Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №2 по дисциплине

Интервальный анализ

Вариант 19

Выполнил
студент гр.5030102/20202 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

Оглавление

Цель

Исследование и сравнение точности различных интервальных методов оценивания области значений функции на заданном отрезке.

Постановка задачи

Для каждой из двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервале $X = [a, b]$ необходимо:

A. Аналитически или численно найти область значений $ran(f, X)$, построить график функции на заданном интервале.

B. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:

   i. Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.

   ii. Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.

   iii. Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

   iv. Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

   v. Бицентрированную форму.

C. Для каждой полученной интервальной оценки вычислить величину $dist(F(X), ran(f, X))$ – расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:

   vi. Найти (аналитически или численно) константу Липшица L для функции f на интервале X. Обосновать свой выбор.

   vii. Используя следствие из теоремы о непрерывности по Липшицу, получить теоретическую оценку погрешности:

$$rad\,(F(X)) \leq L \cdot rad(X)$$

viii. Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала $rad(F(X))$) с теоретической оценкой из пункта (б). Сделать выводы.

D. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода

Область значений ran(f,X) и графики

$\boldsymbol{f_1(x)}$:

$$f_1(x) = \mathrm{x}^3 - 3x^2 + 2, 0 \le x \le 3$$

Найдём производную:

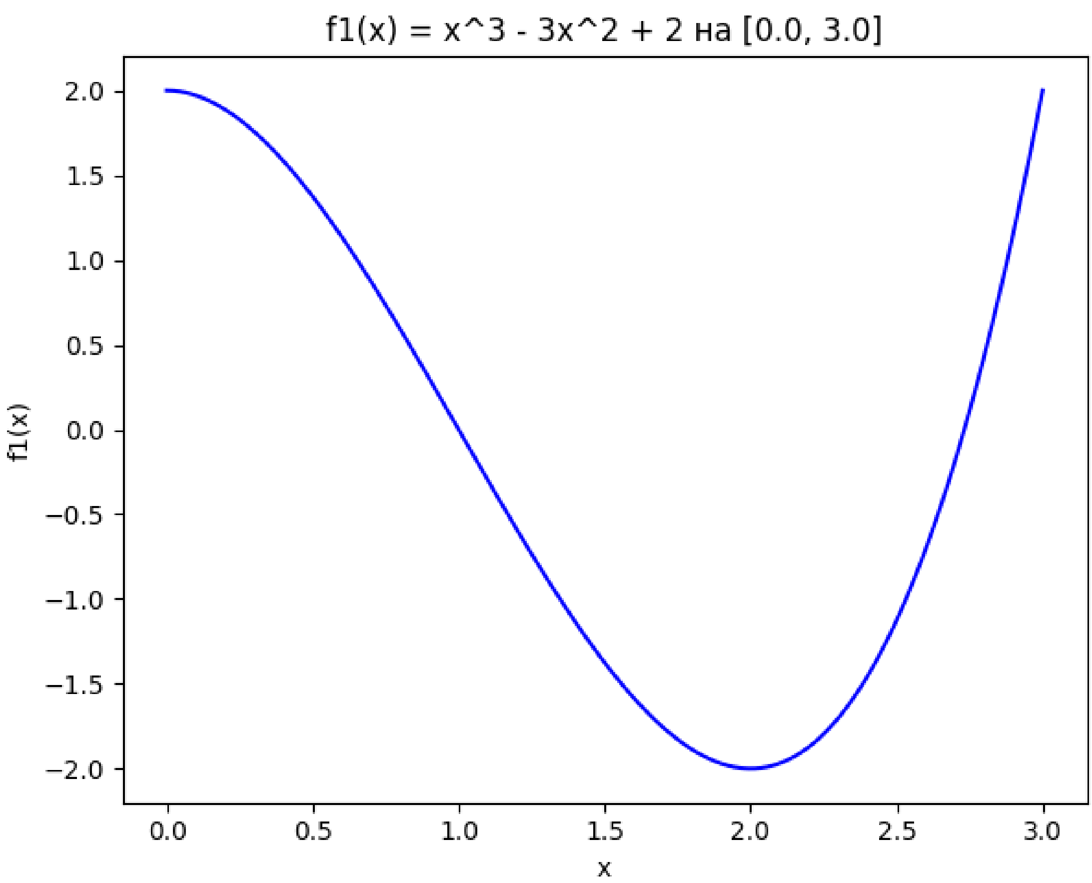
$$f_1'(x) = 3x(x-2)$$

$$f_1(0) = 2, f_1(2) = -2, f_1(3) = 2$$

Область значений:

$$ran(f_1, [0,3]) = [-2; 2]$$

График:



$\boldsymbol{f_2(x)}$:

$$f_2(x) = \mathrm{x}^2 e^{-x}, -2 \le x \le 4$$

Найдём производную:

$$f_2'(x) = x(2 - x)e^{-x}$$

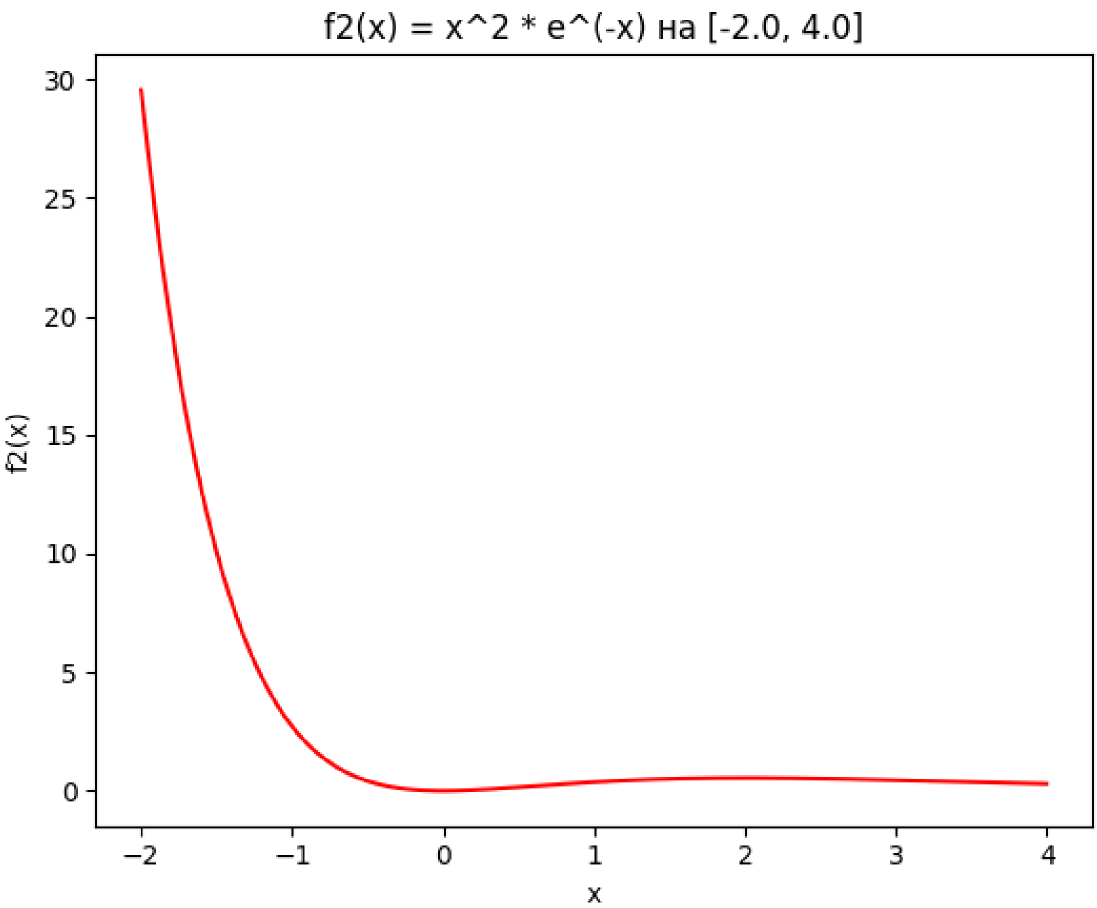
$$f_2(0) = 2, f_2(2) = 4e^{-2}$$

$$f_2(-2) = 4e^2 \approx 29.56, f_2(4) = 16e^{-4} \approx 0.29$$

Область значений:

$$ran(f_2, [-2, 4]) = [0.29; 29.56]$$

График:



Интервальные оценки области значений

Естественное интервальное расширение

Идея: подставляем интервалы вместо переменных

$f_1(x)$:

$$X = [0,3] => f_1(X) = [0,3]^3 - 3[0,3]^2 + 2 = [\mathbf{-25}, \mathbf{29}]$$

$f_2(x)$:

$$X = [-2,4] => X^2 = [0,16], e^{-X} = [e^{-4}, e^2] \approx [0.018, 7.389]$$

$$f_2(X) \approx [0,16] * [0.018, 7.389] = [\mathbf{0}, \mathbf{118.22}]$$

Схема Горнера

$f_1(x)$:

$$f_1(x) = x\big(x(x-3)\big) + 2$$

$$f_1(X) = [0,3] * \big([0,3] * ([0,3] - 3)\big) + 2 = [\mathbf{-25}, \mathbf{2}]$$

$f_2(x)$:

$$\text{Горнер не меняет вид функции, оценка та же}$$

Дифференциальная центрированная форма

Расчёт в точке x_c (центр интервала)

$f_1(x)$:

$$x_c = \frac{3+0}{2} = 1.5$$

$$f_1(x_c) = -1.375,\ f_1'(X) = [0,9]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_c) + f_1'(X) * (X - x_c) = -1.375 + [-3,9] * [-1.5, 1.5]$$
$$= [\mathbf{-14.875}, \mathbf{12.125}]$$

$f_2(x)$:

$$x_c = 1$$

$$f_2(x_c) \approx 0.368,\ f_2'(X) \approx [-59.11, 0.59]$$

$$f_2(X) \approx f_2(x_c) + f_2'(X) * (X - x_c) = 0.368 + [-59.11, 0.59] * [-3, 3]$$
$$= 0.368 + [-1.104, 1.104] = [-\mathbf{176.96}, \mathbf{177.70}]$$

Наклонная форма

Расчёт в точке x_c (центр интервала)

Схожа с дифференциальной центрированной формой, вместо $f'(x_c)$ используется

$$S(X, x_c) = \frac{f(X) - f(x_c)}{x - x_c}$$

$f_1(x)$:

$$S(X, x_c) = [-2.813, 2.25]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = -1.375 + [-2.813, 2.25] * [-1.5, 1.5]$$
$$= [-\mathbf{5.594}, \mathbf{2.844}]$$

$f_2(x)$:

$$S(X, x_c) = \frac{X^2 * e^{-x} - x_c^2 * e^{-x_c}}{X - x_c}$$

$$S(X, x_c) = [-9.73, -0.03]$$

$$f_2(X) \approx f_2(x_c) + S(X, x_c) * (X - x_c) = 0.368 + [-9.73, -0.03] * [-3, 3]$$
$$= [-\mathbf{28.82}, \mathbf{29.56}]$$

Бицентрированная форма

Бицентрированные форма – это пересечение двух форм с разными центрами

Одной из точек будет центр интервала для обеих функций

$f_1(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = 2$

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$S(X_1, x_1) = [-2.25, 4]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = [-10, 2.5]$$

$$[-10, 2.5] \cap [-5.594, 2.844] = [\mathbf{-5.594, 2.5}]$$

$f_2(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = -2$

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$S(X, x_1) = [-9.73, -0.03]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + S(X, x_1) * (X - x_1) = 29.56 + [-9.73, -0.03] * [0,6]$$
$$= [-28.82, 29.41]$$

$$[-28.82, 29.56] \cap [-28.82, 29.41] = [\mathbf{-28.82, 29.41}]$$

Бицентрированная форма (с дифференциальными формами)

$f_1(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = 2$

$$x_1 = 2, f(x_1) = -2$$

$$f_1'(X) = [-3, 9]$$

$$f_1(X) \approx f_1(x_1) + f_1'(X) * (X - x_1) = -2 + [-18,9] = [-20,7]$$

$$[-14.875, 12.125] \cap [-20,7] = [\mathbf{-14.875, 7}]$$

$f_2(x)$:

Расчёт в токах $x_c = \frac{a+b}{2}$ и $x_1 = -2$

$$x_1 = -2, f(x_1) \approx 29.56$$

$$f_2'(X) = [-59.112, 0.461]$$

$$f_1(X) \approx f_2(x_1) + f_2'(X) * (X - x_1) = 4e^2 + [-59.112, 0.461] \cdot [0,6]$$
$$= [-325.116, 29.556]$$

$$[-176.96, 177.70] \cap [-325.116, 29.556] = [\mathbf{-176.96, 29.556}]$$

Заметно, что интервалы при расчёте через наклонную форму гораздо уже, чем при расчёте через дифференциальную форму

Бицентрированная форма с оптимальными точками (с дифференциальными формами)

Бицентрированная форма определяется как пересечение двух дифференциальных центрированных форм, взятых в специально подобранных центрах c_* и c^*

