01ª) a) $T(x,y) = (x-3y,\ 2x+5y)$

1° passo: $T(x+y) = T(x)+T(y)$

$u = (a,b)$

$v = (k,i)$

$T(u+v) \Rightarrow T((a,b)+(k,i)) \Rightarrow T((\overbrace{a+k}^{x},\ \overbrace{b+i}^{y}))$

$\Rightarrow T((a+k,\ b+i)) = (a+k-3(b+i),\ 2(a+k)+5(b+i))$

$T(x) \Rightarrow T(u) \Rightarrow T(a,b) = (a-3b,\ 2a+5b)$

$T(y) \Rightarrow T(v) \Rightarrow T(k,i) = (k-3i,\ 2k+5i)$

$T(x)+T(y) = (a-3b,\ 2a+5b)+(k-3i,\ 2k+5i)$

$\Rightarrow (a+k-3(b+i),\ 2(a+k)+5(b+i)$

2º passo: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$T(u) \Rightarrow T(a,b) \Rightarrow T(\alpha(a,b)) = \alpha(a-3b,\ 2a+5b)$

$\alpha T(a,b) = \alpha(a-3b,\ 2a+5b)$

É linear!

b) $T(x,y) = (x^2, y^2)$ 1ª Questão!

$u = (a, b)$

$v = (k, i)$

1º $T(x+y) = T(x) + T(y)$

$T(u+v) \Rightarrow T((a,b)+(k,i)) \Rightarrow T(a+k, b+i)$

$\Rightarrow = ((a+k)^2, (b+i)^2)$

2º

$T(u) \Rightarrow T(a,b) = (a^2, b^2)$

$T(v) \Rightarrow T(k,i) = (k^2, i^2)$

$T(u) + T(v) = (a^2, b^2) + (k^2 + i^2)$

$= (a^2+k^2, b^2+i^2)$

C.E $\Rightarrow$ $u(1,2)$ $((a+k)^2, (b+i)^2) = (a^2+k^2, b^2+i^2)$

$v(3,4)$ $((1+3)^2, (2+4)^2) = (1^2+3^2, 2^2+4^2)$

$(16, 36) = (10, 20)$

Não é Linear!

a)

c) $T(x,y) = (x+1, y)$ 1ª Questão!

$u = (a, b)$ 1° $T(u+v) \Rightarrow T((a,b)+(k,i))$

$v = (k, i)$ $\Rightarrow T((a+k, b+i))$

$T((a+k, b+i)) = (a+k+1, b+i)$

$T(u) = (a+1, b)$; $T(v) = (k+1, i)$

$T(u) + T(v) = (a+k+1+1, b+i)$

C.E $= u = (1,2)$; $v = (3,4)$

$(1+3+1, 2+4) = (1+3+1+1, 2+4)$

$(5,6) = (6,6)$

Não é Linear!

1ª Questão!

a) $T(x,y) = (3y, -2x)$

$u = (a,b)$ ① $T(u+v) \Rightarrow T(a+k, b+i)$

$v = (k,i)$ $\Rightarrow (3(b+i), -2(a+k))$

$T(u) = (3b, -2a)$; $T(v) = (3i, -2k)$

$T(u) + T(v) = (3(b+i), -2(a+k))$

② $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$T(\alpha(a,b)) = T((\alpha a, \alpha b)) = (3\alpha b, -2\alpha a)$

$\alpha T(a,b) = \alpha(3b, -2a) = (3\alpha b, -2\alpha a)$

É Linear!

02ª) a) Seja $A = \{(-1,1),(0,1)\}$

$a \cdot (-1,1) + b(0,1) = (x,y)$

$$\begin{cases} -a = x \Rightarrow a = -x \\ a + b = y \Rightarrow -x + b = y \Rightarrow b = x + y \end{cases}$$

$-x(3,2,1) + (x+y)\cdot(1,1,0) = T(x,y)$

$(-3x,-2x,-x) + (x+y,x+y,0) = T(x,y)$

$T(x,y) = (-2x+y, -x+y, -x)$

b) $v = (a,b) \Rightarrow T(v) = (-2,1,-3)$

$T(a,b) \Rightarrow (-2a+b, -a+b, -a) =$

$$\begin{cases} -2a+b = -2 \Rightarrow -2\cdot 3 + 4 = -2 \Rightarrow -2 = -2 \\ -a+b = 1 \Rightarrow -3+b = 1 \Rightarrow b = 4 \\ -a = -3 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

Logo $v = (3,4)$

nrel

03ª) a) $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$$a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} a+b+c = x \Rightarrow z + y - z + c = x \Rightarrow c = x - y \\ a+b = y \Rightarrow b = y - z \\ a = z \end{cases}$$

$$z(1,2) + (y-z).(2,3) + (x-y).(3,4) = T(x,y,z)$$

$$(z, 2z) + (2y-2z, 3y-3z) + (3x-3y, 4x-4y)$$

$$T(x,y,z) = (3x - z - y, 4x - z - y)$$

b) $V = (a,b,c) \Rightarrow T(a,b,c) = (-3, -2)$ $\boxed{V = (1,4,2)}$

$T(V) = (3a - c - b, 4a - c - b) =$

$(a, -c+6, c)$

$$\begin{cases} 3a - c - b = -3 \\ 4a - c - b = -2 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{cases} -a = -1 \Rightarrow a = +1 \\ 4a - c - b = -2 \Rightarrow +4 - c - b = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow -b = -2 - 4 + c$

$b = -c + 6$

c ou b é

variável livre

c) $V = (a, b, c) \mid T(V) = (0, 0)$

3ª Questão!

