

卡尔曼滤波

——基础卡尔曼滤波原理推导

杜轩

2025 年 1 月 8 日

前言

卡尔曼滤波是通过预测和测量得到最优的结果，其算法分为预测和校正两个部分

预测：

$$\text{先验: } \hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

$$\text{先验误差协方差: } P_k^- = AP_k^-A^T + Q$$

校正：

$$\text{卡尔曼增益: } K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R}$$

$$\text{后验估计: } \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(Z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$\text{更新误差协方差: } P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

杜轩

2025 年 1 月 8 日

目录

第一章 基础卡尔曼滤波原理推导	1
1.1 模型	1
1.2 推导	2

第一章 基础卡尔曼滤波原理推导

1.1 模型

对于模型（状态转移方程）

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

其中 u 为输入， z 是输出, A, B, H 已知， w 和 v 是干扰满足如下高斯分布

$$w \sim (0, Q)$$

$$v \sim (0, R)$$

我们用 \hat{x}_k 表示预测值，其中 \hat{x}_k^- 代表先验估计（通过上一步后验估计和状态转移方程计算）， \hat{x}_k 代表后验估计（通过先验估计和测量得到）

在忽略 w 的噪声干扰情况下我们可以得到先验估计（就是通过已知的状态空间方程计算）则满足 $\hat{x}_k^- = Ax_{k-1} + Bu_{k-1}$

因为 x_k 测量不到所以通过 $x_k = H^{-1}z_k$ 得到忽略测量干扰

令 $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + R(H^{-1}z_k - \hat{x}_k^-)$ ，（R 属于 0 到 1），这样 R 接近零则表示预测值更信任预测，反之解决 1 更信任测量。令 $K_k = RH$ 则 $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$ ，其中 k_k 为卡尔曼增益

1.2 推导

我们定义误差（真实值和预测值得误差）为 $e_k = \hat{x}_k - x_k$ ，其中 x_k 代表真实值。我们计算误差为

$$\begin{aligned}
 e_k &= \hat{x}_k - x_k \\
 &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) - x_k \\
 &= (I - K_k H)\hat{x}_k^- + K_k z_k - x_k \\
 &= (I - K_k H)\hat{x}_k^- + K_k(Hx_k + v_k) - x_k \\
 &= (I - K_k H)\hat{x}_k^- - (I - K_k H)x_k + K_k v_k \\
 &= (I - K_k H)(\hat{x}_k^- - x_k) + K_k v_k
 \end{aligned}$$

我们令 $e_k^- = \hat{x}_k^- - x_k$ 为先验误差

计算误差期望

$$\begin{aligned}
 E(e_k) &= E((I - K_k H)(\hat{x}_k^- - x_k)) + K_k E(v_k) \\
 &= E((I - K_k H)(Ax_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})) \\
 &= (I - K_k H)AE(x_{k-1} - x_{k-1}) - E(w_{k-1})
 \end{aligned}$$

我们假设初始误差期望为 0，即可得 $E(e_k) = 0$

我们要使得结果最优即方差最小估计我们计算 e_k 得协方差矩阵 P_k ，其
对角线即为方差。

$$\begin{aligned}
 P_k &= E(ee^T) \\
 &= E(((I - K_k H)(\hat{x}_k^- - x_k) + K_k v_k)((I - K_k H)(\hat{x}_k^- - x_k) + K_k v_k)^T) \\
 &= E((I - K_k H)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_k H)^T + (I - K_k H)e_k^-(v_k)^T K_k^T + K_k v_k(e_k^-)^T(I - K_k H)^T \\
 &\quad + K_k v_k(v_k)^T K_k^T)
 \end{aligned}$$

因为 $e_k^- = \hat{x}_k^- - x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1}$, 因为 v_k 影响 k 时刻得测量, 且 V_k 相互独立, 则 e_k 和 v_k 无关从而 $E(e_k v_k) = E(e_k)E(v_k)$ 则

$$\begin{aligned} P_k &= E((I - K_k H)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_k H)^T + (I - K_k H)e_k^-(v_k)^T K_k^T + K_k v_k(e_k^-)^T(I - K_k H)^T \\ &\quad + K_k v_k(v_k)^T K_k^T) \\ &= E((I - K_k H)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_k H)^T) + E((I - K_k H)e_k^-(v_k)^T K_k^T) + E(K_k v_k(e_k^-)^T(I - K_k H)^T) \\ &\quad + E(K_k v_k(v_k)^T K_k^T) \\ &= E((I - K_k H)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_k H)^T) + K_k R K_k^T \end{aligned}$$

我们令 $P_k^- = e_k^-(e_k^-)^T$ 称为先验协方差矩阵, 则可得

$$\begin{aligned} P &= (I - K_k H)P_k^-(I - K_k H)^T + K_k R K_k^T \\ &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T \end{aligned}$$

我们需要方差最小, 即 $tr(P)$ (代表矩阵得迹) 最小

$$tr(P) = tr(P_k^-) - tr(K_k H P_k^-) - tr(P_k^- H^T K_k^T) + tr(K_k H P_k^- H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$$

矩阵的转置迹不变则

$$tr(P) = tr(P_k^-) - 2tr(K_k H P_k^-) + tr(K_k H P_k^- H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$$

我们进行求偏导通过

$$\frac{dtr(P_k)}{dK_k} = 0$$

求解出 K_k 的值, (由于矩阵求导公式 $\frac{dAB}{dA} = B^T$ 和 $\frac{dABA^T}{dA} = 2AB$)

$$\frac{dtr(P_k)}{dK_k} = 0 - 2tr(H P_k^-)^T + 2tr(K_k H P_k^- H^T) + tr(2K_k R) = 0$$

于是得到如下公式

$$K_k R + K_k H P_k^- H^T = H P_k^-$$

$$K_k = \frac{H P_k^-}{R + H P_k^- H^T}$$

下一个问题是怎么计算先验误差

$$\begin{aligned} P_k^- &= E(e_k^-(e_k^-)^T) \\ &= E((Ax_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})(Ax_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})^T) \\ &= E((Ae_{k-1} - w_{k-1})(Ae_{k-1} - w_{k-1})^T) \\ &= E(Ae_{k-1}e_{k-1}^T A^T - w_{k-1}e_{k-1}^T A^T - Ae_{k-1}w_{k-1}^T + w_{k-1}w_{k-1}^T) \\ &= AP_{k-1}A^T + Q \end{aligned}$$

其中 w_{k-1} 和 e_{k-1} 是独立的（k 时刻的干扰影响 k+1 时刻的误差）则

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

因此 预测：

$$\text{先验: } \hat{x}_k^- = Ax_{k-1} + Bu_{k-1}$$

$$\text{先验误差协方差: } P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

因为

$$\begin{aligned} P &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T \\ &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k (H P_k^- H^T + R) K_k^T \\ &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + P_k^- H^T K_k^T \\ &= P_k^- - K_k H P_k^- \end{aligned}$$

校正:

$$\text{卡尔曼增益: } K_k = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}$$

$$\text{后验估计: } \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (Z_k - H \hat{x}_k^-)$$

$$\text{更新误差协方差: } P_k = (I - K_k H) P_k^-$$