1. Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações de soma e produto por escalar (considere os reais $\mathbb{R}$ como o conjunto de escalares):

$$(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$$

$$\alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Mostre que $\mathbb{R}^2$ com essas operações forma um espaço vetorial ou indique quais axiomas de espaço vetorial não são satisfeitos.

Suponha w, v e $u \in \mathbb{R}^2 \rightarrow v = (a,b)$, a e $b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow u = (c,d)$, c e $d \in \mathbb{R}$

$\rightarrow w = (f,g)$, f e $g \in \mathbb{R}$

A1) $w + (v + u) = (w + v) + u$

$(f,g) + (ac, bd) = (af, bg) + (c, d)$

$(acf, bdg) = (acf, bdg)$ ✓

A2) $\exists\ (0,0) \mid (0,0) + v = v$

$(0,0) + (a,b) = (0a, 0b) = (0,0)$ X

não forma esp. vetorial.

2. Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações de soma e produto por escalar (considere os reais $\mathbb{R}$ como o conjunto de escalares):

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$\alpha(a, b) = (0, 0)$$

Mostre que $\mathbb{R}^2$ com essas operações forma um espaço vetorial ou indique quais axiomas de espaço vetorial não são satisfeitos.

Suponha w, v e $u \in \mathbb{R}^2 \rightarrow v = (a,b)$, a e $b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow u = (c,d)$, c e $d \in \mathbb{R}$

$\rightarrow w = (f,o)$, f e $o \in \mathbb{R}$

M6) $1 \cdot v = v$

$1 \cdot (a,b) = (0,0)$ X

não forma esp. vetorial.

3. O conjunto $V' = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ (com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais)? Por quê?

Suponha S e $U \in V'$

$S = (a, a^2)$, $a \in \mathbb{R}$

$U = (b, b^2)$, $b \in \mathbb{R}$

1) $S + U \in V' \quad \forall S, U \in V'$

$S + U = (a, a^2) + (b + b^2) = (a+b, \underbrace{a^2 + b^2}_{\text{não está em } V'})$

2) $\alpha \cdot S \in V', \forall S \in V'$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot S = \alpha(a, a^2) \rightarrow 2 \cdot (2,4) = (4, 8) \rightarrow$ deveria ser 16

x, x^2

Suponha $S = (2,4)$ e $\alpha = 2$

NÃO É subespaço!

4. O conjunto $V' = \{(x,y) | x \geq 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ (com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais)? Por quê?

Suponha S e $U \in V'$

$S = (a, b)$, $a \geq 0$

$U = (c, d)$, $c \geq 0$

1) $S + U \in V'$ $\forall S, U \in V'$

$(a,b) + (c,d) = (\underbrace{a+c}_{\geq 0}, b+d)$ OK!

Não é subespaço!

2) $\alpha \cdot S \in V'$ $\forall S \in V'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

Suponha $\alpha = -1 \Rightarrow (\underbrace{-a}_{\leq 0}, -b)$

5. O conjunto $V' = \{(x,y,z) | x = 4y \text{ e } z = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ (com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais)? Por quê?

$S = (4b, b, 0)$, $b \in \mathbb{R}$

$U = (4a, a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$

$S + U \in V'$, $\forall S, U \in V'$

$(4b, b, 0) + (4a, a, 0) = (4a + 4b, a+b, 0) \Rightarrow (4\underbrace{(a+b)}_{K}, \underbrace{a+b}_{K}, 0)$ $K \in \mathbb{R}$

OK!

$\alpha \cdot S \in V'$, $\forall S \in V'$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha S \Rightarrow (4\underbrace{\alpha b}_{k}, \underbrace{\alpha b}_{k}, 0)$ $K \in \mathbb{R}$ OK!

É subespaço!

6. O conjunto $V' = \{(x, y, z) | x = z^2\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ (com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais)? Por quê?

Suponha $S, u \in V'$

$S = (c^2, b, c)$, c e $b \in \mathbb{R}$

$u = (a^2, i, a)$, a e $i \in \mathbb{R}$

$S + u \in V' \quad \forall S, u \in V'$

$S + u = (c^2, b, c) + (a^2, i, a) \Rightarrow (\underbrace{a^2 + c^2}_{\text{não é } k^2}, b+i, \underbrace{a+c}_{k})$

$\Rightarrow (a.a)+(c.c)$

$\alpha . S \in V' \quad \forall S \in V'$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha . S = \alpha (c^2, b, c) \Rightarrow (\alpha c^2, \alpha b, \alpha c)$

Suponha $\alpha = b \Rightarrow (\underbrace{b(c^2)}_{\text{não é } k^2}, b^2, \underbrace{bc}_{k})$

Não é subespaço!

7. O conjunto das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix}$$

é um subespaço de $M(2,2)$? Por quê?

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 0 \end{bmatrix}$

$A + B \in S$

$A + B \Rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{a+c}^{k} & \overbrace{b+d}^{J} \\ \underbrace{a+c}_{k}+\underbrace{b+d}_{J} & 0 \end{bmatrix}$

OK!

$\alpha . A \in S$

$\alpha . A \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha(a+b) & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{\alpha a}^{k} & \overbrace{\alpha b}^{J} \\ \underbrace{\alpha a}_{k}+\underbrace{\alpha b}_{J} & 0 \end{bmatrix}$

8. O conjunto das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix}$$

é um subespaço de $M(2,2)$? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c & c+d \\ c-d & d \end{bmatrix}$$

$$A + B \in S$$

$$A + B = \begin{bmatrix} \overbrace{a+c}^{k} & \overbrace{a+c}^{k} + \overbrace{b+d}^{J} \\ \underbrace{a+c}_{K}\underbrace{-b-d}_{\text{não é } J} & \underbrace{b+d}_{J} \end{bmatrix}$$

Não é subespaço!