Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

по «Методы Оптимизации»

Выполнил:

Студент группы P3207
Разинкин А.В.

Преподаватели:

Селина Е.Г.

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель лабораторной работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов

Порядок выполнения работы

1. Решение нелинейного уравнения:

    - Правый корень уточняется методом Ньютона
    - Левый корень уточняется методом половинного деления
    - Центральный корень уточняется методом простой итерации

2. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации
3. Программная реализация четырех методов:

    - Метод хорд (для уравнений)
    - Метод Ньютона (для уравнений)
    - Метод простой итерации (для уравнений)
    - Метод Ньютона (для систем)

Рабочие формулы

<u>1 часть. Решение нелинейного уравнения</u>

Метод Ньютона: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f\prime(x_{i-1})}$

Метод половинного деления: $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$

Метод простой итерации: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, где $x = \varphi(x)$ (x выражается из исходной функции $f(x)$

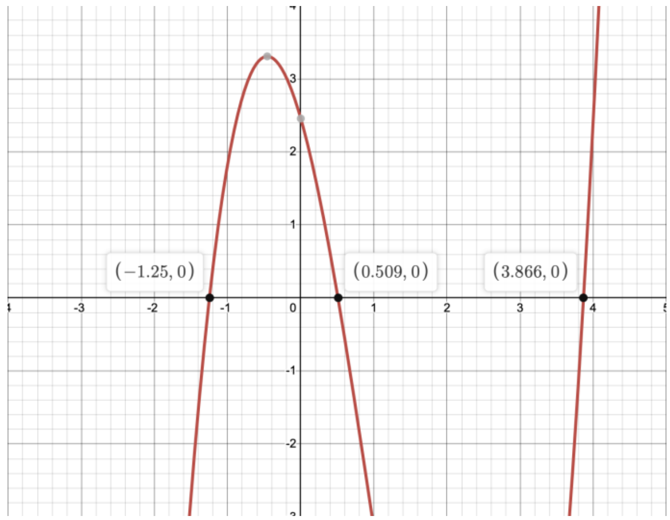
Метод хорд: $x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

Графики функций на исследуемом интервале

<u>1 часть. Решение нелинейного уравнения</u>

Функция: $f(x) = x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$

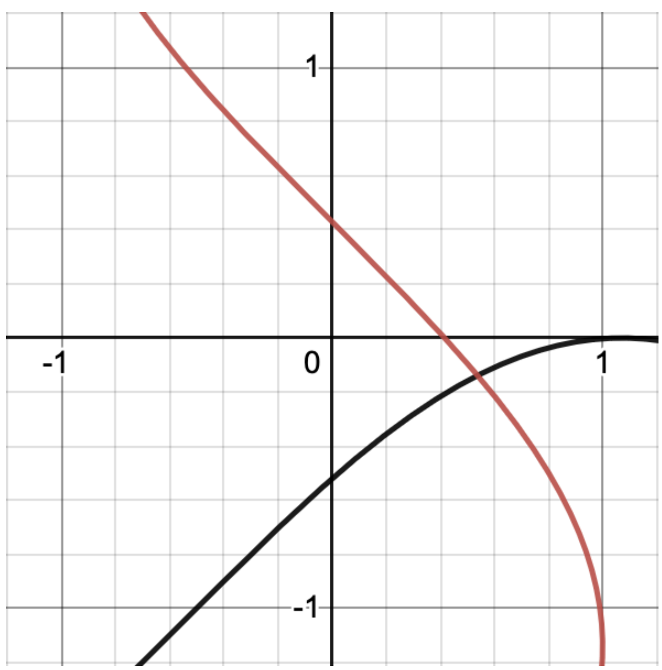
График:



2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

Система: $\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$

График:



Заполненные таблицы

Уточнение правого корня уравнения методом Ньютона:

$f(x) = x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$

$f'(x) = 3x^2 - 6{,}25x - 3{,}5$

$f''(x) = 6x - 6{,}25$

Интервал изоляции корня: $[3; 4]$
Точность: $\varepsilon = 10^{-2}$
Начальное приближение: $x_0 = 4$, т.к. $f''(4) * f(4) > 0$

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	4	2,458	19,5	3,87395	0,12605
1	3,87395	0,13903	17,31028	3,86592	0,00804

Уточнение левого корня уравнения методом половинного деления:

