

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №2 по дисциплине  
Интервальный анализ  
Вариант 19

Выполнил  
студент гр.5030102/20202

Дрекалов Н.С.

Преподаватель

Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

## Оглавление

Цель .....	3
Постановка задачи.....	3
Интервальные оценки области значений.....	6
Расстояние по Хаусдорфу до точной области значений.....	9
Выводы .....	11

## Цель

Исследование и сравнение точности различных интервальных методов оценивания области значений функции на заданном отрезке.

## Постановка задачи

Для каждой из двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  на интервале  $X = [a, b]$  необходимо:

- A. Аналитически или численно найти область значений  $ran(f, X)$ , построить график функции на заданном интервале.
- B. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:
  - i. Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.
  - ii. Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.
  - iii. Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
  - iv. Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
  - v. Бицентрированную форму.
- C. Для каждой полученной интервальной оценки вычислить величину  $dist(F(X), ran(f, X))$  – расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:
  - vi. Найти (аналитически или численно) константу Липшица  $L$  для функции  $f$  на интервале  $X$ . Обосновать свой выбор.
  - vii. Используя следствие из теоремы о непрерывности по Липшицу, получить теоретическую оценку погрешности:

$$rad(F(X)) \leq L \cdot rad(X)$$

viii. Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала  $rad(F(X))$ ) с теоретической оценкой из пункта (б).

Сделать выводы.

D. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода

## Область значений $\text{ran}(f, X)$ и графики

$f_1(x)$  :

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2, 0 \leq x \leq 3$$

Найдём производную:

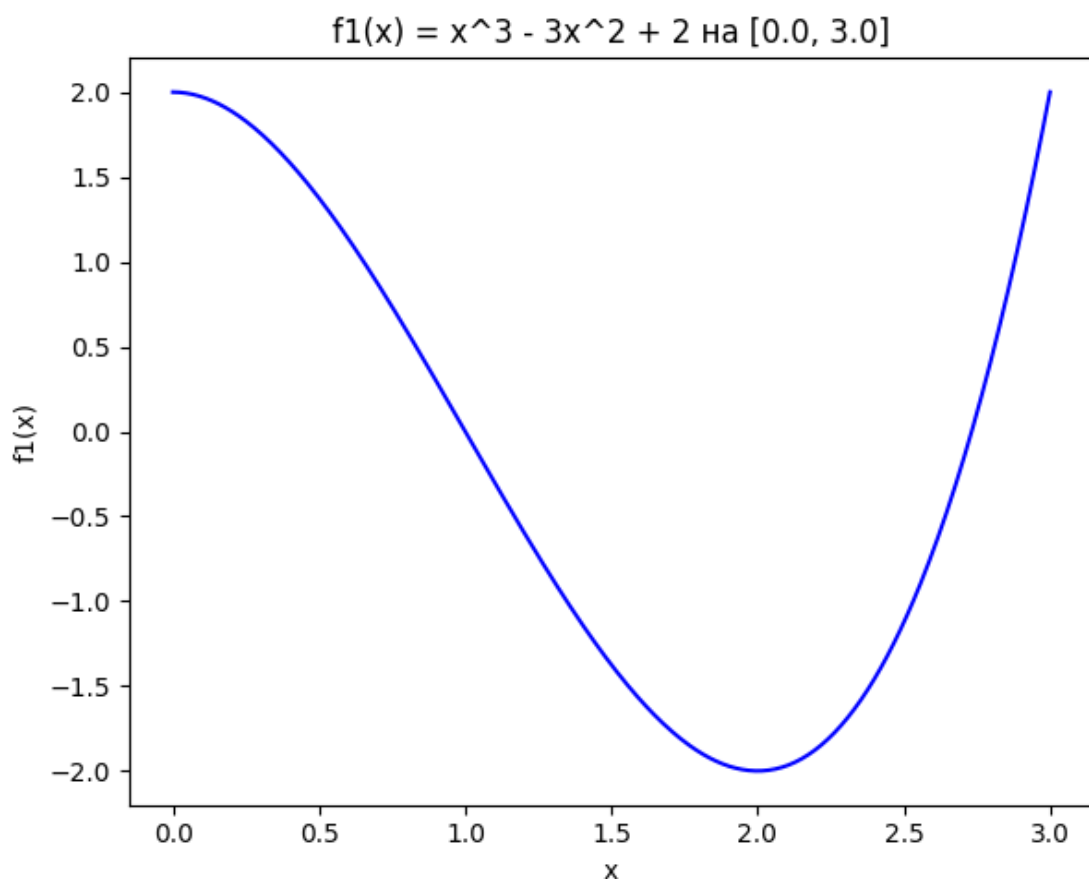
$$f_1'(x) = 3x(x - 2)$$

$$f_1(0) = 2, f_1(2) = -2, f_1(3) = 2$$

Область значений:

$$\text{ran}(f_1, [0, 3]) = [-2; 2]$$

График:



$f_2(x)$ :

$$f_2(x) = x^2 e^{-x}, -2 \leq x \leq 4$$

Найдём производную:

$$f_2'(x) = x(2 - x)e^{-x}$$

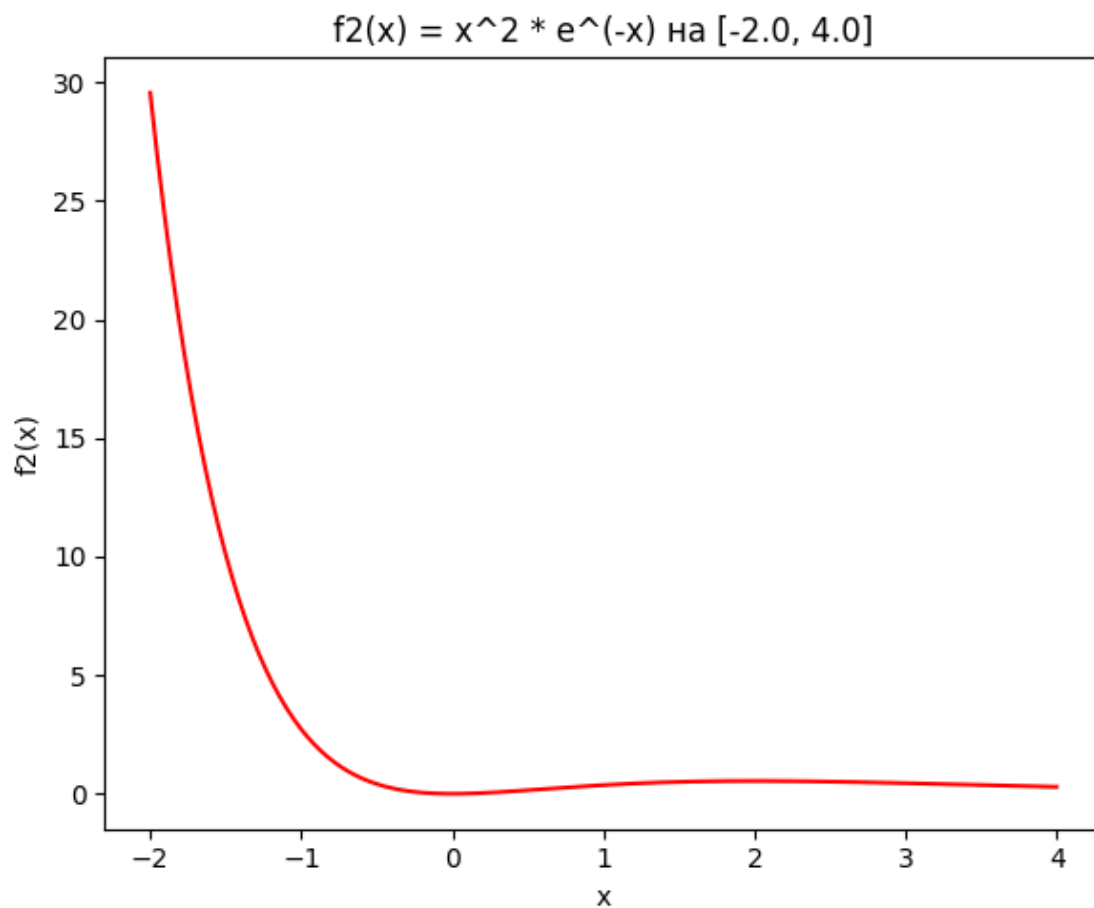
$$f_2(0) = 2, f_2(2) = 4e^{-2}$$

$$f_2(-2) = 4e^2 \approx 29.56, f_2(4) = 16e^{-4} \approx 0.29$$

Область значений:

$$\text{ran}(f_2, [-2, 4]) = [0.29; 29.56]$$

График:



## Интервальные оценки области значений

### **Естественное интервальное расширение**

Идея: подставляем интервалы вместо переменных

$f_1(x)$ :

$$X = [0, 3] \Rightarrow f_1(X) = [0, 3]^3 - 3[0, 3]^2 + 2 = [-25, 29]$$

$f_2(x)$ :

$$X = [-2, 4] \Rightarrow X^2 = [0, 16], e^{-X} = [e^{-4}, e^2] \approx [0.018, 7.389]$$

$$f_2(X) \approx [0, 16] * [0.018, 7.389] = [0, 118.22]$$

### **Схема Горнера**

$f_1(x)$ :

$$f_1(x) = x(x(x - 3)) + 2$$

$$f_1(X) = [0, 3] * ([0, 3] * ([0, 3] - 3)) + 2 = [-25, 2]$$

$f_2(x)$ :

Горнер не меняет вид функции, оценка та же

### **Дифференциальная центрированная форма**

$f_1(x)$ :

$$x_c = \frac{3 - 0}{2} = 1.5$$

$$f_1(x_c) = -1.375, f_1'(X) = [0, 9]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_c) + f_1'(X) * (X - x_c) = -1.375 + [-3, 9] * [-1.5, 1.5] \\ &= [-14.875, 12.125] \end{aligned}$$

$f_2(x)$ :

$$x_c = 1$$

$$f_2(x_c) \approx 0.368, f'_2(X) \approx [-59.11, 0.59]$$

$$\begin{aligned} f_2(X) &\approx f_2(x_c) + f'_2(X) * (X - x_c) = 0.368 + [-59.11, 0.59] * [-3, 3] \\ &= 0.368 + [-1.104, 1.104] = [-176.96, 177.70] \end{aligned}$$

### **Наклонная форма**

Схожа с дифференциальной центрированной формой, вместо  $f'(x_c)$  используется

$$S(X, x_c) = \frac{f(X) - f(x_c)}{x - x_c}$$

$f_1(x)$ :

$$S(X, x_c) = [-2.813, 2.25]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = -1.375 + [-2.813, 2.25] * [-1.5, 1.5] \\ &= [-5.594, 2.844] \end{aligned}$$

$f_2(x)$ :

$$S(X, x_c) = \frac{X^2 * e^{-x} - x_c^2 * e^{-x_c}}{X - x_c}$$

$$S(X, x_c) = [-9.73, -0.03]$$

$$\begin{aligned} f_2(X) &\approx f_2(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = 0.368 + [-9.73, -0.03] * [-3, 3] \\ &= [-28.82, 29.56] \end{aligned}$$

### **Бицентрированная форма**

Бицентрированная форма – это пересечение двух форм с разными центрами

Одной из точек будет центр интервала для обеих функций

$f_1(x)$ :

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$S(X, x_1) = [-2.25, 4]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = [-10, 2.5]$$

$$[-10, 2.5] \cap [-5.594, 2.844] = [-5.594, 2.5]$$

$f_2(x)$ :

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$S(X, x_1) = [-9.73, -0.03]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = 29.56 + [-9.73, -0.03] * [0, 6] \\ &= [-28.82, 29.41] \end{aligned}$$

$$[-28.82, 29.56] \cap [-28.82, 29.41] = [-\mathbf{28.82}, \mathbf{29.41}]$$

**Бицентрированная форма (с дифференциальными формами)**

$f_1(x)$ :

