

Федеральное государственное  
автономное учебное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Мегафакультет компьютерных технологий и управления  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Отчёт**  
**по лабораторной работе №6**  
**по дисциплине «Вычислительная математика»**  
Вариант №4

Группа: Р3218

Студент: Горло Евгений Николаевич

Преподаватель: Бострикова Дарья Константиновна

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Рабочие формулы</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Листинг программы</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Результаты работы программы</b>	<b>6</b>
5.1	Пример 1 . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Вывод</b>	<b>7</b>

# 1 Цель

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

## 2 Задание

1. В программе численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) должен быть реализован в виде отдельного класса / метода / функции;
2. Пользователь выбирает ОДУ вида  $y' = f(x, y)$  (не менее трех уравнений), из тех, которые предлагает программа;
3. Предусмотреть ввод исходных данных с клавиатуры: начальные условия, интервал дифференцирования  $[x_0, x_n]$ , шаг  $h$ , точность  $\epsilon$ ;
4. Для исследования использовать одношаговые методы и многошаговые методы (см. табл.1);
5. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, для всех методов, реализуемых в программе;
6. Для оценки точности одношаговых методов использовать правило Рунге;
7. Для оценки точности многошаговых методов использовать точное решение задачи:  $\epsilon = \max_{0 \leq i \leq n} |y_{iexact} - y_i|$ ;
8. Построить графики точного решения и полученного приближенного решения (разными цветами);
9. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных.
10. Проанализировать результаты работы программы.

### 3 Рабочие формулы

**Формула Эйлера:**

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

**Модифицированная формула Эйлера:**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)))$$

**Формула Рунге-Кутты 4-го порядка:**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

**Формула Адамса:**

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left( \frac{55}{24} f(x_i, y_i) - \frac{59}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{37}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) - \frac{9}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right)$$

## 4 Листинг программы

Ссылка на Github репозиторий

### Метод Эйлера:

```
1 def euler(f, y0, x0, xn, h):
2     n = int((xn - x0) / h) + 1
3     x = np.linspace(x0, xn, n)
4     y = np.zeros(n)
5     y[0] = y0
6
7     for i in range(n - 1):
8         y[i + 1] = y[i] + h * f(x[i], y[i])
9
10    #
11
12    y = sanitize_small_numbers(y)
13    return x, y
```

### Метод Рунге-Кутты:

```
1 def runge_kutta_4th(f, y0, x0, xn, h):
2     n = int((xn - x0) / h) + 1
3     x = np.linspace(x0, xn, n)
4     y = np.zeros(n)
5
6     y[0] = y0
7
8     for i in range(n - 1):
9         k1 = f(x[i], y[i])
10        k2 = f(x[i] + h / 2, y[i] + h * k1 / 2)
11        k3 = f(x[i] + h / 2, y[i] + h * k2 / 2)
12        k4 = f(x[i] + h, y[i] + h * k3)
13        y[i + 1] = y[i] + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
14
15    #
16
17    y = sanitize_small_numbers(y)
18    return x, y
```

### Метод Адамса:

```
1 def adams(f, y0, x0, xn, h, eps, k=4):
2     x_rk, y_rk, h_2, _ = compute_with_runge_rule(f, y0, x0, x0 + (k - 1) * h, h,
3         eps, "□", "□4", "□")
4     n = int((xn - x0) / h_2) + 1
5     x = np.linspace(x0, xn, n)
6     y = np.zeros(n)
7     for i in range(k):
8         y[i] = y_rk[i]
9
10    for i in range(k - 1, n - 1):
11        y_pred = y[i] + h_2 / 24 * (
12            55 * f(x[i], y[i]) - 59 * f(x[i - 1], y[i - 1]) + 37 * f(x[i - 2], y[i - 2]) - 9 * f(x[i - 3], y[i - 3])
```

```

13     f_pred = f(x[i + 1], y_pred)
14     y_corr = y[i] + h_2 / 24 * (
15         9 * f_pred + 19 * f(x[i], y[i]) - 5 * f(x[i - 1], y[i - 1]) + f(x
16         [i - 2], y[i - 2]))
17
18     while abs(y_pred - y_corr) > eps:
19         y_pred = y_corr
20         y_corr = y[i] + h_2 / 24 * (
21             9 * f_pred + 19 * f(x[i], y[i]) - 5 * f(x[i - 1], y[i - 1]) +
22             f(x[i - 2], y[i - 2]))
23     y[i + 1] = y_corr
24
25     #
26
27     y = sanitize_small_numbers(y)
28     y_real_solution = exact_solution(f, x0, y0)(x)
29
30     return x, y, y_real_solution

```

## 5 Результаты работы программы

### 5.1 Пример 1

ITMO
Home Lab3 Lab4 Lab5 Lab6
Djerdn

# Lab #6

Numerical solution of differential equations

### Input

Enter the initial condition:

Enter the differentiation interval:



Enter the step value:

Enter the accuracy:

Select a function:

