

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной  
физики

**Отчет по лабораторной работе №2  
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Гребнев Глеб Анатольевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Допусковое множество . . . . .	2
2.2	Функционал . . . . .	3
2.3	$b$ -коррекция ИСЛАУ . . . . .	3
2.4	$A$ -коррекция ИСЛАУ . . . . .	3
2.5	$Ab$ -коррекция ИСЛАУ . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
4.1	Максимум распознающего функционала . . . . .	4
4.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части ( $A$ -коррекция) . . . .	4
4.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части ( $b$ -коррекция) . . .	6
4.4	Достижение разрешимости за счёт $Ab$ -коррекции . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>8</b>

# 1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}, \quad x = (x_1, x_2) \quad (1)$$

с матрицей и вектором правой части:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала  $\text{Tol}(x)$  для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти  $\arg\max \text{Tol}$  и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ —  $b$ -коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ —  $A$ -коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ —  $Ab$ -коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала  $\text{Tol}(x)$ , допускового множества, отобразить  $\arg\max \text{Tol}$  и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

## 2 Теория

### 2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная  $m \times n$  матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и интервальный  $m$ -вектор правой части  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} \exists b \in \mathbf{b} : Ax = b\}. \quad (5)$$

Это множество решений всевозможных точечных систем  $Ax = b$ , для которых произведение  $Ax$  при любых  $A \in \mathbf{A}$  попадает в интервалы правых частей  $\mathbf{b}$ .

## 2.2 Функционал

Функционалом (распознающим)  $\text{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$  называется выражение

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad} \mathbf{b}_i - \left| \text{mid} \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (6)$$

Принадлежность  $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ , то есть допустовое множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала  $\text{Tol}$ .

## 2.3 $b$ -коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица  $\mathbf{A}$  ИСЛАУ неизменна, и значения  $\text{mid} \mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$  зафиксированы. Тогда расширение вектора  $\mathbf{b}$  путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (7)$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума  $T$  распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  возрастет на постоянную  $K$ :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием  $\arg\max \text{Tol}$  — положение точки  $T$  — не изменится.

## 2.4 $A$ -коррекция ИСЛАУ

$A$ -коррекцией ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  заключается в замене матрицы  $\mathbf{A}$  ее интервальной матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  такой, что

$$\text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) < \text{rad} \mathbf{A}, \quad \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) = \text{mid} \mathbf{A}, \quad \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

## 2.5 $Ab$ -коррекция ИСЛАУ

$Ab$ -коррекцией ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  заключается в комбинированном применении  $A$ -коррекции и  $b$ -коррекции, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , второй этап — уширение вектора правой части  $\mathbf{b}$ .

## 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/Deforc/Interval-Analysis/tree/master/lab2>

## 4 Результаты

### 4.1 Максимум распознающего функционала

Максимум распознающего функционала  $T = -0.7$  находится в точке  $\tau = (1, 2)^T$ , для всех формулировок. Образующая функционала в начальном случае для ИСЛАУ (4):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

В таком случае допустовое множество пусто, ведь ИСЛАУ несовместна в рамках заданных допусков. Требуется значительное уменьшение всех допусков.

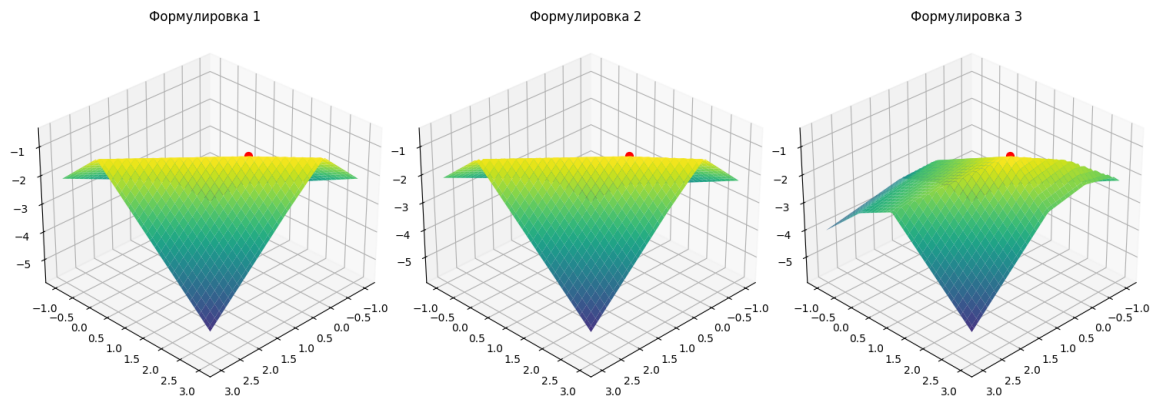


Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

### 4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (А-коррекция)

Для обеспечения разрешимости системы с использованием А-коррекции в формулировке (2) выполним следующие шаги:

