

Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1 по дисциплине

Интервальный анализ

Выполнил
студент гр.5030102/20202

Дрекалов Н.С.

Преподаватель

Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

Оглавление

Постановка задачи.....	3
Теория.....	4
Реализация	5
Результаты	5
Выводы.....	5

Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$$Ax = b, x = (x_1, x_2, x_3)$$

С матрицей A:

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1.00 \\ 1.05 & 1.00 \\ 1.10 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{rad}A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

1. Найти диапазон значений δ , при которых $0 \in \det A$

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta, 0.95 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.05 - \delta, 1.05 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.10 - \delta, 1.10 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \end{pmatrix}$$

Или

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta, 0.95 + \delta] & 1.00 \\ [1.05 - \delta, 1.05 + \delta] & 1.00 \\ [1.10 - \delta, 1.10 + \delta] & 1.00 \end{pmatrix}$$

2. Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \delta$ найти точечную матрицу A' : $\det A' = 0$
3. Обсудить факт $\det A' = 0$ для случая задачи 2-ракурсной томографии и линейной регрессии

Теория

Интервальной матрицей называется матрица A, каждый элемент которой задан в виде интервала, то есть может принимать любое значение в заданном интервале:

$$[a_{ij}] = [mida_{ij} - rada_{ij}, mida_{ij} + rada_{ij}]$$

где $mida_{ij}$ — середина интервала, $rada_{ij}$ — радиус интервала.

Интервальные матрицы применяются для работы с неопределенными данными, например, с погрешностями измерений или изменяющимися параметрами системы

Матрица A называется **особенной** (сингулярной), если её определитель равен нулю: $\det(A) = 0$

У квадратной матрицы это значит, что её строки или столбцы линейно зависимы. У прямоугольной же матрицы особенность означает линейную зависимость её столбцов

Матрица A' считается **вырожденной**, если её две колонки линейно зависимы: существует коэффициент λ такой, что:

$$a_i \approx \lambda b_i, i = 1, 2, 3$$

λ определяется через интервалы для каждого i :

$$\lambda_i \in \left[\frac{a_{min}^i}{b_{max}^i}, \frac{a_{max}^i}{b_{min}^i} \right]$$

Пересечение этих интервалов для всех строк даёт общий диапазон λ , в котором колонки линейно зависимы.

В **2-ракурсной томографии** оба элемента строки варьируются

В линейной регрессии только первый элемент строки варьируется, второй фиксирован

Реализация

Код написан на python 3.12 и доступен по [ссылке](#)

Результаты

2-ракурсная томография:

$$\delta \approx 0.037, \lambda \approx 1.025$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0.987 & 0.963 \\ 1.038 & 1.013 \\ 1.063 & 1.037 \end{pmatrix}$$

Линейная регрессия:

$$\delta \approx 0.075, \lambda \approx 1.025$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1.025 & 1.000 \\ 1.025 & 1.000 \\ 1.025 & 1.000 \end{pmatrix}$$

Выводы

$\det(A') = 0$ в обеих задачах говорит о критическом уровне неопределенности δ , при котором система теряет линейную независимость.

В случае томографии это отражает потенциальную множественность решений или полную несовместность системы, что проявляется в высокой чувствительности реконструкции к малейшим изменениям данных

В задаче линейной регрессии вырожденность A' делает стандартный метод наименьших квадратов неприменимым без дополнительной регуляризации или ограничений.

Таким образом, $\det(A') = 0$ выступает как индикатор предельной неопределенности, которая ограничивает корректность и устойчивость вычисленного решения.