Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №5 по дисциплине

Интервальный анализ

Выполнил
студент гр.5030102/20202 Дрекалов Н.С.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

# Оглавление

## Цель

Получить практические навыки решения интервальных систем нелинейных уравнений и исследовать особенности применения интервальных методов для нахождения точек пересечения кривых, а также изучить влияние выбора начального приближения и параметров системы на сходимость итерационного процесса.

## Постановка задачи

Задана система нелинейных уравнений, описывающая точку касания $f_1$ и $f_2$:

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) = X_1 - X_2^2 = 0, \\ f_2(X) = (X_1 - x_c)^2 + (X_2 - y_c)^2 - 1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_c$ – параметр, принимающий значения из набора $[0, 0.5, 1.0, 1.2]$, $y_c$ = 0.

A. Для каждого значения параметра $x_c$ из заданного набора:

A.1 Выбрать начальное интервальное приближение $X^0 = [X1] \times [X2]$, обеспечивающее старт итерационного процесса.

A.2 Выполнить не менее трёх итераций методом Кравчика для уточнения локализации решения.

A.3 На каждом шаге фиксировать получающиеся интервальные векторы $X^{(k)}$.

B. Провести анализ результатов:

B.1 Для каждого $x_c$ построить графическую иллюстрацию, отображающую последовательные приближения (брусы $X^{(k)}$) и линии уровней функций $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$.

B.2 Сравнить скорость сходимости метода для разных значений параметра $x_c$. Объяснить наблюдаемые различия.

B.3 Проанализировать влияние выбора начального приближения $X^{(0)}$ на возможность старта и сходимость итерационного процесса.

**Примечание:** в ходе работы следует обратить внимание на возможное расширение интервалов на некоторых итерациях (как в приведённом примере для координаты x1) и связать это с геометрической интерпретацией задачи.

# Теоретическая часть

## Интервальная система

Рассматривается система:

$$f_1(X) = X_1 - X_{2^2} = 0$$

$$f_2(X) = (X_1 - x_c)^2 + (X_2 - y_c)^2 - 1 = 0$$

$$\text{где } x_c \in \{0, 0.5, 1.0, 1.2\}, \text{а } y_c = 0$$

Первая функция задаёт параболу $x_1 = x_2^2$, а вторая — окружность радиуса 1 с центром в точке $(x_c, 0)$. Их пересечения и являются решениями системы.

## Метод Кравчика

Пусть $X$ — интервальный вектор. Определим:

$$x_0 = mid(X)$$

$$K(X) = x_0 - Y\,f(x_0) + \big(I - Y\,J(X)\big)(X - x_0)$$

где:

- $J(X)$ – интервальная якобиана
- $Y = J(x_0)^{-1}$ – обратная матрица к якобиану в центре интервала
- $K(X)$ – новый интервальный вектор, содержащий потенциальные корни

Если выполняется включение $K(X) \subset int(X)$, то вектор $X$ гарантированно содержит единственное решение системы.

В практике часто применяется итерация:

$$X^{(k+1)} = K\big(X^{(k)}\big) \cap X^{(k)}$$

Этот процесс повторяется, пока интервалы не перестанут уменьшаться.

## Начальное интервальное приближение $X^{(0)}$

Для нахождения начального приближения выполняется следующий «трюк»:

Из $X_1 = X_2^2$ подставляется $X_1$ в уравнение окружности $f_2(X)$:

$$(X_2^2 - x_c)^2 + X_2^2 - 1 = 0$$

Это уравнение можно решить в python через numpy.roots

Из корней берётся тот, который $X_2 \geq 0$, и считается $X_1 = X_2^2$

Вокруг полученных точек строится брус:

