

Университет ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №5
по дисциплине
«Вычислительная Математика»

Выполнил:

Студент группы Р3207
Разинкин А.В.

Преподаватели:

Рыбаков С.Д.

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель лабораторной работы	3
Порядок выполнения работы.....	3
Рабочие формулы	4
Вычислительная часть	5
Программная реализация.....	11
Вывод.....	14

Цель лабораторной работы

Решить задачу интерполяции, найти значение функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Порядок выполнения работы

Вычислительная часть:

1. Выбранная таблица $y = f(x)$:

x	y	x_1	y_1
2,10	3,7587	2,112	2,205
2,15	4,1861	2,355	2,254
2,20	4,9218	2,114	2,216
2,25	5,3487	2,359	2,259
2,30	5,9275	2,128	2,232
2,35	6,4193	2,352	2,284
2,40	7,0839	2,147	2,247

2. Построить таблицу конечных разностей для выбранной таблицы.
3. Вычислить значения функции для аргумента x_1 , используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона.
4. Вычислить значения функции для аргумента x_2 , используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса.

Программная часть:

1. Исходные данные задаются тремя способами:
 - a) в виде набора данных, пользователь вводит значения с клавиатуры;
 - b) в виде сформированных в файле данных;
 - c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $\sin(x)$. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).
2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;
3. Вычислить приближенное значение функции для заданного аргумента, введенного с клавиатуры, методами Лагранжа, Ньютона (с разделенными/конечными разностями);
4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционных многочленов.

Рабочие формулы

Многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Многочлен Ньютона с разделенными разностями:

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Многочлен Ньютона с конечными разностями (общая формула):

$$N_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_n \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$
$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}$$

Многочлен Ньютона с конечными разностями (для интерполирования вперед):

$$N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$
$$t = \frac{x - x_i}{h}$$

Многочлен Ньютона с конечными разностями (для интерполирования назад):

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$
$$t = \frac{x - x_n}{h}$$

Многочлен Гаусса (первая формула):

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2}$$
$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \dots$$
$$+ \frac{(t+n-1) \dots (t-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1) \dots (t-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}$$

Многочлен Гаусса (вторая формула):

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(t+n)(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Вычислительная часть

Таблица конечных разностей:

№	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	2,10	3,7587	0,4274	0,3083	-0,6171	1,0778	-1,7774	2,973
1	2,15	4,1861	0,7357	-0,3088	0,4607	-0,6996	1,1956	
2	2,20	4,9218	0,4269	0,1519	-0,2389	0,4987		
3	2,25	5,3487	0,5788	-0,087	0,2598			
4	2,30	5,9275	0,4918	0,1728				
5	2,35	6,4193	0,6646					
6	2,40	7,0839						

Вычисление значения функции формулой Ньютона:

$x_1 = 2,112$:

$$t = \frac{2,112 - 2,10}{0,05} = 0,24$$

$$\begin{aligned} N_6(2.112) &= 3,7587 + 0,24 \times 0,4274 + \frac{0,24 \times (0,24 - 1)}{2!} \times 0,3083 \\ &+ \frac{0,24 \times (0,24 - 1) \times (0,24 - 2)}{3!} \times (-0,6171) \\ &+ \frac{0,24 \times (0,24 - 1) \times (0,24 - 2) \times (0,24 - 3)}{4!} \times 1,0778 \\ &+ \frac{0,24 \times (0,24 - 1) \times (0,24 - 2) \times (0,24 - 3) \times (0,24 - 4)}{5!} \times (-1,7774) \\ &+ \frac{0,24 \times (0,24 - 1) \times (0,24 - 2) \times (0,24 - 3) \times (0,24 - 4) \times (0,24 - 5)}{6!} \\ &\times 2,973 \approx 3,646 \end{aligned}$$

