

保密★启用前

2020-2021 学年第一学期期末考试

## 《高等数学 A I 》

### 考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**教学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**教学号**，并涂写考生**教学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：1~6 小题，每小题 3 分，共 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1.  $x=0$  是函数  $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$  的 ( ) .

(A) 无穷间断点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 连续点

2. 函数  $f(x)$  在  $x=a$  处连续，是  $f(x)$  在  $x=a$  处左、右导数都存在的 ( ) 条件.

(A) 充分必要 (B) 必要非充分 (C) 充分非必要 (D) 非充分非必要

3. 当  $x \rightarrow 0$  时，函数  $f(x)=2^x+3^x-2$  是  $x$  的 ( ) 无穷小.

(A) 等价 (B) 高阶 (C) 低阶 (D) 同阶但非等价

4. 设  $f(x)=3x^3+x^2|x|$ ，则使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶导数为 ( ) .

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

5. 设  $\int f(x)dx=x^2+C$ ，则  $\int xf(1-x^2)dx= ( )$  .

(A)  $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$  (B)  $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

(C)  $-2(1-x^2)^2+C$  (D)  $2(1-x^2)^2+C$

6. 设  $f(x)=x\sin x+\cos x$ ，则  $f(0)$  和  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  分别是  $f(x)$  的 ( ) .

(A) 极小值和极大值 (B) 极大值和极小值

(C) 都是极大值 (D) 都是极小值

二、填空题：7~12 小题，每小题 3 分，共 18 分。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

7. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n} =$  \_\_\_\_\_.

8. 设  $y=(1+\sin x)^x$ ，则  $dy|_{x=\pi} =$  \_\_\_\_\_.

9. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0,1)$  处的法线方程为\_\_\_\_\_.

10. 函数  $y = \ln(1+x)$  的带有 Peano 型余项的  $n$  阶 Maclaurin 公式为\_\_\_\_\_.

11. 设  $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

12. 设  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$ ,  $f(\pi) = 2$ , 则  $f(0) =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题: 13~19 小题, 共 64 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. (本题满分 9 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ .

14. (本题满分 9 分) 设  $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$ , 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$ .

15. (本题满分 9 分) 求  $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$ .

16. (本题满分 9 分) 求  $\int_0^1 x \arcsin x dx$ .

17. (本题满分 10 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  其中  $\varphi(x)$  具有二

阶连续导数, 且  $\varphi(0)=1$ . (1) 求  $a$ , 使  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续; (2) 求  $f'(0)$ .

18. (本题满分 10 分) 求函数  $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$  的最大值和最小值.

19. (本题满分 8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,2]$  上连续, 在  $(0,2)$  内可导, 且  $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$ , 证明: 存在一点  $\xi \in (0,2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .