卡尔曼滤波

——基础卡尔曼滤波原理推导

杜轩

2025 年 1 月 8 日

前言

卡尔曼滤波是通过预测和测量得到最优的结果，其算法分为预测和矫正两个部分

预测：

$$先验：\hat{x_k}^- = A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1}$$
$$先验误差协方差：P_k^- = AP_k^- A^T + Q$$

校正：

$$卡尔曼增益：K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R}$$
$$后验估计：\hat{x_k} = \hat{x_k}^- + K_k(Z_k - H\hat{x_k}^-)$$
$$更新误差协方差：P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

杜轩

2025 年 1 月 8 日

目录

第一章　基础卡尔曼滤波原理推导

1.1　模型

对于模型（状态转移方程）

$$
\begin{aligned}
x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\
z_k &= Hx_k + v_k
\end{aligned}
$$

其中 u 为输入，z 是输出,A,B,H 已知，w 和 v 是干扰满足如下高斯分布

$$
\begin{aligned}
w &\sim (0, Q) \\
v &\sim (0, R)
\end{aligned}
$$

我们用 $\hat{x_k}$ 表示预测值，其中 $\hat{x_k}^-$ 代表先验估计 (通过上一步后验估计和状态转移方程计算)，$\hat{x_k}$ 代表后验估计（通过先验估计和测量得到）
在忽略 w 的噪声干扰情况下我们可以得到先验估计（就是通过已知的状态空间方程计算）则满足 $\hat{x_k}^- = A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1}$
因为 x_k 测量不到所以通过 $x_k = H^{-1}z_k$ 得到忽略测量干扰

令 $\hat{x_k} = \hat{x_k}^- + R(H^{-1}z_k - \hat{x_k}^-)$，（R 属于 0 到 1）, 这样 R 接近零则表示预测值更信任预测，反之解决 1 更信任测量。令 $K_k = RH$ 则 $\hat{x_k} = \hat{x_k}^- + K_k(z_k - H\hat{x_k}^-)$, 其中 k_k 为卡尔曼增益

1.2　推导

我们定义误差（真实值和预测值得误差）为 $e_k = \hat{x_k} - x_k$，其中 x_k 代表真实值。我们计算误差为

$$
\begin{aligned}
e_k &= \hat{x_k} - x_k \\
&= \hat{x_k}^- + K_k(z_k - H\hat{x_k}^-) - x_k \\
&= (I - K_kH)\hat{x_k}^- + K_kz_k - x_k \\
&= (I - K_kH)\hat{x_k}^- + K_k(Hx_k + v_k) - x_k \\
&= (I - K_kH)\hat{x_k}^- - (I - K_kH)x_k + K_kv_k \\
&= (I - K_kH)(\hat{x_k}^- - x_k) + K_kv_k
\end{aligned}
$$

我们令 $e_k^- = \hat{x_k}^- - x_k$ 为先验误差

计算误差期望

$$
\begin{aligned}
E(e_k) &= E((I - K_kH)(\hat{x_k}^- - x_k)) + K_kE(v_k) \\
&= E((I - K_kH)(A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})) \\
&= (I - K_kH)AE(\hat{x_{k-1}} - x_{k-1}) - E(w_{k-1})
\end{aligned}
$$

我们假设初始误差期望为 0，即可得 $E(e_k) = 0$

我们要使得结果最优即方差最小估计我们计算 e_k 得协方差矩阵 P_k，其对角线即为方差。

$$
\begin{aligned}
P_k &= E(ee^T) \\
&= E(((I - K_kH)(\hat{x_k}^- - x_k) + K_kv_k)((I - K_kH)(\hat{x_k}^- - x_k) + K_kv_k)^T) \\
&= E((I - K_kH)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_kH)^T + (I - K_kH)e_k^-(v_k)^TK_k^T + K_kv_k(e_k^-)^T(I - K_kH)^T \\
&+ K_kv_k(v_k)^TK_k^T)
\end{aligned}
$$