$x_1 = 2,335$:

$$t = \frac{2,335 - 2,40}{0,05} = -1,3$$

$$\begin{aligned}
N_6(2.112) &= 7,0839 + (-1,3) \times 0,6646 + \frac{-1,3 \times (-1,3 - 1)}{2!} \times 0,1728 \\
&+ \frac{-1,3 \times (-1,3 - 1) \times (-1,3 - 2)}{3!} \times 0,2598 \\
&+ \frac{-1,3 \times (-1,3 - 1) \times (-1,3 - 2) \times (-1,3 - 3)}{4!} \times 0,4987 \\
&+ \frac{-1,3 \times (-1,3 - 1) \times (-1,3 - 2) \times (-1,3 - 3) \times (-1,3 - 4)}{5!} \times 1,1956 \\
&+ \frac{-1,3 \times (-1,3 - 1) \times (-1,3 - 2) \times (-1,3 - 3) \times (-1,3 - 4) \times (-1,3 - 5)}{6!} \\
&\times 2,973 \approx 10,542
\end{aligned}$$

$$x_1 = 2,114:$$

$$\begin{aligned}
t &= \frac{2,114 - 2,10}{0,05} = 0,28 \\
N_6(2.112) &= 3,7587 + 0,28 \times 0,4274 + \frac{0,28 \times (0,28 - 1)}{2!} \times 0,3083 \\
&+ \frac{0,28 \times (0,28 - 1) \times (0,28 - 2)}{3!} \times (-0,6171) \\
&+ \frac{0,28 \times (0,28 - 1) \times (0,28 - 2) \times (0,28 - 3)}{4!} \times 1,0778 \\
&+ \frac{0,28 \times (0,28 - 1) \times (0,28 - 2) \times (0,28 - 3) \times (0,28 - 4)}{5!} \times (-1,7774) \\
&+ \frac{0,28 \times (0,28 - 1) \times (0,28 - 2) \times (0,28 - 3) \times (0,28 - 4) \times (0,28 - 5)}{6!} \\
&\times 2,973 \approx 3,649
\end{aligned}$$

$$x_1 = 2,352:$$

$$\begin{aligned}
t &= \frac{2,359 - 2,40}{0,05} = -0,82 \\
N_6(2.112) &= 7,0839 + (-0,82) \times 0,6646 + \frac{-0,82 \times (-0,82 - 1)}{2!} \times 0,1728 \\
&+ \frac{-0,82 \times (-0,82 - 1) \times (-0,82 - 2)}{3!} \times 0,2598 \\
&+ \frac{-0,82 \times (-0,82 - 1) \times (-0,82 - 2) \times (-0,82 - 3)}{4!} \times 0,4987 \\
&+ \frac{-0,82 \times (-0,82 - 1) \times (-0,82 - 2) \times (-0,82 - 3) \times (-0,82 - 4)}{5!} \times 1,1956 \\
&+ \frac{-0,82 \times (-0,82 - 1) \times (-0,82 - 2) \times (-0,82 - 3) \times (-0,82 - 4) \times (-0,82 - 5)}{6!} \times 2,973 \\
&\approx 7,910
\end{aligned}$$

$$x_1 = 2,128:$$

$$t = \frac{2,128 - 2,10}{0,05} = 0,56$$

$$\begin{aligned} N_6(2.112) &= 3,7587 + 0,56 \times 0,4274 + \frac{0,56 \times (0,56 - 1)}{2!} \times 0,3083 \\ &\quad + \frac{0,56 \times (0,56 - 1) \times (0,56 - 2)}{3!} \times (-0,6171) \\ &\quad + \frac{0,56 \times (0,56 - 1) \times (0,56 - 2) \times (0,56 - 3)}{4!} \times 1,0778 \\ &\quad + \frac{0,56 \times (0,56 - 1) \times (0,56 - 2) \times (0,56 - 3) \times (0,56 - 4)}{5!} \times (-1,7774) \\ &\quad + \frac{0,56 \times (0,56 - 1) \times (0,56 - 2) \times (0,56 - 3) \times (0,56 - 4) \times (0,56 - 5)}{6!} \\ &\quad \times 2,973 \approx 3,79 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2,352:$$

