Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

Отчет по лабораторной работе №2
“Интервальный анализ”

Выполнили студент группы 5030102/10201: Гребнев Глеб Анатольевич

Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b},\ x = (x_1, x_2) \tag{1}$$

с матрицей и вектором правой части:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала $\mathrm{Tol}(x)$ для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти argmax Tol и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ — b-коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ — A-коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab-коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала $\mathrm{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить argmax Tol и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

2 Теория

2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная $m \times n$ матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальный m-вектор правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множетсво

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A}\ \exists b \in \mathbf{b}:\ Ax = b\}. \tag{5}$$

Это множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \mathbf{A}$ попадает в интервалы правых частей $\mathbf{b}$.

2.2 Функционал

Функционалом (распознающим) $\mathrm{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m\times n} \times \mathbb{IR}^m \to \mathbb{R}$ называется выражение

$$\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \overset{\mathrm{def}}{=} \min_{1\le i\le m} \left\{ \mathrm{rad}\mathbf{b}_i - \left| \mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \tag{6}$$

Принадлежность $x \in \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \ge 0$, то есть допусковое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \ge 0\}$$

функционала Tol.

2.3 b-коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица $\mathbf{A}$ ИСЛАУ неизменна, и значения $\mathrm{mid}\mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$ зафиксированы. Тогда расширение вектора $\mathbf{b}$ путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e},\ K \ge 0,\ \mathbf{e} = ([-1, 1], \ldots, [-1, 1])^T \tag{7}$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознаю- щего функционала $\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием argmax Tol — положение точки T — не изменится.

2.4 A-коррекция ИСЛАУ

A-коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в замене матрицы $\mathbf{A}$ ее интервальной матрицей $\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}$ такой, что

$$\mathrm{rad}(\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}) < \mathrm{rad}\mathbf{A},\ \mathrm{mid}(\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}) = \mathrm{mid}\mathbf{A},\ \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

2.5 Ab-коррекция ИСЛАУ

Ab-коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в комбинированном применении A-коррекци и b-коррекции, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы $\mathbf{A}$, второй этап — уширение вектора правой части $\mathbf{b}$.

3 Реализаця

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: `ff`

4 Результаты

4.1 Максимум распознающего функционала

Максимум распознающего функционала $T = -0.7$ находится в точке $\tau = (1, 2)^T$, для всех формулировок. Образующая функционала в начальном случае для ИСЛАУ (4):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} \tag{8}$$

В таком случае допусковое множество пусто, ведь ИСЛАУ несовместна в рамках заданных допусков. Требуется значитеьное уменьшение всех допусков.

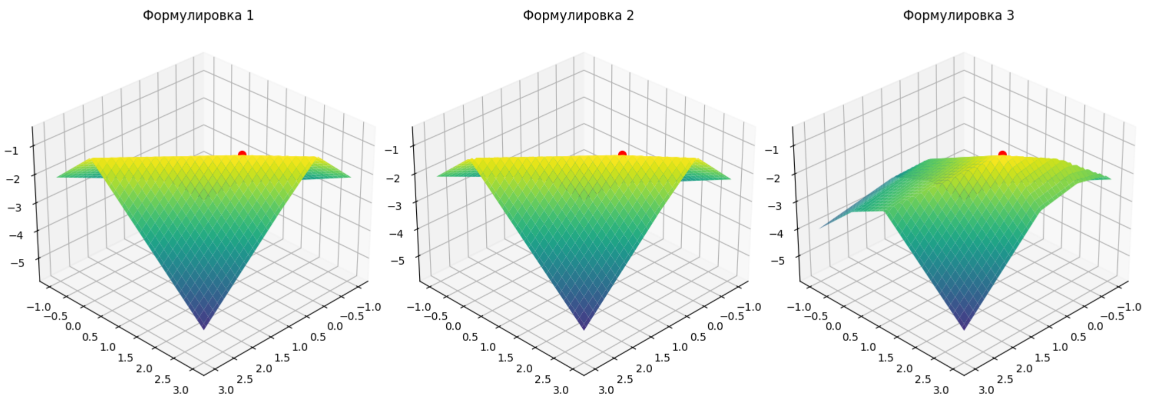

Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (A-коррекция)

Для обеспечения разрешимости системы с использованием A-коррекции в формулировке (2) выполним следующие шаги:

1. **Определение исходных параметров.** Для текущих значений системы значение толерантности вычисляется как

   $$T = \mathrm{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow |T| = 0.7.$$

   Максимум распознающего функционала достигается в точке

   $$\tau = \mathrm{Arg}\max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (1, 2)^T,$$

   откуда $|\tau_1| = 1$ и $|\tau_2| = 2$.

2. **Вычисление радиуса матрицы.** Радиус элементов матрицы $\mathbf{A}$ определяется как
$$\mathrm{rad} A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

3. **Нахождение интервала корректировки.** Составим и решим систему неравенств для интервала допустимых значений e, учитывая ограничение на радиус коррекции:
$$\begin{cases} 0 \leqslant e \leqslant 0.3, \\ e + 2e = K \geqslant |T| = 0.7. \end{cases}$$
Решая эту систему, получаем:
$$0.2(3) \leqslant e \leqslant 0.3.$$

4. **Выбор оптимального значения.** Для дальнейших расчётов выберем среднее значение в найденном интервале:
$$e_{\mathrm{mid}} = \frac{0.2(3) + 0.3}{2} = 0.2(6).$$

5. **Построение скорректированной системы.** С учётом выбранного значения e_{mid}, интервальная система принимает следующий вид:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.917, 0.983] & [0.967, 1.033] \\ [1.017, 1.083] & [0.967, 1.033] \\ [1.067, 1.133] & [0.967, 1.033] \\ [-0.033, 0.033] & [0.967, 1.033] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}.$$

Максимум со значением $T = 0.1$ расположен в точке $\tau = (1, 2)^T$.

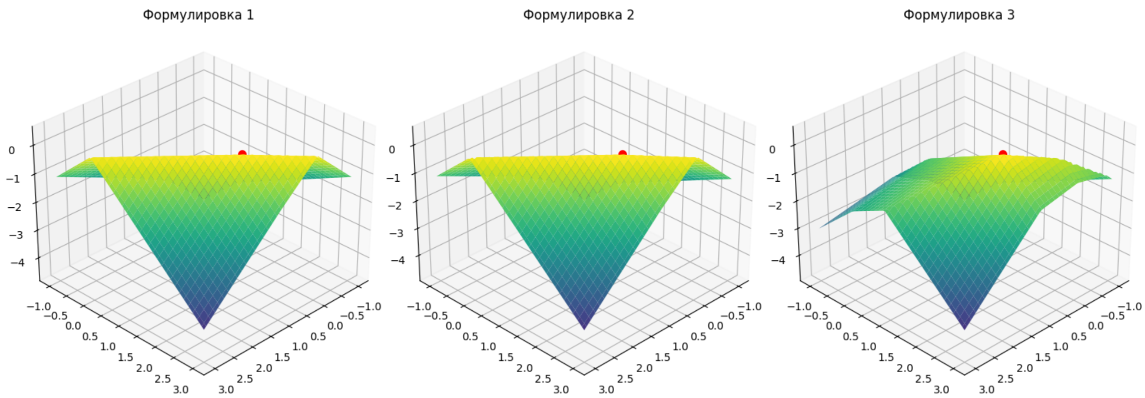

Рис. 2: Поверхности распознающих функционалов после A-корректировки

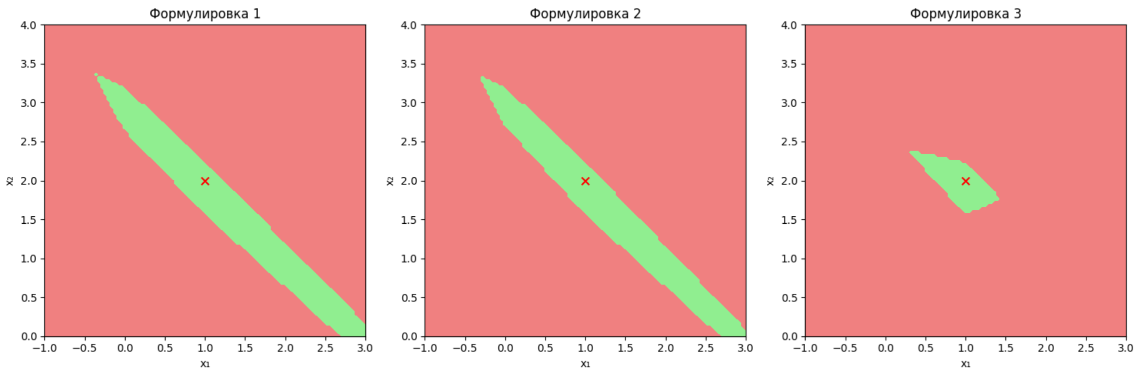

Рис. 3: Допусковое множество решений после A-корректировки

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (b-коррекция)