1. **Определение исходных параметров.** Для текущих значений системы значение толерантности вычисляется как

$$T = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow |T| = 0.7.$$

Максимум распознающего функционала достигается в точке

$$\tau = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (1, 2)^T,$$

откуда  $|\tau_1| = 1$  и  $|\tau_2| = 2$ .

2. **Вычисление радиуса матрицы.** Радиус элементов матрицы  $\mathbf{A}$  определяется как

$$\text{rad}A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

3. **Нахождение интервала корректировки.** Составим и решим систему неравенств для интервала допустимых значений  $e$ , учитывая ограничение на радиус коррекции:

$$\begin{cases} 0 \leq e \leq 0.3, \\ e + 2e = K \geq |T| = 0.7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$0.2(3) \leq e \leq 0.3.$$

4. **Выбор оптимального значения.** Для дальнейших расчётов выберем среднее значение в найденном интервале:

$$e_{\text{mid}} = \frac{0.2(3) + 0.3}{2} = 0.2(6).$$

5. **Построение скорректированной системы.** С учётом выбранного значения  $e_{\text{mid}}$ , интервальная система принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.917, 0.983] & [0.967, 1.033] \\ [1.017, 1.083] & [0.967, 1.033] \\ [1.067, 1.133] & [0.967, 1.033] \\ [-0.033, 0.033] & [0.967, 1.033] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}.$$

Максимум со значением  $T = 0.1$  расположен в точке  $\tau = (1, 2)^T$ .