$f(x) = x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$

Интервал изоляции корня: $[-1{,}5;\ -1]$

№ шага	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\lvert a - b\rvert$
0	-1,5	-1	-1,25	-2,69825	1,833	-0,00294	0,5
1	-1,25	-1	-1,125	-0,00294	1,833	1,01659	0,25
2	-1,25	-1,125	-1,1875	-0,00294	1,01659	0,53295	0,125
3	-1,25	-1,1875	-1,21875	-0,00294	0,53295	0,27163	0,0625
4	-1,25	-1,21875	-1,23438	-0,00294	0,27163	0,13606	0,03125
5	-1,25	-1,23438	-1,24219	-0,00294	0,13606	0,06693	0,01562
6	-1,25	-1,24219	-1,24610	-0,00294	0,06693	0,03206	0,00781

Уточнение центрального корня уравнения методом простой итерации:

$f(x) = x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$

Приведем $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$:

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{3{,}5}x^3 - \frac{3{,}125}{3{,}5}x^2 + \frac{2{,}458}{3{,}5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{3}{3{,}5}x^2 - \frac{6{,}25}{3{,}5}x$$

Интервал изоляции корня: $[0;\ 1]$

Проверка достаточного условия сходимости метода:

На заданном интервале изоляции $max|\varphi'(x)| = |\varphi'(0)| = 0 < 1$. Соответственно, вне зависимости от выбора начального приближения x_0 итерационная последовательность метода будет сходиться к корню уравнения.

Начальное приближение: $x_0 = 1$

Интервал изоляции корня: $[0;\ 1]$

№ итерации	x_i	$x_{i+1} = \varphi(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	1	0,09514	0,90486
1	0,09514	0,69445	0,59931
2	0,69445	0,36738	0,32707
3	0,36738	0,59595	0,22857
4	0,59595	0,44565	0,15030
5	0,44565	0,55025	0,10460
6	0,55025	0,47955	0,07070
7	0,47955	0,52847	0,04892
8	0,52847	0,49510	0,03372
9	0,49510	0,51810	0,02300
10	0,51810	0,50235	0,01575
11	0,50235	0,51319	0,01084
12	0,51319	0,50576	0,00743

Решение системы нелинейных уравнений

Уточнение решения системы нелинейных уравнений методом простой итерации:

Система: $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

Определяем, что решение системы уравнений находится в квадрате:

$$0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0$$

$$\begin{cases} \mathrm{y} = \sin(x+0{,}5) - 1 \\ \mathrm{x} = -\cos(y-2) \end{cases}$$

Проверим условие сходимости. В области *G* имеем:

$\frac{\delta x}{\delta x} = 0$ $\frac{\delta x}{\delta y} = -\cos(y-2)$

$\frac{\delta y}{\delta x} = \sin(x+0{,}5)$ $\frac{\delta y}{\delta y} = 0$

$$\left|\frac{\delta x}{\delta x}\right| + \left|\frac{\delta x}{\delta y}\right| = |-\cos(y-2)| \le \cos(3) < 1$$

$$\left|\frac{\delta y}{\delta x}\right| + \left|\frac{\delta y}{\delta y}\right| = |\sin(\mathrm{x}+0{,}5)| \le \sin(1{,}5) < 1$$

$\max_{[x \epsilon G]} |\varphi'(x)| \le \sin(1{,}5) < 1 \rightarrow$ Процесс сходящийся

Выберем начальное приближение: $x_0 = 1$ $y_0 = -1$

№ итерации	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$	$\lvert y_{i+1} - y_i\rvert$
0	1	-1	0,98999	-0,00250	0,01001	0,99749
1	0,98999	-0,00250	0,41842	-0,00326	0,57157	0,00076
2	0,41842	-0,00326	0,41911	-0,20536	0,00069	0,20210
3	0,41911	-0,20536	0,59283	-0,20494	0,17372	0,00042
4	0,59283	-0,20494	0,59249	-0,11207	0,00034	0,09287
5	0,59249	-0,11207	0,51523	-0,11222	0,07726	0,00015
6	0,51523	-0,11222	0,51536	-0,15040	0,00013	0,03818
7	0,51536	-0,15040	0,54769	-0,15033	0,03233	0,00007
8	0,54769	-0,15033	0,54763	-0,13372	0,00006	0,01660
9	0,54763	-0,13372	0,53366	-0,13376	0,01397	0,00004
10	0,53366	-0,13376	0,53369	-0,14082	0,00003	0,00706

