

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной  
физики

**Отчет по лабораторной работе №4  
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Гребнев Глеб Анатольевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Интервальная мода . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
3.1	Алгоритм . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>3</b>
4.1	Внутренняя оценка . . . . .	3
4.2	Внешняя оценка . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>5</b>

## 1 Постановка задачи

Определить параметры линейной регрессии

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — входные данные,  $\mathbf{y}$  — интервальные выходные данные,  $\beta_0, \beta_1$  — параметры линейной регрессии.

Для калибровки измерителя, на вход подаётся набор постоянных напряжений

$$X = \{x_i\}. \quad (2)$$

Для надёжности, для каждого значения  $x$  проводится 100 измерений.

Получается набор интервальных выборок

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^{100}. \quad (3)$$

$\text{rad y} = \frac{1}{2^N} \text{ В}, N = 14.$

Связь кодов данных и В:

$$V = \text{Code}/16384 - 0.5. \quad (4)$$

Требуется:

1. Сделать оценки значений  $\mathbf{Y}$  двумя способами:
  - in: как интервал между первым и третьим квартилем
  - ex: как границы бокс-плота
2. Решить ИСЛАУ (1) для внутренних и внешних оценок  $\mathbf{y}$
3. Построить множество решений  $\beta_0, \beta_1$ .
4. Построить коридор совместных зависимостей.

## 2 Теория

### 2.1 Интервальная мода

Имеется интервальная выборка

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}.$$

Сформируем массив интервалов  $\mathbf{z}$  из концов интервалов  $\mathbf{X}$ .

Для каждого интервала  $\mathbf{z}_i$  вычисляем число  $\mu_i$  интервалов из выборки  $\mathbf{X}_i$ , включающих  $\mathbf{z}_i$ .

Максимальные  $\mu_i = \max \mu$  достигаются для индексного множества  $K$ . Тогда можно найти интервальную моду как мультиинтервал

$$\text{mode}\mathbf{X} = \bigcup_{k \in K} \mathbf{z}_k. \quad (5)$$

## 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/Deforc/Interval-Analysis/tree/master/lab4>

### 3.1 Алгоритм

Алгоритм поиска оценок параметров линейной регрессии заключается в следующем.

Каждый из файлов содержит 100 фреймов, каждый из которых включает 1024 массива, состоящих из 8 двухбайтовых значений. В результате обработки этих данных было сформировано  $1024 \times 8 = 8192$  интервальных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} [x_1 - \text{rad}\mathbf{y}, x_1 + \text{rad}\mathbf{y}] & [1 - \text{rad}\mathbf{y}, 1 + \text{rad}\mathbf{y}] \\ \vdots & \vdots \\ [x_8 - \text{rad}\mathbf{y}, x_8 + \text{rad}\mathbf{y}] & [1 - \text{rad}\mathbf{y}, 1 + \text{rad}\mathbf{y}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{1i} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_{8i} \end{pmatrix}, \quad i \in \overline{1, 8192}$$

Для каждого отдельного пикселя фрейма:

- $x_j$  — вольтаж, определяемый по названию файла
- $\hat{\mathbf{y}}_{ji}$  — оценка значения, соответствующее каждому пикселю (по каждому фрейму)
- $j$  — порядковый номер файла
- $i$  — номер пикселя внутри файла
- $\beta_0$  и  $\beta_1$  — параметры линейной регрессии

Полученные множества интервальных оценок:

- $\mathbf{B}_0 = \{\beta_0\}_{i=1}^{8192}$
- $\mathbf{B}_1 = \{\beta_1\}_{i=1}^{8192}$

Оценка каждого из параметров линейной регрессии производится следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \text{mode}\mathbf{B}_0, \\ \hat{\beta}_1 &= \text{mode}\mathbf{B}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, конечные значения  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  служат наиболее вероятными оценками параметров регрессии, что позволяет более точно анализировать зависимость между переменными в исследуемых данных.

## 4 Результаты

### 4.1 Внутренняя оценка

Результаты внутренней оценки

$$\begin{aligned} \text{mode}\mathbf{B}_0 &= \{[8083.32, 8083.33], [8086.78, 8086.8]\}, \\ \text{mode}\mathbf{B}_1 &= [13074.2, 13074.5]. \end{aligned}$$

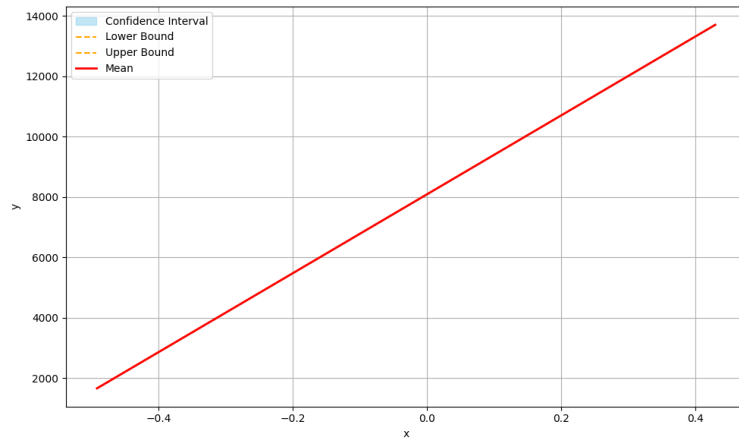


Рис. 1: Коридор совместных зависимостей для внутренней оценки.

## 4.2 Внешняя оценка

Результаты внешней оценки

$$\text{mode}\mathbf{B}_0 = \bigcap_{i=1}^{8192} \beta_{0i} = [7928.86, 8223.23],$$

$$\text{mode}\mathbf{B}_1 = \bigcap_{i=1}^{8192} \beta_{1i} = [13101.8, 13570.1].$$

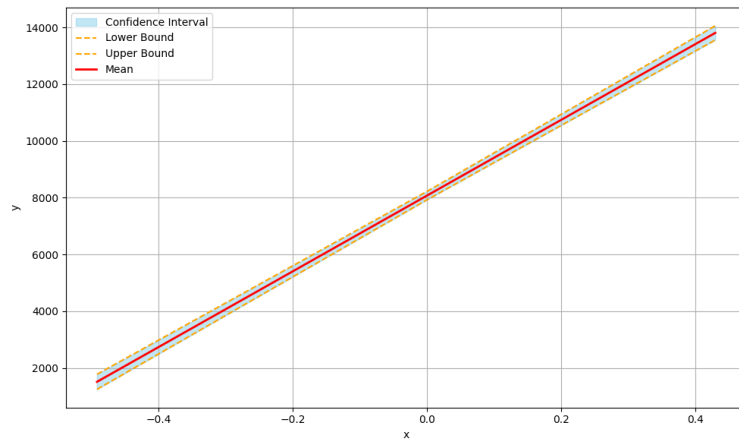


Рис. 2: Коридор совместных зависимостей для внешней оценки.

## 5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была реализована методика оценки параметров линейной регрессии на основе интервальных данных.

Что удалось сделать:

- Разработать алгоритм для вычисления внутренних и внешних границ оценок параметров линейной регрессии для учёта неопределённости исходных данных.
- Получить интервальные значения параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , которые отражают возможный диапазон их изменения.
- Построить области совместной зависимости, визуализирующие интервальные решения и позволяющие анализировать устойчивость модели.

Полученные результаты демонстрируют, что данный подход обеспечивает более адекватное моделирование зависимостей в условиях неопределённости данных. Методика особенно полезна в ситуациях, где точность измерений варьируется, и требуется надёжная оценка параметров модели.