$$t = \frac{2,352 - 2,40}{0,05} = -0,96$$

$$\begin{aligned} N_6(2.112) &= 7,0839 + (-0,96) \times 0,6646 + \frac{-0,96 \times (-0,96 - 1)}{2!} \times 0,1728 \\ &\quad + \frac{-0,96 \times (-0,96 - 1) \times (-0,96 - 2)}{3!} \times 0,2598 \\ &\quad + \frac{-0,96 \times (-0,96 - 1) \times (-0,96 - 2) \times (-0,96 - 3)}{4!} \times 0,4987 \\ &\quad + \frac{-0,96 \times (-0,96 - 1) \times (-0,96 - 2) \times (-0,96 - 3) \times (-0,96 - 4)}{5!} \times 1,1956 \\ &\quad + \frac{-0,96 \times (-0,96 - 1) \times (-0,96 - 2) \times (-0,96 - 3) \times (-0,96 - 4) \times (-0,96 - 5)}{6!} \times 2,973 \\ &\approx 8,428 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2,147:$$

$$t = \frac{2,147 - 2,10}{0,05} = 0,94$$

$$\begin{aligned} N_6(2.112) &= 3,7587 + 0,94 \times 0,4274 + \frac{0,94 \times (0,94 - 1)}{2!} \times 0,3083 \\ &\quad + \frac{0,94 \times (0,94 - 1) \times (0,94 - 2)}{3!} \times (-0,6171) \\ &\quad + \frac{0,94 \times (0,94 - 1) \times (0,94 - 2) \times (0,94 - 3)}{4!} \times 1,0778 \\ &\quad + \frac{0,94 \times (0,94 - 1) \times (0,94 - 2) \times (0,94 - 3) \times (0,94 - 4)}{5!} \times (-1,7774) \\ &\quad + \frac{0,94 \times (0,94 - 1) \times (0,94 - 2) \times (0,94 - 3) \times (0,94 - 4) \times (0,94 - 5)}{6!} \\ &\quad \times 2,973 \approx 4,128 \end{aligned}$$

Вычисление значения функции формулой Гаусса:

$x_2 = 2,205$:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2,205 - 2,25}{0,05} = -0,9 \\
 P_6 &= 5,3487 + (-0,9) \times 0,4269 + \frac{(-0,9) \times (-0,9 + 1)}{2!} \times 0,1519 \\
 &\quad + \frac{(-0,9 + 1) \times (-0,9) \times (-0,9 - 1)}{3!} \times 0,4607 \\
 &\quad + \frac{(-0,9 + 2) \times (-0,9 + 1) \times (-0,9) \times (-0,9 - 1)}{4!} \times (-0,6996) \\
 &\quad + \frac{(-0,9 + 2) \times (-0,9 + 1) \times (-0,9) \times (-0,9 - 1) \times (-0,9 - 2)}{5!} \times (-1,7774) \\
 &\quad + \frac{(-0,9 + 3) \times (-0,9 + 2) \times (-0,9 + 1) \times (-0,9) \times (-0,9 - 1) \times (-0,9 - 2)}{6!} \\
 &\quad \times 2,973 \approx 4,969
 \end{aligned}$$

$x_2 = 2,254$:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2,254 - 2,25}{0,05} = 0,08 \\
 P_6 &= 5,3487 + 0,08 \times 0,5788 + \frac{0,08 \times (0,08 - 1)}{2!} \times 0,1519 \\
 &\quad + \frac{(0,08 + 1) \times 0,08 \times (0,08 - 1)}{3!} \times (-0,2389) \\
 &\quad + \frac{(0,08 + 1) \times 0,08 \times (0,08 - 1) \times (0,08 - 2)}{4!} \times (-0,6996) \\
 &\quad + \frac{(0,08 + 2) \times (0,08 + 1) \times 0,08 \times (0,08 - 1) \times (0,08 - 2)}{5!} \times 1,1956 \\
 &\quad + \frac{(0,08 + 2) \times (0,08 + 1) \times 0,08 \times (0,08 - 1) \times (0,08 - 2) \times (0,08 - 3)}{6!} \\
 &\quad \times 2,973 \approx 5,387
 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2,216:$$