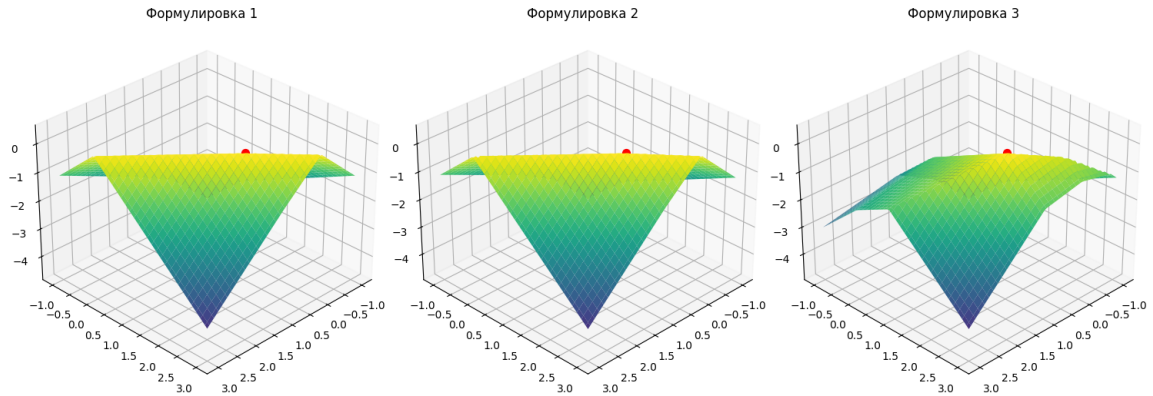


Рис. 2: Поверхности распознающих функционалов после  $A$ -корректировки

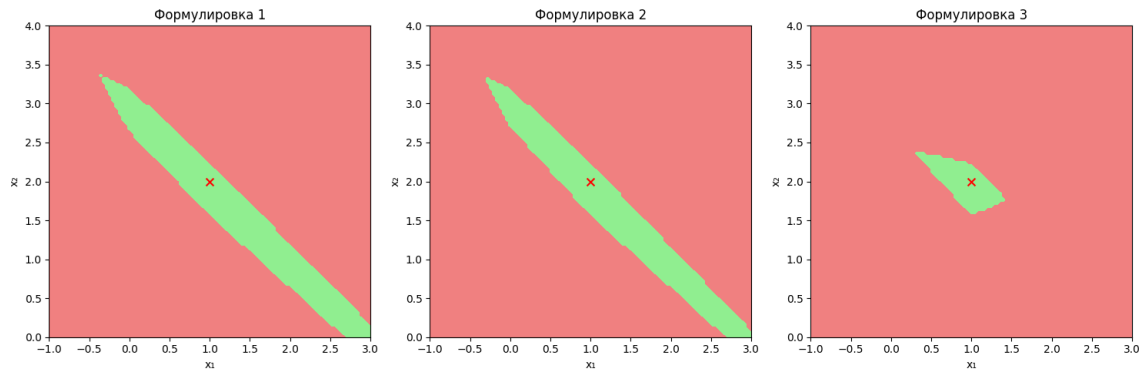


Рис. 3: Допусковое множество решений после  $A$ -корректировки

### 4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части ( $b$ -коррекция)

Для формирования интервальной матрицы использовался коэффициент  $K = 1$  для всех рассматриваемых ИСЛАУ. Например, задача 4 принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.75, 4.15] \\ [1.85, 4.25] \\ [1.9, 4.3] \\ [0.8, 3.2] \end{pmatrix}.$$

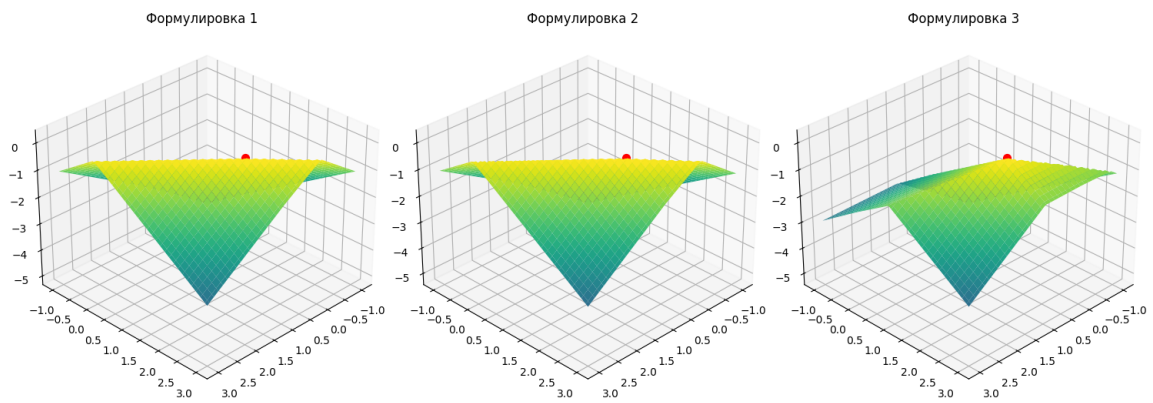


Рис. 4: Поверхности распознающих функционалов после  $b$ -коррекции

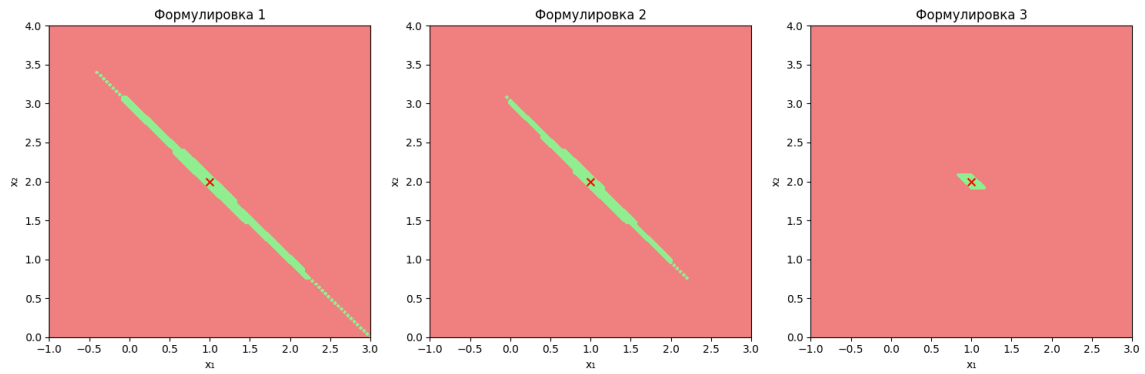


Рис. 5: Допусковое множество решений после  $b$ -коррекции

Минимальное значение коэффициента  $K$ , равное 0.7, в предельном случае неотрицательной области сходится к точке  $\tau = (1, 2)^T$ .

#### 4.4 Достижение разрешимости за счёт $Ab$ -коррекции

Процесс включал два этапа: сначала выполнялось сужение левой части ( $A$ -коррекция), а затем — расширение правой части ( $b$ -коррекция) с коэффициентом  $K = 1$ .

