

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №2
по «Вычислительная Математика»

Выполнил:

Студент группы Р3207
Разинкин А.В.

Преподаватели:

Рыбаков С.Д.

г. Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Цель лабораторной работы	3
Порядок выполнения работы.....	3
Рабочие формулы	4
Графики функций на исследуемом интервале.....	5
Заполненные таблицы	6
Решение системы нелинейных уравнений.....	8
Ссылка на исходный код программы (GitHub)	9
Пример работы программы	9
Вывод	11

Цель лабораторной работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов

Порядок выполнения работы

1. Решение нелинейного уравнения:

- Правый корень уточняется методом Ньютона
- Левый корень уточняется методом половинного деления
- Центральный корень уточняется методом простой итерации

2. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации

3. Программная реализация четырех методов:

- Метод хорд (для уравнений)
- Метод Ньютона (для уравнений)
- Метод простой итерации (для уравнений)
- Метод Ньютона (для систем)

Рабочие формулы

1 часть. Решение нелинейного уравнения

Метод Ньютона: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

Метод половинного деления: $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

Метод простой итерации: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, где $x = \varphi(x)$ (x выражается из исходной функции $f(x)$)

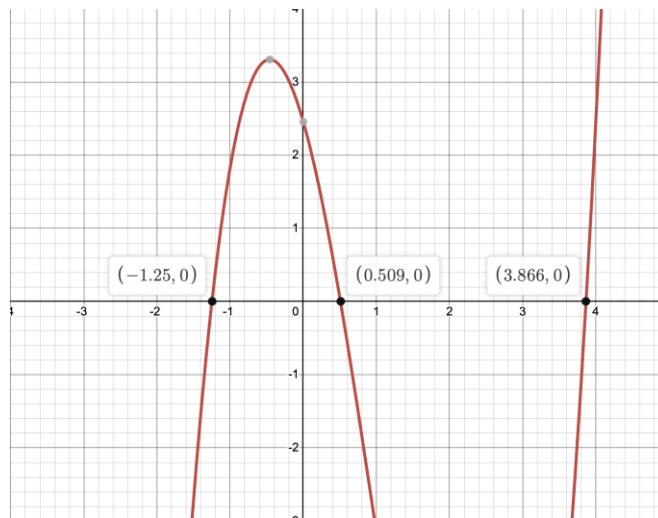
Метод хорд: $x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

Графики функций на исследуемом интервале

1 часть. Решение нелинейного уравнения

Функция: $f(x) = x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$

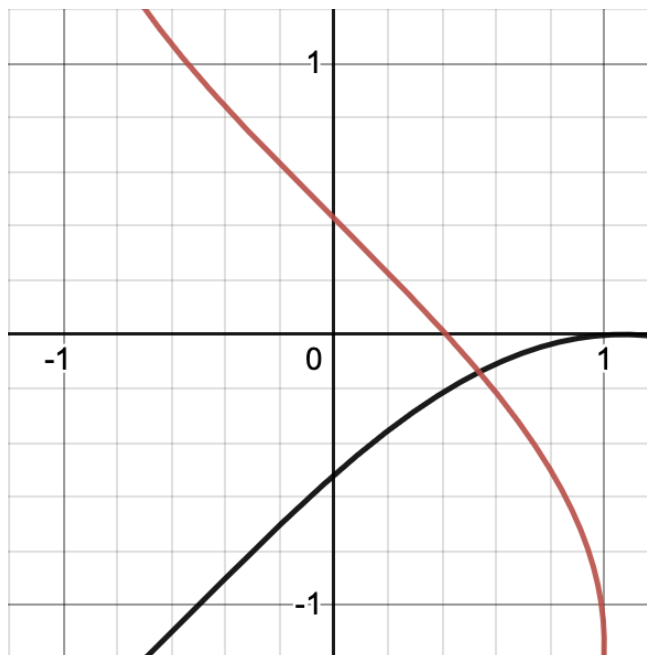
График:



2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

Система:
$$\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

График:



Заполненные таблицы

Уточнение правого корня уравнения методом Ньютона:

$$f(x) = x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6,25x - 3,5$$

$$f''(x) = 6x - 6,25$$

Интервал изоляции корня: $[3; 4]$

Точность: $\varepsilon = 10^{-2}$

Начальное приближение: $x_0 = 4$, т.к. $f''(4) * f(4) > 0$

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$ x_{k+1} - x_k $
0	4	2,458	19,5	3,87395	0,12605
1	3,87395	0,13903	17,31028	3,86592	0,00804

