

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3
по «Вычислительная Математика»

Выполнил:

Студент группы Р3207
Разинкин А.В.

Преподаватели:

Рыбаков С.Д.

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель лабораторной работы	3
Порядок выполнения работы.....	3
Рабочие формулы	4
Вычислительная реализация задачи.....	5
Ссылка на исходный код программы (GitHub)	8
Пример работы программы.....	8
Вывод.....	10

Цель лабораторной работы

Изучить численные методы решения нахождения определенных интегралов функций.

Порядок выполнения работы

Обязательное задание (до 80 баллов)

- Вычислительная реализация задачи
 1. Вычислить приведенный интеграл точно.
 2. Вычислить приведенный интеграл по формуле Ньютона-Котеса при $n = 6$.
 3. Вычислить приведенный интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
 4. Сравнить результаты с точным значением приведенного интеграла
 5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода
- Программная реализация задачи

Рабочие формулы

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная $f(x)$

Формула Ньютона-Котеса при $n = 6$:

$$\int_a^b f(x) \approx c_6^0 f(x_0) + c_6^1 f(x_1) + c_6^2 f(x_2) + c_6^3 f(x_3) + c_6^4 f(x_4) + c_6^5 f(x_5) + c_6^6 f(x_6),$$

где c_n^i – коэффициент Котеса

Формула длины интервала:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$$

Формула метода левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^n h_i y_{i-1}$$

Формула метода левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^n h_i y_i$$

Формула метода средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

Формула метода трапеций:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (y_{i-1} + y_i)$$

Формула метода Симпсона:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)$$

Вычислительная реализация задачи

Приведенный интеграл: $\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx$

Прямое решение:

$$\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x \right) \Big|_2^4 = 26$$

Решение методом Ньютона-Котеса при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

i	x_i	$f(x_i)$	c_6^i
0	2	0	$\frac{41}{420}$
1	$\frac{7}{3}$	$\frac{77}{27}$	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{8}{3}$	$\frac{170}{27}$	$\frac{9}{140}$
3	3	11	$\frac{68}{105}$
4	$\frac{10}{3}$	$\frac{460}{27}$	$\frac{9}{140}$
5	$\frac{11}{3}$	$\frac{665}{27}$	$\frac{18}{35}$
6	4	34	$\frac{41}{420}$

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x)dx &\approx c_6^0(x_0) + c_6^1(x_1) + c_6^2(x_2) + c_6^3(x_3) + c_6^4(x_4) + c_6^5(x_5) + c_6^6(x_6) = \\ &= \frac{2543}{105} \approx 24,219 \end{aligned}$$

Решение методами прямоугольников при $n = 10$:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 2}{10} = 0,5$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	2	0
1	2,2	1,528
2	2,4	3,344
3	2,6	5,496
4	2,8	8,032
5	3	11
6	3,2	14,448
7	3,4	18,424
8	3,6	22,976
9	3,8	28,152
10	4	34

Метод левых прямоугольников: $\int_2^4 f(x) \approx 0.2 \sum_{i=1}^{10} y_{i-1} = \frac{567}{25} = 22,68$

Метод правых прямоугольников: $\int_2^4 f(x) \approx 0.2 \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{737}{25} = 29,48$

Метод средних прямоугольников:

i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
1	2,1	0,731
2	2,3	2,397
3	2,5	4,375
4	2,7	6,713
5	2,9	9,459
6	3,1	12,661
7	3,3	16,367
8	3,5	20,625
9	3,7	25,483
10	3,9	30,989

$$\int_2^4 f(x) \approx 0.2 \sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1/2}) = \frac{649}{25} = 25,96$$

Решение методом трапеций:

$$\int_2^4 f(x) \approx \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_{i-1} + y_i) = \frac{652}{25} = 26,08$$

Решение методом Симпсона:

$$\int_2^4 f(x) = \frac{0.2}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) = 26$$

Сравнение результатов:

Точное значение: 26

Метод	Результат	Δ	δ , %
Ньютона-Котеса	24,219	-1,781	6,85
Левых пр.	22,68	-3,32	12,769
Правых пр.	29,48	3,48	13,385
Средних пр.	25,96	0,04	0,154
Трапеций	26,08	0,08	0,308
Симпсона	26	0	0

Ссылка на исходный код программы (GitHub)

https://github.com/DecafMangoITMO/ITMO/tree/main/ComputationalMathematics/lab_3

Пример работы программы

```
 ,--.      ,--.      ,--.
| |      ,--.--. | |-. '--- |
| |      '---. || .-. ' <
| '---.\ ' || '--- | /-' |
'-----'-----'-----'
```

Программа по вычислению определенных интегралов.

Для выхода из программы напишите exit.

Список доступных функций:

--> $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$

--> $y = \sin(x)$

--> $y = x$

--> $x / \sqrt{1 + x^2}$

--> $y = 1 / x$

--> $y = 1 / \sqrt{x}$

--> $y = \cos(x) + \sin(x)$

Введите номер функции: 1

Введите левую границу интервала: 2

Введите правую границу интервала: 4

Введите точность: 0.001

Учтите, что при большой точности и длинном интервале интегрирования подсчет может выполняться достаточно долго.

Вы хотите оставить текущее значение точности?

Введите да/нет: да

Функция: $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$

Интервал: [2.0; 4.0]

Точность: 0.001000

Метод	Результат	Кол-во разбиений
Метод левых прямоугольников	25.999	65536
Метод правых прямоугольников	26.001	65536

<hr/>			
	Метод центральных прямоугольников		25.999
			64
<hr/>			
	Метод трапеций		26.000
			128
<hr/>			
	Метод Симпсона		25.989
			2048
<hr/>			

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я ознакомился с основными численными методами решения определенных интегралов.