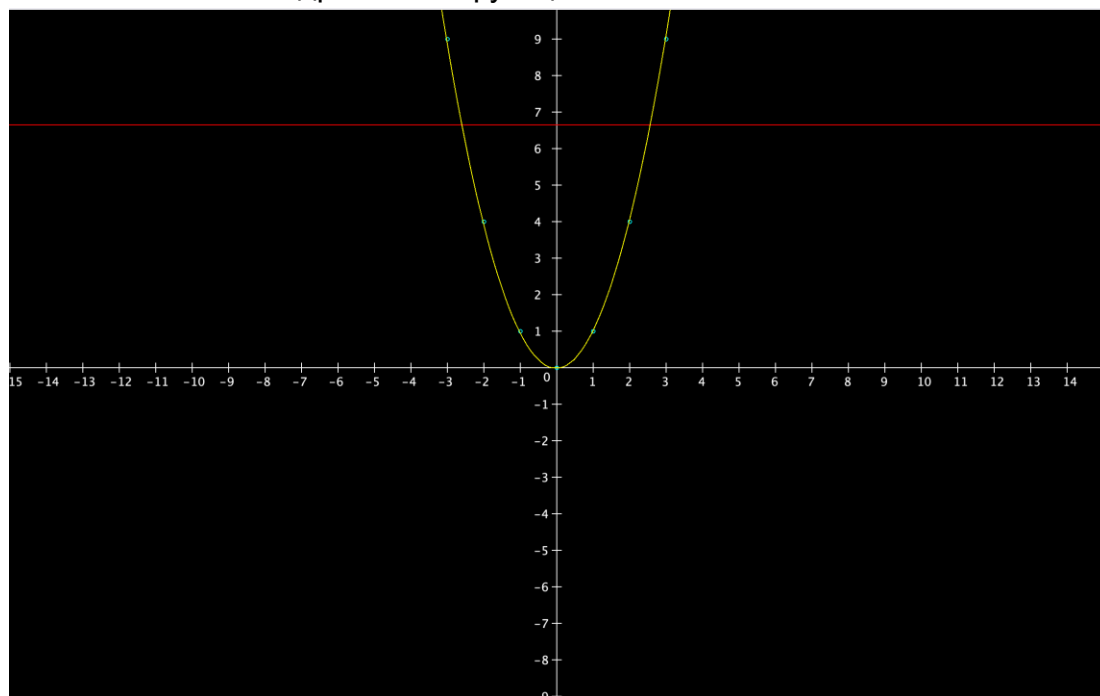
На основе введенных данных не удалось построить логарифмическую аппроксимацию.

Наиболее точной аппроксимацией обладают модели:

-> КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Красная линия - линейная функция

Желтая линия - квадратичная функция



Введите 8-12 точек в формате:

x1 y1

x2 y2

...

xn yn

Для прекращения ввода нажмите Enter.

Для завершения работы программы введите exit.

1 1

2 3

3 5
4 4
5 7
6 3
7 9
8 1

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 0.3214285714285715x + 2.6785714285714284$

№ п.п.	X	Y	$y=ax+b$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	3.000000	2.000000
2	2.000000	3.000000	3.321429	0.321429
3	3.000000	5.000000	3.642857	-1.357143
4	4.000000	4.000000	3.964286	-0.035714
5	5.000000	7.000000	4.285714	-2.714286
6	6.000000	3.000000	4.607143	1.607143
7	7.000000	9.000000	4.928571	-4.071429
8	8.000000	1.000000	5.250000	4.250000

Коэффициент корреляции: $r = 0.2812042348056526$

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 2.513357174321685$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.07907582167263272$ - Недостаточная точность аппроксимации.

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = -2.053571428571476 + 3.1607142857143096x + -0.31547619047619296x^2$

№ п.п.	X	Y	$y=a_0+a_1x+a_2x^2$	ϵ_i
--------	---	---	---------------------	--------------

1	1.000000	1.000000	0.791667	-0.208333
2	2.000000	3.000000	3.005952	0.005952
3	3.000000	5.000000	4.589286	-0.410714
4	4.000000	4.000000	5.541667	1.541667
5	5.000000	7.000000	5.863095	-1.136905
6	6.000000	3.000000	5.553571	2.553571
7	7.000000	9.000000	4.613095	-4.386905
8	8.000000	1.000000	3.041667	2.041667

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 2.0559510022881193$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.3837726434537371$ - Недостаточная точность аппроксимации.

СТЕПЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 1.8430199604935267x^{0.41914322917370933}$

№ п.п.	X	Y	$y=ax^x$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.843020	0.843020
2	2.000000	3.000000	2.464363	-0.535637
3	3.000000	5.000000	2.920870	-2.079130
4	4.000000	4.000000	3.295182	-0.704818
5	5.000000	7.000000	3.618250	-3.381750
6	6.000000	3.000000	3.905592	0.905592

7	7.000000	9.000000	4.166268	-4.833732	
8	8.000000	1.000000	4.406097	3.406097	

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 2.5748771373702235$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.11546472365978944$ - Недостаточная точность аппроксимации.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 2.5215098185194047e^{0.05381190904735709x}$

№ п.п.	X	Y	$y=ae^{bx}$	ϵ_i	
1	1.000000	1.000000	2.660914	1.660914	
2	2.000000	3.000000	2.808026	-0.191974	
3	3.000000	5.000000	2.963271	-2.036729	
4	4.000000	4.000000	3.127098	-0.872902	
5	5.000000	7.000000	3.299983	-3.700017	
6	6.000000	3.000000	3.482426	0.482426	
7	7.000000	9.000000	3.674956	-5.325044	
8	8.000000	1.000000	3.878130	2.878130	

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 2.6988029326084093$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.04767759566716223$ - Недостаточная точность аппроксимации.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ:

Полученная аппроксимирующая функция: $y = 1.619146468715862\ln(x) + 1.9786993322357558$

№ п.п.	X	Y	$y = a \ln(x) + b$	ϵ_i
1	1.000000	1.000000	1.978699	0.978699
2	2.000000	3.000000	3.101006	0.101006
3	3.000000	5.000000	3.757514	-1.242486
4	4.000000	4.000000	4.223313	0.223313
5	5.000000	7.000000	4.584615	-2.415385
6	6.000000	3.000000	4.879820	1.879820
7	7.000000	9.000000	5.129413	-3.870587
8	8.000000	1.000000	5.345620	4.345620

Среднеквадратичное отклонение: $\delta = 2.392576036030425$

Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.16546039716635086$ - Недостаточная точность аппроксимации.

Наиболее точной аппроксимацией обладают модели:

-> КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

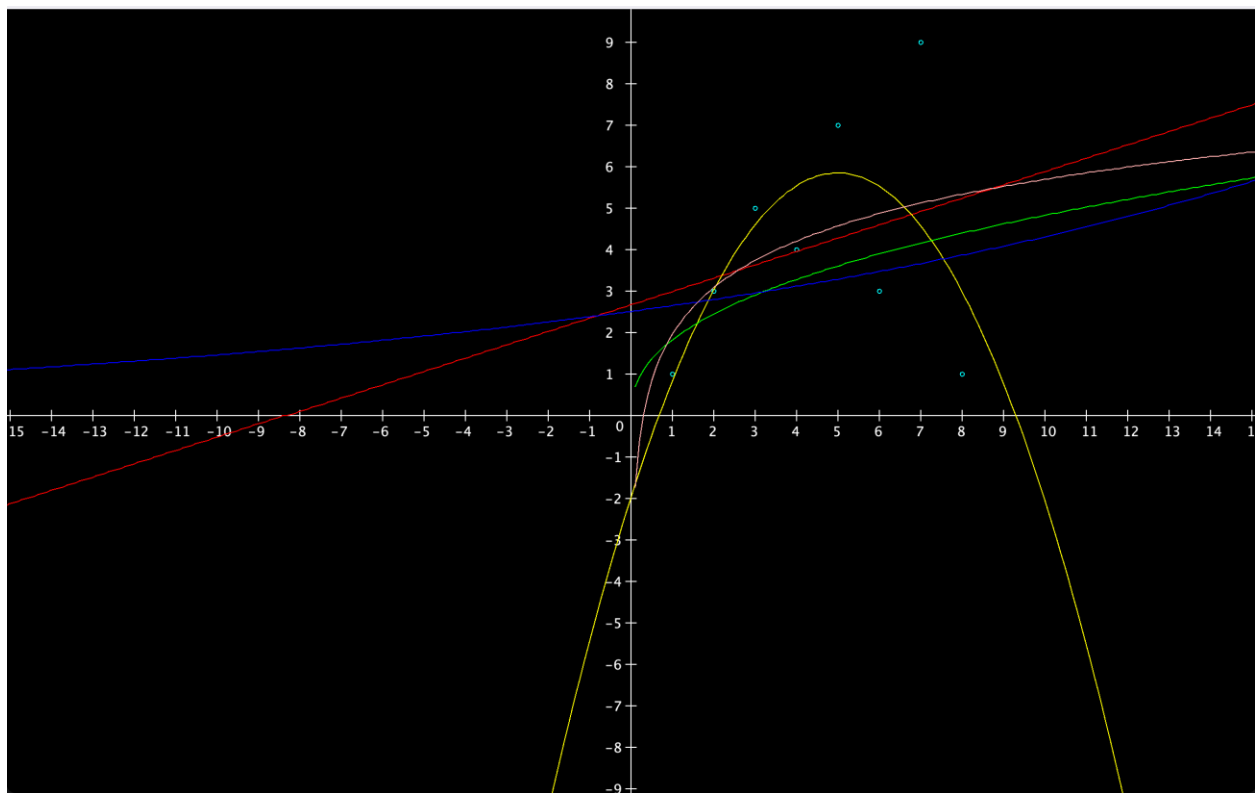
Красная линия - линейная функция

Желтая линия - квадратичная функция

Зеленая линия - степенная функция

Синяя линия - экспоненциальная функция

Розовая линия - логарифмическая функция



Вывод

Я научился аппроксимировать различными функциями. Я молодец.