Уточнение левого корня уравнения методом половинного деления:

$$f(x) = x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$$

Интервал изоляции корня: $[-1,5; -1]$

№ шага	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ a - b $
0	-1,5	-1	-1,25	-2,69825	1,833	-0,00294	0,5
1	-1,25	-1	-1,125	-0,00294	1,833	1,01659	0,25
2	-1,25	-1,125	-1,1875	-0,00294	1,01659	0,53295	0,125
3	-1,25	-1,1875	-1,21875	-0,00294	0,53295	0,27163	0,0625
4	-1,25	-1,21875	-1,23438	-0,00294	0,27163	0,13606	0,03125
5	-1,25	-1,23438	-1,24219	-0,00294	0,13606	0,06693	0,01562
6	-1,25	-1,24219	-1,24610	-0,00294	0,06693	0,03206	0,00781

Уточнение центрального корня уравнения методом простой итерации:

$$f(x) = x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$$

Приведем $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$:

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{3,5}x^3 - \frac{3,125}{3,5}x^2 + \frac{2,458}{3,5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{3}{3,5}x^2 - \frac{6,25}{3,5}x$$

Интервал изоляции корня: $[0; 1]$

Проверка достаточного условия сходимости метода:

На заданном интервале изоляции $\max|\varphi'(x)| = |\varphi'(0)| = 0 < 1$. Соответственно, вне зависимости от выбора начального приближения x_0 итерационная последовательность метода будет сходиться к корню уравнения.

Начальное приближение: $x_0 = 1$

Интервал изоляции корня: $[0; 1]$

№ итерации	x_i	$x_{i+1} = \varphi(x_i)$	$ x_{i+1} - x_i $
0	1	0,09514	0,90486
1	0,09514	0,69445	0,59931
2	0,69445	0,36738	0,32707
3	0,36738	0,59595	0,22857
4	0,59595	0,44565	0,15030
5	0,44565	0,55025	0,10460
6	0,55025	0,47955	0,07070
7	0,47955	0,52847	0,04892
8	0,52847	0,49510	0,03372
9	0,49510	0,51810	0,02300
10	0,51810	0,50235	0,01575
11	0,50235	0,51319	0,01084
12	0,51319	0,50576	0,00743

Решение системы нелинейных уравнений

Уточнение решения системы нелинейных уравнений методом простой итерации:

$$\text{Система: } \begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

Определяем, что решение системы уравнений находится в квадрате:

$$0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0$$

$$\begin{cases} y = \sin(x + 0,5) - 1 \\ x = -\cos(y - 2) \end{cases}$$

Проверим условие сходимости. В области G имеем:

$$\frac{\delta x}{\delta x} = 0 \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\cos(y - 2)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \sin(x + 0,5) \quad \frac{\delta y}{\delta y} = 0$$

$$\left| \frac{\delta x}{\delta x} \right| + \left| \frac{\delta x}{\delta y} \right| = |-\cos(y - 2)| \leq \cos(3) < 1$$

$$\left| \frac{\delta y}{\delta x} \right| + \left| \frac{\delta y}{\delta y} \right| = |\sin(x + 0,5)| \leq \sin(1,5) < 1$$

$$\max_{x \in G} |\varphi'(x)| \leq \sin(1,5) < 1 \rightarrow \text{Процесс сходящийся}$$

Выберем начальное приближение: $x_0 = 1 \quad y_0 = -1$

№ итерации	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	$ y_{i+1} - y_i $
0	1	-1	0,98999	-0,00250	0,01001	0,99749
1	0,98999	-0,00250	0,41842	-0,00326	0,57157	0,00076
2	0,41842	-0,00326	0,41911	-0,20536	0,00069	0,20210
3	0,41911	-0,20536	0,59283	-0,20494	0,17372	0,00042
4	0,59283	-0,20494	0,59249	-0,11207	0,00034	0,09287
5	0,59249	-0,11207	0,51523	-0,11222	0,07726	0,00015
6	0,51523	-0,11222	0,51536	-0,15040	0,00013	0,03818
7	0,51536	-0,15040	0,54769	-0,15033	0,03233	0,00007
8	0,54769	-0,15033	0,54763	-0,13372	0,00006	0,01660
9	0,54763	-0,13372	0,53366	-0,13376	0,01397	0,00004
10	0,53366	-0,13376	0,53369	-0,14082	0,00003	0,00706

Ссылка на исходный код программы (GitHub)

<https://github.com/DecafMangoITMO/ITMO/tree/main/ComputationalMathematics/Lab2/src>

Пример работы программы

Пример 1:

Для выхода из программы пропишите `exit`.