$$X^{(0)} = ([X_1 - H_1, X_1 + H_1], [X_2 - H_2, X_2 + H_2])$$

$H_1, H_2$ задаются явно. Для результатов ниже были взяты $H_1 = H_2 = 0.1$

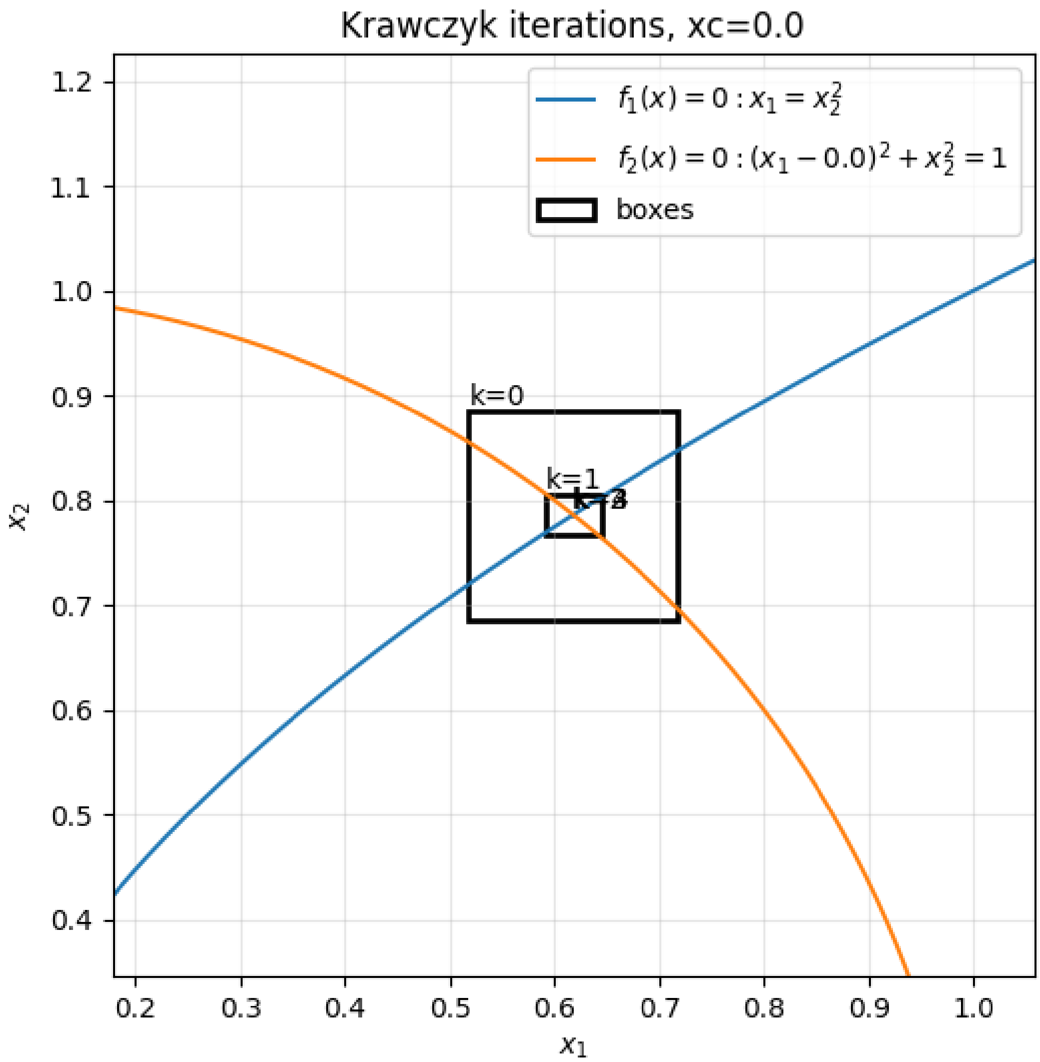
## Результаты

[Ссылка на репозиторий с кодом]

$x_c = 0.0, y_c = 0.0$

| Итерация | $x_{1_{lo}}$ | $x_{1_{hi}}$ | $x_{2_{lo}}$ | $x_{2_{hi}}$ | $width_{x_1}$ | $width_{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5180 | 0.7180 | 0.6862 | 0.8862 | 2.00E-01 | 2.00E-01 |
| 1 | 0.5912 | 0.6449 | 0.7677 | 0.8046 | 5.37E-02 | 3.68E-02 |
| 2 | 0.6168 | 0.6193 | 0.7853 | 0.7870 | 2.50E-03 | 1.68E-03 |
| 3 | 0.6180 | 0.6180 | 0.7861 | 0.7862 | 5.32E-06 | 3.58E-06 |
| 4 | 0.6180 | 0.6180 | 0.7862 | 0.7862 | 2.41E-11 | 1.62E-11 |

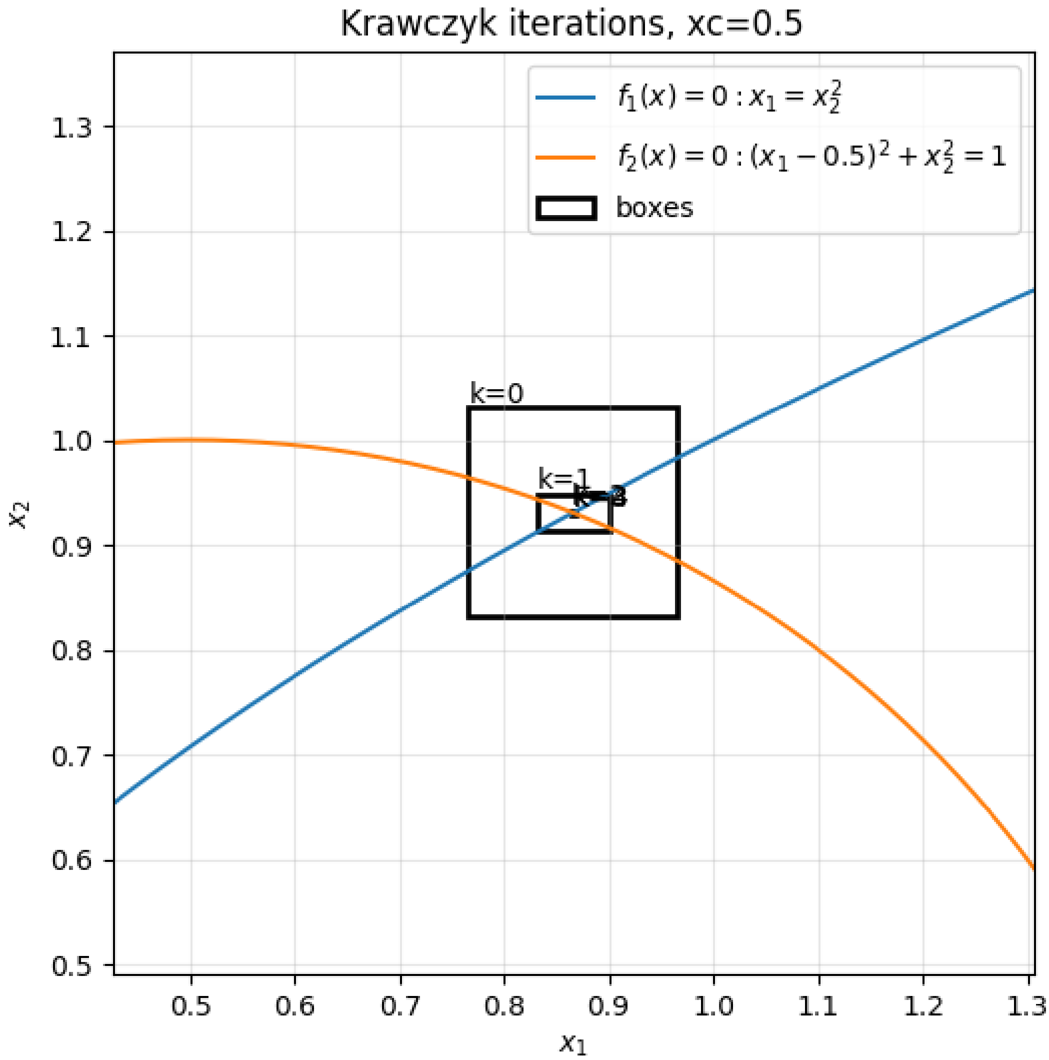
Таблица 1. x = 0.0, y = 0.0



$x_c = 0.5, y_c = 0.0$

| Итерация | $x_{1_{lo}}$ | $x_{1_{hi}}$ | $x_{2_{lo}}$ | $x_{2_{hi}}$ | $width_{x_1}$ | $width_{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.7660 | 0.9660 | 0.8306 | 1.0306 | 2.00E-01 | 2.00E-01 |
| 1 | 0.8314 | 0.9007 | 0.9137 | 0.9476 | 6.93E-02 | 3.39E-02 |
| 2 | 0.8640 | 0.8681 | 0.9296 | 0.9317 | 4.10E-03 | 2.11E-03 |
| 3 | 0.8660 | 0.8660 | 0.9306 | 0.9306 | 1.48E-05 | 7.59E-06 |
| 4 | 0.8660 | 0.8660 | 0.9306 | 0.9306 | 1.93E-10 | 9.91E-11 |