- Рассматривается вещественная функция f, определённая на всей числовой прямой и принимающая вещественные значения. Аргумент функции ограничен интервалом X
- Согласно теореме Баумана, оптимальные центры определяются через интервальную оценку первой производной функции на X
- Предполагается, что значение первой производной f' на интервале X заключено в интервал D.
- Вводится коэффициент для каждого координатного индекса i

$$p_i \ = cut\left(\frac{mid\ f_i'(X)}{rad\ f_i'(X)}, [-1; 1]\right)$$

- Тогда центры находятся следующим образом:

$$(c_*)_i = mid\ X_i - p_i * rad\ X_i$$
$$(c^*)_i = mid\ X_i + p_i * rad\ X_i$$

Была написана программа, чтобы считать точки и интервалы для каждой функции (ссылка)

Результаты:

$f_1(x)$:

$$p \approx 0.5$$

$$c_* \approx \ 0.750, c^* \approx 2.250$$

Интервал:

$$[-6.016, 20.984] \ \cap \ [-22.047, 4.953] = [\mathbf{-6.016, 4.953}]$$

$f_2(x)$:

$$p \approx 0.984$$

$$c_* \approx 0.750, c^* \approx 2.250$$

Интервал:

$$[-2.446, 352.230] \cap [-325.009, 29.665] = [-\mathbf{2}, \mathbf{29.665}]$$

Заметно, что интервалы при расчёте центров с помощью теоремы Баумана значительно уже, чем при расчёте через центральную + граничную точки

Расстояние по Хаусдорфу до точной области значений

$$dist(F(X), ranf) = max(|\ supF(X) - supranf\ |, |\ infF(X) - infranf\ |).$$

Результаты:

Метод	**Интервал**	**dist**
Естественное	[-25, 29]	27
Схема Горнера	[-25, 2]	23
Дифференциальная	[-14.875, 12.125]	12,88
Наклонная	[-5.594, 2.844]	3,59
Бицентрированная	[-5.594, 2.5]	3,59

Таблица 1. $f_1\ (x)$

Метод	**Интервал**	**dist**
Естественное	[0, 118.22]	88,66
Схема Горнера	[0, 118.22]	88,66
Дифференциальная	[-176.96, 177.70]	176,96
Наклонная	[-28.82, 29.56]	28,82
Бицентрированная	[-28.82, 29.41]	28,82

Таблица 2. $f_2(x)$

Константа Липшица

$f_1(x)$:

$$L = \max |f_1'(x)| = 9$$

$f_2(x)$:

$$L = \max |f_2'(x)| = |f'_2(-2)| = 59.11$$

Теоретическая оценка погрешности

$$rad\big(F(X)\big) \leq L * rad(X)$$

$f_1(x)$:

$$rad(X) = 1.5$$

$$rad\left(F(X)\right) \leq 13.5$$

$f_2(x)$:

$$rad\left(F(X)\right) \leq 177.34$$

Сравнение погрешностей

$f_1(x)$*:*

$$rad\left(ran(f_1, X)\right) = \frac{29 - (-25)}{2} = 27 > 3$$

$f_2(x)$*:*

$$rad\left(ran(f_2, X)\right) = \frac{118.22}{2} > 6$$

Разница из-за того, что переменная *x* встречается в выражении несколько раз, и интервальная арифметика считает *x* независимыми величинам, что приводит к потере точности.

Выводы

- **Естественное интервальное расширение** – самый простой, но и наименее точный метод. Основная причина неточности – *проблема зависимости* (multiple dependency), возникающая из-за многократного появления переменной в выражении. В результате метод склонен к значительной переоценке области значений.
- **Интервальное расширение с использованием схемы Горнера** – существенно повышает точность для полиномиальных функций. Алгебраическое преобразование уменьшает количество независимых вхождений переменной, что снижает эффект зависимости и делает оценку заметно уже.
- **Дифференциальная центрированная форма** – качество результата определяется тем, насколько широк интервал производной. Если $f'(X)$ сильно варьируется, возникающий интервальный множитель становится грубым, и оценка получается неточной или чрезмерно широкой.
- **Наклонная центрированная форма (slope form)** – заметно точнее дифференциальной формы. Она использует интервальную оценку секантных наклонов, которая лучше отражает реальное изменение функции на интервале, а значит уменьшает избыточные расширения.
- **Бицентрированная форма** – обычно наиболее точный метод. Она объединяет (пересекает) результаты наклонных/дифференциальных форм с разными центрами, что позволяет исключить недостоверные участки и получить максимально узкую, близкую к истинной область значений оценку.
    - С использованием наклонной формы результат получился точнее, чем с использованием дифференциальной формы
    - Интервалы при расчёте с помощью точек из теоремы Баумана значительно уже, чем при расчёте через центральную и граничную точки