☐  $y' = x^2 - 2y$   
☐  $y' = x + 1 / (1 + y^2)$   
☒  $y' = 2x - 3y$

Clear

Обзор lab6\_1.txt Solve

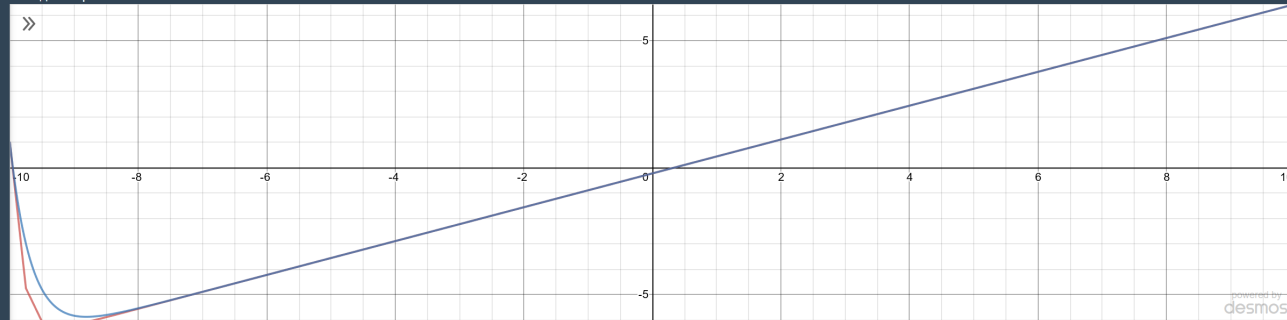
### Solution

Метод Эйлера

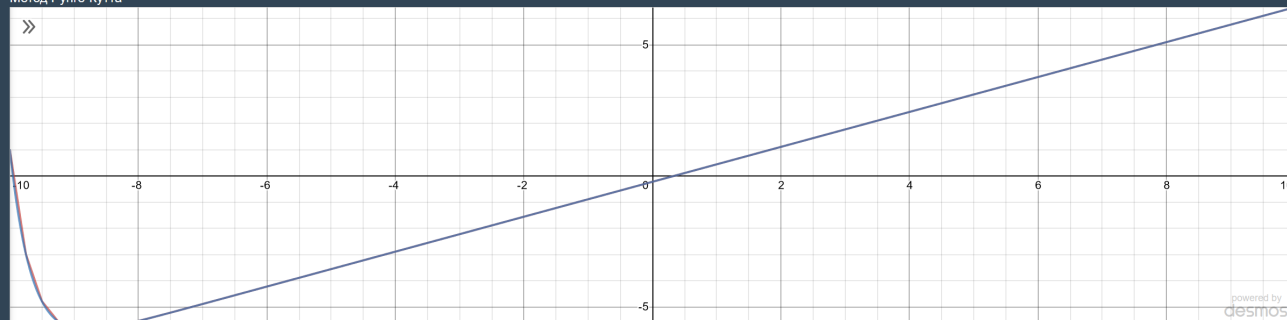
X	Y	Точное решение
-10	1	1
-9.75	-4.75	-2.99577
-9.5	-6.0625	-4.79531
-9.25	-6.26562	-5.55741
-9	-6.19141	-5.82946
-8.75	-6.04785	-5.87003
-8.5	-5.88696	-5.80125
-8.25	-5.72174	-5.68083
-8	-5.55544	-5.536
-7.75	-5.38886	-5.37965

Save to

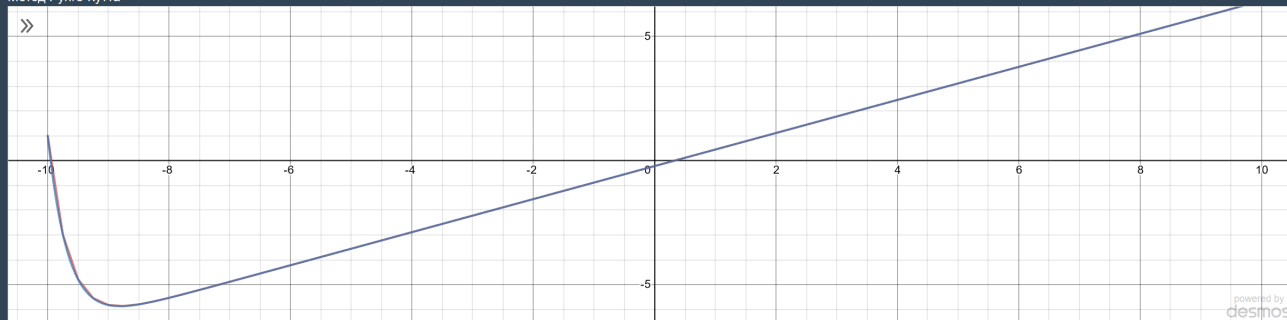
Метод Эйлера



Метод Рунге-Кутты



Метод Рунге-Кутты



## 6 Вывод

В ходе данной лабораторной работы, были изучены несколько численных методов, которые используются для решения задачи Коши.

1. Метод Эйлера прост в реализации, однако довольно груб, удовлетворительная точность достигается только при малом шаге  $h$ .
2. Метод Рунге-Кутты сложнее в реализации, требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификации, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом.

3. Метод Адамса - многошаговый метод и по сравнению с Рунге-Кутты той же точности, метод Адамса экономичный, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутты - четырех). Однако метод Адамса расчет может быть начат только с узла  $x_3$ , а не  $x_0$ , иными словами предварительно нужно воспользоваться другим методом.