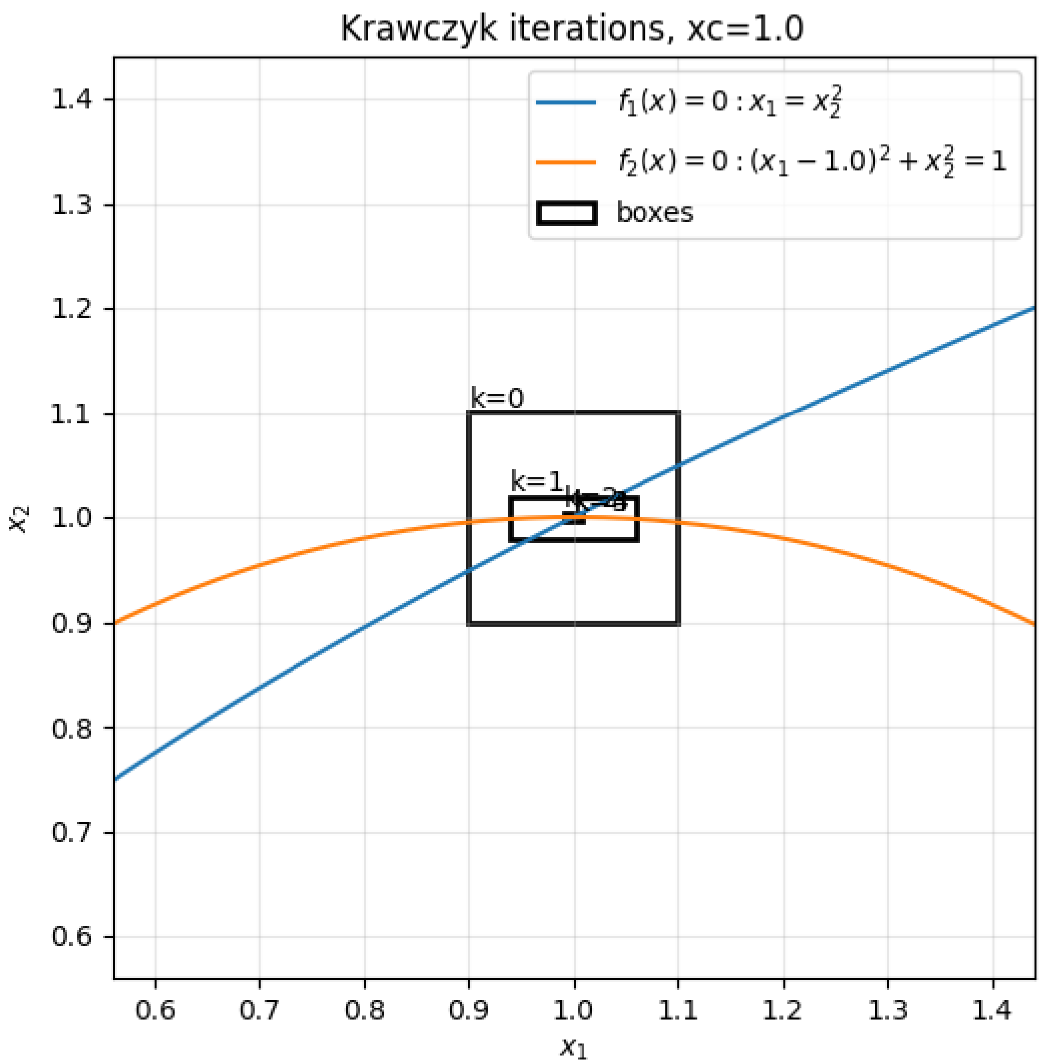
Таблица 2. x = 0.5, y = 0.0



$x_c = 1.0, y_c = 0.0$

| Итерация | $x_{1_{lo}}$ | $x_{1_{hi}}$ | $x_{2_{lo}}$ | $x_{2_{hi}}$ | $width_{x_1}$ | $width_{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.9000 | 1.1000 | 0.9000 | 1.1000 | 2.00E-01 | 2.00E-01 |
| 1 | 0.9400 | 1.0600 | 0.9800 | 1.0200 | 1.20E-01 | 4.00E-02 |
| 2 | 0.9912 | 1.0088 | 0.9960 | 1.0040 | 1.76E-02 | 8.00E-03 |
| 3 | 0.9998 | 1.0002 | 0.9999 | 1.0001 | 4.38E-04 | 1.87E-04 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 2.61E-07 | 1.13E-07 |