$T(V) = (3a - c - b, 4a - c - b) =$

$$\begin{cases} 3a - c - b = 0 \\ 4a - c - b = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{cases} -a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 4a - c - b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c = -b$

$V = (0, b, -b)$

$V = (0, 1, -1)$

nº)

4º) a) $a\cdot(-2,3)+b(1,-2)=(x,y)$

$$\begin{cases} -2a+b=x \\ 3a-2b=y \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2b+y}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4b-2y}{3}+\frac{3b}{3}=x \Rightarrow -b=3x+2y$$

$$\frac{-b-2y}{3}=x \qquad b=-3x-2y$$

$$a=\frac{-6x-4y+y}{3}$$

$$a=\frac{-6x-3y}{3} \Rightarrow a=-2x-y$$

$(-2x-y)(-1,0,1)+(-3x-2y)\cdot(0,-1,0)=T(x,y)$

$(2x+y,0,-2x-y)+(0,3x+2y,0)=T(x,y)$

$$\Rightarrow \underline{T(x,y)=(2x+y,3x+2y,-2x-y)}$$

b) $T(x,y) = (2x+y, 3x+2y, -2x-y)$ 4ª Questão!

$\rightarrow x(2,3,-2) + y(1,2,-1)$

$\rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \rightarrow y=-2x \rightarrow y=0 \\ 3x+2y=0 \rightarrow 3x-4x=0 \rightarrow x=0 \\ -2x-y=0 \end{cases}$

$N(T) = \{(0,0)\} \rightarrow \text{Dim}\,N(T) = 0$

$\rightarrow Im(T) = [(2,3,-2),(1,2,-1)]$

c) Como o nucleo tem apenas o vetor nulo (0,0), T é injetora. Como $\text{Dim}\,Im(T) = 2$ e $\text{Dim}(R^3) = 3$ e $2 < 3$, logo não é sobrejetora.

05°)

$\mathbb{R}^3 \to A = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$

$\mathbb{R}^2 \to B = \{(-1,1),(0,1)\}$

$T(x,y,z) = (2x+y-z,\ x+2y)$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

1° Encontrar T de cada elemento da base do dominio.

$T(1,0,0) = (2,1)$

$T(2,-1,0) = (3,0)$

$T(0,1,1) = (0,2)$

2° Pegar cada T e colocar na base do enunciado, no caso, do CD.

$(2,1) = a\cdot(-1,1) + b\cdot(0,1)$

$$\begin{cases} -a = 2 \to a = -2 \\ a+b = 1 \to b = 3 \end{cases}$$

$[(2,1)]_A = [(-2,3)]_B$

$(3,0) = a \cdot (-1,1) + b(0,1)$

05ª Questão!

$\begin{cases} a = -3 \\ b - 3 = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$

$[(3,0)]_A = [(-3,3)]_B$

$(0,2) = a \cdot (-1,1) + b(0,1)$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$ $[(0,2)]_A = [(0,2)]_B$

$+$

$[T]^A_B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ //

$[T$

06º) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ▷ $T(1,0)$ na base B

▷ $T(-1,1)$ na base B

$B = \{(1,1,-1), (2,1,0), (3,0,1)\}$

$T(-1,1) = 3 \cdot (1,1,-1) + 2(2,1,0) + 1(3,0,1)$

▷ $T(-1,1) = (10,5,-2)$

$+$ $T(1,0) = 1 \cdot (1,1,-1) + 5(2,1,0) + (-1) \cdot (3,0,1)$

▷ $T(1,0) = (8,6,-2)$ ⇝ Já da base canonica

$T(0,1) = T(1,0) + T(-1,1)$

$= (8,6,-2) + (10,5,-2)$

$= (18,11,-4)$

Logo, $T(x,y) = x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1)$

$= (8x, 6x, -2x) + (18y, 11y, -4y)$

▷ $= \underline{(8x+18y, 6x+11y, -2x-4y)}$

$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

07ª)

$$[T]^{B_1}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow T(1,0,0)$ na base B_2

$\rightarrow T(1,0,1)$ na base B_2

$\rightarrow T(0,1,1)$ na base B_2

$B_1 = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$

$B_2 = \{(-1,0),(0,-1)\}$

$$T(0,1,1) = 1(-1,0) + (-1)\cdot(0,-1) = (-1,1)$$

$$T(1,0,0) = 0\cdot(-1,0) + 1(0,-1) = (0,-1)$$ $\leadsto$ <u>já na canonica</u>

$$T(1,0,1) = (-1)\cdot(-1,0) + 1\cdot(0,-1) = (1,-1)$$

$$T(0,0,1) = T(1,0,1) - T(1,0,0) = (1,0)$$ $\leadsto$ <u>na canonica</u>

7ª Questão

$T(0,1,0) = T(0,1,1) - T(0,0,1)$
$= (-2,1) \rightsquigarrow$ na canonica.

logo $T(x,y,z) = x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1)$

$= \underline{(-2y+z, -x+y)}$

b) $Im(T) = [(0,-1), (1,0)]$
$\rightsquigarrow Dim\, Im(T) = 2$

c) $(-2y+z, -x+y) = (0,0)$

$$\begin{cases} -2y+z=0 \rightsquigarrow -2x+z=0 \rightsquigarrow z=2x \\ -x+y=0 \rightsquigarrow y=x \end{cases}$$

$N(T) = (x, x, 2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d) Não é injetora pois no nucleo há mais de 1 vetor. É sobrejetora pois $Dim\, Im(T) = 2$ que é o mesmo de $\mathbb{R}^2$.