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$f'_1(X) = [-3, 9]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + f'_1(X) * (X - x_1) = -2 + [-18, 9] = [-20, 7]$$

$$[-14.875, 12.125] \cap [-20, 7] = [-\mathbf{14.875}, \mathbf{7}]$$

$f_2(x)$ :

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$f'_2(X) = [-59.112, 0.461]$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &\approx f_2(x_1) + f'_2(X) * (X - x_1) = 4e^2 + [-59.112, 0.461] \cdot [0, 6] \\ &= [-325.116, 32.322] \end{aligned}$$

$$[-176.96, 177.70] \cap [-325.116, 32.322] = [-\mathbf{176.96}, \mathbf{32.322}]$$

Заметно, что интервалы при расчёте через наклонную форму гораздо уже, чем при расчёте через дифференциальную форму



## Расстояние по Хаусдорфу до точной области значений

$$\text{dist}(F(X), \text{ran}f) = \max(|\sup F(X) - \sup \text{ran}f|, |\inf F(X) - \inf \text{ran}f|).$$

### Результаты:

Метод	Интервал	dist
Естественное	[-25, 29]	27
Схема Горнера	[-25, 2]	23
Дифференциальная	[-14.875, 12.125]	12,88
Наклонная	[-5.594, 2.844]	3,59
Бицентрированная	[-5.594, 2.5]	3,59

Таблица 1.  $f_1(x)$

Метод	Интервал	dist
Естественное	[0, 118.22]	88,66
Схема Горнера	[0, 118.22]	88,66
Дифференциальная	[-176.96, 177.70]	176,96
Наклонная	[-28.82, 29.56]	28,82
Бицентрированная	[-28.82, 29.41]	28,82

Таблица 2.  $f_2(x)$

### Константа Липшица

$f_1(x)$ :

$$L = \max |f'_1(x)| = 9$$

$f_2(x)$ :

$$L = \max |f'_2(x)| = |f'_2(-2)| = 59.11$$

### Теоретическая оценка погрешности

$$\text{rad}(F(X)) \leq L * \text{rad}(X)$$

$f_1(x)$ :

$$\text{rad}(X) = 1.5$$

$$\text{rad}(F(X)) \leq 13.5$$

$f_2(x)$ :

$$rad(F(X)) \leq 177.34$$

### **Сравнение погрешностей**

$f_1(x)$ :

$$rad(ran(f_1, X)) = \frac{29 - (-25)}{2} = 27 > 3$$

$f_2(x)$ :

$$rad(ran(f_2, X)) = \frac{118.22}{2} > 6$$

Разница из-за того, что переменная  $x$  встречается в выражении несколько раз, и интервальная арифметика считает  $x$  независимыми величинам, что приводит к потере точности.

## Выводы

- **Естественное интервальное расширение** – самый простой, но и наименее точный метод. Основная причина неточности – *проблема зависимости* (multiple dependency), возникающая из-за многократного появления переменной в выражении. В результате метод склонен к значительной переоценке области значений.
- **Интервальное расширение с использованием схемы Горнера** – существенно повышает точность для полиномиальных функций. Алгебраическое преобразование уменьшает количество независимых вхождений переменной, что снижает эффект зависимости и делает оценку заметно уже.
- **Дифференциальная центрированная форма** – качество результата определяется тем, насколько широк интервал производной. Если  $f'(X)$  сильно варьируется, возникающий интервальный множитель становится грубым, и оценка получается неточной или чрезмерно широкой.
- **Наклонная центрированная форма (slope form)** – заметно точнее дифференциальной формы. Она использует интервальную оценку секантных наклонов, которая лучше отражает реальное изменение функции на интервале, а значит уменьшает избыточные расширения.
- **Бицентрированная форма** – обычно наиболее точный метод. Она объединяет (пересекает) результаты наклонных/дифференциальных форм с разными центрами, что позволяет исключить недостоверные участки и получить максимально узкую, близкую к истинной область значений оценки.
  - С использованием наклонной формы результат получился точнее, чем с использованием дифференциальной формы