Для формирования интервальной матрицы использовался коэффициент $K = 1$ для всех рассматриваемых ИСЛАУ. Например, задача 4 принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.75, 4.15] \\ [1.85, 4.25] \\ [1.9, 4.3] \\ [0.8, 3.2] \end{pmatrix}.$$

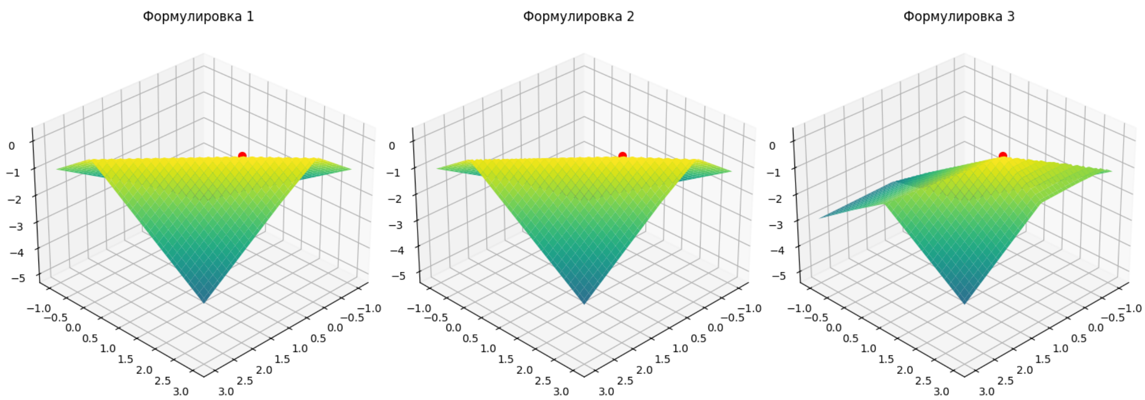

Рис. 4: Поверхности распознающих функционалов после b-коррекции

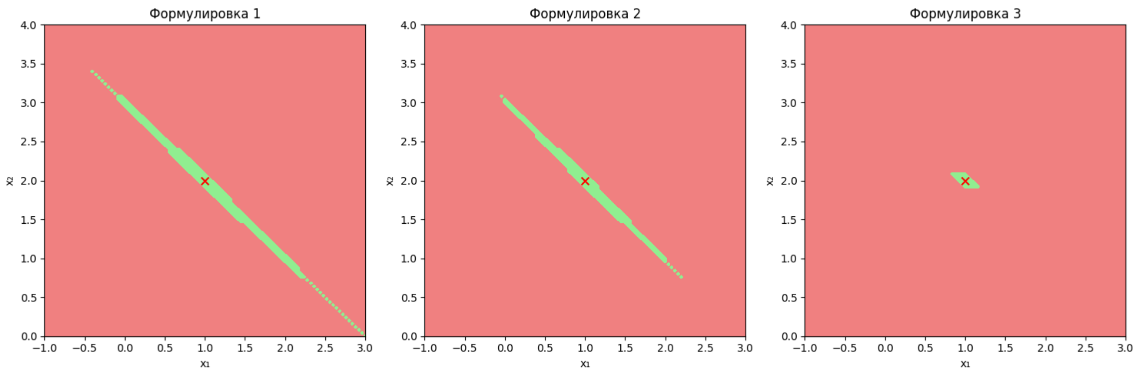

Рис. 5: Допусковое множество решений после b-коррекции

Минимальное значение коэффициента K, равное 0.7, в предельном случае неотрицательной области сходится к точке $\tau = (1, 2)^T$.

4.4 Достижение разрешимости за счёт Ab-коррекции

Процесс включал два этапа: сначала выполнялось сужение левой части (A-коррекция), а затем — расширение правой части (b-коррекция) с коэффициентом $K = 1$.

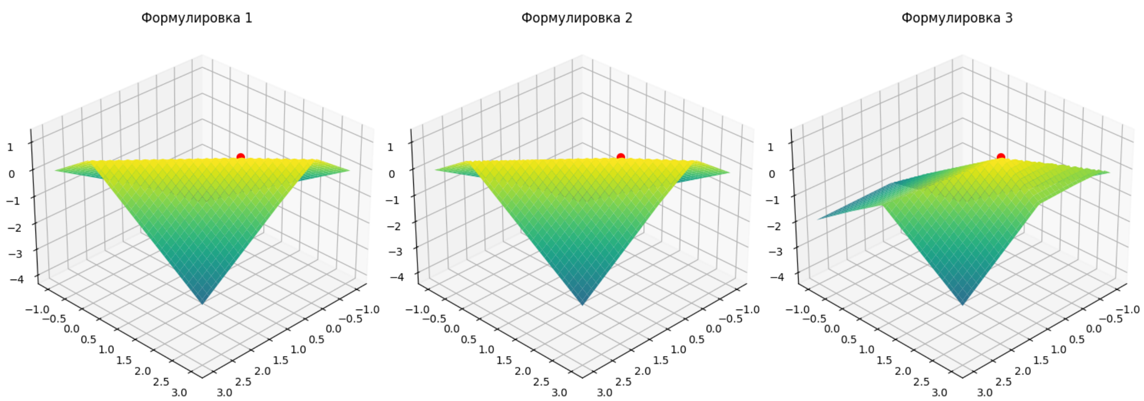

Рис. 6: Поверхности распознающих функционалов после Ab-корректировки

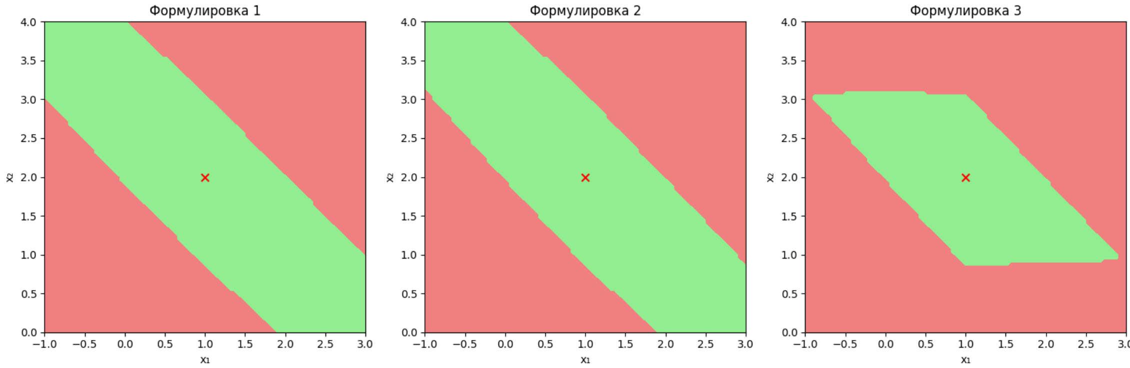

Рис. 7: Допусковое множество решений после Ab-корректировки

5 Выводы

- Проведённый анализ показал, что для исходных ИСЛАУ допусковое множество решений отсутствует, так как максимальное значение распознающего функционала $T = -0.7$ оказалось отрицательным. Это свидетельствует о несовместимости системы в заданных интервалах.

- Для устранения несовместимости были использованы методы коррекции правой части (b-коррекция) и матрицы коэффициентов (A-коррекция). В результате применения b-коррекции с коэффициентом $K = 1$ удалось достичь положительного значения распознающего функционала $T = 0.3$, что подтверждает наличие допускового множества решений для скорректированной системы.

- Метод A-коррекции также обеспечил разрешимость системы. Корректировка матрицы коэффициентов привела к положительному значению распознающего функционала, что позволило определить допусковое множество решений и подтвердить эффективность данного подхода.

- Анализ графиков допусковых множеств и распознающего функционала показал, что после коррекции изменился профиль поверхности $\mathrm{Tol}(x)$. Это свидетельствует о влиянии коррекции на свойства системы. Кроме того, смещение максимума распознающего функционала указывает на улучшение совместимости системы.