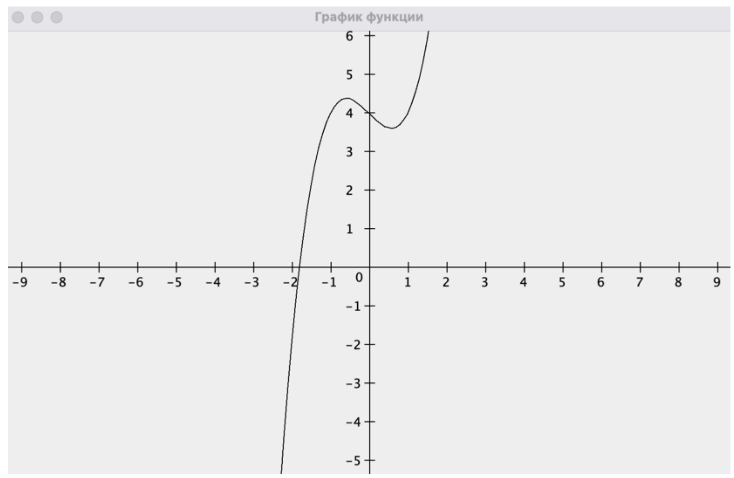
Ссылка на исходный код программы (GitHub)

https://github.com/DecafMangoITMO/ITMO/tree/main/ComputationalMathematics/Lab_2/src

Пример работы программы

Пример 1:

Для выхода из программы пропишите exit.
Список доступных фукнций:
1) x^3 - x + 4 = 0
2) 1.62x^3 - 8.15x^2 + 4.39x + 4.29 = 0
3) exp(x) - 5 = 0
Введите номер функции: 1
Введите левую границу интервала: -2
Введите правую границу интервала: -1
Список доступных методов:
1) Метод хорд
2) Метод Ньютона
3) Метод простой итерации
Введите номер метода: 3
Введите точность: 0.001
Введите кол-во знаков после запятой: 4
Выберите способ вывода результата:
1) Терминал
2) Файл
Введите номер способа: 1
Уравнение: x^3 - x + 4 = 0
Метод: Метод простой итерации



№ итерации	x_k	x_k+1	f(x_k+1)	|f(x_k+1)|
1	-1.8182	-1.8007	-0.0381	0.0381
2	-1.8007	-1.7972	-0.0079	0.0079
3	-1.7972	-1.7965	-0.0017	0.0017
4	-1.7965	-1.7964	-0.0004	0.0004

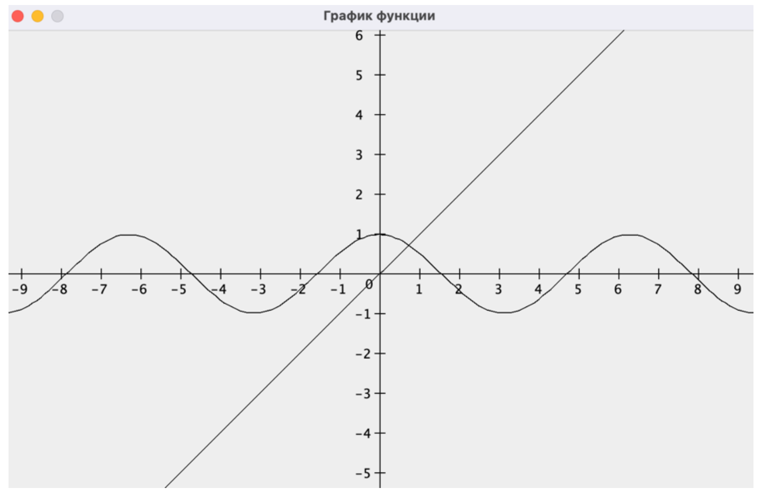
Пример 2:

Для выхода из программы пропишите exit.
Список доступных систем нелинейных уравнений:
1)

```
 _
 | x^2 + y^2 = 4
-|
 | y = 3x^2
 ‾
```

2)

```
 _
 | y = x
-|
 | y = cos(x)
 ‾
```



Введите номер системы: 2
Введите нулевое приближение x0: 1
Введите нулевое приближение y0: 1
Введите точность: 0.001
Введите кол-во знаков после запятой: 3
Выберите способ вывода результата:
1) Терминал
2) Файл
Введите номер способа: 1
Система:

```
 _
 | y = x
-|
 | y = cos(x)
 ‾
```

Метод: Метод Ньютона

№ шага	x_i	y_i	x_i+1	y_i+1	|x_i+1 - x_i|	|y_i+1 - y_i|
1	1.000	1.000	0.750	0.750	0.250	0.250
2	0.750	0.750	0.739	0.739	0.011	0.011
3	0.739	0.739	0.739	0.739	0.000	0.000

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я ознакомился с основными численными методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.