Задача 8.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $T_1 = 0{,}01$ с; $T_2 = 0{,}03$ с.

Сигнал на входе системы управления $x(t) = 1(t)$. Интегральный показатель качества определяется соотношением

$$J_2 = \int_0^\infty \varepsilon_{\text{св}}^2(t)dt.$$

Определить $k = k_{\text{опт}}$, при котором $J_2 = \min$.

$$W(s) = \frac{K}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)}$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(S)} =$$

$$= \frac{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)+K} =$$

$$= \frac{T_1 T_2 S^3 + (T_1+T_2)S^2 + S}{T_1 T_2 S^3 + (T_1+T_2)S^2 + S + K}$$

$$X(t) = 1(t), \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s)\cdot X(s) =$$

$$= \frac{T_1 T_2 S^2 + (T_1+T_2)S + 1}{T_1 T_2 S^3 + (T_1+T_2)S^2 + S + K}$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{S\to 0} S\cdot E(s) = 0$$

$$E_{cв}(s) = \frac{T_1 T_2 S^2 + (T_1+T_2)S + 1}{T_1 T_2 S^3 + (T_1+T_2)S^2 + S + K}$$

$b_0 = T_1 T_2 \quad b_1 = T_1 + T_2 \quad b_2 = 1$

$a_0 = T_1 T_2 \quad a_1 = T_1 + T_2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = k$

$$J_2^3 = \frac{b_0^2 a_2 a_3 + (b_1^2 - 2b_0 b_2)a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1}{2a_0 a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3)}$$

$$J_2^3 = \frac{KT_1^2 T_2^2 + (T_1^2 + T_2^2)KT_1T_2 + T_1T_2(T_1+T_2)}{2KT_1T_2(T_1+T_2-KT_1T_2)}$$

$$\frac{dJ_2^3}{dK} = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{KT_1^2T_2^2}{2\cancel{KT_1T_2}(T_1+T_2-KT_1T_2)}\right)}{dK} +$$

$$\frac{d\left(\frac{(T_1^2+T_2^2)\cancel{KT_1T_2}}{2\cancel{KT_1T_2}(T_1+T_2-KT_1+T_2)}\right)}{dK^2} +$$

$$d\left(\frac{\cancel{T_1T_2}(T_1+T_2)}{2K\cancel{T_1T_2}(T_1+T_2-KT_1T_2)}\right) = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{T_1T_2}{2(T_1+T_2-KT_1T_2)}\right)}{dK} +$$

$$\frac{d\left(\frac{T_1^2+T_2^2}{(T_1+T_2-KT_1T_2)}\right)}{dK} +$$

$$\frac{d\left(\frac{T_1+T_2}{2k(T_1-T_2-KT_1T_2}\right)}{dK} = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{3}{800-6K}\right)}{dK} + \frac{d\left(\frac{5}{400-3K}\right)}{dK} + \frac{d\left(\frac{200}{400K-3K^2}\right)}{dK} = 0$$

$$\frac{18}{(800-6K)^2} + \frac{15}{(400-3K)^2} + \frac{1200K-80000}{(400K-3K^2)^2} = 0$$

$$\frac{2400x - 16000 + 39K^2}{18K^4 - 4800K^3 + 2\cdot 400^2 K^2} = 0$$

$$39K^2 + 2400K - 160000 = 0$$

$$K_{опт} = \frac{-1200 + 1600\sqrt{3}}{39}$$