$$t = \frac{2,216 - 2,25}{0,05} = -0,68$$

$$\begin{aligned} P_6 &= 5,3487 + (-0,68) \times 0,4269 + \frac{(-0,68) \times (-0,68 + 1)}{2!} \times 0,1519 \\ &+ \frac{(-0,68 + 1) \times (-0,68) \times (-0,68 - 1)}{3!} \times 0,4607 \\ &+ \frac{(-0,68 + 2) \times (-0,68 + 1) \times (-0,68) \times (-0,68 - 1)}{4!} \times (-0,6996) \\ &+ \frac{(-0,68 + 2) \times (-0,68 + 1) \times (-0,68) \times (-0,68 - 1) \times (-0,68 - 2)}{5!} \times (-1,7774) \\ &+ \frac{(-0,68 + 3) \times (-0,68 + 2) \times (-0,68 + 1) \times (-0,68) \times (-0,68 - 1) \times (-0,68 - 2)}{6!} \\ &\times 2,973 \approx 5,063 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2,259:$$

$$t = \frac{2,259 - 2,25}{0,05} = 0,18$$

$$\begin{aligned} P_6 &= 5,3487 + 0,18 \times 0,5788 + \frac{0,18 \times (0,18 - 1)}{2!} \times 0,1519 \\ &+ \frac{(0,18 + 1) \times 0,18 \times (0,18 - 1)}{3!} \times (-0,2389) \\ &+ \frac{(0,18 + 1) \times 0,18 \times (0,18 - 1) \times (0,18 - 2)}{4!} \times (-0,6996) \\ &+ \frac{(0,18 + 2) \times (0,18 + 1) \times 0,18 \times (0,18 - 1) \times (0,18 - 2)}{5!} \times 1,1956 \\ &+ \frac{(0,18 + 2) \times (0,18 + 1) \times 0,18 \times (0,18 - 1) \times (0,18 - 2) \times (0,18 - 3)}{6!} \\ &\times 2,973 \approx 5,438 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2,232:$$

$$t = \frac{2,232 - 2,25}{0,05} = -0,36$$

$$\begin{aligned} P_6 &= 5,3487 + (-0,36) \times 0,4269 + \frac{(-0,36) \times (-0,36 + 1)}{2!} \times 0,1519 \\ &+ \frac{(-0,36 + 1) \times (-0,36) \times (-0,36 - 1)}{3!} \times 0,4607 \\ &+ \frac{(-0,36 + 2) \times (-0,36 + 1) \times (-0,36) \times (-0,36 - 1)}{4!} \times (-0,6996) \\ &+ \frac{(-0,36 + 2) \times (-0,36 + 1) \times (-0,36) \times (-0,36 - 1) \times (-0,36 - 2)}{5!} \times (-1,7774) \\ &+ \frac{(-0,36 + 3) \times (-0,36 + 2) \times (-0,36 + 1) \times (-0,36) \times (-0,36 - 1) \times (-0,36 - 2)}{6!} \\ &\times 2,973 \approx 5,191 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2,284:$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2,284 - 2,25}{0,05} = 0,68 \\
 P_6 &= 5,3487 + 0,68 \times 0,5788 + \frac{0,68 \times (0,68 - 1)}{2!} \times 0,1519 \\
 &\quad + \frac{(0,68 + 1) \times 0,68 \times (0,68 - 1)}{3!} \times (-0,2389) \\
 &\quad + \frac{(0,68 + 1) \times 0,68 \times (0,68 - 1) \times (0,68 - 2)}{4!} \times (-0,6996) \\
 &\quad + \frac{(0,68 + 2) \times (0,68 + 1) \times 0,68 \times (0,68 - 1) \times (0,68 - 2)}{5!} \times 1,1956 \\
 &\quad + \frac{(0,68 + 2) \times (0,68 + 1) \times 0,68 \times (0,68 - 1) \times (0,68 - 2) \times (0,68 - 3)}{6!} \\
 &\quad \times 2,973 \approx 5,727
 \end{aligned}$$