Список доступных функций:

1) $x^3 - x + 4 = 0$

2) $1.62x^3 - 8.15x^2 + 4.39x + 4.29 = 0$

3) $\exp(x) - 5 = 0$

Введите номер функции: 1

Введите левую границу интервала: -2

Введите правую границу интервала: -1

Список доступных методов:

1) Метод хорд

2) Метод Ньютона

3) Метод простой итерации

Введите номер метода: 3

Введите точность: 0.001

Введите кол-во знаков после запятой: 4

Выберите способ вывода результата:

1) Терминал

2) Файл

Введите номер способа: 1

Уравнение: $x^3 - x + 4 = 0$

Метод: Метод простой итерации

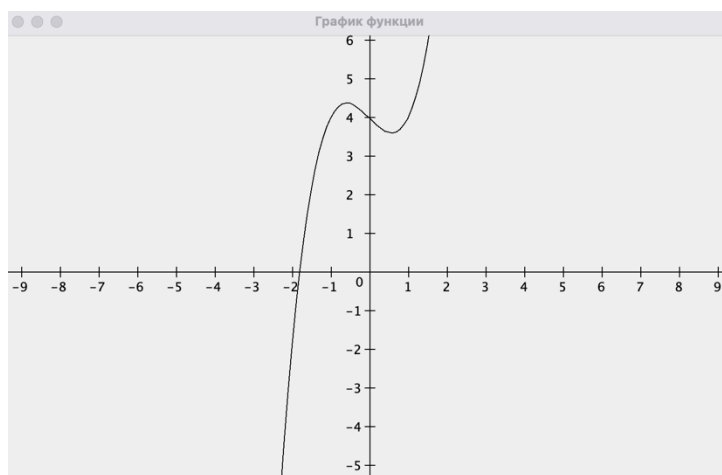
№ итерации	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$ f(x_{k+1}) $
------------	-------	-----------	--------------	----------------

1	-1.8182	-1.8007	-0.0381	0.0381
---	---------	---------	---------	--------

2	-1.8007	-1.7972	-0.0079	0.0079
---	---------	---------	---------	--------

3	-1.7972	-1.7965	-0.0017	0.0017
---	---------	---------	---------	--------

4	-1.7965	-1.7964	-0.0004	0.0004
---	---------	---------	---------	--------



Пример 2:

Для выхода из программы пропишите exit.

Список доступных систем нелинейных уравнений:

1)

$$\begin{array}{l} | x^2 + y^2 = 4 \\ - | \\ | y = 3x^2 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} | y = x \\ - | \\ | y = \cos(x) \end{array}$$

Введите номер системы: 2

Введите нулевое приближение x0: 1

Введите нулевое приближение y0: 1

Введите точность: 0.001

Введите кол-во знаков после запятой: 3

Выберите способ вывода результата:

1) Терминал

2) Файл

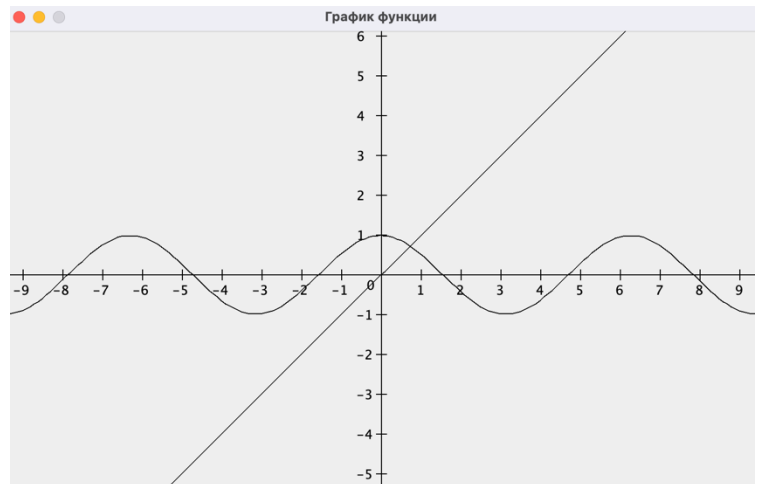
Введите номер способа: 1

Система:

$$\begin{array}{l} | y = x \\ - | \\ | y = \cos(x) \end{array}$$

Метод: Метод Ньютона

№ шага	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	$ y_{i+1} - y_i $
1	1.000	1.000	0.750	0.750	0.250	0.250
2	0.750	0.750	0.739	0.739	0.011	0.011
3	0.739	0.739	0.739	0.739	0.000	0.000



Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я ознакомился с основными численными методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.