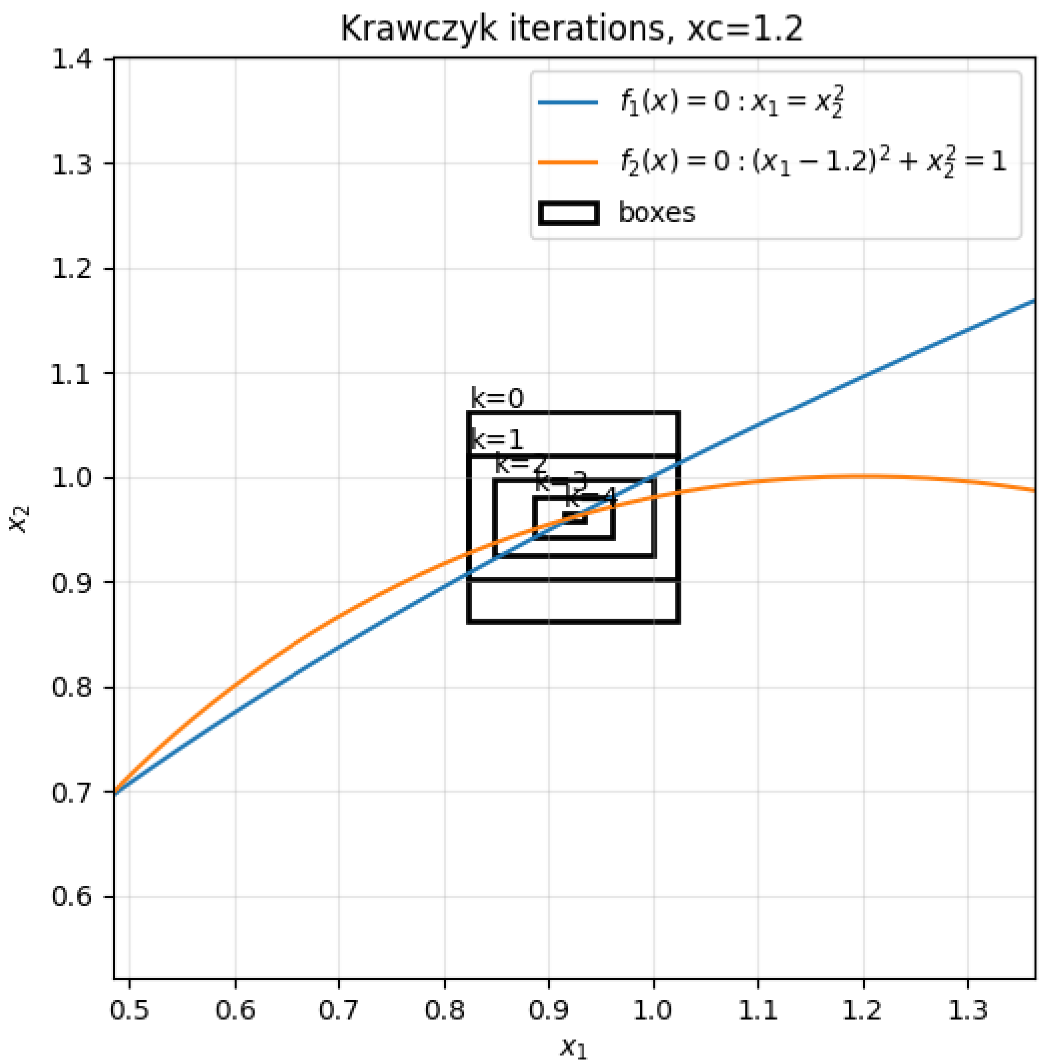
Таблица 3. x = 1.0, y = 0.0



$x_c = 1.2, y_c = 0.0$

| Итерация | $x_{1_{lo}}$ | $x_{1_{hi}}$ | $x_{2_{lo}}$ | $x_{2_{hi}}$ | $width_{x_1}$ | $width_{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.8236 | 1.0236 | 0.8610 | 1.0610 | 2.00E-01 | 2.00E-01 |
| 1 | 0.8236 | 1.0236 | 0.9016 | 1.0204 | 2.00E-01 | 1.19E-01 |
| 2 | 0.8473 | 0.9999 | 0.9250 | 0.9971 | 1.53E-01 | 7.20E-02 |
| 3 | 0.8860 | 0.9612 | 0.9428 | 0.9793 | 7.52E-02 | 3.64E-02 |
| 4 | 0.9143 | 0.9329 | 0.9566 | 0.9655 | 1.86E-02 | 8.98E-03 |