因为 $e_k^- = \hat{x_k}^- - x_k = A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1}$, 因为 v_k 影响 k 时刻得测量，且 V_k 相互独立，则 e_k 和 v_k 无关从而 $E(e_k v_k) = E(e_k)E(v_k)$ 则

$$
\begin{aligned}
P_k = & E((I - K_kH)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_kH)^T + (I - K_kH)e_k^-(v_k)^T K_k^T + K_k v_k(e_k^-)^T(I - K_kH)^T \\
& + K_k v_k(v_k)^T K_k^T) \\
& = E((I - K_kH)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_kH)^T) + E((I - K_kH)e_k^-(v_k)^T K_k^T) + E(K_k v_k(e_k^-)^T(I - K_kH)^T \\
& + E(K_k v_k(v_k)^T K_k^T) \\
& = E((I - K_kH)e_k^-(e_k^-)^T(I - K_kH)^T) + K_k R K_k^T
\end{aligned}
$$

我们令 $P_k^- = e_k^-(e_k^-)^T$ 称为先验协方差矩阵, 则可得

$$
\begin{aligned}
P = & (I - K_kH)P_k^-(I - K_kH)^T + K_k R K_k^T \\
& = P_k^- - K_kHP_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_kHP_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T
\end{aligned}
$$

我们需要方差最小，即 $tr(P)$（代表矩阵得迹）最小

$$tr(P) = tr(P_k^-) - tr(K_kHP_k^-) - tr(P_k^- H^T K_k^T) + tr(K_kHP_k^- H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$$

矩阵的转置迹不变则

$$tr(P) = tr(P_k^-) - 2tr(K_kHP_k^-) + tr(K_kHP_k^- H^T K_k^T) + tr(K_k R K_k^T)$$

我们进行求偏导通过

$$\frac{dtr(P_k)}{dK_k} = 0$$

求解出 K_k 的值,（由于矩阵求导公式 $\frac{dAB}{dA} = B^T$ 和 $\frac{dABA^T}{dA} = 2AB$）

$$\frac{dtr(P_k)}{dK_k} = 0 - 2tr(HP_k^-)^T + 2tr(K_kHP_k^- H^T) + tr(2K_k R) = 0$$

于是得到如下公式

$$K_k R + K_k H P_k^- H^T = H P_k^-$$
$$K_k = \frac{H P_k^-}{R + H P_k^- H^T}$$

下一个问题是怎么计算先验误差

$$\begin{aligned}
P_k^- &= E(e_K^-(e_k^-)^T) \\
&= E((A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})(A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - w_{k-1})^T) \\
&= E((Ae_{k-1} - w_{k-1})(Ae_{k-1} - w_{k-1})^T) \\
&= E(Ae_{k-1}e_{k-1}^T A^T - w_{k-1}e_{k-1}^T A^T - Ae_{k-1}w_{k-1}^T + w_{k-1}w_{k-1}^T) \\
&= AP_{k-1}A^T + Q
\end{aligned}$$

其中 w_{k-1} 和 e_{k-1} 是独立的（k 时刻的干扰影响 k+1 时刻的误差）则

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

因此 **预测：**

$$\text{先验：} \hat{x_k}^- = A\hat{x_{k-1}} + Bu_{k-1}$$
$$\text{先验误差协方差：} P_k^- = AP_k^- A^T + Q$$

因为

$$\begin{aligned}
P &= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k(H P_k^- H^T + R)K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + P_k^- H^T K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H P_k^-
\end{aligned}$$

校正：

$$
\begin{aligned}
\text{卡尔曼增益：} K_k &= \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R} \\
\text{后验估计：} \hat{x_k} &= \hat{x_k}^- + K_k(Z_k - H\hat{x_k}^-) \\
\text{更新误差协方差：} P_k &= (I - K_k H) P_k^-
\end{aligned}
$$