

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №2 по дисциплине
Интервальный анализ
Вариант 19

Выполнил
студент гр.5030102/20202
Преподаватель

Дрекалов Н.С.
Баженов А.Н.

Санкт-Петербург
2025

Оглавление

Цель	3
Постановка задачи.....	3
Интервальные оценки области значений.....	6
Расстояние по Хаусдорфу до точной области значений.....	10
Выводы.....	12

Цель

Исследование и сравнение точности различных интервальных методов оценивания области значений функции на заданном отрезке.

Постановка задачи

Для каждой из двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервале $X = [a, b]$ необходимо:

- A. Аналитически или численно найти область значений $\text{ran}(f, X)$, построить график функции на заданном интервале.
- B. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:
 - i. Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.
 - ii. Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.
 - iii. Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
 - iv. Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
 - v. Бицентрированную форму.
- C. Для каждой полученной интервальной оценки вычислить величину $\text{dist}(F(X), \text{ran}(f, X))$ – расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:
 - vi. Найти (аналитически или численно) константу Липшица L для функции f на интервале X . Обосновать свой выбор.
 - vii. Используя следствие из теоремы о непрерывности по Липшицу, получить теоретическую оценку погрешности:

$$\text{rad}(F(X)) \leq L \cdot \text{rad}(X)$$

viii. Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала $rad(F(X))$) с теоретической оценкой из пункта (б).
Сделать выводы.

D. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода

Область значений $ran(f, X)$ и графики

$f_1(x)$:

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2, 0 \leq x \leq 3$$

Найдём производную:

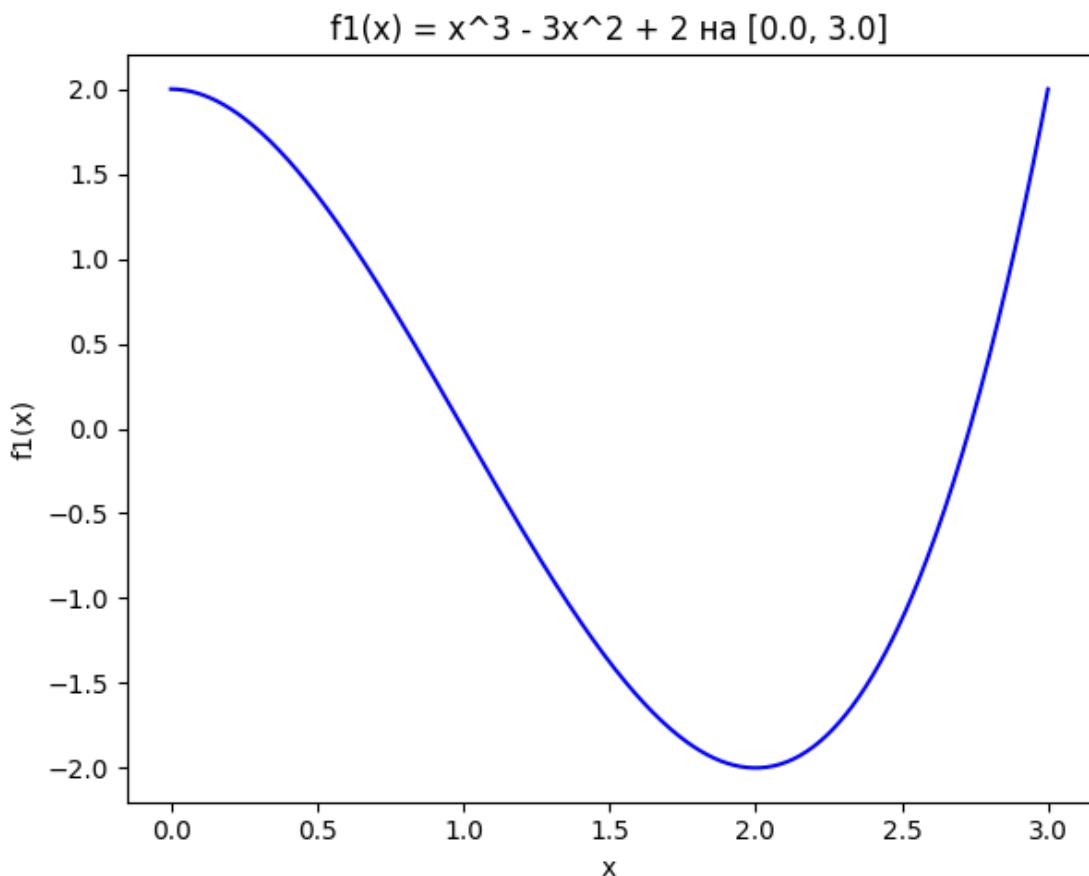
$$f'_1(x) = 3x(x - 2)$$

$$f_1(0) = 2, f_1(2) = -2, f_1(3) = 2$$

Область значений:

$$ran(f_1, [0, 3]) = [-2; 2]$$

График:



$f_2(x)$:

$$f_2(x) = x^2 e^{-x}, -2 \leq x \leq 4$$

Найдём производную:

$$f'_2(x) = x(2-x)e^{-x}$$

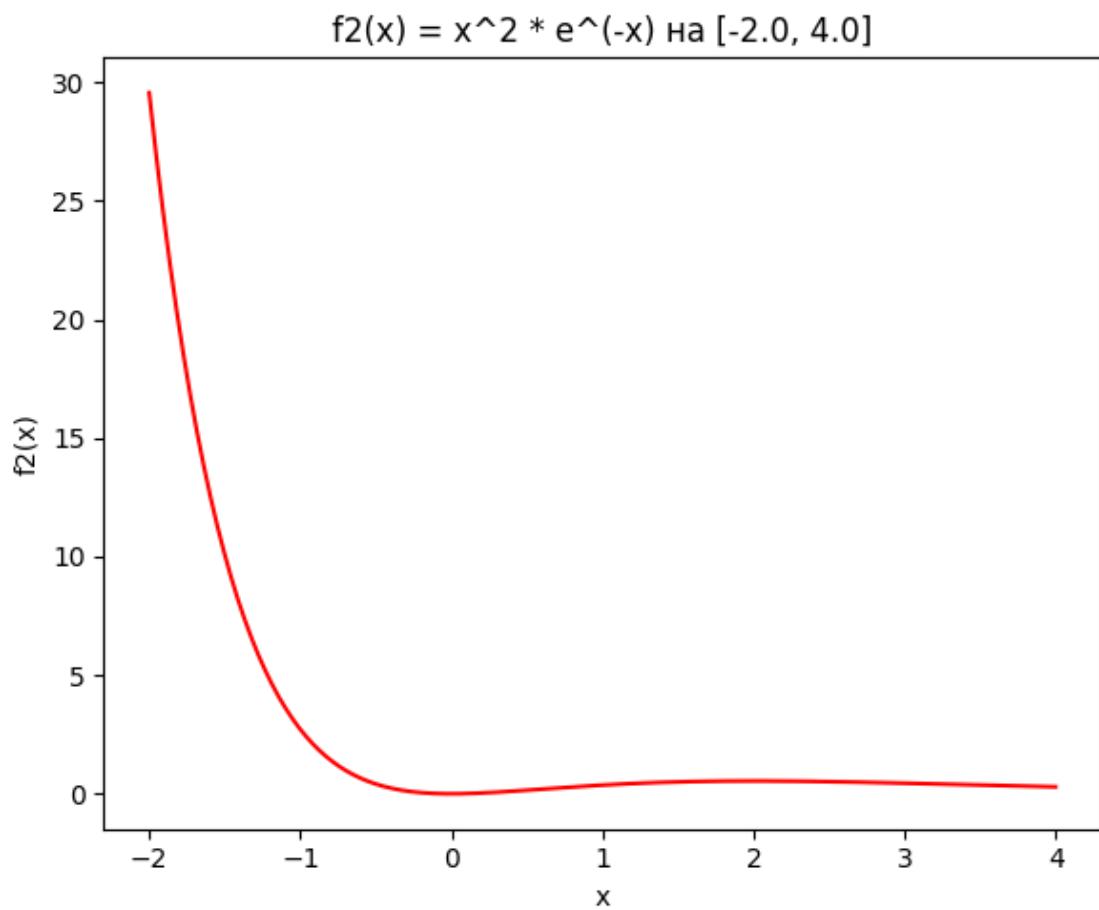
$$f_2(0) = 2, f_2(2) = 4e^{-2}$$

$$f_2(-2) = 4e^2 \approx 29.56, f_2(4) = 16e^{-4} \approx 0.29$$

Область значений:

$$ran(f_2, [-2, 4]) = [0.29; 29.56]$$

График:



Интервальные оценки области значений

Естественное интервальное расширение

Идея: подставляем интервалы вместо переменных

$f_1(x)$:

$$X = [0, 3] \Rightarrow f_1(X) = [0, 3]^3 - 3[0, 3]^2 + 2 = [-25, 29]$$

$f_2(x)$:

$$X = [-2, 4] \Rightarrow X^2 = [0, 16], e^{-X} = [e^{-4}, e^2] \approx [0.018, 7.389]$$

$$f_2(X) \approx [0, 16] * [0.018, 7.389] = [\mathbf{0}, \mathbf{118.22}]$$

Схема Горнера

$f_1(x)$:

$$f_1(x) = x(x(x - 3)) + 2$$

$$f_1(X) = [0, 3] * ([0, 3] * ([0, 3] - 3)) + 2 = [-25, 2]$$

$f_2(x)$:

Горнер не меняет вид функции, оценка та же

Дифференциальная центрированная форма

Расчёт в точке x_c (центр интервала)

$f_1(x)$:

$$x_c = \frac{3+0}{2} = 1.5$$

$$f_1(x_c) = -1.375, f'_1(X) = [0, 9]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_c) + f'_1(X) * (X - x_c) = -1.375 + [-3, 9] * [-1.5, 1.5] \\ &= \mathbf{[-14.875, 12.125]} \end{aligned}$$

$f_2(x)$:

$$x_c = 1$$

$$f_2(x_c) \approx 0.368, f'_2(X) \approx [-59.11, 0.59]$$

$$\begin{aligned} f_2(X) &\approx f_2(x_c) + f'_2(X) * (X - x_c) = 0.368 + [-59.11, 0.59] * [-3, 3] \\ &= 0.368 + [-1.104, 1.104] = [-\mathbf{176.96}, \mathbf{177.70}] \end{aligned}$$

Наклонная форма

Расчёт в точке x_c (центр интервала)

Схожа с дифференциальной центрированной формой, вместо $f'(x_c)$ используется

$$S(X, x_c) = \frac{f(X) - f(x_c)}{x - x_c}$$

$f_1(x)$:

$$S(X, x_c) = [-2.813, 2.25]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = -1.375 + [-2.813, 2.25] * [-1.5, 1.5] \\ &= [\mathbf{-5.594}, \mathbf{2.844}] \end{aligned}$$

$f_2(x)$:

$$S(X, x_c) = \frac{X^2 * e^{-x} - x_c^2 * e^{-x_c}}{X - x_c}$$

$$S(X, x_c) = [-9.73, -0.03]$$

$$\begin{aligned} f_2(X) &\approx f_2(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = 0.368 + [-9.73, -0.03] * [-3, 3] \\ &= [\mathbf{-28.82}, \mathbf{29.56}] \end{aligned}$$

Бицентрированная форма

Бицентрированные формы – это пересечение двух форм с разными центрами

Одной из точек будет центр интервала для обеих функций

$f_1(x)$:

Расчёт в точках $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = 2$

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$S(X_1, x_1) = [-2.25, 4]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = [-10, 2.5]$$

$$[-10, 2.5] \cap [-5.594, 2.844] = [-\mathbf{5.594}, \mathbf{2.5}]$$

$f_2(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = -2$

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$S(X, x_1) = [-9.73, -0.03]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = 29.56 + [-9.73, -0.03] * [0, 6] \\ &= [-28.82, 29.41] \end{aligned}$$

$$[-28.82, 29.56] \cap [-28.82, 29.41] = [-\mathbf{28.82}, \mathbf{29.41}]$$

Бицентрированная форма (с дифференциальными формами)

$f_1(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = 2$

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$f'_1(X) = [-3, 9]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + f'_1(X) * (X - x_1) = -2 + [-18, 9] = [-20, 7]$$

$$[-14.875, 12.125] \cap [-20, 7] = [-\mathbf{14.875}, \mathbf{7}]$$

$f_2(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = -2$

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$f'_2(X) = [-59.112, 0.461]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_2(x_1) + f'_2(X) * (X - x_1) = 4e^2 + [-59.112, 0.461] \cdot [0, 6] \\ &= [-325.116, 29.556] \end{aligned}$$

$$[-176.96, 177.70] \cap [-325.116, 29.556] = [-\mathbf{176.96}, \mathbf{29.556}]$$

