UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHRIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Trabalho de SEL0326 (Prof. Rodrigo Ramos)
Controle de Sistemas Lineares

Data limite para entrega: 07/12/2023

Enunciado

O sistema linear abaixo representa um modelo de um sistema de potência do tipo Máquina versus Barramento Infinito em torno de uma condição particular de operação que, em malha aberta, é instável.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{x_0} \tag{1}$$

sendo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 376{,}9911 & 0 & 0 \\ -0{,}15685 & 0 & -0{,}0784 & 0 \\ -0{,}16725 & 0 & -0{,}46296 & 0{,}166667 \\ 1572{,}825 & 0 & -5416{,}98 & -100 \end{bmatrix} \tag{2}$$

e

$$\boldsymbol{B} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 10000]^T \tag{3}$$

Admita que o conhecimento da matriz A está sujeito a uma incerteza estruturada que pode ser descrita por

$$\Delta\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta a_{21} & 0 & \Delta a_{23} & 0 \\ \Delta a_{31} & 0 & \Delta a_{33} & \Delta a_{34} \\ \Delta a_{41} & 0 & \Delta a_{43} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

O trabalho deve ser realizado em 4 etapas conforme a descrição que segue.

Etapa 1: Criação do modelo nominal do grupo

1.a) Considerando uma faixa de variação de ±5% em torno do valor dado para cada elemento a_{ij}, i = 1, ..., 4, j = 1, ..., 4, dados na equação (2), faça um sorteio de um valor para cada um dos elementos Δa_{ij} presentes na matriz da equação (4) considerando que todos os valores na faixa de variação mencionada têm igual probabilidade de serem sorteados (ou seja, a distribuição de probabilidades é uniforme);
1.b) Construa a matriz de estados com incertezas somando a_{ij} com Δa_{ij}, i = 1, ..., 4, j = 1, ..., 4 (ou seja, a matriz de estados para cada trabalho é a matriz $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A}$).

Etapa 2: Definição do funcional LQR

2.a) Escolha matrizes $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ de forma a definir o funcional LQR

$$J = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}) dt \qquad (5)$$

sendo $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ matrizes diagonais e definidas positivas.

Etapa 3: Cálculo do ganho ótimo *K* para o modelo nominal do grupo

3.a) Considerando o modelo com incertezas, ou seja,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} \qquad (6)$$

e uma lei de controle de realimentação de estados do tipo

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \qquad (7)$$

calcule o ganho ótimo $\boldsymbol{K}$ que minimiza o funcional dado pela equação (5).
3.b) Considerando a condição inicial

$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0},\mathbf{1}]^{\boldsymbol{T}}, \qquad (8)$$

calcule o valor do funcional J para o ganho ótimo $\boldsymbol{K}$ obtido no item anterior e compare o valor calculado com o valor da expressão $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$;
3.c) Apresente o gráfico da resposta no tempo do modelo com incertezas em malha fechada – ou seja, considerando o sistema descrito pelas equações (6) e (7) – à condição inicial dada pela equação (8).

Etapa 4: Avaliação da otimalidade do controle fora das condições nominais

4.a) Realize agora 100 novos sorteios para os valores de Δa_{ij}, i = 1, ..., 4, j = 1, ..., 4, considerando a mesma distribuição uniforme e a mesma faixa de variação dadas no item 1.a). Com os valores sorteados, construa 100 novos modelos com incertezas descritos pela equação (6);
4.b) Utilizando simulações no tempo da resposta à condição inicial dada pela equação (8), calcule valores aproximados do funcional J para o ganho ótimo $\boldsymbol{K}$ obtido no item 3.a) considerando os 100 modelos com incertezas em malha fechada – ou seja, considerando o sistema descrito pelas equações (6) e (7). Para as simulações, utilize um horizonte de tempo finito que garanta a convergência do funcional J para um valor com precisão até a segunda casa decimal;
4.c) Apresente de maneira gráfica as 100 aproximações obtidas e destaque o valor mínimo do funcional J obtido dentre estas 100 aproximações.
4.d) Elabore uma conclusão a respeito do efeito das incertezas na matriz de estados sobre a otimalidade do controle LQR.

O trabalho deverá ser entregue na forma de um relatório em formato PDF contendo uma descrição detalhada de cada um dos passos implementados. A entrega se dará pela inserção do arquivo PDF no e-Disciplinas.