Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1 по дисциплине

Интервальный анализ

Выполнил
студент гр.5030102/20202 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

Оглавление

Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$$Ax = b, x = (x_1, x_2, x_3)$$

С матрицей A:

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1.00 \\ 1.05 & 1.00 \\ 1.10 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rad}A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

1. Найти диапазон значений δ, при которых $0 \in detA$

$$A = \begin{pmatrix} [0.95-\delta,\ 0.95+\delta] & [1.00-\delta, 1.00+\delta] \\ [1.05-\delta,\ 1.05+\delta] & [1.00-\delta, 1.00+\delta] \\ [1.10-\delta,\ 1.10+\delta] & [1.00-\delta, 1.00+\delta] \end{pmatrix}$$

   Или

$$A = \begin{pmatrix} [0.95-\delta,\ 0.95+\delta] & 1.00 \\ [1.05-\delta,\ 1.05+\delta] & 1.00 \\ [1.10-\delta,\ 1.10+\delta] & 1.00 \end{pmatrix}$$

2. Для минимального значения радиуса матричных элементов $min\ \delta$ найти точечную матрицу A': $detA' = 0$
3. Обсудить факт $detA' = 0$ для случая задачи 2-ракурсной томографии и линейной регрессии

Теория

Интервальной матрицей называется матрица А, каждый элемент которой задан в виде интервала, то есть может принимать любое значение в заданном интервале:

$$[a_{ij}] = [\mathrm{mid}a_{ij} - \mathrm{rad}a_{ij}, \mathrm{mid}a_{ij} + \mathrm{rad}a_{ij}]$$

где $mida_{ij}$ — *середина* интервала, $rada_{ij}$ — *радиус* интервала.

Интервальные матрицы применяются для работы с неопределенными данными, например, с погрешностями измерений или изменяющимися параметрами системы

Матрица А называется ***особенной*** (сингулярной), если её определитель равен нулю: $\det(A) = 0$

У квадратной матрицы это значит, что её строки или столбцы линейно зависимы. У прямоугольной же матрицы особенность означает линейную зависимость её столбцов

Матрица А' считается ***вырожденной***, если её две колонки линейно зависимы: существует коэффициент λ такой, что:

$$a_i \approx \lambda b_i, i = 1,2,3$$

λ определяется через интервалы для каждого i:

$$\lambda_i \in [\frac{a^i_{min}}{b^i_{max}}, \frac{a^i_{max}}{b^i_{min}}]$$

Пересечение этих интервалов для всех строк даёт общий диапазон λ, в котором колонки линейно зависимы.

На самом деле, такой расчёт λ_i плохой, потому что он всегда неверен в общем случае для деления двух интервалов.

Он работает только если весь знаменатель строго положительный, и это важно – но даже при этом он может давать неправильные границы при *перестановке знаков*, то есть он теряет важную информацию о том, как знак λ влияет на результат.

Верный пособ нахождения δ

Чтобы найти δ, нужно:

1. Проверить, существует ли λ, удовлетворяющий всем неравенствам:

$$u_i \in [a_i - \delta, a_i + \delta], v_i \in \begin{cases} [b_i - \delta, b_i + \delta], & \text{tomo} \\ b_i, & \text{regress} \end{cases}$$

и

$$u_i = \lambda v_i.$$

2. Это переписывается как интервал для λ:

$$\lambda \in \frac{[a_i - \delta,\ a_i + \delta]}{[b_i - \delta,\ b_i + \delta]}.$$

То есть, в отличие от показанного ранее метода, сами интервалы считаются как min, max от 4х точек $\frac{u_{min}}{v_{min}}, \frac{u_{min}}{v_{max}}, \frac{u_{max}}{v_{min}}, \frac{u_{max}}{v_{max}}$

3. Для всех i пересечь интервалы λ.

Если пересечение пусто, то такой δ недопустим.

В *2-ракурсной томографии* оба элемента строки варьируются

В *линейной регрессии* только первый элемент строки варьируется, второй фиксирован

Реализация

Код написан на python 3.12 и доступен по [ссылке]

4. Найти минимальный δ, для которого пересечение непустое.

Результаты

2-ракурсная томография:

$$\delta \approx 0.037, \lambda \approx 1.025$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0.987 & 0.963 \\ 1.038 & 1.013 \\ 1.063 & 1.037 \end{pmatrix}$$

Линейная регрессия:

$$\delta \approx 0.075, \lambda \approx 1.025$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1.025 & 1.000 \\ 1.025 & 1.000 \\ 1.025 & 1.000 \end{pmatrix}$$

Выводы

$det(A') = 0$ в обеих задачах говорит о критическом уровне неопределенности δ, при котором система теряет линейную независимость.

В случае томографии это отражает потенциальную множественность решений или полную несовместность системы, что проявляется в высокой чувствительности реконструкции к малейшим изменениям данных

В задаче линейной регрессии вырожденность A' делает стандартный метод наименьших квадратов неприменимым без дополнительной регуляризации или ограничений.

Таким образом, $det(A') = 0$ выступает как индикатор предельной неопределенности, которая ограничивает корректность и устойчивость вычисленного решения.