Таблица 4. x = 1.2, y = 0.0



## Влияние выбора начального приближения $X^{(0)}$

Для компактности будет использоваться метрика

$$w^{(k)} = \max\left\{width_{x_1^{(k)}}, width_{x_2^{(k)}}\right\}$$

$x_c = 0.0, y_c = 0.0$

| Брус | $w_k^{(1)}$ | $w_k^{(4)}$ | Сходимость |
|---|---|---|---|
| (0.05,0.05) | 1.34E-02 | 4.44E-16 | Очень быстрая |
| (0.10,0.10) | 5.37E-02 | 2.41E-11 | Быстрая |
| (0.20,0.20) | 2.15E-01 | 1.58E-06 | Средняя |
| (0.40,0.40) | 8.00E-01 | 7.88E-02 | Медленная |

$x_c = 0.5, y_c = 0.0$

| Брус | $w_k^{(1)}$ | $w_k^{(4)}$ | Сходимость |
|---|---|---|---|
| (0.05,0.05) | 1.73E-02 | 2.89E-15 | Очень быстрая |
| (0.10,0.10) | 6.93E-02 | 1.93E-10 | Быстрая |
| (0.20,0.20) | 2.77E-01 | 1.27E-05 | Средняя |
| (0.40,0.40) | 8.00E-01 | 1.68E-01 | Медленная |

$x_c = 1.0, y_c = 0.0$

| Брус | $w_k^{(1)}$ | $w_k^{(4)}$ | Сходимость |
|---|---|---|---|
| (0.05,0.05) | 3.00E-02 | 3.99E-12 | Быстрая |
| (0.10,0.10) | 1.20E-01 | 2.62E-07 | Средняя |
| (0.20,0.20) | 4.00E-01 | 5.24E-03 | Медленная |
| (0.40,0.40) | 8.00E-01 | 8.00E-01 | Нет сходимости |

$x_c = 1.2, y_c = 0.0$

| Брус | $w_k^{(1)}$ | $w_k^{(4)}$ | Сходимость |
|---|---|---|---|
| (0.05,0.05) | 6.71E-02 | 1.37E-06 | Средняя |
| (0.10,0.10) | 2.00E-01 | 1.86E-02 | Медленная |
| (0.20,0.20) | 4.00E-01 | 4.00E-01 | Нет сходимости |
| (0.40,0.40) | 8.00E-01 | 8.00E-01 | Нет сходимости |

## Аналитическая причина расширения

Метод Кравчика предполагает, что:

$$Y \approx J(x_0)^{-1} \Rightarrow YJ(X) \approx I$$

Но на практике:

- $J(X)$ – интервальная матрица (меняется внутри бруса),
- $Y$ вычисляется только в одной точке $x_0$.
- Если:
  - $J(X)$ сильно меняется на $X$,
  - или $J(x_0)$ плохо обусловлен,

  то:

  $$\| I - AJ(X) \| \nless 1$$

  оператор перестаёт быть сжимающим.

## Выводы

- Скорость сходимости метода Кравчика существенно зависит от значения параметра $x_c$.
    - Для $x_c = 0.0$ и $x_c = 0.5$ наблюдается быстрая сходимость: ширины интервалов уменьшаются на несколько порядков за 3–4 итерации.
    - В случае $x_c = 1.0$, соответствующем касанию кривых, сходимость замедляется, что связано с ухудшением обусловленности Якобиана в окрестности решения.
    - При $x_c = 1.2$ процесс сжатия интервалов наиболее медленный, что объясняется неблагоприятной геометрией пересечения и большей нелинейностью функций внутри начального бруса.
- Геометрическое объяснение
    - $x_c = 0.0, 0.5$: пересечение поперечное, угол между кривыми хороший
    - $x_c = 1.0$: касание, градиенты почти линейно зависимы
    - $x_c = 1.2$: пересечение "вытянутое", кривые почти параллельны на участке
- Аналитическое объяснение:
    - Якобиан

      $$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2 \\ 2(x_1 - x_c) & 2x_2 \end{pmatrix}$$

      при касании близок к вырожденному
    - Матрица $A \approx J^{-1}(x_0)$ становится плохо обусловленной
    - Член $(I - AJ(X))(X - x_0)$ перестаёт быть контрактным.
- Численные эксперименты показывают, что метод Кравчика является локальным и чувствительным к выбору начального интервального приближения.
    - При малых начальных брусах итерационный процесс устойчиво стартует и демонстрирует быструю сходимость.

- Увеличение размеров $X^{(0)}$ приводит к расширению интервала Якобиана $J(X)$, ухудшению линейной аппроксимации и потере контрактных свойств оператора Кравчика.
- В результате возможны замедление сходимости, расширение интервалов или полный срыв итераций.