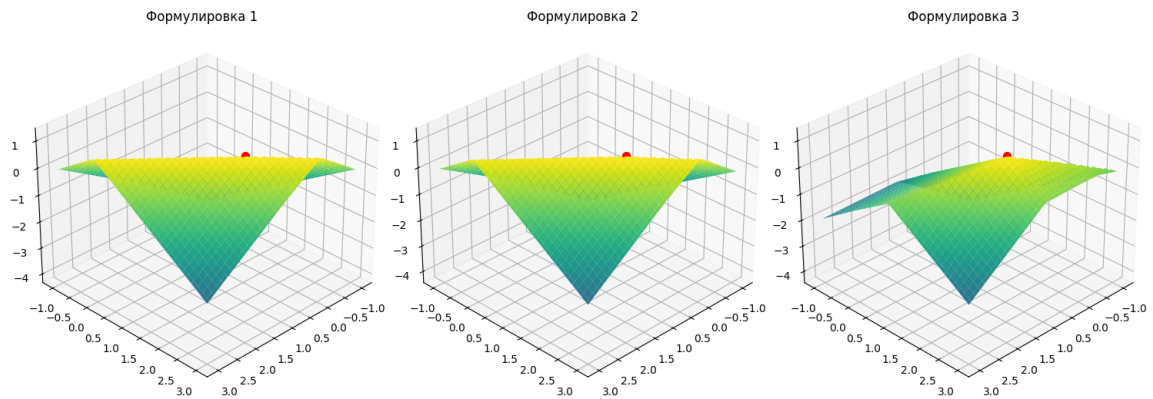


Рис. 6: Поверхности распознающих функционалов после  $Ab$ -корректировки



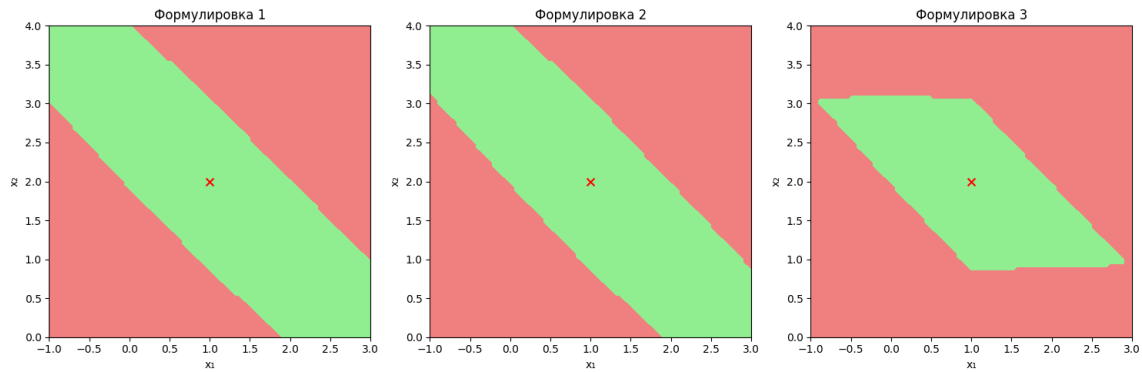


Рис. 7: Допусковое множество решений после  $Ab$ -корректировки

## 5 Выводы

- Проведённый анализ показал, что для исходных ИСЛАУ допустимое множество решений отсутствует, так как максимальное значение распознающего функционала  $T = -0.7$  оказалось отрицательным. Это свидетельствует о несовместимости системы в заданных интервалах.
- Для устранения несовместимости были использованы методы коррекции правой части ( $b$ -коррекция) и матрицы коэффициентов ( $A$ -коррекция). В результате применения  $b$ -коррекции с коэффициентом  $K = 1$  удалось достичь положительного значения распознающего функционала  $T = 0.3$ , что подтверждает наличие допустимого множества решений для скорректированной системы.
- Метод  $A$ -коррекции также обеспечил разрешимость системы. Корректировка матрицы коэффициентов привела к положительному значению распознающего функционала, что позволило определить допустимое множество решений и подтвердить эффективность данного подхода.
- Анализ графиков допустимых множеств и распознающего функционала показал, что после коррекции изменился профиль поверхности  $Tol(x)$ . Это свидетельствует о влиянии коррекции на свойства системы. Кроме того, смещение максимума распознающего функционала указывает на улучшение совместимости системы.