$$x_2 = 2,247:$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2,232 - 2,25}{0,05} = -0,06 \\
 P_6 &= 5,3487 + (-0,06) \times 0,4269 + \frac{(-0,06) \times (-0,06 + 1)}{2!} \times 0,1519 \\
 &\quad + \frac{(-0,06 + 1) \times (-0,06) \times (-0,06 - 1)}{3!} \times 0,4607 \\
 &\quad + \frac{(-0,06 + 2) \times (-0,06 + 1) \times (-0,06) \times (-0,06 - 1)}{4!} \times (-0,6996) \\
 &\quad + \frac{(-0,06 + 2) \times (-0,06 + 1) \times (-0,06) \times (-0,06 - 1) \times (-0,06 - 2)}{5!} \times (-1,7774) \\
 &\quad + \frac{(-0,06 + 3) \times (-0,06 + 2) \times (-0,06 + 1) \times (-0,06) \times (-0,06 - 1) \times (-0,06 - 2)}{6!} \\
 &\quad \times 2,973 \approx 5,321
 \end{aligned}$$

Программная реализация

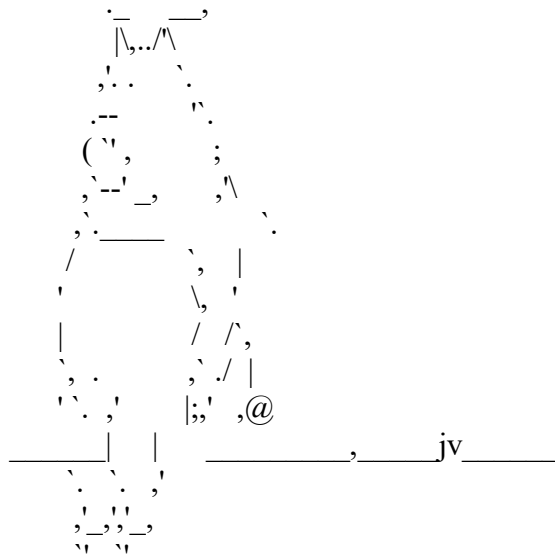
https://github.com/DecafMangoITMO/ITMO/tree/main/ComputationalMathematics/lab_5

Примеры работы программы:

input.txt:

```
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
```

Программа:



Введите способ ввода точек:

1. Ввод из терминала
2. Ввод из файла
3. Ввод через функцию

>> 2

Введите путь до файла:

>> input.txt

| № | xi | yi | Δyi | Δ2yi | Δ3yi | Δ4yi | Δ5yi | Δ6yi |

| 0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

| 1 | 2.0 | 2.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |

| 2 | 3.0 | 3.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |

| 3 | 4.0 | 4.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | | | |

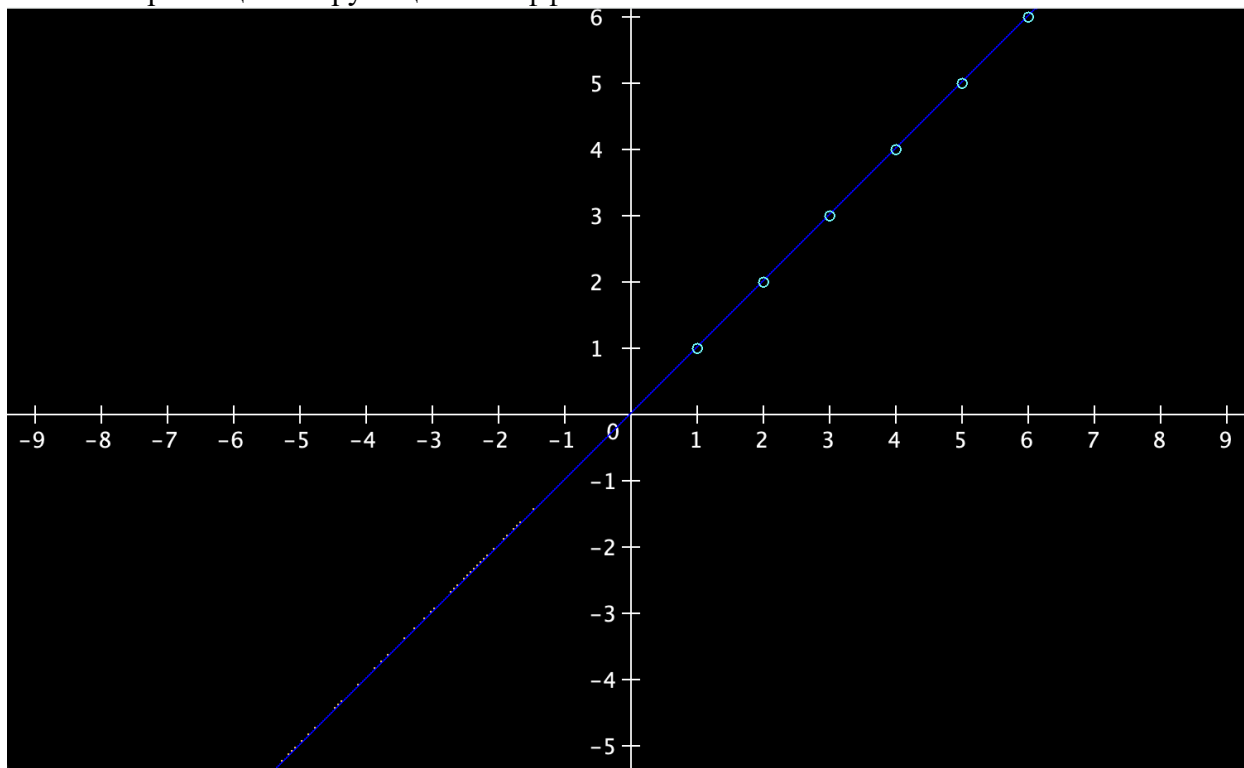
4	5.0	5.0	1.0	0.0					
5	6.0	6.0	1.0						
6	7.0	7.0							

Многочлен Лагранжа -- оранжевая линия

Многочлен Ньютона с разделенными разностями -- зеленая линия

Многочлен Ньютона с конечными разностями -- синяя линия

Узлы интерполяции -- круги цвета Тиффани



input.txt:

-3 9

-2 4

-1 1

0 0

1 1

2 4

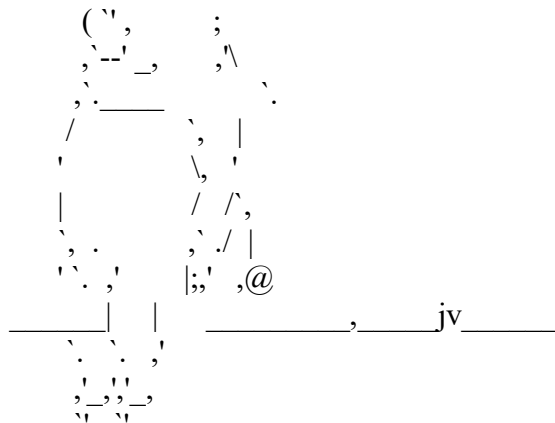
3 9

Программа:

```

      .-
     /  \
    /    \
   /      \
  /        \
 /          \
/            \

```



Введите способ ввода точек:

1. Ввод из терминала
2. Ввод из файла
3. Ввод через функцию

>> 2

Введите путь до файла:

>> input.txt

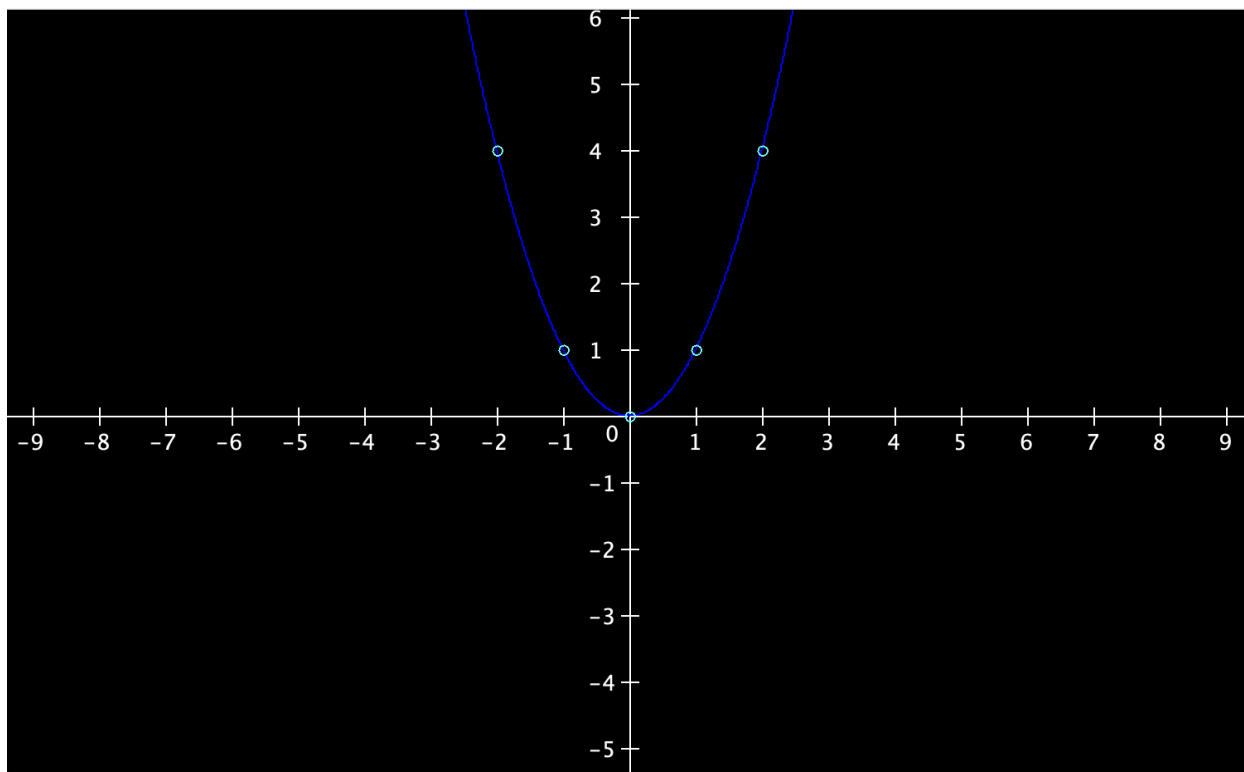
№	xi	yi	Δy_i	$\Delta 2y_i$	$\Delta 3y_i$	$\Delta 4y_i$	$\Delta 5y_i$	$\Delta 6y_i$
0	-3.0	9.0	-5.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	-2.0	4.0	-3.0	2.0	0.0	0.0	0.0	
2	-1.0	1.0	-1.0	2.0	0.0	0.0		
3	0.0	0.0	1.0	2.0	0.0			
4	1.0	1.0	3.0	2.0				
5	2.0	4.0	5.0					
6	3.0	9.0						

Многочлен Лагранжа -- оранжевая линия

Многочлен Ньютона с разделенными разностями -- зеленая линия

Многочлен Ньютона с конечными разностями -- синяя линия

Узлы интерполяции -- круги цвета Тиффани



Вывод

Я научился решать задачу интерполяции – я снова молодец.