Заметно, что интервалы при расчёте через наклонную форму гораздо уже, чем при расчёте через дифференциальную форму

Бицентрированная форма с оптимальными точками (с дифференциальными формами)

Точки Баумана:

$$x_1 = x_c - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, x_2 = x_c + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Была написана программа, чтобы считать точки и интервалы для каждой функции ([ссылка](#))

Результаты:

$f_1(x)$:

$$x_1 \approx 0.634, x_2 \approx 2.366$$

Интервал:

$$[-4.657, 22.343] \cap [-22.843, 4.157] = [-4.65, 4.157]$$

$f_2(x)$:

$$x_1 \approx -0.732, x_2 \approx 2.732$$

Интервал:

$$[-278.609, 76.066] \cap [-74.466, 280.209] = [-74.466, 76.066]$$

Заметно, что интервалы при расчёте с помощью точек Баумана значительно уже, чем при расчёте через центральную + граничную точки

Расстояние по Хаусдорфу до точной области значений

$$dist(F(X), ranf) = \max(|supF(X) - supranf|, |infF(X) - infranf|).$$

Результаты:

Метод	Интервал	dist
Естественное	[-25, 29]	27
Схема Горнера	[-25, 2]	23
Дифференциальная	[-14.875, 12.125]	12,88
Наклонная	[-5.594, 2.844]	3,59
Бицентрированная	[-5.594, 2.5]	3,59

Таблица 1. $f_1(x)$

Метод	Интервал	dist
Естественное	[0, 118.22]	88,66
Схема Горнера	[0, 118.22]	88,66
Дифференциальная	[-176.96, 177.70]	176,96
Наклонная	[-28.82, 29.56]	28,82
Бицентрированная	[-28.82, 29.41]	28,82

Таблица 2. $f_2(x)$

Константа Липшица

$f_1(x)$:

$$L = \max |f'_1(x)| = 9$$

$f_2(x)$:

$$L = \max |f'_2(x)| = |f'_{2(-2)}| = 59.11$$

Теоретическая оценка погрешности

$$rad(F(X)) \leq L * rad(X)$$

$f_1(x)$:

$$rad(X) = 1.5$$

$$rad(F(X)) \leq 13.5$$

$f_2(x)$:

$$rad(F(X)) \leq 177.34$$

Сравнение погрешностей

$f_1(x)$:

$$rad(ran(f_1, X)) = \frac{29 - (-25)}{2} = 27 > 3$$

$f_2(x)$:

$$rad(ran(f_2, X)) = \frac{118.22}{2} > 6$$

Разница из-за того, что переменная x встречается в выражении несколько раз, и интервальная арифметика считает x независимыми величинами, что приводит к потере точности.

Выводы

- **Естественное интервальное расширение** – самый простой, но и наименее точный метод. Основная причина неточности – *проблема зависимости* (multiple dependency), возникающая из-за многократного появления переменной в выражении. В результате метод склонен к значительной переоценке области значений.
- **Интервальное расширение с использованием схемы Горнера** – существенно повышает точность для полиномиальных функций. Алгебраическое преобразование уменьшает количество независимых вхождений переменной, что снижает эффект зависимости и делает оценку заметно уже.
- **Дифференциальная центрированная форма** – качество результата определяется тем, насколько широк интервал производной. Если $f'(X)$ сильно варьируется, возникающий интервальный множитель становится грубым, и оценка получается неточной или чрезмерно широкой.
- **Наклонная центрированная форма (slope form)** – заметно точнее дифференциальной формы. Она использует интервальную оценку секантных наклонов, которая лучше отражает реальное изменение функции на интервале, а значит уменьшает избыточные расширения.
- **Бицентрированная форма** – обычно наиболее точный метод. Она объединяет (пересекает) результаты наклонных/дифференциальных форм с разными центрами, что позволяет исключить недостоверные участки и получить максимально узкую, близкую к истинной область значений оценку.
 - С использованием наклонной формы результат получился точнее, чем с использованием дифференциальной формы
 - Интервалы при расчёте с помощью точек Баумана значительно уже, чем при расчёте через центральную и граничную точки